R. Conti

TULLIO LEVI-CIVITA E UGO AMALDI

COMPENDIO

DI

MECCANICA RAZIONALE

SECONDA EDIZIONE RIVEDUTA

PARTE SECONDA

DINAMICA

CENNI DI MECCANICA DEI SISTEMI CONTINUI

NICOLA ZANICHELLI EDITORE

1938-XVI

N° 1490

Bologna - Società Tipografica già Compositori - X-1938-XVI

INDICE

CAP. I. – **Dinamica del punto su traiettoria prestabilita.**

CAP. II. – **Dinamica del punto libero e su superficie prestabilita.**

Cap. III. – Nozioni elementari di meccanica celeste.

Cap. IV. – Caratteristiche dinamiche e cinetiche dei sistemi.

Cap. V. – Teoremi generali sul moto dei sistemi. Equazioni del Lagrange.

Cap. VI. – Dinamica dei solidi.

Cap. VII. – Moto impulsivo.

CAP. VIII. – Nozioni sui campi vettoriali.

CAP. IX. – Generalità sulla cinematica dei sistemi continui.

CAP. X. – Generalità sulla meccanica dei sistemi continui.

CAP. XI. – Idrostatica.

CAP. XII. – **Idrodinamica.**

Capitolo I.

DINAMICA DEL PUNTO SU TRAIETTORIA PRESTABILITA

§ 1. – Riferimento dei fenomeni meccanici.

1. Nei Cap. VII-XIV della I Parte [1], dopo avere stabilito i principi della Meccanica, ne abbiamo sistematicamente sviluppato le più notevoli conseguenze in ordine ai fenomeni di quiete, ossia, in quanto si abbia riguardo alle forze in gioco, di equilibrio (*Statica*). Qui, partendo da quegli stessi principi, dobbiamo affrontare oramai la Meccanica dei fenomeni di moto propriamente detti o *Dinamica*; e, come già avemmo occasione di preannunciare (VII_1; n. 3) cominceremo dalla Dinamica di un unico punto materiale, la quale non soltanto si impone da se stessa in un primo studio per la sua schematica semplicità, ma costituisce la base della Dinamica dei sistemi materiali comunque complessi, in quanto ciascuno di questi si può considerare, nella indagine dei fenomeni meccanici, come costituito da un aggregato di punti (od elementi) materiali.

La dinamica del punto si fonda tutta sulla equazione

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \tag{1}$$

che, per quel che riguarda un unico punto materiale, fornisce la sintesi completa di tutti i postulati della Meccanica (VII_1). In essa, come ben sappiamo, il coefficiente (scalare, essenzialmente positivo) m denota la *massa* del punto, $\boldsymbol{F}$ compendia tutte le azioni esercitate sul punto dalle circostanze esterne o, per essere più precisi, è la risultante di tutte le *forze* agenti sul punto (siano esse direttamente applicate o vincolari) e, infine, $\boldsymbol{a}$ designa l'*accelerazione* del punto. E, tenuto presente il carattere relativo dell'accelerazione, è di fondamentale importanza il ricordare che la (1) si è assunta come rigorosamente valida sotto la esplicita ipotesi che codesta accelerazione $\boldsymbol{a}$ sia valutata rispetto ad un *rife-*

[1] D'or innanzi, nelle citazioni, i Capitoli della Parte I verranno designati coi rispettivi numeri ordinali, contraddistinti con un indice 1 alla base, cioè con I_1, II_1, III_1, . . .

rimento (terna di assi) *galileiano*, cioè animato di un moto traslatorio uniforme rispetto alle stelle (VII_1, § 8).

Nel sèguito, ogni qual volta si applicherà la (1), essa si intenderà senz'altro riferita ad una terna galileiana, salvo quando si avverta esplicitamente il contrario. Quest'ultima riserva dipende dal fatto che, come sappiamo (VII_1; l. c.), la (1) resta valida *in via approssimata* anche rispetto ad assi solidali colla Terra; ed effettivamente, in varie questioni concrete, saremo condotti ad applicarla in questo senso.

§ 2. – Generalità intorno al moto di un punto su traiettoria prestabilita.

2. Sia P un punto materiale di massa m che si muova (o, come caso limite, si trovi in quiete) sotto la sollecitazione di una forza totale $\boldsymbol{F}$, e supponiamo che, come in taluni casi è possibile, si sappia assegnare a priori (p. es. in base alle circostanze note circa il comportamento della sollecitazione) la traiettoria c del punto. Allora per caratterizzare in termini finiti il moto di P non rimane più che da determinare la legge temporale. Più precisamente, se s è la lunghezza dell'arco di c fra una arbitraria origine e P, contata positivamente in un prefissato verso (*ascissa curvilinea* di P), tutto si riduce a determinare l'*equazione oraria* $s = s(t)$ di P sulla traiettoria prestabilita c.

A tale scopo partiamo dall'equazione fondamentale

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \tag{1}$$

e proiettiamola, in ciascun punto di c, sulla rispettiva tangente, orientata nel verso delle s crescenti. Ricordando che l'accelerazione tangenziale di P è $\ddot{s}$ (II_1, n. 26) otteniamo così l'equazione scalare (prima equazione intrinseca del moto di P; cfr. VII_1, n. 31)

$$m\ddot{s} = F_t . \tag{2}$$

Supponiamo che la componente tangenziale F_t della *forza totale* $\boldsymbol{F}$ sia conosciuta. In accordo con quanto si è stabilito al n. 22 del Cap. VII_1, ciò vuol dire che la F_t deve essere nota in funzione della posizione e velocità di P, nonchè, eventualmente, dell'istante t, cui si riferisce la sollecitazione. Poichè, sulla traiettoria prestabilita c, la posizione di P è univocamente determinata dalla sua ascissa curvilinea s e la velocità dallo scalare $\dot{s}$ (in quanto la direzione è, punto per punto, quella della tangente), concludiamo, che nella ipotesi dianzi posta, la F_t sarà una funzione nota $f(s, \dot{s} \mid t)$ dei tre argomenti s, $\dot{s}$, t, talchè la (2) assumerà la forma

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s} \mid t) . \tag{2'}$$

Così il problema del moto di P sulla c vien ridotto alla determinazione di tutte le funzioni $s(t)$ soddisfacenti alla (2'), cioè alla integrazione di quest'unica equazione differenziale del 2° ordine.

In generale essa non si sa integrare in termini finiti; e soltanto in casi molto particolari, di cui daremo ai §§ 4 e 5 qualche notevole esempio, si riesce a integrarla con quadrature.

Tuttavia si dimostra in Calcolo che, sotto condizioni qualitative assai late per la funzione di tre argomenti $f(s, \dot{s} \mid t)$, la (2') ammette un integrale generale dipendente da due costanti arbitrarie. Poichè, in ordine alla nostra interpretazione meccanica, codeste condizioni sono ampiamente soddisfatte dalle $F_t = f(s, \dot{s} \mid t)$ cui si è condotti nei problemi concreti, possiamo dire che sulla traiettoria c, sotto la supposta sollecitazione, sono possibili pel punto P ∞^2 moti diversi, ed uno di questi moti risulterà individuato tutte le volte che si posseggano dati sufficienti per determinare le due costanti di integrazione.

Così, p. es., si dimostra più precisamente che, se la $f(s, \dot{s} \mid t)$ è, in un certo campo, funzione finita, continua e derivabile dei suoi tre argomenti, esiste sempre fra gli integrali della (2') una funzione $s(t)$, univocamente determinata dalla condizione che essa e la sua derivata assumano, per un dato valore t_0 della variabile indipendente (appartenente al campo), due valori s_0, $\dot{s}_0$ (pure del campo) prefissati ad arbitrio. Qui perciò potremo dire che fra i moti possibili per P sulla c, nelle supposte condizioni di sollecitazione, ve n'è sempre uno ed uno solo, in cui il mobile passa, in un dato istante, per una posizione arbitrariamente scelta, con una velocità pur essa prefissata a piacere.

Analogamente, poichè si dimostra in Calcolo, che, sotto condizioni che qui non importa specificare, la (2') ammette (almeno entro intervalli di tempo o, se si vuole, entro tratti di curva debitamente circoscritti) uno ed un solo integrale che per due dati valori di t assume due valori scelti ad arbitrio, potremo affermare che fra i moti caratterizzati su c dalla (2') esiste per P un moto ed uno solo, in cui P passa in due dati istanti per due posizioni prefissate; e così via.

3. Fra gli ∞^2 moti, definiti dalla (2'), potrà in particolare essere compreso lo stato di equilibrio in qualche posizione s_0.

Perchè ciò accada è necessario e sufficiente che la (2′) sia soddisfatta identicamente (cioè per qualsiasi valore della variabile indipendente t), quando vi si sostituisca, in luogo della funzione $s(t)$, la costante s_0; questo implica $f(s_0, 0 \mid t) = 0$ (qualunque sia t). Ciò potevasi prevedere, ricordando che condizione generale d'equilibrio è l'annullarsi della forza totale e che $f(s_0, 0 \mid t)$ non è altro che la componente tangenziale F_t di tale forza, quale compete ad un supposto stato di equilibrio del mobile nella posizione $s = s_0$.

§ 3. – Caso di un punto vincolato con un solo grado di libertà. Reazione centripeta e forza centrifuga. Applicazioni.

4. In molti casi il punto P si muove sopra una data linea c, in quanto vi è costretto da speciali dispositivi (appoggi, tubi, guide, fili, collegamenti con altri corpi) cioè da *vincoli*, la cui influenza sul moto del punto si riassume, come sappiamo (VII$_1$, n. 10), in una forza, a priori incognita, la cosiddetta *reazione vincolare* $\boldsymbol{R}$.

In questi casi per determinare il moto del punto non basta generalmente la conoscenza della componente tangenziale F_t della forza attiva $\boldsymbol{F}$ (cioè della forza che sola solleciterebbe il mobile in assenza di vincoli), giacchè l'equazione fondamentale (1) va, nelle indicate ipotesi, sostituita colla

$$(1') \qquad m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}\,;$$

onde, proiettando sulla tangente, si ottiene, in luogo della (2), la relazione

$$(2'') \qquad m\ddot{s} = F_t + R_t\,,$$

dove anche la componente tangenziale R_t di $\boldsymbol{R}$ è, per lo più, incognita.

Tuttavia vi sono dei casi in cui la R_t è preventivamente assegnabile. Noi ci riserbiamo di precisare quanto prima (§ 8) il comportamento della reazione $\boldsymbol{R}$ durante il moto, analogamente a quanto si è fatto al Cap. IX$_1$ nell'ipotesi dell'equilibrio. Ma già fin d'ora, se teniamo conto dei risultati là stabiliti (e delle considerazioni generali del n. 3 del Cap. XIV$_1$), siamo condotti per ovvia generalizzazione a ritenere che, se si tratta di vincoli realizzati in modo che, in condizioni statiche, sia trascurabile l'azione dell'attrito (cioè idealmente privi di attrito), la reazione, anche in condizioni di moto, sia in ogni posizione del mobile normale alla traiettoria. Ciò implica $R_t = 0$, talchè il moto risulta definito ancora dalla (2). In parole possiamo dire che: *Un punto vincolato a restare su di una curva priva* (o sensibilmente priva) *di attrito si muove su di essa come se fosse esclusivamente soggetto all'azione della forza attiva* (tangenziale).

5. In ogni caso (cioè siavi o no attrito) l'equazione fondamentale

$$(1') \qquad m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}$$

conduce a notevoli considerazioni. Proiettando per ogni punto della traiettoria questa equazione sulla rispettiva normale principale n (orientata verso il centro di curvatura) si ottiene, ove si isoli R_n e si ricordi l'espressione $a_n = v^2/r$ della accelerazione normale (II_1, n. 26),

$$(3) \qquad R_n = m\frac{v^2}{r} - F_n ,$$

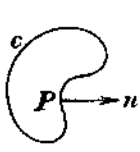
dove, beninteso, v rappresenta il valore assoluto della velocità (o velocità intensiva) ed r il raggio di curvatura della traiettoria.

La componente R_n dell'azione complessiva $\boldsymbol{R}$ esercitata dai vincoli, cioè da quei dispositivi (tubi, guide, ecc.) che materializzano la curva c, si chiama *reazione centripeta* della traiettoria.

Mentre nel caso statico ($v = 0$) essa deve essere esattamente eguale ed opposta all'analoga componente della forza attiva, quando la velocità è diversa da zero, interviene, a norma della (3), il contributo cinetico mv^2/r, che, come si vede, è sempre positivo [rivolto verso la concavità, o, come si suol dire, verso l'interno [1]], direttamente proporzionale al quadrato della velocità, e inversamente proporzionale al raggio di curvatura di c, nella posizione di cui si tratta.

---

[1] A dir vero la locuzione è impropria, perchè può dar luogo ad ambiguità, nel caso di una curva chiusa c. Ciò apparisce per esempio dall'unita figura, in cui n è diretta verso la concavità, e non verso l'interno, rispetto all'intera curva c. Non v'è pericolo di ambiguità, quando ci si limita, come avviene nel testo, a considerare l'andamento locale nell'interno di una posizione generica P. Allora è comodo ed espressivo dire interno od esterno, anzichè rivolto verso la concavità o rivolto dalla banda opposta.



6. In virtù del principio di reazione, alla forza $\boldsymbol{R}$, esercitata dalla traiettoria (cioè dal corpo o dai corpi che la materializzano) sul mobile, ne fa riscontro una eguale ed opposta $-\boldsymbol{R}$, che la traiettoria subisce da parte del mobile (nella posizione che esso occupa in un generico istante).

La componente secondo la normale *esterna* di questa azione $-\boldsymbol{R}$ risentita dai vincoli, che è poi ancora misurata da R_n, si chiama *forza centrifuga*. (Va notato che la forza centrifuga, si intende qui in un senso affatto diverso da quello con cui ricorre nella teoria dell'equilibrio relativo: XV_1, n. 6).

È la forza centrifuga, testè accennata, che si rende manifesta sulla fionda, quando la si fa rotare per scagliare un sasso; è dessa ancora che, quando una pallina scorre rapidamente in una scanalatura incurvata (per es. circolare), tende a corroderne l'orlo esterno, ecc.

7. In relazione ai dispositivi che realizzano i vincoli, ha talora importanza pratica anche maggiore della R_n una qualche altra componente, normale alla traiettoria, della forza $-\boldsymbol{R}$. Sia ν una qualsiasi direzione (orientata) normale alla curva e sia θ l'angolo che essa forma colla normale principale n. Poichè il vettore accelerazione è somma di un componente diretto secondo la tangente e di un componente avente la direzione e il verso della n, la sua componente a_ν secondo la direzione orientata ν si riduce (Cap. I_1, n. 13) ad

$$a_\nu = a_n \cos\theta = m\,\frac{v^2}{r}\cos\theta\,.$$

Perciò, proiettando la (1′) sulla ν e isolando R_ν si ottiene

$$R_\nu = m\,\frac{v^2}{r}\cos\theta - F_\nu\,. \tag{3′}$$

Ove, come già per la forza centrifuga, si convenga di invertire, nella valutazione della componente della forza $-\boldsymbol{R}$, il senso della ν, abbiamo nella (3′) l'espressione della componente di codesta forza nella direzione ν. Essa, naturalmente, comprende come caso particolare, per $\theta = 0$, la (3).

8. Interessanti applicazioni della formula (3′) si hanno, considerando il caso in cui la forza attiva si riduce al peso. Ove si indichi con α l'angolo formato da ν (che, giova ripeterlo, per $\theta = 0$ si riduce alla normale principale nel senso della concavità) colla verticale discendente, si ha manifestamente $F_\nu = mg \cos \alpha$, e la (3′) assume l'aspetto

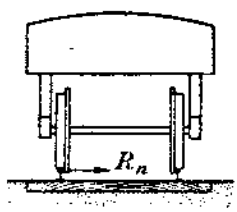
$$(4) \qquad R_\nu = m\left(\frac{v^2}{r}\cos\theta - g\cos\alpha\right).$$

Importa rilevare che questa espressione di R_ν seguita a sussistere anche quando si abbiano, oltre al peso, altre forze attive *puramente tangenziali*, in quanto esse non portano alcun contributo alla F_ν.

Se la traiettoria è orizzontale, lo è anche la direzione n, talchè risulta $\alpha = \pi/2$. La (4), fattovi $\theta = 0$, mostra che la R_n è allora essenzialmente positiva (purchè si tratti di effettivo moto curvilineo, purchè cioè sieno diverse da zero la velocità v e la curvatura $1/r$). Ne viene che i vincoli sono sottoposti ad una sollecitazione centrifuga (secondo la normale *esterna*) che diviene rilevante, quando lo sono massa e velocità.

9. Sopraelevamento della rotaia esterna. — Le condizioni or ora dette si trovano attuate, per esempio, nel caso di un carro ferroviario.

Fissiamo più precisamente la nostra attenzione sulle ruote, tenendo conto della circostanza ben nota (cfr. la figura) che esse sono munite, verso l'interno del binario, di un orlo sporgente, destinato ad impedire che il veicolo esca dalle rotaie.



Quando la linea è in curva il vincolo che sottostà alla forza centrifuga è *la rotaia esterna*, la quale si trova premuta verso l'esterno (secondo la normale al binario contenuta nel piano stradale) dall'orlo anzidetto (mentre la rotaia interna non può subire dall'orlo delle corrispondenti ruote alcuna analoga sollecitazione). Di qua risulta il grave inconveniente che, in una curva orizzontale, la rotaia esterna sottostà a sforzi rilevanti tendenti a deteriorarla. A questo inconveniente si è da tempo ovviato col sopraelevamento della rotaia esterna nei tratti in curva, determinato in modo da rendere nulla, o quanto meno da attenuare, la sollecitazione centrifuga.

Per rendersene conto basta pensare che, in generale, l'intensità di tale sollecitazione è data dal valore assoluto del secondo membro della formula (4). Apparisce da essa che, se la traiettoria non è contenuta in un piano orizzontale, interviene il termine $-g\cos\alpha$, del quale si può profittare per diminuire, o addirittura per eliminare, l'influenza del primo addendo $v^2\cos\theta/r$.

Nel caso presente la direzione ν che occorre prendere in considerazione è la normale al binario situata nel piano stradale, il quale piano è da ritenersi non più orizzontale, ma inclinato, atteso il sopraelevamento della rotaia esterna.

D'altra parte ciascuna delle due rotaie seguita ad essere collocata in piano orizzontale. Orizzontale è pertanto la normale principale n da prendere in considerazione; e l'angolo θ fra n e ν si identifica coll'inclinazione del piano stradale sull'orizzonte.

L'angolo α fra ν e la verticale discendente è perciò $90° - \theta$, e la (4) assume l'aspetto

$$R_\nu = m\left(\frac{v^2}{r}\cos\theta - g\sin\theta\right).$$

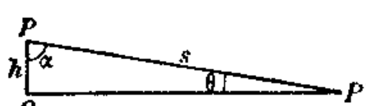
Apparisce di qua che, dato r, cioè il raggio della curva ferroviaria in questione, e la velocità media v (rispetto ai vari tipi di treni, che percorrono la linea), ove si assegni l'inclinazione θ a norma della formula

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{rg},$$

sarà $R_\nu = 0$ per la velocità media: per velocità superiori, la sollecitazione R_ν risulterà positiva, cioè diretta verso l'esterno; per velocità inferiori alla media, avremo invece una sollecitazione diretta verso l'interno. Nel primo caso sarà ancora la rotaia esterna su cui si scarica la sollecitazione, nel secondo la rotaia interna. Comunque, finchè si tratterà di velocità non molto diverse dalla media, entrambe queste sollecitazioni rimarranno contenute entro limiti tollerabili.

10. La misura del sopraelevamento si ricava dalla (5), in base alle osservazioni seguenti.

Sia P un punto della rotaia esterna sul piano stradale. Conduciamo per P la normale ν alla rotaia nel piano stradale, e sia P' il punto in cui questa normale interseca la rotaia interna. Il segmento $PP' = s$ misura la larghezza (interna) del binario e si chiama lo *scartamento* della linea [1].



[1] Nelle linee principali di quasi tutti i paesi (in Europa fanno eccezione soltanto la Russia e la Spagna) lo scartamento ha il valore costante di m 1,445.

Dicasi Q la proiezione di P sul piano orizzontale passante per P', e si consideri il triangolo PQP'. Il segmentino QP misura il cercato sopraelevamento h, mentre l'angolo in P' (fra ν e la orizzontale) è precisamente l'inclinazione θ.

Ne consegue $\sin\theta = h/s$, donde

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h}{\sqrt{s^2 - h^2}},$$

e quindi, portando nella (5),

$$\frac{h}{\sqrt{s^2 - h^2}} = \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{r},$$

donde si ricava h, risolvendo una equazione di secondo grado. In pratica si è già sicuri a priori che l'inclinazione θ deve essere piccola. Ritenendola tale da poter confondere il seno con la tangente, si può porre addirittura nella (5)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h}{s},$$

con che risulta più semplicemente

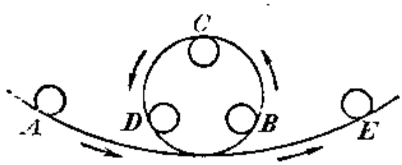
$$h = \frac{v^2}{g}\frac{s}{r}. \tag{5'}$$

Se si tratta, per es., di una curva di 1000 m di raggio, e si calcola sopra una velocità media di 15 metri al secondo (cioè 54 km all'ora) risulta un sopraelevamento

$$h = \frac{225}{9{,}8}\frac{1{,}445}{1000}\,\mathrm{m} = 33\ \mathrm{mm}.$$

11. « Anello della morte ». — Mediante la (4) possiamo ancora darci ragione della riuscita di quell'esercizio acrobatico, conosciuto sotto il nome di « anello della morte » (looping the loop).

Il ciclista P (o automobilista che sia) percorre allora una traiettoria verticale $ABCDE$ (o meglio sensibilmente verticale, perchè la seconda metà CDE è un poco spostata all'indietro), del tipo indicato in figura. Egli rimane sempre dalla parte della concavità, sicchè, in particolare, nel punto più alto C del cappio si trova col capo all'ingiù.



Fra le forze attive figura (qui, come del resto nell'esempio dei carri ferroviari) la forza di propulsione (esercitata, nel caso che ci occupa, sui pedali, o col motore); ma essa è essenzialmente tangenziale; seguita quindi a sussistere la (4).

Trattandosi di semplice appoggio sull'impiantito che realizza la traiettoria, la reazione deve essere diretta dall'appoggio verso P, cioè verso la concavità; il movimento è quindi realizzabile, nelle supposte condizioni pratiche, soltanto a patto che sia $R_n > 0$. D'altra parte questa condizione è anche sufficiente, perchè l'impiantito è atto a reagire normalmente, verso il corpo appoggiato, con qualsiasi intensità (che non arrivi, beninteso, a compromettere la stabilità dell'impiantito stesso).

Tutto si riduce dunque a regolare la curvatura e la velocità del mobile in modo che sia dovunque

$$\frac{v^2}{r} > g \cos \alpha \,,$$

condizione verificata a fortiori ove si renda

$$v > \sqrt{gr} \,.$$

Supposto che, nella parte più pericolosa del cappio, il raggio di curvatura sia all'incirca 3 m, basta, per il successo dell'esercizio, una velocità assai moderata, di poco superiore a $\sqrt{3g}$, p. es. di 6 m al secondo. Essa corrisponde ad una velocità oraria di km 21,6, che, per breve tratto, può essere agevolmente mantenuta da qualsiasi ciclista. L'esercizio richiede piuttosto fermezza di polso e sangue freddo.

§ 4. – Forze posizionali. Carattere qualitativo che contraddistingue le forze elastiche o forze di richiamo. Espressione tipica.

12. Come già avvertimmo al n. 2, studieremo in questo § e nel successivo due tipi di forze, per le quali l'equazione (2′) del moto di un punto su traiettoria prestabilita si integra per quadrature.

Consideriamo anzitutto le *forze posizionali* (VII₁, n. 22). Per una forza siffatta sarà $F_t = f(s)$, onde l'equazione (2′) assumerà la forma

$$m\ddot{s} = f(s) \,. \tag{6}$$

Per mostrare come la (6) si riduca con una quadratura ad una equazione del 1° ordine (dipendente da una costante arbitraria) ricordiamo che la forza viva T del mobile è qui definita da $m\dot{s}^2/2$, talchè risulta

$$\frac{dT}{dt} = m\dot{s}\,\ddot{s}.$$

Osserviamo d'altra parte che, essendo f funzione della sola s, esiste un'altra funzione U della sola s (anzi ne esistono infinite, potendosi aggiungere una costante arbitraria) tale che

$$\frac{dU}{ds} = f, \tag{7}$$

con che U rappresenta una generica determinazione dell'integrale indefinito $\int f ds$.

Ciò posto, è chiaro che la (6), ove se ne moltiplichino ambo i membri per $\dot{s}$, può essere scritta

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{ds}\,\dot{s}.$$

Il secondo membro, in quanto si consideri U come funzione di t pel tramite dell'arco s, non è altro che la derivata di U rispetto a t, onde integrando (rispetto a questa variabile) e designando con E la costante di integrazione, si ricava

$$T - U = E. \tag{8}$$

Questa relazione in termini finiti, fra la forza viva T del mobile e la sua posizione sulla curva (caratterizzata dalla funzione $U(s)$), si chiama *integrale delle forze vive*. Esso fornisce, in ultima analisi, una relazione fra s ed $\dot{s}$ (e la costante arbitraria), cioè una equazione differenziale del 1° ordine, e basterà integrarla per giungere simultaneamente alla integrazione della (6). Ma prima di proceder oltre in questo senso, gioverà indugiarci un momento su codesto integrale (8) delle forze vive.

13. Va notato che, già nel Cap. VIII$_1$, n. 11, esaminando le prime conseguenze dei postulati della Meccanica, si è riconosciuta valida la (8) per ogni moto in cui la forza *totale* sia conservativa, cioè tale che il lavoro elementare $F \times dP$ sia il differenziale esatto di una funzione $U(P)$ del posto.

Nel caso attuale, in cui si suppone prestabilita la traiettoria, siamo arrivati alla (8) senza bisogno di introdurre preventivamente l'ipotesi che la forza totale sia conservativa: basta che la sua componente tangenziale sia posizionale. Infatti, *limitatamente alla mobilità di P sopra la curva c*, si ha (considerando il prodotto scalare $F \times dP$ come prodotto aritmetico delle componenti tangenziali)

$$F \times dP = f ds .$$

Il secondo membro, in quanto è una espressione differenziale in una sola variabile, si può manifestamente considerare come un differenziale esatto, e la forza risulta conservativa, il relativo potenziale essendo $U(s)$ in base alla (7).

In ogni caso la differenza fra i valori di U, corrispondenti a due punti s_0 ed s_1, vale, a norma della (6),

$$\int_{s_0}^{s_1} f ds = \int_{s_0}^{s_1} F \times dP ,$$

e misura quindi il lavoro, che viene effettuato dalla forza F nel passaggio del mobile dalla posizione s_0 alla posizione s_1. È dunque giustificato (cfr. VIII_1, n. 11) l'interpretare $-U$ come una forma di energia, conferita al mobile dalla posizione che esso occupa (sulla curva c); la (8) sta così ad esprimere il principio di conservazione dell'energia (sotto le due sole forme cinetica e potenziale) di fronte al movimento del punto P.

È appena necessario avvertire che, quando la forza F deriva da un potenziale, cioè quando si ha incondizionatamente

$$F \times dP = dU ,$$

questa U, considerata in particolare come funzione dei punti della curva c, o, se si vuole, dell'arco s, soddisfa alla (7) e quindi coincide colla precedente, a meno di una (inessenziale) costante additiva.

14. È interessante osservare che, se un punto materiale soggetto ad una forza attiva derivante dal potenziale U, si trova costretto da legami privi di attrito a descrivere una traiettoria prestabilita, la (8) è verificata, perchè la componente tangenziale della forza totale si riduce a dU/ds. D'altra parte la (8) stessa vale anche per il moto in assenza di legami sotto l'azione della forza conservativa.

Si ha dunque, nei due casi:

$$T_1 - T_0 = U_1 - U_0 ,$$

essendo T_0 ed U_0, T_1 ed U_1 i valori di T e di U in due istanti generici t_0 e t_1.

Una conseguenza espressiva di questa relazione si ha considerando due punti materiali di eguale massa, che siano fatti partire colla stessa velocità da una medesima posizione, oppure da due posizioni appartenenti alla stessa superficie $U = \text{cost.}$ (con che, in partenza, T_0 ed U_0 hanno, nei due casi, lo stesso valore). Se questi due punti si muovono sotto l'azione di una forza derivante dal potenziale U, l'uno libero e l'altro costretto a restare sopra una curva *priva di attrito*, essi attraversano ciascuna superficie equipotenziale con eguale velocità.

Così ad esempio, se due punti pesanti di egual massa cadono, a partire dalla quiete, uno liberamente, l'altro sopra un sostegno prestabilito (privo di attrito), dopo essere discesi di una stessa quota, posseggono la stessa velocità.

Come corollario scende subito la nota proposizione di GALILEO, concernente la discesa di gravi da uno stesso punto fino ad uno stesso piano orizzontale lungo cammini diversamente inclinati.

15. Torniamo ormai al problema dell'integrazione della equazione (6) del moto, riprendendo le mosse dall'integrale delle forze vive (8), che, ove si ponga

$$\frac{2}{m}(U(s) + E) = \Phi(s)\,, \tag{9}$$

si può scrivere sotto la forma

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \Phi(s)\,. \tag{8'}$$

Di qui risulta

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\Phi(s)}\,,$$

dove va preso il segno superiore o inferiore secondo che la velocità scalare ds/dt è positiva o negativa, o, in altre parole, secondo che il moto è progressivo o retrogrado. Separando le variabili, si ottiene, come sostanzialmente equivalente all'originaria equazione (6), l'equazione

$$dt = \pm\frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}\,,$$

che, integrata mediante una quadratura, fornisce la cercata relazione in termini finiti tra s e t. Le due costanti arbitrarie da cui essa deve dipendere son date l'una dalla costante additiva dell'ultima quadratura, l'altra dalla E dell'integrale delle forze vive.

16. Fra le forze posizionali $f(s)$ meritano speciale menzione le così dette *forze di richiamo*, verso un'assegnata posizione O della curva c che si considera.

La proprietà caratteristica di tali forze è di annullarsi in O e di esplicarsi, in ogni altro punto di c, come attrazioni (tangenziali, trattandosi qui esclusivamente della componente tangenziale) verso O, crescenti quanto più ci si allontana da O lungo la curva. È questo il comportamento tipico delle *forze elastiche*, come si riconosce ovviamente pensando all'azione di una molla; essa è tanto più intensa, quanto più la molla è tesa o compressa, quanto più, cioè, si è discosti dallo stato naturale, in cui scompare ogni sollecitazione.

Immaginando di contare gli archi a partire dalla *posizione di richiamo* (o, se si vuole, di equilibrio), l'anzidetta proprietà caratteristica si esprime analiticamente come segue: $f(s)$ si annulla per $s = 0$, ha segno sempre opposto a quello di s (ciò che traduce il carattere attrattivo della forza ed equivale a $sf(s) < 0$ per ogni valore di s non nullo); infine $f(s)$ cresce, in valore assoluto, assieme al valore assoluto dell'argomento.

17. Il caso più semplice si ha naturalmente quando l'intensità della forza non solo cresce colla distanza s, ma le è addirittura proporzionale. Designando con λ la costante positiva di proporzionalità si ha allora ovviamente

$$f(s) = -\lambda s \tag{10}$$

che può assumersi come *espressione tipica di una forza elastica di richiamo*.

È ragionevole di attribuirle una speciale importanza per le considerazioni che seguono.

Anzitutto (supponendo $f(s)$ dotata di derivata prima e seconda continue) si può rappresentare $f(s)$ nell'intorno di $s = 0$ collo sviluppo abbreviato del MACLAURIN sotto la forma

$$f(s) = f(0) + sf'(0) + \frac{s^2}{2} f''(s_1),$$

dove s_1 designa un qualche valore compreso fra 0 ed s. Se ci si limita a considerare l'azione della forza in un intorno abbastanza piccolo della posizione di equilibrio O, riuscirà trascurabile s^2 di fronte ad s, e per conseguenza (supposto che $f'(0)$ non si annulli) il prodotto $sf'(0)$ sarà di un ordine di grandezza assai più rilevante del termine complementare $s^2 f''(s_1)/2$ che è affetto dal fattore s^2 (essendo f'' una quantità, per ipotesi, finita). Ciò posto, siccome

$f(0) = 0$, si potrà, in un intorno abbastanza piccolo dell'origine, confondere approssimativamente $f(s)$ col termine lineare $sf'(0)$. Il coefficiente $f'(0)$ non può essere positivo; poichè non si avrebbe in tal caso una forza di richiamo; onde si è ricondotti alla espressione tipica (10).

18. La legge del moto, provocato da una forza $-\lambda s$, rientra in una classe ben nota. Possiamo infatti chiamare ω^2 il numero essenzialmente positivo λ/m, ciò che conferisce all'equazione del moto (6) la forma

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0,$$

caratteristica delle oscillazioni armoniche (II_1, n. 36) coll'avvertenza che va materialmente sostituita alla lettera x la s, e quindi all'immagine del moto rettilineo, quella del moto sopra la curva c.

Il periodo $2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/\lambda}$ è, come si vede, univocamente determinato dalla natura della forza elastica e dalla massa del mobile; l'ampiezza delle escursioni e la fase (che compariscono come costanti di integrazione) dipendono invece dalle circostanze iniziali.

Pur senza dimostrarlo, notiamo che, anche nel caso generale di una forza di richiamo qualsiasi, il moto presenta un andamento qualitativo analogo. Si tratta sempre di escursioni periodiche (per quanto non semplicemente sinusoidali) del mobile, da una parte e dall'altra della posizione di equilibrio O; ma le massime distanze da O raggiunte dal mobile (massimi valori di s e $-s$) non sono necessariamente eguali, come accade nei moti armonici.

§ 5. – Forze dipendenti soltanto dalla velocità. Resistenze passive ed espressione tipica (cosiddetta resistenza viscosa). Resistenza idraulica. Caso dei proiettili.

19. Un secondo caso, in cui l'equazione del moto (2') di un punto su traiettoria prestabilita diventa integrabile per quadrature, è quello corrispondente ad una forza tangenziale che dipenda soltanto dalla velocità. La (2') assume in tal caso la forma

$$m\ddot{s} = f(\dot{s}),$$

onde, separando le variabili $\dot{s}$ e t, si deduce

$$m\,\frac{d\dot{s}}{f(\dot{s})} = dt\,.$$

Di qui, con una quadratura, si deduce una relazione in termini finiti fra $\dot s$ e t, diciamo anzi fra $\dot s$ e $t - t_0$, indicando con t_0 la costante di integrazione. Ove si immagini di risolvere questa relazione rispetto ad $\dot s$, rimane in definitiva determinato $\dot s$, ossia ds/dt, in termini di $t - t_0$. Basta allora una nuova quadratura per ricavare $s(t)$.

20. Già nel Cap. VII$_1$ (n. 23) abbiamo definito come *resistenze passive* quelle forze che tendono, in ogni caso, ad opporsi al moto, formanti cioè un angolo essenzialmente ottuso colla direzione della velocità.

Nel caso presente, *una* $F_t = f(\dot s)$ *sarà da qualificarsi* resistenza passiva *quando abbia segno costantemente opposto a quello di* $\dot s$. *In queste condizioni* (ammesso che la forza dipenda dalla velocità in modo continuo) *bisogna che sia* $f(0) = 0$: in caso contrario, infatti, $f(\dot s)$ avrebbe, per $\dot s$ abbastanza piccolo, il segno di $f(0)$, e non potrebbe quindi mutarlo insieme con $\dot s$, come si richiede per una resistenza passiva.

21. L'espressione analitica più semplice di una resistenza passiva è manifestamente

$$f(\dot s) = -b\dot s\,, \tag{11}$$

ove si designi con b una qualsiasi costante *positiva*. Per ragione analoga a quella esposta nel n. 17, si può considerare la (11) come forma tipica delle resistenze passive per tutti i casi in cui si tratta di piccole velocità. In tale categoria rientrano, almeno in prima approssimazione, le così dette *resistenze viscose*, destate nei mezzi fluidi, sia liquidi che gasosi, dal moto *lento* dei corpi immersi. Il valore del coefficiente b dipende essenzialmente dalla natura del mezzo, dalle dimensioni e dalla forma del corpo che si muove (corpo che pur è assimilabile ad un punto materiale per quanto concerne la sua localizzazione sulla curva c). Per dare un'idea dell'ordine di grandezza, diremo che la teoria dei fluidi viscosi porge, per una sfera di raggio r,

$$b = 6\pi\mu r\,,$$

dove, in unità *C.G.S.* e alla temperatura di 15°, si ha $\mu = 0{,}0115$ per l'acqua, e $\mu = 0{,}000189$ per l'aria. Le dimensioni del coefficiente sono manifestamente $[\mu] = mt^{-1}l^{-1}$. Coi valori testè riportati di μ, dato r in centimetri ed $\dot s$ in centimetri per secondo, la forza $b\dot s$ risulta espressa in dine. Per averla in grammi bisogna manifestamente dividere per $g = 980$.

22. Conviene avvertire che, quando non si tratta di moti lenti, la legge delle resistenze di mezzo non è più lineare.

In un intervallo, praticamente considerevole, di velocità, comprese, all'ingrosso, fra 2 e 200 metri al secondo, la resistenza è a ritenersi sensibilmente proporzionale al quadrato delle velocità (¹): è questo il così detto *regime idraulico*, che vale con sufficiente approssimazione tanto per l'acqua, quanto per l'aria. Il coefficiente di v^2 può essere posto sotto la forma $KA\alpha$, dove K dipende soltanto dalla natura del mezzo, risultando proporzionale alla densità di questo; A rappresenta l'area investita, cioè l'area della proiezione del corpo mobile sopra un piano perpendicolare alla direzione del moto; e α è un fattore di forma, cioè un numero puro, che dipende dalla forma (non dalle dimensioni) del corpo che si muove, e dalla sua orientazione rispetto alla direzione del moto (supposto traslatorio).

Manifestamente K viene così a rappresentare la resistenza del mezzo, quando A ed α si riducono all'unità.

Prendendo $\alpha = 1$ per la forma quadrata (lastra sottile conformata a quadrato, che si sposta normalmente al proprio piano) risulta, come media di numerose esperienze (²), per l'acqua:

$$K = 94{,}6 \text{ kg per m}^2;$$

per l'aria:

$$K = 0{,}08 \text{ kg per m}^2.$$

Non sarà male aggiungere che, per piccole lastre, si fa sentire una certa influenza marginale che attenua alquanto il valore di K (da 0,08 fino a 0,066 per lastre quadrate di pochi centimetri, nell'aria). Al di sopra di un m² di sezione cessa sensibilmente questa variabilità, sicchè si può ritenere 0,08 come il valore più attendibile per le applicazioni usuali.

Nell'espressione generale di una tale resistenza quadratica

$$f(\dot{s}) = \pm KA\alpha v^2 = \pm KA\alpha \dot{s}^2$$

è necessario introdurre il doppio segno, tenendo ben presente che la direzione della forza è sempre opposta a quella della velocità,

(¹) Esperienze recentemente eseguite in vista delle ragguardevoli velocità oggidì raggiunte dagli aeroplani sembrano accennare ad una non lieve diminuzione del coefficiente di proporzionalità fra 75 e 100 m/sec. Cfr. per esempio Fuchs-Hopf, *Aërodynamik* (Berlin, Schmidt, 1922).

(²) Cfr. per es. G. Eiffel, *La résistance de l'air* (Paris, Dunod et Pinat, 1910).

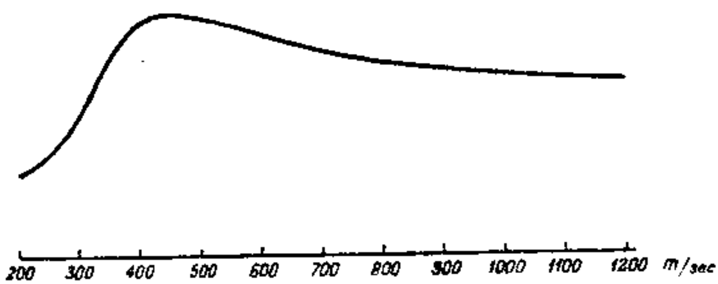
e che va quindi premesso il segno —, quando il moto è diretto ($\dot{s} > 0$), il segno +, quando il moto è retrogrado ($\dot{s} < 0$).

23. Per velocità più rilevanti come sono quelle che interessano la Balistica, la resistenza non si mantiene affatto proporzionale al quadrato della velocità, ma segue tutt'altra legge.

Rappresentiamo in generale la resistenza dell'aria riferita all'unità di massa (o, come si suol dire in Balistica, la *ritardazione*), corrispondente alla velocità v, sotto la forma

$$\lambda F(v) ,$$

dove λ è un coefficiente indipendente dalla velocità e dipendente invece dalla forma del proietto e dalla densità dell'aria (analogo



al $KA\alpha$ di prima) ed $F(v)$ denota una funzione del solo argomento v.

Il Siacci (¹) ha per primo istituito esperienze e studi sistematici nell'intento di determinare la funzione $F(v)$. Le sue ricerche, corroborate da altre successivamente compiute presso Artiglierie estere, hanno condotto a rappresentare il quoziente $K(v) = F(v)/v^2$ (che dovrebbe essere costante, qualora valesse la legge quadratica)

(¹) Francesco Siacci, n. a Roma nel 1839 da padre corso. Studiò a Roma e vi conseguì la laurea ad honorem in matematica nel 1861. Subito dopo emigrò in Piemonte e divenne ufficiale di artiglieria, raggiungendovi il grado di maggior generale; insegnò, dal 1866 al 1892, la Balistica alla Scuola d'Applicazione d'Artiglieria e Genio in Torino; e dal 1872 anche in quella Università (prima Meccanica celeste, poi Meccanica superiore e razionale). Nel 1893, ritiratosi dal servizio militare, passò all'Università di Napoli, dove insegnò fino alla morte (1907). Fu prima deputato e poi senatore. Il Siacci, cultore esimio di Meccanica analitica, lascia opera imperitura nella Balistica per il suo metodo di risoluzione dei problemi del tiro e pel trattato, la cui forma definitiva è del 1888 (2ª ediz.; Torino, Casanova).

mediante una curva, che a partire dai 200 m/sec, sale rapidamente, presentando un flesso in prossimità della velocità del suono e raggiungendo, fra i 400 e i 500 m/sec, un massimo, oltre il quale scende in modo più lento, almeno fino alle velocità sperimentate finora. Ciò apparisce dalla figura della p. prec., in cui le ascisse rappresentano i valori di v, e le ordinate quelle di $K(v)$.

§ 6. – Pendolo semplice.

24. Applichiamo i criteri generali stabiliti nei §§ prec. al *pendolo semplice*. In Meccanica si suol designare con tal nome un punto materiale pesante P, il quale sia costretto a rimanere sopra una circonferenza, situata in piano verticale e priva di attrito. La forza tangenziale (totale) F_t si riduce in tal caso alla componente del peso, onde si tratta di una forza posizionale, e si può senz'altro affermare (§ 4) che la determinazione del moto è effettuabile mediante quadrature.

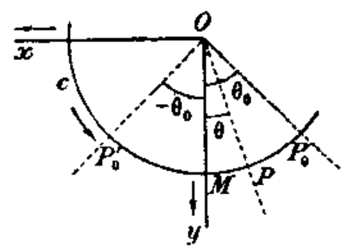
Ma, prima di discutere l'andamento del moto, facciamoci un'idea delle condizioni pratiche sotto cui riescono sensibilmente verificate le precedenti ipotesi. Se si ha una pallina pesante, scorrevole entro un tubo a direttrice circolare, l'azione dell'attrito è già troppo rilevante, perchè si possa addirittura prescinderne, anche in prima approssimazione. Le cose vanno meglio, quando il legame, cui è soggetto P, è un vero dispositivo pendolare; quando cioè si tratta di un filo, attaccato per una estremità ad un punto fisso O e recante all'altra estremità la massa pendolare P; od anche di una (sottile) asta rigida, girevole (in un dato piano verticale) attorno ad O.

Ammettiamo, se si tratta di un filo, che valga (anzi che seguiti a valere anche in istato di moto) il comportamento della tensione, che precisammo al n. 17 del Cap. XIII$_1$. In tale ipotesi, quando P oscilla in modo che il filo rimanga teso, l'azione $\boldsymbol{R}$, che esso subisce da parte del filo, è tutta diretta verso il punto fisso O, e quindi normale alla traiettoria, ciò che appunto caratterizza l'assenza d'attrito.

Se il filo è sostituito da un'asticciuola rigida, si può a priori ritenere che questa, non soltanto agisca su P, nel senso radiale (verso O, o eventualmente, verso l'esterno), ma trasmetta anche (integralmente o parzialmente) al punto taluna delle sollecitazioni cui essa sottostà: peso proprio, resistenza dell'aria, e soprattutto attriti, che si destano in O.

Tuttavia gli attriti all'attacco possono essere attenuati con artifici opportuni (sospensione su coltelli); la resistenza dell'aria è piccola e può essere, come l'influenza del peso proprio dell'asta, ridotta a piacere, supponendo l'asta abbastanza sottile; talchè, sotto siffatte limitazioni è ancora lecito riguardare il vincolo come privo di attrito.

25. Sia c la circonferenza, in piano verticale, su cui ha luogo il movimento di P. Riferiamo i punti del piano ad un sistema di assi x, y coll'origine nel punto di sospensione O (centro della circonferenza c) e l'asse y verticale diretto verso il basso. Diciamo l la lunghezza del pendolo (raggio di c), e θ la sua anomalia o deviazione dalla verticale, cioè l'angolo (contato positivamente nel verso dall'asse orientato x all'asse orientato y attraverso l'angolo retto) che il raggio vettore OP forma colla verticale discendente y.



Con ciò naturalmente l'anomalia spettante ad una data posizione del mobile P risulta determinata soltanto a meno di multipli (positivi o negativi) di 2π; ma si può immaginare individuata fissando il numero di volte che il mobile ha descritto l'intera circonferenza a partire dalla posizione più bassa M, nell'uno o nell'altro verso, prima di portarsi in P.

Fissato uno qualsiasi θ di cotesti valori dell'anomalia di P, $\pi/2 + \theta$ potrà sempre interpretarsi come l'angolo che la retta orientata OP forma colla direzione positiva dell'asse x (contato come sopra, positivamente nel verso $x \to y$, negativamente nel verso opposto). Si avrà quindi, per ogni punto P di c

$$(12) \qquad x = l\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -l\sin\theta\,, \quad y = l\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = l\cos\theta\,.$$

Se poi contiamo gli archi s di c a partire dal punto più basso M, con la stessa convenzione di verso adottata per le anomalie, avremo la relazione

$$(13) \qquad s = l\theta\,,$$

di cui ci varremo per sostituire θ ad s come parametro determinativo delle posizioni del mobile, e che intanto, derivata rispetto al tempo, fornisce la nota relazione tra la velocità scalare e quella angolare

$$(14) \qquad \dot{s} = l\dot{\theta}\,.$$

Ciò premesso, per scrivere l'equazione differenziale del moto del pendolo si osservi che, essendo $\theta + \pi/2$ l'anomalia della tangente alla circonferenza (orientata nel senso delle s e delle θ crescenti), la componente tangenziale del peso di P, ove se ne assuma la massa come unità, è data da

$$g \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = - g \sin\theta ,$$

talchè, tenendo conto della (13), si ottiene pel moto del pendolo l'equazione

$$\ddot{\theta} = - \frac{g}{l} \sin\theta , \tag{15}$$

che, sotto vari aspetti, è assai notevole.

Qui anzitutto è opportuno avvertire che la (15), pel modo stesso in cui è stata stabilita (si ricordi la valutazione della forza sollecitante tangenziale), è valida sotto la condizione essenziale che il mobile sia vincolato a muoversi *sulla circonferenza* (vincolo bilaterale). Questa condizione sarà indubbiamente rispettata senza eccezione quando il vincolo di P sia realizzato mediante un'asticella rigida imponderabile. Per rendere l'indagine, almeno in un primo tempo, quanto più semplice è possibile, noi discuteremo dapprima il problema nell'ipotesi del vincolo bilaterale: esamineremo poi (n. 32), tenendo conto della reazione vincolare, se e fino a qual punto le conclusioni, cui saremo così pervenuti, si mantengano valide nel caso di una sospensione filare (vincolo unilaterale).

26. Sappiamo già, in base alle considerazioni generali dei nn. 12, 15, che la (15) è integrabile con due quadrature; e l'integrale cui si perviene con la prima di queste (e che direttamente si ottiene moltiplicando ambo i membri della (15) per $\dot{\theta}$ e integrando) è l'integrale delle forze vive

$$T - U = E ,$$

dove, nel caso di una forza conservativa qual'è il peso, U denota il potenziale. Poichè il potenziale del peso, riferito all'unità di massa, è dato (VII_1, n. 29) da

$$U = gy = gl \cos\theta ,$$

e la forza viva di P, in base alla (14), ha l'espressione

$$T = \frac{1}{2} l^2 \dot{\theta}^2 ,$$

l'integrale delle forze vive assume la forma

$$\frac{1}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - gl \cos\theta = E ,$$

ossia

$$\dot{\theta}^2 = 2\,\frac{g}{l}\,(\cos\theta + e) , \tag{16}$$

dove la costante

$$e = \frac{E}{gl}$$

va determinata in base alle condizioni iniziali, cioè sostituendo nella (16) al posto di θ e $\dot{\theta}$ i valori che ad esse competono nell'istante iniziale. Notiamo che la condizione di realità di θ implica $e \geqslant -1$; ed osserviamo subito che, se $e = -1$, il solo modo di soddisfare alla (16), nel campo reale, si è di porre $\cos\theta = 1$, cioè $\theta = 0$, con che $\dot{\theta}$ risulta costantemente nulla, e si tratta manifestamente dello *stato di equilibrio* (stabile) nella posizione più bassa M della traiettoria. Noi qui discuteremo successivamente le due ipotesi $e > 1$ e $-1 < e < 1$.

Poichè si è notato or ora che l'ipotesi $e = -1$ caratterizza lo stato di equilibrio (stabile) nella posizione più bassa M, resterà escluso dalla nostra discussione soltanto il caso $e = 1$. Una soluzione evidente della (16) è, in questa ipotesi, fornita da $\cos\theta = -1$, ossia $\theta = \pi$, vale dire dallo *stato di equilibrio* (instabile) nella posizione più alta della traiettoria. Ma anche con condizioni iniziali diverse da $\theta_0 = \pi$, $\dot{\theta}_0 = 0$ (ci limitiamo ad affermarlo) si può rendere $e = -1$: e, a partire da queste condizioni iniziali, il mobile, al crescere indefinito del tempo, *tende* alla posizione più alta senza mai raggiungerla (*moto a meta asintotica*).

27. Moti rotatorii. — Per $e > 1$ l'andamento del moto è presto discusso. Dall'espressione (16) della $\dot{\theta}^2$ si riconosce che essa non scende mai al di sotto della costante, essenzialmente positiva,

$$\omega^2 = 2\,\frac{g}{l}\,(e - 1) .$$

Perciò la velocità angolare $\dot{\theta}$ del mobile non si annulla mai, sicchè si tratta di un moto costantemente progressivo o retrogrado, secondo il segno invariabile di $\dot{\theta}$ (che si può inizialmente fissare ad arbitrio). E, quanto al valore assoluto, la $\dot{\theta}$ rimane sempre maggiore di ω, il che vuol dire che il mobile ruota (sempre in uno stesso senso) anche più rapidamente di un punto fittizio, che descriva la circonferenza con moto uniforme di periodo $2\pi/\omega$.

Esso ripassa infinite volte per ciascun punto della circonferenza (in particolare per la sua posizione iniziale) e, come risulta dalla (16) e dalla periodicità di $\cos\theta$, vi riprende ogni volta la medesima velocità angolare (e scalare). Ora è facile dimostrare che si tratta di un *moto periodico*. Infatti osserviamo anzitutto che, se θ_0 è la anomalia iniziale del mobile e, per fissare le idee, si suppone che il moto sia inizialmente progressivo, l'anomalia $\theta(t)$ del punto in una sua posizione generica è definita in funzione del tempo (contato dall'inizio del moto) come quell'integrale dell'equazione differenziale

$$\dot\theta = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta + e)} \tag{17}$$

che risulta univocamente determinato dalla condizione iniziale

$$\theta(0) = \theta_0 . \tag{18}$$

Designato con T l'intervallo di tempo (determinato e finito per quanto si è detto or ora), in capo al quale il mobile ripassa, per la prima volta, per la posizione iniziale, avremo pel medesimo integrale della (17)

$$\theta(T) = \theta_0 + 2\pi . \tag{19}$$

Ora la funzione $\theta(t + T)$ soddisfa al pari della $\theta(t)$ alla (17), come si verifica osservando che codesta equazione differenziale si trasforma in se stessa col cambiamento della variabile t nella $t + T$; e alla medesima equazione (17) soddisfa, per la periodicità del coseno, anche la funzione $\Theta(t)$, definita dalla identità

$$\Theta(t) = \theta(t + T) - 2\pi . \tag{20}$$

Ma per questo integrale particolare della (17) abbiamo

$$\Theta(0) = \theta(T) - 2\pi ,$$

ossia, tenendo conto della (19),

$$\Theta(0) = \theta_0 ,$$

talchè $\Theta(t)$, soddisfacendo alla stessa condizione iniziale di $\theta(t)$, coincide, per il teorema di unicità dell'integrale, con $\theta(t)$; e si ottiene, in base alla definizione (20) di $\Theta(t)$, l'identità

$$\theta(t + T) = \theta(t) + 2\pi , \tag{21}$$

la quale, in quanto due anomalie differenti di 2π individuano uno stesso punto della circonferenza, esprime appunto che il nostro moto è periodico di periodo T.

Analoga dimostrazione vale naturalmente nel caso di un moto retrogrado; basta soltanto cambiare 2π in -2π nelle (19), (20) e quindi nella (21).

28. Moti oscillatorii. — Evidentemente il tipo dianzi studiato di rotazioni progressive non presenta i caratteri delle ordinarie oscillazioni pendolari. Queste rimangono definite, come qui ci proponiamo di mostrare, da tutti e soli quegli integrali della equazione del moto, per cui la costante e risulta maggiore di -1 e minore di $+1$.

Poniamoci a tal fine nelle condizioni tipiche dell'inizio di un moto pendolare, supponendo che la massa pendolare P venga rimossa dalla sua posizione di equilibrio e abbandonata a se stessa, senza velocità iniziale, da una posizione iniziale distinta da M e dalla diametralmente opposta. Indichiamo con θ_0 l'anomalia di P_0, supponendola senz'altro fissata tra $-\pi$ e π, esclusi naturalmente i valori estremi e il valore 0.

Sostituendo nella (16) i valori iniziali $\theta(0) = \theta_0$, $\dot\theta(0) = 0$, otteniamo per la costante e il valore

$$e = -\cos\theta_0\,, \tag{22}$$

manifestamente compreso fra -1 e $+1$. Viceversa tutte le volte che nella equazione (16) la costante e soddisfa alla condizione $-1 < e < 1$, basta prendere

$$\theta_0 = \arccos(-e)$$

per avere l'anomalia di una posizione, da cui, abbandonato P con velocità iniziale nulla, si ottiene un moto definito dalla (16).

Assumiamo dunque l'equazione (16) sotto la forma

$$\dot\theta^2 = 2\,\frac{g}{l}\,(\cos\theta - \cos\theta_0)\,, \tag{16'}$$

da cui apparisce che θ può annullarsi allora e allora soltanto che $\cos\theta = \cos\theta_0$, cioè nella posizione iniziale P_0 e nella posizione simmetrica P_0' (rispetto alla verticale di O).

Il pendolo comincia evidentemente a discendere, seguendo la sollecitazione della forza. Sotto l'aspetto analitico, ciò risulta dall'osservare che, nella posizione iniziale, la funzione $\theta(t)$ ha un massimo: si annulla infatti la derivata prima, e la derivata seconda è negativa, in virtù della (15). Poichè per $t = 0$, $\ddot\theta$ è negativa, $\dot\theta$ andrà decrescendo; quindi, siccome inizialmente è zero, assumerà, almeno nei primi istanti, valori negativi. Avremo in conseguenza dalla (16′)

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}\,, \tag{16″}$$

intendendosi attribuiti ai radicali i loro valori aritmetici.

Fino a quando continuerà a valere questa determinazione? O, in forma più espressiva, fino a quale posizione andrà decrescendo l'anomalia?

Già pocanzi abbiamo notato che θ si annulla soltanto in P_0 ed in P_0'. Il moto non può per conseguenza cambiare di senso se non in queste due posizioni. Ciò induce a ritenere che θ, partendo dal valore iniziale θ_0, seguiti a decrescere, finchè non si arrivi alla posizione simmetrica, cioè al valore $-\theta_0$.

Le cose stanno precisamente così. Tuttavia, dal punto di vista del rigore matematico, è necessario procedere con cautela, perchè a priori, pur essendo escluso che il moto cambi di senso fra P_0 e P_0', rimane aperto l'adito all'eventualità che θ vada bensì decrescendo, ma resti sempre al di qua di $-\theta_0$: il mobile convergerebbe in tal caso asintoticamente (cioè col crescere indefinito di t) verso una qualche posizione compresa fra P_0 e P_0'.

Per togliere di mezzo ogni difficoltà, si può ragionare come segue. Separiamo le variabili nella (16″) isolando dt; e integriamo da θ_0 a un θ generico ($< \theta_0$). Ove si determini la costante di integrazione in modo che risulti $t = 0$ per $\theta = \theta_0$, si ha

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,. \tag{23}$$

Il secondo membro è una funzione di θ, la quale, se si fa variare θ, sempre decrescendo, da θ_0 fino a $-\theta_0$, si mantiene reale e costantemente crescente: essa si presenta infatti come integrale di una funzione sempre positiva (tale è $\dfrac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$ entro i limiti indicati), relativo ad un intervallo che va crescendo al decrescere di θ. Si noti che per $\theta = \pm\theta_0$, la funzione $\cos\theta - \cos\theta_0$ ha uno zero di primo ordine, poichè essa si annulla, mentre la sua derivata prima $-\sin\theta$ ha un valore diverso da zero. Perciò $\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}$ si annulla di ordine $1/2$, e la sua reciproca $\dfrac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$, pur diventando infinita nei due punti predetti, si conserva integrabile (l'ordine di infinito essendo minore dell'unità).

Ne viene che la funzione $t(\theta)$, definita dalla (23), mentre θ varia decrescendo da θ a $-\theta_0$, si mantiene finita e continua, e va costantemente crescendo da zero fino ad un valore ben determinato

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}. \tag{24}$$

Con questo legame funzionale fra t e θ rimane, per costruzione, verificata la relazione (16″) e quindi anche la (16′).

Ora, per il fatto che t varia sempre in un medesimo senso al variare di θ, la corrispondenza stabilita dalla (23) è biunivoca: esiste, cioè, uno ed un solo valore di θ per cui t assume un prefissato valore compreso fra zero e τ. Questo è quanto dire che la (23) stessa può essere univocamente risoluta rispetto a θ, definendo θ come una funzione uniforme $\chi(t)$, che varia, sempre decrescendo, da θ_0 a $-\theta_0$, mentre t cresce da zero a τ.

La (16′) seguita ad essere una identità, anche se il legame funzionale (22) si considera nella nuova accezione. Si può pertanto affermare che la funzione $\theta = \chi(t)$ (definita nell'intervallo $0 \text{–} \tau$) che proviene dalla risoluzione della (23), è integrale della (16′) e quindi anche della originaria equazione di secondo ordine (15), che ne è una conseguenza differenziale.

Questa $\chi(t)$ soddisfa inoltre alle volute condizioni per $t = 0$: essa assume infatti il valore θ_0, e come integrale della (16′), ha derivata nulla.

Ne consegue che

$$\theta = \chi(t) \qquad (0 \leq t \leq \tau) \tag{25}$$

costituisce il cercato integrale della originaria equazione del moto, ed è quindi atto a rappresentarlo in tutto l'intervallo $0 \text{–} \tau$, entro il quale è stato finora definita la funzione χ.

In particolare, rimane provato con tutto rigore che l'anomalia θ seguita a decrescere, finchè non si raggiunge la posizione simmetrica, ossia il valore $-\theta_0$, ciò che avviene nel tempo τ [ben determinato e finito, a norma della (24)].

29. La prosecuzione del moto oltre l'istante τ è intuitivamente evidente.

Il pendolo si trova, per $t = \tau$, in condizioni perfettamente simmetriche alle iniziali, rispetto alla verticale OM: il conseguente fenomeno dovrà quindi svolgersi in modo simmetrico, ossia il pendolo discenderà, per rimontare alla posizione originaria P_0, in capo allo stesso tempo τ, impiegato nel primo tragitto (prima oscillazione semplice).

Ciò porta a ritenere che in un generico istante t, compreso fra τ e 2τ, la θ abbia valore eguale ed opposto a quello che le competeva nell'istante $t - \tau$, sia cioè

$$\theta = -\chi(t-\tau) \qquad (\tau \leqslant t \leqslant 2\tau). \tag{26}$$

Ci limitiamo ad affermare che sarebbe facile darne una dimostrazione per via puramente analitica.

30. Per $t = 2\tau$, abbiamo di nuovo, come apparisce dalla (26), e dall'essere $\chi(\tau) = -\theta_0$, le stesse condizioni iniziali. Ne consegue una seconda oscillazione completa, identica alla prima, tranne, si intende, un ritardo costante (nei corrispondenti stati di moto) di

$$T = 2\tau\,. \tag{27}$$

Verrà poi una terza oscillazione, e così di seguito indefinitamente.

Si tratta insomma di un moto oscillatorio periodico, il cui periodo $T = 2\tau$ è espresso in termini dell'anomalia iniziale θ_0 per mezzo della (24).

La funzione $\theta(t)$, che rappresenta il moto, definito dalle (23) e (26) nell'intervallo $0 \vdash T$, rimane ovviamente estesa a qualsiasi altro valore di t, in base alla condizione di periodicità. Ne consegue la relazione funzionale.

$$\theta(t + T) = \theta(t)\,,$$

valida per qualsiasi valore di t.

31. Calcolo del periodo. — Il periodo T del moto oscillatorio del pendolo è il doppio della durata τ di una oscillazione semplice, fornita dalla (24). Si tratta dunque di calcolare l'integrale a secondo membro di codesta formula.

Osserviamo anzitutto che è identicamente

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \int_{-\theta_0}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} + \int_{0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} =$$

$$= 2\int_{0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,,$$

come tosto apparisce eseguendo, nel primo integrale del secondo membro, lo scambio della variabile corrente di integrazione θ, in $-\theta$.

La (24) assume così l'aspetto

$$\tau = 2\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,; \tag{24'}$$

e notiamo incidentalmente che, confrontando questa equazione colla (23), si rileva che la durata di ciascuna oscillazione semplice è doppia del tempo necessario al pendolo per raggiungere la verticale OM, a partire da una delle posizioni estreme.

Tornando al nostro calcolo, mostriamo anzitutto come l'integrale del secondo membro della (24') si riduca ad un *integrale ellittico*. A tal fine sostituiamo alla variabile d'integrazione θ la variabile u definita da

$$\sin\frac{\theta}{2} = u \sin\frac{\theta_0}{2},$$

tenendo conto della conseguente relazione differenziale

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \sin\frac{\theta_0}{2}\,du$$

e delle identità

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = 2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - u^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}},$$

dove il radicale va preso in senso aritmetico.

Osservando che, al variare di θ da 0 a θ_0, la u varia, sempre crescendo, da 0 ad 1, si ottiene per la durata τ di una oscillazione semplice l'espressione, mediante un integrale ellittico (di prima specie),

$$\tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\,, \tag{28}$$

dove, per semplicità di scrittura, si è indicato $\sin\frac{\theta_0}{2}$ con k.

Un integrale siffatto non si può calcolare per mezzo di trascendenti elementari, bensì soltanto come somma di una serie. Per ottenere una serie convergente rapidamente, e perciò adatta ai calcoli numerici, si può procedere nel modo seguente.

Poichè in tutto l'intervallo di integrazione si ha $k^2u^2 \leqslant k^2 < 1$, la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2u^2}} = (1-k^2u^2)^{-1/2}$$

si può sviluppare in serie convergente colla formula del binomio, con che si ottiene:

$$(1-k^2u^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2u^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^4u^4 + \ldots +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} k^{2n}u^{2n} + \ldots$$

o in forma più concisa

$$(1-k^2u^2)^{-1/2} = \sum_0^\infty {}_n\, c_n k^{2n} u^{2n},$$

dove si è posto

$$(29) \qquad c_0 = 1\ ; \quad c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \qquad (n > 0).$$

Sostituiamo nell'espressione (28) di τ ed integriamo termine a termine (il che è lecito perchè la serie $\sum_0^\infty {}_n c_n k^{2n} u^{2n}$, come si desume dal confronto colla serie a termini costanti $\sum_0^\infty {}_n c_n k^{2n}$, è uniformemente convergente in tutto l'intervallo di integrazione). Ciò dà per τ la espressione

$$\tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_0^\infty {}_n\, c_n k^{2n} \int_0^1 \frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}},$$

la quale, essendo notoriamente

$$\int_0^1 \frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}} = c_n \frac{\pi}{2},$$

si semplifica in

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sum_0^\infty {}_n\, c_n{}^2 k^{2n}.$$

Scrivendo per disteso e riponendo per k il suo valore $\sin\frac{\theta_0}{2}$, si ottiene lo sviluppo richiesto

$$(30)\quad \begin{cases} \tau = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \sin^2\dfrac{\theta_0}{2} + \left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\dfrac{\theta_0}{2} + \ldots +\right. \\ \qquad\left. + \left(\dfrac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots 2n}\right)^2 \sin^{2n}\dfrac{\theta_0}{2} + \ldots\right\}. \end{cases}$$

Se l'anomalia iniziale θ_0 è piuttosto piccola, si può con notevole approssimazione arrestare lo sviluppo ai due primi termini, il che porge

$$(30')\qquad \tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right).$$

Supponendo di poter trascurare anche i termini di secondo ordine, si ha la formula elementare ben nota

$$(30'')\qquad \tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

32. Reazione vincolare. — Poichè la forza attiva si riduce al peso, la reazione è espressa dalla formula (n. 8)

$$R_n = \frac{v^2}{r} - g\cos\alpha\,,$$

in cui R_n può essere interpretata come la componente secondo la normale esterna (radiale nel caso nostro) della forza centrifuga, cui sottostà l'asta di sospensione del pendolo, r e α sono rispettivamente il raggio di curvatura e l'inclinazione sulla verticale discendente della normale (nel senso della concavità). È chiaro che per il pendolo si ha $r = l$, $\cos\alpha = -\cos\theta$; sicchè la forza cui è sottoposta l'asta rimane espressa da

$$\frac{v^2}{l} + g\cos\theta\,.$$

Si può farla dipendere esclusivamente dall'anomalia θ, ricorrendo all'integrale delle forze vive che assumeremo sotto la sua forma generale (16). Poichè, infatti, per la (14), $v^2/l = l\dot\theta^2$, otteniamo, in virtù della (16),

$$(31)\qquad R_n = 3g\left(\cos\theta + \frac{2}{3}e\right).$$

Se, come si è supposto sin qui, il vincolo è realizzato mediante un'asta rigida ed è quindi bilaterale, l'andamento del moto, quale fu da noi studiato nei vari casi possibili, non resta turbato dalla circostanza che la R_n si annulli e passi da valori positivi a negativi. Avremo soltanto che, finché $R_n > 0$, l'asta è soggetta ad una tensione, mentre sottostà ad una pressione quando $R_n < 0$. Così è facile verificare sulla (31), come del resto è a priori intuitivo, che nei due casi di equilibrio si ha tensione o pressione secondo che la massa pendolare occupa la posizione più bassa M, o quella diametralmente opposta.

Ma se il vincolo è realizzato mediante un filo (vincolo unilaterale) è essenziale tener conto del segno di R_n, giacchè il moto del pendolo segue l'andamento caratterizzato, secondo i vari casi possibili, nei nn. prec., solo a condizione che il vincolo eserciti la sua azione, cioè si mantenga $R_n > 0$.

Per precisare meglio la cosa vediamo per quali valori della costante e (che, come ben sappiamo, è sempre $\geqslant -1$) l'espressione formale (31) della R_n possa diventare negativa. Dalla (31) stessa risulta immediatamente che la R_n è positiva se $e > 3/2$; d'altra parte basta scrivere la (31) sotto la forma

$$R_n = 3g(\cos\theta + e) - eg$$

e osservare che, per la (16), è sempre $\cos\theta + e > 0$ per riconoscere che la R_n è certamente positiva tutte le volte che $e < 0$.

Per conseguenza i casi, in cui la espressione formale di R_n può diventare negativa, e perciò lo studio del pendolo filare richiede una discussione ulteriore, corrispondono ai valori di e compresi nei due intervalli da 0 a 1 e da 1 a 3/2. Qualora il vincolo fosse bilaterale si avrebbe, rispettivamente: *a*) per $0 \leqslant e < 1$ un moto oscillatorio in cui, come risulta dalla (22), il pendolo è abbandonato senza velocità iniziale da una posizione non inferiore a quella del centro O di sospensione; *b*) per $1 < e \leqslant 3/2$ un moto rotatorio abbastanza lento, e più precisamente, tale che la velocità angolare minima (n. 27) non supera $\sqrt{g/l}$ (e per $e = 1$ un moto avente per meta asintotica il punto più alto della traiettoria circolare c).

Supponiamo che la sospensione sia attuata mediante un filo, ed esaminiamo dapprima i moti oscillatori. Nel caso $e = 0$ (moto oscillatorio che, come risulta dalla (22), si realizza, abbandonando il pendolo, a filo teso, e senza velocità iniziale, da una delle due posizioni di quota eguale al centro di sospensione) nulla vi è da dire, se non che la R_n, mantenendosi positiva durante l'oscillazione, si annulla agli estremi di essa. Fissato allora per e un valore compreso tra 0 ed 1 (estremi esclusi), immaginiamo di determinare il corrispondente moto oscillatorio, lanciando il pendolo dalla sua posizione più bassa $M(\theta = 0)$, nell'uno o nell'altro senso, con quella velocità angolare che in base alla (16) ivi compete al moto considerato. Dapprima le cose vanno come se la sospensione fosse realizzata mediante un'asticciuola rigida; ma la reazione R_n, che sull'inizio, cioè per valori di θ abbastanza vicini a 0, è, come risulta dalla (31), positiva, va diminuendo al crescere del valore assoluto di θ, finchè in una certa posizione si annulla; e questa posizione, in virtù della (31), è certamente più alta di O ($\theta > \pi/2$ o $\theta < -\pi/2$), ma in ogni caso, come risulta dal confronto della (31) colla (16), precede quella, in cui si annullerebbe $\dot{\theta}$ e che, se il vincolo fosse bilaterale, costituirebbe l'estremo della oscillazione.

Analoghe circostanze si verificano per $1 < e < 3/2$, cioè pei moti rotatori e pel moto a meta asintotica nel punto più alto di c.

Vi è dunque nell'una e nell'altra ipotesi un istante t_1, in cui R_n si annulla per la prima volta, in modo che diventerebbe poi negativa se, essendo il vincolo realizzato mediante un'asta, il moto potesse proseguire, oltre quell'istante, secondo le varie eventualità esaminate ai nn. prec. Ora è facile riconoscere che cosa accada in tali condizioni. La massa pendolare nella posizione P_1, corrispondente a t_1 (e certamente più alta di O) abbandona la circonferenza c e il moto (almeno per un po', finchè cioè non si torna a tendere il filo) avviene liberamente sotto l'azione della gravità, come se il filo non ci fosse.

Naturalmente le due fasi del moto si raccordano in P_1, in modo completo, non solo quanto a velocità, ma anche quanto ad accelerazione. Ciò perchè, nell'istante t_1, essendo $R_n = 0$, il mobile non sottostà ad alcuna reazione vincolare e la forza totale si trova in quell'istante già ridotta al solo peso, come nel successivo moto libero.

Il raccordo delle velocità implica quello delle tangenti ai due archi di traiettoria in P_1 (rispettivamente circolo e parabola). Dal raccordo delle accelerazioni scende poi che il raggio di curvatura della parabola in P_1 non è altro che il raggio l del cerchio c: basta pensare, che, coincidendo le direzioni delle normali, la componente normale dell'accelerazione, cioè la v^2/r, è in entrambi i casi la stessa; e poichè la v ha lo stesso valore, ciò deve altresì verificarsi per r.

33. Caso di piccole oscillazioni. — Se si suppone a priori che la deviazione verticale θ del pendolo rimanga piccola, tale per es., che θ^2 sia trascurabile di fronte all'unità, il seno si può confondere coll'arco (come è ben noto e come del resto si verifica ovviamente, prendendo per $\sin\theta$ lo sviluppo del MACLAURIN arrestato al terzo termine).

In quest'ordine di approssimazione, la equazione differenziale (15), che regge il moto pendolare, può essere sostituita dall'equazione lineare

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta .$$

Riconosciamo nel secondo membro l'espressione tipica (n. 17) delle forze di richiamo verso la posizione di equilibrio $\theta = 0$ (punto O); e siamo senz'altro ricondotti ad un moto armonico di centro O, rispetto alla variabile θ, cioè sulla circonferenza c.

La costante ω^2, che caratterizza la equazione armonica, è qui sostituita dal rapporto g/l. Il periodo del moto $T = 2\pi/\omega$ è così espresso da $2\pi\sqrt{l/g}$, e il semiperiodo τ (durata di una oscillazione semplice) da

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} ,$$

come già avevamo trovato (n. 31), in base all'espressione rigorosa di τ, nell'ipotesi (sostanzialmente equivalente alla attuale) che già $\sin^2\frac{\theta_0}{2}$ potesse trascurarsi di fronte all'unità.

34. EFFETTI DI UNA RESISTENZA VISCOSA. — Per tener conto di una resistenza passiva proporzionale alla velocità, del tipo $-b\dot{s}$ (n. 21), basta evidentemente aggiungere al secondo membro della (15) un termine proporzionale a $\dot{\theta}$ con un fattore di proporzionalità negativo. Designando questo fattore con $-2h$, avremo

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - 2h\dot{\theta} ,$$

la quale, se ci si limita, come sopra, all'ipotesi di oscillazioni di piccola ampiezza, si semplifica in

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta - 2h\dot{\theta} .$$

Essa rientra nel tipo $\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = 0$ (h e k costanti positive) studiato al n. 43 del Cap. II_1. Per $k > h^2$, l'equazione è caratteristica delle oscillazioni smorzate.

Nel caso del pendolo, se si tratta di resistenza viscosa dovuta all'aria, l'ordine di grandezza di $k = \sqrt{g/l}$ e di h è certo tale da rendere soddisfatta la diseguaglianza $k > h^2$. Basta pensare che, mettendo in evidenza la velocità $l\dot{\theta}$, il coefficiente di resistenza viscosa b è rappresentato da $2h/l$, e va identificato (n. 21) con $6\pi\mu r$, dove r è il raggio della massa pendolare (supposta sferica) e $\mu = 0{,}000189$. A titolo di apprezzamento si può prendere $l = 1\ \mathrm{m} = 100\ \mathrm{cm}$, $r = 1\ \mathrm{cm}$, e si constata immediatamente come $k = 9{,}8$ sia parecchio superiore ad

$$h^2 = \left(6\pi r \frac{l}{2} 0{,}000189\right)^2 = (0{,}178)^2.$$

La resistenza (viscosa) dell'aria ha dunque per effetto di smorzare le piccole oscillazioni pendolari secondo la legge esponenziale, già illustrata in Cinematica.

§ 7. – Comportamento dell'attrito durante il moto. Piano inclinato scabro.

35. Secondo quanto preannunciammo fin dal n. 4, ci proponiamo qui di caratterizzare il comportamento della reazione vincolare in condizioni di moto.

Abbiamo visto nella Statica (Cap. IX_1), che, quando un punto materiale appoggiato ad una superficie o ad una curva, si trova in equilibrio, l'attrito (reazione tangenziale offerta dal sostegno) non supera mai, quanto a valore assoluto, una certa frazione f della reazione normale; la direzione secondo cui si esplica questa forza tangenziale dipende dalla forza attiva: più precisamente (poichè l'attrito equilibra la componente tangenziale della forza attiva) possiamo dire che la direzione dell'attrito statico o di primo distacco è opposta a quella della proiezione della forza.

Quando, in analoghe condizioni di appoggio, abbia luogo un generico movimento, e sia $\boldsymbol{F}$ la forza attiva, applicata al mobile, il sostegno esplicherà ancora (almeno in generale) una certa reazione $\boldsymbol{R}$.

Per riconoscere con quali leggi essa si manifesti bisognerà naturalmente appellarsi all'esperienza. L'intuizione ci avverte in primo luogo che, come nel caso statico, il sostegno è atto a reagire soltanto verso l'esterno del corpo che lo materializza.

Ciò ritenuto, dicasi N il valore assoluto della componente normale di $\boldsymbol{R}$, ed $\boldsymbol{A}$ il componente tangenziale di $\boldsymbol{R}$.

Quest'ultimo si denomina *attrito*, aggiungendosi la qualifica *dinamico* o *durante il moto*, quando si voglia mettere in evidenza la circostanza che la velocità del mobile è diversa da zero.

Esperienze, istituite quasi contemporaneamente dal COULOMB e dal MORIN, hanno condotto il secondo a formulare (verso il 1830) le leggi seguenti:

1°) L'attrito dinamico è direttamente opposto alla direzione del moto, o, ciò che è lo stesso, della velocità. Se questa eventualmente si annulla durante il corso del moto, tornano a valere le leggi dell'attrito di primo distacco; e quindi il movimento ha termine, o si riprende, secondo che la forza attiva $\boldsymbol{F}$ soddisfa o no alla condizione di equilibrio. Se il sostegno è una superficie, si può dire: secondo che $\boldsymbol{F}$ è interna o no al cono d'attrito relativo alla posizione d'arresto. E la stessa dicitura salvo lo scambio di «*interna*» in «*esterna*» si può usare se il sostegno è una curva (cfr. Cap. IX_1).

2°) L'intensità A dell'attrito dinamico è direttamente proporzionale alla reazione normale N. Il coefficiente di proporzionalità è una frazione propria, che non dipende dalla velocità del mobile, nè dall'estensione delle superficie che si trovano in contatto, ma soltanto dalla loro natura materiale.

Questo coefficiente di proporzionalità si chiama *coefficiente d'attrito* (*dinamico* o *durante il moto*) e si suol designare colla stessa lettera f, già adottata per l'attrito statico. L'uso non è ingiustificato, poichè, molto all'ingrosso, i due coefficienti d'attrito, statico e dinamico, coincidono.

In un tale ordine di approssimazione si può riassumere sotto forma espressiva il comportamento della reazione $\boldsymbol{R}$ nel modo seguente: *La reazione offerta da un sostegno scabro* (la quale, nel caso statico, è soltanto circoscritta a non uscire dal cono d'attrito o meglio a stare in una delle due regioni, in cui esso divide lo spazio) *in condizioni dinamiche viene proprio a trovarsi sulla superficie conica d'attrito*, e precisamente sopra quella generatrice che si proietta (ortogonalmente), in senso opposto al moto, sulla tangente alla traiettoria.

Di tutto ciò si può rendersi ragione per via intuitiva, rappresentandosi in ogni caso (tanto in condizioni di equilibrio, quanto in condizioni di moto) l'attrito come una resistenza passiva, capace di raggiungere un certo massimo (frazione determinata di N) ed esplicantesi in quel modo che più ostacola il moto, impedendone l'inizio con quel valore (non superiore al massimo) che equilibra la sollecitazione attiva, e raggiungendo il massimo (in direzione diametralmente opposta al moto), quando la velocità è diversa da zero.

In realtà le cose non corrispondono esattamente a questo schema teleologico.

Il coefficiente di attrito dinamico è sempre alquanto (talora anche considerevolmente) *inferiore al coefficiente di attrito statico.* Inoltre, mentre si conserva sensibilmente costante finchè si tratta di piccole velocità (non superiori ai 4 o 5 m/sec) e di pressioni non troppo rilevanti, va poi lentamente diminuendo al crescere della velocità e aumentando al crescere della pressione.

Ciò si verifica in particolare per i freni del materiale ferroviario (ceppi di ghisa contro cerchioni di acciaio), dove però si può pensare che non si tratti di contatto a secco, in causa dell'aria interposta che opera forse come un lubrificante [1]. Non ci è qui possibile approfondire questo importante argomento, ma vogliamo almeno avvertire che, quando fra la superficie del mobile e quella del sostegno è interposto un lubrificante, il coefficiente d'attrito dipende, in modo essenziale e non ancora ben precisato, dalla velocità v, dalla pressione normale N e dal coefficiente di viscosità del lubrificante μ; per altro si può ritenere che questi tre elementi influiscano soltanto attraverso la combinazione $\mu v/N$.

36. Il principio di indipendenza dal modo con cui sono realizzati i vincoli, già usufruito nella Statica (IX_1, n. 11), interviene utilmente anche in Dinamica. Così, per l'attrito durante il moto, si presume che, ogni qualvolta un punto materiale è ritenuto da dispositivi opportuni su di una determinata curva o superficie, il comportamento sia analogo a quello che si ha nel caso di un appoggio sopra un sostegno materiale.

E le conseguenze di questa presunzione si trovano in sufficiente accordo coi fatti osservati.

37. In base alle precedenti generalità, si forma subito l'equazione, che regge il moto di un punto su traiettoria prestabilita, quando sia nota la forza attiva $\boldsymbol{F}$ e il coefficiente di attrito f.

---

[1] Cfr. per es. M. PANETTI, *Meccanica applicata alle Macchine*, parte I; Torino, Peretto, 1923, p. 83. - Giova rilevare altresì che recenti esperienze di laboratorio di carattere molto delicato hanno permesso di constatare il fatto imprevisto che una grande levigatezza della superficie di contatto altera profondamente le leggi dell'attrito. Cfr. a questo proposito, come pure per il caso tecnicamente più importante, in cui sia interposto un lubrificante, il bell'articolo riassuntivo di A. SOMMERFELD, *Zur Theorie der Schmiermittelreibung*, « Zeitschrift für technische Physik », 2ª annata, 1921, pp. 59-63, 89-93; od anche « Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften », Nr. 218 (Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1927).

Basta evidentemente proiettare nella direzione tangenziale $\boldsymbol{t}$ l'equazione

$$(1') \qquad m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R},$$

tenendo conto (n. 35) che $R_t = \pm A = \pm fN$ e il segno va fissato in modo che la forza sia sempre resistente: bisogna quindi prendere il segno —, quando (rispetto alla direzione $\boldsymbol{t}$) il moto è diretto, cioè quando $\dot{s} > 0$, il segno +, quando $\dot{s} < 0$.

Con tale avvertenza riguardo al doppio segno, risulta

$$(32) \qquad \begin{cases} a) \quad m\ddot{s} = F_t - fN, & \text{per} \quad \dot{s} > 0\,; \\ b) \quad m\ddot{s} = F_t + fN, & \text{per} \quad \dot{s} < 0\,. \end{cases}$$

Resta da esprimere N (valore assoluto della reazione normale), per il che bisogna ancora ricorrere all'equazione fondamentale (1'), proiettandola sulle altre due direzioni principali (normale principale $\boldsymbol{n}$, binormale $\boldsymbol{b}$). Per quanto concerne la normale principale si ha dalla (3)

$$R_n = m\frac{v^2}{r} - F_n\,;$$

per la binormale, essendo nulla la relativa componente di $\boldsymbol{a}$,

$$R_b = -F_b\,.$$

Se ora si nota che la reazione normale è, per sua definizione, la proiezione di $\boldsymbol{R}$ sul piano normale, ossia il vettore (di questo piano) che ha per componenti R_n, R_b, risulta manifestamente

$$N = \sqrt{R_n^2 + R_b^2} = \sqrt{\left\{ m\frac{v^2}{r} - F_n \right\}^2 + F_b^2},$$

dove va assunto pel radicale il valore assoluto.

È questa la cercata espressione di N, valida nel caso più generale; come si vede, essa dipende dalle componenti normali della forza *attiva* F_n, F_b, dalla velocità v del mobile (ossia da $\dot{s}$), e dal raggio di curvatura r della traiettoria, nella posizione generica di cui si tratta (ossia da s).

In ultima analisi, quando, come noi vogliamo supporre, si riguarda nota la legge della forza, e quindi si ritengono F_n, F_b funzioni assegnate di s, $\dot{s}$, t, tale si presenta pure N.

Ci limiteremo al caso in cui la forza attiva $\boldsymbol{F}$ *è tutta contenuta nel piano osculatore.* Allora $F_b = 0$, e l'espressione di N si semplifica in

$$N = \left| m\frac{v^2}{r} - F_n \right|.$$

Si ha così, per la reazione d'attrito,

$$R_t = \mp fN = \mp f \left| m \frac{v^2}{r} - F_n \right| ,$$

essendo sempre da adottare il segno superiore o l'inferiore secondochè $\dot{s}$ è positivo o negativo.

In forma diversa, ma sostanzialmente equivalente, si può scrivere

$$R_t = \begin{cases} f\left(F_n - m \dfrac{v^2}{r}\right), & \text{ogniqualvolta } \left(m \dfrac{v^2}{r} - F_n\right) \dot{s} > 0 , \\ -f\left(F_n - m \dfrac{v^2}{r}\right), & \text{ogniqualvolta } \left(m \dfrac{v^2}{r} - F_n\right) \dot{s} < 0 . \end{cases}$$

Infatti, quando il prodotto $\left(m \frac{v^2}{r} - F_n\right) \dot{s}$ è positivo, i due fattori $\dot{s}$ ed $m \frac{v^2}{r} - F_n$ sono o entrambi positivi o entrambi negativi. Nella prima eventualità $N = m \frac{v^2}{r} - F_n$, $R_t = -fN$: nella seconda $N = -\left(m \frac{v^2}{r} - F_n\right)$, $R_t = fN$; donde nell'una e nell'altra l'espressione superiore di R_t. Analogamente si verifica che, se il prodotto $\left(m \frac{v^2}{r} - F_n\right) \dot{s}$ è negativo, vale per R_t l'espressione inferiore. Se mai il detto prodotto fosse nullo, si avrebbe dalle due espressioni, indifferentemente, $R_t = 0$: questo perchè, trattandosi qui di attrito dinamico, si suppone essenzialmente la velocità $\dot{s}$ diversa da zero, onde il caso in questione può presentarsi solo quando si annulla il primo fattore $m \frac{v^2}{r} - F_n$.

Ciò posto, le (32) equivalgono alle

$$m\ddot{s} = F_t \pm f\left(F_n - m \frac{v^2}{r}\right), \tag{32'}$$

dove il segno va scelto secondo il criterio testè fissato.

Se si nota che F_t ed F_n sono da considerarsi, pur nelle condizioni più generali, funzioni cognite di s, $\dot{s}$ e t, mentre f (coefficiente d'attrito) ed r (raggio di curvatura) sono funzioni, anch'esse note, della posizione del mobile, cioè di s, e d'altra parte $v^2 = \dot{s}^2$, si riconosce che la (32′) costituisce effettivamente una equazione differenziale del secondo ordine nella sola incognita $s(t)$.

38. Se la forza $\boldsymbol{F}$ è posizionale, F_t ed F_n dipendono esclusivamente da s e il secondo membro della (32′) si presenta sotto la forma

$$A(s)v^2 + B(s)\,,$$

dove $A(s)$ e $B(s)$ designano rispettivamente $-f\dfrac{m}{r}$, $F_t + fF_n$, ovvero $f\dfrac{m}{r}$, $F_t - fF_n$ secondochè vale il segno superiore o l'inferiore. Dall'espressione $\pm f\dfrac{m}{r}$ di $A(s)$ appare che, trattandosi di sostegno scabro (per cui va ritenuto f essenzialmente >0), questa funzione può annullarsi identicamente soltanto nel caso di una traiettoria rettilinea (raggio di curvatura infinito). In questo caso (di cui ci occuperemo nel seguente paragrafo) il secondo membro della (32′) si riduce ad una funzione della sola s; ricadiamo quindi, per ciò che concerne l'integrazione, in un tipo già considerato (n. 15).

Ma più generalmente, qualunque sia la funzione $A(s)$, l'equazione (32′) si può abbassare al prim'ordine, riconducendosi ad un tipo senz'altro integrabile per quadrature.

Basta assumere come funzione incognita la v^2, al posto di s, e quest'ultima come variabile indipendente, al posto di t. Avendosi identicamente

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{d\dot{s}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\dot{s}}{ds}\,\dot{s} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}\,,$$

la (32′) assume la forma

$$\frac{1}{2}m\frac{dv^2}{ds} = A(s)v^2 + B(s)\,,$$

cioè diventa una equazione differenziale *lineare* nella v^2, considerata come funzione di s. La sua integrazione (che, come ben si sa, richiede in generale due quadrature) porta alla conoscenza di v^2 in termini di s. Si assegna così la velocità del mobile in funzione del posto che esso occupa. Per completare la determinazione del moto, bisogna ancora coordinare il posto al tempo mediante una relazione fra s e t. Questa risulta da un'ulteriore quadratura, notando che la conoscenza della velocità in termini di s si traduce in una formula del tipo

$$\frac{ds}{dt} = \text{funzione nota di } s.$$

Separando le variabili ed integrando, si ha t in termini di s, onde inversamente, con operazioni in termini finiti, anche s in termini di t. Il problema si può dunque completamente risolvere mediante quadrature.

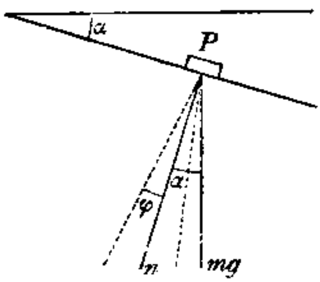
39. Resta da tener conto dell'influenza del doppio segno, che compare al secondo membro della (32′), o, addirittura, della primitiva (32) [alla quale converrà riferirsi in questa discussione, piuttosto che alla (32′)]. Come già si è notato al n. 37, il moto è retto dalla (32a) negli intervalli di tempo, in cui il moto si mantiene progressivo ($\dot{s} > 0$), dalla (32 b) negli intervalli di tempo di moto retrogrado ($\dot{s} < 0$); talchè, per la continuità di $\dot{s}$, la eventualità di dover sostituire, per la definizione del moto, l'una all'altra equazione non potrà presentarsi se non in un istante t_1 di arresto ($\dot{s} = 0$). Ma un tale istante va considerato con particolare attenzione, giacchè esso può segnare la fine del moto. Per le leggi dell'attrito dinamico (n. 35) ciò accade sempre e solo quando nell'istante di arresto t_1 risulta verificata la condizione dell'equilibrio statico $|F_t| \leq fN$, (dove f denota il coefficiente d'attrito di primo distacco). In caso contrario il moto, subito dopo l'istante t_1, ricomincia; e, più precisamente, per la legge del moto incipiente, il mobile si avvia nel verso che compete nell'istante t_1 alla sollecitazione tangenziale F_t, cosicchè, nella nuova fase, il moto sarà retto dalla (32 a) o dalla (32 b) secondo che per $t = t_1$ si ha $F_t > 0$ o < 0. Così l'equazione oraria del moto a partire dalla posizione di arresto $s = s_1$ (e dall'istante $t = t_1$) risulterà univocamente determinata da quell'integrale della (32 a) o, rispettivamente, della (32 b), che è caratterizzato dalle condizioni iniziali,

$$s = s_1, \quad \dot{s} = 0 \quad \text{per} \quad t = t_1,$$

e codesto integrale rappresenterà il moto indefinitamente, se la $\dot{s}$ si mantiene di segno costante, o, in caso contrario, fino al primo istante t_2, in cui la $\dot{s}$ si annulla. In quest'ultima ipotesi, bisogna verificare, come già nell'istante t_1, se il moto abbia termine; e, ove ciò non accada, si riconosce, in base al verso della sollecitazione tangenziale, quale delle due equazioni (32) entri in funzione, e così via.

40. Piano inclinato scabro. — Una immediata applicazione della teoria può farsi al moto di un grave sopra un piano inclinato scabro, nella ipotesi che la velocità iniziale sia nulla, o diretta secondo la retta di massima pendenza. Per evidenti ragioni di simmetria il moto avverrà lungo codesta retta di massima pendenza.

Chiamando α la inclinazione del piano, e φ l'angolo d'attrito (statico) possiamo anzitutto asserire (IX_1, n. 5) che, se in un qualche istante la velocità è nulla, il grave resterà fermo da quell'istante in poi, ovvero comincerà a scendere, secondochè $\alpha \leqslant o > \varphi$. Avremo poi, contando le s verso il basso (a partire, per es., dalla posizione iniziale), $F_t = mg \sin \alpha$, $N = mg \cos \alpha$. Se si suppone, per fissare le idee, che il coefficiente di attrito dinamico sia costante e coincida con quello statico, sarà $f = \operatorname{tg} \varphi$, e la forza totale $F_t \pm fN$ riescirà, in entrambi i casi, costante.



Posto per brevità:

$$g_1 = \frac{g}{\cos \varphi} \sin (\alpha - \varphi) , \quad g_2 = \frac{g}{\cos \varphi} \sin (\alpha + \varphi) ,$$

avremo [dalle (32 a) e (32 b) rispettivamente]

$$\ddot{s} = g \sin \alpha - fg \cos \alpha = g_1 ,$$
$$\ddot{s} = g \sin \alpha + fg \cos \alpha = g_2 ,$$

valendo la prima quando il mobile discende ($\dot{s} > 0$), la seconda quando il mobile ascende. La costante g_2 è sempre positiva; segue quindi dalla identità

$$\frac{dv^2}{dt} = 2 \ddot{s} \dot{s} ,$$

che, nel periodo del moto ascendente ($\ddot{s} = g_2$, $\dot{s} < 0$), il valore assoluto della velocità va costantemente diminuendo, come è del resto intuitivo: il moto è anzi uniformemente ritardato data la costanza di g_2.

Analogamente si riconosce che il moto discendente, retto dalla equazione $\ddot{s} = g_1$, è uniformemente ritardato, ovvero uniformemente accelerato (incluso il caso limite di una accelerazione nulla), secondochè g_1 è o no negativo, secondochè, cioè, φ supera o non supera α.

Questa alternativa dipende esclusivamente dalla natura del sostegno.

41. Fissiamo, per esempio, il caso di una inclinazione più forte dell'angolo di attrito ($\alpha > \varphi$), immaginando il mobile lanciato inizialmente verso l'alto con velocità v_0 (in valore assoluto).

Avremo per $t = 0$, $s = 0$, $\dot{s} = -v_0$; il moto comincerà ad essere ascendente e quindi rappresentato da quell'integrale della equazione $\ddot{s} = g_2$, che corrisponde ai valori iniziali 0 e $-v_0$ di s e di $\dot{s}$. Esso è manifestamente

$$s = \frac{1}{2} g_2 t^2 - v_0 t \, .$$

L'equazione $\dot{s}(t) = 0$, cioè

$$g_2 t - v_0 = 0 \, ,$$

ammette una (ed una sola) radice positiva

$$t_1 = \frac{v_0}{g_2} \, .$$

Da $t = 0$ fino a $t = t_1$, il moto è sempre ascendente, e il cammino percorso è misurato (in valore assoluto) da

$$-s = t\left(v_0 - \frac{1}{2} g_2 t\right) .$$

Per $t = t_1$, si ha in particolare $-s_1 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g_2}$. Benchè la velocità sia nulla, il moto non si arresta (essendosi qui supposto $\alpha > \varphi$). Comincerà dunque una fase discendente, retta dalla equazione $\ddot{s} = g_1$ (dove g_1 è > 0) e individuata dalle condizioni iniziali $s = s_1$, $\dot{s} = 0$ per $t_1 = t$. L'integrale corrispondente è

$$s = \frac{1}{2} g_1 (t - t_1)^2 + s_1 \, .$$

L'equazione $\dot{s}(t) = 0$ non ha alcuna radice maggiore di t_1 (o, sotto altra forma, la velocità non si annulla mai per $t > t_1$, perchè il moto è uniformemente accelerato, a partire dalla quiete nell'istante t_1). Rimane dunque valida la precedente espressione di s per ogni valore di $t > t_1$.

In modo perfettamente analogo, si discutono le eventualità: $\alpha > \varphi$, $\dot{s}_0 > 0$, oppure $\alpha < \varphi$, coi possibili sottocasi.

§ 8. – Moto verticale dei gravi con riguardo alla resistenza dell'aria.

42. Trattiamo ancora, come applicazione dei criteri esposti al § 4, il caso semplice della discesa libera di un grave quando si tien conto della resistenza dell'aria.

Supponiamo che la discesa segua lungo la verticale, come avverrebbe se mancasse la resistenza dell'aria, e che valga per questa resistenza il regime idraulico (n. 22).

Convenendo di contare le distanze s, a partire dalla posizione iniziale e verso il basso, avremo $\dot{s} = v$, $\ddot{s} = dv/dt$, $F_t = mg - KA\alpha v^2$ e, per conseguenza, ove s'introduca per brevità una costante positiva V, tale che

$$V^2 = \frac{mg}{KA\alpha}, \tag{33}$$

l'equazione del moto assumerà la forma

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right). \tag{34}$$

Apparisce da essa che, se la velocità v è inferiore a V, la dv/dt è positiva, e quindi il moto è accelerato; se invece la velocità è superiore a V, il moto è ritardato. Notevole è il fatto che una soluzione particolare è data da $v = V$, cioè da un moto uniforme dotato di questa velocità critica V. Per avere un'idea dell'ordine di grandezza di V, poniamo nella (33) $\alpha = 1$, e $K = 0{,}06$ (n. 22), con che $1/\sqrt{K}$ è poco più di 3.

Risulta allora V approssimatamente eguale a tre volte la

$$\sqrt{\frac{\text{Peso (espresso in kg)}}{\text{Area della sezione investita (espressa in m}^2\text{)}}}.$$

Per un peso di un quintale, collegato ad un paracadute di 5 o 6 m di raggio (ciò che rende l'area investita di circa 100 m²) si può presumere un valore di V intorno ai 3 metri per secondo: se non si cade male, una tale velocità non è pericolosa.

È precisamente V, che, come vedremo tra un momento, va presa in considerazione, quale valore asintotico della velocità di caduta.

43. L'integrazione formale della (34) si effettua immediatamente, separando le variabili. Prima di rendere esplicite le formule, conviene rilevare la circostanza che se, in un istante qualsiasi, la velocità del mobile è inferiore alla velocità critica V, non oltrepassa mai tale velocità, pur crescendo sempre e convergendo asintoticamente verso V per $t \to \infty$. Del pari se, in un istante qualsiasi, la velocità supera V, rimane poi sempre superiore, decrescendo asintoticamente verso V al crescere indefinito di t.

La dimostrazione si fa, nei due casi, in modo perfettamente analogo. Riferiamoci al primo, per fissar le idee, e facciamo vedere che, negando la tesi, si cade in un assurdo.

Supponiamo dunque che la velocità del mobile possa oltrepassare V. Trattandosi di funzione continua, essa dovrà aver assunto, almeno una volta, proprio il valore V. Sia t_1 l'istante, in cui ciò ha luogo per la prima volta; siano poi t' e $t'' > t'$ due generici istanti anteriori a t_1; v' e v'' (maggiore di v' per la già rilevata circostanza che, al disotto della velocità V, v cresce con t) i corrispondenti valori di v.

Dalla (34), separando le variabili ed integrando da t' fino a t'', ove si osservi che mentre t cresce da t' a t'', v varia, sempre crescendo, da v' a v'', si ottiene

$$\int_{v'}^{v''} \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{V^2}} = g(t'' - t').$$

L'assurdo annunciato si trae da questa formula, immaginando che t'' converga verso t_1. Infatti, mentre il secondo membro tende allora verso il limite finito $g(t_1 - t')$, il primo membro (in quanto sussista il supposto comportamento della velocità, e v'' converga di conseguenza verso V al convergere di t'' verso t_1) ha invece per limite l'infinito, giacchè la funzione sotto il segno ha per $v = V$ un infinito del 1° ordine.

44. Veniamo ormai all'effettiva integrazione della (34), nella ipotesi che il mobile sia abbandonato a se stesso senza velocità iniziale, od anche, più generalmente, che sia lanciato verso il basso con velocità $v_0 < V$. Per quanto abbiamo visto, sarà certamente $v < V$ in qualsiasi istante, onde scrivendo la (34) a variabili separate sotto la forma

$$\frac{2g\,dt}{V} = \frac{2}{V}\frac{dv}{1 - \frac{v^2}{V^2}} = \left\{ \frac{1}{1 + \frac{v}{V}} + \frac{1}{1 - \frac{v}{V}} \right\} \frac{dv}{V},$$

si avrà che i denominatori dell'ultimo membro si mantengono costantemente positivi. Di qui, integrando, si ottiene

$$\frac{2g}{V}t = \log \frac{1 + \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}} + \text{cost.},$$

dove la costante di integrazione si può indicare con $\frac{2gt^*}{V}$ e va determinata in base alla condizione che sia $v = v_0$ per $t = 0$; il che dà in particolare $t^* = 0$, quando è nulla la velocità iniziale v_0 ([1]).

Passando dai logaritmi ai numeri e risolvendo rispetto a v, ove si ponga per brevità $\tau = g(t - t^*)/V$, si ricava

(35) $$\frac{v}{V} = \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{e^\tau + e^{-\tau}},$$

ossia

(35') $$v = V - \frac{2V}{e^{2\tau} + 1}.$$

Quest'ultima espressione esplicita di v in termini di τ, e quindi di t, porge un'ovvia conferma del duplice fatto che la velocità è sempre minore di V, e vi converge asintoticamente al crescere indefinito di t.

45. Lo spazio s si può calcolare con una ulteriore quadratura. Invero, avendosi $ds = vdt$, si può scrivere, in base alla relazione che lega t a τ,

$$ds = \frac{V}{g} v d\tau$$

e quindi, per la (35),

$$ds = \frac{V^2}{g} \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{e^\tau + e^{-\tau}}\, d\tau = \frac{V^2}{g}\, d \log (e^\tau + e^{-\tau}).$$

([1]) Poichè si suppone valido durante tutto il moto il regime idraulico, bisogna preventivamente assicurarsi che le velocità estreme v_0 e V cadano nell'ambito di validità di tale regime. A rigore, rimarrebbe così escluso il caso di una velocità iniziale eguale a zero, perchè, per velocità piccole, diciamo inferiori ai 2 m/sec (n. 22), non vale il regime suddetto. Si può però giustificare l'applicazione delle formule a questo caso, pensando che la velocità cresce assai rapidamente: deve essere perciò trascurabile l'influenza perturbatrice del primo periodo, in cui non vige ancora il regime idraulico.

Di qui, integrando e assumendo $s = 0$ per $t = 0$, cioè per $\tau = -gt^*/V = \tau_0$, si ottiene la voluta espressione di s

$$s = \frac{V^2}{g} \log \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{e^{\tau_0} + e^{-\tau_0}} . \tag{36}$$

Allo stesso risultato si può arrivare sotto altra forma, riprendendo la (34) e considerando (come al n. 38) la $v = ds/dt$ funzione di t pel tramite di s. Con ciò si ha

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{ds}$$

e alla (34) si può dare l'aspetto

$$\frac{2g}{V^2} ds = \frac{1}{V^2} \frac{d(v^2)}{1 - \frac{v^2}{V^2}} ,$$

cosicchè, integrando e notando che per $v = v_0$ deve essere $s = 0$, si perviene alla

$$s = \frac{V^2}{2g} \log \frac{V^2 - v_0^2}{V^2 - v^2} , \tag{36'}$$

che, combinata colla (35), fornisce, quando si voglia, l'espressione di s in termini di τ. La coincidenza della (36') colla (36) si verifica, tenendo conto appunto della (35) e della sua determinazione relativa all'istante iniziale

$$\frac{v_0}{V} = \frac{e^{\tau_0} - e^{-\tau_0}}{e^{\tau_0} + e^{-\tau_0}} .$$

§ 9. – Vibrazioni spontanee e vibrazioni forzate. Risonanza.

46. Da ultimo, come applicazione riassuntiva degli sviluppi dei §§ 4 e 5, consideriamo il moto, su traiettoria prestabilita, di un punto materiale P di massa m, soggetto simultaneamente ad una forza tipica di richiamo verso una posizione di equilibrio O e ad una resistenza passiva di tipo viscoso [1]. L'equazione differenziale è data da

$$m\ddot{s} = -b\dot{s} - \lambda s ,$$

[1] Per il caso, in cui la resistenza sia invece di tipo idraulico, una discussione approfondita si può trovare in una Memoria del SIGNORINI (« Atti del R. Ist. Ven. », t. 73, 1914, pp. 810-858).

dove b e λ denotano due costanti positive; e basta porre

$$\frac{b}{m} = 2h\,, \quad \frac{\lambda}{m} = k\,,$$

per ridurla alla forma

$$\ddot{s} + 2h\dot{s} + k\dot{s} = 0\,. \tag{37}$$

Ritroviamo così l'equazione differenziale (lineare a coefficienti costanti) già esaurientemente discussa in Cinematica (II_1, n. 43) in ordine ai moti da essa definiti. Ricordando i risultati là stabiliti, possiamo qui senz'altro affermare che il punto P, nelle condizioni dianzi supposte, si muove di moto oscillatorio smorzato intorno ad O, oppure di moto aperiodico (con una inversione di senso al più e con meta asintotica a distanza finita oppure con meta infinitamente lontana).

Il caso più interessante e a cui qui intendiamo limitarci è quello delle oscillazioni smorzate, che, come sappiamo, è caratterizzato dalla condizione $k > h^2$. Posto allora $k = h^2 + \omega^2$, con che la (37) assume la nota forma

$$\ddot{s} + 2h\dot{s} + (h^2 + \omega^2)s = 0\,, \tag{37'}$$

ω fornisce la costante di frequenza delle vibrazioni, mentre h ne dà la costante di smorzamento; e l'equazione oraria del moto [integrale generale della (37′)] assume la forma

$$s = re^{-ht}\cos(\omega t + \theta_0)\,,$$

dove r e θ_0 sono le due costanti arbitrarie.

Un primo esempio di moti di questo tipo, realizzabili fisicamente, ci è stato offerto, poche pagine innanzi, dalle oscillazioni di un pendolo semplice, ostacolate da una resistenza di tipo viscoso (n. 34). Non meno espressivo ed interessante è il caso delle *vibrazioni spontanee* di un diapason, vale a dire delle vibrazioni di un diapason che, una volta eccitato, venga abbandonato a se stesso in aria tranquilla.

In questo caso, l'estremità P di uno dei rebbi si può considerare come un punto materiale che vibra descrivendo una linea assai poco diversa da una retta; il suo collegamento con l'asta determina una (intensa) forza elastica di richiamo verso la posizione di equilibrio, e un sistema di eventuali resistenze passive (attrito, imperfetta elasticità, ecc.), cui si aggiunge quella dell'aria. Queste resistenze passive potranno in prima approssimazione compendiarsi in una semplice resistenza viscosa, talchè sono sensibilmente realizzate le condizioni di sollecitazione supposte dapprincipio; e, ove si indichi con s l'arco descritto da P, contato a partire dalla posizione naturale del rebbio (positivamente in un senso, negativamente nell'altro), il moto è definito appunto da un'equazione del tipo (37). Siccome poi la resistenza passiva (tangenziale) risultante è estremamente piccola di fronte alla forza di richiamo, è a ritenersi largamente soddisfatta la condizione $k > h^2$, che assicura pel moto il carattere di vibrazioni smorzate.

Il fatto che, nelle supposte condizioni, il periodo $T = 2\pi/\omega$ non dipende dalle circostanze iniziali (modalità dell'eccitazione), ma soltanto da h e k, cioè da elementi intrinseci del diapason, giustifica il suo impiego come strumento campione delle altezze dei suoni.

47. Vibrazioni forzate. — Si sogliono designare con questo nome quelle vibrazioni che vengono determinate dall'azione di una assegnata forza periodica, sovrapposta ad un'influenza del tipo già considerato (richiamo elastico e resistenza viscosa). Designando con Q la componente tangenziale di questa forza nel senso delle s crescenti, divisa per m, cioè riferita all'unità di massa del mobile, e denotando con $E(s)$ l'espressione differenziale a primo membro della (37), si ha ovviamente l'equazione del moto sotto la forma

$$E(s) = Q . \tag{38}$$

La forza periodica Q si intende numericamente definita in ogni istante, ed è quindi da riguardarsi funzione della sola t, dotata di un certo periodo $T_1 = 2\pi/\omega_1$.

48. Per l'integrazione della (38) (equazione lineare non omogenea) tutto si riduce, secondo una nota regola di Calcolo, a determinare un integrale particolare $J(t)$; giacchè se ne deduce poi subito l'integrale generale, ponendo

$$s = J + \sigma , \tag{39}$$

dove σ designa l'integrale generale della equazione omogenea $E(s) = 0$, cioè (n. 46)

$$\sigma = re^{-ht} \cos (\omega t + \theta_0) , \qquad \omega = \sqrt{h - k^2}$$

colle due costanti di integrazione r e θ_0.

Che $J + \sigma$ costituisca effettivamente l'integrale generale della

(38) è ben chiaro. Anzitutto sommando le due equazioni, cui per definizione soddisfano J e σ,

$$E(J) = Q\,, \qquad E(\sigma) = 0\,,$$

risulta

$$E(J) + E(\sigma) = E(J + \sigma) = Q\,,$$

e quindi $J + \sigma$ verifica la (38); inoltre esso contiene in modo essenziale (al pari di σ) due costanti arbitrarie.

Dalla espressione (39) dell'integrale generale, ove si tenga conto della circostanza che σ converge a zero al crescere indefinito di t (o, praticamente, in un intervallo di tempo abbastanza breve), si ricava un criterio importantissimo di fronte alle applicazioni concrete. Ed è che, *per caratterizzare l'andamento di regime delle oscillazioni forzate* (regime che si stabilisce tanto più rapidamente, quanto più grande è lo smorzamento h), *basta aver riguardo all'integrale particolare J.*

49. Forza addizionale costante. — Consideriamo in primo luogo il caso semplicissimo di una forza addizionale costante, (che è, si può dire, il limite di una sollecitazione periodica, quando tende a zero il periodo, in capo al quale si rinnovano le stesse condizioni). Un integrale particolare J di $E(s) = Q$, per Q costante, è ovviamente fornito dal valore, pure costante, $s = Q/k$, che corrisponde ad uno stato di *equilibrio forzato*, cioè in posizione alquanto spostata (nel senso della forza agente) dalla posizione di equilibrio naturale ($s = 0$).

La sollecitazione addizionale è statica, e statico è corrispondentemente l'assetto di regime. Quanto all'integrale generale $s = J + \sigma$, esso rappresenta (come si vede subito assumendo la posizione $s = J$ per origine degli archi) delle oscillazioni smorzate, identiche a quelle che si hanno in assenza di Q, salvo che il centro di estinzione è dislocato e ha sede, come è naturale, nella nuova posizione di equilibrio.

50. Forza addizionale sinusoidale. — La determinazione esplicita di J può ancora ottenersi in modo assai agevole nel caso particolarmente importante, in cui la funzione periodica Q sia sinusoidale, cioè della forma

$$q \sin(\omega_1 t + \alpha)\,,$$

dove q, α (ed ω_1) sono costanti date comunque. Notiamo che, volendo, si può far qui apparire il coseno in luogo del seno, scambiando α in $\alpha + \pi/2$; e, d'altra parte, si può in ogni caso, spostando l'origine dei tempi, ridurre $\alpha = 0$, $q > 0$.

Noi poniamo senz'altro,

$$Q = q \sin \omega_1 t\,, \qquad (q > 0)\,,$$

e ci proponiamo di dimostrare che l'equazione differenziale (38) ammette un integrale particolare della forma

$$J(t) = p \sin (\omega_1 t - \varphi)\,, \tag{40}$$

dove, beninteso, le costanti p e φ vanno scelte in modo opportuno.

A tale scopo partiamo dall'identità

$$E(J) = \ddot{J} + 2h\dot{J} + kJ =$$
$$= p\,\{2h\omega_1 \cos (\omega_1 t - \varphi) + [k - \omega_1^2] \sin (\omega_1 t - \varphi)\}\,,$$

e osserviamo che per rendere $E(J)$ identico a

$$Q = q \sin \omega_1 t = q \sin [\varphi + (\omega_1 t - \varphi)] =$$
$$= q\,\{\sin \varphi \cos (\omega_1 t - \varphi) + \cos \varphi \sin (\omega_1 t - \varphi)\}$$

basta eguagliare, nelle due espressioni, i coefficienti di $\cos (\omega_1 t - \varphi)$ e $\sin (\omega_1 t - \varphi)$. Otteniamo così il sistema

$$2hp\omega_1 = q \sin \varphi\,, \qquad p(k - \omega_1^2) = q \cos \varphi\,,$$

che determina univocamente le due costanti p e φ, purchè si convenga di assumere $p > 0$ e φ compreso fra 0 e π (escluso quest'ultimo estremo). Infatti, quadrando e sommando, si ha

$$p = \frac{q}{\sqrt{(k - \omega_1^2)^2 + 4h^2\omega_1^2}}\,, \tag{41}$$

dove, per le imposte condizioni, il radicale va assunto in senso aritmetico; e, d'altra parte dividendo membro a membro, si ottiene

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2h\omega_1}{k - \omega_1^2}\,, \tag{42}$$

con che l'angolo φ, subordinatamente alla condizione $0 \leq \varphi < \pi$, risulta individuato.

La soluzione particolare (40) così determinata è evidentemente periodica con lo stesso periodo $T_1 = 2\pi/\omega_1$ della forza addizionale $Q = q \sin \omega_1 t$; in essa p rappresenta l'ampiezza della oscillazione forzata e φ si può interpretare come la *differenza*, anzi il *ritardo di fase* fra la forza e il moto.

Dalla (42) risulta che $\operatorname{tg} \varphi$ è positiva o negativa, e quindi φ è minore o maggiore di $\pi/2$ (cioè di un quarto di periodo [1]), secondochè ω_1^2 è $<$ o $> k$.

51. Caso di uno smorzamento lieve. — Nell'ipotesi che la costante di smorzamento h sia molto piccola (come in particolare avviene per i diapason) e sia quindi trascurabile h^2 di fronte a k, si può identificare k con $k - h^2 = \omega^2$ (quadrato della costante di frequenza delle oscillazioni spontanee) e attribuire di conseguenza al criterio discriminante or ora stabilito, $\omega_1^2 \lesseqgtr k$, la forma $\omega_1^2 \lesseqgtr \omega^2$ od anche

$$\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^2 \lesseqgtr \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2,$$

onde si perviene alla conclusione espressiva che, nell'ipotesi di uno smorzamento molto lieve, il ritardo di fase è minore di un quarto di periodo ($\varphi < \pi/2$), ogniqualvolta la frequenza (inversa del periodo) della forza esterna sia inferiore a quella delle oscillazioni spontanee; maggiore di un quarto di periodo nel caso opposto.

Giova inoltre osservare che, per quel che riguarda il calcolo della ampiezza p, non basta il fatto che h^2 sia trascurabile di fronte a k, perchè a denominatore della (41) si possa trascurare il termine $4h^2\omega_1^2$ di fronte a $(k - \omega_1^2)^2$; chè anzi ciò non sarà certamente lecito se ω_1^2 è prossimo a k, o, ciò che qui è lo stesso, ad ω^2, e in tal caso bisognerà attenersi alla formula rigorosa (41). Ma se, sempre nell'ipotesi di h piccolissimo, si ha di più che la costante di frequenza ω_1 della sollecitazione addizionale non è troppo vicina all'analoga costante ω intrinseca al sistema, si potrà usare in luogo della (41) la formula approssimata

$$p = \frac{q}{k - \omega_1^2}, \tag{41'}$$

o, se si vuole,

$$p = \frac{q}{\omega^2 - \omega_1^2}.$$

Se poi, oltre le ipotesi ammesse sin qui, si verifica anche la circostanza che la ω_1 sia piccolissima, diciamo addirittura trascurabile di fronte ad ω (o, ciò che qui è lo stesso, sia trascurabile ω_1^2 di fronte a k) si rileva dalla (42) che si ha sensibilmente $\varphi = 0$. Si può dire allora che l'effetto è in fase colla causa; e l'ampiezza

[1] In quanto, rispetto alla fase $\omega_1 t - p$ dell'integrale J definito dalla (40), $\pi/2$ rappresenta precisamente il quarto del periodo 2π.

si può ritenere, in base alla (41'), sensibilmente eguale a q/k, cioè allo *spostamento statico*, che sarebbe provocato da una forza costante di intensità eguale all'intensità massima q della sollecitazione periodica addizionale.

52. Caso ideale di uno smorzamento nullo. — Mettiamoci addirittura nell'ipotesi ideale dell'assoluta assenza di ogni resistenza passiva ($h = 0$, $k = \omega^2$) e cerchiamo di determinare per la corrispondente equazione

$$(38') \qquad \ddot{s} + \omega^2 s = q \sin \omega_1 t$$

una soluzione periodica della forma (40). Per materiale sostituzione perveniamo al sistema

$$(43) \qquad p(\omega^2 - \omega_1^2) \sin \varphi = 0\,, \qquad p(\omega^2 - \omega_1^2) \cos \varphi = 0\,,$$

il quale, quando sia $\omega_1 \lessgtr \omega$, (e anche qui si adotti la limitazione $0 \leqslant \varphi < \pi$), dà

$$\varphi = 0\,, \quad p = \frac{q}{\omega^2 - \omega_1^2}\,.$$

Ritroviamo dunque, come espressione esatta del massimo spostamento, quella stessa che al n. prec. ottenemmo come approssimata nel caso di h piccolissimo ed ω sensibilmente diverso da ω_1.

Se poi si ha $\omega_1 = \omega$, cioè se il periodo $2\pi/\omega_1$ della forza addizionale è identico a quello delle vibrazioni spontanee del sistema, le (43), in quanto si richieda che l'azione perturbatrice periodica non sia costantemente nulla (cioè non sia $q = 0$), diventano contraddittorie; il che vuol dire che in tal caso non esiste per la (38') un integrale di tipo sinusoidale puro. Ma si verifica direttamente che per $\omega_1 = \omega$ la (37') ammette l'integrale particolare

$$J(t) = \frac{-q}{2\omega}\, t \cos \omega t\,,$$

il quale corrisponde, si può dire, ad oscillazioni, che hanno tutte lo stesso periodo $2\pi/\omega$, comune alle vibrazioni spontanee del sistema e all'azione perturbatrice, ma sono di ampiezza indefinitamente crescente col tempo.

53. Risonanza. — Tornando alle considerazioni generali, supponiamo di tener fisse le costanti h e k (e quindi ω e T) caratteristiche del sistema vibrante, nonchè l'intensità massima q della forza addizionale, e, facendo variare la costante di frequenza ω_1 di quest'ultima (ossia il suo periodo $T_1 = 2\pi/\omega_1$), vediamo come vari conseguentemente l'ampiezza p dell'oscillazione forzata corrispondente. Faremo vedere come la p ammetta sempre un unico massimo, il quale, se è piccola la costante di smorzamento h propria del sistema vibrante, vien raggiunto per un valore di ω_1 prossimo (sensibilmente eguale) alla costante di frequenza ω che compete alle vibrazioni spontanee.

Di qui segue la spiegazione del cosiddetto *fenomeno della risonanza* (pei sistemi vibranti a costante di smorzamento spontaneo piccolissima), il quale si può notoriamente schematizzare come segue. Una forza esterna periodica di data intensità massima q, ha, per un valore generico della costante di frequenza ω_1, un effetto appena sensibile (ampiezza assai piccola); ma, se ω_1 è molto prossima alla costante di frequenza propria ω del sistema vibrante, l'effetto (caratterizzato dal valore del massimo spostamento p) si intensifica in modo enorme.

Se ne ha un esempio tipico in un diapason (pel quale, come già si notò, la costante di smorzamento h è piccolissima).

Supponiamo che l'aria circostante sia messa in vibrazione sonora da un qualche corpo esterno (per es., da un secondo diapason, o da una canna d'organo, ecc.). In queste condizioni il diapason considerato subisce una (debolissima) azione periodica e sensibilmente sinusoidale (cfr. l'osservazione finale del n. 54) che si sovrappone alle solite azioni intrinseche (n. 46).

Ci troviamo così nel caso delle vibrazioni forzate. D'ordinario esse sono deboli, e non si avvertono neanche. Quando tuttavia il suono esterno ha altezza eguale (o molto vicina) a quella caratteristica del diapason, si determina un cospicuo rinforzo, e la vibrazione del diapason si avverte in modo assai manifesto.

Per studiare il modo in cui varia p come funzione della sola variabile ω_1, riprendiamo la (41), ponendo

$$\frac{\omega_1^2}{k} = x, \qquad \frac{4h^2}{k} = \varepsilon^2,$$

con che la variabile x, che viene sostituita alla frequenza ω_1, risulta essenzialmente positiva, mentre, data la piccolezza di h, la ε va ritenuta una frazione propria, anzi una frazione piccolissima. Con ciò la (41) si può scrivere

$$p = \frac{q}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + \varepsilon^2 x}}. \tag{41''}$$

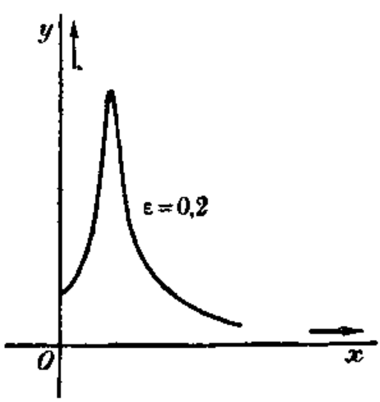
La funzione $(1-x)^2 + \varepsilon^2 x$ ha per derivata prima la $-2(1-x) + \varepsilon^2$ e per derivata seconda la costante 2, talchè ammette un minimo (ed uno solo) per $x = 1 - \varepsilon^2/2$. Ne consegue che la p, al variare di ω_1, possiede un massimo (ed uno solo) il quale corrisponde, per le posizioni dianzi stabilite, alla frequenza ω_1 data da

$$\omega_1^2 = k\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right) = k - 2h^2 = \omega^2 - h^2 . \tag{44}$$

Codesto massimo, come si verifica ponendo, nella (41), $k - \omega_1^2 = 2h^2$, $\omega_1^2 = \omega^2 - h^2$, vale

$$\frac{q}{2h\omega} = \frac{\omega}{2h} \cdot \frac{q}{\omega^2} . \tag{45}$$

Dalle (44) e (45) risulta senz'altro che, per h piccolissimo di fronte ad ω, il massimo di p si determina per una costante di frequenza ω_1 prossima ad ω ed ha un valore grandissimo rispetto a q/ω^2, o, ciò che è lo stesso, potendosi confondere ω^2 con k, rispetto a q/k, che in base alla (41''), è il valore di p per $x = 0$, ossia per $\omega_1 = 0$.



Per rendersi conto del carattere spiccato del massimo nelle condizioni suddette, basta pensare che, se fosse completamente trascurabile h di fronte ad ω e quindi a fortiori h^2 di fronte a k, cioè ε di fronte all'unità, il massimo di

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + \varepsilon^2 x}}$$

sarebbe addirittura infinito (per $x = 1$). Ma già con valori più che discreti di ε (per es., non superiori ad 1/5) si ha, per $x = 1 - \varepsilon^2/2$, un massimo acutissimo. La curva (cfr. la figura)

$$y = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + \varepsilon^2 x}}$$

discende rapidissimamente da una parte e dall'altra del vertice.

54. Caso di una forza addizionale periodica qualsiasi. — Abbiamo esaminato dettagliatamente le proprietà di J, nella ipotesi particolare che la forza periodica Q sia sinusoidale, cioè riducibile alla forma $q \sin \omega_1 t$.

L'importanza attribuita a questa forma speciale, è ampiamente giustificata dalle ragioni che seguono.

In primo luogo, se nella equazione

$$E(s) = Q(t) \tag{38}$$

la funzione $Q(t)$ è somma di due o più altre Q_1, Q_2, ..., per ciascuna delle quali si sappia determinare un particolare integrale J_1, J_2, ..., di $E(s) = Q_1$, $E(s) = Q_2$, ..., basta manifestamente porre

$$J = J_1 + J_2 + \dots$$

per avere un integrale della (38).

Così, se Q è somma di termini della forma

$$q \sin (\omega_1 t + \alpha) \; ,$$

con q, ω_1, α costanti, comunque fissate per ciascun termine, si potrà subito assegnare un integrale particolare J della (38) della forma di una somma di altrettanti termini di tipo (40) (più una eventuale costante, se tra i valori di ω_1 figura lo zero (n. 49)).

Questa osservazione ha una grande portata, quando si connetta ad un risultato di Analisi, conosciuto sotto il nome di *teorema del* FOURIER (¹), in base al quale qualsiasi funzione $Q(t)$, periodica di periodo $T_1 = 2\pi/\omega_1$, finita, continua e dotata di derivata (generalmente) continua, può (per qualsiasi t) essere rappresentata da una serie (assolutamente e uniformemente convergente) del tipo

$$q_0 + \sum_1^\infty {}_n q_n \sin (n\omega_1 t + \alpha_n) \; , \tag{46}$$

essendo le q_n e le α_n opportune costanti.

La decomposizione di un'assegnata $Q(t)$ in termini del tipo indicato costituisce la cosiddetta *analisi armonica*.

Il teorema del FOURIER, combinato colla precedente osserva-

(¹) GIOVANNI BATTISTA GIUSEPPE FOURIER, n. ad Auxerre nel 1768, m. a Parigi nel 1830, è specialmente celebrato per la sua opera fondamentale sulla propagazione del calore, che è il primo e classico modello di una teoria fisico-matematica, che non dipende dagli schemi della Meccanica razionale, ma procede con trattazione autonoma. In queste ricerche si valse largamente delle serie e degli integrali, che portano il suo nome. Si occupò anche di Statica, giustificando per nuove vie il principio dei lavori virtuali. Fu professore alla Scuola Politecnica di Parigi, seguì Napoleone Bonaparte in Egitto, resse dal 1802 al 1816 la prefettura dell'Isère, e dal 1817 fino alla sua morte fu Segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze di Parigi. Le sue opere complete costituiscono due grossi volumi, pubblicati nel 1890 (Paris, Gauthier-Villars).

zione, permette senz'altro di determinare (come somma di una serie, di cui sarebbe facile accertare la convergenza) un integrale particolare J della (38), qualunque sia la legge della forza periodica addizionale Q.

Va del resto notato che, nella maggior parte dei casi pratici, il primo termine (non costante) della serie (46) (*suono fondamentale* nei fenomeni acustici) prepondera notevolmente sui successivi (*armoniche superiori*), sicchè l'integrale particolare J (a prescindere da una inessenziale costante) si riduce sensibilmente alla forma tipica (40).

Capitolo II.

DINAMICA DEL PUNTO LIBERO E SU SUPERFICIE PRESTABILITA

§ 1. – Generalità. Integrali primi.

1. Occupiamoci anzitutto del moto di un punto materiale libero P, soggetto ad una forza totale conosciuta $\boldsymbol{F}$; e notiamo subito che i problemi concreti più importanti, che conducono a moti di punti (o sistemi di punti) liberi sono:

1°) i *problemi balistici* (dove per traiettorie considerevoli bisogna tener conto che gli assi di riferimento terrestri non sono galileiani);

2°) i *problemi della meccanica celeste.*

Vedemmo già (VII_1, n. 22) come, in base alla equazione fondamentale $\boldsymbol{ma} = \boldsymbol{F}$, che proiettata sugli assi di una terna galileiana dà, nei simboli soliti, le tre equazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} m\ddot{x} = X(x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t)\,, \\ m\ddot{y} = Y(x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t)\,, \\ m\ddot{z} = Z\,(x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t)\,, \end{cases}$$

il problema della determinazione del moto del punto libero si riduca alla integrazione di codesto sistema di tre equazioni differenziali del 2° ordine nelle tre funzioni incognite x, y, z dell'unica variabile indipendente t; talchè, nelle condizioni supposte, sono possibili, pel punto P, ∞^6 moti diversi, corrispondentemente alle scelte possibili delle sei costanti arbitrarie da cui dipende l'integrale generale di (1).

Per individuare uno di questi moti occorre aggiungere tante condizioni ulteriori quante bastano a determinare le sei costanti d'integrazione, e il modo più semplice e consueto di pervenire a ciò si è di assegnare la posizione e la velocità che il punto deve assumere in un dato istante (per lo più nell'istante iniziale del moto).

Rilevammo altresì che l'integrazione del sistema (1) non si può in generale effettuare in termini finiti, bensì soltanto mediante sviluppi in serie.

Qui aggiungiamo che in ogni caso, per ridurre la difficoltà del problema, convien cercare di determinare qualche *integrale primo* del sistema (1), designandosi con tal nome ogni equazione della orma

$$(2) \qquad f(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t) = \text{cost. arb.},$$

la quale sia conseguenza *necessaria* delle (1), cioè risulti identicamente verificata (per un opportuno valore della costante a secondo membro) da ogni singola terna di funzioni x, y, z soddisfacenti alle (1), e non contenga le derivate seconde delle funzioni incognite $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

La conoscenza di integrali primi agevola manifestamente la integrazione delle (1) in quanto permette di sostituirle tutte o in parte (secondo che si saranno trovati tre integrali primi indipendenti, rispetto ad $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, o meno di tre) con equazioni del tipo (2) che sono del primo ordine; ulteriori semplificazioni intervengono, quando si possono assegnare più di tre integrali indipendenti.

2. Esistono categorie abbastanza generali di forze, per le quali si possono facilmente assegnare degli integrali primi.

a) Supponiamo, per esempio, che la *forza* (totale) F applicata ad un punto materiale P, *sia costantemente perpendicolare ad una retta fissa* (o in particolare nulla). Assumendo questa retta come asse z, la ipotesi equivale a $Z = 0$, onde la terza delle (1) dà per integrazione successiva

$$m\dot{z} = c_1, \qquad mz = c_1 t + c_2 .$$

Son questi due integrali semplicissimi, di cui però il secondo non è che l'integrale generale del primo; il quale esprime evidentemente che è costante la componente della quantità di moto secondo z, cioè nella direzione fissa perpendicolare, per ipotesi, alla forza. Esso si chiama perciò *integrale della quantità di moto*.

Il secondo integrale dice che la coordinata corrispondente è funzione lineare del tempo.

b) Come ulteriore esempio, consideriamo il caso in cui *la forza totale F sia costantemente incidente ad una retta fissa* (o in particolare nulla). Lo stesso accade, in virtù della (1), pel vettore ma pensato applicato nel punto P; in altre parole questo vettore ha momento nullo rispetto alla retta fissa. Ma, ove si assuma questa retta come asse z, codesto momento (scalare) è dato dalla corrispondente componente del prodotto $(P-O)\wedge m\boldsymbol{a}$, onde si ha l'equazione

$$m(x\ddot{y}-y\ddot{x})=0\,, \tag{3}$$

che fornisce senz'altro l'integrale primo

$$m(x\dot{y}-\dot{y}x)=\text{cost.} \tag{4}$$

Questo integrale primo prende il nome di *integrale delle aree* od anche *del momento della quantità di moto*, in quanto esprime (il fattore m essendo una costante intrinseca del punto mobile) la costanza della velocità areolare (II_1, n. 20) della proiezione di P sul piano $z=0$, o, ciò che è lo stesso (includendo nell'enunciato anche il fattore m), la costanza del momento (scalare) della quantità di moto di P rispetto all'asse z.

Quando sussiste l'integrale primo (4) si suol dire che vale pel moto la *legge delle aree* sul piano $z=0$ rispetto al punto O; e, scritta la (4) sotto la forma

$$x\dot{y}-y\dot{x}=c\,, \tag{5}$$

la costante c (doppio della velocità areolare, rispetto ad O, della proiezione di P sul piano $z=0$) si chiama *costante delle aree.*

Possiamo dunque dire che *pel moto di un punto sollecitato da una forza totale costantemente incidente ad un asse, vale, su ogni piano perpendicolare a questo, la legge delle aree rispetto al punto in cui il piano considerato interseca l'asse.*

Così, se la forza totale è costantemente incidente all'asse x o all'asse y, valgono pel moto l'uno o, rispettivamente, l'altro dei due integrali primi

$$m(y\dot{z}-z\dot{y})=\text{cost.}\,,\qquad m(z\dot{x}-x\dot{z})=\text{cost.}$$

Se poi si tratta addirittura di una forza $\boldsymbol{F}$ *centrale* [VII_1, n. 29, c)], ed è O il suo centro, l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ di P, per la sua proporzionalità ad $\boldsymbol{F}$, risulta, in ogni posizione del punto, passante per O (o, in particolare, nulla). Il moto è perciò *centrale* e sussiste (II_1, n. 45) l'equazione

$$(P-O)\wedge\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}\,, \tag{6}$$

la quale esprime la costanza della velocità areolare, in senso vettoriale, rispetto ad O ed equivale al sistema dei tre integrali primi (scalari) delle aree pocanzi scritti (relativi ai tre piani coordinati, supposti con l'origine nel centro O).

Dalla (6), come ben sappiamo (l. c., nn. 46-47), segue, in particolare, che il moto è piano e, precisamente, avviene in un piano passante pel centro.

c) Se la forza (totale) $\boldsymbol{F}$ applicata al punto libero P *è conservativa*, le equazioni (1) ammettono come è ben nóto (VIII_1, n. 11) l'*integrale* (primo) *delle forze vive*

$$T - U = E ,$$

dove, secondo le consuete notazioni, T designa la forza viva del punto, U il potenziale della forza ed E l'energia totale (costante).

§ 2. – Moto di un punto soggetto ad una forza centrale.

3. Il più notevole esempio di un problema dinamico, che grazie alla validità di un conveniente numero di integrali primi, risulti integrabile per quadrature, è fornito dal problema del moto di un punto libero P, soggetto ad una forza $\boldsymbol{F}$ *centrale*.

In tal caso, come si è visto al n. prec. *b*), sussiste anzitutto l'integrale vettoriale delle aree (6); e il moto avviene in un certo piano passante pel centro O della forza. Si è così condotti ad assumere codesto piano del moto quale uno dei piani coordinati, p. es., $z = 0$, con che dei tre integrali (scalari) delle aree

$$y\dot{z} - z\dot{y} = \text{cost.}, \qquad z\dot{x} - x\dot{z} = \text{cost.}, \qquad x\dot{y} - y\dot{x} = \text{cost.},$$

i due primi si riducono ad identità, in quanto sono nulle, in ogni istante, le z, $\dot{z}$ (nonchè le corrispondenti costanti a secondo membro), mentre il terzo,

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c \tag{5}$$

fornisce una effettiva relazione fra le due coordinate incognite di P e le loro derivate.

D'altra parte la $\boldsymbol{F}$, come forza centrale, è conservativa, [VII_1, n. 29, *c*)]; e, precisamente, se, uniformandoci all'uso invalso nella teoria delle forze centrali, indichiamo con r (anzichè con ρ come si è fatto nella I Parte) la distanza OP e denotiamo con $\varphi(r)$ la componente, secondo la retta orientata OP, della forza $\boldsymbol{F}$ (riferita all'unità di massa), il potenziale U è la funzione di r definita, a meno di una costante additiva, dalla

$$\frac{dU}{dr} = \varphi(r) , \tag{7}$$

cioè la

$$U(r) = \int_{r_0}^{r} \varphi(r) dr .$$

Vale, quindi, con questa determinazione del potenziale, anche l'integrale primo delle forze vive (n. prec., *c*), che, ove per semplicità si prenda come unità di massa quella del punto mobile, assume l'aspetto

$$\frac{1}{2} v^2 - U(r) = E \; ; \tag{8}$$

ed è appunto dalla coesistenza dei due integrali primi (5) e (8) che, come vedremo, risulta la integrabilità per quadrature del problema (ridotto al piano xy) del moto di un punto libero, soggetto ad una forza centrale.

Fin d'ora osserviamo che, nel piano xy del moto, le incognite sono le coordinate x, y del punto mobile P, e queste due incognite sono definite (a meno delle condizioni iniziali) dai due integrali primi (5), (8) che costituiscono due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. L'integrazione di questo sistema introdurrà due costanti arbitrarie, cosicchè, se si tien conto che sono pure arbitrarie le costanti c ed E delle aree e della energia, si riconosce che il nostro moto, nel suo piano, dipende da quattro costanti arbitrarie.

Se poi si immagina di riferire il moto ad una terna generica, occorrono due ulteriori parametri per individuare il piano del moto (pel centro O) e si ottengono, in tutto, sei costanti arbitrarie, quante appunto ne debbono comparire nell'integrale generale di ogni problema di moto di un punto libero comunque sollecitato (n. 1).

4. Sostituibilità degli integrali primi alle equazioni del moto. Traiettorie circolari. — Si è visto al n. prec. che i due integrali primi (5) ed (8) sono necessarie conseguenze delle equazioni differenziali del moto. Importa rilevare che, viceversa, da codesti due integrali primi si possono dedurre le originarie equazioni differenziali del moto e, quindi, vi è fra i due sistemi perfetta equivalenza, purchè si escluda il caso particolare, che corrisponde alle eventuali traiettorie circolari del problema.

Infatti l'equazione (5), derivata rispetto al tempo, dà

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0 \, ,$$

mentre dalla (8), ove si tenga conto che $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, si deduce analogamente

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{dU}{dr}\,\dot{r}\;;$$

e queste due equazioni si possono risolvere rispetto ad $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ (così da pervenire alle equazioni newtoniane del moto), purchè sia diverso da zero il determinante dei coefficienti di $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ nelle due equazioni. Ora questo determinante è dato da

$$\begin{vmatrix} -y & x \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = -x\dot{x} - y\dot{y} = -\frac{1}{2}\frac{d(r^2)}{dt}\,,$$

sicchè risulta certamente diverso da zero, se si esclude il caso $r =$ cost., che corrisponde appunto alle eventuali traiettorie circolari.

Si riconosce così che, quando di un punto soggetto ad una forza centrale si vogliono studiare le eventuali orbite circolari, non basta tener conto degli integrali primi delle aree e della forza viva, ma bisogna riprendere le originarie equazioni del moto o, più semplicemente, discutere questo caso elementare in modo diretto ed autonomo (cfr. III, n. 4).

5. Prima di procedere alla integrazione del sistema (5), (8), fermiamoci un momento su di una osservazione di carattere qualitativo, circa il caso in cui la energia totale E del mobile sia negativa e il potenziale U (supposto finito e continuo per tutti i valori positivi di r), al crescere indefinito di r, tenda ad un limite finito, il quale, ove si disponga della costante additiva di integrazione, si può sempre ritenere, come pei potenziali newtoniani, eguale allo zero.

L'integrale delle forze vive, in quanto $v^2/2$ non è mai negativo, implica $U(r) \geq -E$, cosicchè, sotto l'ipotesi $E < 0$, la funzione continua $U(r)$, durante il moto, ammette un minimo positivo; e da ciò, pel fatto che per $r \to \infty$ la $U(r)$ si annulla, consegue che r ammette un limite superiore finito. Riconosciamo così che, se il potenziale $U(r)$ di una forza centrale si mantiene regolare all'infinito e l'energia totale del mobile è negativa, l'orbita si svolge tutta a distanza finita.

E giova aggiungere che per le forze costantemente attrattive, in quanto si ha

$$\varphi(r) < 0\,, \qquad U(r) = -\int_r^\infty \varphi(r)dr > 0\,,$$

l'energia totale E può benissimo risultar negativa, mentre per le forze sempre repulsive essa è in ogni caso positiva, cosicchè l'osservazione testè rilevata non trova applicazione.

6. Tornando oramai alla integrazione del sistema (5), (8), cominciamo col trasformarlo, riferendolo a coordinate polari r e θ, aventi il polo in O e l'asse polare secondo l'asse orientato delle x. In base alle formule ben note (cfr. II_1, nn. 19-20)

$$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta\,;\quad x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta}\,,\quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\,,$$

otteniamo, come equazioni differenziali del problema, le

$$\left\{\begin{aligned} & r^2\dot{\theta} = c\,, \\ & \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = U(r) + E\,. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

E qui anzitutto giova esaminare il caso eccezionale, in cui risulta nulla la costante delle aree c. Esclusa l'ipotesi, priva di interesse, di uno stato di quiete del punto P nel centro di forza ($r = 0$), sarà $\dot{\theta} = 0$, cioè $\theta =$ cost.; talchè si tratterà di un moto rettilineo (lungo una retta pel centro) e la discussione della legge del moto, cioè la determinazione di r in funzione di t, si ridurrà allo studio della equazione delle forze vive, che assume la forma

$$\dot{r}^2 = 2[U(r) + E]\,.$$

Salva la diversità delle notazioni, ritroviamo una equazione del tipo (8') del n. 15 del Cap. prec. Approfondendo debitamente la discussione, (come è indicato nelle nostre *Lezioni di Meccanica razionale*, T. II, Parte Prima, Cap. I, nn. 24-32) si arriverebbe a riconoscere che i moti possibili sono o moti oscillatori periodici (fra due radici semplici di $U(r) + E$, fra le quali questa funzione si mantenga positiva) o moti aperiodici con una inversione di senso al più; e in questo secondo caso si tratterà o di moti a meta asintotica a distanza finita (corrispondentemente a qualche radice multipla di $U(r)+E$) o di moti a meta infinitamente lontana (se nel senso della velocità iniziale non si incontra alcuna radice di $U(r) + E$). Sarà infine possibile uno stato di equilibrio (in ogni eventuale radice multipla di $U(r) + E$).

7. Ritenuta oramai diversa da zero la costante c, si desume dalla legge delle aree che, essendo $\dot{\theta}$ di segno costante, la θ varia con t sempre nello stesso senso: anzi, senza pregiudizio della generalità (cioè invertendo, ove occorra, il verso positivo delle anomalie), possiamo supporre $c > 0$, talchè la θ cresca con t.

Ciò posto, potremo procurarci l'equazione differenziale della traiettoria (o dell'*orbita*, come si suol più spesso dire nella teoria delle forze centrali) eliminando dalle (9) il tempo e assumendo come variabile indipendente, in luogo di t, l'anomalia θ, il che è lecito, in quanto θ è funzione monotona di t.

Se, integrando l'equazione differenziale così ottenuta, riusciremo a determinare l'equazione polare $r = r(\theta)$ dell'orbita, l'andamento qualitativo del moto si desumerà dall'integrale delle aree

$$r^2\dot{\theta} = c\,.$$

Anzi, sostituendo in questa equazione ad r la sua espressione nota in funzione di θ, otterremo un'equazione differenziale, che è manifestamente integrabile per separazione di variabili (cioè con una quadratura) e fornisce l'espressione di θ in funzione di t, cioè la legge temporale del moto (sull'orbita già conosciuta).

8. Per dedurre dalle (9) l'equazione differenziale che caratterizza l'equazione incognita $r = r(\theta)$ dell'orbita, basta considerare, nell'equazione delle forze vive, r come funzione di t pel tramite della θ ed eliminar poi $\dot{\theta}$ per mezzo dell'equazione delle aree. Si ottiene così per l'orbita l'equazione differenziale del 1° ordine

$$\frac{c^2}{2}\left\{\left(\frac{d\,\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right\} = U(r) + E. \tag{10}$$

Giova rilevare che la (10) è un integrale primo di una equazione del 2° ordine, cui si perviene direttamente applicando al caso attuale la formula del BINET (II_1, n. 50), che, come sappiamo, fornisce l'espressione della accelerazione (tutta radiale) per un moto centrale, quale è appunto il nostro (n. 4). Scrivendo che l'accelerazione (radiale) del nostro punto (supposto di massa unitaria) deve essere eguale alla analoga componente della forza, cioè a $\varphi(r)$, otteniamo la preannunciata equazione del 2° ordine

$$-\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right) = \varphi(r)\;; \tag{11}$$

e basta ricordare la (7) per riconoscere, derivando rispetto a θ la (10), che quest'ultima equazione (dipendente dalla costante arbitraria E) fornisce appunto un integrale primo della (11).

§ 3. – Moto di un punto ritenuto da una superficie priva di attrito. Geodetiche. Caso delle superficie di rotazione.

9. Passiamo ad occuparci di qualche problema di Dinamica del punto in due dimensioni o con due gradi di libertà.

Il caso più semplice è quello di un punto materiale P che, sotto la sollecitazione di forze attive di risultante $\boldsymbol{F}$, sia costretto a muoversi su di una superficie σ priva di attrito. La equazione di σ sia

$$f(x, y, z \mid t) = 0\,, \tag{12}$$

dove l'argomento t comparirà esplicitamente, quando la superficie varia al variare del tempo.

Le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, che definiscono il moto di P, devono soddisfare identicamente alla (12); onde consegue ch'esse verificano anche la

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0\,. \tag{13}$$

Ora può accadere che il punto P, pur essendo libero, si muova sulla superficie σ in conseguenza della natura stessa della forza attiva totale $\boldsymbol{F}$. Ma in generale ciò accadrà in quanto P è ritenuto su σ da vincoli comunque realizzati.

Si ha allora, accanto alla forza attiva $\boldsymbol{F}$ (la cui legge è, per ipotesi, un dato della questione), una incognita reazione $\boldsymbol{R}$, proveniente dai legami, e la forza totale, che sollecita il punto, è costituita non dalla sola $\boldsymbol{F}$, bensì dalla somma $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}$, talchè l'equazione del moto è data da

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}\,, \tag{14}$$

dove m denota la massa di P ed $\boldsymbol{a}$ la sua accelerazione.

Una osservazione importante sia per la integrazione effettiva del problema, sia per il significato fisico si è che: *Se un punto è ritenuto su di una superficie fissa e priva di attrito, vale il teorema delle forze vive.*

Infatti, se moltiplichiamo scalarmente ambo i membri della (14) per $\boldsymbol{v}dt = dP$, e ricordiamo che $m\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}dt$ è il differenziale della forza viva $T = mv^2/2$ del punto, mentre $\boldsymbol{F}\times dP$ è il lavoro elementare dL della forza attiva, otteniamo

$$dT = dL + \boldsymbol{R} \times dP\,.$$

Ma, per l'ipotesi dell'assenza di attrito, la reazione $\boldsymbol{R}$ è normale alla superficie σ; e d'altra parte, essendosi questa supposta invariabile nel tempo, lo spostamento dP, che fa passare da un generico punto di σ ad un punto infinitamente vicino della superficie stessa, giace nel piano tangente; onde risulta che $\boldsymbol{R}$ e dP sono istante per istante ortogonali, e durante tutto il moto sussiste l'equazione

$$dT = dL\,, \tag{15}$$

la quale, come nel caso del punto libero, esprime appunto il teorema delle forze vive (VIII$_1$, n. 9).

Non sarà male rilevare, che, trattandosi di una superficie invariabile nel tempo (rispetto al riferimento meccanico), $\boldsymbol{R}\times dP$ si può anche interpretare (VIII$_1$, n. 3; XIV$_1$, n. 2) come lavoro virtuale della reazione e perciò il suo annullarsi discende senz'altro dal principio generale dei lavori virtuali.

10. Ancora come nel caso del punto libero, se la forza sollecitante è conservativa ed è U il suo potenziale, la (15) assume la forma

$$dT = dU\,;$$

onde, per integrazione, si deduce

$$\frac{1}{2}mv^2 = U + E\,,$$

designandosi con E la costante di integrazione, ossia

$$\frac{1}{2}mv^2 - U = E;$$

abbiamo dunque che *l'energia totale del mobile non si altera per effetto del moto.*

Se poi si denotano con v_0, U_0 i valori della velocità e del potenziale in una generica posizione P_0, l'equazione precedente si può scrivere

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = U - U_0\,,$$

e diventa suscettibile di una interpretazione analoga a quella rilevata per il caso del moto sopra una curva prestabilita (I, n. 14). Ne risulta cioè che, se si fanno partire due punti materiali dotati di egual massa da una stessa posizione P_0, colla medesima velocità e sotto l'azione di una stessa forza conservativa, anche se uno si suppone libero e l'altro ritenuto da una superficie priva d'attrito, essi giungono in punti, pei quali il potenziale ha lo stesso valore, colla stessa velocità. Così ad esempio, se due punti materiali di egual massa, partendo dalla medesima posizione e dalla quiete, si muovono nel vuoto sotto l'azione della gravità, l'uno cadendo liberamente, l'altro rimanendo sopra una superficie fissa e priva di attrito, essi posseggono alle stesse altezze verticali le stesse velocità.

11. La reazione $\boldsymbol{R}$ è, come già dicemmo, incognita; ma, nell'ipotesi che la σ sia priva di attrito (sia poi o no indipendente dal tempo), la $\boldsymbol{R}$ devesi ritenere ortogonale alla σ (più precisamente alla configurazione che σ assume istante per istante, se varia nel tempo); cosicchè i coseni direttori di $\boldsymbol{R}$ (dovendo coincidere con quelli della normale alla superficie) sono proporzionali a $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$, e le sue componenti sono del tipo

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

dove λ designa un fattore di proporzionalità, a priori incognito (*moltiplicatore* del LAGRANGE), che è legato all'intensità di $\boldsymbol{R}$ dalla relazione

$$R^2 = \lambda^2 \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \right\}.$$

Qui naturalmente il trinomio in parentesi dipende, a norma della (12), dalla posizione che il mobile occupa sopra la superficie σ nel generico istante che si considera.

Ciò premesso, proiettando la (14) sugli assi, si ottengono le tre equazioni

$$(14') \qquad \left\{ \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}; \end{aligned} \right.$$

che insieme alla (12) formano un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite x, y, z (fondamentali) e λ (ausiliaria). Eliminando λ fra la (14′), otterremo due equazioni fra le incognite fondamentali che, colla (12), determinano queste incognite in base alle condizioni iniziali. Il moto sarà allora completamente conosciuto, e basterà ricorrere ad una qualsiasi delle (14′) per ricavare il valore di λ, qualora interessi conoscere l'intensità della reazione.

12. Ma quando il moto sia già conosciuto, si può assegnare per la intensità R della reazione una formula più espressiva.

Supponiamo, per fissare le idee, che la σ, nel punto che si considera, stia tutta da una banda del piano tangente, e denotiamo con N la normale alla superficie orientata verso la concavità. Designata con t la tangente alla traiettoria, consideriamo la sezione di σ col piano tN (sezione normale tangente alla traiettoria) e chiamiamo φ l'angolo che la normale principale n della traiettoria (orientata verso il centro di curvatura) forma con la N. Per l'ipotesi fatta sulla σ codesto angolo è acuto e, d'altra parte, se r ed r_0 sono i raggi di curvatura della traiettoria e della sezione normale tangente nel punto di contatto, si ha, pel teorema del MEUSNIER (1),

$$r = r_0 \cos\varphi .$$

Ora, proiettando la (14) sulla n, otteniamo

$$m \frac{v^2}{r} = F_n + R_n ,$$

ossia, in base alla formula precedente

$$m \frac{v^2}{r_0} = (F_n + R_n) \cos\varphi .$$

Ma, poichè la N è, al pari della n, ortogonale alla t e il vettore $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}$ giace nel piano tn (osculatore della traiettoria), cosicchè è decomponibile in due vettori secondo t ed n, abbiamo

$$F_N + R_N = (F_n + R_n) \cos\varphi .$$

Da questa equazione e dalla precedente, osservando che R_N fornisce col suo valore assoluto la intensità R della reazione, si deduce la formula preannunciata

$$R_N = \pm R = \frac{mv^2}{r_0} - F_N .$$

13. MOTO SPONTANEO. — Se si suppone che *le forze attive siano nulle*, cioè che il moto di P avvenga su σ per effetto di una velo-

(1) Cfr. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*. Terza ediz. (Bologna, Zanichelli), Vol. I, Cap. IV, § 72.

CARLO MEUSNIER DE LA PLACE, n. a Tours nel 1754, fu ufficiale del Genio nell'esercito francese e vi raggiunse il grado di Generale di Divisione. Morì di ferite presso Magonza nel 1793. Fu membro della Accademia delle Scienze di Parigi e deve la sua rinomanza di matematico al *Mémoire sur la courbure des surfaces*. Mém. des Sav. étrang., 1776.

cità preconcetta (e della reazione della superficie), *la traiettoria del mobile è una geodetica, descritta con velocità costante.*

Infatti, l'accelerazione, come ben sappiamo, è contenuta nel piano osculatore della traiettoria, onde vi giacerà anche la forza totale. Poichè questa si riduce alla reazione, che, per la supposta assenza di attrito, è sempre normale alla σ, la traiettoria è necessariamente una *geodetica* [1] della superficie.

Inoltre, dal fatto (II_1, n. 26) che l'accelerazione, è sempre diretta secondo la normale principale della traiettoria, discende che la componente tangenziale $\ddot{s}$ dell'accelerazione è costantemente nulla, e quindi il moto è uniforme.

Del resto a questa stessa conclusione si perviene anche partendo dal teorema (15) delle forze vive, il quale, essendo nulla la forza attiva, si riduce qui a $dT = 0$ ed implica la costanza di T, cioè della velocità.

14. Supponiamo, in particolare, che la σ sia una superficie di rotazione. Allora ogni normale ne incontra l'asse e, in assenza di forze attive, la forza totale (riducendosi alla sola reazione normale) rientra nel tipo *b*) del n. 2. Vale perciò in questo caso, oltre l'*integrale delle forze vive* (ridotto alla costanza della velocità), anche l'*integrale delle aree* sui piani normali all'asse di rotazione (rispetto al centro del rispettivo parallelo).

Di qui risulta una notevole proprietà geometrica delle geodetiche delle superficie di rotazione.

Preso come asse delle z l'asse di rotazione, l'integrale delle aree assume la nota forma

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \text{cost.}$$

e, poichè la velocità v rimane costante, avremo lungo una geodetica

$$x\,\frac{\dot{y}}{v} - y\,\frac{\dot{x}}{v} = \text{cost.} \tag{16}$$

---

[1] Ricordiamo ancora una volta (cfr. XIII_1, n. 32) che le *geodetiche* di una superficie sono caratterizzate dalla proprietà differenziale di avere in ogni loro punto la normale principale coincidente con la normale alla superficie e quindi il piano osculatore normale alla superficie. Ma più espressiva è l'altra proprietà caratteristica (di tipo integrale), per cui ogni loro arco ha lunghezza stazionaria e, per estremi abbastanza vicini, addirittura minima, rispetto a tutte le curve che sulle superficie hanno gli stessi estremi. Cfr. Bianchi, Op. cit., Cap. VI, § 101.

D'altra parte se, abbassata dal generico punto $P(x, y, z)$ della geodetica la perpendicolare PQ sull'asse, indichiamo con r il raggio QP del parallelo per P, i coseni direttori di $P - Q$ sono dati da

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad 0,$$

mentre quelli della tangente in P al parallelo (ortogonale a QP e all'asse z) sono eguali a

$$\pm\frac{y}{r}, \quad \pm\frac{x}{r}, \quad 0,$$

dove la scelta del segno dipende da quella del verso che si assume come positivo sulla tangente. E poichè la (16) si può scrivere

$$r\left(-\frac{\dot{x}}{v}\frac{y}{r} + \frac{\dot{y}}{v}\frac{x}{r}\right) = \text{cost.}$$

riconosciamo che il prodotto di r per il coseno dell'angolo che la geodetica forma col parallelo non varia lungo una medesima geodetica. Chiamando *azimut* della geodetica in un suo generico punto l'angolo che essa ivi forma col meridiano (complementare di quello col parallelo) abbiamo che: *Lungo una geodetica è costante il prodotto del raggio del parallelo pel seno dell'azimut* (formula del CLAIRAUT) [1].

---

[1] ALESSIO CLAUDIO CLAIRAUT, n. a Parigi nel 1713, m. ivi nel 1765, fu di singolare precocità di ingegno. Lesse a 12 anni una memoria sulla teoria delle curve all'Accademia delle Scienze e a 18 anni fu da questa ricevuto. Immediato continuatore del NEWTON in Francia, costruì una teoria sistematica della Luna, eseguendo e tabulando i calcoli numerici. Prese parte alla spedizione francese per la misura del grado in Lapponia nel 1736-37 e si può dire che con la classica *Théorie de la figure de la Terre* abbia fondato la Geodesia teoretica.

Capitolo III.

NOZIONI ELEMENTARI DI MECCANICA CELESTE

§ 1. – Interpretazione dinamica delle leggi del Kepler.

1. Abbiamo rilevato al n. 1 del Cap. prec. che fra i problemi dinamici, in cui si è condotti a considerare sistemi di punti liberi, primeggiano per importanza i problemi della Meccanica celeste. Per dare in questo Capitolo le prime e più elementari nozioni di codesto ramo della Meccanica riprendiamo i moti kepleriani già studiati nel § 8 del Cap. II_1, vale a dire i moti dei pianeti intorno al Sole, quali risultano caratterizzati dalle tre leggi del Kepler, di cui qui non sarà inutile ripetere gli enunciati:

1ª) *Le orbite dei pianeti sono ellissi e il Sole ne occupa uno dei fuochi.*

2ª) *Le aree descritte dal raggio vettore che va dal Sole ad un pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle.*

3ª) *I quadrati dei tempi impiegati dai vari pianeti a percorrere le loro orbite* (durate delle rivoluzioni) *sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori.*

Abbiamo visto (l. c.) che le prime due leggi del Kepler bastano a caratterizzare il moto di un singolo pianeta P; in particolare esse conducono a concludere che l'accelerazione di P, costantemente diretta verso il Sole, ha l'intensità

$$\frac{c^2}{p}\,\frac{1}{r^2},$$

dove c è la costante delle aree (doppio della velocità areolare costante del pianeta), p il parametro dell'orbita ellittica ed r la distanza SP del pianeta dal Sole.

Indicando con m la massa del pianeta e applicando la definizione dinamica della forza totale, quale è fornita dall'equazione fondamentale $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, qui possiamo dire che *il pianeta si muove* *come se fosse attratto dal Sole con una forza (centrale) diretta dal pianeta verso il Sole, di intensità*

$$\frac{c^2}{p}\frac{m}{r^2}, \tag{2}$$

cioè inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

D'altra parte, denotando con a e T il semiasse maggiore dell'orbita e la durata della rivoluzione, abbiamo trovato (II_1, n. 51),

$$\frac{c^2}{p} = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2}, \tag{3}$$

onde, in base alla terza legge del KEPLER, concludemmo che il coefficiente di proporzionalità

$$k = \frac{c^2}{p}, \tag{4}$$

che compare nella espressione (2) della attrazione del Sole su di un singolo pianeta, è il medesimo per tutti i pianeti.

§ 2. – Problema diretto del Newton.

2. Le conclusioni dianzi tratte dalla interpretazione dinamica delle leggi del KEPLER suggeriscono, in modo spontaneo, il problema di *determinare il moto di un punto materiale P attratto da un centro fisso S con una forza centrale di intensità inversamente proporzionale al quadrato della distanza.*

Questo problema rientra come caso particolare in quello generale discusso nel § 2 del Cap. prec.; onde possiamo dire senz'altro che si tratta di un *moto piano*, pel quale sussistono simultaneamente l'*integrale delle forze vive* e *quello delle aree* rispetto al centro di forza S (II, n. 3).

Ma, desunti dalla teoria generale del § citato questi risultati, noi qui, sia in vista dell'importanza del problema particolare dianzi enunciato, sia in vista degli sviluppi ulteriori che ad esso intendiamo connettere, daremo di codesto problema una trattazione analitica autonoma, pur non tralasciando di richiamarci alla teoria generale ogniqualvolta se ne presenti la opportunità.

3. Conveniamo anche qui di assumere come unità la massa del punto mobile P e rappresentiamo con k l'intensità dell'attrazione sull'unità di massa all'unità di distanza dal centro di forza.

Allora la componente $\varphi(r)$ dell'attrazione sull'unità di massa alla distanza r, secondo la retta orientata SP, avrà l'espressione

$$\varphi(r) = -\frac{k}{r^2};$$

e il potenziale, riferito all'unità di massa, ove si intenda determinata la costante additiva in modo che esso risulti nullo a distanza infinita, sarà dato da

$$U(r) = \frac{k}{r}. \tag{5}$$

Conseguentemente i due integrali primi delle forze vive e delle aree, espressi in coordinate polari r, θ col polo nel centro di forza, assumeranno la forma

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{k}{r} + E, \\ &r^2\dot{\theta} = c, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

dove, al solito E e c denotano, rispettivamente, la costante della energia totale e la costante delle aree.

La determinazione del moto è con ciò ridotta alla integrazione del sistema del 1° ordine (6) (alla quale, come sappiamo dalla teoria generale, si perviene con sole quadrature).

Sotto l'aspetto qualitativo giova notare, in relazione colla osservazione generale del n. 5 del Cap. prec., che dall'integrale delle forze vive, cioè dalla prima delle (6), discende la diseguaglianza

$$\frac{k}{r} \geqslant -E,$$

la quale, ove l'energia totale E sia negativa, implica che durante il moto il raggio vettore si mantiene sempre minore o, al più, eguale a $-k/E$, e perciò specifica la regione entro cui rimane circoscritta l'orbita.

4. Orbite circolari. — Il caso in cui l'orbita è circolare ($r =$ cost.) si esaurisce con considerazioni dirette ed elementari (cfr. II, n. 4). In tal caso la legge delle aree implica la costanza della velocità orbitale, cosicchè si tratta di un moto uniforme.

Se allora indichiamo con a il raggio dell'orbita e con n la velocità angolare (costante), avremo per la velocità orbitale v l'espressione an e per l'accelerazione (tutta centripeta) la

$$\frac{v^2}{a} = an^2,$$

talchè eguagliando col valore assoluto della nostra $\varphi(r) = -k/r^2$ per $r = a$, otterremo

$$\frac{k}{a^2} = an^2 . \tag{7}$$

Rileviamo di qui, che sotto la prefissata sollecitazione, è possibile un moto circolare a qualsiasi distanza a dal centro di forza, purchè la velocità angolare n abbia uno dei due valori determinati dalla (7).

Da quest'ultima equazione e dalla identità $v = na$ pocanzi rilevata, risulta

$$v^2 = \frac{k}{a} ; \tag{8}$$

onde si deduce che la energia cinetica $v^2/2$ della massa unitaria è la metà dell'analogo valore k/a del potenziale, l'uno e l'altra rimanendo costanti durante tutto il moto.

Alla stessa conclusione si perviene impostando la questione come un problema di equilibrio relativo. Invero il punto materiale, che ruota sulla circonferenza di raggio a con velocità angolare n, si può riguardare in quiete rispetto ad assi rotanti con la medesima velocità. Debbono perciò farsi equilibrio (XV_1, n. 6) la forza attiva di attrazione (radiale centripeta) k/a^2 e la forza radiale centrifuga n^2a, onde si è appunto condotti alla (7).

Conviene infine, tenendo presente la (8), rilevare i valori che in questo caso particolare assumono le due costanti meccaniche della energia totale e delle aree:

$$E = \frac{1}{2} v^2 - U = -\frac{1}{2}\frac{k}{a},$$

$$c = a^2\dot{\theta} = a^2 n = \pm\sqrt{ka} .$$

Dalla prima di queste due formule, si desume che *nel caso di un'orbita circolare l'energia totale è negativa* ed eguale alla forza viva cambiata di segno.

5. Orbite degeneri. — Consideriamo, come secondo caso particolare, quello in cui si annulla la costante c delle aree.

Esclusa un'eventuale permanenza del punto P nel centro di forza S (cioè escluso che sia costantemente $r = 0$), si ha in tale ipotesi, in virtù dell'equazione delle aree, $\dot{\theta} = 0$, ossia $\theta = \text{cost.}$, cosicchè il moto ha luogo su di una retta per S; e la legge temporale secondo cui varia r su codesta retta è definita dall'integrale delle forze vive, che qui si riduce ad

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{k}{r} + E\,. \tag{9}$$

Distinguiamo due casi, secondo il segno della costante di energia E.

a) $E < 0$. — Poichè, durante il moto, il secondo membro della (9) non deve mai diventar negativo, si avrà costantemente $r \leqslant -k/E$, cosicchè *il moto si svolgerà tutto a distanza finita.*

Con considerazioni analoghe a quelle svolte nel caso del pendolo semplice (I, n. 28), ma anche più elementari, si riconosce che, se la velocità iniziale $\dot{r}_0$ è diretta verso il centro o nulla (il quale ultimo caso si verifica solo per $r_0 = -k/E$), il mobile, senza inversione di senso del moto, va a cadere nel centro di forza S in un tempo finito, mentre la sua velocità intensiva cresce oltre ogni limite.

Dal punto di vista astronomico, una tale eventualità si può interpretare come un urto catastrofico tra i corpi celesti P ed S, oltre il quale non v'è ragione di seguire il fenomeno, cercando il comportamento di r al crescere ulteriore di t [1].

Se invece è $\dot{r}_0 > 0$, il mobile dapprima si allontana da S fino alla distanza $2a$ data da

$$2a = -\frac{k}{E} \tag{10}$$

[unica radice della funzione a secondo membro della (9)], per poi retrocedere fino a cadere, come pocanzi, in S.

b) $E \geqslant 0$. — In questa ipotesi il secondo membro della (9), per $r > 0$, si mantiene sempre maggiore di zero, talchè, non annullandosi mai la velocità intensiva, il moto non può presentare inversioni di senso.

Se la velocità iniziale è diretta verso il centro ($\dot{r} < 0$), il mobile dopo un tempo finito, andrà a cadere nel centro di forza, come nel caso *a*).

---

[1] Va tuttavia rilevato che in alcune ricerche di Meccanica celeste, per meglio approfondire il comportamento qualitativo del moto, si è riconosciuta vantaggiosa anche la considerazione della continuazione analitica degli integrali al di là di un urto. Cfr. per es. T. Levi-Civita, *Sur la régularisation du problème des trois corps*, «Acta math.», t. 42 (1919).

Se invece $\dot{r}_0 > 0$, si riconosce dalla (9), tenendo presente l'ipotesi $E \geqslant 0$, che, durante tutto il moto sarà

$$\dot{r} \geqslant \sqrt{\frac{2k}{r}},$$

da cui, essendo

$$\dot{r}\sqrt{r} = \frac{2}{3}\frac{d}{dt}(r^{3/2}),$$

risulta

$$\frac{d}{dt}(r^{3/2}) \geqslant 3\sqrt{\frac{k}{2}}.$$

Perciò la grandezza $r^{3/2}$, e con essa il medesimo raggio vettore r, cresce oltre ogni limite insieme con t; e il mobile, sulla sua traiettoria rettilinea, si allontana indefinitamente dal centro.

6. Orbite generali. — Supposto oramai $c \neq 0$, desumiamo, dalla seconda delle (6) (integrale delle aree) che non può annullarsi $\dot{\theta}$, ossia che la θ è funzione monotona, e quindi univocamente invertibile, del tempo, talchè nella prima delle (6) (integrale delle forze vive) si può assumere come variabile indipendente, in luogo di t, la θ. Per eseguire questo cambiamento di variabile basta, al solito, riguardarvi la r come funzione di t pel tramite della θ ed eliminare poi $\dot{\theta}$ per mezzo dell'integrale delle aree. Si perviene così all'equazione differenziale

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{2E}{c^2} + \frac{2k}{c^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}, \tag{11}$$

che caratterizza l'equazione polare $r = r(\theta)$ dell'orbita generale del nostro moto, e che non è se non il caso particolare, relativo alla speciale legge di forza qui considerata, della equazione fondamentale (10) del Cap. prec. (p. 64).

Ove si adotti come nuova variabile dipendente, in luogo di r, la

$$\chi = \frac{1}{r} - \frac{k}{c^2}, \tag{12}$$

la (11) assume la forma

$$\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)^2 = \frac{2E}{c^2} + \frac{k^2}{c^4} - \chi^2, \tag{11'}$$

dove la costante

$$\frac{2E}{c^2} + \frac{k^2}{c^4},$$

in quanto, per la (11′) stessa, è somma di due quadrati, risulta necessariamente positiva salvo quando si annulla identicamente la χ; e ciò, in virtù della (12), accade soltanto per $r = c^2/k$, cioè nel caso di un'orbita circolare, che abbiamo già esaurito al n. 4, e che perciò escludiamo dalle presenti considerazioni.

Di conseguenza possiamo porre

$$\frac{2E}{c^2} + \frac{k^2}{c^4} = q^2 , \tag{13}$$

con $q > 0$, e scrivere l'equazione differenziale dell'orbita sotto la forma definitiva

$$\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)^2 = q^2 - \chi^2 .$$

Il suo integrale generale, come si assoda immediatamente per separazione di variabili, è dato da

$$\chi = q \cos (\theta - \theta_0) ,$$

dove θ_0 è la costante di integrazione; talchè, sostituendo a χ la sua espressione (12), otteniamo per l'orbita l'equazione polare

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + q \cos (\theta - \theta_0) ,$$

ossia

$$r = \frac{\dfrac{c^2}{k}}{1 + \dfrac{c^2 q}{k} \cos (\theta - \theta_0)} .$$

È questa l'equazione polare di una conica avente un fuoco nel centro di forza, l'asse inclinato di θ_0 sull'asse polare, il parametro

$$p = \frac{c^2}{k} \tag{14}$$

e la eccentricità

$$e = \frac{c^2 q}{k} ,$$

ossia, tenendo conto della (13),

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Ec^2}{k^2}} . \tag{15}$$

Ricordando le espressioni trovate al n. 4 per le costanti E e c nell'ipotesi di un'orbita circolare (corrispondente pur essa alla condizione $c \neq 0$) e tenendo presente che per un circolo il parametro è eguale al raggio, mentre l'eccentricità è nulla, si verifica che le (14), (15) restano valide anche in tal caso.

Pertanto concludiamo che *nel moto di un punto soggetto ad una forza centrale, inversamente proporzionale al quadrato della distanza* (esclusi i casi di moto rettilineo caratterizzati dall'annullarsi della costante delle aree), *l'orbita è sempre una conica; e fra le costanti meccaniche di integrazione E, c* (energia totale e doppio della velocità areolare) *e gli elementi geometrici caratteristici dell'orbita, e, p* (eccentricità e parametro), *intercedono le relazioni* (14), (15).

7. Criterio discriminativo della specie dell'orbita. — La (15) mette in luce il risultato fondamentale che la specie della conica descritta dal mobile dipende esclusivamente dal segno della energia totale E; giacchè, essendosi supposto $c \neq 0$, risulta per la (15), $e < 1$ o $= 1$ o > 1 secondo che si ha $E < 0$ o $= 0$ o > 0.

In parole, l'*orbita è ellittica, parabolica o iperbolica* (beninteso, ramo di iperbole) *secondo che l'energia totale è negativa, nulla o positiva.*

Qui giova rilevare che questo criterio risulta applicabile anche nell'ipotesi, dianzi esclusa, $c = 0$, quando questa si consideri come limite del caso generale. Infatti per $c \to 0$ il parametro dell'orbita tende, per la (14), allo zero, mentre la eccentricità tende, per la (15), ad 1, il che geometricamente significa che l'orbita tende a confondersi col suo asse.

Ora se $E < 0$, l'orbita ellittica degenera in un segmento contato due volte, i cui estremi, dal punto di vista geometrico, sono ad un tempo fuochi e vertici della ellisse degenere e, dinamicamente, sono l'uno il centro di forza, l'altro l'afelio (posizione di massima distanza dal centro di forza). Come risulta dal n. 5, il mobile, va a cadere nel centro di forza, direttamente o dopo aver raggiunto l'afelio, secondo il senso iniziale del moto.

Se invece $E \geqslant 0$, l'orbita (per $c \neq 0$, ramo di iperbole o parabola) degenera geometricamente in una semiretta contata due volte, il cui estremo, vertice e fuoco dell'orbita, coincide col centro di forza: il mobile (n. 5) va all'infinito o cade nel centro, secondo il senso della velocità iniziale.

8. Come ulteriore determinazione del criterio stabilito al n. prec. si può assegnare una notevole espressione generale della costante di energia E. Dalla (15), tenendo conto della (14), risulta

$$E = -\frac{k}{2p}(1 - e^2)\,.$$

D'altra parte, ove per un momento si prescinda dal caso delle orbite paraboliche e degeneri, il parametro è notoriamente dato da

$$p = \pm a(1 - e^2),$$

dove va adottato il segno superiore o l'inferiore secondo che l'orbita è ellittica o iperbolica ed a rappresenta rispettivamente il semiasse maggiore o quello trasverso.

Combinando le due formule precedenti, si ottiene la formula preannunciata

$$E = \mp \frac{k}{2a}; \tag{16}$$

ed è agevole verificare direttamente che essa sussiste anche nei casi provvisoriamente esclusi. Invero per un'orbita parabolica si ha $E = 0$, $a = \infty$; per un'orbita ellittica degenere $2a$ rappresenta la distanza dal centro di forza dell'unico afelio, talchè la (16) non è se non la (10) del n. 5; infine, se si tratta di un'orbita iperbolica degenere, a non ammette, per la semiretta cui si riduce il ramo di iperbole, una interpretazione geometrica diretta, ma ha unicamente il significato di lunghezza limite, per $c \to 0$, dei semiassi trasversi delle orbite iperboliche proprie che corrispondono ad un dato valore generico $E > 0$ della costante di energia, e la (16) definisce appunto un tale limite a.

9. Caso kepleriano. — Fissiamo, in particolare, l'attenzione sul caso del moto ellittico proprio, caratterizzato dalle due condizioni $E < 0$, $c \neq 0$.

È facile riconoscere che, in codesto caso, il moto del punto attratto dal centro S in ragione inversa del quadrato della distanza è un *moto kepleriano*, cioè un moto soddisfacente alle prime due leggi del Kepler (cfr. n. 1). Infatti il moto è centrale rispetto ad S, tale essendo per ipotesi la forza; in secondo luogo l'orbita è un'ellisse avente un fuoco in S; ed, infine, sussiste rispetto al centro di forza, come in ogni moto retto da una forza centrale, la legge delle aree.

Si tratta dunque di un moto periodico (come, del resto, era a priori manifesto in base alla duplice circostanza che l'orbita è chiusa e la velocità areolare è costante). Introducendo il periodo (o durata della rivoluzione) T, si può dare una forma notevole alla relazione fondamentale (14) fra gli elementi p, c, k (rispettivamente geometrico, cinematico e dinamico). Basta ricordare (n. 1) che

$$\frac{c^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

per poter scrivere la (14) sotto la forma

$$k = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}, \tag{17}$$

onde si trae la formula

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{k}}. \tag{18}$$

10. Legge del tempo nel moto kepleriano. Equazione del Kepler. — Abbiamo osservato in generale che, in ogni moto dovuto ad una forza centrale, la legge temporale risulta univocamente caratterizzata (dall'integrale delle aree) non appena siasi individuata l'orbita (II, n. 7). Così accadrà pei moti, qui considerati, di un punto attratto da un centro S in ragione inversa del quadrato della distanza, onde sorge spontaneo il problema di determinare effettivamente, per tali moti, l'espressione analitica della legge temporale. Noi ci occuperemo qui di codesto problema limitatamente al caso di un moto ellittico proprio o kepleriano, rimandando per gli altri casi ai trattati speciali [1].

Poichè i moti ellittici, che hanno maggiore interesse astronomico, presentano orbite di piccola eccentricità, e quindi, sussistendo la legge delle aree, si riducono a moti pressochè uniformi, vien naturale di associare in ogni caso al moto reale ellittico di P il moto fittizio di un altro punto M, che descriva di moto uniforme e con lo stesso periodo T la circonferenza complanare e concentrica all'orbita di P e avente per diametro l'asse maggiore $2a$ di questa, subordinatamente alla condizione ulteriore che P ed M passino sempre insieme pei due apsidi, comuni alle due orbite (cioè per le due posizioni di massima e minima distanza dal Sole). Data la identità del periodo (e quindi del semiperiodo) quest'ultima condizione risulterà per sempre soddisfatta quando si verifichi una volta la coincidenza di P ed M in un apside.

La velocità angolare costante n del punto fittizio M si chiama (con locuzione, a dir vero, non del tutto soddisfacente, ma oramai

---

[1] Cfr. per es. Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, T. I, Chap. VI; Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, Leipzig, Veit, 1907, Bd. II, Cap. X, § 2, pp. 273-289; Moulton, *An introduction to celestial mechanics*, New-York, Macmillan, 1914, Cap. V; H. Andoyer, *Cours de mécanique céleste*, T. I, Paris, Gauthier-Villars, 1923, pp. 76-82.

consacrata dall'uso tradizionale) *moto medio* di P. Esso è dato manifestamente da

$$n = \frac{2\pi}{T};$$

onde alla (18) si può dare la forma

$$(18') \qquad n^2 = \frac{k}{a^3}.$$

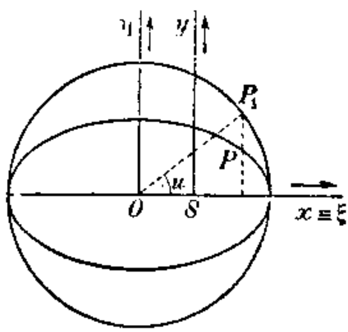
D'altra parte, se introduciamo anche il semiasse minore b dell'orbita ellittica di P e teniamo presente la identità manifesta (già usata in Cinematica) (II_1, n. 51)

$$\pi ab = \frac{1}{2} cT,$$

otteniamo per il moto medio l'espressione

$$(19) \qquad n = \frac{c}{ab}.$$

Ciò posto, consideriamo nel piano due coppie di assi ortogonali: 1°) la coppia xy con l'origine nel centro di forza S, l'asse x lungo l'asse maggiore dell'orbita orientato verso il perielio (posizione di minima distanza dal Sole) e l'asse y orientato in modo che il verso positivo xy coincida con quello del moto di P (e di M); 2°) la coppia $\xi\eta$ che si ottiene dalla xy portandone l'origine, con una traslazione, nel centro O comune alle orbite di P ed M.



Poichè la semidistanza focale OS è eguale ad ae avremo

$$(20) \qquad x = \xi - ae, \qquad y = \eta.$$

D'altra parte è noto che, se P è un generico punto dell'ellisse e P_1 è quel punto della circonferenza che ha la medesima ascissa di P e giace dalla stessa parte rispetto all'asse maggiore, si dice ***anomalia eccentrica*** di P l'anomalia u di P_1 rispetto all'asse polare $O\xi$; e le equazioni parametriche dell'ellisse, in funzione di codesta anomalia eccentrica u, sono date da

$$(21) \qquad \xi = a \cos u, \qquad \eta = b \sin u.$$

Durante il moto kepleriano di P, la u sarà una ben determinata funzione del tempo che qui appunto si tratta di caratterizzare analiticamente.

A tale scopo riprendiamo l'integrale delle aree (rispetto ad S)

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c\,,$$

e sostituiamo in esso alle x, y le loro espressioni (20) e, nel risultato, alle ξ, η le loro espressioni (21). Otteniamo così l'equazione

$$c = \xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta - ae\dot{\eta} = ab\dot{u}(1 - e\cos u)\,,$$

che, tenendo conto della (19), si può scrivere

$$\frac{d}{dt}(u - e\sin u) = n\,.$$

Integrando a partire da un istante t_0 in cui P ed M passano insieme al perielio (talchè si ha corrispondentemente $u = 0$), perveniamo all'equazione

$$u - e\sin u = l\,, \tag{22}$$

dove si è posto

$$l = n(t - t_0)\,. \tag{23}$$

Questa variabile l, lineare nel tempo, è manifestamente l'anomalia che, rispetto all'asse polare $O\xi$, compete nell'istante t al punto fittizio M, e si dice *anomalia media* di P. La (22) è la celebre *equazione del* KEPLER, che nel moto ellittico lega, istante per istante, l'anomalia eccentrica u all'anomalia media l e che, in base alla (23), definisce, sotto forma implicita, la u in funzione del tempo (¹).

§ 3. – Legge della gravitazione universale.

11. Per proseguire nell'ordine delle nostre deduzioni, riprendiamo le considerazioni svolte nel n. 1, e, indicati con P_1, P_2, ...

(¹) La determinazione esplicita di u in funzione di l, in base alla (22), costituisce un problema fondamentale per l'Astronomia di posizione; cosicchè dal KEPLER in poi ha dato origine a ricerche molteplici, dirette sia a rendere agevoli i calcoli numerici, sia ad approfondire teoricamente la natura della funzione $u(l)$ definita dalla (22). – Cfr., oltre i trattati citati a p. 73, PORRO, *Trattato di Astronomia*, Bologna, Zanichelli; vedasi inoltre LEVI-CIVITA, *Sopra la equazione di Kepler*, « Rend. Lincei », vol. 13_1, 1904, pp. 260-268.

i vari pianeti, conveniamo di contrassegnare, per ogni singolo pianeta P_i, col medesimo indice i tutti i rispettivi elementi geometrici, cinematici e meccanici (distanza dal Sole r_i, asse maggiore dell'orbita a_i, periodo T_i, massa m_i, ecc.).

Sappiamo, nell'ordine di approssimazione delle leggi del KEPLER, che i vari pianeti si muovono come se ciascuno di essi fosse attratto dal Sole con una forza (centrale) di intensità

$$\frac{km_1}{r_1^2}, \quad \frac{km_2}{r_2^2}, \ldots,$$

rispettivamente, dove il coefficiente

$$k = \frac{c_1^2}{p_1} = 4\pi^2 \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{c_2^2}{p_2} = 4\pi^2 \frac{a_2^3}{T_2^2} = \ldots$$

ha il medesimo valore per tutti i pianeti.

Ciò induce a ritenere più in generale che le condizioni fisiche dello spazio intorno al Sole siano tali che una qualsiasi massa m, collocata ad una qualsiasi distanza r dal Sole, risenta da questo una forza (centrale) attrattiva, di intensità

$$\frac{km}{r^2},$$

dove il coefficiente k è quello stesso valido nel caso dei pianeti.

Ora è notorio che vari pianeti posseggono uno o più satelliti (rispettivamente Terra, Nettuno, e Marte, Giove, Saturno, Urano); e già prima del NEWTON (pei satelliti allora conosciuti) si era rilevato, colle osservazioni dirette, che anche pel moto di ogni satellite intorno al rispettivo pianeta sono sensibilmente verificate le leggi del KEPLER.

Se in base ad una valutazione intuitiva dei rapporti di preponderanza, in ordine agli effetti, fra le varie cause qui in giuoco (valutazione che preciseremo al prossimo §) ammettiamo che, in una prima interpretazione schematica del fenomeno di moto di un satellite intorno al suo pianeta, questo si possa trattare come un moto assoluto (nel solito senso attribuito in Meccanica a questa qualifica; VII$_1$, n. 19) e sia inoltre lecito prescindere dalla circostanza che pianeta e satellite sono attratti dal Sole, la validità delle leggi del KEPLER pel moto del satellite intorno al pianeta porta a ritenere, come già nel caso del Sole e di un pianeta, che un generico pianeta P_i eserciti su di un suo satellite di massa m' alla distanza r' una attrazione di intensità

$$\frac{k_i m'}{r'^2},$$

dove k_i denota un certo coefficiente che, quando il pianeta P_i possegga più satelliti, conserva, in virtù della terza legge del KEPLER, il medesimo valore per tutti.

Ma le leggi del KEPLER nulla ci dicono sulle eventuali relazioni fra i diversi coefficienti k, k_i che compaiono nelle espressioni così determinate per le attrazioni del Sole sui pianeti e dei singoli pianeti sui rispettivi satelliti.

Per proceder oltre, riferiamoci alla Terra che identificheremo col pianeta P_1 (di massa m_1, alla distanza r_1 dal Sole); essa esercita sulla Luna, supposta di massa m' e alla distanza r', un'attrazione

$$\frac{k_1 m'}{r'^2}, \tag{24}$$

e d'altra parte è attratta dal Sole con l'intensità

$$\frac{k m_1}{r_1^2}. \tag{25}$$

Ma pel principio di reazione, a quest'ultima forza esercitata dal Sole sulla Terra fa riscontro un'attrazione, di eguale intensità, esercitata dalla Terra sul Sole; e poichè non v'è ragione di ritener questa forza di natura diversa da quella di intensità (24) che la Terra esercita sulla Luna, siamo indotti a ritenere che, ove con m_0 si indichi la massa del Sole, l'intensità di codesta attrazione terrestre sul Sole sia data da

$$\frac{k_1 m_0}{r_1^2}.$$

Identificando colla intensità (25) della forza direttamente opposta, otteniamo

$$k m_1 = k_1 m_0 ,$$

ossia

$$\frac{k}{m_0} = \frac{k_1}{m_1} ;$$

cosicchè, se denotiamo con f il valore comune di questi due rapporti, possiamo scrivere

$$k = f m_0 , \qquad k_1 = f m_1 ;$$

e riconosciamo, in base alle (24), (25) e applicando il principio di reazione anche alla coppia Terra-Luna, che il Sole e la Terra si attraggono vicendevolmente con una forza (diretta secondo la loro congiungente) di intensità

$$f\,\frac{m_0 m_1}{r_1^2}\,,$$

la Terra e la Luna con forza di intensità

$$f\,\frac{m_1 m'}{r'^2}\,.$$

La medesima argomentazione si può ripetere nel caso di ogni altro pianeta che possegga un satellite; ed estendendo, con ovvia induzione, il risultato anche ai pianeti privi di satelliti e, più in generale, a tutti i corpi celesti, concludiamo che *due corpi celesti quali si vogliono (considerati come punti materiali) si attraggono l'un l'altro con una forza diretta secondo la loro congiungente, di intensità proporzionale direttamente alle loro masse* m, m', *inversamente al quadrato della loro distanza* r,

$$f\,\frac{mm'}{r^2}\,, \tag{26}$$

dove f *denota una costante universale.*

12. Nella induzione newtoniana resta da fare un ultimo passo, forse il più ardito, tanto che la tradizione popolare ne ha conservato il ricordo, simboleggiandolo in un noto aneddoto della vita del Newton.

Ritornando alla attrazione esercitata dalla Terra sulla Luna e ravvicinando a questa la forza di gravità che, nell'ambito delle nostre esperienze dirette, si manifesta, con carattere di attrazione della Terra, su ogni corpo, per quanto piccolo, vien naturale di ritenere che l'attrazione con cui la Terra, per così dire, ritiene la Luna sulla sua orbita, non sia se non la stessa forza di gravità terrestre, pur attenuata per unità di massa dalla grande distanza, ma, per contrapposto, resa capace di effetti così cospicui dalla grandezza della massa lunare, rispetto alla massa dei corpi su cui noi possiamo direttamente sperimentare.

Di qui intanto il nome di *gravitazione* che si suol dare alla attrazione newtoniana.

D'altra parte, come ogni corpuscolo P viene attratto dalla Terra, esso, per piccolo che sia, deve alla sua volta, pel principio di reazione, attrarre la Terra con una forza direttamente opposta, onde è logico l'inferire che l'attrazione newtoniana non sia una manifestazione esclusiva delle grandi masse celesti, bensì risponda ad una proprietà intrinseca ed elementare della materia. E qui soccorrono gli sviluppi matematici della cosiddetta « Teoria del potenziale », in cui si dimostra [1] che, ammessa l'esistenza, per ogni coppia di elementi materiali, di una vicendevole attrazione newtoniana, un corpo celeste, schematizzato in una grande sfera materiale a strati omogenei concentrici, esercita su ogni punto materiale esterno una attrazione complessiva identica a quella che sul medesimo punto eserciterebbe tutta la massa della sfera localizzata nel suo centro.

Appare così legittima l'estensione della legge di forza (26) ad ogni possibile coppia di punti materiali; e si può enunciare, a conclusione delle precedenti argomentazioni induttive, la seguente legge, ben nota sotto il nome di *legge del* NEWTON o *della gravitazione universale*: *Nell'Universo due punti materiali quali si vogliono si attraggono vicendevolmente con una forza, diretta secondo la loro congiungente, proporzionale direttamente alle loro masse m, m', inversamente al quadrato della loro distanza r*:

$$f\frac{mm'}{r^2}. \tag{26}$$

Come già avemmo occasione di notare (XV_1, n. 13), la *costante f di attrazione* (o *costante del* GAUSS), misura della mutua attrazione di due masse unitarie all'unità di distanza, fu per la prima volta determinata con esperienze di laboratorio dal CAVENDISH (1797); in seguito ne furono compiute parecchie altre determinazioni con mezzi sempre più precisi, ed esse concordano tutte nell'assegnare ad f, in unità *C.G.S.*, il valore numerico $6{,}7\times10^{-8}$. Siccome $\frac{fmm'}{r^2}$ rappresenta una forza e ha quindi le dimensioni ($VIII_1$, n. 23) $lt^{-2}m$, dalla equazione di dimensioni

$$\left|\frac{fmm'}{r^2}\right| = lt^{-2}m,$$

ricaviamo, isolando $[f]$,

$$[f] = l^3t^{-2}m^{-1}.$$

[1] Cfr. le nostre *Lezioni di Meccanica razionale*, Vol. I, Cap. XI, nn. 20-25.

§ 4. – Controllo della legge della gravitazione universale sulle sue conseguenze di prima approssimazione.

13. Il processo induttivo, esposto schematicamente nei prec. nn., per giungere alla legge della gravitazione universale, si appoggia su di un complesso di fatti sperimentali, e soprattutto, se non esclusivamente, sulle leggi del KEPLER (pei pianeti rispetto al Sole, e pei satelliti rispetto ai corrispondenti pianeti). Ma è manifesto che, ammessa la legge del NEWTON, la quale implica che i corpi celesti, anche considerati come punti materiali, si attraggono a due a due in tutti i modi possibili, non possono più conservarsi rigorosamente valide le leggi del KEPLER, che abbiamo preso come punto di partenza quando i corpi che si attraggono si riducono a due e il corpo centrale è fisso (rispetto alle stelle).

Perciò a legittimare l'ipotesi espressa dalla legge del NEWTON è necessario anzitutto assodare se essa lasci sussistere, entro convenienti limiti di approssimazione, tanto le leggi del KEPLER, quanto gli altri risultati sperimentali già acquisiti.

14. VALIDITÀ IN PRIMA APPROSSIMAZIONE DELLE LEGGI DEL KEPLER PEI PIANETI. — Tutti i corpi del sistema planetario (Sole, pianeti, satelliti) non soltanto si attraggono l'un l'altro a due a due, ma sono soggetti altresì all'attrazione delle stelle. Tuttavia la distanza media di queste dal Sole è tanto grande rispetto alle dimensioni del sistema planetario (la stella più vicina dista dal Sole, in cifra tonda, 300000 volte più della Terra) che l'azione delle stelle sul sistema planetario appare senz'altro trascurabile.

In quest'ordine di approssimazione resta da tener conto soltanto delle attrazioni mutue dei corpi del sistema planetario. Si consideri allora un pianeta determinato, p. es. la Terra, che indicheremo con P. La Terra è attratta dal Sole e dai rimanenti corpi del sistema planetario, e l'uno e gli altri hanno da essa distanze medie fra loro comparabili. Ma la massa del Sole (lo si verifica a posteriori, e possiamo presumerlo fin d'ora per via intuitiva, in base ad una valutazione anche grossolana degli effetti) è di gran lunga maggiore della massa di ciascuno dei pianeti, talchè appar legittimo ritenere che l'attrazione preponderante sulla Terra sia quella che proviene dal Sole. Trascurando le altre si è condotti a riguardare la coppia Sole-Terra come isolata nell'Universo.

Ora il Sole e la Terra, attraendosi a vicenda, si imprimono l'un l'altro (rispetto alle stelle cui sempre dobbiamo riferirci) una certa accelerazione; ma poichè le due attrazioni del Sole sulla Terra e della Terra sul Sole sono, pel principio di reazione, di eguale intensità, le conseguenti accelerazioni del Sole e della Terra sono inversamente proporzionali alle loro masse, talchè l'accelerazione risentita dalla Terra prevale su quella del Sole quanto la massa di quest'ultimo su quella terrestre. Trascurando addirittura codesta piccolissima accelerazione solare dovuta alla Terra, il che equivale a considerare il Sole come fisso (o animato di moto rettilineo uniforme rispetto alle stelle), perveniamo a schematizzare il moto della Terra intorno al Sole in quello di un punto materiale P attratto da un centro fisso S con una forza di intensità

$$f\frac{m_0 m}{r^2},$$

ove m_0 ed m denotano le masse del Sole e della Terra, r la loro distanza.

Siamo così ricondotti ad un problema di moto del tipo ampiamente studiato al § 2; e i risultati là ottenuti si potranno qui trasportare anche sotto l'aspetto formale ove si ponga

$$fm_0 = k \tag{27}$$

e si tenga conto della circostanza inessenziale che qui il punto mobile P ha la massa m (anzichè 1).

Fra le varie specie di orbite là riconosciute possibili in generale per il punto, qui, nel caso della coppia di punti Sole-Terra (o genericamente Sole-pianeta), l'assenza di urti e il fatto, manifesto all'esperienza anche più grossolana, che il moto si svolge tutto a distanza finita dal Sole, permettono senz'altro di concludere che l'orbita della Terra (come di ogni altro pianeta) è un'ellisse, avente un fuoco nel Sole, la quale vien descritta secondo la legge delle aree.

Vediamo così che, in quell'ordine di approssimazione che corrisponde alla schematizzazione dianzi indicata, la legge del NEWTON implica pel moto della Terra (e, più in generale, di ogni altro pianeta) intorno al Sole la validità delle due prime leggi del KEPLER. Quanto alla terza, dalla (17) del n. 9 e dalla (27), risulta

$$4\pi^2\frac{a^3}{T^2} = fm_0, \tag{28}$$

ossia

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{fm_0}{4\pi^2};$$

e di qui si rileva che il rapporto del cubo del semiasse maggiore dell'orbita planetaria al quadrato della durata della rispettiva rivoluzione non dipende da elementi spettanti al pianeta, bensì soltanto dalla costante del GAUSS e dalla massa del Sole. Perciò, qualunque sia il pianeta che si considera, si ottiene sempre per l'indicato rapporto il medesimo valore; e ciò esprime appunto la validità della terza legge del KEPLER.

15. VALIDITÀ IN PRIMA APPROSSIMAZIONE DELLE LEGGI DEL KEPLER PEI SATELLITI RISPETTO AI CORRISPONDENTI PIANETI. — Riferiamoci, p. es., al Sole S, alla Terra P e alla Luna P', designandone le masse com m_0, m, m' rispettivamente. Entro gli stessi limiti di approssimazione adottati al n. prec., possiamo riguardare il Sole come fisso (o animato di moto rettilineo uniforme) rispetto alle stelle e il sistema Sole-Terra-Luna come isolato nell'Universo.

Indichiamo allora con $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$ le attrazioni che l'unità di massa del Sole S esercita sulle unità di massa della Terra P e, rispettivamente, della Luna P', talchè saranno $m_0\boldsymbol{A}$ ed $m_0\boldsymbol{A}'$ le attrazioni solari totali sull'unità di massa terrestre e, rispettivamente, lunare. Se, analogamente, indichiamo con $\boldsymbol{\Phi}$ l'attrazione dell'unità di massa terrestre sull'unità di massa lunare, sarà $m\boldsymbol{\Phi}$ l'attrazione totale della Terra sull'unità di massa della Luna e, per converso, $-m'\boldsymbol{\Phi}$ l'attrazione totale della Luna sull'unità di massa della Terra

Ciò posto, e designate con $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}'$ le accelerazioni (assolute, cioè rispetto ad un riferimento galileiano) di P e P', le rispettive equazioni del moto (riferite entrambe all'unità di massa del mobile) assumono la forma

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= m_0\boldsymbol{A} - m'\boldsymbol{\Phi}\,, \\ \boldsymbol{\alpha}' &= m_0\boldsymbol{A}' + m\boldsymbol{\Phi}\,. \end{aligned} \right.$$

Se allora riferiamo il moto di P' (Luna) ad una terna mobile, di assi di origine P (Terra) e di direzione invariabile, l'accelerazione (relativa) $\boldsymbol{a}$ di P' rispetto a P è data, pel teorema del CORIOLIS, in quanto il moto della terna ausiliare è puramente traslatorio (IV_1, n. 4), da

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha}' - \boldsymbol{\alpha}\ ;$$

onde, in base alle (29), si conclude

$$(30) \qquad \boldsymbol{a} = m_0(\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}) + (m + m')\boldsymbol{\Phi}\,.$$

Ma la distanza media SP Sole-Terra è quasi 400 volte la distanza PP' Terra-Luna (esse sono, all'incirca 23000 e, rispettivamente, 60 raggi equatoriali terrestri), talchè le attrazioni unitarie solari A, A' sull'unità di massa terrestre e lunare sono confondibili (in grandezza e direzione); mentre, d'altro canto, la massa lunare m' si può ritenere in prima approssimazione trascurabile rispetto alla massa terrestre m (il rapporto di codeste due masse è di 1:81).

Tenuto conto di ciò, alla (30) si può sostituire, come equazione del moto relativo della Luna rispetto alla Terra, la

$$a = m\Phi\,, \tag{30'}$$

la quale si può interpretare come l'equazione del moto di un punto P', attratto da un centro fisso P in ragione inversa del quadrato della distanza.

A questo punto basta trasportar qui, senza modificazioni essenziali, le considerazioni del n. prec. per concludere che nell'ordine di approssimazione in cui la (30') è atta a rappresentare il moto relativo della Luna rispetto alla Terra, valgono per codesto moto le leggi del KEPLER.

In particolare, introdotti il semiasse maggiore a' dell'orbita lunare e il periodo (o durata della rispettiva rivoluzione *siderale*, cioè riferita ad assi di orientazione fissa) T', avremo per coefficiente di proporzionalità dell'attrazione terrestre (riferita all'unità di massa) l'espressione (analoga alla (28) relativa al Sole)

$$fm = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2}. \tag{31}$$

E tutto ciò si estende, con le stesse argomentazioni, ad ogni altra coppia Pianeta-Satellite.

16. La constatazione che la legge del NEWTON implica, come sua conseguenza di prima approssimazione, la validità delle leggi del KEPLER, in tutti i casi in cui esse erano state verificate dalle osservazioni, costituisce una prova assai suggestiva della legittimità dell'ipotesi espressa da quella legge. Di un'altra classica prova ci occuperemo al n. seguente: qui intanto mostriamo come dalle considerazioni dei due nn. prec. si possano trarre, colla stessa approssimazione, tre notevoli conseguenze, di cui le due prime illustrano la grande portata della legge della gravitazione, la terza può interpretarsi come una ulteriore riprova sperimentale di questa legge.

a) Determinazione astronomica del rapporto tra la massa di un pianeta avente un satellite e la massa del Sole. — Indicando con m_0, m le masse del Sole S e del pianeta P, con a ed a' i semiassi maggiori delle orbite del pianeta P e del satellite P' ed infine, con T, T' le rispettive durate delle rivoluzioni, riprendiamo le formule (28) e (31) che danno i coefficienti di proporzionalità della attrazione totale di S sull'unità di massa P e dell'attrazione totale di P sull'unità di massa di P', cioè le

$$fm_0 = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}, \qquad fm = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2}.$$

Di qui, dividendo membro a membro la seconda equazione per la prima, si deduce pel rapporto delle masse del pianeta e del Sole il valore

$$\frac{m}{m_0} = \frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2},$$

il cui calcolo esige soltanto la conoscenza degli elementi a, a', T, T' che si rilevano senza difficoltà dalle osservazioni.

Così p. es., riferendoci a Sole-Terra-Luna, si trova che la massa del Sole è 333 000 volte quella della Terra.

b) Densità media della Terra. — La massa m della Terra (e quindi la sua densità media) si può determinare, beninteso in via approssimata, partendo dal valore della accelerazione g della gravità, supposto conosciuto in base ad esperienze gravimetriche dirette. Ecco in qual modo.

Il peso g della unità di massa, in un punto qualsiasi della superficie terrestre, va interpretato (§ 4 del Cap. XV_1) come risultante della attrazione terrestre totale e della forza centrifuga proveniente dalla rotazione terrestre (l'una e l'altra riferite all'unità di massa). Ma la componente preponderante è la prima, alla quale, ove si schematizzi la Terra in una sfera di raggio R a strati concentrici omogenei e si tenga conto del valore assegnato dalla (31) per il coefficiente k d'attrazione terrestre, siamo condotti ad attribuire, alla superficie della Terra, l'intensità

$$\frac{fm}{R^2}.$$

Perciò (nell'ordine di approssimazione caratterizzato dal considerare trascurabile alla superficie della Terra la forza centrifuga dell'unità di massa) si può porre

$$g = \frac{fm}{R^2}, \tag{32}$$

onde si deduce per la massa terrestre il valore

$$m = \frac{gR^2}{f}.$$

Dividendo pel volume della Terra, sempre supposta sferica, si ottiene per la densità media il valore

$$\mu = \frac{3g}{4\pi Rf}.$$

Ma essendo $g = 9{,}8$ m.sec^{-2} e, per la definizione del metro, $2\pi R = 4 \cdot 10^7$ m., si ha

$$\frac{g}{4\pi R} = \frac{9{,}8}{8 \cdot 10^7}.$$

onde avendosi, in unità *C. G. S.*, $f = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$, si conclude che la densità media della Terra (in gr. cm^{-3}) è data da

$$\frac{3 \cdot 9{,}8 \cdot 10}{8 \cdot 6{,}7}$$

pari, all'incirca, a 5,5.

Poichè la densità media delle rocce superficiali si aggira intorno a 2,5, bisogna ammettere che nell'interno della Terra la materia sia più costipata che alla superficie.

c) *Valore di g, dedotto dal moto della Luna.* — Basta a tale scopo tener conto della (31) e della (32), vale a dire delle

$$(33) \qquad fm = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2}, \qquad g = \frac{fm}{R^2},$$

dove, al solito, a' e T' denotano il semiasse maggiore dell'orbita lunare e il rispettivo periodo, R il raggio terrestre. Eliminando fm, otteniamo per g il valore

$$(31') \qquad g = 4\pi^2 \frac{a'^3}{R^2 T'^2} = 2\pi R \left(\frac{a'}{R}\right)^3 \frac{2\pi}{T'^2}.$$

Ricordiamo che il valore medio di a'/R è 60, mentre la durata T' della rivoluzione (siderale) della Luna è di $27^g 7^h 45' = 39345' = (39345 \cdot 60)''$. Tenendo conto altresì della definizione del metro troviamo (in m.sec.$^{-2}$)

$$g = \frac{4 \cdot 6^3 \cdot 10^{10} \cdot 2\pi}{(39345 \cdot 60)^2},$$

cioè all'incirca 9,74.

Questo valore differisce un poco da 9,80, valor medio di g calcolato direttamente alla superficie della Terra, ma, nonostante questo divario, il risultato così ottenuto si può accettare come una prova della validità della legge della gravitazione, in quanto l'errore si può spiegare, entro l'ambito della stessa teoria newtoniana, tenendo conto delle varie ipotesi di approssimazione, in base alle quali siamo pervenuti alle due formule (33). La seconda si è ottenuta supponendo la Terra sferica e a strati omogenei concentrici e trascurando la forza centrifuga dovuta alla rotazione (cfr. XV_1, n. 15). In verità, come valore numerico di fm/R^2, si dovrebbe assumere non l'accelerazione g della gravità, bensì l'attrazione terrestre G, che supera g (all'equatore di circa cm. sec^{-2} 3,5); con che il divario sarebbe peggiorato.

Ma importa considerare altresì che, per ottenere la (32), o meglio la (30′) da cui essa fu dedotta, abbiamo anzitutto riguardato confondibili le attrazioni totali del Sole sulle unità di massa del pianeta e del satellite e in secondo luogo abbiamo considerato trascurabile la massa del satellite rispetto a quella del pianeta. Ora nel caso presente di Terra-Luna non sarebbe difficile convincersi che dipende in massima parte da quest'ultima ipotesi l'errore, da cui è affetto il risultato del calcolo suindicato di g.

17. Comete. — Una riprova sperimentale ulteriore della legge della gravitazione, che già al tempo del Newton apparve giustamente decisiva, è fornita dal moto delle comete.

Prima del Newton gli astronomi non avevano preso in considerazione il moto delle comete, che il Kepler, ad esempio, riteneva meteore transitorie «generate dall'etere». Ma il Newton, che già aveva riconosciuto col calcolo (cfr. § 2) che un punto attratto da un centro fisso con forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza, può descrivere non soltanto delle orbite a piccole eccentricità (quali sono, in prima approssimazione, le orbite dei pianeti) bensì anche delle ellissi comunque allungate o addirittura degli archi di parabola o di iperbole, pensò di cercare se, tenendo conto di ciò, fosse possibile dar ragione del moto delle comete, le quali sogliono apparire a grande distanza dal Sole e vi si avvicinano, per poi allontanarsene fino a scomparire.

A tale scopo si valse delle osservazioni dirette di una certa cometa, che, apparsa il 14 Novembre 1680, si immerse pochi giorni dopo, cioè il 5 Dicembre, nella luce solare. Trascorsi alcuni giorni, e precisamente il 22 Dicembre, apparve, dalla parte opposta del Sole, una cometa che rapidamente andò allontanandosi da esso, fino a scomparire. Il Newton, sottoponendo al calcolo i risultati delle due serie di osservazioni così compiute, constatò che effettivamente si trattava di una medesima cometa, la quale aveva descritto un arco di parabola avente il fuoco nel Sole.

In seguito si assoggettò al calcolo il moto osservato di innumerevoli altre comete; per talune si assodò che l'orbita era parabolica, per altre, corrispondentemente al loro periodico riapparire, si riconobbe che l'orbita è un'ellisse di grande eccentricità; in ogni caso, con mirabile accordo con le conseguenze della ipotesi newtoniana, si constatò che il Sole è fuoco dell'orbita cometaria, e sono sensibilmente verificate, durante il moto, la legge delle aree e la terza legge del KEPLER (nella sua forma dinamica di indipendenza del coefficiente di attrazione solare da ogni elemento caratteristico delle singole comete considerate).

Il valore dimostrativo di queste verifiche appar tanto maggiore, se si riflette che, mentre i pianeti si muovono tutti in piani di poco inclinati su quello della eclittica (cioè sul piano dell'orbita terrestre), i piani delle orbite cometarie presentano, rispetto a codesto piano di riferimento, le inclinazioni più diverse e, quindi le comete provengono, per così dire, da ogni regione del cielo.

§ 5. – Conseguenze rigorose della legge della gravitazione.

18. PROBLEMA DEI DUE CORPI. — In base alla legge del NEWTON, il problema fondamentale della Meccanica celeste è quello del moto di quanti si vogliono corpi (considerati come punti materiali) i quali si attraggono a due a due in ragione composta delle masse e in ragione inversa del quadrato della distanza. Limitiamoci qui al caso più semplice in cui i corpi si riducono a due.

In Astronomia questo caso si troverà sensibilmente realizzato ogni qual volta si consideri una coppia di corpi celesti tali che si possano ritenere trascurabili le azioni di tutti gli altri corpi su di essi: un esempio tipico è fornito dalle cosiddette *stelle doppie*.

Anche i problemi del moto delle coppie Sole-pianeta o pianeta-satellite, che noi abbiamo già considerato al § prec., riducendoli, con opportune ipotesi di approssimazione, al caso del moto di un punto attratto da un *centro fisso*, si possono far rientrare nel presente problema dei due corpi, quando ci si limiti a trascurare l'azione sul sistema Sole-pianeta o pianeta-satellite degli altri corpi celesti. Ma, come apparirà dai seguenti sviluppi, questa nuova impostazione degli indicati problemi, pur essendo meno schematica di quella adottata al § prec., conduce ad una approssimazione di poco superiore a quella raggiunta con codesta riduzione al caso di un punto attratto da un centro fisso (o animato di moto rettilineo uniforme) rispetto alle stelle.

Siano dunque P_0 e P i due corpi, di masse m_0, m, che noi consideriamo isolati nell'Universo; e, analogamente a quanto s'è fatto al n. 15, indichiamo con A l'attrazione della unità di massa di P_0 sull'unità di massa di P, con $\boldsymbol{\alpha}_0$, $\boldsymbol{\alpha}$ le accelerazioni assolute di P_0, P, e con $\boldsymbol{a}$ l'accelerazione (relativa) $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0$ di P rispetto ad una terna di assi di direzione invariabile con l'origine in P_0.

In quanto, pel principio di reazione, l'attrazione della unità di massa di P su quella di P_0 è $-A$, avremo

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = -mA\,, \qquad \boldsymbol{\alpha} = m_0 A\,, \tag{34}$$

e quindi

$$\boldsymbol{a} = (m_0 + m)A\,.$$

Questa equazione differenziale del *moto relativo* di uno dei due corpi rispetto all'altro (nel nostro caso, di P rispetto a P_0), si identifica, come si vede, con quella che reggerebbe il moto di P, se P_0 fosse fisso (o animato di moto rettilineo uniforme rispetto alle stelle) e, pur attraendo P secondo la legge del NEWTON, avesse, anzichè la massa effettiva m_0, la massa $m_0 + m$. In altre parole nel moto relativo tutto procede come se si trattasse dell'attrazione newtoniana da un centro fisso, colla sola differenza che il coefficiente di attrazione k, anzichè da fm_0 (cfr. n. 14), fosse dato da

$$k = f(m_0 + m)\,. \tag{27'}$$

Nel caso in cui m sia sensibilmente trascurabile rispetto ad m_0 (Sole-pianeta o pianeta-satellite) si torna agli sviluppi e ai risultati dei nn. 14, 15.

In ogni caso, cioè qualunque sia l'ordine di grandezza di m rispetto ad m_0, si tratta di un problema senz'altro integrabile (§ 2); e l'orbita (relativa) di P rispetto a P_0 è una conica, avente P_0 come fuoco, la quale può appartenere ad una qualsiasi delle tre specie (e in particolare può anche essere degenere). Perciò nel caso dell'orbita ellittica valgono pel moto di P rispetto a P_0 le due prime leggi del KEPLER (cfr. n. 9).

Se poi, in tal caso, si introducono il semiasse maggiore a dell'orbita e la durata T della rivoluzione, sussiste rigorosamente, in virtù della (17) del n. 9 e della (27'), la relazione

$$4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = f(m_0 + m)\,; \tag{28'}$$

e per un altro corpo P' di massa m', che, come P, descrive, sotto la esclusiva azione di P_0, un'orbita (relativa) ellittica, si ha analogamente, con ovvio significato dei simboli,

$$4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2} = f(m_0 + m') . \tag{28''}$$

In generale i secondi membri delle (28'), (28'') saranno diseguali; ma se essi coincidono o, quanto meno, si possono ritenere sensibilmente eguali, come accade quando m ed m' sono entrambe trascurabili rispetto ad m_0, si rileva, eguagliando i due primi membri delle (28'), (28''), che sussiste (almeno in via approssimata) per i moti dei due corpi P, P' rispetto a P_0 anche la terza legge del KEPLER.

In conclusione, quando nella trattazione newtoniana del moto dei corpi celesti, si spinge la schematizzazione fino al problema dei due corpi, si mantengono valide, in generale, soltanto le prime due leggi del KEPLER. La terza può sussistere (esattamente o in via approssimata) solo a patto che siano soddisfatte le condizioni indicate pocanzi.

Capitolo IV.

CARATTERISTICHE DINAMICHE E CINETICHE DEI SISTEMI

1. Dalla Dinamica del punto materiale, di cui ci siamo occupati nei tre Capitoli precedenti, passiamo oramai alla Dinamica dei sistemi; e, a rendere più rapidi gli sviluppi concettuali successivi, cominciamo col raccogliere, in questo Capitolo preliminare, alcune considerazioni, di natura prevalentemente formale, sulla estensione dei concetti meccanici derivati, dal punto isolato (Cap. VIII_1) ai sistemi materiali, e in particolare ai solidi, cui avremo nel seguito più frequenti occasioni di riferirci.

In questa estensione, come, più in generale, in tutta la Dinamica dei sistemi, si segue il criterio già largamente usato nella I Parte, e, in particolare, nella Geometria delle masse (X_1): *Ogni sistema materiale, comunque complesso, si considera come un aggregato di punti materiali, o, quando si tratti di una distribuzione continua di materia, di elementi materiali.*

Noi, nelle considerazioni generali di questo Cap. e dei seguenti, per fissare le idee, ci riferiremo di regola ad un sistema materiale S, di natura qualsiasi, ma costituito di un numero finito N di punti materiali P_i $(i = 1, 2, ..., N)$. Tuttavia importa avvertire una volta per tutte che, in base alla assimilabilità a punti degli elementi (a 3 o 2 o 1 dimensioni) e ai classici procedimenti infinitesimali del Calcolo, tutto ciò che nel seguito verremo dicendo di codesto sistema S si potrà senz'altro intendere valido anche nel caso di distribuzioni continue di materia, purchè nelle formule che noi direttamente stabiliremo, alle sommatorie estese agli N punti del sistema discreto S si sostituiscano gli analoghi integrali di campo (a 3 o 2 o 1 dimensioni) estesi a tutti gli elementi materiali del sistema continuo che si vorrà considerare (cfr. X_1, nn. 4, 14 e 29).

§ 1. – Lavoro elementare.

2. Espressione generale. — Il sistema, di natura qualsiasi, S di N punti materiali P_i ($i = 1, 2, ..., N$) si consideri in moto, sotto vincoli e sollecitazioni ben determinate; e, fissata l'attenzione su tutte le forze (direttamente applicate e vincolari) agenti sul sistema, oppure soltanto su di una parte di esse, meccanicamente ben definite (p. es. forze attive, o vincolari, o esterne, ecc.), si denoti con $\boldsymbol{F}_i$ la forza totale della specie considerata, cui risulta soggetto il generico punto P_i.

Se in un istante qualsiasi t è $\boldsymbol{v}_i$ la velocità di P_i, talchè sia $dP_i = \boldsymbol{v}_i dt$ lo spostamento che esso subisce nel tempuscolo dt immediatamente consecutivo, ben sappiamo che il lavoro elementare compiuto dalla forza $\boldsymbol{F}_i$ in codesto tempuscolo è dato da $\boldsymbol{F}_i \times dP_i = \boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{v}_i dt$ (VIII$_1$, n. 3). Ora dicesi *lavoro elementare* complessivo del sistema di forze $\boldsymbol{F}_i$, dall'istante t all'istante $t + dt$, la somma

$$dL = \sum_1^N {}_i \boldsymbol{F}_i \times dP_i = \sum_1^N {}_i \boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{v}_i dt \,. \tag{1}$$

Non è inutile rilevare che, in quanto lo spostamento del sistema dipende dal riferimento adottato, questo stesso carattere relativo si riflette sul lavoro elementare.

3. Caso di un solido. — *a*) *Solido libero.* Su codesto lavoro elementare in generale nulla abbiamo da aggiungere per ora alla precedente definizione; ma se il sistema S è un solido libero, le velocità $\boldsymbol{v}_i$ e quindi gli spostamenti elementari dP_i dei singoli punti P_i si possono esprimere, istante per istante, per mezzo di due *vettori* (temporali) *caratteristici*, cioè della velocità $\boldsymbol{v}_o$ di un qualsiasi punto O solidale col sistema e della velocità angolare istantanea $\boldsymbol{\omega}$ del sistema stesso; e si ha precisamente (III$_1$; n. 18)

$$dP_i = dO + \boldsymbol{\omega} dt \wedge (P_i - O) \qquad (i = 1, 2, ..., N).$$

Sostituendo nella (1) si trova, con lo stesso calcolo svolto al n.11 del Cap. XIV$_1$, nel caso del lavoro virtuale,

$$dL = \boldsymbol{R} \times dO + \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega} dt = (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega}) dt \,, \tag{2}$$

dove

$$\boldsymbol{R} = \sum_1^N {}_i \boldsymbol{F}_i \,, \qquad \boldsymbol{M} = \sum_1^N {}_i (P_i - O) \wedge \boldsymbol{F}_i$$

sono il risultante e il momento risultante, rispetto ad O, delle forze considerate.

Per un moto (o atto di moto) puramente traslatorio ($\boldsymbol{\omega} = 0$), l'espressione del lavoro elementare è quella stessa che competerebbe all'unica forza $\boldsymbol{R}$, applicata in O.

Se poi si tratta del lavoro di tutte e sole le forze interne, le quali, per la stessa loro natura, costituiscono (XI_1, n. 3) un sistema vettorialmente equivalente a zero ($\boldsymbol{R} = \boldsymbol{M} = 0$), si conclude che *durante il moto di un solido, comunque vincolato e sollecitato le forze interne eseguiscono, ad ogni tempuscolo, un lavoro elementare complessivo identicamente nullo.*

b) Solido con un punto o un asse fisso. — Se il solido è fissato in un punto e questo si sceglie come centro di riduzione, si ha $\boldsymbol{v}_0 = 0$, cosicchè la (2) si riduce a

$$dL = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega} dt \,, \tag{3}$$

e presenta una precisa analogia formale colla espressione del lavoro elementare di un'unica forza, fungendo da forza il momento risultante, rispetto al punto fisso, delle forze considerate e da velocità la velocità angolare del solido.

Se poi il solido ruota intorno ad un asse fisso a, basta scegliere il polo O in un punto qualsiasi di quest'asse, perchè seguiti a sussistere la (3); e poichè, in tal caso l'asse istantaneo di rotazione coincide costantemente con a, il vettore $\boldsymbol{\omega}$, pur variando, in generale, di intensità col tempo, ha sempre l'asse a per linea di azione. Ne consegue che, ove si orienti quest'asse nel verso che nell'istante considerato spetta ad $\boldsymbol{\omega}$, si può sostituire al prodotto scalare $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega}$ il prodotto algebrico della intensità ω della velocità angolare per la proiezione M_a del momento $\boldsymbol{M}$ sull'asse (*momento risultante delle $\boldsymbol{F}_i$ rispetto all'asse a*).

La formula

$$dL = M_a \omega dt \,, \tag{4}$$

che così si ottiene, ha speciale importanza per le applicazioni. Essa permette infatti di calcolare la *potenza* (o lavoro nella unità di tempo; $VIII_1$, n. 12) di un albero motore, quando si conoscano la complessiva resistenza vinta (e quindi il momento risultante M_a rispetto all'asse geometrico dell'albero) e il numero n di giri compiuti nell'unità di tempo. Poichè allora lo spazio angolare descritto nell'unità di tempo, cioè ω, è $2\pi n$, si ha dalla (4) che la potenza dell'albero è misurata da $2\pi n M_a$.

Del resto alla (4) si può giungere anche per via elementare diretta. Il cammino elementare di un generico punto P_i, di cui sia δ_i la distanza dall'asse a di rotazione, è normale al piano $P_i a$ ed è misurato dal prodotto $\delta_i \omega dt$; cosicchè se F_i' è la componente della forza F_i applicata a P_i, secondo la direzione orientata di dP_i, il lavoro elementare della F_i è dato da $F_i' \delta_i \omega dt$. Ma $F_i' \delta_i$ è precisamente il momento $M_{i|a}$ di F_i rispetto all'asse a. Infatti, immaginando la F_i decomposta nei suoi due componenti F_i' secondo la direzione del dP_i ed F_i'' secondo la giacitura (ortogonale) del piano $P_i a$, si vede anzitutto che il momento di F_i'' rispetto all'asse a (ad esso complanare) è nullo; mentre, d'altra parte, il momento di F_i' è precisamente $F_i' \delta_i$, perchè, essendo F_i' ortogonale al piano aP_i, δ_i misura la minima distanza della linea di azione di F_i' da a, ed F_i' è positiva o negativa secondo che la forza si proietta nel senso dello spostamento o nell'opposto, ossia, essendo la a orientata nel verso di ω, secondo che F_i è destra o sinistra rispetto ad a. Di qui, in base al teorema del VARIGNON (I_1, n. 33) si conclude appunto che $F_i' \delta_i$ è il momento $M_{i|a}$ di F_i rispetto ad a, cosicchè il lavoro elementare della F_i si può esprimere sotto la forma

$$M_{i|a} \omega dt \; ;$$

dopo di che basta sommare rispetto a tutti i punti del sistema per riottenere la (4).

4. SISTEMI OLONOMI. — È utile pel seguito dar forma esplicita alla espressione, già incontrata, limitatamente agli spostamenti virtuali, nella Statica generale (XV_1, § 6), pel lavoro elementare di un sistema di forze F_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), applicate agli N punti materiali P_i di un sistema olonomo. Se questo sistema ha n gradi di libertà, e, rispetto ad una generica n^{pla} di coordinate lagrangiane (indipendenti) q_h ($h = 1, 2, \ldots, n$) è definito dalle equazioni parametriche

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{5}$$

il generico spostamento infinitesimo (effettivo) del sistema è dato da

$$dP_i = \sum_1^n {}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

cosicchè pel corrispondente lavoro elementare di un sistema di N forze F_i da considerarsi (con ovvia generalizzazione di quanto si è detto al Cap. VII_1, n. 22 nel caso di un unico punto) espresse in termini delle q, delle velocità lagrangiane $\dot{q}$ e del tempo, si ottiene l'espressione

$$dL = \sum_1^n{}_h dq_h \sum_1^N{}_i \boldsymbol{F}_i \times \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + dt \sum_1^N{}_i \boldsymbol{F}_i \times \frac{\partial P_i}{\partial t},$$

che si può scrivere

$$dL = \sum_1^n{}_h Q_h dq_h + dt \sum_1^N{}_i \boldsymbol{F}_i \times \frac{\partial P_i}{dt}, \tag{6}$$

ponendo, come già nella Statica generale,

$$Q_h = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{F}_i \times \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

cioè denotando con Q_h la cosiddetta *componente del sistema di forze* $\boldsymbol{F}_i$ *secondo la coordinata lagrangiana* q_h.

A secondo membro della (6) la seconda sommatoria si annulla identicamente quando i vincoli olonomi sono indipendenti dal tempo ($\partial P_i/\partial t = 0$).

5. Lavoro virtuale di un sistema olonomo. — Se si ricorda che in un generico spostamento virtuale le espressioni dei δP_i differiscono da quelle or ora richiamate per gli spostamenti effettivi dP_i soltanto perchè vi manca in ogni caso (dipendano o no da t i vincoli) il termine in dt, si perviene pel lavoro elementare virtuale

$$\delta L = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{F}_i \times \delta P_i$$

alla espressione

$$\delta L = \sum_1^n{}_h Q_h \delta q_h, \tag{7}$$

già ottenuta al n. 23 del Cap. XIV_1.

Quando poi le forze $\boldsymbol{F}_i$ derivano da un potenziale U, funzione delle coordinate cartesiane dei punti del sistema, nel senso precisato al citato n. 26 del Cap. XIV_1, questo potenziale, espresso in coordinate lagrangiane per mezzo delle equazioni parametriche (5), risulta in generale funzione delle q e anche del tempo, se i vincoli dipendono da esso. In ogni caso sappiamo già (l. c.) che si ha $\delta L = \delta U$, dove δU denota il differenziale totale della U in quanto dipende dalle q, cioè

$$\delta U = \sum_1^n{}_h \frac{\partial U}{\partial q_h} \delta q_h;$$

onde, identificando colla (6) e tenendo conto della arbitrarietà delle δq_h, si ottengono per le componenti lagrangiane della sollecitazione, nel caso conservativo, le espressioni

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

§ 2. – Energia cinetica o forza viva.

6. Riprendiamo un qualsiasi sistema materiale S di N punti e denotiamo con m_i la massa del generico punto P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Quando per S sia definito un moto (rispetto ad un determinato riferimento) dicesi, istante per istante, *energia cinetica* o *forza viva* del sistema la somma

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{N}{}_i m_i v_i^2 \tag{8}$$

delle energie cinetiche o forze vive dei singoli punti materiali che lo costituiscono (VIII_1, n. 9). Si tratta di una quantità scalare, sempre essenzialmente positiva, salvo che negli eventuali istanti di arresto di tutti i punti del sistema, nei quali la forza viva si riduce a zero; ed è manifesto che essa, al pari del moto rispetto al quale è definita, è di natura relativa al riferimento adottato. È pur chiaro dalla stessa definizione (8) che la T non varia quando al riferimento primitivo se ne sostituisca un altro immobile rispetto ad esso.

In Dinamica, quando si parla di forza viva, senza ulteriore specificazione, si suole sottintendere che il moto sia riferito ad una terna fissa o, più generalmente, galileiana.

7. Il moto del sistema S, cui nella definizione precedente ci siamo riferiti, sia dato rispetto ad una determinata terna $\Omega\xi\eta\zeta$, che diremo *fissa*, per quanto nelle presenti considerazioni essa possa anche non esser tale nel senso meccanico della parola. Accade talvolta che, a coglier meglio l'andamento del fenomeno, convenga introdurre , come riferimento ausiliare, accanto alla $\Omega\xi\eta\zeta$, una terna $Oxyz$, la cui origine O si muova con legge opportunamente scelta e gli assi conservino direzioni e versi invariabili rispetto alla terna fissa, p. es. si mantengano paralleli e di versi concordi a ξ, η e ζ. Il moto di S rispetto ad $Oxyz$ dicesi moto del sistema *relativo al punto O*. E la ragione di questa qualifica appar manifesta se si riflette che il dato moto di S rispetto ad $\Omega\xi\eta\zeta$ si può considerare come il moto assoluto generato dal moto relativo or ora definito e dal moto di trascinamento, puramente traslatorio, della terna $Oxyz$ rispetto ad $\Omega\xi\eta\zeta$ (IV$_1$, § 1).

Se si denotano con $\boldsymbol{v}'$ la velocità di O rispetto ad $\Omega\xi\eta\zeta$ e con $\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ la velocità del generico punto P_i nel suo moto relativo ad O (cioè rispetto ad $Oxyz$), si ha, pel teorema dei moti relativi (IV$_1$, n. 2),

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_i^{(r)} ;$$

talchè, osservando che la (8) si può scrivere

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^N{}_i m_i \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_i ,$$

si conclude

$$T = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2}\sum_1^N{}_i m_i v_i^{(r)2} + \boldsymbol{v}' \times \sum_1^N{}_i m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)}, \tag{9}$$

dove si è designata con m la massa totale del sistema.

La (9) presenta la forza viva del sistema, nel suo moto rispetto ad $\Omega\xi\eta\zeta$, come somma di tre termini, cioè la forza viva che competerebbe al punto O qualora fosse un punto materiale di massa eguale alla massa totale del sistema, la forza viva del sistema nel suo moto relativo ad O, ed, infine, una quantità che non ha più la forma di una forza viva e che può dirsi *composta*, in quanto dipende sia dal moto di O che dal moto relativo.

8. Teorema del König [1]. — La formula (9), già in sè notevole, diventa più particolarmente espressiva quando si assuma come punto O di riferimento il baricentro G del sistema e quindi (giova ripeterlo) si consideri il moto di S relativo ad una terna di origine G, i cui assi conservino direzioni e versi invariabili rispetto alla terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$. In tale ipotesi il terzo termine della (9) assume la forma

$$\boldsymbol{v}_G \times \sum_1^N{}_i m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)} , \tag{10}$$

dove $\boldsymbol{v}_G$ denota la velocità (assoluta) del baricentro e $\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ la velocità relativa al baricentro stesso del generico punto P_i. Ma la

---

[1] Samuele König, olandese, n. nella Contea di Isenburg nel 1712, m. nella signoria di Zuilestein nel 1757, scolaro di Giovanni Bernoulli, dapprima insegnò Matematica, poi fu bibliotecario del Principe d'Orange, e, infine, fu professore di Filosofia e Diritto naturale all'Aja.

identità vettoriale caratteristica del baricentro (X_1, n. 8), ove il punto ausiliare si faccia coincidere con esso, dà

$$\sum_1^N {}_i m_i (P_i - G) = 0 \; ;$$

e basta derivare rispetto al tempo con referenza alla terna $Gxyz$, osservando che, rispetto a questa, G è fisso, per concludere

$$\sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)} = 0 \; ;$$

talchè si riconosce che nella (9) il terzo termine (10) è, nelle poste ipotesi, identicamente nullo. Si ha così

$$T = \frac{1}{2} m v_O^2 + \frac{1}{2} \sum_1^N {}_i m_i v_i^{(r)2} \, , \tag{11}$$

cioè in parole (*teorema del* KÖNIG): *La forza viva di un qualsiasi sistema materiale in moto è, istante per istante, eguale alla somma della forza viva che competerebbe in quell'istante al baricentro qualora fosse un punto materiale, in cui fosse concentrata tutta la massa del sistema, più la forza viva che simultaneamente spetta all'intero sistema nel suo moto relativo al baricentro.*

La formula (9) e il teorema del KÖNIG acquistano una speciale importanza pei solidi; ma, in vista di più precisi sviluppi, questo caso merita di essere ripreso direttamente.

9. FORZA VIVA DI UN SOLIDO. — Di un solido S in moto denotiamo al solito, con $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{\omega}$ i vettori caratteristici rispetto ad un qualsiasi punto O solidale con S, e con u, v, w, e p, q, r, le *caratteristiche*, cioè le componenti di $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{\omega}$, rispettivamente, secondo gli assi di una terna $Oxyz$, invariabilmente connessa col solido.

Riprendendo le note espressioni

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

delle velocità dei singoli punti P_i del solido, sostituiamole nella formula (8) di definizione della forza viva T e sviluppiamo i singoli quadrati $v_i^2 = \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_i$. Posto

$$\left\{ \begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} v_0^2 \sum_1^N {}_i m_i \, , \\ T'' &= \frac{1}{2} \sum_1^N {}_i m_i [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)]^2 \, , \\ T''' &= \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{v}_0 \times [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)] \, , \end{aligned} \right. \tag{12}$$

si ha

$$T = T' + T'' + T''' ; \tag{13}$$

e vale la pena di notare che questa decomposizione di T riproduce, per un solido e rispetto ad un punto solidale, i tre termini, in cui, per un sistema materiale qualsiasi, la forza viva risulta scissa nella formula (9) del n. 7. Qui dobbiamo esprimere T', T'' e T''' in termini delle sei caratteristiche.

Quanto al primo addendo T', che fornirebbe l'intera forza viva del solido qualora il moto fosse puramente traslatorio, si ha senz'altro

$$T' = \frac{1}{2} m v_0 = \frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2) , \tag{12$_1$}$$

dove, al solito, si è denotata con m la massa totale del solido.

Per trovare l'espressione esplicita di T'', che darebbe la intera forza viva se il punto solidale fosse fisso, giova considerare la lunghezza δ_i della distanza P_iQ_i del generico punto P_i del solido dall'asse istantaneo di rotazione relativo ad O, cioè dalla retta passante per O nella direzione (e nel verso) di $\boldsymbol{\omega}$. Poichè il modulo del vettore $\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)$ è dato da $\delta_i\omega$, si trova, raccogliendo ω^2 a fattor comune,

$$T'' = \frac{1}{2} \mathcal{J}\omega^2 ,$$

dove

$$\mathcal{J} = \sum_1^N {}_i m_i \delta_i^2$$

rappresenta il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse istantaneo di rotazione relativo ad O (X_1, n. 16). Se α, β, γ sono i coseni direttori di quest'asse, il momento d'inerzia $\mathcal{J}$ è dato (X_1, n. 20) da

$$\mathcal{J} = \mathcal{A}\alpha^2 + \mathcal{B}\beta^2 + \mathcal{C}\gamma^2 - 2\mathcal{A}'\beta\gamma - 2\mathcal{B}'\gamma\alpha - 2\mathcal{C}'\alpha\beta ,$$

dove si son designati con $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ i momenti e i prodotti d'inerzia del solido rispetto alla terna invariabilmente connessa $Oxyz$, cioè, denotanto con x_i, y_i, z_i le coordinate di P_i, si è posto

$$\mathcal{A} = \sum_1^N {}_i m_i(y_i^2 + z_i^2) , \qquad \mathcal{B} = \sum_1^N {}_i m_i(z_i^2 + x_i^2) , \qquad \mathcal{C} = \sum_1^N {}_i m_i(x_i^2 + y_i^2) ,$$

$$\mathcal{A}' = \sum_1^N {}_i m_i y_i z_i , \qquad \mathcal{B}' = \sum_1^N {}_i m_i z_i x_i , \qquad \mathcal{C}' = \sum_1^N {}_i m_i x_i y_i .$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(u^2+v^2+w^2\right)+\frac{1}{2}\left\{Ap^2+Bq^2+Cr^2-2A'qr-2B'rp-2C'pq\right\}+m\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0\\ w & v & \omega\\ p & q & r\end{vmatrix}$$

Ma i coseni direttori dell'asse istantaneo di rotazione son dati da

$$\alpha=\frac{p}{\omega},\quad \beta=\frac{q}{\omega},\quad \gamma=\frac{r}{\omega},$$

cosicchè si conclude

$$(12)_2\qquad T''=\frac{1}{2}\,\mathcal{J}\omega^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\mathcal{A}p^2+\mathcal{B}q^2+\mathcal{C}r^2-2\mathcal{A}'qr-2\mathcal{B}'rp-2\mathcal{C}'pq\right\}.$$

Passando, infine, al terzo addendo T''', osserviamo che, per la nota proprietà del prodotto misto (I_1, n. 25), esso si può scrivere

$$T'''=\sum_1^N{}_i m_i(P_i-O)\times(\boldsymbol{v}_0\wedge\boldsymbol{\omega}),$$

dopo di che, introducendo il baricentro G del solido, pel quale sussiste notoriamente l'identità (X_1, n. 8)

$$m(G-O)=\sum_1^N{}_i m_i(P_i-O),$$

i ottiene

$$(12)_3\qquad T'''=m(G-O)\times(\boldsymbol{v}_0\wedge\boldsymbol{\omega})=m\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0\\ u & v & w\\ p & q & r\end{vmatrix},$$

dove con x_0, y_0, z_0 si son designate le coordinate del baricentro.

Dalla (13) e dalle formule esplicite $(12)_1$, $(12)_2$, $(12)_3$ risulta che in ogni caso la forza viva di un solido è una forma quadratica nelle caratteristiche dell'atto di moto.

Giova poi fissar l'attenzione su taluni casi particolari delle formule generali dianzi stabilite.

Se il centro di riduzione O (che è al tempo stesso origine delle coordinate) si sceglie nel baricentro e come assi coordinati si prendono i rispettivi assi principali di inerzia, si annullano le coordinate x_0, y_0, z_0 del baricentro e, insieme, i tre prodotti di inerzia $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, mentre $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ diventano i tre momenti principali d'inerzia baricentrali; cosicchè per la forza viva si ottiene l'espressione notevolmente semplice

$$(14)\qquad T=\frac{1}{2}\,m(u^2+v^2+w^2)+\frac{1}{2}\,(\mathcal{A}p^2+\mathcal{B}q^2+\mathcal{C}r^2),$$

che, in accordo col teorema del KÖNIG (n. 8), dà la T scissa nella somma della forza viva, che spetterebbe al baricentro quando in esso fosse localizzata tutta la massa m di S, e della forza viva del solido nel suo moto relativo al baricentro.

10. Solido con un punto o un asse fisso. — Quando il solido S sia fissato in un suo punto, basta scegliere questo punto O come centro di riduzione del moto rigido (e come origine della terna solidale), perchè si annullino u, v, w e quindi T' e T'''; e allora la forza viva è data da

$$(15)\qquad T = T'' = \frac{1}{2}(\mathcal{A}p^2 + \mathcal{B}q^2 + \mathcal{C}r^2 - 2\mathcal{A}'qr - 2\mathcal{B}'rp - 2\mathcal{C}'pq).$$

Più semplicemente ancora, se la terna solidale $Oxyz$ si fa coincidere colla terna degli assi principali di inerzia rispetto al punto fisso O, si ha

$$(16)\qquad T = \frac{1}{2}(\mathcal{A}p^2 + \mathcal{B}q^2 + \mathcal{C}r^2).$$

La (15) vale naturalmente, anche per un solido rotante intorno ad un asse fisso a (purchè si prenda su questo l'origine O della terna solidale); ma in tal caso, ricordando che la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ conserva invariabilmente la direzione di a, si riconosce che, facendo coincidere con codesto asse di rotazione uno degli assi solidali, p. es. quello delle x, si riducono identicamente nulle, oltre le caratteristiche u, v, w, anche le q ed r, talchè la (15) dà

$$(17)\qquad T = \frac{1}{2}\mathcal{A}p^2,$$

ossia, essendo $\omega = |p|$,

$$(17')\qquad T = \frac{1}{2}\mathcal{A}\omega^2,$$

dove va tenuto presente che $\mathcal{A}$ si identifica in tal caso col momento d'inerzia del solido rispetto al suo asse di rotazione.

A questa formula (17'), di largo uso nelle applicazioni, si perviene senza difficoltà anche per via elementare diretta. Basta ricordare che in un solido rotante intorno ad un asse fisso a, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, la velocità di un punto P_i, di cui sia δ_i la distanza dall'asse, è data, in valore assoluto, da $\delta_i\omega$ (n. 3), cosicchè la forza viva di codesto punto vale

$$\frac{1}{2}m_i\delta_i^2\omega^2;$$

e di qui, sommando rispetto a tutti i punti del sistema, si ottiene per la forza viva totale l'espressione

$$T = \frac{1}{2}\,\omega^2 \sum_1^N {}_i m_i \delta_i^2 ,$$

che coincide manifestamente colla (17′).

11. Forza viva di un sistema olonomo in coordinate lagrangiane. — Nella Dinamica dei sistemi olonomi spetta un ufficio essenziale alla espressione della forza viva in coordinate lagrangiane. Dato un sistema olonomo di N punti P_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), dotato di n gradi di libertà, suppongasi (VI₁, n. 1) che i vincoli siano rappresentati dalle equazioni parametriche:

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{5}$$

Si traggono di qui, derivando rispetto al tempo, per le velocità (possibili) $\boldsymbol{v}_i$ dei singoli punti P_i le espressioni (in funzione delle coordinate q, delle velocità lagrangiane $\dot{q}$ e del tempo)

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_1^n {}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\,\dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{18}$$

e basta immaginarle sostituite nella

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^N {}_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_i \tag{8}$$

per riconoscere che *la forza viva del sistema olonomo è una funzione razionale intera di secondo grado delle $\dot{q}$, a coefficienti perfettamente determinati per mezzo delle q e delle t.* Potremo perciò scrivere

$$T = T_2 + T_1 + T_0 , \tag{19}$$

designando, rispettivamente, con T_2, T_1, T_0 l'insieme dei termini di 2° grado nelle $\dot{q}$, quello dei termini di 1° grado e, infine, quello dei termini indipendenti dalle $\dot{q}$.

Se i vincoli sono indipendenti dal tempo, le espressioni (18) delle velocità $\boldsymbol{v}_i$ si riducono alla loro parte (lineare) omogenea nelle $\dot{q}$

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_1^n {}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\,\dot{q}_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{18'}$$

e non contengono più nei coefficienti la t; talchè la T diventa una *forma quadratica* nelle $\dot{q}$, a coefficienti dipendenti dalle sole q. La sua espressione esplicita è data da

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^N{}_i m_i \sum_1^n{}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h \times \sum_1^n{}_k \frac{\partial P_i}{\partial q_k}\dot{q}_k =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_1^N{}_i m_i \sum_1^n{}_{hk} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \times \frac{\partial P_i}{\partial q_k}\dot{q}_h \dot{q}_k ;$$

e basta invertire le due sommatorie e porre

$$a_{hk} = \sum_1^N{}_i m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \times \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \tag{20}$$
$$= \sum_1^N{}_i m_i \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_h}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \eta_i}{\partial q_h}\frac{\partial \eta_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_h}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_k}\right)$$

(ξ_i, η_i, ζ_i coordinate cartesiane di P_i) per concludere

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_{hk} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k , \tag{21}$$

dove i coefficienti a_{hk} dipendono dalle sole q.

È questa dunque l'espressione generale della *forza viva di un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo e ad n gradi di libertà*.

Importa rilevare che codesta forma quadratica (21) nelle variabili $\dot{q}$ è, per natura sua, *definita positiva*, cioè si mantiene maggiore di zero per qualsiasi scelta degli argomenti $\dot{q}$, salvo quando, annullandosi tutte le $\dot{q}$, si riduca a zero. Per riconoscerlo si osservi che la forza viva T, per la sua stessa definizione (8) in funzione delle velocità v, si mantiene sempre positiva, salvo quando si annullano tutte le v, nel qual caso va a zero. Resta dunque solo da far vedere che le $\dot{q}$ sono tutte nulle sempre e solo quando tali sono tutte le v.

Ora in base alle (18′) si riconosce in primo luogo immediatamente che quando è $\dot{q}_h = 0$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) si ha altresì $v_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, N$); mentre, d'altro canto, si vede che non può essere $v_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) se non quando le $\dot{q}$ soddisfacciano al sistema lineare omogeneo

$$\sum_1^n{}_h \frac{\partial \xi_i}{\partial q_h}\dot{q}_h = 0 , \quad \sum_1^n{}_h \frac{\partial \eta_i}{\partial q_h}\dot{q}_h = 0 , \quad \sum_1^n{}_h \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_h}\dot{q}_h = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N) ,$$

il quale implica appunto $\dot{q}_h = 0$ ($h = 1, 2, \ldots, n$), in quanto la matrice jacobiana delle ξ, η, ζ rispetto alle q, in virtù della ipotesi della indipendenza di queste coordinate lagrangiane, è, per valori generici di esse, di caratteristica n (VI_1, n. 2).

Osserviamo ancora che se, contrariamente a quanto si è dianzi supposto, i vincoli dipendono dal tempo, gli stessi calcoli, che or ora ci han condotti alla espressione della T, ne forniscono la parte quadratica omogenea T_2. Invero per ottener questa T_2 basta sostituire nella (8) a ciascuna v_i non la completa sua espressione (18), bensì soltanto la sua parte omogenea, che formalmente si identifica colla (18'), salva la sostanziale differenza che i coefficienti dipendono da t, oltre che dalle q. Ne consegue che, facendo anche in questo caso le posizioni (20), possiamo scrivere

$$T_2 = \sum_1^n {}_{hk} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k , \tag{21'}$$

dove, come già nelle formule testè accennate, i coefficienti sono funzioni ben determinate delle q e del tempo.

Nell'identico modo seguito per la (21), si dimostra che la forma quadratica T_2 è anch'essa in ogni caso definita e positiva.

E qui, da ultimo, notiamo che nell'uno e nell'altro caso il determinante $\| a_{hk} \|$ degli n coefficienti a_{hk}, appunto come discriminante di una forma definita (positiva), non può identicamente annullarsi. Se, invero, codesto determinante fosse identicamente nullo, esisterebbe, nel caso di vincoli indipendenti dal tempo, un'n^{pla} di valori $\dot{q}$, non tutti nulli, soddisfacenti alle n equazioni lineari omogenee

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_1^n {}_k a_{hk} \dot{q}_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

e per un tal sistema di valori, moltiplicando la precedente identità per $\dot{q}_h$ e sommando membro a membro rispetto ad h da 1 ad n, si avrebbe

$$\sum_1^n {}_h \dot{q}_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = 0 ,$$

la quale pel teorema di Eulero si riduce a $T = 0$. Analogamente, se i vincoli dipendono dal tempo, si perverrebbe a $T_2 = 0$; e queste conclusioni contraddicono al carattere di forma definita (positiva) che abbiamo dianzi riconosciuto, rispettivamente, a T e a T_2.

§ 3. – Quantità di moto e momento delle quantità di moto di un sistema.

12. Quantità di moto di un sistema. — Durante il moto di un sistema materiale qualsiasi S dicesi, istante per istante, *quan-*

tità di moto (od anche *impulso*) del sistema la somma geometrica

$$Q = \sum_1^N {}_i m_i v \tag{22}$$

delle quantità di moto che spettano, nell'istante considerato, ai singoli punti P_i del sistema.

Se, considerato pel dato sistema il baricentro G, deriviamo rapporto al tempo l'equazione vettoriale, che ne definisce la posizione rispetto ad un generico punto *fisso* O (X_1, n. 8),

$$m(G - O) = \sum_1^N {}_i m_i(P_i - O),$$

otteniamo, indicando con v_G la velocità di G,

$$m v_G = \sum_1^N {}_i m_i v_i,$$

ossia, per la (22),

$$Q = m v_G. \tag{23}$$

Abbiamo dunque che *la quantità di moto di un sistema qualsiasi è ad ogni istante eguale alla quantità di moto che, in quell'istante, spetterebbe al baricentro, qualora fosse un punto materiale, in cui si trovasse concentrata la massa totale del sistema.*

E questa stessa osservazione si può presentare sotto un altro aspetto. Considerato il moto del sistema relativo al baricentro G, si designi, come al n. 7, con $v_i^{(r)}$ la velocità del generico punto P_i nel suo moto rispetto a G, talchè si abbia

$$v_i = v_G + v_i^{(r)} \quad \text{ossia} \quad v_i^{(r)} = v_i - v_G$$
$$(i = 1, 2, \dots, N).$$

Ne risulta senz'altro, in forza della (23),

$$\sum_1^N {}_i m_i v_i^{(r)} = \sum_1^N {}_i m_i v_i - m v_G = 0 \, ;$$

cioè, *per un qualsiasi sistema materiale, è ad ogni istante nulla la risultante delle quantità di moto relative al baricentro.*

13. Momento delle quantità di moto di un sistema. — Di un qualsivoglia sistema materiale S dicesi, istante per istante, *momento delle quantità di moto* rispetto ad un qualsiasi punto O il momento risultante rispetto ad O delle simultanee quantità di moto dei singoli punti P_i del sistema (applicate ciascuna nel rispettivo punto), cioè la grandezza vettoriale

$$K = \sum_{1}^{N}{}_i (P_i - O) \wedge m_i v_i . \tag{24}$$

E talvolta dicesi *coppia d'impulso* del sistema ogni coppia di momento K (cfr. I_1, n. 50).

Siccome la quantità di moto Q e il momento K non sono altro che il risultante e il momento risultante, rispetto ad un generico punto O, del sistema di vettori $m_i v_i$, applicati ciascuno al rispettivo punto P_i, il momento K' delle quantità di moto rispetto ad un qualsiasi altro punto O' sarà dato (I_1, n. 35) da

$$K' = K + (O - O') \wedge Q .$$

Ad una ulteriore osservazione, che non solo è in sè notevole ma tornerà prossimamente utile (V, n. 10), si perviene prendendo come centro di riduzione dei momenti il baricentro G del sistema.

Se si introducono le velocità $v_i^{(r)}$ dei punti del sistema nel loro moto relativo a G, talchè sia (n. 7)

$$v_i = v_G + v_i^{(r)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

e si tien conto che per la definizione stessa di baricentro si ha

$$\sum_{1}^{N}{}_i m_i (P_i - G) = 0 ,$$

si trae dalla (24), *assumendo come centro di riduzione il baricentro* G,

$$K = \sum_{1}^{N}{}_i (P_i - G) \wedge m_i v_i^{(r)} .$$

Poichè a secondo membro compare il momento risultante rispetto a G delle quantità di moto *relative* $m_i v_i^{(r)}$ dei singoli punti del sistema, si conclude che, *comunque si muova un sistema, il momento delle quantità di moto* (*assolute*) *rispetto al baricentro coincide coll'analogo momento delle quantità di moto relative al baricentro stesso.*

14. Derivata rispetto al tempo del momento delle quantità di moto di un sistema. — Pel seguito importa che qui ci procuriamo l'espressione esplicita di codesta derivata di K. Dalla

(24) risulta, ove si designino con $\boldsymbol{v}'$ la velocità di O e con $\boldsymbol{a}_i$ l'accelerazione di P_i,

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \sum_1^N {}_i(P_i - O) \wedge m_i\boldsymbol{a}_i + \sum_1^N {}_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}') \wedge m_i\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \sum_1^N {}_i(P_i - O) \wedge m_i\boldsymbol{a}_i + \sum_1^N {}_i m_i\boldsymbol{v}_i \wedge \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}' \wedge \sum_1^N {}_i m_i\boldsymbol{v}_i\,,$$

ossia, osservando che $\boldsymbol{v}_i \wedge \boldsymbol{v}_i$ è identicamente nullo e tenendo conto della (23),

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \sum_1^N {}_i(P_i - O) \wedge m_i\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{Q} \tag{25}$$

È questa la formula voluta.

Se il centro di riduzione O è fisso ($\boldsymbol{v}' = 0$) la (25) si semplifica nella forma

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \sum_1^N {}_i(P_i - O) \wedge m_i\boldsymbol{a}_i\,. \tag{26}$$

E qui è di particolare importanza l'osservazione che questa formula (26) si mantiene valida anche quando il centro di riduzione O (pur non essendo, in generale, fisso) coincida, istante per istante, col baricentro del sistema. Infatti in tal caso il termine $\boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{Q}$, che compare nella formula generale (25) è identicamente nullo, perchè $\boldsymbol{v}'$ coincide colla velocità $\boldsymbol{v}_G$ del baricentro e la quantità di moto $\boldsymbol{Q}$, in base alla (13), è vettorialmente parallela a codesta velocità.

15. Quantità di moto e momento delle quantità di moto di un solido. — Quando il sistema S in moto è solido, e si assume a centro di riduzione O un punto invariabilmente connesso col sistema, i due vettori $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{K}$ si esprimono in modo notevolmente semplice per mezzo delle caratteristiche u, v, w e p, q, r del moto di S rispetto ad una qualsiasi terna $Oxyz$ solidale. Più precisamente si ha che *le componenti di $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{K}$ si identificano colle derivate parziali della forza viva T del solido rispetto alle sei caratteristiche.*

Si parta, invero, dalla

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^N {}_h m_h\boldsymbol{v}_h \times \boldsymbol{v}_h$$

(dove abbiamo denotato l'indice di somma con h, anzichè col solito i, per non ingenerare equivoci col versore $\boldsymbol{i}$ della terna solidale) e si derivi rispetto ad un generico parametro α da cui dipendano le $\boldsymbol{v}_h$.

Otteniamo così la

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \sum_1^N {}_h m_h \boldsymbol{v}_h \times \frac{\partial \boldsymbol{v}_h}{\partial \alpha}. \tag{27}$$

Ora, introdotti i versori fondamentali $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ della terna solidale $Oxyz$ e ricordate (III$_1$, n. 16) le

$$\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_h - O) \qquad (h = 1, 2, \ldots, N),$$

dove

$$\boldsymbol{v}_0 = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k},$$

si riconosce che

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{v}_h}{\partial u} = \boldsymbol{i}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}_h}{\partial v} = \boldsymbol{j}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}_h}{\partial w} = \boldsymbol{k}; \\ &\frac{\partial \boldsymbol{v}_h}{\partial p} = \boldsymbol{i} \wedge (P_h - O), \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}_h}{\partial q} = \boldsymbol{j} \wedge (P_h - O), \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}_h}{\partial r} = \boldsymbol{k} \wedge (P_h - O) \\ &\qquad (h = 1, 2, \ldots, N). \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Dopo di ciò, ponendo nella (27) $\alpha = u$ e tenendo conto della prima delle (28), si trova la

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \sum_1^N {}_h m_h \boldsymbol{v}_h \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} \times \sum_1^N {}_h m_h \boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{Q},$$

nel cui secondo membro appare la prima componente Q_x della quantità di moto risultante $\boldsymbol{Q}$ del sistema. Analogamente per $\alpha = v$ o w, e si ha intanto

$$Q_x = \frac{\partial T}{\partial u}, \quad Q_y = \frac{\partial T}{\partial v}, \quad Q_z = \frac{\partial T}{\partial w}. \tag{29}$$

In secondo luogo, ponendo nella (27) $\alpha = p$ ed applicando la quarta delle (28), si trova

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \sum_1^N {}_h m_h \boldsymbol{v}_h \times [\boldsymbol{i} \wedge (P_h - O)];$$

che per la nota proprietà del prodotto misto (I$_1$, n. 25) si può scrivere

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \boldsymbol{i} \times \sum_1^N {}_h (P_h - O) \wedge m_h \boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{K}.$$

Nel secondo membro si riconosce la componente K_x di $\boldsymbol{K}$ secondo l'asse delle x; cosicchè facendo qui ancora circolare le x, y, z e le p, q, r, si conclude

$$K_x = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad K_y = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad K_z = \frac{\partial T}{\partial r}. \tag{30}$$

Se non si aggiunge alcuna ipotesi particolare, nè sul moto del solido, nè sulla sua struttura materiale, nè sulla scelta degli assi solidali, bisogna adottare per la T l'espressione generale fornita dalle (12) e (13) del n. 9 e si ottengono per le componenti di $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{K}$ le espressioni esplicite generali:

$$
(29') \qquad \begin{cases} Q_x = m(u + z_0 q - y_0 r), \\ Q_y = m(v + x_0 r - z_0 p), \\ Q_z = m(w + y_0 p - x_0 q); \end{cases}
$$

$$
(30') \qquad \begin{cases} K_x = \quad \mathcal{A}p - \mathcal{C}'q - \mathcal{B}'r + m(y_0 w - z_0 v), \\ K_y = -\mathcal{C}'p + \quad \mathcal{B}q - \mathcal{A}'r + m(z_0 u - x_0 w), \\ K_z = -\mathcal{B}'p - \mathcal{A}'q + \quad \mathcal{C}r + m(x_0 v - y_0 u). \end{cases}
$$

Osserviamo che, applicando il teorema di EULERO alla forza viva T, considerata come forma quadratica delle sei caratteristiche e tenendo conto delle (29), (30), si ottiene per la forza viva la notevole espressione

$$
T = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{Q} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K},
$$

che, ove il polo O dei momenti si faccia coincidere col baricentro ($\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_G$), si può scrivere

$$
T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}.
$$

16. FORME CANONICHE DELLE COMPONENTI DI $\boldsymbol{Q}$ E $\boldsymbol{K}$. SOLIDO FISSATO IN UN PUNTO O RIFERITO AL BARICENTRO. — Se, come centro O di riduzione dei momenti (ed origine degli assi solidali), si prende il baricentro del solido, talchè si annullino simultaneamente x_0, y_0, z_0, le (29′) si riducono alla forma canonica

$$
(29'') \qquad Q_x = mu, \quad Q_y = mv, \quad Q_z = mw,
$$

ed esprimono semplicemente la già nota identità di $\boldsymbol{Q}$ colla quantità di moto che competerebbe al baricentro, quando in esso fosse concentrata la massa totale m del solido (n. 12).

Quanto alle componenti (30′) di $\boldsymbol{K}$, è manifesto che in ciascuna di esse si riducono a zero gli ultimi termini sia quando il centro di riduzione O coincida col baricentro ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$), sia quando in O il solido sia fissato nello spazio ($u = v = w = 0$). Nell'uno e nell'altro caso le (30′) assumono la forma

$$
(30'') \qquad \begin{cases} K_x = \mathcal{A}p - \mathcal{C}'q - \mathcal{B}'r, \quad K_y = -\mathcal{C}'p + \mathcal{B}q - \mathcal{A}'r, \\ K_z = -\mathcal{B}'p - \mathcal{A}'q + \mathcal{C}r, \end{cases}
$$

e basta prendere come assi solidali i tre assi principali di inerzia in O (baricentro o punto solidale fisso) per ridurle ulteriormente alla forma canonica (X_1, n. 22)

$$K_x = \mathcal{A}p\,, \quad K_y = \mathcal{B}q\,, \quad K_z = \mathcal{C}r\,, \tag{30'''}$$

dove $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ denotano i momenti principali di inerzia.

Queste formule (30''') sussistono insieme con le (29'') ogniqualvolta il centro di riduzione coincida col baricentro, ma non quando O sia fisso nello spazio, giacchè in tal caso, accanto alle (30'''), valgono per le componenti di $\boldsymbol{Q}$ le espressioni

$$Q_x = z_0q - y_0r\,, \quad Q_y = x_0r - z_0p\,, \quad Q_z = y_0p - x_0q\,. \tag{29'''}$$

E non è inutile rilevare che in quest'ultima ipotesi (centro di riduzione fisso) la forza viva si può rappresentare sotto la forma

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}\,;$$

mentre, se il centro di riduzione coincide col baricentro, codesto stesso semiprodotto scalare fornisce la forza viva T'' del solido nel suo moto relativo al baricentro (n. 9).

17. Solidi a struttura giroscopica rispetto a un loro punto e giroscopi. — Nella Dinamica dei solidi, per ragioni che chiariremo nel Cap. VI, presentano un particolare interesse quei solidi, pei quali esiste un punto O rispetto a cui l'ellissoide d'inerzia è rotondo. Ogni solido siffatto si dirà di *struttura giroscopica* rispetto ad O, e l'asse di simmetria del corrispondente ellissoide d'inerzia si chiamerà *asse giroscopico*.

Sono, in tal caso, assi principali di inerzia per il solido, nel punto O, l'asse giroscopico e tutte le perpendicolari ad esso nel punto O.

Se il solido si riferisce ad una qualsiasi terna $Oxyz$, di cui l'asse z coincida con l'asse giroscopico, e si denotano al solito con $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ i momenti (principali) di inerzia del solido rispetto agli assi x, y, z, la condizione caratteristica della struttura giroscopica è data (X_1, n. 22) da

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}\,; \tag{31}$$

e di qui, ove si introducano i momenti di inerzia rispetto ai tre piani (principali) yz, zx, xy (X_1, n. 20), cioè

$$s_1 = \sum_1^N{}_i m_i x_i^2\,, \quad s_2 = \sum_1^N{}_i m_i y_i^2\,, \quad s_3 = \sum_1^N{}_i m_i z_i^2\,,$$

discende

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{2}\mathcal{C}, \quad s_3 = \mathcal{A} - \frac{1}{2}\mathcal{C}.$$

Ciò posto, supponiamo, in particolare, che il punto O, rispetto a cui il solido ha struttura giroscopica, coincida col suo baricentro.

In questa ipotesi, sappiamo (X_1, n. 24) che Oz, come asse principale d'inerzia baricentrale, è pur asse principale di inerzia rispetto ad ogni altro suo punto O_1. Inoltre se, come al n. or ora citato, si pone $OO_1 = a$ e si considera la terna $O_1x_1y_1z$, in cui gli assi x_1, y_1 sono paralleli e di verso concorde ad x, y, i momenti di inerzia $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ del solido rispetto ai nuovi assi sono dati, per il teorema dell'HUYGENS (X_1, n. 19), da

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} + ma_0^2, \quad \mathcal{B}_1 = \mathcal{B} + ma_0^2, \quad \mathcal{C}_1 = \mathcal{C},$$

dove m denota la massa totale del corpo, cosicchè si ha

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_1. \tag{31'}$$

Insomma, se è rotondo l'ellissoide di inerzia baricentrale, è rotondo, intorno al medesimo asse, anche l'ellissoide di inerzia relativo ad ogni altro punto di codesto asse.

E, viceversa, basta che il solido abbia struttura giroscopica rispetto ad un suo punto generico, e che l'asse di simmetria del relativo ellissoide d'inerzia contenga il baricentro, perchè sia rotondo intorno a codesto asse anche l'ellissoide baricentrale.

Ogni corpo ad ellissoide baricentrale rotondo si dirà *giroscopio*. Tale è certamente un solido omogeneo rotondo o, più in generale, un solido che rispetto ad un asse presenti completa simmetria, non soltanto geometrica ma anche materiale. Per brevità, in questi casi diremo trattarsi di « giroscopi in senso ristretto ».

Ma torniamo all'ipotesi che il solido abbia semplicemente struttura giroscopica rispetto ad un suo punto O. Se questo è fisso (o coincide col baricentro), le equazioni (30'''), in base alla condizione $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ si riducono a

$$K_x = \mathcal{A}p, \quad K_y = \mathcal{A}q, \quad K_z = \mathcal{C}r;$$

cosicchè, se si denotano con $\boldsymbol{e}$ ed $\boldsymbol{H}$ i componenti equatoriali di $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$, cioè i loro componenti secondo la giacitura ortogonale all'asse giroscopico, codeste formule si possono sostituire colle due equazioni (di cui la prima è vettoriale e la seconda scalare)

$$\boldsymbol{H} = \mathcal{A}\boldsymbol{e}, \quad K_z = \mathcal{C}r.$$

Se poi si designa con $\boldsymbol{k}$ il versore dell'asse giroscopico z (orientato in quel verso che a piacere gli si è attribuito nel prefissar la terna $Oxyz$) si hanno per $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$ le espressioni vettoriali

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{e} + r\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{K} = \mathcal{A}\boldsymbol{e} + \mathcal{C}r\boldsymbol{k};$$

e di qui, eliminando il componente equatoriale $\boldsymbol{e}$ della $\boldsymbol{\omega}$, si traggono le due equazioni, fra loro equivalenti, che esprimono ciascuno dei due vettori $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$ in funzione dell'altro (e del versore dell'asse giroscopico)

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\mathcal{A}}\boldsymbol{K} + \frac{\mathcal{A} - \mathcal{C}}{\mathcal{A}} r\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{K} = \mathcal{A}\boldsymbol{\omega} + (\mathcal{C} - \mathcal{A})r\boldsymbol{k}.$$

Delle varie formule così ottenute per un qualsiasi solido di struttura giroscopica avremo occasione di giovarci ripetutamente nella Dinamica dei solidi (Cap. VI). Comunque, giova rilevare che, in base alla circostanza che *ogni* coppia di rette equatoriali, fra loro perpendicolari, costituisce coll'asse giroscopico una terna di assi principali di inerzia, *tutte codeste formule resteranno valide anche quando per riferimento si assuma, in luogo della terna $Oxyz$ rigidamente connessa col solido, una terna Ox_1y_1z rotante con legge qualsiasi intorno all'asse giroscopico z* (riferimento stereocinetico del corpo a struttura giroscopica).

18. Corrispondenza geometrica fra $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$. — Tornando ad un solido qualsiasi, riferito ad una sua terna $Oxyz$ di assi principali di inerzia, riprendiamo il semiprodotto scalare

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}p^2 + \mathcal{B}q^2 + \mathcal{C}r^2), \tag{32}$$

che, come sappiamo, dà la forza viva del solido nel suo moto assoluto o nel suo moto relativo al baricentro, secondo che il centro O di riduzione del momento $\boldsymbol{K}$ delle quantità di moto è un punto (solidale) fisso o il baricentro del solido (n. 16). Indicando questa forza viva, in entrambi i casi, con T (mentre nel secondo al n. 9 la abbiamo designata con T'') e tenendo conto che essa è, rispetto a p, q, r, una forma definita positiva, rileviamo che (esclusi gli eventuali istanti in cui si annulla $\boldsymbol{\omega}$ e quindi, per le (30′), anche $\boldsymbol{K}$) *l'angolo dei due vettori $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$ è sempre acuto*. Ma, accanto a questo risultato puramente qualitativo, si può agevolmente trovare una costruzione geometrica che permette di individuare la direzione di uno dei due vettori $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$, quando sia nota quella dell'altro.

A tale scopo si consideri l'ellissoide di inerzia del solido rispetto ad O e si noti che nella rispettiva equazione (riferita agli assi principali di inerzia)

$$\mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 + \mathcal{C}z^2 = 1 , \tag{33}$$

il primo membro dà, a meno del fattore 1/2, la forza viva T quando in esso si sostituiscano p, q, r ad x, y, z.

Se allora nella stella di centro O le p, q, r si interpretano come coordinate omogenee (proporzionali ai coseni direttori) della retta parallela ad $\boldsymbol{\omega}$, e si ricorre alla polarità rispetto all'ellissoide di inerzia, si riconosce dalle

$$K_x = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad K_y = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad K_z = \frac{\partial T}{\partial r} \tag{30}$$

che queste componenti di $\boldsymbol{K}$ sono i coefficienti di x, y, z nella equazione del piano diametrale coniugato alla direzione di $\boldsymbol{\omega}$, o, in altre parole, le coordinate omogenee (proporzionali ai coseni direttori) della normale a codesto piano.

Si conclude dunque che il *momento* $\boldsymbol{K}$ *è sempre perpendicolare a quel piano diametrale dell'ellissoide di inerzia che è coniugato alla direzione della velocità angolare* $\boldsymbol{\omega}$.

Se si ricorda che, rispetto ad un ellissoide (come del resto, ad una quadrica qualsiasi), il piano tangente in un generico punto è coniugato al diametro che va al punto di contatto, si può anche dire che *il momento* $\boldsymbol{K}$ *è perpendicolare ai due piani tangenti* (tra loro paralleli) *all'ellissoide di inerzia nei due punti, in cui esso è intersecato dal diametro parallelo ad* $\boldsymbol{\omega}$.

Di qui, in particolare, discende che $\boldsymbol{K}$ ed $\boldsymbol{\omega}$ risultano paralleli sempre e solo quando hanno entrambi la direzione di un asse principale d'inerzia o, in forma più espressiva, quando la rotazione istantanea $\boldsymbol{\omega}$ avviene intorno ad un asse principale di inerzia.

In ogni caso, la proprietà geometrica dianzi stabilita e la circostanza qualitativa rilevata dapprincipio permettono di determinare la direzione e il verso di uno qualsiasi dei due vettori $\boldsymbol{K}$ ed $\boldsymbol{\omega}$, quando si conoscano quelli dell'altro. Per avere la linea d'azione (orientata) di $\boldsymbol{K}$, basta considerare il piano tangente all'ellissoide d'inerzia in uno qualsiasi dei due punti in cui esso è intersecato dalla linea d'azione di $\boldsymbol{\omega}$ (supposto applicato in O) e condurre da O la perpendicolare a codesto piano in quel verso che forma con $\boldsymbol{\omega}$ un angolo acuto. E, viceversa, la linea d'azione di $\boldsymbol{\omega}$ si ottiene prendendo uno qualsiasi dei due piani tangenti all'ellissoide e perpendicolari a $\boldsymbol{K}$ e orientando la congiungente di O col punto di contatto in quel verso che determina con $\boldsymbol{K}$ un angolo acuto.

Resta da vedere come si calcoli l'intensità K del momento, nota la ω, o viceversa.

Se è dato $\boldsymbol{\omega}$, con che va ritenuta nota anche la T, e si vuol calcolare K, basta ricorrere alla (32) che si può scrivere

$$K\omega \cos\alpha = 2T\,, \tag{32'}$$

dove l'angolo acuto α è da ritenersi conosciuto in base alle considerazioni geometriche pocanzi svolte.

Se poi, supposto noto il momento $\boldsymbol{K}$, vogliamo esprimere la lunghezza ω della velocità angolare, possiamo anzitutto ritener determinata, con la costruzione geometrica, la linea d'azione (orientata) di $\boldsymbol{\omega}$ e quindi l'ampiezza α dell'angolo (acuto) di $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$. Se, denotato con Q il punto in cui codesta linea d'azione, nel suo verso positivo, interseca l'ellissoide di inerzia, poniamo $\rho = OQ$, e teniamo conto che i coseni direttori di $\boldsymbol{\omega}$ sono dati da p/ω, q/ω, r/ω, otteniamo per le coordinate di Q le espressioni

$$\rho\,\frac{p}{\omega}\,,\qquad \rho\,\frac{q}{\omega}\,,\qquad \rho\,\frac{r}{\omega}\,;$$

onde, scrivendo che esse soddisfanno all'equazione (33) dell'ellissoide d'inerzia, perveniamo alla relazione

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} = 2T\,; \tag{34}$$

e basta eliminare fra le (32') e (34) la forza viva T per ottenere la voluta espressione di ω

$$\omega = K\rho^2 \cos\alpha\,.$$

Se invece si sostituisce nella (32') il valore di ω, che si deduce dalla (34), si trova

$$K\rho\cos\alpha = \sqrt{2T}\,, \tag{35}$$

e giova rilevare che $\rho\cos\alpha$ rappresenta la distanza δ del centro O dell'ellissoide dal suo piano tangente in Q, cosicchè la (35) si può anche scrivere

$$\delta = \frac{\sqrt{2T}}{K}\,. \tag{36}$$

19. Omografia vettoriale d'inerzia. — La corrispondenza tra i due vettori $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$, che abbiamo testè studiato sotto l'aspetto geometrico e che analiticamente è rappresentata rispetto ad assi solidali generici dalle (30''), e rispetto agli assi principali di inerzia in O dalle (30'''), è un primo esempio di quelle corrispondenze biunivoche tra vettori (variabili) che, rispetto ad una terna di riferimento, si definiscono, determinando le componenti di uno dei due vettori come funzioni lineari delle componenti dell'altro. Sono queste le cosiddette *omografie vettoriali*, secondo il nome ad esse attribuito dal BURALI-FORTI, che col MARCOLONGO ne sviluppò la teoria [1].

Non possiamo qui dilungarci su queste omografie vettoriali; solo, per comodità di linguaggio, conveniamo di designare la corrispondenza tra $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$, qui considerata, col nome di *omografia (vettoriale) di inerzia* del solido *rispetto al suo punto* O, scelto come centro di riduzione. Di più, considerando questa omografia come una operazione univoca che, applicata al vettore $\boldsymbol{\omega}$, dà come risultato il vettore $\boldsymbol{K}$, sarà opportuno rappresentarla con un simbolo operatorio σ, scrivendo

$$\boldsymbol{K} = \sigma(\boldsymbol{\omega}) .$$

Conseguentemente, l'operazione inversa, che applicata a $\boldsymbol{K}$ dà $\boldsymbol{\omega}$ e che, come si è visto al n. prec., è univoca al pari della σ, si rappresenterà col simbolo σ^{-1}, scrivendo

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma^{-1}(\boldsymbol{K}) ;$$

e, per quanto possa oramai apparire superfluo, aggiungiamo che le due precedenti equazioni simboliche compendiano rispetto ad assi solidali generici le (30″) e le loro inverse, e rispetto agli assi principali di inerzia in O le (30‴) e le loro inverse.

Le (30‴), insieme colle loro inverse

$$p = \frac{K_x}{\mathcal{A}}, \qquad q = \frac{K_y}{\mathcal{B}}, \qquad r = \frac{K_z}{\mathcal{C}},$$

diconsi *equazioni canoniche* della omografia; e le direzioni degli assi principali d'inerzia, rispetto a cui valgono queste equazioni, si designano talvolta col nome di *direzioni principali* dell'omografia.

20. SOLIDO CON ASSE FISSO. — Se un solido S ruota intorno ad una retta fissa a, conviene adottare questa retta, orientata ad arbitrio, come uno degli assi solidali di riferimento, p. es. come asse delle x, e prendere in un generico punto di essa il centro di riduzione O dei momenti, che poi giova assumere senz'altro come

[1] Cfr., in particolare, BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Transformations linéaires*, Pavia, Mattei, 1912.

origine della terna solidale. Con ciò si annullano manifestamente tutte le caratteristiche, salva la p; e poichè, essendo fisso il centro di riduzione O, seguitano a valere le (29'''), (30'') del n. 16, si hanno per le componenti della quantità di moto Q e del momento delle quantità di moto K le espressioni

$$Q_x = 0\,, \qquad Q_y = -mz_0p\,, \qquad Q_z = my_0p\,; \tag{37}$$
$$K_x = \mathcal{A}p\,, \qquad K_y = -\mathcal{C}'p\,, \qquad K_z = -\mathcal{B}'p\,. \tag{38}$$

Nei riguardi del problema fondamentale della Dinamica (determinazione del moto, quando siano date le forze attive) il più importante di codesti sei elementi è (come vedremo nel Cap. VI, § 2) il momento $K_a = K_x$ delle quantità di moto rispetto all'asse di rotazione. Detto al solito ω il valore assoluto della velocità angolare, si ha $p = \pm\,\omega$ secondochè (nell'istante considerato) il verso arbitrariamente assunto come positivo sull'asse di rotazione è concorde o discorde a quello della velocità angolare.

La prima delle (38), mostra così che *il momento delle quantità di moto rispetto all'asse di rotazione è dato dal prodotto di* $\pm\,\omega$ *per* $\mathcal{A}$ (momento di inerzia del corpo rispetto allo stesso asse); e vale il segno $+$, se si orienta l'asse di rotazione in modo che ad esso, nell'istante considerato, appaia destra la rotazione del solido.

Vale la pena di mostrare come a codesta espressione di K_a si pervenga immediatamente per via elementare.

Si osservi, invero, che, trattandosi di un moto rotatorio intorno ad a, la velocità di un punto P_i, di cui sia δ_i la distanza dall'asse, ha l'intensità $\omega\delta_i$ ed è diretta ortogonalmente al piano P_ia; talchè, essendo δ_i la minima distanza della sua linea d'azione dall'asse, il momento di codesta velocità rispetto all'asse è dato da $\omega\delta_i^2$, non soltanto in valore assoluto, ma anche in segno, purchè si orienti l'asse nel verso rispetto a cui la rotazione, nell'istante considerato, appare destra. Con ciò il momento rispetto ad a della quantità di moto del punto materiale P_i è eguale ad $m_i\omega\delta_i^2$, onde, sommando rispetto a tutti i punti del sistema, si ritrova la formula

$$K_a = \omega\sum_1^N{}_i m_i\delta_i^2\,,$$

che collima con quella ottenuta dianzi, in quanto $\sum_1^N{}_i m_i\delta_i^2$ è appunto il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse di rotazione; e, naturalmente, al secondo membro va cambiato il segno, se si inverte l'orientazione di codesto asse.

In ogni caso, se θ designa l'angolo che un semipiano, uscente da a e fisso nel corpo, forma con un analogo semipiano, fisso nello spazio, quest'angolo essendo contato positivamente nel senso destro intorno ad a, potremo scrivere

$$K_a = \mathcal{A}\dot{\theta}$$

in quanto, per la definizione della velocità angolare ω, $\dot{\theta}$ è proprio la sua componente secondo a (III$_1$, n. 5).

Capitolo V.

TEOREMI GENERALI SUL MOTO DEI SISTEMI. EQUAZIONI DEL LAGRANGE

§ 1. – Generalità.

1. Il problema fondamentale della Dinamica consiste nella ***determinazione del moto di un qualsiasi sistema materiale, sotto una assegnata sollecitazione.***

A precisare la natura e l'enunciato stesso di questo problema giova qui svolgere alcune considerazioni preliminari, in cui, sin dove lo consente la questione, ci servirà di norma l'analogia col caso di un unico punto materiale.

Se, al solito, ci riferiamo ad un sistema S di N punti materiali P_i $(i = 1, 2, ..., N)$, ogni sollecitazione sarà costituita da forze applicate agli N punti del sistema, che, in base al postulato della indipendenza degli effetti delle forze (VII$_1$, n. 9), si potranno ridurre ad N forze applicate rispettivamente agli N punti P_i, sostituendo, per ciascuno di questi, alle varie forze agenti su di esso la rispettiva risultante. Ciò premesso, considereremo conosciuta la sollecitazione del sistema, ogniqualvolta per ogni punto P_i la risultante delle forze ad esso applicate sia data in funzione della configurazione del sistema, delle velocità simultanee degli N punti e del tempo (cfr. VII$_1$, n. 22).

Se, come accade nel problema degli N corpi in Meccanica celeste (III, n. 18), gli N punti P_i sono liberi ed è data, nel senso testè precisato, la sollecitazione cui essi, nel loro insieme, sono sottoposti, il problema del moto si pone immediatamente in equazione: applicando, infatti, a ciascuno degli N punti l'equazione fondamentale della Dinamica, si otterranno le N equazioni vettoriali

$$(1) \qquad m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i \qquad (i = 1, 2, ..., N),$$

dove $\boldsymbol{F}_i$ denota la data forza totale direttamente applicata a P_i, m_i la massa, pur essa data, di codesto punto ed $\boldsymbol{a}_i$ la sua incognita accelerazione, valutata, beninteso, con riferimento ad una terna $\Omega\xi\eta\zeta$ galileiana (cioè ad una terna che, rispetto alle stelle, sia immobile od animata di un moto traslatorio uniforme). Se, rispetto a codesta terna, sono ξ_i, η_i, ζ_i le coordinate del punto P_i ed X_i, Y_i, Z_i le componenti della forza $\mathbf{F}_i$, le equazioni vettoriali (1), proiettate sui tre assi $\Omega\xi\eta\zeta$, danno le $3N$ equazioni scalari

$$(1') \qquad m_i\ddot{\xi}_i = X_i\,, \quad m_i\ddot{\eta}_i = Y_i\,, \quad m_i\ddot{\zeta}_i = Z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

dove le X_i, Y_i, Z_i denotano, per quanto si è supposto, altrettante funzioni note dei $6N + 1$ argomenti

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i;\ \dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i;\ t \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Si tratta, dunque, di un sistema di $3N$ equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine nelle $3N$ funzioni incognite ξ_i, η_i, ζ_i dell'unica variabile indipendente t; e il problema del moto degli N punti liberi P_i sotto la data sollecitazione si riduce alla integrazione del sistema differenziale (1').

Questa integrazione, come ben sappiamo, non si sa in generale eseguire in termini finiti con mezzi elementari; ma noti teoremi di esistenza [1] ci dicono che, subordinatamente a condizioni assai late per le funzioni X_i, Y_i, Z_i, il sistema (1') ammette un integrale generale dipendente da $6N$ costanti arbitrarie.

Conseguentemente, possiamo dire che per gli N punti liberi P_i, sotto la data sollecitazione, sono possibili ∞^{6N} moti diversi; e se ne individuerà uno, imponendo delle opportune condizioni ulteriori, p. es. prefissando ad arbitrio l'atto di moto iniziale del sistema.

2. Ma si può dire che il caso dianzi considerato di un sistema di N punti *liberi* non trova riscontro nella realtà fisica se non nel problema, già or ora ricordato, di Meccanica celeste (in cui, anzi, la sollecitazione, come sappiamo, non è del tipo generale supposto al n. prec., ma è, più semplicemente, posizionale).

Nella massima parte delle questioni concrete si è condotti a considerare *sistemi materiali vincolati*.

Ora, se un sistema di N punti materiali P_i è comunque vincolato e sollecitato, noi, in virtù del postulato delle reazioni vincolari (VII_1, n. 10), possiamo ritenere che *su ciascun punto del sistema l'azione esercitata dai vincoli, nelle date condizioni di sollecitazione, sia sostituibile con una forza* (fittizia), che chiameremo naturalmente *reazione* o *forza vincolare*.

---

[1] Si ricordi la nota a piè della pagina 73 della Iª Parte.

Dopo di che, applicando il solito criterio che è insito nello stesso postulato or ora ricordato, potremo trattare il sistema S come un sistema di N punti liberi, ciascuno dei quali sia simultaneamente soggetto alla risultante delle forze direttamente applicate ad esso e alla risultante delle reazioni, che su di esso sostituiscono le azioni dei vincoli.

Consegue di qui che, anche nel caso più generale di sistemi vincolati, varranno le equazioni fondamentali (1), *purchè vi si interpreti ciascuna delle F_i come risultante complessiva delle forze attive e delle reazioni, cui è soggetto il corrispondente punto P_i*.

Vien così messa in luce la essenziale differenza che questo caso presenta rispetto a quello del n. prec. Per dato, qui generalmente si conoscono, oltre le forze attive, le modalità di realizzazione dei vincoli, ma non le corrispondenti reazioni, le quali hanno perciò carattere di *incognite ausiliarie*; e queste incognite compaiono come addendi espliciti nei secondi membri delle (1). Di qui appare che queste equazioni (1) non costituiscono, pel problema del moto di un sistema vincolato, se non una impostazione provvisoria; e si impone alla Dinamica la ricerca di procedimenti che permettano di eliminare dalle (1), nei casi più generali possibili, le reazioni, così da fornire, per la determinazione del moto, equazioni differenziali dipendenti soltanto dai dati diretti della questione.

3. Al n. prec. siamo stati condotti, per necessità logica, a distinguere le forze agenti su di un sistema in *forze direttamente applicate* od *attive* e *forze vincolari* o *reattive*.

A questa classificazione va contrapposta l'altra (pur essa introdotta sin dalla Statica e già richiamata incidentalmente al n. 3 del Cap. prec.) di codeste stesse forze in *esterne* ed *interne*; e qui, data l'importanza di tale distinzione, ricordiamo, per quanto possa apparire forse superfluo, che si son chiamate *interne* le forze che su ogni singolo punto del sistema vengono esercitate da altri punti del sistema stesso (in particolare da quelli ad esso eventualmente contigui), mentre abbiamo detto *forze esterne* tutte le altre (dovute ad influenze estranee al sistema).

Ad evitare pericolosi equivoci, conviene subito insistere sulla circostanza che questa seconda classificazione delle forze è in sè indipendente dalla prima. È bensì vero che per sistemi particolari può accadere che le due classificazioni conducano entrambe alla medesima ripartizione delle forze, come, p. es., si verifica nel caso di un solido libero, soggetto alla gravità e a trazioni o pressioni superficiali, pel quale le forze attive (peso e trazioni o pressioni) sono tutte di origine esterna, mentre le reazioni (forze vincolari di rigidità) son tutte di natura interna. Ma basta pensare a vincoli realizzati mediante il collegamento del sistema con corpi ad esso estranei (ad es., solido appeso o appoggiato) e d'altro canto a forze interne dovute non a legami, ma a congegni o circostanze fisiche attive (ad es., attrazioni newtoniane fra gli elementi materiali del sistema mobile) per riconoscere che, in generale, *tanto le forze attive, quanto, per conto loro, le reazioni possono essere in parte esterne e in parte interne.*

4. Le due classificazioni suindicate per le forze agenti su di un sistema materiale hanno ciascuna una peculiare importanza ai fini della Dinamica, in quanto ad ognuna di esse si riconnette tutto un gruppo di teoremi generali e di conseguenti applicazioni concrete. E non è fuor di luogo ricordare che analoghe circostanze si son verificate nella Statica, dove dapprima, distinguendo le forze in esterne ed interne, siamo pervenuti alle *condizioni cardinali dell'equilibrio* (XI_1), applicabili, come necessarie, ad ogni possibile tipo di sistemi materiali (p. es., ai sistemi articolati, ai fili, ecc.; $XIII_1$); e, in particolare, *caratteristiche* per l'equilibrio dei solidi (XII_1); mentre poi, nella Statica generale (XIV_1), partendo dalla distinzione delle forze in attive e vincolari e aggiungendo opportune ipotesi restrittive sulla natura dei vincoli (*assenza di attrito*), siamo riusciti, grazie al *principio dei lavori virtuali*, ad eliminare dalle condizioni di equilibrio le incognite reazioni.

Il presente capitolo si svolgerà, nel campo dinamico, secondo un ordine logico, in qualche modo parallelo a quello testè ricordato. Nel § 2, sulla base della distinzione delle forze agenti su di un sistema qualsiasi in esterne ed interne, stabiliremo due equazioni vettoriali (*equazioni cardinali del moto*), che, essendo applicabili ad ogni possibile sistema, si prestano alle più svariate deduzioni, e che nel caso dei solidi, come vedremo nel Cap. VI, sono altresì *sufficienti* a determinare il moto.

Nel § 3, invece, prenderemo le mosse dalla classificazione delle forze in attive e vincolari; e, beninteso, nella ipotesi della assenza di attrito, faremo vedere come, anche in questo caso dinamico, il principio dei lavori virtuali permetta di eliminare in modo generale e, per così dire, automatico dalle equazioni differenziali del moto le incognite reazioni. Estenderemo poi ai sistemi il *principio della conservazione dell'energia* (§ 4) e da ultimo stabiliremo le classiche *equazioni del* LAGRANGE (§ 5), che caratterizzano, nella forma più sintetica e più espressiva, il problema del moto di un qualsiasi sistema olonomo (a vincoli privi di attrito).

§ 2. – Teoremi della quantità di moto e del momento delle quantità di moto. Equazioni cardinali del moto.

5. TEOREMA DELLA QUANTITÀ DI MOTO. — Considerato un sistema materiale S di N punti P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, comunque vincolato e sollecitato, distinguiamo l'insieme di *tutte* le forze agenti sul sistema (tanto direttamente applicate quanto vincolari) in *esterne* ed *interne*, e pel generico punto P_i denotiamo con $\boldsymbol{F}_i$ la risultante di tutte e sole le forze esterne agenti su di esso, con $\boldsymbol{f}_i$ la risultante di tutte e sole le forze interne. La forza totale sollecitante P_i sarà data da $\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{f}_i$, talchè le equazioni del moto del sistema si potranno scrivere

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{f}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{2}$$

Ma le forze $\boldsymbol{f}_i$, per la stessa loro natura, costituiscono, in base al principio di reazione (XI$_1$, § 1), un sistema vettorialmente equivalente a zero (cioè avente nulli il risultante e il momento risultante), onde consegue che, sommando membro a membro le N equazioni (2), si ottiene

$$\sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{a}_i = \sum_1^N {}_i \boldsymbol{F}_i ,$$

ossia, denotando con $\boldsymbol{R}^{(e)}$ la risultante di tutte le forze esterne

$$\sum_1^N {}_i m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)} ;$$

e basta ricordare la definizione della quantità di moto del sistema, (Cap. prec., n. 12)

$$\boldsymbol{Q} = \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{v}_i ,$$

per poter dare alla relazione precedente la forma

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)} . \tag{3}$$

Abbiamo dunque (TEOREMA DELLA QUANTITÀ DI MOTO O DELL'IMPULSO) che *la derivata della quantità di moto di un qualsiasi sistema materiale è, istante per istante, eguale al risultante delle forze esterne.*

6. Teorema del moto del baricentro. — Se si tien conto (Cap. prec., n. 12) che

$$\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_G,$$

dove m è la massa totale del sistema e $\boldsymbol{v}_G$ la velocità del baricentro G, la (3) si può scrivere, denotando con $\boldsymbol{a}_G$ l'accelerazione di G

$$m\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{R}^{(e)}. \tag{3'}$$

Si ha cioè il cosiddetto TEOREMA DEL MOTO DEL BARICENTRO: *Qualunque sia il sistema materiale che si considera e qualunque sia la sollecitazione cui esso è sottoposto, il baricentro si muove come se fosse un punto materiale dotato della massa totale del sistema e sollecitato dalla risultante di tutte e sole le forze esterne agenti sul sistema.*

Dal punto di vista analitico questo teorema non è che una diversa forma di quello della quantità di moto; ma concettualmente è molto più espressivo. In particolare, esso, mettendo in luce, per ogni sistema, l'esistenza di un punto (interno ad una qualsiasi superficie convessa che racchiuda tutti i punti del sistema; in particolare, se si tratta di un corpo convesso, al corpo stesso; cfr. X_1; n. 11), cioè il baricentro, il cui moto segue rigorosamente la legge limite del punto materiale, giustifica a posteriori la sostituzione di un semplice punto materiale ad un corpo di dimensioni finite non soltanto in quei casi, in cui da codeste dimensioni si possa completamente prescindere, ma anche quando, pur essendo ragguardevoli le dimensioni del corpo, basti tener conto del moto di un solo suo punto.

7. Come applicazione semplicissima del teorema del moto del baricentro, consideriamo un corpo dotato di congegni *interni*, comunque complicati, e soggetto, per quel che riguarda le forze esterne, all'azione esclusiva della gravità, p. es., un animale cadente nel vuoto. Il teorema del n. prec. ci assicura che nessuna azione dei congegni interni e, nel caso dell'animale, nessuno sforzo muscolare varrà a modificare la traiettoria del baricentro: infatti tutte le forze, che così si mettono in giuoco, per quanto svariate ed intense, restan pur sempre forze interne, e il baricentro seguiterà a descrivere la parabola determinata dalla sola azione della gravità.

Ad evitare equivoci, non sarà male rilevare esplicitamente che ciò non esclude affatto la possibilità del volo: invero, in tal caso, interviene in modo essenziale l'aria e, con le ali o con altri mezzi, vengono provocate anche azioni *esterne* al sistema considerato.

8. Se per un qualsiasi sistema S è costantemente nulla la risultante $\boldsymbol{R}^{(e)}$ delle forze esterne, dalla (3′) segue $\boldsymbol{a}_G = 0$; cioè *il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme.*

È questo il cosiddetto *teorema della conservazione del moto del baricentro*. Esso, p. es., deve valere, almeno sensibilmente, pel Sistema solare, in quanto le attrazioni esercitate su di esso dalle stelle, per le enormi distanze di queste, si possono riguardare trascurabili di fronte alle attrazioni mutue tra Sole e pianeti. E in realtà si è riconosciuto, in base ad apprezzamenti di media tratti da un gran numero di osservazioni astronomiche, che il baricentro del sistema solare, situato in prossimità del centro del Sole, si muove con velocità di 20 km/sec verso un punto della sfera celeste situato nella prossimità di Vega, detto *Apice*.

9. Tornando ad un sistema qualsiasi, supponiamo più generalmente che sia costantemente nulla la componente $R_a^{(e)}$ di $\boldsymbol{R}^{(e)}$ secondo una qualche direzione fissa a. In tal caso, proiettando su codesta direzione la (3′), si ottiene $a_{G|a} = 0$ ossia $dv_{G|a}/dt = 0$; onde si conclude che *rimane costante, durante il moto del sistema, la componente $v_{G|a}$ della velocità del baricentro secondo la direzione a.*

Di questi risultati così semplici e, al tempo stesso, così generali, si fa uso frequente nelle applicazioni concrete.

Per indicare, a titolo di esempio, una conseguenza, altrettanto curiosa quanto ovvia, dell'ultima osservazione, mostriamo che, se non intervenisse l'attrito, non sarebbe possibile camminare: più precisamente, una persona, che, ritta su di un suolo orizzontale, assolutamente levigato, si trovasse inizialmente in quiete, non potrebbe, a costo di qualsiasi sforzo muscolare, portarsi in un luogo diverso.

Infatti, mancando l'attrito, le forze esterne (peso e reazione del suolo) sarebbero tutte verticali, talchè in qualsiasi direzione orizzontale a si avrebbe $v_{G|a} = \text{cost}$; ed anzi, poichè inizialmente la persona si è supposta in quiete, resterebbe indefinitamente $v_{G|a} = 0$, cioè la proiezione orizzontale del baricentro rimarrebbe immobile. Pertanto la persona considerata non potrebbe in alcun modo provocare un suo spostamento orizzontale di insieme: ove spingesse un arto in un senso, qualche altra parte del suo corpo si porterebbe necessariamente in senso opposto (determinandosi, tutt'al più, un innalzamento o un abbassamento del baricentro lungo la verticale). In realtà si sfugge a questa situazione teorica e si riesce a mettersi in moto, utilizzando l'attrito.

10. Teorema del momento delle quantità di moto. — Riprendiamo le equazioni fondamentali

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{f}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{2}$$

e consideriamo, come elemento ausiliare di riduzione, un punto O *mobile con legge determinata qualsiasi* o, in particolare, *in quiete* (rispetto ai nostri assi di riferimento).

Se, dopo aver moltiplicato vettorialmente la generica equazione (2) per $P_i - O$, sommiamo membro a membro da $i = 1$ ad $i = N$ ricordando che il momento risultante delle forze interne $\boldsymbol{f}_i$ rispetto ad O è costantemente nullo, otteniamo

$$\sum_1^N {}_i (P_i - O) \wedge m_i \boldsymbol{a}_i = \sum_1^N {}_i (P_i - O) \wedge \boldsymbol{F}_i .$$

dove a secondo membro resta soltanto il momento risultante, rispetto ad O, delle forze esterne $\boldsymbol{F}_i$, che denoteremo con $\boldsymbol{M}^{(e)}$.

Ma al n. 14 del Cap. prec. si è visto che, ove si designi con $\boldsymbol{K}$ l'analogo momento delle quantità di moto del sistema e con $\boldsymbol{v}'$ la velocità (rispetto ai nostri assi di riferimento) del centro di riduzione O, si ha identicamente

$$\sum_1^N {}_i (P_i - O) \wedge m_i \boldsymbol{a}_i = \frac{d\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{Q} .$$

Perciò la relazione precedente si può scrivere sotto la forma particolarmente espressiva

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{M}^{(e)} . \tag{4}$$

Essa vale qualunque sia la legge del moto del centro di riduzione O. Ma nelle deduzioni meccaniche essa si usa soprattutto in due casi particolari: 1°) quando O è fisso; 2°) quando O, pur movendosi in generale, coincide istante per istante col baricentro del sistema materiale. In entrambi i casi (poichè nel primo si ha $\boldsymbol{v}' = 0$ e nel secondo $\boldsymbol{Q}$ risulta parallelo a $\boldsymbol{v}'$) si annulla il termine $\boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{Q}$ (cfr. Cap. prec., n. 14), talchè la (4) assume la forma più semplice

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}^{(e)} , \tag{4'}$$

che fa perfetto riscontro alla (3). Essa esprime il teorema del momento della quantità di moto (o della coppia di impulso): *Comunque si muova un sistema materiale, la derivata rapporto al tempo del momento delle quantità di moto rispetto ad un punto fisso*

o coincidente col baricentro è, istante per istante, eguale al momento risultante di tutte e sole le forze esterne rispetto al medesimo centro di riduzione.

Questo teorema è stato qui dimostrato nella sola ipotesi implicita che il moto del sistema sia riferito ad assi immobili rispetto alle stelle fisse o, tutt'al più, animati rispetto ad esse, di un moto traslatorio uniforme.

Ma sappiamo (Cap. prec., n. 13) che, ove si assuma come centro di riduzione il baricentro, il momento delle quantità di moto (assolute) del sistema coincide con quello delle quantità di moto relative al baricentro; perciò la (4') sussiste anche quando per $\boldsymbol{K}$ si prenda quest'ultimo momento, purchè, beninteso, il momento risultante $\boldsymbol{M}^{(e)}$ delle forze esterne si calcoli rispetto al baricentro.

Infine, è appena necessario rilevare che, se a è una *qualsiasi* retta fissa pel centro di riduzione supposto fisso o una retta passante pel baricentro G e di direzione invariabile, quando il centro di riduzione siasi assunto in G, la (4'), proiettata sulla a, dà

$$\frac{dK_a}{dt} = M_a^{(e)} . \tag{5}$$

Si può dir questo il ***teorema del momento scalare delle quantità di moto.***

11. Se la sollecitazione del sistema è tale che il momento risultante $\boldsymbol{M}^{(e)}$ delle forze esterne si mantenga costantemente nullo, la (4') ci dice che *durante tutto il moto, il vettore* $\boldsymbol{K}$ *si conserva costante* (in grandezza e direzione).

Costante è, in tal caso, anche la giacitura del piano perpendicolare a $\boldsymbol{K}$ pel centro di riduzione O. Un tal piano si dice *piano invariabile* del sistema, mentre l'equazione

$$\boldsymbol{K} = \text{cost} = \boldsymbol{K}_0$$

si chiama l'*integrale del momento* (vettoriale) *delle quantità di moto.*

Dell'uno e dell'altro sono dotati tutti i sistemi soggetti a sole forze interne, pei quali, anzi, annullandosi tanto $\boldsymbol{R}^{(e)}$ quanto $\boldsymbol{M}^{(e)}$, si conservano costanti, insieme, la quantità di moto $\boldsymbol{Q}$ e il momento $\boldsymbol{K}$ delle quantità di moto. Tale, ad es., è, almeno sensibilmente, il Sistema solare, pel quale il piano invariabile si designa anche col nome di *piano del* LAPLACE.

Notiamo ancora come immediata conseguenza della (5) che, *se è costantemente nullo il momento risultante delle forze esterne rispetto ad una retta a, fissa o passante pel baricentro e di direzione invariabile, si mantiene costante, durante tutto il moto, il momento*

risultante (*scalare*) K_a ***delle quantità di moto rispetto alla*** a (*integrale del momento scalare delle quantità di moto*).

12. Il teorema del momento delle quantità di moto e i suoi corollari trovano, al pari del teorema della quantità di moto, larghe e svariate applicazioni.

Per darne qualche esempio cominciamo col considerare un solido soggetto ad un sistema di forze esterne, di cui sia nullo il momento risultante rispetto al baricentro, ed osserviamo che tale è sempre il caso di un sistema pesante, in quanto il peso dei singoli elementi equivale (nel senso della teoria dei vettori applicati) ad una forza unica applicata al baricentro.

Diciamo che se il solido, sotto l'azione di forze esterne soddisfacenti alla condizione accennata, si muove *a partire dalla quiete*, il suo moto è necessariamente traslatorio.

Per provarlo mostreremo che la velocità angolare, la quale per ipotesi è nulla inizialmente, si conserva tale durante tutto il moto.

Partiamo a tale scopo dal teorema del momento, riferito al baricentro del solido. Poichè si annulla, per ipotesi, il momento baricentrale delle forze attive, l'analogo momento $\boldsymbol{K}$ delle quantità di moto dovrà essere costante in grandezza e direzione; e siccome per ipotesi sono inizialmente nulle le velocità e quindi le quantità di moto di tutti i punti del sistema, sarà pur nullo il valore iniziale del momento $\boldsymbol{K}$, che, dovendo restar costante, si conserverà eguale a zero durante tutto il moto.

Ma allora basta ricordare che, rispetto agli assi principali di inerzia (baricentrali), le componenti di $\boldsymbol{K}$ sono date da $\mathcal{A}p$, $\mathcal{B}q$, $\mathcal{C}r$ (Cap. prec., n. 16), dove, escluso il caso banale che i punti materiali di S appartengano tutti ad una medesima retta, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ (per la loro stessa definizione di momenti di inerzia) sono tutti e tre diversi da zero, per concludere che, insieme con $\boldsymbol{K}$, sono costantemente nulle le componenti p, q, r di $\boldsymbol{\omega}$ e quindi la stessa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$.

Di qui risulta, in particolare, che un solido pesante lasciato cadere nel vuoto, non può capovolgersi se parte dalla quiete, o, anche, se viene lanciato in modo che la velocità angolare iniziale sia nulla.

Abbiamo così stabilito rigorosamente la possibilità di imprimere ad un grave cadente nel vuoto un moto puramente traslatorio, già affermata in via intuitiva (XV_1, n. 5).

13. Lasciamo l'ipotesi che sia nullo il momento baricentrale $\boldsymbol{M}^{(e)}$ delle forze esterne e supponiamo soltanto che si abbia

$M_a^{(e)} = 0$, essendo a un asse fisso, o di direzione fissa e passante pel baricentro del solido considerato. Si vede subito che *non è possibile provocare una rotazione attorno ad a, a partire dalla quiete.* Infatti la (5) ci dice che K_a resta costante; e poichè a K_a, designando con θ l'anomalia che individua l'orientazione del corpo intorno ad a, si può attribuire la forma $\mathcal{A}\dot{\theta}$ (Cap. prec., n. 20), e qui per ipotesi $\dot{\theta}$ è inizialmente nulla, si conclude, in quanto $\mathcal{A}$ è certamente diverso da zero, che $\dot{\theta}$ si manterrà nulla durante tutto il moto.

14. Consideriamo in secondo luogo un sistema S, un po' più generale, e precisamente un sistema costituito da due parti S_1 ed S_2, ciascuna rigida, ma non rigidamente collegate tra loro. Supponiamo, come dianzi, che sia $M_a^{(e)} = 0$, dove beninteso $M_a^{(e)}$ significa adesso il momento complessivo, rispetto all'asse a, di tutte le forze esterne, che sollecitano tanto S_1 quanto S_2. Sarà qui ancora K_a costante ed anzi nullo, se, come ancora supporremo, il sistema parte dalla quiete. Se si sa ulteriormente che il moto di ciascuno dei due solidi si riduce ad una rotazione intorno ad a, i rispettivi momenti delle quantità di moto saranno (con manifesto significato delle notazioni) $\mathcal{A}_1\dot{\theta}_1$, $\mathcal{A}_2\dot{\theta}_2$. Sarà per conseguenza $\mathcal{A}_1\dot{\theta}_1 + \mathcal{A}_2\dot{\theta}_2$ il momento risultante del sistema, e si avrà in ogni istante

$$\mathcal{A}_1\dot{\theta}_1 + \mathcal{A}_2\dot{\theta}_2 = 0 ,$$

ossia, integrando e supponendo di contare, per ciascuno dei due sistemi parziali S_1 ed S_2, l'angolo a partire dalla posizione iniziale,

$$\mathcal{A}_1\theta_1 + \mathcal{A}_2\theta_2 = 0 .$$

Si vede di qui che θ_1 e θ_2 debbono avere segno opposto; cioè, se uno dei due solidi ruota in un senso, l'altro ruota necessariamente in senso opposto; inoltre le ampiezze delle rotazioni (descritte in tempi eguali) sono inversamente proporzionali ai rispettivi momenti di inerzia.

Non è dunque in alcun modo escluso, come avveniva quando si trattava di un unico solido, che, pur partendo il sistema dalla quiete, una delle due parti, S_1 per es., cambi di orientazione, anzi raggiunga un azimut θ_1, comunque prefissato; soltanto, non si potrà evitare, nelle condizioni supposte, che l'altro corpo ruoti in senso inverso, quanto occorre per rispettare la condizione $\mathcal{A}_1\theta_1 + \mathcal{A}_2\theta_2 = 0$.

15. Applichiamo le cose dette all'esempio, che già ci ha servito ad illustrare la conservazione del moto baricentrale; cioè ad una persona in quiete, ritta su di un suolo orizzontale privo di attrito (n. 9). Sia a la verticale passante per il baricentro della persona, e si richieda, per es., alla persona di far « dietro front » cioè di rotare di 180° attorno ad a. Le forze esterne sono in tal caso il peso e le reazioni offerte dal suolo negli appoggi, tutte forze verticali, che hanno momento nullo rispetto ad a. Ci troviamo dunque in tali condizioni che non è possibile una rotazione d'insieme, comportandosi cioè la persona come un unico sistema rigido.

Ma l' osservazione fatta per il caso di due solidi, mostra che, anche prescindendo dall'attrito, sarebbe perfettamente realizzabile una rotazione attorno ad a, purchè si collegasse alla persona un qualche oggetto atto a rotare in senso opposto. Così, in particolare, portando tutto attorno alla vita una cintura con incavo, in cui possa scorrere una palla pesante, basterebbe imprimere a questa un movimento colla mano, per provocare una (sia pur piccola) rotazione di tutta la persona in senso opposto; dopo un tempo sufficiente, si riescirebbe in ogni caso a raggiungere l'effetto voluto.

Considerazioni analoghe (in cui però bisogna far intervenire anche certi movimenti non rigidi delle due parti S_1 ed S_2) permettono di rendersi ragione del così detto « salto del gatto ». Si tratta del fatto ben noto che, comunque cada o si lasci cadere un gatto anche colle zampe all'insù e a partire dalla quiete, il gatto (se ne ha appena il tempo) riesce a voltarsi durante il tragitto, senza alcun intervento di forze esterne.

16. Equazioni cardinali del moto di un sistema qualsiasi. — Le due equazioni vettoriali

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)}, \tag{3}$$

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{M}^{(e)}, \tag{4}$$

e, più particolarmente, la (3) e la

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}^{(e)}, \tag{4'}$$

diconsi le *equazioni cardinali* od *universali del moto*.

Esse sono applicabili ad ogni possibile sistema, purchè soltanto:

a) il moto del sistema sia riferito ad assi galileiani, cioè fissi o in moto traslatorio uniforme rispetto alle stelle;

b) le derivate vettoriali siano valutate rispetto a codesti medesimi assi;

c) quando codeste equazioni si vogliano applicare sotto la forma (3), (4′), il centro di riduzione sia fisso o coincida col baricentro del sistema.

Va notato che codeste equazioni, nel caso statico ($\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{K}=0$), danno appunto le condizioni $\boldsymbol{R}^{(e)}=\boldsymbol{M}^{(e)}=0$ che nella Statica abbiamo stabilito direttamente come *necessarie* all'equilibrio di un sistema materiale qualsiasi e che perciò abbiamo chiamato *cardinali* od *universali* (XI_1, n. 4). Quanto dicemmo allora (l. c., n. 5), limitatamente al caso statico, basta perchè si possa affermare che le equazioni cardinali del moto, pur valendo *necessariamente* per ogni sistema materiale mobile, non saranno in generale *sufficienti* a caratterizzarne il moto. Ma, sempre in accordo col caso statico, vedremo nel Cap. VI che per i *sistemi rigidi* esse in ogni caso *bastano* a definirne il moto completamente e perciò costituiscono la base di tutta la Dinamica dei solidi.

§ 3. – Principio del d'Alembert e relazione simbolica della Dinamica.

17. Ai teoremi generali del § prec. siamo pervenuti, partendo dalla distinzione delle forze agenti sul sistema in esterne ed interne. Adottiamo qui l'altro criterio di classificazione (n. 3) e distinguiamo codeste forze in *attive* (o direttamente applicate) e *vincolari*. Precisamente denotiamo con $\boldsymbol{F}_i$ la risultante delle forze attive applicate al generico punto P_i ($i=1, 2, \ldots, N$), con $\boldsymbol{R}_i$ la corrispondente reazione totale. Poichè il sistema S si può trattare come un sistema di N punti liberi, su cui agiscano rispettivamente le N forze totali $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i$, varranno durante tutto il moto (riferito alla solita terna galileiana $\Omega\xi\eta\zeta$) le equazioni fondamentali

$$(6) \qquad m_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N),$$

che si possono scrivere

$$(6') \qquad \boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{R}_i=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, N).$$

Se, analogamente a quanto si è fatto nella teoria dell'equilibrio relativo (XV_1, § 1), si interpreta ciascuno dei vettori $-m_i\boldsymbol{a}_i$

(aventi le dimensioni di una forza) come una forza (fittizia), che diremo *forza d'inerzia* concernente il punto P_i, si rileva dalle (6'), in quanto si riferiscono ad N punti da considerarsi come liberi (VII$_1$, n. 10), che: *Durante il moto di un sistema materiale, comunque vincolato e sollecitato, si fanno, istante per istante, equilibrio le forze attive, le forze d'inerzia e le reazioni.*

Tenendo conto che le reazioni sostituiscono nel loro complesso l'azione dei vincoli, possiamo anche dire che *durante il moto di un sistema materiale, comunque vincolato e sollecitato, si fanno istante per istante equilibrio, in virtù dei vincoli, le forze attive e quelle di inerzia.*

E a questo enunciato si può dare una terza forma equivalente, ricorrendo alla seguente osservazione. In base alla identità

$$\boldsymbol{F}_i = m_i \boldsymbol{a}_i + (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i) \,,$$

la generica forza attiva $\boldsymbol{F}_i$ risulta scissa in due componenti, di cui il primo, cioè $m_i \boldsymbol{a}_i$, rappresenta quella forza che, qualora il punto P_i fosse libero, sarebbe atta ad imprimergli da sola quello stesso moto, che esso acquista sotto l'azione combinata della intera forza $\boldsymbol{F}_i$ e dei vincoli. Perciò l'altro componente $\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i$ (somma geometrica della forza attiva e della forza di inerzia) rappresenta quella parte di $\boldsymbol{F}_i$ che va, per così dire, perduta per effetto dei vincoli. Resta così giustificato il nome di *forze perdute* che si suol dare alle $\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i$; con che il presente risultato generale si può enunciare sotto la forma più concisa: *Durante il moto di un sistema materiale, comunque vincolato e sollecitato, si fanno istante per istante equilibrio, in virtù dei vincoli, le forze perdute.*

18. Principio del d'Alembert. — L'enunciato del n. prec., in una qualsiasi delle sue tre forme fra loro equivalenti, prende il nome di *principio del* d'Alembert [1]: e questa qualifica di

---

[1] Giovanni Le Rond d'Alembert, n. a Parigi nel 1717, m. ivi nel 1783. Dopo avere iniziato studi di Giurisprudenza e di Medicina, si dedicò esclusivamente alle matematiche, conseguendo rapidamente i più brillanti risultati. Nel 1742 fu ricevuto all'Accademia delle Scienze di Parigi. Il celebre principio, che porta il suo nome, si trova nel *Traité de Dynamique* del 1743 (recentemente ripubblicato in due volumetti nella Collezione « Les maîtres de la pensée scientifique », Paris, Gauthier-Villars, 1921), cui seguì nel 1744 il *Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides*. Il d'Alembert preparò la via alla Meccanica celeste. Inoltre si valse per primo di equazioni alle derivate parziali per la soluzione del problema delle corde vibranti. Pensatore originale e di larghe vedute, scrisse, come è ben noto, il *Discours préliminaire* e numerosi articoli della *Encyclopédie*.

« principio » trova la sua giustificazione nel carattere di evidenza intuitiva, che ad esso compete.

E circa la portata di questo principio, è bensì vero che, dal punto di vista strettamente matematico, esso non rappresenta, rispetto ai postulati e ai teoremi generali già prima stabiliti, alcun nuovo acquisto, poichè sostanzialmente si riduce ad una interpretazione nominale delle equazioni fondamentali (6). Ma, sotto l'aspetto speculativo e in ordine alla discussione dei problemi meccanici, il principio del D'ALEMBERT ha un interesse notevole, in quanto riduce l'impostazione di una qualsiasi questione dinamica ad una questione di Statica, permettendo di porre in equazione ogni problema di moto di un sistema materiale, quando se ne conoscano le condizioni di equilibrio.

Più precisamente le equazioni del moto si ricavano senz'altro da quelle dell'equilibrio, sostituendovi al posto di ogni forza attiva $\boldsymbol{F}_i$ (o componente di tale forza) la forza perduta $\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i$ (o la rispettiva componente).

Va tuttavia tenuto presente che una tale regola si può applicare soltanto subordinatamente all'ipotesi che lo stato di moto non modifichi il comportamento della sollecitazione e delle reazioni vincolari.

19. RELAZIONE ED EQUAZIONE SIMBOLICA DELLA DINAMICA. — Sotto l'aspetto or ora indicato è tipico il caso dei sistemi a vincoli privi di attrito, pei quali in base al principio dei lavori virtuali, nella sua forma generale da noi assunta (XIV_1, n. 2), le reazioni $\boldsymbol{R}_i$, *siavi o no equilibrio*, si esplicano in modo da compiere, per ogni spostamento virtuale, lavoro positivo o nullo, cioè

$$\delta\Lambda = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{R}_i \times \delta P_i \geqslant 0 . \tag{7}$$

Conseguentemente, in quanto, nella supposta assenza di attrito, le condizioni dell'equilibrio si riassumono nella relazione simbolica (XIV_1, n. 8)

$$\delta L = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{F}_i \times \delta P_i \leqslant 0 ,$$

il principio del D'ALEMBERT, sostituendo alle forze attive $\boldsymbol{F}_i$ le forze perdute $\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i$, conduce senz'altro a caratterizzare il moto del sistema mediante la relazione

$$\sum_1^N{}_i (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i) \times \delta P_i \leqslant 0 , \tag{8}$$

da riguardarsi valida per tutti e soli gli spostamenti virtuali δP_i, a partire dalla configurazione assunta dal sistema, durante il moto, nell'istante generico t, che si considera.

Vedremo nel seguito tutta l'importanza di questa relazione. Intanto osserviamo che qui essa è stata dedotta, come corollario, dal principio del D'ALEMBERT e dalla relazione simbolica della Statica (o principio delle velocità virtuali sotto la primitiva forma del LAGRANGE).

Reciprocamente, importa rilevare che, ove si tenga conto delle equazioni (6) sotto la forma

$$\boldsymbol{R}_i = -(\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

(le quali sostanzialmente riassumono la legge fondamentale della Dinamica del punto e il postulato delle reazioni vincolari), la (7) e la (8) risultano ciascuna immediata conseguenza dell'altra.

Si ha insomma che, una volta ammessi i postulati meccanici riassunti dalle (6), vi è perfetta equivalenza logica fra il principio dei lavori virtuali nella sua forma più generale e l'insieme della relazione simbolica della Statica e del principio del D'ALEMBERT.

Questa conclusione chiarisce e precisa, nel caso dei sistemi a vincoli privi di attrito, l'osservazione fatta in generale alla fine del n. prec. Si ha infatti che, dal punto di vista matematico, non si ottiene vantaggio alcuno col sostituire al principio dei lavori virtuali l'insieme della relazione simbolica della Statica e del principio del D'ALEMBERT. Ma sotto l'aspetto concettuale, se si tien conto che tutta la Statica generale (nel caso dell'assenza di attrito) si regge esclusivamente sulla relazione simbolica, si riconosce che codesta sostituzione corrisponde ad una analisi del principio dei lavori virtuali, che conduce, per così dire, ad isolare nella relazione simbolica quella parte del contenuto di codesto principio che occorre e basta allo sviluppo della Statica, mentre lascia nel principio del D'ALEMBERT quel tanto che permette di impostare ogni problema dinamico come un problema di Statica.

La (8), in quanto caratterizza istante per istante lo stato di moto di ogni sistema (a vincoli privi di attrito) in relazione alle forze direttamente applicate $\boldsymbol{F}_i$ e ai corrispondenti spostamenti virtuali δP_i, prende il nome di *relazione simbolica della Dinamica* o *del moto*; e quando si tratti di un sistema a vincoli esclusivamente bilaterali (cioè a spostamenti virtuali tutti reversibili) va sostituita colla corrispondente equazione

$$(9) \qquad \sum_1^N{}_i(\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i)\times\delta P_i = 0\,,$$

la quale dicesi, analogamente, *equazione simbolica della Dinamica* o *del moto*.

§ 4. – Equazione ed integrale delle forze vive.

20. Teorema delle forze vive. — Prima di procedere alla deduzione di altre conseguenze della equazione simbolica della Dinamica, convien qui stabilire un ulteriore teorema generale sul moto dei sistemi, il cui enunciato prescinde da ogni distinzione delle forze in esterne ed interne o in attive e vincolari.

Indichiamo, dunque, con $\boldsymbol{F}_i$ la *forza totale* agente sul generico punto P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ del sistema in moto, cioè la risultante di tutte le forze (esterne ed interne, attive e vincolari) che agiscono su codesto punto. Sappiamo che, durante il moto del sistema, l'incremento subìto in un generico tempuscolo dalla forza viva di P_i è eguale al lavoro compiuto dalla forza totale $\boldsymbol{F}_i$ nel medesimo intervallo elementare di tempo (VIII$_1$, n. 9); cioè, posto

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 , \quad dL_i = \boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{v}_i dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

si ha, in ogni tempuscolo della durata del moto,

$$dT_i = dL_i \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Sommando membro a membro queste N equazioni, otteniamo

$$dT = dL , \tag{10}$$

dove si è denotata con T la forza viva del sistema (Cap. prec., n. 6) e con dL il lavoro elementare complessivo di tutte le forze del sistema nel considerato tempuscolo dt (ibidem, n. 2), cioè si è posto

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^N{}_i m_i v_i^2 , \quad dL = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{v}_i dt .$$

In parole, *durante il moto di un sistema materiale, comunque vincolato e sollecitato, l'incremento che la forza viva del sistema subisce in un qualsiasi tempuscolo è eguale al lavoro complessivo effettuato nel medesimo tempuscolo da* TUTTE *le forze agenti sul sistema* (esterne ed interne, attive e vincolari).

Ora si rifletta che, come presupposto fondamentale delle nostre vedute meccaniche, tutte le cause che influiscono sul moto di un qualsiasi sistema materiale si riguardano schematizzate in convenienti forze e, conseguentemente, ogni forma di energia, che interessi il moto, si considera somministrata al sistema attraverso il meccanismo schematico di lavoro compiuto dalle forze. Perciò, se ci si riferisce in particolare ad un tempuscolo dt, il lavoro elementare complessivo dL si presenta anche qui, come nel caso di un unico punto materiale (VIII_1, n. 9), come il contributo totale di energia apportato al sistema dalle circostanze che ne determinano il moto. L'equazione (10) rappresenta quindi, nella forma tipica della Meccanica, il fondamentale *principio fisico della conservazione dell'energia*, esprimendo che tutta l'energia, somministrata in ogni generico tempuscolo al sistema da tutte le più svariate circostanze che comunque influiscono sul suo moto, si ritrova per intero nel sistema stesso sotto forma di incremento dT della sua energia cinetica.

21. Alla relazione (10) si dà il nome di *teorema delle forze vive.* Questo teorema, in ragione della sua grande generalità, trova in Meccanica le più svariate applicazioni.

Ma convien notare che il teorema delle forze vive, nella sua forma generale (10), non riesce sempre espressivo ed utilizzabile, in quanto implica la valutazione del lavoro elementare effettuato (insieme alle altre forze) dalle incognite reazioni. Diventa più specialmente significativo e utile alle deduzioni, quando, grazie a qualche ipotesi sulla natura del sistema o della sollecitazione, si riesce a rendere in se stessa più semplice e meccanicamente più precisa l'espressione del lavoro elementare.

Per dare due esempi in qualche modo tipici, consideriamo dapprima il caso di un *solido.* In tale ipotesi è nullo, ad ogni tempuscolo, il lavoro delle forze interne (Cap. prec., n. 3), cosicchè la (10) si riduce alla

$$dT = dL^{(e)}, \tag{10'}$$

dove $dL^{(e)}$ denota il lavoro elementare complessivo di tutte e sole le forze esterne. Abbiamo cioè che *durante il moto di un solido, comunque vincolato e sollecitato, ad ogni tempuscolo l'incremento della forza viva del solido è eguale al lavoro elementare simultaneamente effettuato da tutte e sole le forze esterne.*

Un secondo esempio, sotto qualche aspetto più generale, si ha quando si tratta di un *sistema materiale a vincoli indipendenti dal tempo, privi di attrito e bilaterali.* Per la prima ipotesi ciascuno degli spostamenti elementari che il sistema subisce durante il suo moto è uno spostamento virtuale (VI_1, n. 9), cosicchè, grazie alla seconda ipotesi, è applicabile ad ognuno di codesti spostamenti elementari *il principio dei lavori virtuali* (XIV_1,

n. 2); e, tenuto conto della terza ipotesi, si conclude che ad ogni tempuscolo è identicamente nullo il lavoro elementare delle reazioni. Perciò la (10) assume la forma

$$dT = dL^{(a)}, \tag{10''}$$

dove $dL^{(a)}$ denota il lavoro elementare di tutte e sole le forze attive; abbiamo, cioè, che *se un sistema a vincoli indipendenti dal tempo, privi di attrito e bilaterali, si muove sotto una sollecitazione qualsiasi, l'incremento subìto in un generico tempuscolo dalla forza viva del sistema è eguale al lavoro elementare effettuato in quel medesimo tempuscolo da tutte e sole le forze attive.*

Infine mettiamoci nel caso particolare, ma pur notevole, in cui i vincoli, cui è assoggettato il sistema, siano tutti di origine interna, sicchè risultino tali anche le corrispondenti reazioni, e introduciamo, accanto alla forza viva assoluta T, la forza viva

$$T^{(r)} = \frac{1}{2}\sum_1^N {}_i m_i v_i^{(r)2}$$

che spetta al sistema nel suo moto relativo al baricentro e che, in virtù del teorema del König (IV, n. 8), è legata alla T dalla relazione

$$T = T^{(r)} + \frac{1}{2} m v_G^2.$$

Facendo apparire nella espressione del lavoro elementare delle forze attive

$$dL^{(a)} = \sum_1^N {}_i \boldsymbol{F}_i \times dP_i\,,$$

in luogo degli spostamenti assoluti dP_i, quelli relativi al baricentro, scrivendo

$$dP_i = d(P_i - G) + dG\,,$$

possiamo dare alla (10'') l'aspetto

$$dT^{(r)} + d\left(\frac{1}{2} m v_G^2\right) = \sum_1^N {}_i \boldsymbol{F}_i \times d(P_i - G) + \sum_1^N {}_i \boldsymbol{F}_i \times dG\,. \tag{11}$$

Ma, per l'ipotesi che le reazioni siano tutte di origine interna, il risultante $\sum_1^N {}_i \boldsymbol{F}_i$ delle forze attive coincide col risultante $\boldsymbol{R}^{(e)}$ delle forze esterne, il quale per la prima equazione cardinale (teorema del moto del baricentro, n. 6) vale $m\boldsymbol{a}_G$; onde il secondo termine del secondo membro della (11) si può scrivere

$$m\boldsymbol{a}_G \times dG = m\boldsymbol{a}_G \times \boldsymbol{v}_G\, dt\,,$$

e, perciò, si elide col secondo termine del primo membro. Si ha dunque

$$dT^{(r)} = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{F}_i \times d(P_i - G)\,,$$

ossia, indicando con $d^{(r)}L^{(a)}$ il lavoro elementare delle forze attive relativo al baricentro,

$$dT^{(r)} = d^{(r)}L^{(a)}\,. \tag{10'''}$$

È questo il *teorema delle forze vive nel moto relativo al baricentro.*

22. Sollecitazioni conservative. Potenziale. — A preparare altre importanti deduzioni dal teorema delle forze vive, convien qui richiamare dalla Statica, con qualche ulteriore chiarimento, il concetto di *sollecitazione conservativa* (XIV_1, n. 26). Per un sistema materiale di N punti P_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) si è chiamata *conservativa* ogni sollecitazione $\boldsymbol{F}_i$ tale che il lavoro complessivo delle $\boldsymbol{F}_i$ per un *qualsivoglia* spostamento elementare dP_i del sistema risulti identico al differenziale totale di una funzione U delle $3N$ coordinate cartesiane ξ_i, η_i, ζ_i dei punti P_i, che supporremo, al solito, uniforme e regolare nel campo che si considera (1).

Ad evitare equivoci facciamo rilevare che qui, parlando di spostamento elementare *qualsivoglia*, si intende uno spostamento incondizionatamente arbitrario e quindi, per un sistema vincolato, anche tale da non rispettare in alcun modo i vincoli (cioè non virtuale, nè possibile pel sistema).

La funzione U, determinata, a meno di una costante additiva arbitraria, dalla identità di definizione

$$dL \equiv \sum_1^N{}_i \boldsymbol{F}_i \times dP_i = dU\,, \tag{12}$$

si è chiamata *potenziale* della sollecitazione, la quale, alla sua volta, dicesi *derivante* dal potenziale U.

Dalla identità (12), che scritta per disteso assume la forma

$$\sum_1^N{}_i (X_i d\xi_i + Y_i d\eta_i + Z_i d\zeta_i) = \sum_1^N{}_i \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} d\eta_i + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} d\zeta_i\right),$$

---

(1) Talvolta può darsi che il campo, in cui si considera la sollecitazione esorbiti da quello in cui la U si mantiene uniforme e regolare. Di ciò per quel che riguarda il punto materiale, abbiamo dato un esempio della I Parte (VII_1; n. 29, *d*). Ma nel seguito di questo Volume non avremo occasione di affrontar questioni in cui si presenti una tale circostanza.

abbiamo tratto, identificando nei due membri i coefficienti delle componenti (arbitrarie e indipendenti) $d\xi_i$, $d\eta_i$, $d\zeta_i$ dei singoli dP_i, le

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Se il sistema sollecitato è un sistema olonomo, che rispetto a coordinate lagrangiane indipendenti $q_1, q_2, \ldots, q_n$, sia definito dalle equazioni parametriche

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \,|\, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

si riconosce, in base a queste equazioni o, meglio, alle loro equivalenti

$$\begin{cases} \xi_i = \xi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \,|\, t), \\ \eta_i = \eta_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \,|\, t), \\ \zeta_i = \zeta_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \,|\, t), \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

che il potenziale U, in generale, dipende non soltanto dalle q ma anche da t; però, *se i vincoli del sistema sono indipendenti dal tempo, il potenziale dipende esclusivamente dalle coordinate lagrangiane.*

E importerà pel seguito ricordare che, nell'uno e nell'altro caso, *le derivate parziali del potenziale* $\partial U/\partial q_h$ *danno le componenti della sollecitazione secondo le coordinate lagrangiane* q_h, cioè le quantità

$$Q_h = \sum_{1}^{N}{}_i \boldsymbol{F}_i \times \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Ciò (non sarà inutile richiamarlo) discende immediatamente dalla definizione stessa di sollecitazione conservativa, la quale, per uno spostamento virtuale, implica la identità

$$\delta L = \delta U,$$

dove, beninteso, δU denota il differenziale totale del potenziale, calcolato riguardandovi costante, quando vi appaia, la variabile t: identificando nei due membri i coefficienti delle singole δq_h (arbitrarie e indipendenti) si ottengono appunto le

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

In ogni caso, dalla identità (12), caratteristica per le sollecitazioni conservative, si trae per integrazione, come nella ipotesi di un unico punto sollecitato (VIII$_1$, n. 6),

$$L = U - U_0;$$

cioè: *Comunque si muova un sistema materiale da una sua configu-*

razione ad un'altra, il lavoro compiuto da una sollecitazione conservativa è eguale alla differenza dei valori che il rispettivo potenziale assume nella configurazione d'arrivo e in quella di partenza.

23. Per dare un esempio ovvio di sollecitazione conservativa, consideriamo l'azione della gravità su di un sistema di N punti materiali P_i di masse m_i rispettivamente, riferito ad assi terrestri locali. In tal caso, se l'asse delle ζ si sceglie verticale ed orientato verso il basso, si hanno per la forza-peso agente sul generico punto P_i le componenti

$$X_i = 0\,, \quad Y_i = 0\,, \quad Z_i = m_i g \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

onde si riconosce che il potenziale è dato (a meno di una costante additiva arbitraria) da

$$U = g\sum_{1}^{N}{}_i m_i \zeta_i\,,$$

o più semplicemente, ove ζ_0 sia la quota del baricentro ed m la massa totale del sistema, da

$$U = mg\zeta_0\,.$$

Esso coincide dunque col potenziale che spetterebbe al peso del baricentro, qualora in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema.

24. Integrale delle forze vive. — Dopo questa digressione, torniamo al teorema delle forze vive (nn. 20, 21) e riprendiamo il caso, fondamentale per la Meccanica, di un sistema materiale S a vincoli indipendenti dal tempo, bilaterali e privi di attrito. Se la sollecitazione attiva, cui esso è sottoposto, deriva da un potenziale U, il teorema delle forze vive (10'') assume la forma

$$dT = dU\,, \tag{13}$$

perfettamente analoga a quella valida per un unico punto materiale libero, soggetto ad una forza conservativa (VIII$_1$, n. 11), e dà luogo, per integrazione, alla relazione in termini finiti

$$T - U = E\,, \tag{14}$$

dove E denota la costante di integrazione. Questa relazione che lega, istante per istante, l'atto di moto del sistema alla sua configurazione, prende, anche pei sistemi, il nome di *integrale delle forze vive.*

Naturalmente vale, in particolare, per la (13) o per la equivalente (14), la interpretazione energetica data in generale per la (10) al n. 20. Ma codesta interpretazione è suscettibile, come già nel caso di un unico punto materiale (VIII_1, n. 11), di una ulteriore specificazione, particolarmente notevole pel suo carattere intrinseco. Se la quantità $-U$, che dipende esclusivamente dalla configurazione del sistema, si riguarda come una forma di energia (potenziale), posseduta dal sistema in dipendenza dalla sua posizione, la (13) o la equivalente (14) esprimono che il moto lascia inalterata la somma $T - U$ della energia cinetica e della energia potenziale del sistema. Vale quindi un principio di conservazione della energia in senso più ristretto, cioè anche in quanto il sistema materiale si consideri isolato da tutto il resto dell'Universo e dotato esclusivamente di due forme fondamentali di energia meccanica (cinetica e potenziale o posizionale), le quali, durante il moto, si possono soltanto trasformare l'una nell'altra, senza possibilità di creazione o distruzione di energia. Per questa ragione la relazione (14) si chiama anche *integrale dell'energia.*

§ 5. – Equazioni del Lagrange.

25. Equazioni differenziali del moto di un sistema olonomo in coordinate lagrangiane. — Torniamo qui da ultimo all'equazione simbolica della Dinamica per dedurne le equazioni del moto di un sistema materiale vincolato e supponiamo che si tratti di un sistema olonomo di N punti P_i con n gradi di libertà (e a vincoli privi di attrito). Rispetto ad una qualsiasi n^{pla} di coordinate lagrangiane indipendenti q_h sia

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) = P_i(q \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{15}$$

Dalle (15), derivando rispetto al tempo, si traggono per le velocità $\boldsymbol{v}_i$ dei singoli punti P_i le espressioni

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_1^n{}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{16}$$

mentre, per gli spostamenti virtuali del sistema, si deducono le

$$\delta P_i = \sum_1^n{}_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{17}$$

dove le n componenti lagrangiane δq_h dello spostamento virtuale sono arbitrarie.

Ciò premesso, riprendiamo l'equazione simbolica della Dinamica

$$(9)\qquad \sum_1^N{}_i(\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i)\times\delta P_i = 0\,,$$

che caratterizza il moto del sistema, in quanto la si consideri valida per tutti gli spostamenti virtuali (17); e scriviamola sotto la forma

$$(18)\qquad \sum_1^N{}_i m_i\boldsymbol{a}_i\times\delta P_i = \sum_1^N{}_i\boldsymbol{F}_i\times\delta P_i\,,$$

con che risultano isolati nei due membri i termini di natura cinetica e quelli più propriamente dinamici, provenienti dalla sollecitazione attiva. Il significato del secondo membro ci è ben noto, in quanto si tratta del lavoro complessivo δL, compiuto dalle forze attive corrispondentemente al generico spostamento virtuale δP_i del sistema (IV, n. 5 e n. 22 di questo Capitolo), e si ha identicamente

$$(19)\qquad \sum_1^N{}_i\boldsymbol{F}_i\times\delta P_i = \sum_1^n{}_h Q_h\delta q_h\,,$$

dove

$$(20)\qquad Q_h = \sum_1^N{}_i\boldsymbol{F}_i\times\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

è la *componente della sollecitazione attiva secondo la coordinata lagrangiana* q_h.

Quanto al primo membro della (18), esso si può scrivere, in base alle (17),

$$\sum_1^N{}_i m_i\boldsymbol{a}_i\times\sum_1^n{}_h\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\,\delta q_h$$

e basta invertire l'ordine delle due sommatorie e porre

$$(21)\qquad \tau_h = \sum_1^N{}_i m_i\boldsymbol{a}_i\times\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

per avere identicamente

$$(22)\qquad \sum_1^N{}_i m_i\boldsymbol{a}_i\times\delta P_i = \sum_1^n{}_h\tau_h\delta q_h\,.$$

In base alle due identità (19), (22), l'equazione simbolica (18) assume l'aspetto

$$(18')\qquad \sum_1^n{}_h\tau_h\delta q_h = \sum_1^n{}_h Q_h\delta q_h\,,$$

e, poichè questa relazione deve conservarsi valida comunque si scelgano le δq_h, si riconosce che debbono sussistere insieme le n equazioni

$$\tau_h = Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Reciprocamente è chiaro che, ogni qual volta siano simultaneamente soddisfatte le (23), sussiste la (18′) per qualsiasi scelta delle δq_h e quindi, in virtù delle identità (19), (22), la (9) per tutti gli spostamenti virtuali (17). Si conclude così che pel nostro sistema olonomo le n equazioni (23) equivalgono alla equazione simbolica della Dinamica e sono perciò atte a caratterizzare il moto.

Ora è facile verificare che esse costituiscono precisamente un sistema di n equazioni differenziali (indipendenti) del 2° ordine nelle n funzioni incognite q_h della variabile t, riducibile a *forma normale*, cioè risolubile rispetto alle derivate seconde. Si osservi, invero, che le Q_h, come risulta dalle loro espressioni (20), sono, al pari delle $\boldsymbol{F}_i$, funzioni note dei parametri che caratterizzano, istante per istante, la configurazione del sistema, le velocità dei singoli punti (ed, eventualmente, il tempo), cioè delle q, delle $\dot{q}$ (e di t). Quanto alle espressioni τ_h, definite dalle (21), si tenga conto che, mentre i vettori $\partial P_i/\partial q_h$ dipendono esclusivamente dalle q (e da t), le accelerazioni $\boldsymbol{a}_i$, quali risultano per ulteriore derivazione delle (16), sono funzioni note delle q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ (e t), e precisamente sono lineari nelle accelerazioni lagrangiane $\ddot{q}$.

Se poi si tien conto che nella espressione di $\boldsymbol{a}_i$ i termini dipendenti dalle $\ddot{q}$ son dati da

$$\sum_1^n {}_k \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \ddot{q}_k ,$$

si riconosce che nella generica equazione (23), di indice h, il coefficiente della $\ddot{q}_k$ è eguale a

$$\sum_1^N {}_i m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \times \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \qquad (h, \ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ora questa somma di prodotti scalari è, come si è visto al n. 11 del Cap. prec. [formule (20), (21)], il coefficiente $\frac{1}{2} a_{hk}$ di $\dot{q}_h \dot{q}_k$ nella espressione $\frac{1}{2} \sum_1^n {}_{hk} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$, in coordinate lagrangiane, della forza viva T o della sua parte quadratica T_2, secondo che i vincoli sono indipendenti o no dal tempo; e là si è dimostrato che, nell'uno e nell'altro caso, il determinante $\| a_{hk} \|$ non è mai identicamente nullo. Di qui consegue appunto che le n equazioni differenziali del 2° ordine (23) sono in ogni caso risolubili rispetto alle n accelerazioni lagrangiane $\ddot{q}$.

Si tratta quindi di un sistema differenziale, il cui integrale generale dipende da $2n$ costanti arbitrarie. Ciascuno degli ∞^{2n} integrali particolari fornisce le equazioni orarie, in coordinate lagrangiane (VI_1, n. 3)

$$q_h = q_h(t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

di un particolare moto del nostro sistema olonomo S, nelle date condizioni di sollecitazione; nè, in quelle condizioni, sono possibili per S altri moti all'infuori di quelli così rappresentabili, giacchè le (23), come si è notato dapprincipio, *caratterizzano*, al pari della equazione simbolica da cui esse provengono, tutti i moti di cui il sistema è suscettibile.

Per individuare uno di codesti moti basterà prefissare ad arbitrio i valori q^0, $\dot{q}^0$ delle q e delle $\dot{q}$ in un determinato istante, p. es., nell'istante iniziale $t = t_0$, il che equivale ad assegnare la configurazione iniziale del sistema e le velocità iniziali $\boldsymbol{v}^0$ dei singoli punti: le coordinate cartesiane ξ^0, η^0, ζ^0 di codesta configurazione si desumeranno dalle (15) o, più precisamente, dalle equivalenti equazioni cartesiane

$$(15') \qquad \xi_i = \xi_i(q \mid t), \ \eta_i = \eta_i(q \mid t), \ \zeta_i = \zeta_i(q \mid t) \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

ponendovi $t = t_0$, $q_h = q_h^0$, e le $\boldsymbol{v}^0$ dalle (16) ponendovi $t = t_0$, $q_h = q_h^0$, $\dot{q}_h = \dot{q}_h^0$. E si potranno addirittura prefissare ad arbitrio i valori iniziali ξ^0, η^0, ζ^0 e $\boldsymbol{v}^0$, subordinatamente alle seguenti condizioni: 1°) le ξ^0, η^0, ζ^0 siano le coordinate cartesiane di una delle ∞^n configurazioni possibili pel sistema olonomo nell'istante $t=t_0$, con che le (15') ove a primo membro sian posti codesti valori ξ^0, η^0, ζ^0, determinano univocamente i corrispondenti valori q^0 delle coordinate lagrangiane; 2°) le $\boldsymbol{v}^0$ corrispondano ad uno degli ∞^n spostamenti infinitesimi possibili pel sistema, in un arbitrario tempuscolo dt a partire dall'istante $t = t_0$ e dalla configurazione $q = q^0$ or ora determinata. Le rispettive velocità lagrangiane iniziali $\dot{q}^0$ risulteranno individuate dalle (16) in cui siansi sostituite al posto delle $\boldsymbol{v}$ le $\boldsymbol{v}^0$, al posto delle q le q^0.

Da tutto quanto precede apparisce che con le equazioni (23) si è raggiunto lo scopo indicato alla fine del n. prec.; si è, cioè, ridotto il problema della determinazione del moto di un sistema olonomo alla integrazione di un sistema differenziale (del 2° ordine) *nel minimo numero possibile di funzioni incognite* (numero dei gradi di libertà del sistema).

Ma, mediante una trasformazione semplicissima ed una geniale interpretazione meccanica dovuta al LAGRANGE, si può dare alle equazioni (23) una forma mirabilmente sintetica ed espressiva.

26. EQUAZIONI DEL LAGRANGE. — Riprendiamo codeste equazioni

$$\tau_h = Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{23}$$

dove

$$\tau_h = \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{a}_i \times \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n); \tag{21}$$

e consideriamo la forza viva del sistema

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_i \,,$$

che, riguardata quale funzione delle q, $\dot{q}$, t pel tramite delle

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_1^N {}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{16}$$

e, derivata parzialmente rispetto ad una generica q_h, dà

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{v}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_h} \,; \tag{24}$$

derivata, invece, rispetto a una generica $\dot{q}_h$, dà

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{v}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \,.$$

Ma dalle (16) risulta

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \,,$$

talchè si può scrivere

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{v}_i \times \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \,,$$

e di qui, derivando totalmente rispetto al tempo e osservando che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h} \frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_h} \,,$$

si traggono le

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{a}_i \times \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + \sum_1^N {}_i m_i \boldsymbol{v}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_h} \quad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

dopo di che, sottraendo da queste identità membro a membro le corrispondenti (24) e ricordando le (21), si perviene alle

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \tau_h \qquad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Oramai non abbiamo che da tener conto di queste identità per dare alle equazioni (23) la forma esplicita

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = Q_h \qquad (h = 1, 2, \dots, n), \tag{25}$$

e sono queste le preannunciate *equazioni del* LAGRANGE [1].

Tutto ciò, che al n. prec. si è detto delle (23), vale, naturalmente, per codeste equazioni del LAGRANGE, che non sono se non le (23) stesse sotto una nuova veste. Esse, cioè, danno la completa impostazione del problema del moto di un sistema olonomo; e, sotto l'aspetto analitico, costituiscono un sistema differenziale del 2° ordine nelle n funzioni incognite $q_h(t)$, riducibile a forma normale.

---

[1] Le (25) spesso di chiamano *equazioni del Lagrange della seconda forma*, per distinguerle da altre, di cui in questo Compendio non ci occupiamo. Ci limitiamo a notare che queste ultime generalizzano ad un sistema olonomo qualsiasi le equazioni (14′) da noi trovate al n. 11 del Cap. II pel moto di un punto ritenuto da una superficie, e rimandiamo per la loro deduzione nel caso generale alle nostre *Lezioni*, Vol. II, Cap. V, n. 35.

CAPITOLO VI.

DINAMICA DEI SOLIDI

1. In questo Capitolo, dopo avere dimostrato che pei solidi le equazioni cardinali bastano per se stesse ad impostare qualsiasi problema dinamico, le applicheremo ad alcuni dei casi più semplici, cioè ai solidi girevoli intorno ad un asse o ad un punto fisso, e collegheremo a questo studio elementare la illustrazione dei cosiddetti *fenomeni giroscopici*.

§ 1. – Equazioni cardinali.

2. Per un qualsiasi solido S, comunque vincolato e sollecitato, valgono istante per istante, durante tutto il moto, come per ogni altro tipo di sistema materiale, le due *equazioni cardinali* (V, n. 16)

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{M}, \tag{2}$$

dove, come ben sappiamo, si denotano con $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{K}$ il risultante e il momento risultante delle quantità di moto del solido *rispetto ad un punto qualsiasi*, con $\boldsymbol{v}'$ la velocità (assoluta) di questo punto e, infine, con $\boldsymbol{R}$ ed $\boldsymbol{M}$ il risultante e il momento risultante, rispetto al medesimo centro, di tutte e sole le *forze esterne* agenti sul solido. Chè se, come centro di riduzione, si assume, anzichè un punto mobile qualsiasi, un punto fisso ($\boldsymbol{v}' = 0$) o il baricentro del solido ($\boldsymbol{v}'$ parallelo a $\boldsymbol{Q}$) la seconda equazione cardinale si riduce, con lo stesso significato dei simboli, alla forma più semplice

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}. \tag{2'}$$

Ma nella presente ipotesi della rigidità del sistema S si presenta una circostanza analoga a quella rilevata nella Statica per le equazioni cardinali dell'equilibrio, nei riguardi dei solidi (XII$_1$, § 2): *si ha*, cioè, *nelle equazioni cardinali* (1), (2) o (1), (2') *non soltanto un sistema di equazioni necessariamente verificate durante tutto il moto del solido, ma addirittura un insieme di condizioni sufficienti a individuare* (*per date condizioni iniziali*) *codesto moto.*

Per convincersene basta esaminare i vari casi tipici, che si presentano nel moto di un solido libero o vincolato. Limitiamoci qui a considerare successivamente un solido libero e un solido con un punto o con un asse fisso.

Nel primo caso le equazioni cardinali (1), (2) o (1), (2'), proiettate sugli assi di riferimento, forniscono sei equazioni scalari, cioè precisamente tante, quanti sono i gradi di libertà del solido.

Se si tratta, invece, di un solido fissato in un punto O, e perciò avente tre gradi di libertà, figurano fra i dati della questione, come già nel caso statico (XII$_1$, n. 5), le forze esterne direttamente applicate, ma non la reazione che si suscita nel punto fisso, cosicchè va ritenuto noto (o, più precisamente, esprimibile in funzione della posizione e dell'atto di moto del corpo) il momento risultante $\boldsymbol{M}$ delle forze esterne *rispetto ad O*, mentre il risultante $\boldsymbol{R}$ è a priori incognito, in quanto vi porta contributo la incognita reazione nel punto fisso. Ma solo $\boldsymbol{M}$ compare nella seconda equazione cardinale, riferita ad O, cosicchè proiettandola sugli assi otteniamo tre equazioni scalari sufficienti a definire il moto del sistema.

Infine, se il solido ha un asse fisso, trattandosi di un sistema con un solo grado di libertà, basta una sola equazione a definire in funzione del tempo l'unico parametro lagrangiano (angolo di orientazione intorno all'asse); e una tale equazione, implicante solo le forze applicate e non le reazioni che si destano lungo l'asse, è fornita, anche qui come nel caso statico (XII$_1$, nn. 6-10), dall'equazione scalare dei momenti secondo l'asse fisso.

In base alle precedenti considerazioni le equazioni cardinali si possono anche chiamare le *equazioni dinamiche del moto dei solidi.*

§ 2. – Moto di un solido intorno ad un asse fisso. Pendolo composto e sue applicazioni.

3. Solido con asse fisso. — Consideriamo un solido S, vincolato a rotare senza attrito intorno ad un asse fisso e assoggettato ad una sollecitazione qualsiasi.

Qui le forze esterne si riducono a quelle direttamente applicate e alle reazioni che si destano lungo l'asse; e noi, mettendoci nelle condizioni che possono dirsi tipiche pei problemi di moto, supponiamo che, mentre sono date le forze direttamente applicate, nulla si sappia a priori delle eventuali reazioni e si voglia determinare il moto del solido intorno all'asse. Poichè il sistema è ad un solo grado di libertà, basterà che ci procuriamo un'unica equazione indipendente dalle incognite reazioni.

Denotando con ξ l'asse (fisso) di rotazione del solido e assumendo il centro O di riduzione in un punto (fisso) qualsiasi di ξ, avremo pel nostro solido le due equazioni vettoriali (1), (2'); e basta osservare che le eventuali reazioni, come forze applicate in punti dell'asse, hanno ciascuna momento nullo rispetto ad esso, per riconoscere che l'unica equazione, sufficiente a determinare il moto, si ottiene proiettando la seconda equazione cardinale (2') sull'asse ξ, cioè mettendo in equazione il teorema del momento scalare delle quantità di moto (V, n. 10). Si ottiene così, denotando oramai con M_ξ il momento risultante rispetto a ξ delle *forze attive* di natura esterna, l'equazione

$$\frac{dK_\xi}{dt} = M_\xi\,, \tag{3}$$

ossia introducendo l'anomalia θ che basta a determinare l'orientamento del solido intorno all'asse e indicando con $\mathcal{A}$ il momento di inerzia del solido rispetto a ξ (IV, n. 20)

$$\mathcal{A}\ddot{\theta} = M_\xi\,. \tag{3'}$$

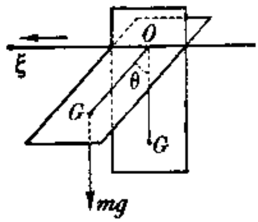
Il momento assiale M_ξ, al pari delle forze direttamente applicata da cui esso proviene, si può riguardare conosciuto in funzione del tempo, nonchè delle posizioni e delle velocità simultanee dei punti del solido, vale a dire, in ultima analisi di t, θ e $\dot{\theta}$. Si riconosce così che la determinazione del moto è ridotta alla integrazione di un'equazione differenziale del second'ordine, perfettamente analoga a quella che regge il moto di un punto materiale sollecitato, sopra una traiettoria conosciuta, da una forza totale di conosciuta componente tangenziale f (I, § 2)

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s}\,|\,t)\,.$$

Alla massa del punto qui fa riscontro il momento di inerzia $\mathcal{A}$, all'accelerazione tangenziale $\ddot{s}$ l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}$ e, infine, alla risultante f delle forze tangenziali il momento risultante M_ξ delle forze rispetto all'asse.

Naturalmente nel caso particolarmente notevole di forze esclusivamente posizionali, il momento M_ξ dipende dalla sola θ (come la f dalla sola s) e la (3′) risulta integrabile con due quadrature (I, nn. 12 e 15).

4. Pendolo composto. — Si designa con un tal nome ogni solido liberamente girevole intorno ad un asse fisso, orizzontale, e soggetto esclusivamente al suo peso. Indicato ancora con ξ codesto *asse di sospensione* e chiamato G il baricentro del pendolo, individueremo, istante per istante, la posizione di quest'ultimo mediante l'anomalia θ (compresà tra $-\pi$ e π) del semipiano ξG, misurata a partire dal semipiano verticale uscente da ξ verso il basso, e riferita, come a verso positivo, ad uno comunque scelto dei due versi possibili. Poichè i pesi dei singoli punti del solido sono, nel loro insieme, equivalenti vettorialmente al peso totale mg applicato in G, il momento M_ξ qui coincide col momento assiale di cotesto peso totale. Ora, se si riflette che la linea d'azione del



peso totale è ortogonale all'asse (orizzontale) ξ, si riconosce che il valore assoluto di M_ξ è dato dal prodotto di mg per la minima distanza di codeste due rette, vale a dire per $|r \sin\theta|$, se r è la distanza (costante) del baricentro G dall'asse ξ. Se poi si tien conto che in ogni caso il peso tende a ricondurre il baricentro nel semipiano verticale verso il basso (da cui si contano le anomalie) e quindi dà luogo ad un momento di richiamo, appare manifesto che M_ξ deve essere sempre di segno contrario a θ e quindi a $\sin\theta$, talchè si ha, in valore e segno,

$$M_\xi = -mgr \sin\theta .$$

Di qui, applicando la (3′) del n. prec., si conclude che l'equazione del moto del pendolo composto è data da

$$\mathcal{A}\ddot{\theta} = -mgr \sin\theta . \tag{4}$$

Ora basta porre

$$\frac{\mathcal{A}}{mr} = l , \tag{5}$$

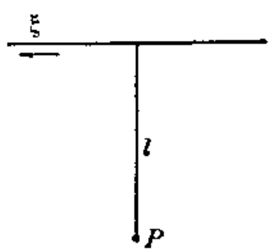
per ridurre la (4) alla forma

$$l\ddot{\theta} = -g \sin\theta , \tag{4′}$$

in cui si riconosce l'equazione, che regge il moto di un pendolo semplice di lunghezza l (I, n. 25).

Coincidendo le equazioni differenziali, coincideranno altresì gli integrali (beninteso, a partire da condizioni iniziali identiche), onde abbiamo che: ***Un pendolo composto si muove come un pendolo semplice di lunghezza $\mathcal{A}/mr$.***

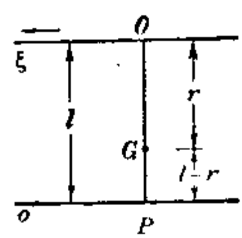
Del resto, anche senza richiami dal Cap. I, questo risultato si può verificare direttamente, in base alla osservazione che il pendolo semplice non è che un caso limite del solido pesante girevole intorno ad un asse orizzontale. Basta applicare le stesse considerazioni or ora svolte, immaginando un pendolo così costituito:



massa pendolare assimilabile ad un punto materiale P di massa m, congiunto all'asse orizzontale fisso ξ mediante un'asticella rigida, di lunghezza l e peso trascurabile, perpendicolare all'asse ξ e liberamente girevole intorno ad esso. Si ha in tal caso $\mathcal{A} = ml^2$, $r = l$, onde la equazione (4) del moto assume senz'altro la forma (4'); e dal confronto delle (4'), (4) segue l'enunciato.

Alla lunghezza l definita dalla (5) si dà il nome di ***lunghezza ridotta del pendolo composto.***

E, per quanto si è or ora visto, possiamo anche dire che, se si indica con O la proiezione del baricentro G sull'asse ξ e si porta sulla semiretta OG il segmento $OP = l$, il punto P, considerato solidale col pendolo composto, oscilla come se non appartenesse a questo corpo, ma costituisse la massa pendolare, liberamente oscillante e di misura m, di un pendolo semplice sospeso in O.



I due punti O, P chiamansi rispettivamente ***centro di sospensione*** e ***centro di oscillazione*** del pendolo composto, e la parallela o per P a ξ, i cui punti oscillano tutti come P, dicesi ***asse di oscillazione.***

Notiamo che la (5) si può scrivere $OP \cdot OG = \mathcal{A}/m$.

Se poi si introducono il momento d'inerzia $\mathcal{A}_0$ del solido rispetto all'asse baricentrale parallelo a ξ e il corrispondente giratore δ si ha, come ben sappiamo (X_1, n. 19),

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + mr^2 = m(\delta^2 + r^2)\,,$$

talchè sostituendo nella (5) si ottiene

$$l = \frac{\delta^2}{r} + r \tag{5'}$$

e quindi

$$(5'') \qquad (l-r)r = \delta^2 ,$$

od anche

$$OG \cdot GP = \delta^2 .$$

È questa, nella sua forma più semplice, la relazione caratteristica, che lega la lunghezza ridotta alla distanza del baricentro dall'asse di oscillazione e al giratore baricentrale del solido.

Poichè r e δ^2 sono positivi, si desume dalla (5′) che è sempre $l > r$; cioè *l'asse di oscillazione dista sempre dall'asse di sospensione più del baricentro.*

5. Teorema dell'Huygens. — Supponiamo che il pendolo presenti tale disposizione sperimentale che sia possibile sospenderlo anche per l'asse di oscillazione o. Diciamo che *la lunghezza ridotta è ancora* l; cioè *quando l'asse di oscillazione diviene asse di sospensione, il primitivo asse di sospensione diviene asse di oscillazione.*

Per dimostrare questa proprietà applichiamo la (5″) al calcolo della lunghezza ridotta l' del nostro pendolo, nella seconda disposizione. Dovremo sostituirvi l' ed $l-r$ ad l ed r rispettivamente, lasciando inalterato δ. Avremo così

$$(l'-l+r)(l-r) = \delta^2 ,$$

e quindi, eliminando δ^2 per mezzo della (5′) e riducendo,

$$(l'-l)(l-r) = 0 .$$

Di qui, essendo $l > r$, si trae appunto

$$l' = l ,$$

come avevamo asserito.

Reciprocamente, *se un pendolo oscilla nello stesso modo intorno a due assi paralleli* (situati in un medesimo piano, da bande opposte e a *diversa* distanza dal centro di gravità) cioè *se le lunghezze ridotte* l *ed* l' *coincidono, il loro valore comune è precisamente eguale alla distanza dei due assi* (Teorema dell'Huygens).

Infatti, designate con r, r' le distanze dei due assi dal baricentro, si ha per la (5″)

$$(l-r)r = \delta^2 , \qquad (l'-r')r' = \delta^2 ;$$

onde segue, per la supposta eguaglianza di l ed l',

$$(l-r)r = (l-r')r' ,$$

ossia

$$l(r - r') = r^2 - r'^2 .$$

Essendo, per ipotesi, diverse le distanze r ed r' dei due assi dal centro di gravità, possiamo dividere per $r - r'$ e risulta $l = r + r'$, secondo quanto si è affermato.

6. Determinazione sperimentale di g. — Sul teorema dell'Huygens si basa l'impiego del pendolo fisico alla determinazione sperimentale dell'accelerazione di gravità. Si adopera il così detto *pendolo reversibile del* Kater. Esso è un pendolo composto, cui sono uniti due assi paralleli (coltelli) contenenti nel loro piano e a distanze diseguali il baricentro del pendolo, e tali di più che il pendolo possa farsi oscillare intorno ad entrambi, nel medesimo modo. Per il teorema precedente, la distanza l dei due assi è senz'altro eguale alla lunghezza del pendolo semplice isocrono, talchè la durata T di una oscillazione semplice, per piccole ampiezze, sarà espressa sensibilmente (I, n. 31) da

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Poichè l e T si misurano sperimentalmente in modo agevole (l col catetometro, T notando il tempo di durata di un numero abbastanza grande di oscillazioni) la formula precedente serve alla determinazione di g.

7. Determinazione sperimentale dei momenti di inerzia. — — Una seconda applicazione del teorema dell'Huygens consiste nella determinazione pratica dei momenti di inerzia dei corpi solidi.

Ove si voglia valutare il momento di inerzia di un corpo, rispetto a un dato asse ξ, basta che lo si possa far oscillare attorno a quest'asse.

Designando con m' la massa del corpo, con r' la distanza del suo baricentro G' dall'asse, con $\mathcal{A}$ il cercato momento di inerzia, con T' la durata di una oscillazione semplice, si ha

$$T' = \pi \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{m'r'g}} , \tag{6}$$

da cui si potrebbe ricavare il valore di $\mathcal{A}$ qualora, oltre a T', si conoscessero m' ed r'.

Ma sperimentalmente è malagevole determinare con esattezza il valore di r'.

Giova quindi ricorrere al seguente artificio, che permette di prescindere anche dalla conoscenza di m'.

Colleghiamo rigidamente al corpo dato una massa ausiliaria, m'', distribuita uniformemente attorno all'asse ξ, e facciamo oscillare questo sistema complesso. Sia T la durata di oscillazione di questo sistema e μ il momento di inerzia rispetto a ξ del corpo ausiliario. L'incognita $\mathcal{A}$ si può esprimere per mezzo di T', T e μ.

Infatti, introducendo per un momento anche la distanza r del baricentro G dell'intero sistema dall'asse ξ, avremo una formula analoga alla (6), cioè

$$T = \pi \sqrt{\frac{\mathcal{A} + \mu}{(m' + m'')rg}}. \tag{7}$$

Ora il centro di gravità G'' della massa m'', per la supposta simmetria, cade sopra la retta ξ; d'altra parte (X_1, nn. 12 e 10), applicando la proprietà distributiva, e poi la regola dei momenti ai punti G' (di massa m') e G'' (di massa m''), nonchè al loro baricentro G, si ricava immediatamente

$$m'r' = (m' + m'')r.$$

Portando questo valore di $(m' + m'')r$ nella (7), dividendola membro a membro per la (6) ed elevando a quadrato, si ricava

$$\mathcal{A} = \frac{\mu T^2}{T^2 - T'^2}.$$

§ 3. – Generalità sul moto di un solido intorno ad un punto fisso o intorno al baricentro.

8. Equazioni di Eulero. — Nella Dinamica dei sistemi rigidi un problema tipico con tre gradi di libertà è, accanto al moto piano di cui in questo Compendio non ci occuperemo [1], quello del moto di un solido fissato (senza attrito) in un suo punto O; ed è questo uno dei problemi più importanti di tutta la Meccanica, non soltanto per la grande varietà di questioni concrete, di

[1] Non va tuttavia taciuto che i problemi dinamici del moto di una figura rigida nel piano hanno una notevole importanza tecnica. Rimandiamo per questo argomento alle nostre *Lezioni*, più volte citate, Vol. II_1, Cap. VII, §§ 5-9.

cui esso fornisce la schematizzazione, ma anche per le vedute generali e gli sviluppi teorici, che ne derivarono.

Della impostazione di un tale problema avemmo già incidentalmente occasione di dare un cenno al n. 2. Riprendiamo le considerazioni là accennate per chiarirle e completarle.

Naturalmente, trattandosi del moto di un solido, conviene ricorrere alle equazioni cardinali; e l'ipotesi stessa della fissità del punto O suggerisce senz'altro di scegliere in esso il centro di riduzione dei momenti, con che codeste equazioni, riferite ad assi galileiani $\Omega\xi\eta\zeta$, assumono la loro forma più semplice

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}. \tag{2}$$

Qui le forze esterne, di cui $\boldsymbol{R}$ ed $\boldsymbol{M}$ denotano il risultante e il momento risultante, rispetto al punto fisso O, constano di quelle *direttamente applicate* (di natura esterna) e della *reazione* che si desta in O.

Ora, mettendoci, come già pel solido ad asse fisso (n. 3), nelle condizioni tipiche, supponiamo che, conoscendo le forze attive (e bastano quelle esterne) e nulla sapendo a priori della reazione in O, si voglia determinare il moto del solido intorno al punto fisso.

Codesta incognita reazione compare esplicitamente nella (1), come componente di $\boldsymbol{R}$, mentre, essendo in ogni caso applicata in O, non reca contributo alcuno al momento $\boldsymbol{M}$, talchè la (2) risulta da essa del tutto indipendente; e, poichè il solido ha, in questo caso, tre soli gradi di libertà, l'equazione vettoriale (2) basta da sola (come già notammo al cit. n. 2) a caratterizzare il moto del solido in base ai dati diretti della questione (e alle condizioni iniziali).

Codesta equazione cardinale dei momenti si rende più espressiva e più adatta alla discussione del problema, ove si riferisca ad una terna di assi x, y, z, solidali col corpo e aventi l'origine in O.

Se si denotano con punti le derivazioni temporali eseguite con riferimento a codesta terna, girevole rispetto ad $\Omega\xi\eta\zeta$ con la stessa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del solido, si ha (IV_1, n. 6)

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{K},$$

talchè la (2) assume la forma

$$\dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{K} = \boldsymbol{M}. \tag{8}$$

E giova particolarizzare ulteriormente il riferimento solidale, assumendo come terna $Oxyz$ quella dei tre assi principali di inerzia del solido nel suo punto O. Con questo riferimento l'omografia vettoriale di inerzia dà per le componenti del momento delle quantità di moto $\boldsymbol{K}$ secondo gli assi x, y, z, le espressioni canoniche (IV, n. 16)

$$K_x = \mathcal{A}p\,, \quad K_y = \mathcal{B}q\,, \quad K_z = \mathcal{C}r\,, \tag{9}$$

dove $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ denotano i tre momenti principali di inerzia del solido in O (i quali, naturalmente, si intendono costanti assegnate) e p, q, r le incognite componenti, secondo $Oxyz$, della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di quest'ultima terna (cioè del solido stesso) rispetto alla terna di riferimento meccanico $\Omega\xi\eta\zeta$.

Se, allora, si designano con M_x, M_y, M_z le componenti, secondo gli assi solidali, del momento risultante $\boldsymbol{M}$, rispetto ad O, delle forze attive esterne, la (8), proiettata sui tre assi (principali d'inerzia) x, y, z, conduce alle tre equazioni scalari

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}\dot{p} - (\mathcal{B} - \mathcal{C})qr &= M_x\,, \\ \mathcal{B}\dot{q} - (\mathcal{C} - \mathcal{A})rp &= M_y\,, \\ \mathcal{C}\dot{r} - (\mathcal{A} - \mathcal{B})pq &= M_z\,. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Sono queste, nella loro forma generale, le classiche *equazioni di* EULERO pel moto di un solido intorno ad un suo punto.

Ma importa rilevare che, in generale, non si può dire raggiunta con esse la impostazione completa e definitiva del problema. Le componenti M_x, M_y, M_z del momento $\boldsymbol{M}$, come le forze attive esterne da cui questo proviene, vanno considerate, nel caso più generale, come conosciute in funzione, oltre che del tempo, delle *velocità* dei singoli punti del solido, e, in più, delle loro posizioni nello spazio o, ciò che è lo stesso data l'ipotesi di rigidità, della *orientazione* del solido intorno ad O. Ora noi sappiamo che mentre codeste velocità sono esprimibili, a norma della nota formula cinematica (III$_1$, n. 16)

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)\,,$$

in termini finiti delle p, q, r e della posizione dei rispettivi punti o, ciò che è lo stesso, di tre parametri d'orientazione, comunque scelti, del solido nello spazio, le p, q, r, per la loro stessa natura di velocità, sono legate a codesti parametri di orientazione da relazioni di tipo differenziale. Appare di qui manifesto che a completare l'impostazione del nostro problema dovremmo anzitutto fissare codesti parametri di orientazione e poi aggregare alle equazioni di EULERO (10) le loro relazioni differenziali con le caratteristiche p, q, r.

Ma vi sono alcuni casi (e ne daremo un esempio notevolissimo al § 5), in cui le equazioni di EULERO bastano da sole, se non a individuare il moto in maniera completa, per lo meno a fissarne l'andamento generale.

9. Moto di un solido libero intorno al baricentro. — La seconda equazione cardinale assume la forma

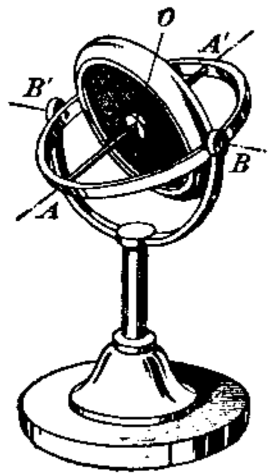
$$\dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{K} = \boldsymbol{M} \tag{8}$$

anche per un *solido libero*, purchè si prenda come centro di riduzione (e origine della terna solidale) il baricentro del corpo. Qui naturalmente non vi è luogo a parlare di reazione in $O \equiv G$, talchè $\boldsymbol{M}$ designa ancora il momento risultante delle sole forze esterne attive (questa volta rispetto al baricentro) e la (8), proiettata sugli assi principali baricentrali del solido, fornisce tre relazioni differenziali fra le caratteristiche p, q, r (del moto relativo al baricentro) e i momenti M_x, M_y, M_z, le quali formalmente hanno ancora l'aspetto delle equazioni di EULERO (10). Ma qui interviene, rispetto al caso del n. prec., una differenza essenziale. Introdotti i parametri di orientamento del solido, il momento $\boldsymbol{M}$, al pari della sollecitazione attiva, va considerato dipendente non solo da codesti tre parametri e dagli argomenti p, q, r (e t), tutti inerenti al moto relativo al baricentro, ma anche dalla posizione e dalla velocità (assolute) del baricentro stesso; e, poichè il moto di questo è definito precisamente dalla prima equazione cardinale (si ricordi il teorema del moto del baricentro; V, n. 6), si riconosce che per la determinazione del moto di un solido libero intorno al baricentro non basta considerare isolatamente, come pel moto intorno ad un punto fisso, la equazione cardinale dei momenti, bensì è necessario (almeno in generale) tornare alla impostazione tipica del problema dinamico del solido, considerando simultaneamente le due equazioni cardinali.

§ 4. – Solidi in rapida rotazione e fenomeni giroscopici elementari.

10. Fenomeni giroscopici elementari. — È qui opportuno che, in una breve digressione, ricordiamo e precisiamo un ordine di fenomeni meccanici, che, almeno sotto il loro aspetto immediato, non possono essere sfuggiti alla osservazione di alcuno. Ciascuno di noi ha certamente sperimentato che i solidi in rapida rotazione presentano, di fronte alla gravità, un comportamento, per così dire, di eccezione: un disco che rotoli rapidamente sul terreno, le ruote di una bicicletta, in corsa, una trottola che giri velocemente intorno al proprio asse mostrano che la rapida rotazione sottrae, almeno in parte, questi vari corpi agli ordinari effetti della gravità. Ora, grossolanamente parlando, si può dire che son questi alcuni esempi di quei fenomeni che si sogliono chiamare *giroscopici*.

Col nome di *giroscopio* (che sembra essere stato usato la prima volta dal Foucault [1] per un dispositivo ideato dal Bohnenberger a Tübingen, nel 1877) si designa in Fisica un apparecchio che, nella sua forma più semplice, è costituito da un disco metallico, omogeneo, massiccio, calettato ortogonalmente, nel suo centro O, ad un asse, i cui estremi sono liberamente imperniati in due punti A, A' diametralmente opposti di un anello metallico, il quale è alla sua volta, liberamente girevole intorno al suo diametro ortogonale ad AA', in quanto gli estremi B, B' di questo secondo diametro sono imperniati in una forcella semicircolare; e questa forcella è resa, pur essa, girevole liberamente intorno al suo asse dall'inserzione a manicotto del suo piede in una solida base, destinata ad essere appoggiata su di un tavolo orizzontale. Secondo la nomenclatura da noi adottata (IV, n. 17) il disco massiccio insieme col suo asse



---

(1) Leone Foucault, n. a Parigi nel 1819, m. ivi nel 1878. Fu astronomo al Bureau des Longitudes e all'Osservatorio di Parigi, e membro di quella Accademia delle Scienze. Eseguì ricerche sperimentali di elevata

solidale AA' (in quanto è un solido rotondo dotato, rispetto ad AA', di completa simmetria geometrica e materiale) costituisce un giroscopio in senso ristretto; e possiamo dire che il dispositivo dianzi descritto è semplicemente destinato a far sì che codesto giroscopio possa liberamente muoversi intorno al suo baricentro O.

Ciò posto, si immagini di imprimere al giroscopio una rapidissima rotazione intorno al suo asse AA' e di appoggiare l'apparecchio su di un tavolo, con che codesto asse AA' si troverà disposto secondo una certa direzione. Se allora si prova a deviare l'asse AA' da codesta direzione, facendo rotare con la mano l'anello intorno al suo diametro BB' o la forcella intorno al suo asse verticale, si avverte subito una resistenza notevolmente maggiore di quella che sarebbe offerta dal semplice attrito ai perni e nel manicotto della base, qualora il giroscopio fosse in quiete (relativa). Se poi si prende in mano la base dell'apparecchio e lo si muove comunque nello spazio (naturalmente con una certa lentezza ed evitando mosse brusche) si vede che l'asse AA' del giroscopio, in rapida rotazione, conserva invariata la sua direzione primitiva, rispetto agli oggetti circostanti. Anzi se si ricorre a dispositivi atti ad assicurare, meglio della forcella e del manicotto, la libera mobilità del giroscopio intorno al suo baricentro, e se ne mantiene, p. es., con mezzi elettrici, la rapida rotazione, si verifica che nemmeno la rotazione diurna della Terra modifica la direzione dell'asse AA', in quanto esso si conserva invariabilmente diretto verso il medesimo punto della sfera celeste. Questa constatazione sperimentale prende il nome di *principio della permanenza* o *tenacia degli assi giroscopici*.

Ma vi è un altro fenomeno, altrettanto importante e un po' più riposto. Naturalmente, applicando all'asse in un suo generico punto una forza $\boldsymbol{F}$, p. es., un peso, si riesce, per così dire a vincerne la tenacia e a farlo deviare; ma questa deviazione non avviene come potrebbe apparire prevedibile alla semplice intuizione, cioè nel piano per l'asse che contiene la forza, bensì in quello ortogonale ad essa. L'osservazione accurata conduce a precisare il fenomeno nei termini seguenti. La forza $\boldsymbol{F}$ applicata

importanza in collaborazione col REGNAULT, col FIZEAU ed altri: celebre la determinazione diretta della velocità della luce. Il suo nome è legato alla storia della Meccanica per la famosa esperienza eseguita nel Pantheon di Parigi (1851), con cui verificò la rotazione del piano di oscillazione del pendolo sferico, dovuta alla rotazione terrestre. Cfr. in proposito le nostre *Lezioni* ecc., Vol. II_1, Cap. II, § 9.

in un generico punto dell'asse, p. es., in A, determina rispetto al baricentro O un certo momento $\boldsymbol{M}$, che risulta ortogonale (in verso ben determinato) al piano di $\boldsymbol{F}$ e dell'asse. Ora, sotto l'azione di $\boldsymbol{F}$, l'asse giroscopico (pensato al solito nel verso rispetto a cui appare destra la presupposta rotazione rapida del giroscopio) tende a disporsi nella direzione e nel verso di $\boldsymbol{M}$. È questo il cosiddetto *principio della tendenza al parallelismo* (dell'asse giroscopico al momento sollecitante).

Noi qui, in base alla equazione cardinale dei momenti, ci renderemo conto in via teorica dei due principi sperimentali, dianzi chiariti, ed anzi, attenendoci ad una trattazione di G. Bisconcini (1), faremo vedere che, per spiegare tali fenomeni non è affatto essenziale l'ipotesi che si tratti di un solido a struttura giroscopica, bensì basta supporre, che l'asse intorno a cui avviene la rapida rotazione coincida con un asse principale d'inerzia del solido.

11. Rotazioni spontanee. — Fissiamo l'attenzione sul moto di rotazione di un solido S intorno a un suo punto O, fisso o coincidente col baricentro; e consideriamo dapprima un caso particolare molto importante, la cui teoria sarà svolta al prossimo paragrafo. Il caso, cui alludiamo, è quello dei cosiddetti *moti spontanei* o *per inerzia*, caratterizzati dalla circostanza che sia costantemente nullo il momento risultante $\boldsymbol{M}$ delle forze direttamente applicate (di natura esterna) rispetto al punto O. In tal caso l'equazione cardinale (2) dei momenti dà, rispetto all'osservatore fisso, $\boldsymbol{K} = \text{cost.}$, e la corrispondenza geometrica fra i vettori $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$ (omografia vettoriale d'inerzia; IV, nn. 18, 19) permette senz'altro di riconoscere che a codesta condizione soddisfa ogni *rotazione uniforme del solido intorno ad un suo asse principale d'inerzia.* Infatti, se si suppone che l'asse di rotazione di S coincida con un suo asse principale d'inerzia, ad es. con quello di versore $\boldsymbol{k}$, e che la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ sia costante, il momento $\boldsymbol{K}$ si ottiene (IV, n. 18) moltiplicando $\boldsymbol{\omega}$ per il corrispondente momento d'inerzia $\mathcal{C}$ e risulta, quindi, pur esso costante.

12. Coincidenza approssimata dei versori di $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$ nei casi di rapida rotazione intorno ad un asse principale di inerzia. — Teniamo ora conto della continuità della corrispondenza omografica fra $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$. In forza di questa continuità è intuitivo che se il versore $\boldsymbol{\omega}_1$ di $\boldsymbol{\omega}$ è non proprio coincidente con

---

(1) *Sui cosiddetti fenomeni giroscopici*, Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei Serie 6ª, Vol. XXII (1935-XIV), pp. 417-420.

quello di un asse principale d'inerzia, ma prossimo ad esso, altrettanto dovrà accadere del versore $\boldsymbol{K}_1$ di $\boldsymbol{K}$. Ora, la circostanza che $\boldsymbol{\omega}$ abbia una direzione prossima a quella di un asse principale d'inerzia si verifica ogniqualvolta il vettore $\boldsymbol{\omega}$, di componenti p, q, r rispetto ai tre assi principali d'inerzia (di versori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ rispettivamente), abbia una di queste componenti molto preponderante sulle altre due; e questo fatto si suole esprimere, dicendo che il solido è animato di *rapida rotazione intorno a quell'asse principale d'inerzia, cui corrisponde la componente preponderante della velocità angolare.*

Che effettivamente, quando ciò si verifica, il versore $\boldsymbol{\omega}_1$ di $\boldsymbol{\omega}$ sia prossimo al verso dell'asse principale d'inerzia corrispondente alla componente preponderante, per es. a $\boldsymbol{k}$, se r prepondera su p e q, risulta dall'identità

$$\boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}\,,$$

la quale si può anche scrivere

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\,\boldsymbol{\omega}_1 = p\boldsymbol{j} + q\boldsymbol{i} + r\boldsymbol{k}\,,$$

sicchè, dividendo ambo i membri per r, si trova

$$\sqrt{\left(\frac{p}{r}\right)^2 + \left(\frac{q}{r}\right)^2 + 1}\;\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{p}{r}\boldsymbol{i} + \frac{q}{r}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\;;$$

e di qui discende che, se p e q sono piccoli di fronte ad r (e, più precisamente, se i numeri puri p/r, q/r sono trascurabili) si ha senz'altro $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{k}$. Conseguentemente, per quanto si è detto pocanzi, il versore $\boldsymbol{K}_1$ di $\boldsymbol{K}$ risulta prossimo ad $\boldsymbol{\omega}_1$.

13. Spiegazione qualitativa della tendenza dell'asse di rapida rotazione al parallelismo col momento sollecitante. — Ciò premesso, consideriamo un intervallo di tempo $t \dashv t + \Delta t$ e indichiamo con $\Delta\boldsymbol{K}$ l'incremento in esso subìto dal momento $\boldsymbol{K}$ delle quantità di moto.

Dalla seconda equazione cardinale

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}\,, \tag{2}$$

dove, com'è ben noto, $\boldsymbol{M}$ designa il momento risultante rispetto ad O, di tutte le forze direttamente applicate (di natura esterna), si deduce, integrando da t a $t + \Delta t$,

$$\Delta\boldsymbol{K} = \int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{M}\,dt$$

ossia, denotando con $\overline{\boldsymbol{M}}$ il *momento medio* (1) da t a $t + \Delta t$,

$$\Delta \boldsymbol{K} = \overline{\boldsymbol{M}} \Delta t \, .$$

Questa relazione mette in luce che l'incremento $\Delta \boldsymbol{K}$ subito dal momento delle quantità di moto, in un generico intervallo di tempo, risulta parallelo al corrispondente momento medio delle forze direttamente applicate, sicchè il vettore $\boldsymbol{K}$ *tende a disporsi parallelamente ad* $\overline{\boldsymbol{M}}$; e dal n. prec. discende che, nei casi di rapida rotazione intorno ad un asse principale d'inerzia, una tale tendenza di $\boldsymbol{K}$ al parallelismo con $\overline{\boldsymbol{M}}$ implica un'analoga tendenza per lo stesso asse d'inerzia.

14. Spiegazione qualitativa della tenacia dell'asse di rapida rotazione. — Passando alla tenacia, cominciamo con un'osservazione di pura Cinematica, concernente il moto di un solido S intorno ad un suo punto O. Fissata in S per O una qualsiasi retta, per es. l'asse principale d'inerzia Oz di versore $\boldsymbol{k}$, è chiaro che il moto di S si può immaginare definito nel modo seguente: assegnando, da un lato, la legge temporale, a priori arbitraria, secondo cui varia il versore $\boldsymbol{k}$ (rispetto ad un riferimento galileiano) e, d'altra parte, l'orientazione, istante per istante, di S intorno alla retta solidale Oz. A sua volta, questa orientazione si può pensare individuata, istante per istante, mediante la componente r, secondo Oz, della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di S (nonchè, beninteso, il suo valore iniziale). E si può osservare che, essendo noto $\boldsymbol{k}(t)$, è conseguentemente conosciuto anche il vettore derivato $d\boldsymbol{k}/dt$, il quale, per la formula del Poisson (III$_1$, n. 15), vale $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{k}$, sicchè, introducendo anche le altre due componenti p e q

---

(1) Ricordiamo che di una funzione $f(t)$ si dice *valor medio* in un intervallo $t_1 \vdash t_2$ il rapporto

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \, dt \, .$$

Analogamente si definisce il valor medio di un vettore come quel vettore che ha per componenti i valori medi delle componenti del vettore considerato. Nel caso del testo si ha, quindi,

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{M} \, dt \, .$$

di $\boldsymbol{\omega}$ (secondo i due assi principali d'inerzia di versori $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$), si ha

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = (p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}) \wedge \boldsymbol{k} = q\boldsymbol{i} - p\boldsymbol{j}\,.$$

Rimane così, anche formalmente, verificato che, nelle ammesse ipotesi, $p(t)$ e $q(t)$ risultano univocamente determinate dal modo di variare di $\boldsymbol{k}(t)$, mentre $r(t)$ resta a priori indipendente.

Ciò premesso, confrontiamo per un dato solido S due moti diversi, tali che il versore $\boldsymbol{k}$ varii in entrambi secondo una medesima legge temporale $\boldsymbol{k}(t)$, mentre la componente della velocità angolare secondo Oz abbia nel primo caso un generico valore r e nel secondo un valore, molto maggiore, $r + r_0$ con r_0 costante, il che vuol dire che nel secondo caso si ha rapida rotazione intorno all'asse d'inerzia Oz. Nei due casi, come or ora si è visto, le $p(t)$, $q(t)$ sono le stesse, sicchè le due velocità angolari differiscono di $r_0\boldsymbol{k}$ e, conseguentemente, i momenti $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{K}^*$ delle quantità di moto di $\mathcal{C}r_0\boldsymbol{k}$, essendo $\mathcal{C}$ il momento d'inerzia di S rispetto ad Oz. Ma, introdotti i corrispondenti momenti $\boldsymbol{M}$ ed $\boldsymbol{M}^*$ delle forze direttamente applicate (di natura esterna), si ha

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}\,, \quad \frac{d\boldsymbol{K}^*}{dt} = \boldsymbol{M}^*\,,$$

e, quindi, per sottrazione,

$$\mathcal{C}r_0\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{M}^* - \boldsymbol{M}\,.$$

Questa relazione mette in evidenza che, quanto più grande è la velocità angolare addizionale r_0, tanto maggiore è la differenza fra i momenti delle sollecitazioni atte, nei due casi, a determinare il moto del solido; ed è appunto in questo fatto che consiste la cosiddetta *tenacia degli assi di rapida rotazione*.

Se poi si nota che, essendo $\boldsymbol{k}$ unitario, $d\boldsymbol{k}/dt$ è un vettore normale a $\boldsymbol{k}$ (I_1, n. 65), cioè all'asse di rapida rotazione, si riconosce che la sollecitazione addizionale $\boldsymbol{M}^* - \boldsymbol{M}$ può essere realizzata con una forza applicata ad un punto qualsiasi di codesto asse.

15. Osservazione sul moto incipiente. — Come complemento alle precedenti considerazioni qualitative, riferiamoci ora ad un solido S di struttura giroscopica (IV, n. 17), e immaginiamo che, dopo avergli impressa una rapida rotazione intorno all'asse giroscopico Oz, lo si abbandoni a se stesso, sotto l'azione esclusiva di una forza $\boldsymbol{F}$ applicata in un generico punto A dell'asse e, per fissare le idee, perpendicolare ad Oz.

In tali condizioni, l'aspetto saliente del moto consiste, pel principio di tendenza al parallelismo, in una deviazione dell'asse giroscopico Oz, per cui esso, movendosi nel piano ortogonale ad $\boldsymbol{F}$, tende a dispòrsi nella direzione e nel verso del momento $\boldsymbol{M}$ di $\boldsymbol{F}$ rispetto ad O.

Tuttavia, se questo è il carattere generale del moto, non si può affermare che in ogni istante l'asse Oz si sposti perpendicolarmente ad $\boldsymbol{F}$. Anzi, se si fissa, in particolare, l'attenzione sull'istante, in cui sul corpo, già in rapida rotazione, comincia ad agire la forza $\boldsymbol{F}$, si riconosce che, in accordo colla intuizione diretta, il moto incipiente ha luogo nella direzione e nel verso della forza attiva $\boldsymbol{F}$.

Per dimostrarlo, osserviamo anzitutto che, in quanto il momento $\boldsymbol{M} = (A - O) \wedge \boldsymbol{F}$ è tutto equatoriale, si ha $M_z = 0$; onde la terza equazione di EULERO (10), ove si tenga conto della condizione caratteristica $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ della struttura giroscopica, si riduce ad

$$\dot{r} = 0 \,.$$

Si ha dunque intanto che, durante il moto, la velocità angolare del corpo intorno ad Oz conserva costantemente il suo valore iniziale r_0.

D'altra parte, posto $OA = l$, si derivi l'identità

$$A - O = l\boldsymbol{k}$$

rispetto al tempo, con riferimento ad assi fissi, se O è un punto fisso, ad assi di direzione invariabile e di origine O, se questo punto coincide col baricentro. Una prima derivazione dà

$$\frac{dA}{dt} = l\,\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} \,. \tag{11}$$

Ma, in virtù della formula del POISSON (III_1, n. 15)

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{k}$$

e della espressione

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{e} + r\boldsymbol{k} \,,$$

che compete ad $\boldsymbol{\omega}$ per i solidi a struttura giroscopica (IV, n. 17), si ha

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{k} \,; \tag{12}$$

talchè la (11) si può anche scrivere

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = l\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{k}\,; \tag{13}$$

e di qui intanto si rileva che, nell'istante iniziale, in cui per ipotesi è nullo il componente equatoriale $\boldsymbol{e}$ della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ (tutta assiale), è pur nulla la velocità di A.

Poichè inizialmente $\boldsymbol{e}$ è nullo e d'altro canto sussiste la (13), si ha, sempre inizialmente, ciò che si designa colla notazione $(\ )_0$,

$$\left(\frac{d^2A}{dt^2}\right)_0 = l\left(\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} \wedge \boldsymbol{k}\right)_0 . \tag{14}$$

Ma, in virtù della stessa (13) e della $\boldsymbol{K} = \mathcal{A}\boldsymbol{e} + \mathcal{C}r_0\boldsymbol{k}$, la equazione cardinale dei momenti dà

$$\mathcal{A}\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} + \mathcal{C}r_0\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{k} = \boldsymbol{M}\,,$$

e quindi inizialmente

$$\left(\frac{d\boldsymbol{e}}{dt}\right)_0 = \frac{1}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{M})_0\,;$$

dopo di che, sostituendo nella (14) e osservando che dalla

$$\boldsymbol{M} = l\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{F}$$

discende, per la solita identità relativa al doppio prodotto esterno,

$$l\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{k}\,,$$

si perviene alla

$$\left(\frac{d^2A}{dt^2}\right)_0 = \frac{l^2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{F})_0\,,$$

la quale esprime appunto che il moto incipiente di A avviene nella direzione e nel verso della forza attiva $\boldsymbol{F}$ [1].

Osserviamo che l'ipotesi, cui ci siamo attenuti in questa dimostrazione, che la forza attiva sia perpendicolare all'asse è del tutto inessenziale, perchè ogni forza applicata nel generico punto A dell'asse si può scindere nel suo componente assiale $\boldsymbol{F}_a$ e nel suo componente equatoriale $\boldsymbol{F}$; e, siccome $\boldsymbol{F}_a$ non reca contributo alcuno al momento $\boldsymbol{M}$, tutto va come se la forza si riducesse al suo componente equatoriale.

---

[1] Il Prof. BISCONCINI ha mostrato in una Nota recente che si può arrivare a questa conclusione in modo concettualmente più diretto, evitando passaggi formali. Cfr. Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei, Serie 6ª, Vol. XXVIII, 1938.

§ 5. – **Moto alla Poinsot.**

16. Equazioni del moto. — Qui, da ultimo, ci proponiamo di studiare un caso notevolissimo (già preannunciato al n. 8 e al n. 11), in cui le equazioni di Eulero bastano da sole a caratterizzare l'andamento generale del moto.

Si tratta precisamente di quei moti che, per un solido di struttura materiale qualsiasi, fissato in un suo punto O, si presentano, quando le forze attive (di natura esterna), applicate al solido, hanno, rispetto al punto fisso O, un momento risultante costantemente nullo (cioè sono vettorialmente equivalenti ad un'unica forza applicata in O). Questa circostanza si trova manifestamente realizzata per ogni solido soggetto all'azione esclusiva della gravità e fissato nel suo baricentro, e, più particolarmente ancora, per qualsiasi solido fissato in un suo punto e sottratto ad ogni sollecitazione attiva, a partire da un atto di moto iniziale qualsivoglia (*moto spontaneo*).

In ogni caso, sotto la posta ipotesi, le forze di natura esterna comprendono, oltre quelle attive, soltanto la reazione del punto fisso, la quale ha pur essa momento nullo rispetto ad O. Perciò la seconda equazione cardinale (2) assume, rispetto agli assi fissi $O\xi\eta\zeta$, la forma

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = 0\,; \tag{15}$$

cosicchè esprime il fatto che, durante tutto il moto, il momento delle quantità di moto $\boldsymbol{K}$ del solido, rispetto al suo punto fisso O, si mantiene costante (in grandezza, direzione e verso). Vale insomma l'*integrale del momento* (vettoriale) *delle quantità di moto*

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_0\,, \tag{16}$$

dove $\boldsymbol{K}_0$ denota il momento risultante delle quantità di moto iniziali.

Vi è un caso particolare, in cui questo integrale primo basta da solo a caratterizzare completamente il moto: è il caso in cui l'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso P si riduce ad una sfera ($\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$), con che le (9) equivalgono all'unica equazione vettoriale

$$\boldsymbol{K} = \mathcal{A}\boldsymbol{\omega}\,.$$

La costanza di $\boldsymbol{K}$ implica perciò quella di $\boldsymbol{\omega}$, cosicchè il moto si riduce necessariamente ad una rotazione uniforme (intorno ad una retta per O comunque diretta, sia nello spazio che nel corpo).

Quando l'ellissoide d'inerzia non si riduce ad una sfera, la costanza di $\boldsymbol{K}$ rispetto al riferimento fisso non implica che questo vettore serbi una determinazione invariata entro il corpo o, più precisamente, rispetto ad assi solidali con esso, che al solito sceglieremo con l'origine in O. La legge con cui varia entro il corpo il vettore $\boldsymbol{K}$ (in quanto $\boldsymbol{K}$ è fisso nello spazio) è definita dalla

$$\dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{K} = 0\,, \tag{15)'}$$

in cui si traduce, con codesto riferimento, la (15).

Se, al solito, si assume la terna solidale $Oxyz$ coincidente con quella degli assi principali d'inerzia in O, la (15') proiettata su questi assi, dà le tre equazioni di Eulero, a secondi membri identicamente nulli,

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}\dot{p} - (\mathcal{B} - \mathcal{C})qr &= 0\,, \\ \mathcal{B}\dot{q} - (\mathcal{C} - \mathcal{A})rp &= 0\,, \\ \mathcal{C}\dot{r} - (\mathcal{A} - \mathcal{B})pq &= 0\,, \end{aligned}\right. \tag{10'}$$

le quali, a differenza di quanto accade in condizioni generali di sollecitazione (n. 8), implicano esclusivamente le p, q, r e le loro derivate, cosicchè bastano da sole a definire la legge temporale di variazione di codeste caratteristiche, vale a dire, in sostanza, l'andamento del moto. Su questo le forze attive, che non compaiono affatto nelle (10'), non influiscono in alcun modo; e si può dire che tutta la loro azione si esplica nel determinare, a norma della prima equazione cardinale, la reazione del punto fisso, mentre il solido si muove intorno a questo come se fosse sottratto ad ogni forza attiva esterna e risentisse solo gli effetti dell'atto di moto iniziale. È per questo che il moto qui considerato vien detto da taluni *moto per inerzia* o *moto spontaneo*. Noi lo chiameremo *moto alla* Poinsot dal nome di chi ne ha dato la rappresentazione geometrica di cui ci occuperemo al n. 18.

17. Integrali primi. — Abbiamo visto al n. prec. che, nel presente caso del moto alla Poinsot, la seconda equazione cardinale (15'), o le equivalenti equazioni di Eulero (10') ammettono l'integrale (vettoriale) del momento delle quantità di moto

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_0\,. \tag{16}$$

Di qui consegue in particolare che durante il moto alla Poinsot resta invariata la lunghezza del momento $\boldsymbol{K}$, il che, in base alle (9), si traduce nella equazione

$$\mathcal{A}^2p^2 + \mathcal{B}^2q^2 + \mathcal{C}^2r^2 = K_0^2 . \tag{17}$$

È questo per le (10′) il cosiddetto ***integrale del momento scalare delle quantità di moto.***

Ma è facile riconoscere che per codeste equazioni sussiste un altro integrale primo fondamentale. Si osservi, infatti, che trattandosi di un solido, sussiste il teorema delle forze vive (V, n. 21)

$$dT = dL ,$$

dove dL denota il lavoro elementare delle forze esterne; e che d'altra parte questo lavoro elementare, che per ogni solido fissato in un punto è dato (IV, n. 3) da $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{\omega}dt$, è qui costantemente nullo, insieme col momento $\boldsymbol{M}$ delle forze esterne. Perciò il teorema delle forze vive assume la forma $dT = 0$, onde si desume per integrazione

$$T = \text{cost.} = E . \tag{18}$$

È questo l'*integrale delle forze vive*; e, ricordando la nota espressione della forza viva di un solido fissato in un punto (IV, n. 15),

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{\omega} ,$$

si può dargli, in base alle (9), la forma esplicita

$$\mathcal{A}p^2 + \mathcal{B}q^2 + \mathcal{C}r^2 = 2E . \tag{18′}$$

Giova notare che la E (valore costante della energia cinetica) si può anche interpretare come il *valore costante dell'energia totale*, perchè non vi può essere variazione dell'altra specie di energia (energia potenziale) quando, come qui accade, il lavoro elementare è costantemente nullo.

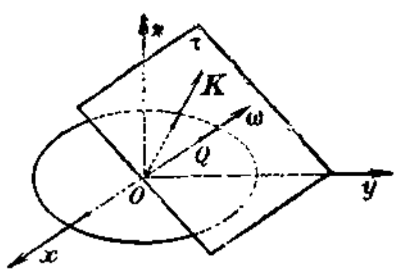
18. Rappresentazione geometrica dell'andamento del moto secondo il Poinsot. — Se si richiede di caratterizzare, rispetto ad un riferimento fisso, il solo aspetto geometrico del fenomeno, cioè la successione delle posizioni assunte dal corpo nel suo moto intorno ad O, astrazion fatta dalla legge temporale, non è necessario integrare le equazioni (10′), bensì basta la conoscenza degli integrali primi determinati al n. prec., cioè l'integrale del momento delle quantità di moto e quello della forza viva:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_0 , \tag{16}$$

$$T = E . \tag{18}$$

Tenendo conto di queste due equazioni (l'una vettoriale e l'altra scalare) si può, per così dire, materializzare la legge, con cui ruota il solido intorno ad O, e si perviene ad un risultato che, come vedremo, presenta una certa analogia con quello relativo alle traiettorie polari per le figure rigide mobili in un piano (V_1, § 2).

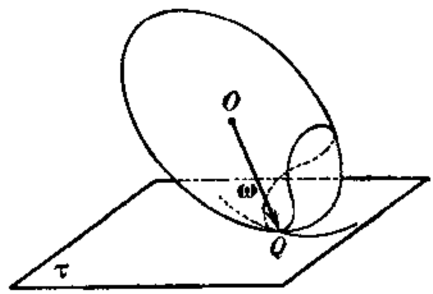
Consideriamo a tale scopo l'ellissoide di inerzia del solido rispetto al suo punto fisso O. Ad ogni istante la semiretta dell'asse istantaneo di rotazione cui appartiene il vettore $\boldsymbol{\omega}$, supposto applicato in O, interseca la superficie di codesto ellissoide in un punto Q, che il POINSOT ha chiamato *polo* (nell'istante considerato). Ora, in base alle proprietà dell'omografia di inerzia che intercede tra $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$ (IV, n. 18), sappiamo che, durante il moto, il vettore $\boldsymbol{K}$ è sempre perpendicolare al piano τ tangente all'ellissoide in Q e che la distanza δ di O da codesto piano è data, istante per istante, da



$$\delta = \frac{\sqrt{2T}}{K}.$$

Poichè, nel caso presente, il vettore $\boldsymbol{K}$ è invariabile nello spazio e la forza viva è costante, si conclude intanto che il piano τ, tangente all'ellissoide nel polo, è *fisso nello spazio*, come quello che ha una giacitura invariabile e una distanza costante dal punto fisso O.

Mentre il corpo ruota intorno ad O, ruota solidalmente con esso anche l'ellissoide, ma in modo da toccare ad ogni istante nel polo istantaneo Q il piano fisso τ; e, poichè codesto punto di contatto (che in generale varia col tempo tanto sull'ellissoide quanto sul piano) appartiene sempre all'asse istantaneo di rotazione, ***il moto del solido avviene come se l'ellissoide di inerzia, materializzato, rotolasse senza strisciare sopra il piano fisso τ.***



Le due curve descritte dal polo, durante il moto, rispettivamente sull'ellissoide e sul piano diconsi (col POINSOT) *polodia* la prima, *erpolodia* la seconda. E quando son note queste due curve, l'andamento geometrico del moto (cioè l'andamento a prescindere dalla legge temporale) è univocamente determinato.

In base alla circostanza che la lunghezza del vettore $\boldsymbol{K}$ si mantiene costante, sarebbe facile riconoscere che la polodia è una curva del quarto ordine, intersezione dell'ellissoide di inerzia con un altro ellissoide (quartica di seconda specie), mentre la erpolodia è, in generale, una curva trascendente.

19. ROTAZIONI PERMANENTI. — Vediamo se fra gli infiniti moti alla POINSOT, di cui è suscettibile un solido fissato in un punto O, vi siano delle rotazioni uniformi. Ciò equivale a cercare se sia possibile soddisfare alle equazioni di EULERO (10′), o alla equivalente equazione vettoriale (15′), ponendo $\boldsymbol{\omega}$ eguale ad un vettore costante entro il corpo (e quindi anche nello spazio; IV$_1$, n. 7). Ma in tal caso, in virtù della omografia di inerzia, risulta parimente costante, non soltanto nello spazio ma anche nel corpo, il momento $\boldsymbol{K}$, talchè dalla (15′), si trae

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{K} = 0 ,$$

cioè i due vettori $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$ risultano costantemente paralleli.

Viceversa, tutte le volte che è soddisfatta questa condizione, risulta dalla (15′) la invariabilità entro il corpo (oltre che nello spazio) del momento $\boldsymbol{K}$ e quindi, traverso l'omografia di inerzia, della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, cosicchè abbiamo intanto che condizione necessaria e sufficiente perchè un moto alla POINSOT si riduca ad una rotazione uniforme si è che i due vettori $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{K}$ si mantengano paralleli.

Ma, come sappiamo (IV, n. 18), ciò accade sempre e solo quando $\boldsymbol{\omega}$ (e quindi $\boldsymbol{K}$) ha costantemente la direzione di un asse principale di inerzia; e poichè questa condizione caratteristica non pone limitazione alcuna nè all'intensità nè al verso della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, concludiamo che, quando è nullo il momento risultante delle forze esterne, *il solido può ruotare* (con velocità angolare arbitraria, sia nell'uno che nell'altro verso) *esclusivamente intorno a ciascuno dei suoi assi principali di inerzia rispetto al punto fisso.*

In ognuna di codeste rotazioni uniformi il polo resta fisso sia nello spazio che sull'ellissoide (in un vertice di questo), talchè la polodia e la erpolodia risultano entrambe ridotte a codesto punto.

Per il solido fissato in un suo punto O (e assoggettato a forze attive di momento risultante nullo rispetto ad O) diconsi *permanenti* tanto le rotazioni uniformi dianzi caratterizzate, quanto i rispettivi assi di rotazione (assi principali di inerzia rispetto ad O).

A giustificare codesta qualifica si osservi che per una scelta arbitraria dei valori iniziali delle caratteristiche q, p, r o, ciò che è lo stesso, della determinazione iniziale del vettore $\boldsymbol{\omega}$, accade in generale che nel conseguente moto alla Poinsot, questi elementi variano col tempo, come è loro imposto dalla (15') o dalle (10') o, genericamente, dalla condizione di rotolamento dell'ellissoide sul piano τ. Ma quando la rotazione istantanea iniziale avviene (con intensità e verso quali si vogliono) intorno ad uno degli assi principali di inerzia, la legge del moto, espressa dalla (15') o dalle (10') o dal criterio del Poinsot, è tale da costringerla a permanere inalterata anche negli istanti successivi.

Gli assi permanenti di rotazione che per un solido di struttura generale ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ diversi l'un dall'altro) sono soltanto tre, a due a due ortogonali, diventano infiniti quando l'ellissoide di inerzia relativo al punto fisso sia rotondo (p. es., per un solido a struttura giroscopica rispetto ad O), giacchè in tal caso sono assi principali di inerzia, oltre l'asse di simmetria dell'ellissoide, tutti i suoi diametri equatoriali.

Se, più particolarmente ancora, l'ellissoide si riduce ad una sfera, sono assi permanenti *tutte* le rette uscenti dal punto fisso; ed anzi, in tale ipotesi, *ogni* moto spontaneo del solido è una semplice rotazione, come risulta da quanto precede e, d'altro canto, si è già verificato al n. 16 in base alle equazioni differenziali del moto.

20. Carattere precessionale del moto alla Poinsot di un solido a struttura giroscopica rispetto al punto fisso. — Nel caso di un solido che, rispetto al suo punto fisso O, abbia struttura giroscopica, è facile caratterizzare l'aspetto cinematico del moto in modo più preciso e completo di quello fornito, pel caso generale, dal criterio puramente geometrico del Poinsot.

In questa ipotesi, essendo $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, la terza delle (10') si riduce a

$$\mathcal{C}\dot{r} = 0 ;$$

e perciò esprime il fatto che, durante tutto il moto, la componente r della velocità angolare secondo l'asse giroscopico si mantiene costante.

Si ricordi allora l'espressione generale trovata al n. 17 del

Cap. IV per la velocità angolare di un corpo a struttura giroscopica

$$\omega = \frac{1}{\mathcal{A}} K + \frac{\mathcal{A} - \mathcal{C}}{\mathcal{A}} r k ,$$

dove k denota il versore dell'asse giroscopico.

Poichè questo versore k è per definizione invariabile nel corpo e, d'altra parte, nel caso presente r è costante e, trattandosi di un moto alla POINSOT, il momento K è fisso nello spazio, si riconosce dalla precedente espressione di ω che essa è, in questo caso, somma di due vettori di lunghezza costante, di cui il primo, diretto come K, è fisso nello spazio, il secondo, diretto come k, è invariabile nel corpo.

Perciò il moto, di cui qui si tratta, si può materializzare, immaginando che il solido ruoti, con velocità angolare costante $(\mathcal{A} - \mathcal{C})r/\mathcal{A}$, intorno al suo asse giroscopico, mentre questo, alla sua volta, ruota, con velocità angolare costante $K/\mathcal{A}$, intorno alla retta, invariabile nello spazio, che passa per O nella direzione di K. Un tale moto dicesi *precessione regolare*, di cui l'asse invariabile nello spazio chiamasi *asse di precessione*, mentre quello invariabile nel solido chiamasi *asse di figura*.

Possiamo dunque affermare che:

Ogni moto alla POINSOT *di un solido a struttura giroscopica rispetto al punto fisso O è una precessione regolare, avente per asse di precessione la parallela per O al momento K delle quantità di moto e per asse di figura l'asse giroscopico del solido.*

21. MOTO RELATIVO AL BARICENTRO. — Poichè la seconda equazione cardinale assume la forma

$$\frac{dK}{dt} = M \tag{2}$$

anche quando il centro di riduzione O, solidale col corpo, anzichè esser fisso, coincida istante per istante col baricentro (nn. 1 e 9), i risultati ottenuti nei prec. nn. 16-20 sussistono senza modificazioni se si considera, invece del moto (assoluto) di un solido fissato in un suo punto, il moto (relativo) di un solido libero intorno al suo baricentro, *purchè, beninteso, si supponga costantemente nullo il momento risultante delle forze esterne rispetto al baricentro.* E questa ipotesi non è affatto arbitraria ed artificiale, giacchè, ad es., si trova automaticamente soddisfatta tutte le volte che le forze esterne si riducono al peso.

Abbiamo così che un solido pesante, il quale cada liberamente nel vuoto, non può muoversi intorno al suo baricentro, nel caso più generale, se non nel modo caratterizzato dal Poinsot. Se poi si tratta di un solido rotondo (o, più generalmente, di un giroscopio, cioè di un solido di struttura giroscopica rispetto al baricentro) il moto intorno al baricentro è una precessione regolare.

In ogni caso, qualunque sia la natura delle forze attive, purchè a momento risultante nullo rispetto al baricentro, basta supporre che all'inizio del moto il solido sia in rotazione intorno ad uno dei suoi assi principali di inerzia baricentrali (oppure non ruoti) per poter concludere che esso continua indefinitamente a rotare con la stessa velocità (o a non rotare affatto) intorno a codesto asse.

Il caso particolare dei corpi pesanti, che inizialmente non ruotano, già fu considerato al n. 12 del precedente Cap. V.

CAPITOLO VII.

MOTO IMPULSIVO

§ 1. – Equazioni cardinali. Urto nel caso elementare.

1. GENERALITÀ. — Nei Capitoli precedenti abbiamo studiato il moto dei sistemi materiali in quegli intervalli di tempo in cui il fenomeno si presenta con carattere di continuità; più precisamente, abbiamo sempre supposto che le coordinate dei singoli punti del sistema fossero, durante il moto, funzioni continue del tempo, insieme colle loro derivate prime ed, eventualmente, seconde, ecc. Ma può accadere che i punti di un sistema materiale ad un determinato momento, in un intervallo di tempo brevissimo, cambino bruscamente di velocità, senza che in quello stesso tempuscolo il sistema muti sensibilmente di posizione.

Abbiamo già visto ($VIII_1$, § 4) che, nel caso di un punto libero P, ciò accade ogni qual volta venga applicata a P una *percossa*, vale a dire una forza $\boldsymbol{F}$ che, agendo su P per un *brevissimo* intervallo di tempo τ, successivo ad un dato istante t_0, raggiunga in codesto tempuscolo intensità *grandissime*. Fin da allora abbiamo precisato la natura di queste percosse, assumendo come loro caratteristica la condizione che sia determinato e finito il rispettivo *impulso* istantaneo

$$I = \lim_{\tau \to 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F} dt , \tag{1}$$

il quale, per la sua stessa definizione costituisce l'elemento dinamico, che va introdotto nella impostazione di ogni problema di Meccanica, in cui intervengano percosse.

Dalla equazione fondamentale della Meccanica $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, integrando rispetto al tempo t da t_0 a $t_0 + \tau$ e passando al limite per τ convergente allo zero, abbiamo riconosciuto che la percossa:

a) determina effettivamente per la velocità $\boldsymbol{v}$ di P una brusca variazione $\Delta \boldsymbol{v}$, legata all'impulso (1) dalla relazione, fondamentale per questa teoria,

$$m\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{I}\,; \tag{2}$$

b) lascia invariata la posizione del punto.

Son queste, nel caso di un unico punto libero, le circostanze caratteristiche del cosiddetto *moto impulsivo*. In esso, dal punto di vista cinematico, vi è luogo a considerare, oltre l'istante t_0 e la posizione del punto, due velocità distinte che appaiono come i valori limiti della velocità di P negli istanti immediatamente precedenti e immediatamente susseguenti a t_0. Le chiameremo rispettivamente *velocità anteriore* e *velocità posteriore*, designandole con $\boldsymbol{v}^-$ e $\boldsymbol{v}^+$, talchè si dovrà conseguentemente porre

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}^- .$$

Qui, tornando alla (2), importa aggiungere che essa si mantiene valida anche se, nel brevissimo intervallo di tempo τ, si sovrappongono alle percosse quante si vogliono altre forze, le quali siano ordinarie nel senso che si mantengano di intensità finita al convergere a zero di τ. Ciò discende senz'altro dalla circostanza che per ogni forza siffatta risulta nullo l'impulso istantaneo (1). Si può perciò dire che la brusca variazione di velocità, dovuta ad una percossa, non è influenzata dall'azione concomitante di quante si vogliano forze ordinarie.

Dopo queste premesse relative al punto libero passiamo al caso di un sistema materiale qualsiasi. Prendiamo norma da quello che fisicamente accade quando una palla da biliardo riceve un colpo di stecca o un chiodo viene conficcato nel muro a colpi di martello o due solidi cozzano violentemente fra loro, e riferiamoci ad un sistema materiale S di N punti P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ comunque vincolato. Se S è sottoposto ad una sollecitazione qualsivoglia e, ad un determinato istante t_0, per un brevissimo intervallo di tempo τ, intervengono ulteriormente su S delle percosse, non sono senz'altro applicabili le deduzioni, che, nel caso di un punto libero, ci hanno permesso di concludere che esso subisce esclusivamente una brusca variazione di velocità, conservando sensibilmente inalterata la sua posizione.

Qui, per effetto dei vincoli (si pensi, per es., ad un solido), le percosse attive destano sui punti di S altre percosse di natura reattiva, il cui comportamento risulta a priori incognito; e, volendo procedere con rigore, bisognerebbe assicurarsi che l'effetto complessivo delle percosse direttamente applicate e di quelle provenienti per reazione dai vincoli è quello stesso che vale per le percosse applicate ad un punto libero, cioè che esse determinano sui singoli punti P_i brusche variazioni di velocità, ma non alterazioni sensibili di posizione.

Il VOLTERRA ha mostrato come a questa esigenza logica si possa soddisfare per una categoria molto generale di sistemi vincolati, e precisamente per tutti quelli, pei quali vale il teorema delle forze vive [1]. Ma in questo Compendio, secondo l'uso corrente nelle trattazioni scolastiche del moto impulsivo, ammetteremo senz'altro, come postulato caratteristico del moto impulsivo dei sistemi, che: *I punti di un sistema materiale, comunque vincolato e sottoposto a percosse direttamente applicate, possono subire brusche variazioni di velocità, ma conservano sensibilmente inalterata la loro posizione.*

Perciò, in corrispondenza di ogni istante t_0 in cui intervengano percosse, si dovranno distinguere pel sistema un *atto di moto anteriore* e un *atto di moto posteriore*; e il problema del moto impulsivo consisterà nel determinare l'atto di moto posteriore, quando si conoscano la posizione del sistema e l'atto di moto anteriore, nonchè, beninteso, i vincoli e quelle circostanze fisiche che determinano il fenomeno di moto impulsivo e che generalmente si schematizzano in percosse direttamente applicate o, meglio, nei corrispondenti impulsi istantanei.

Sarà in ogni caso applicabile al sistema, punto per punto, l'equazione fondamentale (2), con l'intesa che $\boldsymbol{I}$ vi denoti il risultante di tutti gli impulsi, attivi e reattivi, agenti sul punto.

2. CONSEGUENZE DEL PRINCIPIO DI REAZIONE. — Riferiamo il dato sistema materiale S ad una determinata terna galileiana $\Omega\xi\eta\zeta$ e consideriamo un brevissimo intervallo di tempo τ, in cui, fra le forze direttamente applicate al sistema, alcune abbiano carattere di percosse nel senso dichiarato al n. precedente, ossia diano luogo, a norma della (1), ad un impulso $\boldsymbol{I}$ non nullo. Introdotte come incognite ausiliari le eventuali percosse reattive, destate, in conseguenza dei vincoli, sui singoli punti, distinguiamo fra le forze, ordinarie e impulsive, che agiscono sul generico punto P_i, quelle di origine esterna da quelle interne, e denotiamo con $\boldsymbol{F}_i$ il risultante delle prime. Il complesso di tutte le forze interne agenti sul sistema costituisce, pel principio di reazione, un sistema

[1] Per lo sviluppo delle considerazioni del VOLTERRA rimandiamo al § 6 del Cap. XII del Vol. II_2 delle nostre *Lezioni*, già ripetutamente citate.

vettorialmente equilibrato (cioè a risultante e momento risultante nulli), cosicchè seguitano a valere, istante per istante, le equazioni cardinali del moto (V, § 2)

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}, \tag{3}$$

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}, \tag{4}$$

dove, al solito $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{K}$ denotano il risultante e il momento risultante, rispetto ad un punto fisso O o al baricentro, delle quantità di moto di S, ed

$$\boldsymbol{R} = \sum_{1}^{N}{}_i \boldsymbol{F}_i, \qquad \boldsymbol{M} = \sum_{1}^{N}{}_i (P_i - O) \wedge \boldsymbol{F}_i \tag{5}$$

il risultante e l'analogo momento risultante di tutte le forze esterne (attive e reattive), tra le quali, ben si intende, hanno per noi particolare importanza quelle di comportamento impulsivo. A caratterizzare, sotto questo aspetto, codeste forze esterne, introdurremo gli impulsi corrispondenti

$$\boldsymbol{I}_i = \lim_{\tau \to 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F}_i \, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{6}$$

avvertendo, una volta ancora, che a costituire questi impulsi concorrono i componenti di ciascuna $\boldsymbol{F}_i$ che hanno carattere di percosse, non quelli di tipo ordinario.

Giova osservare sin d'ora che in taluni casi, fra i quali è particolarmente notevole quello di un solido libero, sottoposto ad assegnate percosse attive, le percosse che si possono destare per reazione sono esclusivamente interne; in questi casi gli impulsi $\boldsymbol{I}_i$ si possono ritenere completamente conosciuti, come provenienti esclusivamente dalle percosse direttamente applicate.

3. Prima equazione cardinale del moto impulsivo. — Integrando la (3) rispetto al tempo t, nel brevissimo intervallo da t_0 a $t_0 + \tau$, nel quale agiscono percosse, e passando al limite per τ convergente allo zero, otteniamo l'equazione

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}, \tag{7}$$

dove si è posto, con evidente significato dei simboli,

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^+ - \boldsymbol{Q}^-$$

ed

$$\mathbf{R} = \lim_{\tau \to 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{R}\, dt\,,$$

ossia, in base alla prima delle (5) e alla (6),

$$\mathbf{R} = \sum_1^N {}_i \boldsymbol{I}_i\,.$$

Questo $\mathbf{R}$ è dunque il *risultante degli impulsi di origine esterna.* E la (7) costituisce la *prima equazione cardinale del moto impulsivo.*

Da questa equazione risulta, in particolare, che se, come accade per un sistema di due o più corpi che si urtino, il sistema subisce soltanto impulsi di origine interna, talchè $\mathbf{R}$ risulti nullo, si ha $\Delta \boldsymbol{Q} = 0$. Si riconosce così che, in questi fenomeni di urto e simili, si ha *conservazione della quantità di moto risultante*, pur potendo accadere che si verifichino brusche variazioni per le quantità di moto dei singoli punti del sistema.

Se poi si ricorda che $\boldsymbol{Q}$ coincide colla quantità di moto del baricentro (IV, n. 12) si conclude che *le azioni impulsive di natura interna non modificano la velocità baricentrale* (cfr. V, n. 7).

4. Urto centrale e diretto di due corpi. — Per applicar subito i precedenti risultati ad un caso elementare, consideriamo l'urto che si verifica fra due corpi S_1, S_2 animati di moto traslatorio secondo una stessa direzione Ox, quando i due corpi, venendosi incontro, cozzano di fronte o quando uno di essi, procedendo nello stesso senso dell'altro, ma con velocità maggiore, finisce coll'investirlo; e supponiamo che, anche dopo l'urto, il moto dei due corpi conservi il suo carattere traslatorio lungo la stessa direzione, salve, beninteso, le eventuali variazioni brusche di intensità e di senso delle velocità. In queste condizioni l'urto dicesi *centrale* e *diretto*. Il caso generale sarà studiato al § 3; e preciseremo allora il senso di queste due qualifiche sotto cui si presenta l'importante caso particolare, del quale intendiamo ora occuparci. Intanto osserviamo che le ipotesi qui ammesse si possono ritenere sensibilmente realizzate, considerando, per esempio, due palline di un pallottoliere, scorrenti lungo un medesimo filo.

Se denotiamo con m_1, m_2 le masse dei due corpi, con v_1, v_2 le loro velocità scalari secondo Ox e con $\Delta v_1 = v_1^+ - v_1^-$, $\Delta v_2 = v_2^+ - v_2^-$ le corrispondenti variazioni brusche nell'istante dell'urto, l'equazione cardinale (7) si riduce in questo caso alla

$$m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2 = 0 \tag{8}$$

ed esprime, come già si è notato in generale al n. prec., la invariabilità nell'urto della velocità

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m} \qquad (m = m_1 + m_2) \tag{9}$$

del baricentro.

Secondo la impostazione del problema del moto impulsivo stabilita al n. 1, si debbono considerar conosciute le velocità anteriori v_1^-, v_2^- dei due corpi e si tratta di determinare le velocità posteriori v_1^+, v_2^+. Ma, ad individuare queste due incognite, l'unica relazione (8), fornita dalla prima equazione cardinale, non basta, cosicchè bisogna introdurre una ulteriore condizione, che non si può desumere se non dalla esperienza. A tal fine occorrerebbe una analisi minuta dei fenomeni complessi, che si verificano durante il brevissimo intervallo di tempo τ, in cui i due corpi, venuti a contatto, dapprima si comprimono vicendevolmente, deformandosi; poi, attenuandosi più o meno la deformazione, rimbalzano (*corpi elastici*) oppure, eccezionalmente, restano aderenti (*corpi perfettamente anelastici*, come cera, piombo, ecc.) seguitando a muoversi di conserva, cioè con la stessa velocità.

In quest'ultimo caso il problema risulta senz'altro risoluto, in quanto va associata alla (8) l'equazione

$$v_2^+ = v_1^+ .$$

Il valore comune di queste velocità posteriori si identifica colla velocità v del baricentro che (n. precedente) non si altera nell'urto, e si può perciò esprimere per mezzo delle velocità anteriori. Si perviene così alle formule risolutive:

$$v_1^+ = v_2^+ = \frac{m_1 v_1^- + m_2 v_2^-}{m} .$$

Nel caso generale dei corpi elastici, senza entrare nell'analisi minuta pocanzi accennata, si può schematizzare l'aspetto complessivo del fenomeno, introducendo col NEWTON l'ipotesi cinematica che la velocità relativa di allontanamento di uno dei due corpi rispetto all'altro, immediatamente dopo l'urto, sia una determinata frazione, non impropria, e dell'analoga velocità di avvicinamento, immediatamente prima dell'urto. Ciò porta ad assumere come legge empirica da associarsi alla (8), qualunque sia il verso attribuito alla Ox, la

$$v_2^+ - v_1^+ = -e(v_2^- - v_1^-) , \tag{10}$$

e ad ammettere ulteriormente, sulla scorta della esperienza, che la costante e, compresa, come già si è detto, fra 0 ed 1 e chiamata *coefficiente di restituzione*, dipenda soltanto dalla costituzione fisica dei due corpi. Notiamo subito che per $e = 0$ si ricade sul caso limite già esaurito dei corpi anelastici, mentre per $e = 1$ il rimbalzo risulta completo, cioè sono eguali, salvo il segno, le velocità relative di avvicinamento anteriore e di allontanamento posteriore, il che corrisponde al caso ideale di una perfetta elasticità dei corpi che si urtano.

Dopo queste premesse, tutto si riduce a ricavare le due incognite v_1^+, v_2^+ dalle due equazioni lineari (8), (10); al che si perviene, nella forma che meglio si presta alla interpretazione meccanica, separando nella (10) i termini relativi ai due corpi e indicando con w il valore comune ai due membri, cioè scrivendo

$$v_1^+ + ev_1^- = v_2^+ + ev_2^- = w \,. \tag{11}$$

Se nella (8) a v_1^+, v_2^+ si sostituiscono i valori $w - ev_1^-$, $w - ev_2^-$ che risultano dalla (11), si ottiene la

$$w = (1 + e)v \,,$$

dove v denota al solito la velocità baricentrale; dopo di che si traggono dalle (11) le formule risolutive

$$v_i^+ = (1 + e)v - ev_i^- \qquad (i = 1,\ 2), \tag{12}$$

le quali, naturalmente, per $e = 0$ ridanno il risultato pocanzi ottenuto pei corpi anelastici. Va pure rilevato il caso particolare di due corpi perfettamente elastici ($e = 1$), di masse eguali ($m_1 = m_2$), con che $v = (v_1 + v_2)/2$.

Si ha allora

$$v_1^+ = v_2^- \,, \qquad v_2^+ = v_1^- \,;$$

ossia i due corpi, urtandosi, si scambiano le rispettive velocità.

5. Urto centrale e diretto contro una parete. — Nella trattazione precedente si può far rientrare, come caso limite, il problema dell'urto centrale e diretto di un corpo S, per esempio di una sfera, contro una parete fissa (muro, pavimento, ecc.). Basta assimilare questa parete ad un corpo S_2 di massa m_2 grandissima, e al limite infinita, e di velocità anteriore nulla ($v_2^- = 0$). In tal caso dalla espressione (9) della velocità invariabile del baricentro, ponendovi $v_2 = v_2^- = 0$ e facendo tendere m_2 all'infinito, si ottiene al limite $v = 0$, cosicchè dalla prima delle (12) si trae

$$v_1^+ = - ev_1^- \,; \tag{13}$$

si ricade cioè sulla legge empirica del NEWTON, quale conviene al caso limite dell'urto contro una parete fissa.

Questo risultato suggerisce un modo di determinare sperimentalmente il coefficiente di restituzione e di una palla elastica di fronte all'urto su di un suolo orizzontale di data costituzione fisica. Si immagini, infatti, di lasciarla cadere verticalmente da una data altezza h, senza velocità iniziale, con che (V, n. 13) il suo moto risulta traslatorio. In base alle formule elementari del moto dei gravi o, se si vuole, al teorema delle forze vive, si sa che la palla arriva al suolo con una velocità $\sqrt{2gh}$; dopo di che rimbalza verticalmente verso l'alto con moto ancora traslatorio e con una velocità il cui valore assoluto è dato, in base alla (13), da $e\sqrt{2gh}$. L'altezza h_1 cui essa perviene si può determinare direttamente; e, ancora pel teorema delle forze vive applicato alla fine del primo rimbalzo, si deve avere

$$2gh_1 = e^2 \cdot 2gh\,,$$

e quindi

$$e = \sqrt{\frac{h_1}{h}}.$$

6. PERDITA DI FORZA VIVA NELL'URTO. — Delle formule (12) del n. 4 giova servirsi per confrontare i valori T^- e T^+ della energia T posseduta complessivamente dai due corpi, subito prima e subito dopo l'urto. Vedremo che la variazione $\Delta T = T^+ - T^-$ non può essere che negativa o, eccezionalmente, nulla, cosicchè si dovrà parlare di *perdita* di forza viva e questa perdita sarà data, in valore assoluto, da $-\Delta T$.

Ove si ricordi, che, pel teorema del KÖNIG (IV, n. 8), la forza viva T di un qualsiasi sistema materiale è eguale alla somma della forza viva T_0 del baricentro e della forza viva $\mathcal{T}$ del sistema nel suo moto relativo al baricentro, si riconosce intanto che nel nostro caso, per la invariabilità della velocità baricentrale, risulta $\Delta T = \Delta\mathcal{T}$. Ora per definizione si ha

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\sum_1^2{}_i m_i(v_i - v)^2\,, \tag{14}$$

od anche, sostituendo alla velocità baricentrale la sua espressione (9),

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m}(v_1 - v_2)^2\,, \tag{14'}$$

cosicchè si ha, in virtù della (10),

$$\mathcal{T}^+ = e^2\mathcal{T}^-$$

e quindi

$$(15) \qquad -\Delta T = -\Delta \mathcal{T} = (1 - e^2)\mathcal{T}^- ,$$

od anche, per la (14′),

$$(15') \qquad -\Delta T = \frac{1}{2}(1 - e^2)\ \frac{m_1 m_2}{m}\ (v_1^- - v_2^-)^2 .$$

Si riconosce così che per effetto dell'urto si determina in generale, cioè per $e < 1$, una effettiva perdita di energia cinetica, e questa perdita è data dalla (15) in termini di e e della energia cinetica anteriore $\mathcal{T}^-$, quale spetta al sistema nel moto relativo al baricentro; quest'ultima, alla sua volta, in base alla (14′), si può calcolare per mezzo dei dati diretti della questione (velocità anteriori).

Dalla (15) per $e = 1$, cioè per corpi perfettamente elastici, risulta $\Delta T = 0$. Si ha dunque che i fenomeni di urto fra corpi perfettamente elastici hanno carattere conservativo anche sotto l'aspetto puramente meccanico. Più precisamente, quei fenomeni complessi che, come accennammo, si svolgono nel brevissimo intervallo di tempo τ non implicano trasformazione di energia in calore; alla mutua compressione dei due corpi nella prima fase, la quale involge, naturalmente, una trasformazione di energia cinetica in potenziale, fa riscontro nella fase di restituzione, una completa trasformazione in senso inverso.

Tutto ciò corrisponde a ipotesi del tutto ideali, giacchè nei casi reali il coefficiente di restituzione è sempre minore di 1, e si ha una effettiva perdita di energia. Ma questa perdita è, a parità di altre condizioni, tanto minore quanto più vicino ad 1 è il coefficiente e, cioè quanto più elastici sono i corpi tra cui avviene l'urto.

È questa la ragione per cui nella Tecnica, quando si vuole economizzare al massimo l'energia cinetica e d'altra parte non si possono evitare fenomeni di urto, si cerca di fare in modo che questi intervengano fra corpi aventi la maggior possibile elasticità. Così nel giustapporre i tronchi successivi di una rotaia è opportuno lasciare fra l'uno e l'altro dei convenienti intervalli per dar posto alle dilatazioni di origine termica; e questi interstizi provocano, al passaggio delle ruote di un carro ferroviario, dei fenomeni di urto, che sono ritmicamente sensibili anche ai viaggiatori. Ad evitare, per quanto è possibile, le dispersioni di energia cinetica si provvede collocando le traversine non già alle estremità delle rotaie, bensì ad una ragionevole distanza da esse, così da conservare alle rotaie, compatibilmente colle esigenze di stabilità del binario, la maggior possibile elasticità in quei tratti, in cui avvengono gli accennati fenomeni di urto.

Le formule (14'), (15') danno luogo ad altre interessanti osservazioni, quando si supponga che uno dei due corpi, per es. S_2, sia fermo prima dell'urto ($v_2^- = 0$) e si voglia metterlo in moto urtandolo con S_1. L'energia cinetica, che viene spesa a tale scopo e che, p. es., è immediatamente fornita dall'energia muscolare di un uomo che dà un colpo di martello, si identifica manifestamente colla energia anteriore $m_1(v_1^-)^2/2$ di S_1.

Tenendo conto delle (14'), (15') si vede che il rapporto r della forza viva perduta alla energia impiegata, il quale misura la *perdita unitaria di energia cinetica*, è dato da

$$r = (1 - e^2)\,\frac{m_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Ora si supponga che sia prefissata la quantità di energia disponibile, come appunto accade nell'ipotesi, testè accennata, che si tratti dell'energia muscolare di un uomo.

Se per un dato corpo S_2 e per un dato materiale costitutivo di S_1, con che rimane fissato il coefficiente di restituzione e, si vuole imprimere ad S_2 la maggior possibile velocità, bisogna rendere minima la perdita unitaria di forza viva; e a ciò, come risulta dalla precedente espressione di r, si provvede prendendo quanto maggiore è possibile la massa m_1 di S_1. Così, nel caso del martello maneggiato da un uomo, conviene adoperare un martello molto pesante, accontentandosi, naturalmente, di imprimergli una velocità proporzionalmente ridotta.

Qualora invece il fenomeno di urto sia destinato piuttosto a spezzare il corpo S_2 che ad imprimergli velocità, bisogna cercare di rendere rilevante la perdita di forza viva, perchè buona parte di essa viene spesa in lavoro di disgregazione. Se anche in questo caso si suppone prefissata la quantità di energia disponibile, appare senz'altro dalla espressione di r che le cose sono invertite, e conviene dotare S_1 di piccola massa e, conseguentemente, di notevole velocità (martello relativamente leggero battuto con colpo rapido).

Riprendiamo qui da ultimo, ancora una volta, la formula generale (15) per darle una nuova forma, atta a mettere in luce un caso particolare di un teorema generale, dovuto al CARNOT, che stabiliremo al n. 18. A tal fine introduciamo la cosiddetta *forza viva dovuta ai divari di velocità*

$$\Theta = \frac{1}{2}\sum_i^2 m_i(\Delta v_i)^2\,.$$

Dalle (12) risulta

$$\Delta v_i = -(1+e)(v_i^- - v) \qquad (i = 1, 2),$$

cosicchè, tenendo conto della (14), si ha

$$\Theta = (1+e)^2 \mathcal{T}^- ;$$

e alla (15) si può dare l'aspetto

$$(15'') \qquad -\Delta T = \frac{1-e}{1+e}\,\Theta .$$

Per $e = 0$ si ha il preannunciato caso particolare del teorema del CARNOT: *Nell'urto di corpi anelastici la perdita di forza viva eguaglia la forza viva dovuta ai divari di velocità.*

Invece pei corpi elastici questa perdita è soltanto una frazione (propria) di Θ, tanto più piccola quanto più si è vicini al caso ideale della perfetta elasticità ($e = 1$), nel quale, come già si è detto, essa è addirittura nulla.

7. SECONDA EQUAZIONE CARDINALE DEL MOTO IMPULSIVO. — Integriamo rispetto al tempo la seconda equazione cardinale (4) del moto continuo nel solito brevissimo intervallo τ in cui agiscono percosse e teniamo conto che, pel postulato caratteristico del moto impulsivo (n. 1), i singoli punti P_i del sistema conservano sensibilmente inalterate le loro posizioni. Tenendo conto della espressione esplicita (5) del momento $\boldsymbol{M}$, otteniamo la

$$[\boldsymbol{K}]_{t_0}^{t_0+\tau} = \sum_1^N {}_i\,(P_i - O) \wedge \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F}_i dt ;$$

e di qui, passando al limite per τ convergente allo zero e ricordando le (6), perveniamo alla

$$(16) \qquad \Delta \boldsymbol{K} = \mathbf{M} ,$$

dove si è posto

$$\Delta \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^+ - \boldsymbol{K}^-$$

ed

$$\mathbf{M} = \sum_1^N {}_i\,(P_i - O) \wedge \lim_{\tau \to 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F}_i dt = \sum_1^N {}_i\,(P_i - O) \wedge \boldsymbol{I}_i .$$

Questo $\mathbf{M}$ è, dunque, il momento risultante rispetto ad O, degli impulsi esterni agenti sul sistema; e la (16) è la cosiddetta *seconda equazione cardinale del moto impulsivo.*

Per le applicazioni di questa equazione importa osservare che in realtà la (4), da cui siamo partiti, vale soltanto nella ipotesi che il centro di riduzione O dei momenti sia fisso (o coincida col baricentro del sistema). Tuttavia, siccome, pel postulato testè richiamato, tutti i punti del sistema, nel brevissimo intervallo di tempo τ, vanno considerati immobili, la (16) sèguita a sussistere, anche quando si assume come polo uno qualsiasi di codesti punti.

§ 2. – Applicazioni ai solidi.

8. Generalità. Solido libero. — Come ben sappiamo dalla Cinematica (III$_1$, § 5), l'atto di moto di un solido (cioè la distribuzione delle velocità dei singoli suoi punti) è individuato, istante per istante, dai due vettori caratteristici $\boldsymbol{v}_0$ (velocità di un generico punto O solidale col corpo) ed $\boldsymbol{\omega}$ (velocità angolare). Conseguentemente l'effetto di quanti si vogliono impulsi, applicati in un dato istante t_0 al solido, risulterà individuato, quando si riesca ad assegnare le corrispondenti variazioni $\Delta\boldsymbol{v}_0$, $\Delta\boldsymbol{\omega}$ dei due vettori caratteristici, o, ciò che è lo stesso (ed anzi meglio risponde alla impostazione generale del problema, quale fu fissata al n. 1), le determinazioni posteriori $\boldsymbol{v}_0^+$, $\boldsymbol{\omega}^+$ di cotesti due vettori in funzione di quelle anteriori.

Ora il problema è sostanzialmente risoluto, sia pei solidi liberi, sia per quelli vincolati, dalle due equazioni cardinali del moto impulsivo

$$\Delta Q = \mathbf{R}\,, \tag{7}$$

$$\Delta K = \mathbf{M}\,. \tag{16}$$

Si può convincersene, studiando successivamente i casi tipici del solido libero o mobile parallelamente ad un piano e del solido con un punto o un asse fisso.

Noi qui ci limiteremo a considerare il solido libero e il solido girevole intorno ad un asse.

Cominciamo dal primo caso. Per un solido libero, gli impulsi esterni, e con essi $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{M}$, sono direttamente esprimibili in termini dei dati della questione. D'altra parte, ove, per semplicità di impostazione formale, si assuma come polo O dei momenti il baricentro, si ha $Q = m\boldsymbol{v}_0$, dove m denota la massa totale del sistema, mentre K (IV, n. 19) è legato ad $\boldsymbol{\omega}$ dalla nota omografia d'inerzia σ, relativa al baricentro

$$K = \sigma(\boldsymbol{\omega})\,,$$

la quale, rispetto agli assi principali d'inerzia baricentrali, è rappresentata dalle equazioni canoniche

$$K_x = \mathcal{A}p\,, \quad K_y = \mathcal{B}q\,, \quad K_z = \mathcal{C}r\,,$$

dove al solito $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ denotano i corrispondenti momenti principali d'inerzia, p, q, r le componenti di $\boldsymbol{\omega}$.

Perciò alle (7), (16), nel caso di un solido libero, si può dare l'aspetto

$$m\Delta \boldsymbol{v}_0 = \mathbf{R}\,, \tag{17}$$

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = \sigma^{-1}(\mathbf{M})\,; \tag{18}$$

e queste due equazioni risolvono il problema del moto impulsivo, poichè definiscono, per mezzo dei dati della questione, le brusche variazioni della velocità baricentrale e della velocità angolare.

Non sarà inutile fissare per un momento l'attenzione sulle tre equazioni cartesiane, cui dà luogo la (18) proiettata sui tre assi principali di inerzia relativi al baricentro, cioè sulle

$$\mathcal{A}\Delta p = \mathsf{M}_x\,, \quad \mathcal{B}\Delta q = \mathsf{M}_y\,, \quad \mathcal{C}\Delta r = \mathsf{M}_z\,. \tag{18'}$$

9. Solido con asse fisso. — Prendiamo come asse delle x l'asse fisso, orientato ad arbitrio, e denotiamo con $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{M}$ il risultante e il momento risultante degli *impulsi attivi*, assumendo il polo O di riduzione dei momenti (che sarà al tempo stesso origine delle coordinate) in un punto, per ora arbitrario, dell'asse fisso. Se sono $\mathbf{R}'$, $\mathbf{M}'$ gli analoghi vettori che caratterizzano il complesso degli *impulsi reattivi* destati lungo Ox, l'equazione cardinale (16) dei momenti, proiettata su quest'asse, risulta indipendente da $\mathbf{R}'$ ed $\mathbf{M}'$ e, assumendo la forma

$$\Delta K_x = \mathsf{M}_x\,, \tag{19}$$

consente di risolvere il problema del moto impulsivo. Invero, trattandosi di un solido girevole intorno all'asse Ox, l'unica caratteristica non nulla è la p (velocità angolare intorno all'asse fisso) e si ha (IV, n. 20) $K_x = \mathcal{A}p$, dove $\mathcal{A}$ denota il momento d'inerzia del solido rispetto ad Ox. Perciò la (19) si può scrivere

$$\mathcal{A}\Delta p = \mathsf{M}_x\,, \tag{19'}$$

e fornisce senz'altro la brusca variazione della velocità angolare p.

Dopo ciò conviene mostrare come, appena desunto dalla (19') l'atto di moto posteriore, si calcolino i vettori $\mathbf{R}'$, $\mathbf{M}'$, che caratterizzano il complesso degli impulsi reattivi. A tal fine bisogna riprendere le mosse dalle equazioni cardinali del moto impulsivo nella loro forma vettoriale

(20) $$\Delta Q = \mathbf{R} + \mathbf{R}',$$

(21) $$\Delta K = \mathbf{M} + \mathbf{M}'.$$

Per effettuare il calcolo, si richiamino dal citato n. 20 del Cap. IV le espressioni (37), (38) delle componenti di Q e K, cioè le

$$Q_x = 0, \quad Q_y = -mz_0p, \quad Q_z = my_0p;$$

$$K_x = \mathcal{A}p, \quad K_y = -\mathcal{C}'p, \quad K_z = -\mathcal{B}'p;$$

e, per semplificare le formule, si assuma come piano xz il piano baricentrale (passante per Ox), con che la seconda coordinata y_0 del baricentro risulta nulla. Si trova allora, proiettando le (20), (21) sugli assi e tenendo conto della (19′),

(20′) $$\mathsf{R}'_x = -\mathsf{R}_x, \qquad \mathsf{R}'_y = -\frac{mz_0}{\mathcal{A}}\mathsf{M}_x - \mathsf{R}_y, \qquad \mathsf{R}'_z = -\mathsf{R}_z$$

(21′) $$\mathsf{M}'_x = 0, \quad \mathsf{M}'_y = -\frac{\mathcal{C}'}{\mathcal{A}}\mathsf{M}_x - \mathsf{M}_y, \quad \mathsf{M}'_z = -\frac{\mathcal{B}'}{\mathcal{A}}\mathsf{M}_x - \mathsf{M}_z.$$

10. Caso in cui il cimento dei vincoli è equivalente a zero. — Se sul solido girevole intorno ad un asse fisso agisce un unico impulso attivo, non nullo, $\boldsymbol{I}$, applicato in un certo suo punto P, $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{M}$ vanno rispettivamente identificati con $\boldsymbol{I}$ e $(P-O)\wedge \boldsymbol{I}$, dove ancora O designa un punto dell'asse. Riferendoci a questo caso particolare, possiamo domandarci se ed in quali condizioni sia possibile che il dato impulso, pur alterando bruscamente l'atto di moto del solido, determini lungo l'asse impulsi reattivi, che, nel loro complesso, risultino equilibrati ($\mathbf{R}'=\mathbf{M}'=0$). Questo problema può manifestamente interessare, quando, per es., si voglia mettere bruscamente in moto, con un impulso, un solido girevole intorno ad un asse, anche essendo incerta la solidità dei dispositivi che realizzano il vincolo.

In quanto si ha $\mathbf{R} = \boldsymbol{I}$, la prima e la terza delle (20′) mostrano che deve essere $I_x = I_z = 0$, ossia che:

a) L'impulso $\boldsymbol{I}$ deve agire normalmente al piano baricentrale passante per l'asse.

È allora lecito supporre addirittura che l'impulso sia applicato in un punto P di questo piano baricentrale, e il polo O dei momenti (origine delle coordinate), che sinora si è lasciato in un punto generico dell'asse di rotazione, si può scegliere nel piede della perpendicolare abbassatavi da P. Con queste convenzioni il momento $\mathbf{M}$ dell'unico impulso I direttamente applicato risulta puramente assiale o, eventualmente, nullo se l'impulso è applicato proprio sull'asse, cioè in O. Ma quest'ultima eventualità va esclusa, perchè in tal caso, riuscendo nullo il momento M_x, non vi sarebbe, in base alla (19′), alcuna brusca variazione dell'atto di moto; e allora, in virtù della (20), dovrebb'essere diverso da zero, insieme con $\mathbf{R} = I$, anche $\mathbf{R}'$. Avendosi, dunque, un momento $\mathbf{M}$ puramente assiale e dovendo essere $\mathbf{M}' = 0$, risulta dalla seconda e terza delle (21′) $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = 0$, cioè:

b) L'asse di rotazione deve essere per il solido un asse principale d'inerzia, rispetto al piede O della perpendicolare abbassata su di esso dal punto di applicazione P dell'impulso.

Resta da soddisfare alla condizione $\mathsf{R}'_y = 0$, in base alla seconda delle (20′). Se si designa con z la terza coordinata di P (distanza dall'asse fisso) si ha $\mathsf{M}_y = -zI_y$ e quindi, essendo $I_y = \mathsf{R}_y \neq 0$,

$$zz_0 = \frac{\mathcal{A}}{m} \quad \text{ossia} \quad OP \cdot OG = \frac{\mathcal{A}}{m};$$

onde si trae (VI, n. 4) che:

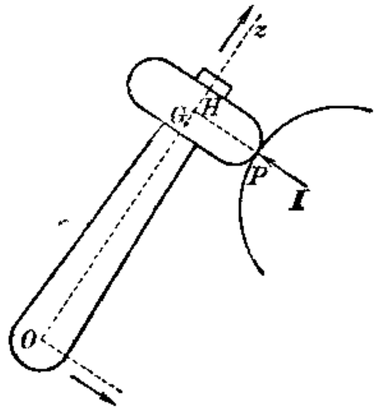
c) Il punto P deve appartenere all'asse di oscillazione del solido, corrispondente all'asse fisso.

In conclusione, ad assicurare la voluta assenza di cimento complessivo sull'asse fisso, occorrono e bastano le condizioni *a*), *b*), *c*).

Il punto P così caratterizzato dicesi *centro di percossa* relativo all'asse fisso, e la perpendicolare in P al piano baricentrale per l'asse, cioè la linea d'azione dell'impulso, *asse di percossa*.

11. Martello. — Dalle condizioni del n. prec. si possono trarre due norme teoriche per la costruzione e l'uso dei martelli.

Un martello ha generalmente un piano di simmetria, geometrica e materiale (piano della figura). Nell'atto in cui esso dà un colpo, può essere schematizzato in un solido, girevole intorno all'asse perpendicolare al piano di simmetria in un suo punto O (mano); e subisce, in un punto P della superficie battente della sua testa, un impulso diretto secondo la normale interna della superficie stessa. La posizione di P, che supporremo sempre nel piano di simmetria, dipende, oltre che dalla forma della testa del martello, dal modo in cui esso è adoperato. Ora manifestamente conviene che il martello sia costruito ed adoperato in modo che si risenta quanto meno è possibile il contraccolpo sulla mano; e ciò si può appunto tradurre nella condizione che risultino equilibrati gli impulsi reattivi destati lungo l'asse, cioè siano realizzate le circostanze *a*), *b*), *c*) precisate al n. prec.



La *a*) richiede che il martello batta in un punto P (del profilo mediano) della superficie della testa, in cui la normale risulti perpendicolare all'asse baricentrale OG.

La *b*), invece, è senz'altro soddisfatta, perchè, essendo il martello simmetrico rispetto al piano di figura, l'asse di rotazione, come perpendicolare in O a codesto piano, è certamente un suo asse principale d'inerzia rispetto ad O (X_1, n. 25), che è precisamente il piede della perpendicolare abbassata da P sull'asse stesso.

Resta da tener conto della *c*). Se si prende il piano OGP come piano yz, assumendo la semiretta OG come semiasse positivo delle z, si ha, colle notazioni del n. prec., $x_0 = y_0 = I_y = I_x = 0$, mentre z_0 e z denotano le lunghezze dei segmenti OG, OH rispettivamente; cosicchè la condizione *c*) di assenza di contraccolpo complessivo lungo l'asse è data da

$$OG \cdot OH = \frac{\mathcal{A}}{m} ;$$

ed esprime il fatto che H deve appartenere all'asse di oscillazione corrispondente all'asse Ox intorno a cui ruota il martello.

Ove si introducano, come già al n. 4 del Cap. prec., il momento d'inerzia $\mathcal{A}_g$ del martello rispetto all'asse baricentrale perpendicolare al piano di figura, con che si ha (X_1, n. 19)

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_g + mOG^2 = m(\delta^2 + OG^2) ,$$

la relazione or ora scritta si può porre sotto la forma

$$OG \cdot GH = \delta^2 .$$

In figura abbiamo immaginato che la traccia O dell'asse fosse un punto del manico del martello; ma per lo più il martello viene maneggiato in modo che si fa fulcro attorno al polso o al gomito od anche alla spalla, secondo le dimensioni e il peso del martello: basta in tal caso immaginare il punto O convenientemente spostato.

12. PENDOLO BALISTICO. — La teoria del moto impulsivo di un solido fissato per un asse trova una interessante applicazione nella misura delle velocità iniziali dei proietti. A tal fine si usa il cosiddetto *pendolo balistico*, che è un robustissimo pendolo ad asse di sospensione orizzontale, cui si assicura solidamente l'arma destinata a lanciare il proietto, in modo che l'asse di questa risulti ortogonale al piano che passa per l'asse di sospensione e il baricentro G del sistema. All'atto dello sparo, il pendolo, per l'impulso reattivo che esso subisce, si sposta dalla posizione di equilibrio e comincia ad oscillare; e qui ci proponiamo di mostrare come dalla massima ampiezza di questa oscillazione, misurabile direttamente, si possa dedurre l'incognita velocità iniziale del proietto, purchè si conoscano la massa totale m_1 del pendolo, inclusa l'arma ma non il proietto, il suo momento di inerzia $\mathcal{A}$ rispetto all'asse di sospensione, la massa m del proietto e, infine, le distanze r ed a dell'asse di sospensione rispettivamente dal baricentro G del sistema e dall'asse della bocca da fuoco.

Se si assume come verso positivo dell'asse x quello rispetto a cui il verso del rinculo appare destro e si introduce la solita anomalia θ che il piano xG forma colla verticale, si ha notoriamente $p = \dot\theta$, cosicchè per il moto impulsivo del pendolo varrà, in base alla (19') e alla circostanza che nell'istante dello sparo il pendolo è in quiete ($\dot\theta^- = 0$), l'equazione

$$\mathcal{A}\dot\theta^+ = \mathbf{M}_x, \tag{22}$$

dove $\mathbf{M}_x$ denota ancora il momento, rispetto all'asse di sospensione, dell'impulso ricevuto dal pendolo.

La susseguente fase di moto continuo oscillatorio, ove si prescinda dalla resistenza dell'aria, sarà retta dall'equazione (delle forze vive)

$$\mathcal{A}\dot\theta^2 - 2m_1 gr\cos\theta = 2E\,. \tag{23}$$

Il momento scalare $\mathbf{M}_x$ si esprime agevolmente in termini dei dati e della incognita velocità iniziale v del proietto, applicando il principio di reazione. Invero il proietto riceve un impulso, diretto secondo l'asse della bocca da fuoco, in senso sinistro rispetto alla retta orientata x, il quale è misurato, in valore assoluto, dalla quantità di moto iniziale mv; cosicchè l'impulso reattivo subito dal pendolo (impulso di rinculo) ha la stessa intensità, la stessa linea d'azione alla distanza a dell'asse x e il verso contrario. Se ne conclude

$$\mathbf{M}_x = mav$$

e dalla (22) si deduce)

$$v = \frac{\mathcal{A}}{ma}\,\dot{\theta}\,.$$

Resta dunque da calcolare la velocità angolare $\dot{\theta}$ impressa al pendolo dallo sparo, la quale non si saprebbe misurare direttamente, ma si può invece esprimere per mezzo di un'altra quantità rilevabile sperimentalmente, cioè della massima deviazione $\bar{\theta}$ dalla verticale, che il pendolo subisce nelle sue oscillazioni conseguenti allo sparo. Nota, invero, questa $\bar{\theta}$, basta ricorrere all'equazione (23) del moto continuo oscillatorio per dedurne nell'istante iniziale del moto posteriore allo sparo, cioè per $\dot{\theta} = \dot{\theta}^{+}$ e $\theta = 0$,

$$\mathcal{A}(\dot{\theta}^{+})^2 - 2m_1 gr = 2E\,,$$

e nell'istante di massima deviazione dalla verticale, cioè per $\dot{\theta} = 0$ e $\theta = \bar{\theta}$,

$$-\,2m_1 gr\cos\bar{\theta} = 2E\,;$$

cosicchè, sottraendo membro a membro e risolvendo rispetto a $\dot{\theta}^{+}$, si ottiene

$$\dot{\theta}^{+} = \sqrt{\frac{2m_1 gr(1-\cos\bar{\theta})}{\mathcal{A}}}\,,$$

e quindi

$$v = \frac{\mathcal{A}}{ma}\sqrt{\frac{2m_1 gr(1-\cos\bar{\theta})}{\mathcal{A}}} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\bar{\theta}}{ma}\sqrt{\mathcal{A} m_1 gr}\,.$$

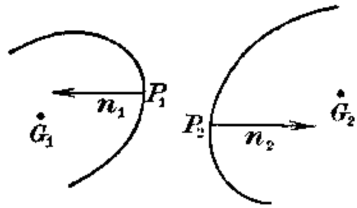
§ 3. – Cenno sull'urto senza attrito di due solidi nel caso generale.

13. Consideriamo due corpi S_1, S_2 che, essendo animati di un moto relativo qualsivoglia, cozzino ad un dato istante t_0 l'uno contro l'altro. Ciascuno di essi riceve dall'altro un certo sistema di impulsi; e si tratta di studiare come si possano calcolare le conseguenti variazioni brusche di velocità o, in altre parole, come si possano determinare, pei due corpi, gli atti di moto posteriori, quando si conoscano quegli anteriori.

Il fenomeno dell'urto è indubbiamente assai complesso; e sulle sue fasi successive, nel brevissimo intervallo di tempo τ in cui esso si svolge, si possono ripetere le considerazioni già accennate al n. 4 nel caso elementare dell'urto centrale e diretto. Ma noi, attenendoci alla schematizzazione del Poisson, cercheremo di cogliere l'aspetto complessivo del fenomeno, e supporremo anzitutto che i due corpi S_1, S_2, animati ciascuno di un atto di moto anteriore qualsivoglia, si urtino nell'istante t_0 in un sol punto P, regolare per le superficie terminali di entrambi, le quali conseguentemente, avranno ivi, al momento dell'urto, il medesimo piano tangente.

Ammessa la *perfetta levigatezza* delle due superficie, si ha come necessaria conseguenza che *per ciascun corpo il sistema degli impulsi, subìti in causa dell'urto, si riduce ad un impulso unico, applicato in P e diretto secondo la normale alla superficie, orientata verso l'interno del corpo*. E, in accordo col principio di reazione, si deve ritenere che *la intensità I dell'impulso, pur essendo a priori incognita, risulta la stessa pei due corpi.*

Ciò posto, per ciascuno dei due corpi S_j $(j = 1, 2)$, sia m_j la massa, $\boldsymbol{v}_j$ la velocità del baricentro G_j, $\boldsymbol{\omega}_j$ la velocità angolare, $\boldsymbol{K}_j$ il momento risultante baricentrale delle quantità di moto. Se denotiamo ulteriormente con $\boldsymbol{n}_j$, il versore normale *interno* alla superficie nel punto P_j in cui avviene l'urto, l'impulso di incognita intensità I, che il corpo subisce all'atto dell'urto, si può rappresentare con $I\boldsymbol{n}_j$, mentre d'altra parte il momento $\boldsymbol{K}_j$ è legato alla corrispondente velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_j$ dalla rispettiva omografia di inerzia σ_j, talchè si avrà



$$\boldsymbol{K}_j = \sigma_j(\boldsymbol{\omega}_j) \qquad (j = 1, 2),$$

od anche, proiettando sugli assi principali di inerzia relativi al baricentro e designando con $\mathcal{A}_j$, $\mathcal{B}_j$, $\mathcal{C}_j$ i corrispondenti momenti (principali) d'inerzia, con p_j, q_j, r_j le analoghe componenti di $\boldsymbol{\omega}_j$,

$$K_{j|x} = \mathcal{A}_j p_j\,, \quad K_{j|y} = \mathcal{B}_j q_j\,, \quad K_{j|z} = \mathcal{C}_j r_j \qquad (j = 1, 2).$$

Con queste notazioni, le equazioni cardinali del moto impulsivo (7), (16), applicate a ciascuno dei due corpi, danno le quattro equazioni vettoriali

$$\text{(24)} \qquad m_j \Delta \boldsymbol{v}_j = I\boldsymbol{n}_j\,, \qquad\qquad (j = 1, 2),$$

$$\text{(25)} \qquad \Delta \boldsymbol{K}_j = I(P_j - G_j) \wedge \boldsymbol{n}_j\,,$$

che, risolte rispetto a $\Delta\boldsymbol{v}_j$, $\Delta\boldsymbol{\omega}_j$, assumono l'aspetto

$$\text{(24')} \qquad \Delta \boldsymbol{v}_j = \frac{1}{m_j} I\boldsymbol{n}_j\,, \qquad\qquad (j = 1, 2),$$

$$\text{(25')} \qquad \Delta \boldsymbol{\omega}_j = I\sigma^{-1}[(P_j - G_j) \wedge \boldsymbol{n}_j]\,,$$

dove, contrassegnando al solito con $-$ e $+$ le caratteristiche cinematiche relative ai due atti di moto, rispettivamente anteriore e posteriore, si intende

$$\Delta \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_j^+ - \boldsymbol{v}_j^-, \qquad \Delta \boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_j^+ - \boldsymbol{\omega}_j^- \qquad (j = 1, 2).$$

Osserviamo subito che le (24′), in quanto l'impulso è diretto secondo la normale comune alle superficie dei due corpi, implicano per ciascuno di questi l'*invariabilità, di fronte all'urto, della componente tangenziale della velocità del baricentro.*

Ma è a priori manifesto che le equazioni (24′), (25′) non risolvono ancora completamente il problema, giacchè nelle espressioni, che esse forniscono per le variazioni dei vettori caratteristici $\boldsymbol{v}_j$, $\boldsymbol{\omega}_j$, compare ancora la incognita intensità I dell'impulso; e a determinare questa I è necessario introdurre qualche nuova condizione quantitativa, che naturalmente non si potrà desumere se non dalla esperienza. A tal fine cominciamo col considerare la velocità di cui, per ciascun corpo, è animato, in un generico istante, prima o dopo l'urto, il punto P_j e che è notoriamente data per mezzo dei corrispondenti vettori caratteristici da

$$\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{\omega}_j \wedge (P_j - G_j) \qquad (j = 1, 2);$$

e denotatane con ν_j la componente normale, secondo la direzione orientata del versore $\boldsymbol{n}_j$, cioè la

$$(26) \qquad \begin{aligned} \nu_j &= \boldsymbol{v}_j \times \boldsymbol{n}_j + [\boldsymbol{\omega}_j \wedge (P_j - G_j)] \times \boldsymbol{n}_j = \\ &= \boldsymbol{v}_j \times \boldsymbol{n}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times [(P_j - G_j) \wedge \boldsymbol{n}_j], \end{aligned}$$

introduciamo la quantità scalare

$$w = \nu_1 + \nu_2 .$$

Se si tien conto che i due versori $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, orientati ciascuno verso l'interno del rispettivo corpo, risultano, nell'istante t_0 dell'urto, direttamente opposti, si riconosce che la w misura, subito prima e subito dopo t_0, la componente della velocità (relativa) $\dot{P}_2 - \dot{P}_1$ di P_2 rispetto a P_1, secondo la direzione orientata di $\boldsymbol{n}_2$ (o ciò che è lo stesso, la componente secondo $\boldsymbol{n}_1$ della velocità di P_1 rispetto a P_2); e, in quanto la natura del fenomeno richiede che immediatamente prima dell'urto i due corpi tendano ad avvicinarsi, dovremo ritenere $w^- < 0$. Se allora, rinunciando ad analizzare quei complicati fenomeni di deformazione e di conseguente restituzione (parziale o totale), che accompagnano l'urto, ci accontentiamo di valutarne complessivamente l'effetto, appare naturale di generalizzare l'ipotesi del NEWTON (n. 4), ammettendo che l'urto determini l'inversione di senso della velocità relativa normale dei due punti P_1, P_2 e, simultaneamente, una riduzione della rispettiva grandezza. In altre parole, siamo condotti a porre

$$w^+ = -ew^- , \tag{27}$$

dove e denota il *coefficiente di restituzione*, che, come si è detto al n. 4, è compreso tra 0 ed 1 e dipende esclusivamente dalla costituzione fisica dei corpi che si urtano. Per $e = 0$ (*corpi anelastici*) la velocità relativa normale posteriore w^+ si annulla, e anche qui i due corpi dopo l'urto restano aderenti; mentre nell'altro caso estremo $e = 1$ (*corpi perfettamente elastici*) la velocità relativa normale conserva, dopo l'urto, lo stesso valore assoluto di prima, ma si inverte di senso (*rimbalzo*).

In ogni caso è appunto questa nuova equazione empirica (27), che ci permetterà di risolvere completamente il problema. Da essa intanto risulta

$$\Delta w = -(1 + e)w^- . \tag{27'}$$

D'altra parte basta ricordare che nell'urto i versori $\boldsymbol{n}_i$ non si alterano e i punti P_i, G_i non si spostano per ottenere, sostituendo nella

$$\Delta w = \Delta v_1 - \Delta v_2$$

a Δv_1, Δv_2 le loro espressioni fornite dalle (26) e tenendo conto delle (24'), (25'), l'equazione

$$\Delta w = k^2 I , \tag{28}$$

dove con k^2 si è denotata la costante essenzialmente positiva

$$k^2 = \sum_1^2{}_i \left\{ \frac{1}{m_i} + \sigma_i^{-1}[(P_i - G_i) \wedge \boldsymbol{n}_i] \times [(P_i - G_i) \wedge \boldsymbol{n}_i] \right\} ,$$

la quale, ove si denotino con α_i, β_i, γ_i le componenti di $\boldsymbol{n}_i$ e con x_i, y_i, z_i le coordinate di P_i rispetto alla corrispondente terna baricentrale di inerzia, ammette l'espressione esplicita in termini dei dati

$$k^2 = \sum_1^2{}_i \left\{ \frac{1}{m_i} + \frac{(y_i\gamma_i - z_i\beta_i)^2}{\mathcal{A}_i} + \frac{(z_i\alpha_i - x_i\gamma_i)^2}{\mathcal{B}_i} + \frac{(x_i\beta_i - y_i\alpha_i)^2}{\mathcal{C}_i} \right\} .$$

Dal confronto delle (27'), (28) si trae

$$I = -\frac{1 + e}{k^2} w^- \tag{29}$$

e basta sostituire questo valore di I nelle (24′), (25′) per ottenere le formule risolutive del problema.

L'urto fra i due corpi si dice *diretto*, quando le velocità baricentrali anteriori $\boldsymbol{v}_j^-$ hanno entrambe la direzione della normale comune alle due superficie nel punto P; e in tal caso la già notata invariabilità della componente tangenziale della $\boldsymbol{v}_j$ implica che anche le velocità posteriori $\boldsymbol{v}_j^+$ avranno quella stessa direzione.

Si dice invece che l'urto è *centrale*, se la normale comune alle superficie dei due corpi in P contiene i rispettivi baricentri, ed è questo il solo caso possibile quando i due corpi che si urtano sono due sfere omogenee.

Si ha allora $(P_j - G_j) \wedge \boldsymbol{n}_j = 0$, talchè dalle (25′) risulta $\Delta\boldsymbol{\omega}_j = 0$; ciò vuol dire che nell'urto centrale le velocità angolari $\boldsymbol{\omega}_j$ dei due corpi si conservano inalterate, onde consegue che la velocità di ogni punto Q di uno qualsiasi dei due corpi, la quale è notoriamente data da

$$\boldsymbol{v}_j + (Q - G_j) \wedge \boldsymbol{\omega}_j \qquad (j = 1, 2),$$

subisce nell'urto la stessa brusca variazione di velocità del corrispondente baricentro. Perciò, in particolare, nell'urto centrale resta invariata la componente tangenziale (cioè secondo il piano tangente comune alle superficie dei due corpi) della velocità di ogni singolo punto.

14. Urto contro una parete. — Come già nell'ipotesi elementare dell'urto centrale e diretto (n. 5), il problema generale dell'urto di un corpo S_1 contro una parete fissa, si fa rientrare come caso limite nel problema discusso al n. prec., assimilando S_2 ad un corpo di massa m_2 grandissima, e al limite infinita, il quale sia in quiete e fisso ($\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 = 0$). Sussistono allora le (24′), (25′) per $j = 1$, e seguitano a valere anche le (27), (29), purchè vi si interpreti la w come componente secondo $\boldsymbol{n}_1$ della velocità assoluta di P_1.

La (27) mette in luce il rimbalzo e la (29) fornisce anche qui il valore di I che bisogna sostituire nelle (24′), (25′) di indice $j = 1$ per ottenere le formule risolutive.

Se ci limitiamo a considerare l'urto centrale, che è il solo possibile se si tratta di una sfera lanciata contro una parete, abbiamo che, come nell'analogo urto fra due corpi, la componente tangenziale della velocità baricentrale rimane inalterata, mentre la componente normale, per la legge del Newton, risulta invertita di senso e ridotta di intensità nel rapporto da 1 ad e. Perciò varia inversamente nel rapporto da e ad 1 il rapporto della componente tangenziale alla normale, cioè la tangente dell'angolo della velocità colla normale alla parete in P. Si riconosce così che *per un corpo imperfettamente elastico, nell'urto centrale contro una parete, l'angolo di riflessione è maggiore di quello di incidenza*, e si ha l'eguaglianza di questi due angoli nel caso ideale di corpi perfettamente elastici ($e = 1$).

§ 4. – Teoremi generali sul moto impulsivo.

15. Equazione simbolica del moto impulsivo. — Consideriamo un sistema materiale qualsiasi di N punti P_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) soggetto a vincoli privi di attrito; e limitiamoci qui all'ipotesi che codesti vincoli siano tutti bilaterali, pur avvertendo che nella teoria del moto impulsivo e, in particolare, in quella degli urti, i vincoli unilaterali hanno un interesse tutto particolare.

Come già si è detto al § 1, anche in quei brevissimi intervalli di tempo τ in cui sul sistema agiscono percosse, seguitano a sussistere i postulati fondamentali della dinamica e, quindi, resta valida anche l'equazione simbolica del moto che tutti li riassume (V, n. 19), cioè la

$$\sum_1^N{}_i(\boldsymbol{F}_i - m\boldsymbol{a}_i) \times \delta P_i = 0\,, \tag{30}$$

dove naturalmente nella forza totale $\boldsymbol{F}_i$, direttamente applicata al generico punto P_i, vanno incluse, istante per istante, anche le eventuali percosse attive.

Riferendoci appunto ad un intervallo di tempo da t_0 a $t_0 + \tau$, in cui si abbiano effettivamente siffatte percosse, introduciamo gli N impulsi totali attivi

$$\boldsymbol{I}_i = \lim_{\tau \to 0} \int_{t}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F}_i dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

e integriamo la (30) rispetto al tempo da t_0 a $t_0 + \tau$, ammettendo che, in codesto brevissimo intervallo di tempo, i δP_i si possano trattare come indipendenti da t. Se dopo codesta integrazione si fa tendere τ allo zero e si nota che il

$$\lim_{\tau \to 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{a}_i dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

dà la solita variazione brusca $\Delta \boldsymbol{v}_i$ della velocità del generico punto P_i, si perviene alla

$$\sum_{1}^{N} {}_i (\boldsymbol{I}_i - m_i \Delta \boldsymbol{v}_i) \times \delta P_i = 0 , \tag{31}$$

che è la cosiddetta ***equazione simbolica del moto impulsivo.***

Essa deve sussistere per ogni sistema di spostamenti infinitesimi δP_i, compatibili coi vincoli nella ipotesi, già esplicitamente applicata nella precedente integrazione, che nel brevissimo intervallo di tempo, in cui agiscono le percosse, i vincoli si conservino (sensibilmente) inalterati.

Si badi bene che ciò non esclude la possibilità che intervengano, simultaneamente agli impulsi, delle brusche modificazioni dei vincoli. Soltanto, in accordo colla ammessa invariabilità dei legami, in ogni brevissimo intervallo di tempo τ in cui agiscono percosse, noi ammetteremo che, in tutti i casi, ciascuna delle eventuali modificazioni brusche dei vincoli si possa considerare o come immediatamente anteriore o come immediatamente posteriore alla brevissima durata del fenomeno di moto impulsivo.

Così, per es., se per un grave liberamente cadente si fissano improvvisamente uno o due punti, si introducono dei vincoli (fissità di un punto o di un asse) per effetto dei quali, almeno in generale, debbono determinarsi delle brusche variazioni di velocità, perchè l'atto di moto anteriore del corpo non sarà, per lo più, quello spettante ad un solido con un punto o con un asse fisso. In questo caso la improvvisa modificazione dei vincoli va ritenuta anteriore al moto impulsivo, e la (31) si deve applicare ai soli spostamenti virtuali, compatibili coi vincoli bruscamente introdotti, e, beninteso, tenendo conto che, in questo caso speciale, non intervengono impulsi attivi ($\boldsymbol{I}_i = 0$).

Similmente, se in un solido ha luogo una esplosione, schematizzabile in un sistema di impulsi, tutti di origine interna, si determina una brusca soppressione di vincoli, in quanto, anzichè 6 gradi di libertà, se ne avranno, dopo l'esplosione, $6N$, se N è il numero dei frammenti; e gli spostamenti virtuali da introdurre nella (31) andranno riferiti alle condizioni del sistema, quale è dopo la brusca modificazione dei vincoli.

Invece nei fenomeni di urto, di cui ci siamo occupati nel § prec., la condizione di contatto fra i due solidi, o fra il solido e la parete, vien meno quando l'urto è già avvenuto, cosicchè si ha una brusca soppressione di vincolo, posteriore al fenomeno impulsivo.

Se i vincoli di cui devesi tener conto nello studio del moto impulsivo, e quindi nella applicazione della (31), si conservano inalterati durante il moto posteriore, per un intervallo di tempo anche breve ma finito, successivo all'istante $t_0 + \tau$, essi diconsi ***persistenti***.

Così, tornando agli esempi pocanzi addotti, sarà da considerarsi persistente la fissità, bruscamente imposta, di un punto o di un asse per un grave cadente, non la condizione di contatto nell'urto.

Accenniamo, a titolo di notizia, come, almeno nel caso dei sistemi olonomi, l'equazione simbolica (31) conduca alla univoca determinazione dell'atto di moto posteriore, quando sia conosciuto quello anteriore, nonchè, beninteso, il sistema degli impulsi $\boldsymbol{I}_i$, direttamente applicati.

Qui vogliamo trarre dalla (31) alcune conseguenze di carattere generale, e a tale scopo dobbiamo anzitutto precisare, dal punto di vista formale, le condizioni che caratterizzano gli spostamenti virtuali δP_i.

Ricordiamo (VI$_1$, nn. 4, 8) che se il sistema considerato è soggetto ad l vincoli bilaterali olonomi, espressi in coordinate cartesiane dalle

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_N) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, l).$$

queste implicano, ad ogni istante, una limitazione non soltanto per la configurazione del sistema, ma anche pei suoi spostamenti possibili; e quest'ultima limitazione si traduce nelle

$$\sum_{1}^{N}{}_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} dz_i\right) + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, l),$$

che divise per dt diventano

$$\sum_{1}^{N}{}_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \dot{z}_i\right) + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, l).$$

Si tratta dunque di un sistema di relazioni lineari (non omogenee, se i vincoli dipendono dal tempo) nelle componenti delle velocità $\boldsymbol{v}_i$ dei singoli punti del sistema.

Qui aggiungiamo (pur senza indugiarci in più precisi chiarimenti) che anche i vincoli bilaterali non olonomi (o, come si suol dire, *anolonomi*), quali si presentano nei sistemi materiali *concretamente realizzabili*, si traducono in relazioni lineari (generalmente non omogenee) fra le velocità possibili dei punti del sistema, con la differenza essenziale, rispetto al caso dei vincoli olonomi, che siffatte relazioni non sono deducibili, per derivazione rispetto al tempo, da equazioni intercedenti fra le coordinate dei vari punti (ed, eventualmente, il tempo).

Insomma si può dire che i vincoli bilaterali, olonomi o no, imposti agli atti di moto di un sistema, sono sempre esprimibili per mezzo di equazioni del tipo

$$B_k(\boldsymbol{v}) = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{32}$$

dove le $B_k(\boldsymbol{v})$ rappresentano simbolicamente altrettante funzioni lineari omogenee delle componenti delle velocità $\boldsymbol{v}_i$ dei punti del sistema, i cui coefficienti, al pari degli scalari b_k a secondo membro, sono funzioni conosciute del posto ed, eventualmente, del tempo, cosicchè, nel brevissimo tempuscolo τ che ci interessa, vanno considerate come addirittura costanti.

In base alla definizione di spostamento virtuale, i vincoli caratteristici dei δP_i sono espressi dalle corrispondenti equazioni lineari ed omogenee

$$B_k(\delta P) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r); \tag{33}$$

e per talune deduzioni, che abbiamo in vista, importa rilevare che, mentre le determinazioni $\boldsymbol{v}_i^-$ delle velocità anteriori possono benissimo non soddisfare alle (32), in quanto queste equazioni si riferiscono all'intervallo di tempo τ, nel quale le condizioni di vincolo possono non esser più quelle stesse del moto anteriore, le $\boldsymbol{v}_i^+$, che in certo modo riflettono gli effetti di tutto ciò che avviene in codesto tempuscolo τ, costituiscono necessariamente una soluzione delle (32).

Se poi si considera, in astratto, un qualsiasi atto di moto $\boldsymbol{v}_i$ compatibile colle (32) (coincidente o no coll'atto posteriore) e gli si attribuiscono delle variazioni $\delta\boldsymbol{v}_i$ che rispettino codeste condizioni, le $\delta\boldsymbol{v}_i$, per la natura lineare delle (32), soddisfano per parte loro alle corrispondenti equazioni omogenee

$$B_k(\delta\boldsymbol{v}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r); \tag{33'}$$

le quali, salvo lo scambio materiale delle incognite, si identificano colle (33), che caratterizzano gli spostamenti virtuali δP_i.

16. Teorema del Robin [1]. — Sia $\boldsymbol{v}_i$ un generico atto di moto compatibile coi vincoli (32) e introduciamo la funzione quadratica, in generale non omogenea, nelle $\boldsymbol{v}_i$

$$G = \frac{1}{2}\sum_1^N{}_i \frac{1}{m_i}[\boldsymbol{I}_i - m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i^-)]^2 , \tag{34}$$

riguardandovi le $\boldsymbol{v}_i$ come soluzioni quali si vogliono delle (32). Il differenziale totale di questa funzione, in quanto vi si considerino come prefissati gli impulsi $\boldsymbol{I}_i$ e le velocità anteriori $\boldsymbol{v}_i^-$, è dato da

$$\delta G = -\sum_1^N{}_i [\boldsymbol{I}_i - m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i^-)] \times \delta \boldsymbol{v}_i \tag{35}$$

e quindi si annulla, quando alle $\boldsymbol{v}_i$ si sostituiscono le velocità posteriori $\boldsymbol{v}_i^+$ soddisfacenti non soltanto alle (32), ma anche alla condizione simbolica (31). Ciò val quanto dire che la corrispondente determinazione G^+ della G è stazionaria.

Ma è facile riconoscere che si tratta più precisamente di un minimo, rendendo esplicita la differenza $G - G^+$. A tal fine partiamo dalla identità,

$$\frac{1}{2m_i}[\boldsymbol{I}_i - m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i^-)]^2 - \frac{1}{2m_i}[\boldsymbol{I}_i - m_i(\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}^-)]^2 =$$

$$= \boldsymbol{I}_i \times (\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i) + \frac{1}{2} m_i[(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i^-)^2 - (\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i^-)^2] .$$

Ponendo $\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i^+ = \delta \boldsymbol{v}_i$ e ricordando che $\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i^- = \Delta \boldsymbol{v}_i$, il secondo membro si può scrivere

$$-\boldsymbol{I}_i \times \delta \boldsymbol{v}_i + \frac{1}{2} m_i(\delta \boldsymbol{v}_i + 2\Delta \boldsymbol{v}_i) \times \delta \boldsymbol{v}_i ,$$

onde risulta

$$\frac{1}{2m_i}[\boldsymbol{I}_i - m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i^-)]^2 - \frac{1}{2m_i}[\boldsymbol{I}_i - m_i(\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i^-)]^2 =$$

$$= -(\boldsymbol{I}_i - m_i \Delta \boldsymbol{v}_i) \times \delta \boldsymbol{v}_i + \frac{1}{2} m_i (\delta \boldsymbol{v}_i)^2 .$$

---

[1] Gustavo Robin, n. a Parigi nel 1855, m. ivi nel 1897. Spirito originale e penetrante, portò notevoli contributi di risultati e di metodi non solo alla teoria degli impulsi, bensì anche alla Termodinamica, alla Elettrostatica e all'indirizzo critico della Teoria delle funzioni. Le sue opere sono raccolte in tre volumi (Parigi, 1899-1903).

Sommando rispetto all'indice i da 1 ad N, si ottiene a primo membro $G - G^+$, mentre il primo termine a secondo membro va a zero per l'osservazione finale del n. prec. Rimane quindi

$$G = G^+ + \frac{1}{2}\sum_1^N{}_i\, m_i(\delta v_i)^2\,,$$

e si perviene al *teorema del* ROBIN: ***L'incognito atto di moto posteriore è quello, che rende minima la funzione G, in confronto di tutti gli atti di moto compatibili coi vincoli*** (32).

17. COROLLARIO DEL TEOREMA DEL ROBIN. TEOREMA DI LORD KELVIN [1]. — Supponiamo, in particolare, che non vi siano impulsi direttamente applicati, vale a dire che il fenomeno sia esclusivamente dovuto ad una brusca introduzione di vincoli (irrigidimento, fissazione di un punto o di un asse, ecc.). L'espressione della funzione G si riduce in tal caso ad

$$\frac{1}{2}\sum_1^N{}_i\, m_i(\Delta v_i)^2\,,$$

cosicchè *l'atto di moto posteriore è, fra tutti gli atti di moto compatibili coi vincoli, quello che rende minima la forza viva dovuta alle brusche variazioni di velocità.*

Un enunciato più particolare ancora, ma più espressivo, si ha nel cosiddetto *teorema di Lord* KELVIN. Ad esso si perviene, sup-

---

[1] WILLIAM THOMSON, creato pari d'Inghilterra come Lord KELVIN of Largs nel 1892, nacque a Belfast (Irlanda) nel 1824, morì a Glasgow nel 1907, e fu sepolto nell'Abbazia di Westminster accanto al NEWTON « his great exemplar », come dice il LARMOR (Proc. of the R. S. of London, Vol. 81, A). Fu professore di filosofia naturale a Glasgow dal 1846 al 1899; e membro, si può dire, di tutte le Accademie del mondo.

Sulle orme del CARNOT e del FOURIER fu tra i fondatori della energetica generale. Nel campo dell'elettromagnetismo introdusse il celebre suo metodo delle immagini, approfondì per il primo il regime variabile delle correnti elettriche, in particolare le scariche dei condensatori e la propagazione nei cavi. Sommo anche come sperimentatore, inventò dispositivi tecnici e strumenti di precisione, ed ebbe massima parte nella posa del primo cavo transatlantico. Spaziò con inesauribile genialità in tutti i campi della filosofia naturale, conseguendo classici risultati specie nella idrodinamica e nella geofisica e ideando modelli meccanici dei fenomeni più svariati e rappresentazioni suggestive della struttura della materia. Anche nel suo trattato in collaborazione col TAIT, pur colla misura imposta da una esposizione sistematica, si trovano profuse vedute originali e feconde.

ponendo che, sempre in assenza di impulsi direttamente applicati, il sistema sia originariamente in quiete ($v_i^- = 0$) e i vincoli addizionali bruscamente introdotti consistano nell'imporre ad un certo numero di punti certe velocità prefissate ($v_i^+ = V_i$), naturalmente compatibili cogli altri vincoli (32), di cui si deve tener conto.

In tal caso la G non è altro che la forza viva assunta dal sistema per effetto della indicata imposizione di velocità e si ha la proprietà che *questa forza viva, per l'effettivo atto di moto posteriore, è minima in confronto di ogni altro atto di moto compatibile coi vincoli* (incluse fre questi vincoli le velocità imposte).

18. Vincoli reversibili. Teorema del Carnot [1]. — Nelle ipotesi più generali le equazioni lineari (32) dei vincoli non sono omogenee, e ne abbiamo avuto un esempio per così dire tipico nei vincoli di velocità imposta, considerati nel teorema di Lord Kelvin (n. prec.). Ma nei casi più comuni e, in particolare, quando si tratta di vincoli, olonomi o no, indipendenti dal tempo, le equazioni (32) risultano prive di secondo membro, talchè consentono, insieme con ogni atto di moto compatibile con esse, l'atto di moto direttamente opposto. Per questa ragione i vincoli espressi da equazioni lineari ed omogenee diconsi *reversibili*.

Quando tutti i vincoli, cui è assoggettato un sistema, sono reversibili, si verifica la circostanza notevole che le equazioni (32) si identificano, all'infuori della designazione delle incognite, colle equazioni (33), cosicchè ogni atto di moto compatibile coi vincoli dà luogo ad uno spostamento virtuale e viceversa; e l'equazione simbolica del moto impulsivo si può scrivere

$$(31') \qquad \sum_1^N {}_i(\boldsymbol{I}_i - m_i \Delta \boldsymbol{v}_i) \times \boldsymbol{v}_i = 0 ,$$

designando con le $\boldsymbol{v}_i$ le velocità di un generico atto di moto compatibile coi vincoli.

Se in particolare a codeste $\boldsymbol{v}_i$ si attribuiscono le determinazioni $\boldsymbol{v}_i^+$ corrispondenti all'effettivo atto di moto posteriore e, sup-

---

[1] Lazzaro Carnot, n. a Nolay (Côte d'Or) nel 1753, m. a Magdeburgo nel 1823. Organizzò gli eserciti della Repubblica francese durante la Convenzione, ebbe grandi onori ed uffici elevatissimi anche nel periodo napoleonico; morì in esilio. Fu tra i pionieri della Meccanica applicata alle macchine e della Geometria proiettiva. Ebbero meritatamente larga notorietà anche le sue *Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal*, la cui prima edizione risale al 1797.

posti ancora nulli gli impulsi direttamente applicati, si tien conto delle identità

$$\Delta \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_i^+ = (\boldsymbol{v}_i^+)^2 - \boldsymbol{v}_i^- \times \boldsymbol{v}_i^+ = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_i^+)^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_i^-)^2 + \frac{1}{2}(\Delta \boldsymbol{v}_i)^2 ,$$

si trae dalla (31′)

$$-\frac{1}{2}\sum_1^N{}_i\, m_i(\boldsymbol{v}_i^+)^2 + \frac{1}{2}\sum_1^N{}_i\, m_i(\boldsymbol{v}_i^-)^2 = \frac{1}{2}\sum_1^N{}_i\, m_i(\Delta \boldsymbol{v}_i)^2 ,$$

cioè, indicando con T la forza viva del sistema e con Θ la forza viva corrispondente alle brusche variazioni di velocità,

$$-\Delta T = \Theta .$$

Di qui il *teorema del* CARNOT (cfr. n. 6): *Per ogni sistema materiale, soggetto a vincoli privi di attrito e reversibili, in cui, senza intervento di impulsi direttamente applicati, si determinino brusche variazioni di velocità, si ha sempre una perdita complessiva di forza viva, che eguaglia la forza viva dovuta a codeste variazioni di velocità.*

19. CASO DI UN'ESPLOSIONE. — In tal caso intervengono, almeno in taluni elementi materiali P del sistema, impulsi di natura interna a due a due direttamente opposti; e questi impulsi provocano per lo più una disgregazione degli elementi, su cui agiscono. Ma siccome nell'atto di moto anteriore la disgregazione non aveva ancora avuto luogo, il corrispondente lavoro degli impulsi

$$dt\sum_1^N{}_i\, \boldsymbol{I}_i \times \boldsymbol{v}_i$$

è necessariamente nullo, in quanto consta di addendi a due a due eguali in valore assoluto e di segno contrario; e non è forse inutile avvertire esplicitamente che altrettanto non potrebbe dirsi dell'analogo lavoro corrispondente all'atto di moto posteriore, perchè gli elementi scissi dalla disgregazione, a cui risultano applicati due generici impulsi direttamente opposti, si trovano animati di velocità differenti.

Se la (31′) si riferisce all'atto di moto anteriore, ponendovi $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i^-$, essa, per quanto si è or ora detto, si riduce a,

$$\sum_1^N{}_i\, m_i \Delta \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_i^- = 0 ;$$

e a questa equazione, con una trasformazione perfettamente analoga a quella del n. prec. (salvo lo scambio delle v_i^+ colle v_i^-) si può dar l'aspetto

$$\Delta T = \Theta .$$

Si conclude dunque che: *In un sistema materiale a vincoli privi di attrito e reversibili, una esplosione produce un guadagno di forza viva, che eguaglia la forza viva dovuta alle brusche variazioni di velocità degli elementi del sistema.*

20. Teorema di Lagrange-Bertrand [1]. — Chiuderemo queste considerazioni generali con una proposizione, che è nota sotto il nome di *teorema del* Bertrand, ma che in un caso particolare risale al Lagrange. Essa confronta la forza viva T^+ con cui effettivamente si inizia il moto posteriore, impresso ad un sistema a vincoli reversibili da impulsi attivi quali si vogliano, con la forza viva T' che competerebbe allo stesso sistema, sotto gli stessi impulsi, qualora gli si imponessero bruscamente nuovi vincoli, pur essi reversibili; ed afferma che *la T^+ è massima rispetto a tutte le possibili T'.*

Per dimostrare questo teorema basta riprendere la equazione simbolica sotto la sua forma (31), valida pei sistemi a vincoli reversibili, e applicarla una prima volta al sistema quale è effettivamente dato, una seconda volta al sistema quale sarebbe dopo l'ipotetica imposizione di nuovi vincoli. Indicando con $\boldsymbol{v}_i'$ le velocità posteriori in questo secondo caso, con che sarà da porre $\Delta \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i' - \boldsymbol{v}_i^-$, e notando che in entrambi i casi è lecito assumere $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i'$, in quanto l'atto di moto $\boldsymbol{v}_i'$ è certamente compatibile sia coi vincoli preesistenti che con quelli addizionali, avremo

$$\sum_1^N{}_i\,(\boldsymbol{I}_i - m_i[\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i^-])\times \boldsymbol{v}_i' = 0\,,$$

$$\sum_1^N{}_i(\boldsymbol{I}_i - m_i[\boldsymbol{v}_i' - \boldsymbol{v}_i^-])\times \boldsymbol{v}_i' = 0\,.$$

---

(1) Giuseppe Bertrand, n. a Parigi nel 1832, m. ivi nel 1900. Fu professore all'École Polytechnique e al Collège de France, per oltre 50 anni, e Segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze di Parigi dal 1874 alla sua morte. Matematico acuto e brillante, fu cultore eminente di Meccanica. Pubblicò, oltre ad un grande trattato di Calcolo e a libri scolastici largamente diffusi, alcuni dei suoi corsi del Collegio di Francia (sulla Termodinamica, sul Calcolo delle probabilità, sulla Teoria matematica della elettricità). In tutta la sua produzione rifulgono, con l'originalità del pensiero, doti singolari di espositore attraente ed efficace.

Di qui, sottraendo membro a membro e tenendo conto delle identità

$$(\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i') \times \boldsymbol{v}_i' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_i^+)^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_i')^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i')^2 ,$$

si trae l'equazione

$$T^+ = T' + \frac{1}{2}\sum_1^N{}_i\, m_i(\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i')^2 ,$$

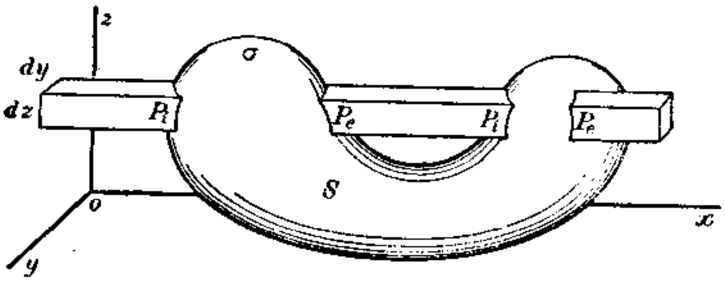
la quale mostra appunto che la T' non è mai maggiore di T^+, e si identifica con essa solo quando il generico atto di moto compatibile coi vincoli, originari ed addizionali, coincide coll'effettivo atto di moto posteriore.

Capitolo VIII.

NOZIONI SUI CAMPI VETTORIALI

§ 1. – Lemma di Green nello spazio e nel piano.

1. Sia $U(x, y, z)$ una funzione uniforme, finita e continua, insieme alle sue derivate prime, in tutti i punti $P(x, y, z)$ di un campo S, limitato da una o più superficie chiuse. Queste superficie si designeranno genericamente con σ, talchè σ rappresenterà il contorno completo di S.



Essendo, per ipotesi, $\partial U/\partial x$ funzione finita e continua, avrà senso perfettamente determinato l'integrale triplo

$$\iiint \frac{\partial U}{\partial x}\, dx\, dy\, dz\,,$$

esteso a tutto il campo S, che si scrive anche, più semplicemente,

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial x}\, dS\,.$$

Per il calcolo di questo integrale si può immaginare di eseguire prima la integrazione rispetto ad x fra limiti convenienti, poi, successivamente, quelle rispetto alle altre due variabili. Dal punto di vista geometrico, ciò equivale a dividere il campo S in prismi elementari, mediante piani paralleli ai piani coordinati $y = 0$, $z = 0$, effettuando per ciascun prisma la integrazione lungo quella parte di esso, che cade entro S e sommando poi (integrazione rispetto ad y e z) i risultati parziali così ottenuti.

Un generico prisma incontra il piano coordinato yz secondo un rettangolo elementare $dydz$, ed il contorno σ di S secondo certe areole elementari $d\sigma$, che sono in numero pari, perchè, in conseguenza della ipotesi che il contorno σ sia chiuso, ad ogni areola, che il prisma determina sopra σ, penetrando in S, deve fare riscontro un'altra areola, attraverso cui il prisma esce da S. Chiameremo genericamente P_i i punti di ingresso, P_e quelli di egresso. La porzione di integrale

$$\iiint \frac{\partial U}{\partial x}\, dx dy dz$$

relativa al nostro prisma è il prodotto di $dydz$ per l'integrale

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}\, dx\,,$$

il quale va esteso da ciascun P_i al P_e immediatamente consecutivo. Ora, per ogni intervallo P_iP_e, quest'ultimo integrale si riduce alla differenza $U_{P_e} - U_{P_i}$ dei valori della funzione U negli estremi dell'intervallo; sarà dunque in generale

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}\, dx = \Sigma(U_{P_e} - U_{P_i})\,,$$

la somma essendo relativa alle varie coppie P_e, P_i, le quali si riducono naturalmente ad una sola nel caso più comune, in cui il prismetto elementare di base $dydz$ incontra il contorno in due soli punti. Comunque, ne discende

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial x}\, dS = \iint dydz\, \Sigma(U_{P_e} - U_{P_i})\,,$$

dove l'integrale del secondo membro va esteso a tutto il contorno apparente del campo S sul piano $x = 0$.

Fissiamo un generico punto (P_i o P_e) di σ e l'areola elementare $d\sigma$, cui esso appartiene. La proiezione di $d\sigma$ sul piano $x = 0$ è, per costruzione, $dydz$; siccome $d\sigma$, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, si può considerare piana, $dydz$ sarà data dal prodotto di $d\sigma$ per il coseno dell'angolo, formato dai piani delle due aree, o ciò che è lo stesso, dalle rispettive normali; e tale coseno va naturalmente preso in valore assoluto, poichè gli elementi di area sono quantità essenzialmente positive. Perciò, se designamo con α, β, γ i coseni degli angoli che la normale al contorno, volta verso l'interno del campo, fa colle direzioni positive degli assi coordinati, avremo

$$dydz = d\sigma \,|\,\alpha\,|\,,$$

e, più precisamente,

$$dydz = \alpha d\sigma$$

in ogni punto P_i;

$$dydz = -\,\alpha d\sigma$$

in ogni punto P_e.

Ora

$$dydz\,\Sigma(U_{P_e} - U_{P_i}) = \Sigma U_{P_e} dydz - \Sigma U_{P_i} dydz\ ;$$

e, se nella prima sommatoria a secondo membro si sostituisce il $dydz$, che moltiplica ogni U_{P_e}, col suo valore $-\,\alpha d\sigma$ relativo a quel P_e, ed analogamente, nella seconda sommatoria, col valore $\alpha d\sigma$, relativo al corrispondente P_i, avremo:

$$dydz\,\Sigma(U_{P_e} - U_{P_i}) = -\,\Sigma U \alpha d\sigma\,,$$

intendendo che la sommatoria del secondo membro abbracci tutte le areole $d\sigma$, che sono determinate sopra σ da uno stesso prisma elementare, ed hanno perciò la medesima proiezione $dydz$ sul piano $x = 0$. Quando si fa percorrere all'elemento $dydz$ tutta l'area racchiusa nel contorno apparente di S sul piano $x = 0$, si vengono a considerare (ciascuno una volta soltanto) tutti gli elementi $d\sigma$ della superficie (o del sistema di superficie) da cui è limitato S. Risulta così

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial x}\,dS = \int_\sigma dydz\,\Sigma(U_{P_e} - U_{P_i})$$

e, quindi,

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial x}\,dS = -\int_\sigma U\alpha d\sigma\,.$$

Questa formula, colle sue analoghe

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial y} dS = -\int_\sigma U\beta d\sigma ,$$

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial z} dS = -\int_\sigma U\gamma d\sigma .$$

costituisce il *lemma del* GREEN [1].

Notiamo che in ognuna delle formule precedenti l'asse coordinato, per es. nella prima l'asse delle x, si può considerare come una retta orientata generica, e la corrispondente derivata parziale $\partial U/\partial x$ come una derivata in quella direzione; α è il coseno dell'angolo fra la normale a σ e questa stessa direzione, sicchè la formula assume carattere intrinseco (cioè indipendente dal triedro di riferimento).

2. Il lemma di GREEN vale anche per gli integrali doppi $\iint \frac{\partial U}{\partial x} dxdy$, $\iint \frac{\partial U}{\partial y} dxdy$ estesi ad una regione finita σ del piano xy.

Si designino con s la linea o il complesso di linee che limitano σ, e con α, β i coseni direttori della normale ad s, diretta verso l'interno.

In modo identico a quello seguito nel n. 1, per gli integrali di spazio, si dimostra che:

$$\int_\sigma \frac{\partial U}{\partial x} d\sigma = -\int_s U\alpha d\sigma , \quad \int_\sigma \frac{\partial U}{\partial y} d\sigma = -\int_s U\beta ds .$$

Gli integrali dei secondi numeri si intendono estesi a tutto il contorno s, e il ds si riguarda in essi come l'elemento d'arco essenzialmente positivo. Va da sè che U e le sue derivate sono da ritenersi funzioni uniformi e continue.

Si consideri in ogni punto di s la tangente e si prenda su essa tale direzione positiva da essere orientata, rispetto alla normale

---

[1] GEORGE GREEN, n. presso Nottingham nel 1793, m. ivi nel 1841, cominciò col fare il fornaio nella bottega paterna. Poi studiò a Cambridge e fu membro della Società Reale di Londra. Introdusse i metodi che portano il suo nome (e in cui rientra come lemma quello ricordato nel testo) in un celebre opuscolo: *Essay of the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism* (Nottingham, 1828). Gli si debbono anche ricerche fondamentali sulla propagazione della luce nei mezzi anisotropi, secondo la teoria elastica.

(volta verso l'interno di σ), come la direzione positiva dell'asse Ox è orientata rispetto a quella dell'asse Oy.

Indichiamo con φ l'angolo che la tangente fa coll'asse Ox, contandolo, a partire da Ox, positivamente nel verso $Ox \rightarrow Oy$.

I coseni direttori della tangente sono allora ovviamente

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi\,, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi\,,$$

mentre quelli della normale sono:

$$\alpha = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi = -\frac{dy}{ds}\,,$$

$$\beta = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi = \frac{dx}{ds}\,.$$

Di qui si ha

$$\alpha ds = -dy \quad , \quad \beta ds = dx\,.$$

Le formule del numero precedente possono così essere scritte:

$$\int_\sigma \frac{\partial U}{\partial x}\,d\sigma = \int_s U dy\,, \qquad \int_\sigma \frac{\partial U}{\partial y}\,d\sigma = -\int_s U dx\,,$$

dove, teniamolo ben presente, dx e dy sono le proiezioni dell'elemento ds di contorno, diretto in modo da costituire colla normale volta verso l'interno una coppia che possa sovrapporsi a quella degli assi Ox ed Oy, senza uscire dal piano.

A queste relazioni si può dare una forma più espressiva, considerando da un lato il senso di percorrenza del contorno, dall'altro il senso di circolazione determinato nel piano dagli assi di riferimento (cioè dalla rotazione di Ox verso Oy). *Tali due sensi devono coincidere.*

Ove si faccia intervenire la normale Oz al piano, orientata in modo da costituire cogli assi Ox, Oy un triedro destro, *si può anche ritenere coordinato il verso di percorrenza sul contorno s a quello della normale al piano dalla condizione di risultare destro.*

§ 2. – Generalità sui campi vettoriali. Gradiente.

3. Una qualsiasi regione dello spazio (in particolare anche l'insieme di tutti i punti dello spazio) si denomina *campo vettoriale* quando ad ogni punto P del campo corrisponde un ben determinato vettore $\boldsymbol{v}$. Ciò è come dire che si ha un vettore $\boldsymbol{v}$ funzione (uniforme, ossia univocamente determinata) dei punti P del campo, e quindi anche delle loro coordinate x, y, z.

Nei campi vettoriali, che interessano le applicazioni, si tratta quasi sempre di vettori $\boldsymbol{v}(P)$, applicati nei corrispondenti punti P, e qui converrà riferirsi a tale specificazione espressiva.

Rimangono evidentemente applicabili le ordinarie nozioni di funzione finita e continua. Non ha quindi bisogno di ulteriori delucidazioni l'avvertenza che intendiamo rivolgere le nostre considerazioni a distribuzioni vettoriali finite e continue.

Supporremo anzi di più che il vettore $\boldsymbol{v}(P)$ sia funzione derivabile di P, con che vogliamo dire (I_1, n. 62) di ciascuna delle tre coordinate x, y, z.

4. Prima di ogni altra considerazione, è qui opportuno, in vista di future applicazioni, notare che le formule stabilite al n. 1 per una funzione scalare $U(x, y, z)$ del posto si estendono senz'altro ad un generico campo vettoriale $\boldsymbol{v}(x, y, z)$.

Infatti, applicando, per fissare le idee, la prima delle formule ricordate alle componenti v_x, v_y, v_z di $\boldsymbol{v}$, si ha, usando le stesse notazioni del n. 1,

$$\int_S \frac{\partial v_x}{\partial x}\, dS = -\int_\sigma v_x \alpha\, d\sigma\,, \quad \int_S \frac{\partial v_y}{\partial x}\, dS = -\int_\sigma v_y \alpha\, d\sigma\,,$$

$$\int_S \frac{d v_z}{\partial x}\, dS = -\int_\sigma v_z \alpha\, d\sigma\,;$$

e basta moltiplicare queste tre identità pei versori fondamentali (costanti) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ della terna di riferimento e, dopo averle sommate membro a membro, notare che

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\boldsymbol{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\boldsymbol{k} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\,,$$

per concludere

$$\int_S \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\, dS = -\int_\sigma \boldsymbol{v}\alpha\, d\sigma\,.$$

Analogamente per le altre due formule del n. 1.

5. Un esempio notevolissimo di campi vettoriali è offerto dai *campi di forza*, già diffusamente studiati (a proposito delle forze posizionali) nel Cap. VII_1, nn. 24-29.

I concetti, ivi svolti, di *linea di forza*, di *lavoro*, di *potenziale*, ecc., sono ovviamente trasportabili al caso di un campo qualsiasi. Basta, in quanto si disse allora, sostituire un vettore generico $\boldsymbol{v}$ alla sua interpretazione specifica di forza posizionale.

Così possiamo affermare che, in ogni campo vettoriale, dove non sia $\boldsymbol{v} = 0$, esistono delle linee tali, che la tangente in ogni loro punto P abbia la direzione del corrispondente vettore $\boldsymbol{v}$. Queste linee diconsi *linee del campo* od anche *linee di flusso*.

Analogamente a quanto si è fatto per le linee di forza (VII_1, n. 25), le linee di flusso, in ogni regione del campo in cui il vettore $\boldsymbol{v}$ si mantenga sempre diverso da zero, si possono definire in due modi (fra loro manifestamente equivalenti): *a*) per via geometrica, immaginando, a partire da un punto prefissato P, delle spezzate poligonali di cui ogni lato sia diretto come $\boldsymbol{v}$ nel punto di origine, e passando poi al limite, il che dà la linea di flusso passante per P; *b*) per via analitica, notando che le linee in questione sono, per loro definizione, caratterizzate dalle equazioni

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

le quali costituiscono un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine, come si vede supponendo per es. (il che è lecito sotto l'ammessa ipotesi $\boldsymbol{v} \neq 0$) che v_z non si annulli e scrivendole sotto la forma equivalente

$$\frac{dx}{dz} = \frac{v_x}{v_z}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{v_y}{v_z}.$$

Qui la z funge da variabile indipendente, mentre le x e y sono le funzioni incognite e il sistema integrale $x = x(z)$, $y = y(z)$, che definisce le linee di flusso in termini finiti, conterrà due costanti arbitrarie, di cui si potrà disporre in modo che x e y assumano valori prefissati in corrispondenza a un valore pure fissato della z. Ciò vuol dire geometricamente che si considera quella linea di flusso che passa per un punto prefissato del campo. La presenza di due costanti nelle suddette equazioni (n termini finiti) delle linee di flusso mostra che si tratta di un sistema di ∞^2 curve, di cui passa una ed una sola per ogni punto del campo (in cui sia $\boldsymbol{v} \neq 0$).

6. Ricordando che tra le forze posizionali hanno particolare importanza le forze conservative, cioè quelle che derivano da un potenziale $U(x, y, z)$ (VII_1, n. 26), si è tratti a pensare che, anche per un campo vettoriale qualsiasi, meriti speciale attenzione l'eventualità che il prodotto scalare $\boldsymbol{v}\times dP$ risulti un differenziale esatto dU, ossia che sussista l'eguaglianza differenziale

$$\boldsymbol{v}\times dP = dU\,, \tag{1}$$

per qualsiasi spostamento infinitesimo dP.

Si sa già che ciò equivale alle tre equazioni scalari

$$v_x = \frac{\partial U}{\partial x}\,, \qquad v_y = \frac{\partial U}{\partial y}\,, \qquad v_z = \frac{\partial U}{\partial z}\,. \tag{1'}$$

Come si è visto, a proposito del lavoro delle forze conservative (VIII$_1$, n. 7), la (1) equivale alla proprietà integrale che il lavoro $\int \boldsymbol{v}\times dP$ fra due punti generici A e B è indipendente dal cammino del campo secondo cui lo si valuta. E ciò equivale alla sua volta al fatto che si annulla il lavoro relativo ad un qualsiasi ciclo chiuso del campo. Infatti, un ciclo chiuso si può sempre considerare come un cammino di cui il punto di partenza A coincide col punto di arrivo B; allora, fra i cammini che cominciano in A e terminano in B, c'è in particolare quello di lunghezza nulla. Il lavoro esteso a questo è zero; dunque, quando sussiste l'indipendenza del lavoro dal cammino, è pure zero il lavoro relativo ad un generico ciclo. Viceversa, supponiamo verificata tale condizione. Scelti a piacimento due diversi cammini s_1 ed s_2 (del campo) fra gli stessi estremi A e B, essi costituiscono complessivamente un ciclo, lungo cui il lavoro è nullo. Detto L_1 il lavoro da A a B lungo s_1, L_2 l'analogo lavoro lungo s_2, sarà $L_1 - L_2 = 0$, il che appunto prova che il lavoro è lo stesso lungo i due cammini arbitrariamente prescelti.

Quando al vettore $\boldsymbol{v}$ non si attribuisce la particolare interpretazione di forza, l'integrale $\int \boldsymbol{v}\times dP$, esteso ad un generico pezzo di linea, si suol chiamare *circolazione* (anzichè, specificamente, lavoro).

Un altro modo di compendiar le (1′) è di interpretarle come condizioni di identità di due vettori. A tal fine si introduce la notazione

$$\operatorname{grad} U$$

[da leggere « *gradiente* di U »] per designare *il vettore definito intrinsecamente dalla identità* (1) *con tutte le sue conseguenze*, tra cui quella formale equivalente di aver per componenti $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$ (che corrisponde naturalmente alla forza derivante dal potenziale U, se si tratta di un campo di forza). Con tale definizione di gradiente, le tre relazioni precedenti si riassumono nella eguaglianza vettoriale

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} U .$$

Dalla definizione stessa e dalla identità (1) risulta che la componente di grad U secondo una direzione generica non è altro che la derivata del potenziale U secondo la direzione prefissata (cfr. VII_1, n. 26). Di qui segue che l'operatore « grad » si comporta, in sostanza, come una generica derivata parziale. Così sussistono le identità

$$\operatorname{grad} \text{cost.} = 0 , \quad \operatorname{grad} (U_1 + U_2) = \operatorname{grad} U_1 + \operatorname{grad} U_2 .$$

Se poi U dipende dalle coordinate x, y, z unicamente pel tramite di una funzione $p(x, y, z)$, si ha

$$\operatorname{grad} U(p) = \frac{dU}{dp} \operatorname{grad} p \; ; \tag{2}$$

e se U dipende, oltre che dalle coordinate x, y, z, da un parametro λ, eventualmente coincidente con una di codeste coordinate, si ha

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \operatorname{grad} U = \operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial \lambda} . \tag{3}$$

Giova notare, infine, che le tre formule esprimenti il lemma del GREEN (n. 1), ove si denoti con $\boldsymbol{n}$ il versore normale alla superficie σ, orientato verso l'interno, si possono raccogliere nell'unica formula vettoriale

$$\int_S \operatorname{grad} U dS = - \int_\sigma U \boldsymbol{n} d\sigma . \tag{4}$$

Per $U =$ cost., grad $U = 0$. Allora il primo membro si annulla e l'equazione si riduce a

$$\int_\sigma \boldsymbol{n} d\sigma = 0 ,$$

proprietà integrale assai espressiva del versore normale ad una generica superficie *chiusa.*

§ 3. – Immagine idrocinetica. Nozione di flusso.

7. Per avere una rappresentazione cinematica suggestiva di un qualsiasi campo vettoriale $\boldsymbol{v}(P)$ conviene immaginare il campo S ripieno di un fluido in moto, tale che, in ogni istante, la velocità della particella occupante una posizione generica P sia data dal vettore corrispondente $\boldsymbol{v}(P)$.

Le linee del campo (n. 5) sono allora dirette, in ogni punto, come la velocità del fluido (cioè della particella che transita per il punto nell'istante considerato).

È per questa ragione che le linee del campo spesso, come si è detto al n. 5, si chiamano anche *linee di flusso*.

8. Data, nel campo, una linea chiusa (che non sia una linea di flusso), si immaginino spiccate da ogni suo punto le rispettive linee del campo. Esse costituiranno una superficie tubolare chiamata (impropriamente) *tubo di flusso*. Più propriamente si chiama tubo di flusso lo spazio limitato dalla detta superficie.

In un campo uniforme (VII_1, n. 25) le linee del campo sono rette parallele, talchè i tubi sono cilindri.

La denominazione di «*tubo di flusso*» si giustifica osservando che, nell'immagine idrocinetica data al n. prec., ogni particella (o insieme di particelle), che appartenga al tubo in un generico istante t, seguita ad appartenervi anche nell'istante $t + dt$; l'ipotetica massa fluida si muove, dunque, come se fosse racchiusa nel tubo, o, in altre parole, *fluisse in esso*.

9. Riferiamoci ancora, per un momento, ad un campo uniforme $\boldsymbol{v}$. Nella immagine idrocinetica dianzi introdotta, ogni particella del fluido, nell'unità di tempo (a partire da un istante qualsiasi), percorre un cammino rettilineo di lunghezza v, nella direzione e nel verso di $\boldsymbol{v}$. Perciò, se si considera una qualsiasi superficie piana σ (a contorno curvilineo o, in particolare, poligonale), non parallela a $\boldsymbol{v}$, il fluido che, durante una unità di tempo, attraversa la σ, riempie un cilindro (o, in particolare, un prisma) di base σ, avente per generatrici (o per spigoli laterali) altrettanti segmenti di lunghezza v, spiccati dai punti del contorno (o dai vertici) di σ, nella direzione e nel verso di $\boldsymbol{v}$. L'altezza di questo cilindro (o prisma) si ottiene proiettando uno qualsiasi degli indicati segmenti sulla normale a σ, ed è perciò data da $|v_n| = |\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}|$, se con $\boldsymbol{n}$

si denota il versore normale a $\boldsymbol{v}$, orientato a piacimento; chè, se il verso di $\boldsymbol{n}$ si sceglie in modo che l'angolo $\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}}$ risulti acuto, l'altezza è misurata, anche in segno, da $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}$.

Di qui consegue che il volume del cilindro (o prisma) dianzi caratterizzato è fornito dal valore assoluto di

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\,\sigma\,; \tag{5}$$

e vi è o no accordo di segno secondo che è $\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}} \lesseqgtr \pi/2$.

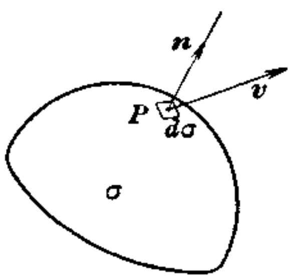
Lo scalare (5) dicesi *flusso del campo* (nell'unità di tempo) *attraverso la superficie σ nel verso di $\boldsymbol{n}$*; e questo nome è pienamente giustificato, perchè non solo codesto scalare dà col suo valore assoluto il volume di fluido che nell'unità di tempo passa attraverso la σ, ma col suo segno indica se il passaggio avviene, rispetto a σ, nel verso di $\boldsymbol{n}$ o nel verso contrario.

Ed è ragionevole estendere tanto l'espressione formale (5), quanto la denominazione di flusso anche al caso sinora escluso di una superficie σ parallela a $\boldsymbol{v}$, perchè dal lato formale la (5) in tal caso ($\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}} = \pi/2$) si annulla, e, sotto l'aspetto concettuale, è direttamente manifesto che il fluido *non attraversa* la σ (ma solo scorre su di essa).

Naturalmente, se si tratta di una superficie infinitesima o elemento superficiale $d\sigma$, il flusso è dato, qualunque sia l'orientazione di $d\sigma$ rispetto a $\boldsymbol{v}$, da

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\cdot d\sigma\,.$$

Dopo ciò si presenta spontanea la generalizzazione del concetto di flusso al caso di un campo vettoriale $\boldsymbol{v}(P)$ qualsivoglia e di una superficie σ, comunque curva. In ogni punto P di σ si consideri il versore normale $\boldsymbol{n}(P)$, fissandone il verso a piacere in un punto determinato P_0 e convenendo che in ogni altro punto P il verso di $\boldsymbol{n}(P)$ provenga per continuità da quello di $\boldsymbol{n}(P_0)$ (1).



Scelto allora su σ un generico elemento $d\sigma$, diremo *flusso del campo* $\boldsymbol{v}(P)$ (nell'unità di tempo) *attraverso l'elemento* $d\sigma$ lo scalare

$$d\varphi = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\,d\sigma = v_n d\sigma\,,$$

---

(1) Questa convenzione presuppone in modo essenziale che la σ sia una superficie a due facce, cioè non sia *unilatera*, come la nota superficie del MÖBIUS.

che risulta ben determinato (a meno di infinitesimi di ordine superiore al $d\sigma$) in quanto vi si intendano prese per $\boldsymbol{v}$ ed $\boldsymbol{n}$ le determinazioni corrispondenti ad un generico punto P del $d\sigma$.

Sommando tutti i $d\varphi$ relativi ai vari elementi $d\sigma$ di σ, si avrà manifestamente l'eccesso (positivo o negativo) del volume di fluido che attraversa σ nel senso di $\boldsymbol{n}$ su quello che la attraversa in senso contrario. È per questa ragione che l'integrale

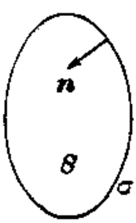
$$\varphi = \int_\sigma \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\sigma v_n d\sigma$$

dicesi *flusso del campo attraverso la generica superficie* σ (nel senso convenuto per $\boldsymbol{n}$).

Nel caso di una superficie σ *chiusa*, il flusso si dirà *entrante* se $\boldsymbol{n}$ è orientato verso l'interno, *uscente* se $\boldsymbol{n}$ è orientato verso l'esterno; ed è manifesto che, quando si tenga fissa la orientazione di $\boldsymbol{n}$, il flusso uscente è eguale in valore assoluto e di segno contrario al flusso entrante.

§ 4. – Divergenza.

10. Dato un campo vettoriale $\boldsymbol{v}(P)$, si consideri una superficie chiusa σ e si denotino, al solito, con α, β, γ le componenti del versore normale $\boldsymbol{n}$, orientato verso l'interno, e con S lo spazio racchiuso da σ.



Il *flusso uscente* da S attraverso σ è dato da

$$-\int_\sigma v_n d\sigma = -\int_\sigma (v_x\alpha + v_y\beta + v_z\gamma) d\sigma\,,$$

onde, in base alle formule del lemma di Green (n. 1), si può scrivere

$$\int_S \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dS\,.$$

Di qui apparisce che, di fronte al calcolo del fluido che esce attraverso σ, le cose vanno come se ciascun elemento dS del campo racchiuso vi contribuisse per

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dS\,,$$

cioè come se tale quantità (volume dell'ipotetico fluido) emanasse o *divergesse* dall'elemento.

Il trinomio

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

rappresenta pertanto il rapporto fra il volume del fluido emanato e quello del campo emanante. In pari tempo rimangono giustificati il nome di *divergenza del vettore* $\boldsymbol{v}$, che si suole attribuire all'indicato scalare, e la corrispondente notazione

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{6}$$

Al *flusso uscente* da σ si può in conformità assegnare l'espressione

$$-\int_\sigma \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_S \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dS, \tag{7}$$

e la proposizione che afferma l'identità di questi due integrali costituisce il *teorema della divergenza.*

11. È facile riconoscere che la divergenza, da noi definita con riguardo ad una speciale terna di riferimento $Oxyz$, non varia al variare di essa.

Si potrebbe farne una verifica materiale in base alla definizione formale (6); ma è preferibile stabilirlo concettualmente, sfruttando la proprietà caratteristica (7).

Avuto riguardo al carattere invariantivo (cioè indipendente dagli assi di riferimento) della nozione di flusso, si vede che, se si indica con $\operatorname{div}_1 \boldsymbol{v}$ la divergenza di $\boldsymbol{v}$ relativa ad un'altra terna di riferimento $O_1x_1y_1z_1$, si ha, qualunque sia S,

$$\int_S \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dS = \int_S \operatorname{div}_1 \boldsymbol{v}\, dS.$$

Di qui si conclude che le due espressioni della divergenza devono coincidere in ogni punto P del campo. Poniamo infatti, per un momento,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} - \operatorname{div}_1 \boldsymbol{v} = \varepsilon,$$

e notiamo che, per un intorno S comunque piccolo di P, si ha

$$\int_S \varepsilon\, dS = 0.$$

Poichè ε è funzione continua (tali essendo le derivate di una qualsiasi componente di $\boldsymbol{v}$), essa non può essere diversa da zero in P, senza conservarsi del medesimo segno in tutto un intorno di P, ma in tal caso risulterebbe diverso da zero, contrariamente a quanto si è testè notato, l'integrale di ε esteso a quell'intorno. È dunque assurda l'ipotesi che ε non sia nulla nel punto P preso a considerare. Deve quindi essere $\varepsilon = 0$, ossia identicamente

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div}_1 \boldsymbol{v} .$$

12. Dalla definizione di divergenza si ha tosto che, se $\boldsymbol{v}$ è costante (in grandezza e direzione), la sua divergenza è nulla; come pure che la divergenza di un vettore risultante di più altri è somma delle divergenze relative ai vettori addendi. In formule:

$$\operatorname{div} \text{cost.} = 0 ,$$

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \boldsymbol{v}_n) = \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 + \operatorname{div} \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \operatorname{div} \boldsymbol{v}_n .$$

Ricordando la definizione di gradiente data al n. 6, è facile provare che, quali si siano la funzione U e il vettore $\boldsymbol{v}$, vale la relazione

$$\operatorname{div} (U\boldsymbol{v}) = U \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \operatorname{grad} U . \tag{8}$$

Infatti, attribuendo al simbolo Σ il consueto significato di somma rispetto alle lettere x, y, z, si ha

$$\operatorname{div} (U\boldsymbol{v}) = \Sigma \frac{\partial (U v_x)}{\partial x} = U \Sigma \frac{\partial v_x}{\partial x} + \Sigma v_x \frac{\partial U}{\partial x} ,$$

il che dimostra l'asserto.

Osserviamo infine che, essendo $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$ le componenti del vettore grad U, la divergenza di tale vettore è

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} .$$

Questa espressione è il cosiddetto *operatore del* LAPLACE o *parametro differenziale di secondo ordine* di U, che suole indicarsi con $\Delta_2 U$. Si ha insomma

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta_2 U .$$

Qui, pur incidentalmente, non sarà inutile avvertire che l'equazione differenziale del second'ordine

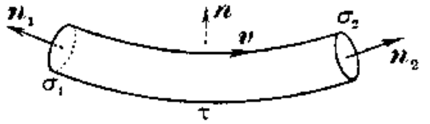
$$\Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

si chiama *equazione del* LAPLACE; ed ogni sua soluzione si dice *funzione armonica*.

§ 5. – Campi solenoidali.

13. Prendiamo in considerazione speciale i campi a divergenza nulla. Dal teorema della divergenza (n. 10) è manifesto che in tali campi, il flusso uscente da qualsiasi superficie chiusa è nullo.

Per i tubi di flusso (n. 8) ne consegue, in particolare, la costanza del flusso che attraversa le varie sezioni trasversali (ben si intende, nel medesimo senso).



Infatti, indichiamo con τ la porzione di superficie tubolare compresa fra due generiche sezioni trasversali σ_1 e σ_2, e notiamo che σ_1, σ_2 e τ costituiscono complessivamente una superficie chiusa σ. Avremo dunque

$$\int_{\sigma_1+\sigma_2+\tau} v_n d\sigma = 0 ,$$

dove, per fissare le idee, supporremo che il vettore $\boldsymbol{n}$ sia orientato verso l'esterno.

La parte di tale integrale relativa alla superficie laterale τ è nulla, come mostra la immagine intuitiva da cui è tratta la definizione di tubo di flusso (il fluido vi scorre dentro, nè può quindi attraversare le pareti); e come d'altra parte risulta dal fatto che, essendo τ costituita da linee del campo, il versore $\boldsymbol{n}$ è perpendicolare al vettore $\boldsymbol{v}$, sicchè la componente v_n è nulla.

Restano dunque soltanto le parti d'integrale relative alle sezioni σ_1 e σ_2, cioè i due flussi uscenti da tali sezioni.

Essendo la loro somma nulla, essi devono avere valore opposto; il che è quanto dire che il flusso, entrante nella porzione considerata di tubo attraverso una delle sue sezioni, è eguale al flusso uscente dall'altra.

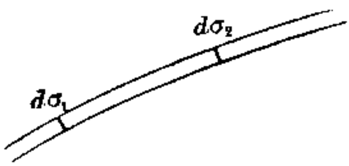
Riferendo questo flusso al solito fluido ipotetico circolante nel tubo, siamo condotti alla conclusione che *tanto ne entra per una sezione terminale quanto ne esce per l'altra.*

Per tale notevole proprietà, dalla parola greca σωλὴν che significa canale o tubo, i campi a divergenza nulla sono denominati *campi solenoidali.*

14. Per essi vale sempre il fatto espressivo, già rilevato in principio del n. precedente, che dell'ipotetico fluido tanto ne entra attraverso ogni superficie chiusa quanto ne esce. Ciò infatti vale quanto dire che il flusso uscente da ogni superficie chiusa è nullo.

Di qui si vede tosto che il campo è necessariamente solenoidale se il fluido ipotetico è sempre omogeneo, se cioè riempie sempre tutto il campo, senza condensarsi nè rarefarsi mai in nessun punto.

15. Dato un campo solenoidale qualsiasi, si prenda in particolare considerazione un tubo di flusso sottilissimo, tale cioè che le aree delle sue sezioni normali si possano trattare come quantità infinitesime.



Dette $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ due di queste sezioni normali e $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ le determinazioni del vettore del campo relative a due loro punti generici P_1, P_2, i flussi che le attraversano (in valore assoluto e a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto agli elementi d'area) saranno

$$v_1 d\sigma_1 , \qquad v_2 d\sigma_2 .$$

Trattandosi di un campo solenoidale, tali flussi devono risultare eguali; per conseguenza

$$v_1 d\sigma_1 = v_2 d\sigma_2 .$$

Ne desumiamo che *lungo un tubo di flusso infinitamente sottile il vettore di un campo solenoidale è inversamente proporzionale alla sezione normale del tubo*: dove il tubo si allarga il vettore si accorcia, e viceversa.

Se $v_1 = v_2$ si ha anche $d\sigma_1 = d\sigma_2$; donde si vede che un tubo di flusso infinitesimo ha tutte eguali le sue sezioni normali, se, lungo il tubo, $\boldsymbol{v}$ ha lunghezza costante.

16. In un campo solenoidale il flusso che attraversa una sezione qualsiasi (non più soltanto infinitesima) di un medesimo tubo di flusso è, come vedemmo al n. 13, costante; è naturale che esso venga denominato *flusso del tubo* considerato.

Ovviamente si vede che un tubo risultante dall'insieme di più altri ha per flusso la somma dei flussi dei tubi componenti. Il flusso di un tubo si può quindi considerare come una grandezza scalare; ed è applicabile l'ordinario procedimento della misura.

Il tubo di flusso 1 suole denominarsi *tubo unità*, e il flusso di un tubo qualsiasi è dato dal numero dei tubi unità che esso contiene.

Tale numero ci darà, veramente, solo un valore approssimato del flusso, ma è facile spingere l'approssimazione quanto avanti si vuole. Basta prendere sufficientemente piccolo il flusso unitario; e quindi sufficientemente sottili i tubi unità.

§ 6. – **Rotore.**

17. Dato un qualsiasi campo vettoriale $\boldsymbol{v}(P)$, il lavoro, o, se si vuole, la circolazione $\int_s \boldsymbol{v}\times dP$, relativa ad un circuito chiuso s, diviene naturalmente infinitesima assieme al circuito stesso.

Per convincersene si indichi con V il massimo valore della lunghezza del vettore del campo lungo il circuito, con l la lunghezza del circuito stesso. Manifestamente si ha

$$\left|\int_s \boldsymbol{v}\times dP\right| \leqslant Vl\,,$$

sicchè la circolazione va a zero con l.

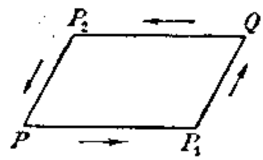
Ma è notevole il fatto che, per la forma speciale dell'integrale che esprime il lavoro, si tratta di un infinitesimo di secondo ordine, come verificheremo, per il caso generale, nel § seguente (n. 22).

Per ora limitiamoci a dimostrarlo nel caso particolare in cui il circuito è un parallelogrammo infinitesimo

$$p = PP_1QP_2\,.$$

18. Poniamo

$$P_1 - P = Q - P_2 = dP\,,$$
$$P_2 - P = Q - P_1 = \delta P\,,$$



e prendiamo in considerazione una funzione qualsivoglia f, scalare o vettoriale, dei punti del campo. Indicheremo per brevità con df l'incremento che la funzione subisce passando da un punto generico H del campo al punto $H + dP$; e analogamente con δf l'incremento relativo al passaggio da H ad $H + \delta P$.

Ciò premesso, per calcolare il lavoro complessivo di un vettore $\boldsymbol{v}(P)$ lungo il parallelogrammo $p = PP_1QP_2$, cioè l'integrale

$$\int_p \boldsymbol{v}\times dP\,,$$

consideriamo separatamente i contributi dovuti alle due coppie di lati opposti.

Riferendoci dapprima alla coppia PP_2, P_1Q, notiamo che le determinazioni di $\boldsymbol{v}$ in punti omologhi di questi due lati differiscono, per definizione, di $d\boldsymbol{v}$, sicchè i lavori compiuti da $\boldsymbol{v}$, quando il suo punto di applicazione percorre i due cammini elementari P_1Q e P_2P, sono rispettivamente

$$(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})\times(Q - P_1)\,, \qquad -\boldsymbol{v}\times(P_2 - P)\,;$$

e, siccome il secondo fattore è in entrambi questi prodotti scalari δP, si ottiene come loro somma

$$d\boldsymbol{v}\times\delta P\,.$$

Analogamente il contributo degli altri due lati è dato da

$$-\,d\boldsymbol{v}\times dP\,;$$

e complessivamente si trova

$$\int_p \boldsymbol{v}\times dP = d\boldsymbol{v}\times\delta P - \delta\boldsymbol{v}\times dP\,,$$

donde risulta intanto provato che il lavoro lungo p è un infinitesimo di secondo ordine.

Indicando, al solito, con v_x, v_y, v_z le componenti di $\boldsymbol{v}$, il prodotto scalare $d\boldsymbol{v}\times\delta P$ si rende esplicito sotto la forma:

$$\begin{aligned} & dv_x\delta x + dv_y\delta y + dv_z\delta z = \\ & = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}\,dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}\,dz\right)\delta x + \\ & + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}\,dy + \frac{\partial v_y}{\partial z}\,dz\right)\delta y + \\ & + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v_z}{\partial y}\,dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,dz\right)\delta z\,. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{v}\times dP = & \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\,\delta z\right)dx + \\ & + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\,\delta z\right)dy + \\ & + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,\delta z\right)dz\,. \end{aligned}$$

Sviluppando le parentesi e sottraendo dalla prima espressione la seconda, si trova ovviamente

$$\int_p \boldsymbol{v}\times d P = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y} \\ dx & dy & dz \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix};$$

e, ove si introduca un vettore $\boldsymbol{\Gamma}$ di componenti

$$(9) \qquad \Gamma_x = \frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \Gamma_y = \frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \Gamma_z = \frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

e si ricordi (I_1, n. 23) che le componenti del prodotto vettoriale $dP \wedge \delta P$ sono

$$dy\delta z - dz\delta y \ , \quad dz\delta x - dx\delta z \ , \quad dx\delta y - dy\delta x \ ,$$

la formula precedente si scrive

$$\int_p \boldsymbol{v}\times dP = \boldsymbol{\Gamma}\times dP \wedge \delta P \ .$$

19. Designi σ l'area del parallelogrammo p, ed n la normale al piano di p, diretta in modo che il senso di circolazione su p apparisca destro; sia $\boldsymbol{n}$ il relativo vettore unitario. Il prodotto vettoriale $dP \wedge \delta P$ si trova, per sua definizione, espresso da $\sigma\boldsymbol{n}$, talchè

$$\int_p \boldsymbol{v}\times dP = \boldsymbol{\Gamma}\times \boldsymbol{n}\sigma = \Gamma_n \sigma \ ;$$

donde risulta che

$$\Gamma_n = \frac{\int_p \boldsymbol{v}\times dP}{\sigma} \ .$$

Il vettore $\boldsymbol{\Gamma}$, definito dalle formule (9) mediante le sue componenti secondo gli assi coordinati, è così caratterizzato invariantivamente.

Infatti la sua proiezione secondo una direzione generica n si presenta quale rapporto fra circolazione ed area spettanti ad un qualsiasi parallelogrammo (infinitesimo, con un vertice nel punto che si considera) il cui piano sia perpendicolare ad n. Tale vettore $\boldsymbol{\Gamma}$ dicesi *rotore* (da qualche autore *rotazione* o anche *verticale*, dagli inglesi *curl*) *del vettore* $\boldsymbol{v}$ (o meglio della distribuzione del campo vettoriale, nel punto generico che si considera); e si scrive

$$\boldsymbol{\Gamma} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v} .$$

20. Dalle formule (9) si vede tosto che, se $\boldsymbol{v}$ è costante, il suo rotore è nullo: anzi, più in generale, vediamo che è nullo il rotore di qualsiasi gradiente:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0 .$$

In altre parole abbiamo che è nullo il rotore di campi conservativi; ciò che del resto risulta anche dal fatto che, in tali campi, sono nulle tutte le circolazioni. (Per la proposizione reciproca si vegga il § 8).

21. Osserviamo infine che, qualunque sia il campo $\boldsymbol{v}$, il campo $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ è solenoidale; vale cioè la formula $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$.

Per convincersene basta sviluppare materialmente l'espressione $\frac{\partial}{\partial x}\Gamma_x + \frac{\partial}{\partial y}\Gamma_y + \frac{\partial}{\partial z}\Gamma_z$ tenendo conto delle (9) e dell'invertibilità delle derivazioni.

Ne consegue (n. 13) l'annullarsi del flusso di ogni rotore attraverso qualsiasi superficie chiusa σ; ossia la formula

$$\int_\sigma \Gamma_n d\sigma = 0 .$$

§ 7. – Formula dello Stokes [1].

22. Sia s un contorno piano qualsiasi (linea chiusa), su cui sia fissato un verso positivo di circolazione. Sia σ la porzione del piano racchiusa dalla linea s; e sia n la *normale* al piano di σ *diretta in modo che* rispetto ad essa *il verso di circolazione lungo s apparisca destro.*

---

[1] Giorgio Gabriele Stokes, n. a Skreen (Irlanda) nel 1819, m. a Cambridge nel 1903. Fu professore di matematica nella Università di Cambridge, socio della Società Reale di Londra e delle principali accademie del mondo. Grande fisico matematico, è universalmente noto, oltre che per la formula del testo, per celebri ricerche sulle onde dei liquidi e per le sue teorie di ottica, fondate sull'ipotesi di un trascinamento dell'etere.

Scelta, per riferimento, una terna (destra) $Oxyz$, coll'asse Oz diretto come n e gli altri due nel piano di σ, ove si supponga σ immerso in un generico campo vettoriale $\boldsymbol{v}$, le singole componenti v_x, v_y, v_z si potranno riguardare entro σ come funzioni di x, y (finite e continue assieme alle loro derivate). E in particolare, risultando destro rispetto ad Oz il verso di percorrenza sul contorno s, saranno applicabili le formule del n. 2, nella prima delle quali si ponga $U = v_y$, e nella seconda $U = v_x$. Si ha così:

$$\int_\sigma \frac{\partial v_y}{\partial x} d\sigma = \int_s v_y dy \ , \qquad \int_\sigma \frac{\partial v_x}{\partial y} d\sigma = -\int_s v_x dx \, ,$$

donde, sottraendo e tenendo conto dell'ultima delle (9),

$$\int_\sigma \Gamma_z d\sigma = \int_s (v_x dx + v_y dy) \, .$$

Ora, a partire da un punto generico P del contorno, le componenti dell'elemento dP del contorno stesso (situato sul piano $z = 0$) sono dx, dy, 0. Il binomio $v_x dx + v_y dy$ può dunque identificarsi con $\boldsymbol{v} \times dP$. D'altra parte, essendo le rette Oz ed n parallele e concordi, si ha $\Gamma_z = \Gamma_n$.

Otteniamo così la relazione invariantiva

$$\int_\sigma \Gamma_n d\sigma = \int_s \boldsymbol{v} \times dP \, , \tag{10}$$

che dal nome del suo scopritore, vien denominata *formula dello* STOKES. Essa esprime, come si vede, la circolazione di un vettore generico $\boldsymbol{v}$ (per una linea piana s) mediante un integrale di superficie (esteso al corrispondente pezzo di piano e relativo al rot $\boldsymbol{v}$).

Mostreremo nel n. seguente come tale formula, stabilita nel caso di un pezzo di piano, sia valida in generale per qualsiasi superficie σ limitata da una linea s.

Osserviamo intanto che nel caso di un contorno s infinitesimo (che può sempre considerarsi come piano) la formula trovata giustifica l'osservazione generale anticipata al n. 17, che le circolazioni lungo un circuito infinitesimo sono infinitesimi di secondo ordine. Esse hanno infatti lo stesso ordine d'infinitesimo dell'area racchiusa dal circuito.

23. Passiamo a dimostrare che la formula (10) continua a valere anche se la superficie σ limitata dal contorno s non è piana, purchè, naturalmente, il verso di circolazione di s e la direzione positiva n sulla normale siano fatti corrispondere in debito modo. Immaginando (ciò che dal punto di vista applicativo è più che sufficiente) che si tratti in ogni caso di pezzi di superficie i quali possano, per deformazione continua (cioè senza strappi, nè duplicature), distendersi sopra un piano, il criterio di coordinazione è senz'altro evidente. Fissata, nella configurazione piana, la direzione positiva della normale in modo che, rispetto ad essa, il verso di percorrenza del contorno apparisca destro, si attribuiranno a questi elementi, nella configurazione effettivamente assegnata del pezzo σ, le determinazioni che si deducono per continuità.

24. Intesi su questo punto, cominceremo coll'osservare che la formula sussiste se σ si può dividere in due pezzi piani (per es. due facce contigue di un cubo o di un tetraedro) mediante un segmento λ, intersezione (più precisamente, parte dell'intersezione interna a σ) dei due piani, su cui per ipotesi giace σ.

Infatti, per ognuno di tali pezzi, vale la (10). Sommando i due integrali di superficie, si ha l'integrale esteso a tutto σ.

La somma dei corrispondenti due integrali di linea si riduce poi all'integrale esteso al contorno s, giacchè i contributi portati dal segmento λ si elidono; infatti λ segna il confine di due distinti pezzi piani, e si incontra due volte, percorso in versi opposti, secondo che proviene dal contorno dell'uno o dell'altro pezzo. Il ragionamento si estende ovviamente al caso di una superficie costituita da un numero comunque grande di pezzi piani.

Ciò posto, qualunque sia la superficie σ, si può sempre immaginarla divisa in parti e, protraendo indefinitamente tale divisione, al limite è sempre lecito trattare ciascuna parte come un pezzo di piano. Donde si può concludere che la (10) vale in ogni caso.

25. Consideriamo in particolare una superficie chiusa σ. Essa si può manifestamente riguardare quale limite di un pezzo di superficie a contorno, quando questo impiccolisca indefinitamente sì da ridursi ad un punto [1].

La (10), scomparendo in tal caso l'integrale di linea, ci dà

$$\int_\sigma \Gamma_n d\sigma = 0 \, .$$

[1] Si immagini, per esempio, una calotta sferica più ampia di una mezza sfera, e si faccia decrescere il raggio del parallelo, che ne costituisce il contorno. Quando questo si riduce ad un punto, la calotta abbraccia l'intera sfera.

Troviamo così per altra via il risultato notevole già ottenuto al n. 21.

26. Vale però la pena di rilevare che, mentre ricorrendo alla formula dello Stokes si fanno intervenire soltanto $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{\Gamma} = \text{rot}\, \boldsymbol{v}$ nei punti di σ, cioè, si può dire, la conoscenza e regolarità del campo nell'immediata prossimità del pezzo σ, la dimostrazione (pur semplicissima) del n. 21 si appoggia sul teorema della divergenza [n. 10, formula (7)]. Essa implica pertanto che il campo sia definito (e regolare) anche in tutto lo spazio interno a σ.

§ 8. – Nozione di connessione (lineare). Campi a rotore nullo.

27. Una generica regione dello spazio dicesi *semplicemente connessa*, quando gode di questo carattere qualitativo. *Ogni* sua linea chiusa si può ridurre ad un punto per deformazione *continua*, senza mai uscire dalla regione. L'interno di un cubo o di un ellissoide, od anche il campo esterno ad uno di questi solidi, costituiscono manifestamente esempi di campi semplicemente connessi.

Un campo *non* semplicemente connesso, in cui cioè vi sia qualche *ciclo irriducibile* (linea chiusa non riducibile a un punto, per deformazione continua, entro il campo) dicesi *molteplicemente connesso*. Il toro ne offre un tipico esempio, bastando aver riguardo alla sua linea mediana (luogo dei centri delle sezioni meridiane): non si potrebbe deformarla riducendola ad un punto senza attraversare la superficie del toro.

28. Ciò premesso, ricordiamo l'osservazione del n. 20 che, in ogni campo conservativo, il rotore è nullo; e domandiamoci se sia vera anche la reciproca, cioè se ogni campo vettoriale $\boldsymbol{v}$ a rotore nullo, sia di necessità conservativo. Riconosceremo che, pei campi semplicemente connessi, la reciproca sussiste incondizionatamente. Non così, invece, per i campi molteplicemente connessi, ove si vogliano considerare nella loro integrità. Se si ha questa esigenza bisogna sacrificare qualche cosa nel risultato, e precisamente lasciar cadere la condizione (che accompagna l'originaria definizione di campo conservativo, e che abbiamo sin qui ritenuta; cfr. VII_1, n. 27) che il potenziale debba proprio in ogni caso risultare funzione uniforme dei punti del campo.

29. Occupiamoci in primo luogo di campi semplicemente connessi, e sia s una generica linea chiusa di un tale campo.

Sarà pertanto possibile deformarla con continuità sino ad un punto restando sempre nel campo, e la successione di tutte le configurazioni intermedie costituirà in conformità una superficie σ, tutta contenuta nel campo, e avente s per contorno completo. Sarà, per conseguenza, applicabile la formula dello STOKES (10) del n. 22, e siccome, nel caso presente, il rotore $\mathbf{\Gamma}$ è, per ipotesi, nullo, si arriva alla conclusione che *deve* pure *annullarsi la circolazione relativa ad* s. Avvenendo questo per qualsiasi linea chiusa *si trova appunto verificata una caratteristica* (n. 6) *dei campi conservativi*. E ne consegue l'esistenza di un potenziale U, funzione *uniforme* dei punti del campo, tale che $\boldsymbol{v}\times dP = dU$, o, ciò che è lo stesso,

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} U .$$

30. Nel caso di campi a connessione multipla non è più vero che per ogni linea chiusa s si possa costruire (mediante deformazione continua, come sopra) una superficie σ, di cui s costituisca il contorno completo. Il ragionamento precedente non è dunque incondizionatamente applicabile; ma si richiedono opportune restrizioni e modificazioni. Il risultato finale è — ci limitiamo ad accennarlo per notizia — che vien fatto ancora di definire una funzione U dei punti del campo, tale che $\boldsymbol{v}\times dP = dU$; soltanto questa U non risulta in generale uniforme (cfr. VII_1, n. 29, es. d). In ogni punto P, *essa è suscettibile* di più valori, e assume l'uno o l'altro secondo il cammino che si segue per raggiungere P (a partire da un punto fisso P_0 e attenendosi sempre alla determinazione imposta dalla continuità).

31. OSSERVAZIONE. — Nei trattati di Calcolo (cfr. anche VII_1, n. 27) si trova enunciata e dimostrata la proposizione seguente: Se X, Y, Z sono funzioni di x, y, z finite e continue e derivabili, la condizione necessaria e sufficiente affinchè

$$X dx + Y dy + Z dz$$

costituisca un differenziale esatto, è offerta dalle così dette relazioni di simmetria

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0\,, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0\,.$$

Interpretando X, Y, Z come componenti di un vettore $\boldsymbol{v}$ funzione del punto $P(x, y, z)$, e badando alle formule (9), il ricordato teorema di Calcolo assume l'aspetto vettoriale seguente: Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\boldsymbol{v} \times dP$ sia un differenziale esatto è l'annullarsi del rotore $\boldsymbol{\Gamma}$ di $\boldsymbol{v}$.

In realtà le cose stanno così. Nella dimostrazione consueta del Calcolo, si costruisce la U con un procedimento particolare, immaginando di raggiungere un punto generico P del campo, a partire da un punto fisso P_0, lungo una spezzata coi lati paralleli agli assi coordinati; e si fa esplicitamente l'ipotesi che tale spezzata, per qualsiasi scelta di P nel campo che si considera, appartenga sempre a questo campo. Ciò implica, come sarebbe facile riconoscere, che si tratti di un campo semplicemente connesso. Tale limitazione è dunque essenziale e si trova sostanzialmente anche nella dimostrazione tradizionale dei trattati di Calcolo; soltanto non sempre se ne fa esplicita menzione nell'enunciato del teorema. Nè ciò è senza ragione. Infatti il punto di vista dominante nel Calcolo è quello locale, concernente cioè intorni abbastanza piccoli di un dato posto (o sistema di valore degli argomenti). Da questo punto di vista, la restrizione è effettivamente superflua, giacchè ogni intorno abbastanza piccolo è di necessità semplicemente connesso. La cosa muta, quando si voglia o si debba aver riguardo a tutto un campo vettoriale preventivamente assegnato.

CAPITOLO IX.

GENERALITÀ SULLA CINEMATICA DEI SISTEMI CONTINUI

§ 1. – I due punti di vista molecolare (o del Lagrange) e locale (o di Eulero).

1. Consideriamo un generico sistema materiale, che occupi un campo a tre dimensioni, p. es., un solido, o porzione di solido, o il fluido contenuto in un recipiente, o un sistema comunque composto. Immaginiamo, per fissare le idee, di individuare ogni elemento materiale M del sistema (diremo altresì particella o molecola, senza volere con ciò alludere ad alcuna ipotesi strutturale) mediante le coordinate x_0, y_0, z_0, della posizione che esso elemento occupa in un istante ben determinato t_0 (istante iniziale) rispetto ad una terna prefissata.

Nel moto del sistema, cambierà in generale di posizione anche ogni suo punto M; e il posto P, occupato da M in un istante generico, sarà da considerare funzione di t; così dicasi delle coordinate x, y, z di P; e ciò vale per ogni M. Al variare della particella M che si considera, potranno naturalmente essere, e in generale saranno, diverse le funzioni che ne rappresentano il moto. Dovremo perciò concepire P come dipendente da t e da M e conseguentemente scriveremo

$$P = P(t \mid M). \tag{1}$$

Il fatto che P dipenda da M sta più esplicitamente a significare che P (e con esso ognuna delle sue coordinate x, y, z) è funzione di quei tre parametri x_0, y_0, z_0 che contraddistinguono la speciale particella M del sistema. In forma cartesiana le equazioni del moto di un sistema continuo (con che si vuol dire del complesso dei suoi punti) assumono l'aspetto

$$(1') \qquad \begin{cases} x = x(t \mid x_0, y_0, z_0) , \\ y = y(t \mid x_0, y_0, z_0) , \\ z = z(t \mid x_0, y_0, z_0) ; \end{cases}$$

dove, per seguire le vicende di una data particella materiale M, bisogna far variare t, e non x_0, y_0, z_0 che figurano come parametri determinativi della particella.

2. La traiettoria della generica particella M si suole chiamare *linea di corrente*.

Ad ogni terna di valori di x_0, y_0, z_0 (del campo inizialmente occupato dal sistema) viene così a corrispondere una linea di corrente. In generale fra le varie linee di corrente non si hanno relazioni (tranne quelle imposte dalla continuità), perchè (ove non si facciano speciali ipotesi sulla natura del sistema) non sussistono legami fra i moti delle singole particelle; questi moti si possono definire in modo a priori qualsiasi.

Le linee di corrente costituiscono dunque in generale un sistema di ∞^3 curve. Naturalmente non è escluso che, in casi particolari, particelle diverse del sistema descrivano la stessa traiettoria (occupandovi, ben si intende, diverse posizioni in un medesimo istante); se ogni linea di corrente è comune, in questo senso, ad ∞^1 particelle, le linee di corrente si riducono ad ∞^2 (anzichè essere ∞^3 come nel caso generale). Vedremo al n. 9 che una tale circostanza si presenta per i cosiddetti *moti stazionari* o *permanenti*.

3. Va esplicitamente dichiarato che nel seguito intendiamo riferirci esclusivamente a moti continui e regolari, cioè escludiamo che durante il moto si determinino nella massa fluida cavitazioni, cioè spazi vuoti (soluzioni di continuità) o compenetrazioni materiali. Con tale limitazione si ha corrispondenza biunivoca fra le posizioni iniziali M delle singole particelle e le loro posizioni attuali P (cioè rispettivamente raggiunte in un generico istante t).

Ciò si traduce nel fatto analitico che M è a sua volta funzione ben determinata di t e di P:

$$(2) \qquad M = M(t \mid P) ;$$

e se badiamo alle coordinate, la stessa condizione equivale a richiedere non solo che siano finite e continue le funzioni x, y, z di t, x_0, y_0, z_0, definite dalle (1'), ma che di più le (1') stesse siano risolubili rispetto alle coordinate iniziali x_0, y_0, z_0, fornendole come funzioni (pure esse finite e continue) di t e delle coordinate attuali x, y, z.

Si hanno pertanto, accanto alle (1′), le formule inverse, sostanzialmente equivalenti,

$$(2') \qquad \begin{cases} x_0 = f_1(t \mid x, y, z), \\ y_0 = f_2(t \mid x, y, z), \\ z_0 = f_3(t \mid x, y, z). \end{cases}$$

Ammetteremo altresì, in conformità a quanto si fece fin dalle prime considerazioni sul moto di un unico punto (II_1, n. 5), che si tratti sempre di funzioni derivabili quante volte occorre, rispetto a tutti i loro argomenti.

In queste ipotesi, si è sicuri della risolubilità delle (1′) rispetto ad x_0, y_0, z_0, subordinatamente all'unica condizione qualitativa che sia diverso da zero il determinante funzionale

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x_0} & \dfrac{\partial x}{\partial y_0} & \dfrac{\partial x}{\partial z_0} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial x_0} & \dfrac{\partial y}{\partial y_0} & \dfrac{\partial y}{\partial z_0} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial x_0} & \dfrac{\partial z}{\partial y_0} & \dfrac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix}$$

delle x, y, z rispetto alle coordinate iniziali x_0, y_0, z_0. Tale determinante si riduce all'unità per $t = t_0$, in quanto le (1′), per $t = t_0$, si riducono a $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

In vista di ciò intenderemo sempre nel seguito che D si conservi positivo in ogni posto e in ogni istante, cui si riferiranno le nostre considerazioni.

4. La velocità $\boldsymbol{v}$ di una particella generica M ad un istante, pur esso generico, t, è definita (II_1, n. 13) come la derivata rispetto a t della posizione P occupata da M nell'istante t:

$$(3) \qquad \boldsymbol{v} = \frac{d}{dt} P(t \mid M) = \dot{P}(t \mid M).$$

Le relative componenti $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ si ottengono manifestamente dalle (1′) derivando rispetto a t (e trattandovi, ben s'intende, x_0, y_0, z_0 come costanti).

Le espressioni

$$
(3') \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{d}{dt} x\,(t \mid x_0, y_0, z_0)\,, \\[2ex] \dot{y} = \dfrac{d}{dt} y\,(t \mid x_0, y_0, z_0)\,, \\[2ex] \dot{z} = \dfrac{d}{dt} z\,(t \mid x_0, y_0, z_0)\,, \end{cases}
$$

di queste componenti, si presentano così quali funzioni degli stessi quattro argomenti t, x_0, y_0, z_0. Esse permettono quindi di fissare il vettore velocità, tostochè siano dati l'istante t e la posizione iniziale della particella, cioè la terna x_0, y_0, z_0.

5. È chiaro d'altra parte, per la natura delle cose, che la velocità $\boldsymbol{v}$ è egualmente individuata quando, fissato un istante t, ci si riferisca ad un posto determinato $P(x, y, z)$, facendogli corrispondere la particella che occupa tale posto nel detto istante. Dal punto di vista analitico, ciò equivale a considerare il vettore $\boldsymbol{v}$ come funzione di t e di P (cioè di x, y, z) anzichè di t e di M (cioè di x_0, y_0, z_0).

La rappresentazione

$$
(4) \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t \mid P)
$$

di questa seconda dipendenza funzionale si ha nel modo più diretto dalla (3), intendendo che (eseguita la derivazione rispetto a t) venga sostituita nel secondo membro, al posto di M, la sua espressione (2). In forma cartesiana, ciò equivale a dire, che, nei secondi membri delle (3'), vanno introdotte al posto di x_0, y_0, z_0 le loro espressioni (in termini di t e di x, y, z), fornite dalle (2'). Designando con v_x, v_y, v_z le funzioni di t, x, y, z, che ne risultano, si ha

$$
(4') \qquad \begin{cases} \dot{x} = v_x(t \mid x, y, z)\,, \\ \dot{y} = v_y(t \mid x, y, z)\,, \\ \dot{z} = v_z(t \mid x, y, z)\,; \end{cases}
$$

e naturalmente si ritroverebbero le (3') se nelle (4') si riponessero per x, y, z i loro valori (1').

Quando nella (4) [o, ciò che è lo stesso, nelle (4')] la t non compare esplicitamente, cosicchè la velocità $\boldsymbol{v}$, in un dato posto, è sempre la stessa, il moto (del considerato sistema continuo) si dice *stazionario* o *permanente* (n. 2).

6. In linea concettuale, giova rilevare che, nello studio del moto di un sistema continuo, si può proporsi di tener dietro o all'andamento di una particella generica (ciò che costituisce il così detto *punto di vista molecolare* o *lagrangiano*); ovvero all'andamento del moto in un generico posto (*punto di vista locale* o *euleriano*). I problemi tecnici si presentano per lo più sotto questo secondo aspetto; p. es., nel moto dell'acqua lungo tubi o canali, quel che interessa essenzialmente è di fissarne il comportamento in date sezioni.

In queste prime considerazioni di Cinematica, abbiamo una sola caratteristica importante: la velocità $\boldsymbol{v}$. Sotto l'aspetto euleriano, la rappresentazione di un dato fenomeno di moto è dunque fornita da formule del tipo (4) [o (4')], che definiscono $\boldsymbol{v}$ in termini del posto e del tempo.

Sono invece le originarie equazioni (1) o (1') del moto delle singole particelle [e non le (2) o (2')] che rispecchiano nel modo più completo il punto di vista lagrangiano.

7. Dalla (1) [o dalle (1')] si passa, come abbiamo visto, alla (4) [o alle (4')] mediante derivazione e operazioni in termini finiti, quest'ultime consistendo nel sostituire a M la sua espressione (2) [o, se si vuole, a x_0, y_0, z_0 le (2')]. Con linguaggio più espressivo si può dire che, *risoluto un problema di moto sotto l'aspetto lagrangiano* [cioè ottenuta la (1)], *il passaggio alla sua risoluzione euleriana* [cioè alla (4)] *richiede soltanto operazioni in termini finiti.*

Ma non sussiste la proposizione reciproca, poichè, immaginando di conoscere la risoluzione euleriana, cioè la (4), ovvero le espressioni (4') delle componenti della velocità $\boldsymbol{v}$ in termini di x, y, z, t, non si può risalire alla (1) con sole derivazioni ed eliminazioni. Le (4') si presentano come un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine nelle incognite funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, che reggono il moto di una particella generica, e perciò ci troviamo di fronte ad una questione, già accennata nella Cinematica del punto (II_1, nn. 17-18): *determinazione del moto, note le componenti della velocità in termini di* t, x, y, z, il che esige l'integrazione del corrispondente sistema differenziale. Ciò porta ad assegnare le incognite x, y, z in funzione della variabile indipendente t e di tre costanti, che si possono sempre scegliere in guisa da rappresentare i valori iniziali x_0, y_0, z_0 di x, y, z. Ecco dunque come si arriverebbe alle (1'), note le (4').

Concludiamo quindi che il passaggio dal punto di vista euleriano a quello lagrangiano richiede la ulteriore integrazione di un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine.

§ 2. – Linee di flusso.

8. Fissato un generico istante t, ad ogni punto P del campo (occupato dal sistema in tale istante) corrisponde, a norma della (4), una ben determinata velocità vettoriale $\boldsymbol{v}$; in altre parole, ad ogni istante t della durata del moto risulta definito un campo vettoriale costituito dalle velocità che in quell'istante spettano alle varie particelle M, considerate ciascuna nella posizione P istantaneamente occupata.

Di questo campo delle velocità, corrispondenti al generico istante t, giova considerare le linee di flusso (VIII, n. 5), le quali saranno definite dalle equazioni differenziali

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

dove t [che in generale compare esplicitamente nelle v_x, y_v, v_z a norma delle (4')] si deve considerare come prefissato e va quindi trattato come un parametro costante.

Poichè al variare di t, varia in generale il corrispondente campo delle velocità $\boldsymbol{v}$, così risulta in generale variabile, da istante a istante, anche il sistema ∞^2 delle linee di flusso.

9. Vi è un caso manifesto, in cui non si alterano col tempo le ∞^2 linee di flusso: quello in cui non si altera la $\boldsymbol{v}$ (di ogni singolo posto), ossia si tratta (n. 5) di un *moto permanente.*

In questo caso alle linee di flusso compete un'altra importante proprietà. Esse si identificano colle linee di corrente (n. 2).

Per rendersene conto, basta immaginare una generica linea di flusso L, e verificare che ogni particella M, la quale ad un dato istante si trova su L, vi permane indefinitamente, sicchè L è anche linea di corrente. Supponiamo dunque che M, in un istante t qualsiasi, si trovi in P. Nell'istante $t + dt$, poichè lo spostamento vale $\boldsymbol{v}dt$ la particella occuperà la posizione

$$P' = P + \boldsymbol{v}dt,$$

la quale (a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo) appartiene ancora ad L. Si ripete pertanto in capo al tempuscolo dt la circostanza, supposta nell'istante t, che M stia su L. La conclusione sussiste dunque in qualsiasi istante.

Non sarà inutile far rilevare come in questo ragionamento si sfrutti essenzialmente l'ipotesi che il moto sia permanente, cioè che le linee di flusso siano le stesse in ogni istante.

In caso diverso, infatti, si potrebbe bensì inferire, come sopra, che M si trova ancora su L nell'istante $t + dt$, ma in tale istante la L non rimarrebbe, in generale, linea di flusso; per conseguenza, non si avrebbero più nella nuova posizione P' le condizioni supposte in P. Per chiarire meglio questa distinzione, consideriamo l'esempio semplicissimo di un *moto traslatorio* della massa fluida. Se C è la traiettoria, a priori qualsiasi, di una particolare particella, tutte le altre particelle descrivono curve congruenti a C (III_1, n. 4) che costituiscono complessivamente le linee di corrente. Invece le linee di flusso, in un qualsiasi istante, sono evidentemente rette, perchè (trattandosi di moto traslatorio), tutti i punti sono animati, in quell'istante, dalla stessa velocità vettoriale.

10. La coincidenza fra linee di corrente e linee di flusso, nei moti permanenti, si può naturalmente constatare anche senza considerazioni infinitesimali, sfruttando le sole definizioni formali.

Basta pensare che, dal punto di vista analitico, le equazioni delle linee di corrente (traiettorie delle singole particelle) non sono altro che il risultato della eliminazione di t fra le (1'). D'altra parte le (1') stesse costituiscono l'integrale generale delle (4'). Le equazioni delle linee di corrente sono dunque tutte e sole le conseguenze delle (4') esenti da t.

Questo vale in ogni caso. Nel caso speciale in cui le v_x, v_y, v_z sono indipendenti da t (moti permanenti), tale variabile compare nelle (4') solo pel tramite del suo differenziale dt. Tutte e sole le conseguenze delle (4') esenti da t si possono quindi ricavare anche per semplice eliminazione del dt, ciò che dà ovviamente le proporzioni (5), ossia le equazioni differenziali delle linee di flusso. Integrate che siano, esse devono necessariamente coincidere colle equazioni delle linee di corrente in quanto rappresentano il risultato della stessa operazione matematica.

§ 3. – Derivate locali e derivate sostanziali.

11. Nello studio del moto di un sistema continuo, è spesso essenziale di prendere in considerazione il modo in cui varia, per effetto del moto, una qualche quantità scalare o vettoriale. Pensiamo, per fissare le idee, alla caratteristica tipica pel moto, la velocità $\mathbf{v}$, ma scriviamo q, per mettere in evidenza che si tratta di un elemento, a priori qualsiasi (scalare o vettoriale; geometrico o cinematico o d'altra natura).

Si supponga in ogni caso che q abbia, ad ogni istante, una ben definita determinazione, tanto in ogni posto P del campo, in cui ha luogo il moto (punto di vista euleriano), quanto per ogni particella mobile M (punto di vista lagrangiano). Nella prima accezione scriveremo

$$q = q(t \mid P) \; ; \tag{6}$$

nella seconda

$$q = q(t \mid M) \; , \tag{7}$$

coll'avvertenza che si passa da (6) a (7), considerandovi P non come un posto generico, indipendente da t, bensì come la funzione (1) di t e di M, che determina il moto del sistema.

Ciò premesso, è naturale di definire come *derivata locale* di q quella calcolata, in base alla (6), trattando P come costante; e infatti essa contempla proprio una variazione *locale* di q, cioè quella che si verifica in un dato posto (sempre lo stesso P) al variare di t. La si suol designare con

$$\frac{\partial q}{\partial t} .$$

Del pari giustificata è la qualifica di *derivata sostanziale* o *molecolare*, con che si suole designare la derivata rispetto a t della funzione (7), in cui si tratti M come costante. Con ciò, infatti, si viene a fissare una determinata particella materiale M del sistema, e si contempla il modo di variare con t della quantità q, riferita sempre alla stessa particella. Ad una tale derivata si riserva, per consuetudine, la notazione tradizionale

$$\frac{dq}{dt} \quad \text{oppure} \quad \dot{q}.$$

Fra le due derivate, locale e molecolare, passa una relazione notevole. Per precisarla si fissino t e P, e si immagini:

1°) di valutare la $\partial q/\partial t$ ad essi relativa;

2°) di considerare quella tale particella materiale M che occupa nell'istante t il posto P, calcolando, per questa M (e sempre per lo stesso istante t), la dq/dt in base alle (7);

3°) di rendere formalmente esplicita la dipendenza (6) di q da P, introducendone le coordinate x, y, z e scrivendo in conformità

$$q = q(t \mid x, y, z) \, . \tag{6'}$$

Diciamo che si ha

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} v_x + \frac{\partial q}{\partial y} v_y + \frac{\partial q}{\partial z} v_z . \tag{8}$$

Per rendersene conto, basta pensare che la (7) proviene dalla (6) considerandovi P come punto mobile, in base alla (1), o, ciò che è lo stesso, proviene dalla (6′), considerandovi le x, y, z come definite dalle equazioni del moto (1′). Attesa tale provenienza della (7), si può calcolarne la derivata rispetto a t (in quanto si trattino x_0, y_0, z_0 come costanti), cioè, per definizione, la dq/dt, applicando alla (6′) la regola di derivazione delle funzioni composte. E si ha

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial q}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial q}{\partial z} \dot{z} ,$$

che equivale precisamente alla (8), in virtù delle (4′).

12. Non è fuori di luogo rilevare che alla (8) si può arrivare anche con una considerazione differenziale espressiva, per quanto sostanzialmente equivalente al procedimento testè seguito.

Sia ancora M la particella che, nell'istante generico t, occupa la posizione $P(x, y, z)$. Tale particella è dotata della velocità $\boldsymbol{v}$; quindi la posizione che le spetta nell'istante $t + dt$ sarà (a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo)

$$P' = P + \boldsymbol{v} dt .$$

La determinazione di q, relativa allo stesso istante $t + dt$, potrà in conformità desumersi dalla (6), purchè però (oltre ad incrementare t di dt) si sostituisca P' a P, ossia, badando alla (6′), si introducano, in luogo delle coordinate x, y, z di P, quelle di P' che sono (sempre a meno d'infinitesimi d'ordine superiore)

$$x + v_x dt , \quad y + v_y dt , \quad z + v_z dt .$$

Ne consegue, applicando a

$$q(t + dt \,|\, x + v_x dt,\ y + v_y dt,\ z + v_z dt)$$

il teorema sul differenziale totale, che l'incremento corrispondente di q vale

$$dt \left\{ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} v_x + \frac{\partial q}{\partial y} v_y + \frac{\partial q}{\partial z} v_z \right\} .$$

Ma tale incremento, subito da q in quanto si segue la M nel suo movimento, altro non è (n. prec.) che il prodotto di dt per la derivata sostanziale $\dot{q}$ di q.

Eguagliando, risulta appunto la (8).

13. Espressione euleriana dell'accelerazione. — La più importante applicazione della formula (8) concerne il caso, in cui si assume per q (n. 11) la velocità $\boldsymbol{v}$ delle particelle mobili. In luogo della (6) va qui considerata la (4). D'altra parte la derivata sostanziale di $\boldsymbol{v}$ è manifestamente la accelerazione $\boldsymbol{a}$ della generica particella di cui si tratta, cioè (n. prec.) della M che occupa il posto P all'istante t. La (8) assume pertanto l'aspetto

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} v_z \tag{9}$$

e ci porge un'espressione euleriana dell'accelerazione. Infatti il secondo membro dipende soltanto dalla espressione locale di $\boldsymbol{v}$, e quindi delle sue componenti v_x, v_y, v_z in termini di t, x, y, z, quali risultano dalle (4) e (4').

Proiettando sugli assi, si traggono dalla (9) le espressioni delle tre componenti $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ di $\boldsymbol{v}$ sotto la forma:

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial v_x}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z, \\ \ddot{y} &= \frac{\partial v_y}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z. \end{aligned}\right. \tag{9'}$$

CAPITOLO X.

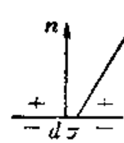
GENERALITÀ SULLA MECCANICA DEI SISTEMI CONTINUI

§ 1. – Sforzi, sforzi specifici, postulati relativi.

1. Sia dato un sistema materiale continuo (per es. un solido, o una massa fluida o pastosa), e si conoscano le forze attive che ne sollecitano i singoli punti. Se questi fossero affatto liberi, le forze attive coinciderebbero per ciascuno di essi colla forza totale e potremmo scrivere senz'altro le equazioni del moto. In generale però non è così, ma, in un sistema continuo (anche privo di legami nel senso cinematico della parola), le particelle del sistema, a norma delle loro caratteristiche peculiari (massa, posizione, velocità, ecc.) e della sollecitazione esterna, subiscono delle azioni da parte delle particelle contigue. Per avere la forza totale, applicata ad una particella generica, bisognerebbe quindi poter valutare l'effetto di queste azioni, provenienti dalle particelle circostanti, che si sogliono chiamare *azioni molecolari*. Non è punto facile riconoscere direttamente quali siano le azioni molecolari che si esercitano sopra una singola particella. Solo degli effetti di insieme (sforzi, pressioni, tensioni) sono accessibili all'esperienza diretta. Giova perciò far intervenire questi elementi, precisarne i caratteri fisici ed esprimerne in forma matematica gli attributi fondamentali. Come vedremo, si ha così quanto basta per formare le equazioni del moto dei singoli punti del sistema.

Ciò premesso, veniamo alla definizione di *sforzo*.

2. Nell'interno del sistema dato S (supposto a tre dimensioni), si consideri un generico elemento di superficie $d\sigma$ e su questo $d\sigma$ si fissi una faccia positiva (o ciò che è lo stesso si fissi un verso positivo sulla sua normale n, che si intenderà rivolto dalla banda della faccia positiva). Dall'insieme di tutte le forze molecolari, che le particelle, situate dalla banda della faccia negativa, esercitano sulle particelle situate dalla banda opposta, possiamo immaginare di staccare tutte e sole le forze, le cui linee d'azione attraversano il $d\sigma$. Il loro risultante, supposto applicato in un punto (per es., nel baricentro) dell'elemento $d\sigma$, si definisce come lo *sforzo che si esercita sulla faccia negativa dell'elemento considerato.* Esso si suole qualificare come una *pressione*, quando la sua direzione forma un angolo acuto colla direzione positiva della normale, come una *tensione* o *trazione* nel caso opposto.



Per apprezzare il contenuto della precedente convenzione, giova fissare l'attenzione su quelle particelle del sistema che sono contigue all'elemento $d\sigma$ dalla parte della faccia (e della normale) positiva, e su cui, quindi, si esercita lo sforzo. È rispetto all'insieme di queste particelle (considerato come un corpo a sè) che lo sforzo appare quale *pressione* o *tensione*, secondo che forma colla normale positiva n un angolo acuto od ottuso.

3. Se si osserva che le azioni mutue di due punti materiali, e quindi in particolare le azioni molecolari, seguono il principio della reazione direttamente opposta all'azione (XI_1, n. 1), si ha senz'altro dalla definizione di sforzo che *gli sforzi corrispondenti a facce opposte di un medesimo elemento sono direttamente opposti.*

4. Gli sforzi si fanno direttamente palesi soltanto in quei casi in cui l'elemento superficiale ipotetico $d\sigma$ ha un'esistenza reale nel sistema considerato.

Godono di questa proprietà gli elementi appartenenti alla superficie di separazione di due corpi. Le pressioni o trazioni sono allora accessibili all'esperienza quotidiana e spesso anche misurabili.

Ciò avviene, ad es., per la pressione (normale in condizioni di equilibrio, od anche di moto quando si prescinda dalla viscosità) di un liquido o di un gas sopra una parete; ciò avviene ancora per gli sforzi di distensione, torsione o compressione (in generale non più normali) che si esercitano in certe sezioni di pezzi, opportunamente cimentati colle macchine che servono alla misura della resistenza dei materiali.

5. Per definizione, gli sforzi provengono da azioni molecolari, cioè esercitantisi fra particelle vicinissime.

È importante farsi un'idea dell'ordine di grandezza del così detto *raggio d'azione molecolare*, cioè della distanza massima a cui sono sensibili le dette azioni: più precisamente (ed è appunto questo che interessa) dei loro effetti globali.

A ciò risponde una bella esperienza eseguita dal QUINCKE nel 1869 [1]. Volendo studiare i fenomeni di capillarità che si producono versando dell'acqua o del mercurio in una provetta di vetro, egli ne fece inargentare la parte interna con spessore variabile secondo le altezze (da un certo massimo fino a zero, o meglio al minimo praticamente realizzabile).

Il fatto accertato fu che, variando l'altezza del liquido della provetta, i fenomeni capillari presentano caratteristiche identiche a quelle che si avrebbero fra liquido e argento massiccio, non appena lo spessore dell'argentatura (in prossimità del livello superiore del liquido) raggiunga 0,5 micron [1 micron = 1 millesimo di millimetro = 10^{-4} cm]. Da ciò risulta che, al di là di tale limite, l'influenza della parete di vetro è nulla: le relative azioni molecolari sulle particelle del liquido non sono più sensibili.

Prendendo norma da questo caso tipico, possiamo ritenere 10^{-4} cm come *limite superiore del raggio di attività molecolare.*

6. Prima di procedere, conviene fissare in modo preciso la natura delle forze attive che si suppongono applicate al nostro sistema.

A priori esse possono essere di quattro specie:

a) *forze finite*, applicate in un certo numero discreto di punti;

b) *forze lineari* (cioè dell'ordine di un elemento ds di linea) distribuite con continuità sopra linee e quindi del tipo $\boldsymbol{F}ds$ con $\boldsymbol{F}$ vettore finito [2];

c) *Forze superficiali* distribuite con continuità sopra un numero finito di superficie, e quindi del tipo $\boldsymbol{F}d\sigma$, con $d\sigma$ elemento superficiale ed $\boldsymbol{F}$ vettore finito;

d) *forze di massa* (come, ad es., la gravità) distribuite in tutto il sistema e tali che il risultante di quelle tra esse, che sollecitano un determinato elemento dm, si può esprimere con $\boldsymbol{F}dm$, $\boldsymbol{F}$ essendo al solito un vettore finito; queste ultime sono dell'ordine di un elemento dS di volume, ciò che si mette in evidenza, introducendo la densità μ e scrivendo $\mu\boldsymbol{F}dS$.

Nello studio dei sistemi continui a tre dimensioni presentano importanza maggiore le *forze di massa* e le *forze superficiali*. Quelle dei primi due tipi *a*) e *b*) intervengono meno frequentemente (e

---

[1] GEORG HERMANN QUINCKE, n. nel 1834 a Francoforte, fu professore di Fisica nelle Università di Würzburg e di Heidelberg.

[2] Abbiamo avuto occasione di considerare le forze di questo tipo nella statica dei fili (cfr. $XIII_1$).

si possono all'occorrenza trattare per via di limite). Ci accontenteremo quindi di riferirci al caso che le forze attive constino di forze di massa e di forze superficiali.

Supporremo le forze di massa $\mu \boldsymbol{F} dS$ distribuite con continuità entro S e le forze superficiali $\boldsymbol{\Psi} d\sigma$ agenti soltanto su elementi $d\sigma$ del contorno di S e distribuite esse pure in modo continuo.

Le forze superficiali $\boldsymbol{\Psi}$, ridotte all'unità di superficie, si denominano *sforzi esterni*, o, più specialmente, secondo i casi, *pressioni* o *tensioni esterne*.

7. Tali essendo le forze attive, si è spontaneamente condotti dall'intuizione a precisare il comportamento qualitativo degli sforzi, coi seguenti postulati.

POSTULATO I. – *Lo sforzo, che si esercita sopra un generico elemento superficiale* $d\sigma$ interno al sistema, *è dell'ordine di questo elemento talchè, se esso, si rappresenta sotto la forma* $\boldsymbol{\Phi} d\sigma$, $\boldsymbol{\Phi}$ *designa un vettore finito.*

Questo $\boldsymbol{\Phi}$ si chiama lo *sforzo specifico*, relativo all'elemento $d\sigma$, od anche (mettendo in evidenza la direzione positiva n della normale al $d\sigma$) relativo alla direzione orientata n, nel punto che si considera. In accordo con questa dicitura, codesto sforzo specifico si designerà più precisamente con $\boldsymbol{\Phi}_n$ (¹).

Le dimensioni di uno sforzo specifico (quoziente di una forza per una superficie) sono $ml^{-1}t^{-2}$.

POSTULATO II. – *Lo sforzo specifico* $\boldsymbol{\Phi}_n$ *varia con continuità al variare del punto e della direzione orientata cui esso si riferisce. Più precisamente si vuol dire con ciò che* $\boldsymbol{\Phi}_n$, *e con esso le sue componenti, sono da ritenersi, entro* S, *funzioni continue e derivabili degli argomenti, da cui dipendono.*

POSTULATO III. – È questo, si può dire, un complemento del I. Esso concerne non la somma vettoriale, cioè lo sforzo, ma la somma dei valori assoluti delle azioni molecolari che si esercitano su $d\sigma$. E ammette che il comportamento qualitativo sia lo stesso, ossia che la somma di questi valori assoluti sia anche essa del-

(¹) Questa notazione $\boldsymbol{\Phi}_n$ non può dar luogo ad equivoci con la notazione v_n costantemente usata sin qui per indicare la componente di un vettore $\boldsymbol{v}$ secondo la direzione orientata n. Si noti invero che qui $\boldsymbol{\Phi}_n$ è una *grandezza vettoriale* (dipendente dalla direzione orientata n). La componente di $\boldsymbol{\Phi}_n$ secondo una qualsiasi direzione orientata r andrà designata con Φ_{nr}.

l'ordine di $d\sigma$, e quindi rappresentabile sotto la forma $H d\sigma$, dove H designa uno scalare che resta finito comunque si faccia rimpicciolire l'elemento $d\sigma$.

§ 2. – Equazioni cardinali.

8. Indichiamo con S_1 una porzione qualsiasi del campo (a tre dimensioni) occupato dal sistema materiale che si considera, e trattando la parte del fluido che sta in S_1 come un sistema a sè, ricorriamo ai teoremi generali delle quantità di moto e dei momenti delle quantità di moto (V, § 2). Nelle equazioni corrispondenti le forze interne non recano, come sappiamo, contributo alcuno, cosicchè, invece di tener conto delle forze totali che sollecitano i singoli punti del sistema, potremo limitarci alle forze attive ed a quelle delle azioni molecolari che sono esterne rispetto ad S_1, cioè, designando con σ_1 il contorno di S_1, alle azioni molecolari che i punti di S esterni a σ_1, ed immediatamente prossimi a σ_1 stesso, esercitano sui punti interni.

9. Fissiamo intanto la nostra attenzione sulle azioni che si esercitano attraverso un generico elemento $d\sigma_1$. Diciamo $\boldsymbol{\alpha}$ una generica tra esse, Q il punto in cui la rispettiva linea d'azione incontra $d\sigma_1$, n la normale a $d\sigma_1$, volta verso l'interno del campo S. Il risultante di queste azioni

$$\Sigma\boldsymbol{\alpha}$$

sarà, per la definizione stessa di sforzo specifico,

$$\boldsymbol{\Phi}_n d\sigma_1 .$$

10. Formiamone altresì il momento risultante rispetto a un punto (fisso) O. Al momento della generica $\boldsymbol{\alpha}$, rispetto ad O, si potrà attribuire la forma

$$(Q - O) \wedge \boldsymbol{\alpha} ,$$

come se Q fosse il punto d'applicazione della forza (essendo lecito, senza alterarne il momento, farla scorrere a piacere lungo la sua linea d'azione). Se si indica con P un punto di $d\sigma_1$, scelto con criterio arbitrario ma non dipendente dalle varie forze $\boldsymbol{\alpha}$, basta notare che

$$Q - O = (Q - P) + (P - O)$$

e badare alla proprietà distributiva del prodotto vettoriale, per poter dare al momento testè considerato l'aspetto

$$(P - O) \wedge \boldsymbol{\alpha} + (Q - P) \wedge \boldsymbol{\alpha} .$$

La somma estesa alle varie $\boldsymbol{\alpha}$ ci dà (ove si noti che, nel primo addendo, $P - O$ è fattore comune e che $\Sigma\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Phi}_n d\sigma_1$)

$$(P - O) \wedge \boldsymbol{\Phi}_n d\sigma_1 + \Sigma(Q - P) \wedge \boldsymbol{\alpha} .$$

Si avverta che il vettore $Q - P$ ha per estremi due punti di $d\sigma_1$, sicchè la sua lunghezza non può superare la massima dimensione ε di questo elemento superficiale. Ne consegue che il valore assoluto di $(Q - P) \wedge \boldsymbol{\alpha}$ non può superare $\varepsilon\alpha$.

Se ora si ricorda il postulato III e la circostanza ben nota che la lunghezza del risultante non può superare la somma delle lunghezze dei componenti, si riconosce che il vettore $\Sigma(Q - P) \wedge \boldsymbol{\alpha}$ ha lunghezza inferiore ad $\varepsilon H d\sigma_1$. Poichè ε converge a zero insieme con $d\sigma_1$, si tratta di un infinitesimo d'ordine superiore (rispetto a $d\sigma_1$, considerato come principale) e, in conclusione, il momento risultante, rispetto ad O, delle azioni molecolari, che attraversano $d\sigma_1$ (e provengono dall'esterno di S_1) si può identificare, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, col momento

$$(P - O) \wedge \boldsymbol{\Phi}_n d\sigma_1$$

del loro risultante, cioè dello sforzo $\boldsymbol{\Phi}_n d\sigma_1$, applicato in un punto (qualsiasi) P dell'elemento.

11. Veniamo oramai alle equazioni cardinali, tenendo presente che, per quanto abbiamo or ora detto, tutto si riduce a considerare, accanto alle forze di massa $\mu \boldsymbol{F} dS_1$, le quali si riferiscono ai singoli elementi dS_1 del campo, gli sforzi superficiali $\boldsymbol{\Phi}_n d\sigma_1$, corrispondenti ai singoli elementi $d\sigma_1$ del relativo contorno.

Avremo pertanto un risultante

$$\boldsymbol{R} = \int_{S_1} \mu \boldsymbol{F} dS_1 + \int_{\sigma_1} \boldsymbol{\Phi}_n d\sigma_1 \tag{1}$$

e un momento risultante

$$\boldsymbol{M} = \int_{S_1} (P - O) \wedge \mu \boldsymbol{F} dS_1 + \int_{\sigma_1} (P - O) \wedge \boldsymbol{\Phi}_n d\sigma_1 , \tag{2}$$

dove $P - O$ rappresenta, anche nell'integrale di spazio, il vettore che va dal polo O ad un elemento generico del campo di integrazione.

È chiaro d'altra parte che, se $\boldsymbol{v}$ è la velocità della massa elementare $dm = \mu dS_1$, il risultante e il momento risultante delle quantità di moto si possono rappresentare, in base alle formule (22) e (24) del Cap. IV (in cui alle somme si sostituiscano integrali), sotto la forma

$$\boldsymbol{Q} = \int_{S_1} \mu \boldsymbol{v} dS_1 ,$$

$$\mathbf{K} = \int_{S_1} (P - O) \wedge \mu \boldsymbol{v} dS_1 .$$

E di qui, tenendo conto che la massa elementare μdS_1 è invariabile di fronte al moto, e quindi indipendente da t, si trae:

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \int_{S_1} \mu \boldsymbol{a} dS_1 , \tag{3}$$

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \int_{S_1} (P - O) \wedge \mu \boldsymbol{a} dS_1 , \tag{4}$$

dove $\boldsymbol{a}$ denota l'accelerazione della massa elementare $dm = \mu dS_1$.

Inteso che in queste formule si tratti di derivazione rispetto ad assi fissi, si hanno le *equazioni cardinali* nella forma consueta

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R} , \tag{5}$$

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \boldsymbol{M} . \tag{6}$$

12. Le (5), (6) valgono per una porzione qualsiasi S_1 del sistema e quindi, in particolare, per l'intero campo S da esso occupato. In tal caso gli sforzi $\boldsymbol{\Phi}_n d\sigma$ si riferiscono agli elementi superficiali del contorno, e coincidono (n. 6) con gli sforzi $\boldsymbol{\Psi} d\sigma$ esterni al sistema (per lo più direttamente assegnati, al pari delle forze di massa).

Nel caso dell'equilibrio si trovano, naturalmente, sia per il sistema totale che per ogni sua parte, le equazioni universali della statica (XI_1, § 2):

$$\boldsymbol{R} = 0 , \quad \boldsymbol{M} = 0 .$$

A norma delle (1), (2), esse danno luogo all'enunciato seguente:

In condizioni di equilibrio, risultante e momento risultante delle forze di massa sono direttamente opposti agli analoghi elementi relativi agli sforzi superficiali.

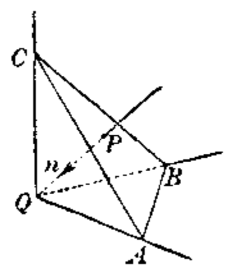
§ 3. – Sforzi specifici intorno ad un medesimo punto.

13. Si immaginino spiccate da un medesimo punto di S tre semirette ortogonali due a due, per es. parallele alle direzioni positive Ox, Oy, Oz degli assi di riferimento. Sulle facce positive degli elementi superficiali ad esse perpendicolari si eserciteranno tre sforzi specifici, che indicheremo, com'è naturale, con

$$\mathbf{\Phi}_x \, , \quad \mathbf{\Phi}_y \, , \quad \mathbf{\Phi}_z \, :$$

e, accanto a questi, considereremo lo sforzo specifico $\mathbf{\Phi}_n$, relativo alla semiretta generica n.

Detti α, β, γ i coseni direttori di n (rispetto all'assegnata terna ortogonale), ci proponiamo di mostrare che il vettore $\mathbf{\Phi}_n$ si esprime in modo assai semplice in funzione di α, β, γ e dei vettori (fissi, cioè indipendenti da n) $\mathbf{\Phi}_x$, $\mathbf{\Phi}_y$, $\mathbf{\Phi}_z$; ben s'intende che i quattro sforzi debbono riferirsi ad elementi uscenti dal medesimo punto.



14. Giova, a tal fine, ricorrere al cosiddetto *tetraedro del* CAUCHY [1], ed ecco in qual modo.

Sia P il punto interno di S, per cui si vuole stabilire l'accennata relazione. Supposto dapprima che la n *non* sia parallela ad uno dei piani coordinati, si può costruire un tetraedro $T = QABC$ col vertice in un qualsiasi punto Q della semiretta positiva n di origine P, la base $T = ABC$ passante per P e perpendicolare ad n, gli spigoli QA, QB, QC paralleli agli assi coordinati.

---

[1] AUGUSTIN LOUIS CAUCHY, n. a Parigi nel 1789, m. a Sceau (dipartimento della Senna) nel 1857. Fu Professore all'École Polytechnique e membro dell'Istituto di Francia. Dopo la rivoluzione del 1830 emigrò come precettore del Duca di Bordeaux. Tenne cattedra per breve tempo a Praga e a Torino. Tornato in Francia, insegnò matematica nel collegio dei Gesuiti di Parigi, finchè, nel 1848, passò alla Sorbona. Il CAUCHY è uno dei matematici più grandi di tutti i tempi. Fondò la teoria delle funzioni di variabile complessa e ne stabilì i risultati di maggior portata, facendone subito mirabili applicazioni alle più disparate questioni analitiche (dai teoremi di esistenza fino alla valutazione asintotica degli integrali delle equazioni differenziali). Si può ben dire che egli ha così schiuso le vie maestre dell'Analisi moderna. Sono pur classiche le sue ricerche di Ottica e quelle, cui si allude nel testo, sulla teoria dei sistemi continui, e in particolare sulla Idrodinamica. Le sue opere comprendono 27 volumi.

Immaginiamo scelto Q abbastanza vicino a P, perchè il tetraedro T sia tutto interno ad S, e ci riserviamo di far poi avvicinare indefinitamente Q a P.

15. Fissiamo intanto la nostra attenzione su una delle tre facce del tetraedro, p. es. su quella perpendicolare a QA. La sua inclinazione sulla base ABC è misurata dall'angolo delle rispettive normali, cioè di Ox con n.

Perciò, detta τ l'area della base, l'area τ_1 di QBC, che ne è la proiezione, risulterà espressa da

$$\tau_1 = \tau \, | \alpha | \, .$$

E analoga relazione

$$d\tau_1 = d\tau \, | \alpha |$$

passerà tra un generico elemento $d\tau$ della base e la sua proiezione sul piano QBC.

Osserviamo ora che, a priori, possono darsi due casi: lo spigolo QA, parallelo ad Ox, ne ha anche lo stesso verso, oppure ha verso opposto.

Nel primo caso la direzione orientata della normale alla faccia QBC, volta verso l'interno del tetraedro, sarà la direzione positiva dell'asse x, nel secondo caso la negativa. E gli sforzi superficiali relativi ai vari elementi $d\tau_1$ della faccia si potranno conseguentemente designare con

$$\mathbf{\Phi}_x d\tau_1 \quad ,$$

ovvero con

$$\mathbf{\Phi}_{-x} d\tau_1 \, ,$$

il che è quanto dire (n. 3)

$$- \mathbf{\Phi}_x d\tau_1 \quad .$$

Se ora si osserva che la QP (interna al tetraedro per costruzione) forma in ogni caso un angolo acuto con ciascuno degli spigoli uscenti da Q, talchè l'opposta direzione PQ, ossia n, forma in ogni caso un angolo ottuso, apparisce chiaro che, nella prima eventualità (QA diretto come Ox), $\alpha = \cos \widehat{nx}$ risulta negativo, e quindi

$$d\tau_1 = d\tau \, | \alpha | = - \alpha d\tau \; ;$$

nella seconda eventualità si ha invece

$$d\tau_1 = \alpha d\tau \, .$$

Ne desumiamo che lo sforzo relativo all'elemento $d\tau_1$ può, in entrambi i casi, essere rappresentato da

$$-\alpha\mathbf{\Phi}_x d\tau\,.$$

16. Analogamente si riconosce che gli sforzi relativi alle altre due facce del tetraedro QCA, QAB, e precisamente allo stesso $d\tau$ della base, sono esprimibili con

$$-\beta\mathbf{\Phi}_y d\tau\ , \qquad -\gamma\mathbf{\Phi}_z d\tau\ ;$$

mentre, essendo, per ogni $d\tau$, n la direzione della normale volta verso l'interno del tetraedro, sarà

$$\mathbf{\Phi}_n d\tau$$

lo sforzo corrispondente.

17. Dopo ciò è manifesto che il risultante $\boldsymbol{R}'$ di tutti gli sforzi superficiali, che si esercitano sulle quattro facce del tetraedro, potrà ottenersi sommando i contributi, che provengono da un generico elemento $d\tau$ della base e dalle sue tre proiezioni sulle facce QBC, QCA, QAB, sotto la forma

$$\boldsymbol{R}' = \int_\tau [\mathbf{\Phi}_n - (\alpha\mathbf{\Phi}_x + \beta\mathbf{\Phi}_y + \gamma\mathbf{\Phi}_z)]d\tau\,.$$

Per procedere con speditezza, giova intródurre una notazione apposita al fine di indicare determinazioni *intermedie*, nel senso che ora preciseremo, fra quelle che spettano ad un generico vettore $\boldsymbol{v}$ funzione dei punti P di un campo C (a una, due o tre dimensioni). Riguarderemo come *determinazione intermedia* di $\boldsymbol{v}$ entro C e designeremo con $\boldsymbol{v}^*$ ogni vettore le cui componenti (secondo gli assi coordinati e, quindi, come è facile verificare, anche secondo una direzione qualsiasi) hanno valori compresi fra il massimo e il minimo di quelli che competono alle omologhe componenti di $\boldsymbol{v}$ entro C.

Va notato che mentre, supposta la continuità, ciascuna componente di $\boldsymbol{v}^*$, diciamo per es. v_x^*, è certamente una delle determinazioni assunte dalla funzione v_x in qualche punto di C, non si può dire lo stesso per il vettore $\boldsymbol{v}^*$: basta pensare che v_x^*, v_y^*, v_z^* sono, in generale, valori assunti da v_x, v_y, v_z in luoghi, diciamo pure superficie, di C, che possono non aver punti comuni.

Ciò posto, riprendiamo la precedente espressione di $\boldsymbol{R}'$, e immaginiamo di applicare *a ciascuna delle tre componenti* dell'integrale che sta a secondo membro il primo teorema della media, che con ciascuno dei tre integrali scalari può essere espresso sotto forma del prodotto del campo di integrazione τ (area del triangolo ABC) per il valore che la funzione sotto il segno prende in un qualche punto interno al campo.

Risulta ovviamente

$$R' = \tau[\Phi_n{}^* - (\alpha\Phi_x{}^* + \beta\Phi_y{}^* + \gamma\Phi_z{}^*)] \,. \tag{7}$$

18. La prima equazione cardinale (5), dato che $\boldsymbol{R}$ è il risultante di tutte le forze (di massa e superficiali), si scriverà, indicando con $\mathcal{T}$ il nostro tetraedro, con $d\mathcal{T}$ il suo elemento generico e ricordando le (3) e (7),

$$\int_{\mathcal{T}} \mu \boldsymbol{a} d\mathcal{T} = \int_{\mathcal{T}} \mu \boldsymbol{F} d\mathcal{T} + \tau[\Phi_n{}^* - (\alpha\Phi_x{}^* + \beta\Phi_y{}^* + \gamma\Phi_z{}^*)] \,,$$

ovvero

$$\int_{\mathcal{T}} \mu(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{F}) d\mathcal{T} = \tau[\Phi_n{}^* - (\alpha\Phi_x{}^* + \beta\Phi_y{}^* + \gamma\Phi_z{}^*)] \,.$$

Applicando, come sopra, alle componenti del primo membro il teorema della media, ove si noti che $\mathcal{T} = PQ \cdot \tau/3$, si ottiene

$$\frac{1}{3} PQ \cdot \mu^*(\boldsymbol{a}^* - \boldsymbol{F}^*)\tau = \tau[\Phi_n{}^* - (\alpha\Phi_x{}^* + \beta\Phi_y{}^* + \gamma\Phi_z{}^*)] \,,$$

da cui, risolvendo rispetto a $\Phi_n{}^*$,

$$\Phi_n{}^* = \alpha\Phi_x{}^* + \beta\Phi_y{}^* + \gamma\Phi_z{}^* + \frac{1}{3} PQ \cdot \mu^*(\boldsymbol{a}^* - \boldsymbol{F}^*) \,.$$

19. Immaginiamo ora di fare avvicinare indefinitamente Q a P, con che l'intero tetraedro $\mathcal{T}$ tende a confondersi con P. Le quantità asteriscate della formula precedente, in quanto si riferiscono tutte a funzioni (vettoriali o scalari) *continue* del punto (interno al tetraedro), convergono necessariamente alle rispettive determinazioni in P. Il segmento PQ converge a zero. Si ha dunque, al limite

$$\Phi_n = \alpha\Phi_x + \beta\Phi_y + \gamma\Phi_z \,, \tag{8}$$

i quattro sforzi riferendosi tutti al punto P, e precisamente alle facce negative dei quattro elementi superficiali perpendicolari alle semirette n, Ox, Oy, Oz.

20. È questa l'annunciata relazione vettoriale. Essa è stata stabilita nell'ipotesi che n non sia parallela ad alcuna delle facce del triedro $Oxyz$. Ma la restrizione si toglie subito, notando che la (8) vale per ogni direzione n vicina quanto si vuole a quelle eccettuate. D'altra parte, il primo membro della (8) varia con continuità al variare di n (n. 7, Post. II) e il secondo (lineare nei coseni direttori α, β, γ) è pur esso funzione continua. La loro eguaglianza seguita dunque a sussistere anche per le direzioni originariamente eccettuate.

21. Osservazione del Cauchy. — Dalla (8) discende pressochè immediatamente la seguente proposizione, dovuta al Cauchy, che ha interesse per la meccanica dei fluidi: *Se gli sforzi, che si esercitano sui vari elementi superficiali, che passano per un medesimo punto, sono tutti normali ai rispettivi elementi, i corrispondenti sforzi specifici sono necessariamente tutti eguali fra loro.*

Se con $\boldsymbol{n}$ si designa il versore normale ad un generico elemento superficiale passante pel punto che si considera, l'ipotesi or ora ammessa equivale a supporre $\boldsymbol{\Phi}_n$ parallelo ad $\boldsymbol{n}$ e, quindi, della forma

$$\boldsymbol{\Phi}_n = p\boldsymbol{n} ,$$

dove lo scalare p rappresenta col suo valore assoluto l'intensità dello sforzo specifico e col suo segno indica se si tratta di una pressione o di una tensione. Mentre a priori siffatto scalare potrebbe variare colla orientazione dell'elemento intorno al punto, qui dobbiamo precisamente dimostrare che non dipende dalla orientazione dell'elemento e può quindi variare soltanto da punto a punto.

A tal fine, immaginiamo anzitutto che $\boldsymbol{a}$ assuma successivamente la direzione e il verso dei tre assi coordinati, cioè le determinazioni $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Chiamando per un momento p_1, p_2, p_3 le corrispondenti determinazioni di p, avremo per ipotesi

$$\boldsymbol{\Phi}_x = p_1\boldsymbol{i} , \quad \boldsymbol{\Phi}_y = p_2\boldsymbol{j} , \quad \boldsymbol{\Phi}_z = p_3\boldsymbol{k} ,$$

cosicchè, in base alla (8), lo sforzo relativo ad un $\boldsymbol{n}$ generico sarà dato da

$$\boldsymbol{\Phi}_n = p_1\alpha\boldsymbol{i} + p_2\beta\boldsymbol{j} + p_3\gamma\boldsymbol{k} .$$

Poichè questo $\boldsymbol{\Phi}_n$ deve coincidere con

$$p\boldsymbol{n} = p(\alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}) ,$$

si conclude, identificando i coefficienti di $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ e tenendo conto che nelle precedenti eguaglianze, le quali devono sussistere per qualsiasi $\boldsymbol{n}$, si possono supporre simultaneamente α, β, γ diversi da zero:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p\ ;$$

e ciò dimostra appunto che p è indipendente da $\boldsymbol{n}$, in quanto coincide col valore comune di p_1, p_2, p_3 (ciascuno dei quali ha un significato indipendente da $\boldsymbol{n}$).

§ 4. – Equazioni indefinite.

22. La formula (8) si può illustrare con considerazioni geometriche che noi dobbiamo omettere per brevità. Serviamocene piuttosto per dedurre dalle equazioni cardinali (5), (6) certe equazioni (differenziali), le quali sono verificate in ogni punto del mezzo continuo, che si considera.

Sia, al solito, S_1 una porzione qualsiasi di S; σ_1 il relativo contorno; n la normale in un punto generico rivolta verso l'interno di S_1.

Il risultante

$$\int_{\sigma_1} \boldsymbol{\Phi}_n d\sigma_1$$

degli sforzi superficiali esercitantisi sul contorno si presenta evidentemente come integrale (di un vettore), esteso ad una superficie chiusa σ_1. Ove si esprima $\boldsymbol{\Phi}_n$ a mezzo della (8), ciascun termine può essere trasformato a mezzo del lemma del GREEN (Cap. prec., n. 1) in un integrale esteso al corrispondente campo S_1.

Ove si ponga, per comodità di scrittura

$$\boldsymbol{\chi} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_z}{\partial z}\right], \tag{9}$$

si trova subito

$$\int_{\sigma_1} \boldsymbol{\Phi}_n d\sigma = \int_{S_1} \boldsymbol{\chi} dS_1\,. \tag{10}$$

23. Con ciò al risultante $\boldsymbol{R}$ di tutte le forze esterne, espresso dalla (1) del n. 11, si può dare l'aspetto

$$\boldsymbol{R} = \int_{S_1} (\mu \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\chi}) dS_1\ ;$$

e, per conseguenza, la prima equazione cardinale (5), ricordando la (3) e ponendo, per un momento,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mu \boldsymbol{a} - (\mu \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\chi})\,, \tag{11}$$

si può scrivere

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\epsilon} dS_1 = 0 . \tag{12}$$

La circostanza che l'integrale del primo membro si annulla per qualsivoglia porzione S_1 del campo S, implica che si annulli identicamente la funzione (vettore) sotto il segno, ossia si abbia $\boldsymbol{\epsilon} = 0$, in ogni punto P di S. Ciò si dimostra per assurdo, ragionando in modo perfettamente analogo a quello seguito nel caso della divergenza al n. 11 del Cap. VIII (col solo divario che qui sotto l'integrale compare un vettore, anzichè uno scalare).

Proviamo infatti, ad ammettere che il vettore $\boldsymbol{\epsilon}$ abbia nel generico punto P una determinazione $\boldsymbol{\epsilon}_P$, diversa da zero.

Siccome [a norma delle (11), (9) e del postulato II (n. 7)] $\boldsymbol{\epsilon}$ è funzione continua del punto cui si riferisce, si potrebbe, in tal caso, prendere un intorno S_1 di P abbastanza piccolo perchè, in ogni punto dell'intorno, $\boldsymbol{\epsilon}$ fosse (in grandezza e direzione) vicino quanto si vuole a $\boldsymbol{\epsilon}_P$, tale in particolare da non annullarsi e da formare con $\boldsymbol{\epsilon}_P$ un angolo acuto.

L'integrale di $\boldsymbol{\epsilon}$ esteso ad S_1 non potrebbe allora annullarsi (risultando dello stesso segno le componenti secondo $\boldsymbol{\epsilon}_P$ di ciascun suo elemento $\boldsymbol{\epsilon} dS_1$); e ciò contraddice alla (12).

Si ha dunque, in ogni punto interno ad S, $\boldsymbol{\epsilon} = 0$, ossia, in virtù della (11)

$$\mu \boldsymbol{a} = \mu \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\chi} . \tag{I}$$

24. È questa l'*equazione* (vettoriale) *fondamentale della meccanica dei mezzi continui* o *prima equazione indefinita*.

Per riconoscere nitidamente il significato dei termini che vi compaiono, giova immaginare di moltiplicarne ambo i membri per dS (cioè pel volume elementare della particella circostante al generico punto che si considera), con che μdS rappresenta la massa elementare dm. Si ha allora, nel primo membro, ***adm*, *prodotto della massa per l'accelerazione assoluta*.** Perciò il secondo membro

$$\boldsymbol{F} dm + \boldsymbol{\chi} dS$$

deve rappresentare la *forza totale*, che si esercita sulla particella. Essa consta, come si vede, della forza di massa $\boldsymbol{F} dm$, e di un termine addizionale $\boldsymbol{\chi} dS$, che riassume l'influenza delle azioni molecolari. Ecco l'elemento cui abbiamo accennato fin dal n. 1, rilevando la difficoltà di riconoscerne il comportamento mediante esperienze concrete o studio diretto delle complesse azioni molecolari. Passando attraverso la nozione di sforzo, siamo invece riusciti a individuare per via indiretta questa riposta influenza da aggiungersi alla forza di massa per costituire la forza totale. La dipendenza (differenziale) di codesta forza $\boldsymbol{\chi}$ (contributo delle azioni molecolari riportate all'unità di volume) dagli sforzi specifici $\boldsymbol{\Phi}_x$, $\boldsymbol{\Phi}_y$, $\boldsymbol{\Phi}_z$ è resa esplicita nella formula (9).

25. Anche dalla equazione cardinale (6) dei momenti si possono trarre conseguenze locali, cioè relazioni verificate in ogni punto del campo. Basta procedere in modo analogo, trasformando in primo luogo, a mezzo del lemma di GREEN, il momento risultante

$$\int_{\sigma_1} (P-O) \wedge \boldsymbol{\Phi}_n d\sigma_1$$

degli sforzi superficiali. Ove si ponga per $\boldsymbol{\Phi}_n$ la sua espressione (8), si può scrivere

$$\int_{\sigma_1} \Big[([P-O] \wedge \boldsymbol{\Phi}_x)\alpha + ([P-O] \wedge \boldsymbol{\Phi}_y)\beta + ([P-O] \wedge \boldsymbol{\Phi}_z)\gamma\Big] d\sigma_1 ,$$

dopo di che, trasformando ciascun termine in un integrale di volume e ricordando che per la derivazione dei prodotti vettoriali valgono le regole ordinarie, si ottiene

$$\int_{\sigma_1} (P-O) \wedge \boldsymbol{\Phi}_n d\sigma_1 =$$

$$= -\int_{S_1} \left[\left(\frac{\partial(P-O)}{\partial x} \wedge \boldsymbol{\Phi}_x\right) + \left(\frac{\partial(P-O)}{\partial y} \wedge \boldsymbol{\Phi}_y\right) + \left(\frac{\partial(P-O)}{\partial z} \wedge \boldsymbol{\Phi}_z\right)\right] dS_1$$
$$-\int_{S_1} (P-O) \wedge \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_z}{\partial z}\right] dS_1 .$$

Se si osserva che $P - O = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, ove x, y, z sono le coordinate del punto generico d'integrazione, si riconosce che le tre derivate parziali non sono altro che $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$; con che la funzione sotto il segno del primo integrale a secondo membro assume l'aspetto

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{\Phi}_x + \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{\Phi}_y + \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Phi}_z . \tag{13}$$

D'altra parte, il trinomio che compare nel secondo integrale è, per la (9), $-\boldsymbol{\chi}$. Si può dunque scrivere più semplicemente

$$\int_{\sigma_1} (P-O) \wedge \boldsymbol{\Phi}_n d\sigma_1 = -\int_{S_1} \boldsymbol{H} dS_1 + \int_{S_1} (P-O) \wedge \boldsymbol{\chi} dS_1 .$$

Sostituendo nella (2) questa espressione del momento degli sforzi, e badando alla espressione (4) di dK/dt, si dà alla seconda equazione cardinale (6) la forma

$$\begin{aligned}(14)\qquad &\int_{S_1}(P-O)\wedge\mu\boldsymbol{a}dS_1-\int_{S_1}(P-O)\wedge\mu\boldsymbol{F}dS_1\\ &+\int_{S_1}\boldsymbol{H}dS_1-\int_{S_1}(P-O)\wedge\boldsymbol{\chi}dS_1=0\,.\end{aligned}$$

I tre integrali (primo, secondo e quarto), che contengono sotto il segno un prodotto vettoriale, hanno somma nulla, in virtù della (1), come immediatamente apparisce raccogliendo (sotto un unico segno di integrazione) $P-O$ a fattore comune. Rimane pertanto

$$(14')\qquad \int_{S_1}\boldsymbol{H}dS_1=0\,.$$

Attesa l'arbitrarietà del campo S_1, si conclude di qui, come già dalla (12) (n. 23), l'identico annullarsi del vettore sotto il segno. Si ha dunque $\boldsymbol{H}=0$ in ogni punto del campo occupato dal nostro sistema; cioè sussiste, avuto riguardo alla (13), la *seconda equazione indefinita*

$$(\mathrm{II})\qquad \boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{\Phi}_x+\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{\Phi}_y+\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{\Phi}_z=0\,.$$

26. Caso dell'equilibrio. — Le equazioni indefinite della Statica (cioè le equazioni soddisfatte in ogni punto del mezzo continuo considerato) si ottengono naturalmente come caso particolare di quelle testè stabilite, supponendo il sistema in quiete. Ciò lascia inalterata la relazione (II) fra gli sforzi specifici, mentre (per l'annullarsi dell'accelerazione) semplifica la (I) in

$$\mu\boldsymbol{F}+\boldsymbol{\chi}=0\,,$$

dove $\boldsymbol{\chi}$ conserva la sua espressione (9).

§ 5. – Equivalenza fra condizioni globali e condizioni locali.

27. Chiamiamo *condizioni globali* (concernenti la meccanica dei mezzi continui) le equazioni cardinali (5), (6), relative ad una porzione qualsiasi S_1 del campo S occupato dal sistema. *Condizioni* *locali* sono invece le (I) e (II), verificate in ogni punto del campo.

Abbiamo or ora riconosciuto che le condizioni locali (I), (II) sono necessaria conseguenza delle prime.

Anche la reciproca è vera, potendosi inversamente, come verificheremo tra un momento, ricavare le equazioni cardinali dalle (I), (II). Si tratta perciò di *condizioni equivalenti*, il che importa rilevare fin d'ora (nei riguardi delle successive applicazioni) per poter ritenere come norma generale che, contemplando le (I), (II) (per ogni punto del mezzo), rimane esaurientemente sfruttato anche tutto il contenuto delle equazioni cardinali (e viceversa).

28. Per dimostrare l'asserto, basta, si può dire, seguire a ritroso il cammino del § precedente.

Occupiamoci, per es., della prima equazione cardinale. La ritroveremo, a partire dalla (I), moltiplicandone ambo i membri per dS_1 e integrando entro un'arbitraria porzione S_1 di S. Avuto riguardo alle (1), (3) e (10) si è effettivamente ricondotti a

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}.$$

Per ricavare l'equazione dei momenti, si usano ad un tempo la (II) e la (I). E precisamente si moltiplica vettorialmente la (I) per $P - O$, si somma colla (II), e poi si integra entro S_1. Ciò porta ovviamente alla (14), intendendovi $\boldsymbol{H}$ espresso dalla (13). La (14) è in realtà (n. 25) un modo di scrivere l'equazione cardinale dei momenti.

§ 6. – Notazioni per le componenti degli sforzi. Relazioni di simmetria.

29. Fissiamo un punto P, una generica direzione orientata n e il relativo sforzo $\boldsymbol{\Phi}_n$.

Le tre componenti di $\boldsymbol{\Phi}_n$ secondo gli assi coordinati Ox, Oy, Oz si rappresentano, seguendo il Kirchhoff [1], con

$$X_n, \quad Y_n, \quad Z_n.$$

---

[1] Gustavo Roberto Kirchhoff, n. a Königsberg nel 1824, m. a Berlino nel 1877. Insegnò successivamente nelle Università di Breslavia,

Il SAINT-VENANT [1], cui pure si devono ricerche classiche sulla Meccanica dei mezzi continui, usa invece le notazioni

$$\Phi_{nx}\,, \quad \Phi_{ny}\,, \quad \Phi_{nz}\,.$$

L'una e l'altra sono convenienti ed espressive. Per le nove componenti dei tre sforzi $\boldsymbol{\Phi}_x$, $\boldsymbol{\Phi}_y$, $\boldsymbol{\Phi}_z$ (su elementi superficiali paralleli ai tre piani coordinati) si hanno così le due tabelle di manifesto significato:

	KIRCHHOFF			SAINT-VENANT		
	x	y	z	x	y	z
$\boldsymbol{\Phi}_x$	X_x	Y_x	Z_x	Φ_{xx}	Φ_{xy}	Φ_{xz}
$\boldsymbol{\Phi}_y$	X_y	Y_y	Z_y	Φ_{yx}	Φ_{yy}	Φ_{yz}
$\boldsymbol{\Phi}_z$	X_z	Y_z	Z_z	Φ_{zx}	Φ_{zy}	Φ_{zz}

Vale la pena di rilevare che i termini della diagonale principale (X_x, Y_y, Z_z della prima tabella) rappresentano *sforzi normali*, cioè componenti di uno sforzo secondo la normale all'elemento superficiale cui lo sforzo si riferisce; gli altri termini (quali ad es. Y_x, Z_x) rappresentano *sforzi tangenziali*, cioè componenti di uno sforzo secondo direzioni situate nello stesso piano dell'elemento (y e z se si tratta dello sforzo $\boldsymbol{\Phi}_x$).

Rappresentate così le nove componenti di $\boldsymbol{\Phi}_x$, $\boldsymbol{\Phi}_y$, $\boldsymbol{\Phi}_z$, proiettiamo la (8) sugli assi. Usando le notazioni del KIRCHHOFF, avremo

---

Heidelberg e Berlino, e fu uno dei più grandi fisici matematici del suo tempo. Va famoso per aver dato i fondamenti teorici della analisi spettrale e divide col BUNSEN il merito della prima realizzazione di essa. Sono pur classiche le sue leggi sulla distribuzione delle correnti elettriche filiformi, le sue ricerche sul principio dell'HUYGENS, le sue teorie delle verghe e delle piastre elastiche. Le sue lezioni di Fisica matematica, raccolte in quattro volumi, di cui il primo fu redatto personalmente da lui e costituisce un trattato completo di Meccanica, si ispirano al proposito di descrivere i fenomeni nel modo logicamente più semplice, e, per quanto questo criterio torni talvolta a danno della espressività della immagine, restano ancor oggi esempio mirabile di sobrietà e di precisione.

[1] ADHÉMAR JEAN CLAUDE BARRÉ DE SAINT-VENANT, n. a Melun nel 1797, m. presso Vendôme nel 1886. Fu ingegnere e membro dell'Istituto di Francia, celebre sopra tutto per le applicazioni tecniche della teoria matematica della elasticità, cui egli diede basi scientifiche con la famosa ipotesi di indipendenza locale, che porta il suo nome.

le tre componenti di $\boldsymbol{\Phi}_n$ sotto la forma

$$(8') \qquad \begin{cases} X_n = X_x\alpha + X_y\beta + X_z\gamma\,, \\ Y_n = Y_x\alpha + Y_y\beta + Y_z\gamma\,, \\ Z_n = Z_x\alpha + Z_y\beta + Z_z\gamma\,. \end{cases}$$

30. È agevole riconoscere che la equazione vettoriale (II) sta in sostanza ad esprimere l'eguaglianza degli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale (in ciascuna delle due tabelle del n. prec.), ossia, se, per fissare le idee, si usano ancora le notazioni del KIRCHHOFF, *le tre relazioni di simmetria*:

$$(\mathrm{II}') \qquad Y_z = Z_y\,, \qquad Z_x = X_z\,, \qquad X_y = Y_x\,.$$

Infatti moltiplicando scalarmente la (II) per $\boldsymbol{i}$ si ottiene

$$\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{\Phi}_x) + \boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{\Phi}_y) + \boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{\Phi}_z) = 0\,.$$

Il primo dei tre addendi è nullo perchè $\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{\Phi}_x$ è ortogonale a $\boldsymbol{i}$ e gli altri due, tenuto conto della proprietà dei prodotti misti (I_1, n. 25), si possono sostituire con $\boldsymbol{\Phi}_y\times(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j})$ e $\boldsymbol{\Phi}_z\times(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{k})$, cioè con $\boldsymbol{\Phi}_y\times\boldsymbol{k}$ e $-\boldsymbol{\Phi}_z\times\boldsymbol{j}$, eguali rispettivamente a Z_y e $-Y_z$. Dunque

$$Z_y - Y_z = 0\,,$$

che equivale alla prima delle (II). Analogamente per le altre.

31. L'interpretazione geometrica delle relazioni di simmetria è senz'altro evidente: basta attribuire a ciascuno dei due membri il suo significato di componente d'uno sforzo.

Consideriamo, per es., la $Y_z = Z_y$, notando in pari tempo che Oy, Oz rappresentano in sostanza due direzioni qualisivogliano, perpendicolari tra loro. Abbiamo così la proposizione [perfettamente equivalente alle (II')]: *Se due elementi superficiali, spiccati da un medesimo punto, si incontrano ad angolo retto* [1], *la proiezione dello sforzo specifico, cui sottostà il primo elemento, sulla normale al secondo, è eguale alla proiezione dell'altro sforzo specifico sulla normale al primo elemento.*

32. Per individuare completamente la distribuzione degli sforzi intorno ad un punto, bastano, a norma della (8), tre sforzi su ele-

---

[1] La proprietà sussiste egualmente anche se i due elementi si incontrano sotto un angolo qualsiasi. Ciò per altro non risulta dalle sole (II'), bensì dalla combinazione delle (II') e (8).

menti perpendicolari: Φ_x, Φ_y, Φ_z. Per quanto precede, questi rimangono a loro volta determinati da sei delle loro nove componenti: i *tre sforzi normali* X_x, Y_y, Z_z e *tre tangenziali non coniugati*, cioè non figuranti in una medesima (II'). Complessivamente, tali sei quantità si chiamano, come è ben naturale, *caratteristiche degli sforzi*.

Notiamo incidentalmente che il proposito di rappresentare gli sforzi mediante queste loro caratteristiche espressive (senza simboli sovrabbondanti) ha introdotto, accanto alle già ricordate notazioni del KIRCHHOFF e del SAINT-VENANT, quella così detta del LAMÉ [1], in cui i tre sforzi normali X_x, X_y, X_z sono ordinatamente designati con $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$ e i tangenziali Y_z, Z_x, X_y con $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$.

33. OSSERVAZIONE. — In linea concettuale, importa ritenere che, qualunque sia la notazione adoperata, si sogliono sempre sottintendere le relazioni di simmetria (II'). La (II) si trova con ciò identicamente soddisfatta, e non rimane quindi che una sola equazione (vettoriale) indefinita, cioè la (I). Essa è manifestamente fondamentale, perchè costituisce il substrato comune a tutti i fenomeni meccanici, che si svolgono in un qualsivoglia mezzo continuo. Siamo inoltre certi, in base al § prec., che la (I) (naturalmente colla sottintesa simmetria) equivale completamente alle equazioni cardinali.

§ 7. – Equazione di continuità.

34. Prendiamo in considerazione un sistema materiale continuo, di qualsivoglia natura, e animato da un moto pur esso qualsiasi.

Richiamandoci a quanto fu esposto nel Cap. prec. e riprendendone le notazioni, ci proponiamo di esprimere (sotto due diverse forme) il *principio di conservazione della massa*. Si tratta semplicemente di dare forma analitica, utile per lo studio della Mecca-

---

[1] GABRIEL LAMÉ, n. nel 1795 a Tours, m. nel 1870 a Parigi. Fu professore all'École polytechnique e alla Sorbona, nonchè membro dell'Istituto di Francia. Gli si debbono contributi fondamentali alla Geometria differenziale e alla Fisica Matematica, in particolare alla teoria delle superficie e della elasticità, in cui promosse l'uso sistematico delle coordinate curvilinee, sviluppandone i procedimenti analitici generali.

nica dei mezzi continui, al fatto elementare (che già figura fra i postulati fondamentali della Meccanica) che la massa di un punto, e quindi d'ogni sistema di punti, corpo, o porzione di corpo, è qualche cosa di intrinsecamente connesso alla materia, che non si altera per effetto del moto.

35. Mettiamoci dapprima dal *punto di vista del* LAGRANGE (IX, § 1), e consideriamo una porzione generica del sistema mobile, fissando il campo S_0 da essa occupato nell'istante iniziale. Detta μ_0 la densità (in generale variabile da punto a punto) con cui è distribuita la materia entro S_0, la massa della porzione considerata sarà espressa da

$$\int_{S_0} \mu_0 dS_0 .$$

In un altro istante qualsiasi t, le stesse particelle materiali occuperanno un certo spazio S (in generale diverso da S_0) con densità μ (funzione dei punti di S) e il principio di conservazione della massa si tradurrà nella identità

$$\int_{S} \mu dS = \int_{S_0} \mu_0 dS_0 . \tag{15}$$

Si può attribuirle forma esplicita (non globale) di equazione indefinita (cioè soddisfatta per ogni sistema di valori delle variabili indipendenti), ponendo mente alla rappresentazione tipica del moto, sotto il punto di vista lagrangiano (IX, n. 6). Le coordinate x, y, z della posizione occupata nell'istante t da una particella generica vanno considerate come funzioni dei quattro argomenti t e x_0, y_0, z_0 (coordinate iniziali); lo stesso, naturalmente, è a dirsi della densità μ, sia che la si pensi direttamente come caratteristica d'ogni particella mobile (variabile eventualmente durante il moto), sia che dall'espressione di μ, quale compare nel primo membro della (15), cioè da $\mu(t \mid x, y, z)$, funzione del posto, entro S, nell'istante t, si immagini di ripassare a $\mu(t \mid x_0, y_0, z_0)$ sostituendovi le x, y, z mediante le suaccennate equazioni del moto.

Comunque, attesa la corrispondenza biunivoca (n. 3 del Cap. prec.), è lecito trasformare l'integrale a primo membro della (15) esteso al campo S dei valori delle x, y, z in un analogo integrale, in cui, alle x, y, z, vengano sostituite come variabili di integrazione le x_0, y_0, z_0. Ne risulterà, come si sa dal Calcolo, un integrale (esteso al campo corrispondente S_0) dell'antica funzione sotto il segno, la μ_0 (che dovrà soltanto considerarsi espressa mediante le nuove variabili), moltiplicata per il determinante funzionale [1] delle nuove variabili rispetto alle antiche

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} .$$

Sarà pertanto

$$\int_S \mu dS = \int_{S_0} \mu D dS_0 ,$$

e l'equazione (15) potrà essere scritta

$$S(\mu D - \mu_0) dS_0 = 0 .$$

Ma essa deve valere per ogni porzione S_0 (dello spazio inizialmente occupato dal sistema mobile), nonchè in ogni istante. Dalla prima circostanza, con un ragionamento di tipo noto (n. 11 del Cap. VIII), segue

$$\mu D = \mu_0 \tag{15'}$$

in ogni punto di S_0. È questa la cercata equazione indefinita, equivalente alla (15): essa dicesi *equazione di continuità* e manifestamente si mantiene valida per tutti i valori di x_0, y_0, z_0, t, che intervengono nella questione.

36. Suppongasi, in particolare, che il sistema continuo, di cui si tratta, sia *incomprimibile*. Si vuol dire con ciò che, durante il moto, ciascun elemento conserva inalterato il proprio volume.

Per necessaria conseguenza anche la densità (rapporto fra la massa e il volume) rimane invariata, ossia conserva, durante tutto il moto, il suo valore iniziale μ_0. L'equazione (15') si riduce allora a

$$D = 1 ;$$

forma, come si vede, esclusivamente cinematica, cioè scevra da ogni caratteristica materiale (massa o densità). Essa sta (diretta-

[1] A dir vero, la regola dice « valore assoluto del determinante funzionale », ma qui si può prendere senz'altro il determinante, poichè esso è certamente positivo (cfr. X, n. 3).

mente) ad esprimere (come sarebbe facile verificare) l'invarianza del volume di ogni elemento del sistema, e si può ancora considerare come equazione di continuità solo in quanto si associ a $\mu = \mu_0$.

37. Tornando al caso generale, ove si derivi la (15′) rispetto a t (con che, ben si intende, le altre variabili indipendenti x_0, y_0, z_0 vanno trattate quali costanti), si ha il corollario

$$\frac{d(\mu D)}{dt} = 0\,, \tag{15''}$$

che sta anch'esso ad esprimere l'invariabilità della massa. In verità si riconosce subito (moltiplicando per dS_0) che esso significa: *La massa di una particella materiale generica non varia con t* (cioè durante il moto). La (15′) assegna di più il valore iniziale, che questa massa conserva inalterato.

38. Dal *punto di vista euleriano* (IX, n. 6) i fenomeni di moto sono definiti dall'espressione locale e temporale della velocità, cioè dal vettore $\boldsymbol{v}$ assegnato in funzione del posto (x, y, z) e del tempo t. Anche la densità μ va in tal caso considerata come funzione di x, y, z, t, e si tratta appunto di attribuire all'equazione di continuità una forma, in cui compariscano esclusivamente μ e $\boldsymbol{v}$, quali funzioni di t, x, y, z. Si potrebbe arrivarvi eseguendo la derivazione nella (15″), con che vien fatto, tenendo conto delle formule (4′) e (1′) del Cap. prec., di eliminare le x_0, y_0, z_0. Ma è anche più semplice ed istruttivo il ritrovarla per via diretta, come traduzione analitica di una circostanza intuitiva, che rispecchia, sotto altra forma, il principio di invariabilità della massa. Sia S una porzione qualsiasi del campo in cui si svolge il moto del nostro sistema. La massa, che occupa questo campo, può variare col tempo solo per il fatto che vi è entrata o uscita di particelle materiali attraverso il contorno σ: il moto (qualunque esso sia) delle particelle, che rimangono entro S, non influisce su tale variazione di massa.

Esprimiamo dunque, considerando per semplicità un tempuscolo dt, successivo ad un istante generico t, che la variazione della massa S è eguale al flusso (della materia costitutiva del sistema) entrante attraverso il contorno.

Ove si rammenti la nozione astratta del flusso (VIII, § 3) per un campo generico, e la si applichi al campo vettoriale $\boldsymbol{v}$ (relativo all'istante t), è chiaro senz'altro che il flusso di $\boldsymbol{v}$ (moltiplicato per dt) misurerebbe il *volume* del fluido che entra. Se a $\boldsymbol{v}$ si sostituisce $\mu \boldsymbol{v}$, il relativo flusso costituisce proprio l'espressione della massa entrante. Applicando a tale flusso il teorema della divergenza [formula (7) del suddetto Cap. VIII], lo otteniamo sotto la forma

$$-dt \int_S \operatorname{div} (\mu \boldsymbol{v}) dS .$$

D'altra parte la massa contenuta in S, ad un dato istante t, è

$$\int_S \mu dS ,$$

la densità μ riferendosi naturalmente a tale istante.

Nel passaggio da t a $t + dt$, la μ di un posto generico subisce l'incremento $(\partial\mu/\partial t)dt$, cosicchè la massa totale del campo rimane incrementata di

$$dt \int_S \frac{\partial \mu}{\partial t} dS .$$

Eguagliando questa espressione a quella subito prima ottenuta si perviene alla identità

$$\int_S \left[\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} (\mu \boldsymbol{v})\right] dS = 0 ,$$

che deve sussistere per *qualsiasi* porzione S dell'ambiente in cui si svolge il moto. Ciò implica, come sappiamo, l'identico annullarsi della funzione sotto il segno, donde la cercata *forma locale dell'equazione di continuità*:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} (\mu \boldsymbol{v}) = 0 . \tag{16}$$

Applicando la formula (8) del n. 12 del Cap. VIII, col porre in essa $U = \mu$, si ha:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} (\mu \boldsymbol{v}) = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \boldsymbol{v} \times \operatorname{grad} \mu + \mu \operatorname{div} \boldsymbol{v} =$$
$$= \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mu}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mu}{\partial z} v_z + \mu \operatorname{div} \boldsymbol{v} ;$$

e poichè la somma dei primi quattro termini di quest'ultima espressione non è che la derivata sostanziale della funzione μ (IX, n. 11), la (16) può essere scritta

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 . \tag{16'}$$

39. Nel caso particolare della *incomprimibilità* (n. 36), dovendo μ conservarsi invariato per ogni particella, con che $d\mu/dt = 0$, rimane semplicemente

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \,, \tag{17}$$

o, in forma sviluppata,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \,, \tag{17'}$$

la quale fornisce, sotto forma locale, la condizione cinematica, affinchè un moto avvenga con conservazione di volume.

§ 8. – Indicazioni circa l'impostazione del problema dinamico.

40. Le considerazioni generali, finora istituite sul moto dei sistemi continui di qualsivoglia natura, ci hanno portato a riconoscere che *devono sussistere in ogni caso quattro equazioni indefinite*: l'equazione di continuità, e le tre equazioni del moto compendiate nella (I) del n. 23

$$\mu \boldsymbol{a} = \mu \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\chi} \,, \tag{I}$$

la quale è stata dedotta (non sarà male ricordarlo) combinando in modo opportuno i postulati fondamentali della Meccanica con nozioni e postulati concernenti gli sforzi. Questi ultimi [più precisamente anzi le loro derivate, come apparisce dalla (9)] figurano nella (I) pel tramite di $\boldsymbol{\chi}$. Ad individuarli in modo completo si esigono (n. 32) sei caratteristiche, il che è quanto dire *sei funzioni del posto e del tempo.*

41. Ciò premesso, ove si consideri il problema tipico della Dinamica (determinazione del moto, note le forze, nel caso attuale le forze di massa $\boldsymbol{F}$), si vede che i princìpi generali, applicabili a tutti i sistemi continui, forniscono *quattro equazioni fra dieci quantità a priori incognite*. Di queste, sette sono, in certo modo, ausiliarie: la densità μ e le sei caratteristiche degli sforzi; le altre tre sono proprio le incognite fondamentali della questione, quelle che definiscono il moto del sistema. Come tali vanno assunte: dal punto di vista lagrangiano le funzioni x, y, z di t, x_0, y_0, z_0, dal punto di vista euleriano le funzioni v_x, v_y, v_z di t, x, y, z. E in conformità si presenteranno le componenti di $\boldsymbol{a}$, nel primo membro della (I), sotto la forma dei primi o secondi membri delle (9') del n. 13 del Cap. prec. (componenti della derivata sostanziale di $\boldsymbol{v}$).

42. In ogni caso, è manifesto che il problema rimane ancora largamente indeterminato (quattro sole equazioni con dieci incognite). Nè si può meravigliarsene, perchè finora ci siamo espressamente limitati a quanto è comune a tutti i sistemi continui, senza rispecchiarne in alcun modo le tipiche differenze di struttura.

Si presenta pertanto la necessità di tenerne conto, considerando sistemi continui di tipo fisicamente ben definito (liquidi, gas, solidi elastici, sistemi disgregati, come sabbie, ecc.), desumendo dall'esperienza un insieme di leggi (rigorose, o almeno approssimate), che fornisca *sei ulteriori relazioni*, quante sono necessarie per rendere determinato il problema.

Indichiamo rapidissimamente quali criteri direttivi somministrino queste relazioni per tre categorie assai generali e notevoli di sistemi continui: i così detti *fluidi ideali* o *perfetti*, i *solidi elastici*, i *fluidi viscosi*.

§ 9. – **Fluidi perfetti. Equazione di stato.**

43. Partiamo dall'osservazione sperimentale che una pendenza, per quanto piccola, basta per determinare lo scolo delle acque, mentre i solidi naturali, poggiati su di un piano inclinato, rimangono in equilibrio, finchè l'inclinazione non supera un certo limite.

Ne inferiamo, considerando gli sforzi esercitantisi sul liquido, nei vari elementi superficiali del fondo del recipiente (*piano d'appoggio* nella nostra schematizzazione), che *essi non hanno sensibile componente tangenziale, capace di fare equilibrio al peso*, come accade fra solido e solido.

Di qui, per ragionevoli induzioni (cioè estendendo all'interno di una massa fluida quanto si osserva direttamente per elementi superficiali), siamo tratti ad assumere quale principio sperimentale che:

Nei liquidi, e analogamente nei gas, gli sforzi sono esclusivamente normali, almeno nello stato di equilibrio.

44. In condizioni di moto, non è più esattamente così: si destano anche *sforzi tangenziali*, più o meno intensi secondo la natura e la scorrevolezza del fluido.

In ciò consiste la *viscosità* dei fluidi reali, di cui faremo cenno più innanzi. Ovvi esempi di viscosità crescente sono offerti dall'acqua, dal miele, dalle lave vulcaniche incandescenti, ecc.

45. *Fluidi ideali* o *perfetti* si dicono quei *sistemi continui, in cui gli sforzi si riducono a pressioni normali.*

Da quanto precede risulta che i fluidi naturali soddisfanno a questa condizione, con ogni desiderabile esattezza, nello stato di equilibrio, ma solo in via approssimativa (che sarà o no sufficiente secondo la classe di fenomeni che si vogliono studiare), quando si tratta di moto.

46. Accennati così i limiti di applicabilità del tipo, vediamo di fissarne i caratteri salienti.

Risulta in primo luogo dal n. 21 che *in un fluido perfetto, intorno ad un medesimo punto, le pressioni sono eguali in tutte le direzioni.*

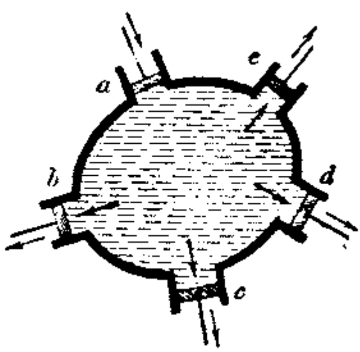
Ciò costituisce il così detto *principio di trasmissibilità delle pressioni*, o *principio* del PASCAL (¹) di cui si suol dare la dimostrazione sperimentale nei trattati di Fisica (²).

Basta evidentemente conoscere l'intensità p di tale pressione in un punto generico, perchè ne rimanga determinata la distribuzione degli sforzi intorno al punto (come pressioni di intensità specifica p sopra ogni elemento). Ciò vale quanto dire che le carat-

---

(¹) BLAISE PASCAL, n. a Clermont-Ferrand nel 1623, m. a Parigi nel 1662, gode più larga fama come letterato e filosofo; ma fu anche matematico e fisico di singolare precocità e originalità di pensiero. Ricordiamo il suo celebre teorema sulle coniche, le sue ricerche di Idrostatica e la prima verifica sperimentale della variazione della pressione atmosferica coll'altezza (famosa esperienza del Puy de Dôme).

(²) Nell'esperienza che solitamente si trova descritta nei trattati di fisica, si contemplano, a dir vero, elementi superficiali a, b, c, d, e (di un liquido), che *non* si riferiscono ad un medesimo punto, e si mostra che rilevanti pressioni addizionali, esercitate per es. in a, sono risentite con eguale intensità (specifica) in b, c...



In realtà risulta di qui l'eguaglianza delle pressioni *addizionali*, ma se si attribuisce, come è naturale, l'eventuale divario delle pressioni preesistenti in a, b, c, d, e alla circostanza che questi elementi superficiali occupano posizioni diverse (non a priori equivalenti rispetto alla natura del sistema, ovvero alla sollecitazione cui esso si trova sottoposto) si rende plausibile (al limite) l'ipotesi teorica che le pressioni siano in ogni caso rigorosamente eguali su elementi superficiali uscenti da un *medesimo punto*.

teristiche degli sforzi (sei nel caso generale) rimangono necessariamente individuate dalla sola p.

E infatti si ha senz'altro che devono annullarsi le componenti tangenziali $Y_z = Z_y = 0$, $Z_x = X_z = 0$, $X_y = Y_x = 0$, mentre le componenti normali X_x, Y_y, Z_z devono assumere il valore comune, essenzialmente positivo, p.

Ne consegue:

$$\boldsymbol{\Phi}_x = p\boldsymbol{i}\,, \qquad \boldsymbol{\Phi}_y = p\boldsymbol{j}\,, \qquad \boldsymbol{\Phi}_z = p\boldsymbol{k}\,,$$

talchè sarà:

$$\boldsymbol{\chi} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_z}{\partial z}\right] = -\left[\frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}\right],$$

da cui risulta che le componenti di $\boldsymbol{\chi}$ saranno:

$$(18) \qquad \chi_x = -\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \chi_y = -\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \chi_z = -\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Ciò si raccoglie (VIII, n. 6) nella relazione vettoriale

$$\boldsymbol{\chi} = -\operatorname{grad} p\,.$$

Ricordando che il vettore $\boldsymbol{\chi}$ rappresenta in generale il contributo (per unità di volume) alla forza totale dovuto alle azioni molecolari, riconosciamo che, *nel caso di fluidi perfetti, le azioni molecolari* (riferite all'unità di volume) *equivalgono globalmente al gradiente della pressione p*. Con ciò l'equazione (I) del moto diviene

$$(19) \qquad \mu\boldsymbol{a} = \mu\boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p\,.$$

È questa la forma ordinariamente attribuita all'*equazione fondamentale dell'idrodinamica pura* (ossia circoscritta ai fluidi perfetti).

47. Formandone sistema coll'equazione di continuità, si hanno naturalmente quattro equazioni scalari, come già nella discussione generale del precedente §, ma il numero delle incognite è considerevolmente ridotto: da dieci a cinque (poichè le sei caratteristiche degli sforzi si esprimono mediante la sola p); e precisamente le tre principali concernenti il moto, la densità μ e la pressione p. Con tutto ciò, manca ancora una relazione indefinita (cioè soddisfatta per ogni sistema di valori delle variabili indipendenti) da associarsi alle prime quattro.

L'aggiunta di una quinta relazione è certamente necessaria per rendere determinato il problema. Che essa sia esauriente non si può dire; anzi, se ci riportiamo agli esempi più elementari (moto di un punto, di un solido, ecc.) è pressochè manifesto che occorreranno ulteriori dati iniziali e di contorno per individuare completamente una questione idrodinamica, a norma delle circostanze svariatissime, possibili a priori.

Non vogliamo neanche sfiorare questo punto, cioè le cosiddette *condizioni ai limiti*. Vogliamo soltanto completare il sistema delle equazioni indefinite; e vedremo poi nel seguente capitolo, non foss'altro sopra un paio di esempi, come, combinandole tra loro (senz'altro o con opportuno riguardo a condizioni di contorno immediatamente evidenti), si abbia già modo di giungere a copiose e notevoli conseguenze concrete.

48. Per procurarsi l'equazione mancante, in modo da rispecchiare le circostanze di fatto, conviene interrogare nuovamente l'esperienza, approfondendo la analisi delle proprietà dei fluidi.

Se li distinguiamo in liquidi e aeriformi, e poniamo mente alla pressochè completa incomprimibilità dei primi [1], riconosciamo intanto che, per i liquidi, tutto si riduce a fare intervenire questo carattere specifico. La sua traduzione analitica è immediata, e del resto già ne fu fatto cenno (nn. 36 e 39): si ha

$$(20) \qquad \mu = \mu_0 ,$$

la densità di ogni particella conservando inalterato, durante il moto, il suo valore iniziale μ_0.

Per il caso praticamente più importante, in cui si tratti di *liquidi omogenei*, μ rimane *assolutamente costante* (non solo per ogni particella, ma addirittura) in tutto il campo e per tutta la durata del moto.

49. Nei gas le cose vanno ben diversamente: essi sono comprimibili e dilatabili a volontà. Una data quantità (massa) di gas non ha, neanche approssimativamente, un volume ben determinato, ma assume sempre quello del recipiente, in cui venga racchiusa. Viceversa, la pressione che il gas esercita sul recipiente dipende essenzialmente dal volume (a parità di massa racchiusa). E si ha notoriamente una relazione fondamentale [legge del

---

[1] Per le applicazioni tecniche, si può tenere questa incomprimibilità come norma fissa. In generale essa vale solo *a temperatura costante*, perchè si sa bene che anche i liquidi subiscono dilatazioni termiche, relativamente cospicue.

BOYLE [1])] fra volume e pressione: essi sono inversamente proporzionali, finchè rimane invariata la temperatura. Più precisamente, detto V il volume, m la massa, e p la pressione (sensibilmente costante) sul recipiente, si ha

$$pV = cm \, ,$$

essendo c una costante, che dipende esclusivamente dalla temperatura (proporzionale alla temperatura assoluta).

Ciò posto, se fissiamo la nostra attenzione su fenomeni di moto, che si possano considerare *isotermici*, sarà ben giustificato il ritenere che ciascuna particella di gas, durante il movimento, segua, almeno sensibilmente, la legge del BOYLE. Ciò implica, se dm è la massa della particella, e quindi dm/μ il volume elementare (in generale variabile) da essa occupato, $pdm/\mu = cdm$, ossia

$$p = c\mu \, , \tag{21}$$

dove c è una pura costante rispetto al problema meccanico (supposto isotermico): essa varia soltanto colla temperatura.

È questa la quinta equazione indefinita, da adottarsi nei limiti di validità della legge del BOYLE *e nella ipotesi che il fenomeno* (dinamico o statico che si considera) *si svolga a temperatura costante.*

50. Non si può passare sotto silenzio che quest'ultima condizione è talvolta assai discosta dal vero.

La temperatura delle varie particelle subisce alterazioni anche rilevanti. Allora la c della (21) non è più una costante, ma una nuova funzione (del posto e del tempo) a priori incognita al pari di p e di μ. Occorre quindi una ulteriore relazione, che si desume da considerazioni termodinamiche.

Aggiungeremo, a titolo di notizia, che si giunge per tal via ad un risultato assai semplice, nel caso notevolissimo, in cui si tratti di fenomeni *adiabatici*, cioè tali che ogni particella (pur variando di temperatura) sia sottratta a scambi di calore colle particelle contigue.

---

[1] ROBERTO BOYLE dei Conti di Cork, n. presso Cork (Irlanda) nel 1627, m. a Londra nel 1691, fu Socio e Presidente della Società Reale di Londra. Fu anche uomo d'affari e, per qualche tempo, Presidente della Società delle Indie. Istituì ricerche sperimentali di fondamentale importanza sulla Fisica dei corpi aeriformi e su talune sue applicazioni tecniche e fisiologiche. Le sue opere, pubblicate una prima volta in cinque volumi in folio, furono ristampate nel 1744 in sei volumi.

La relazione fra p e μ, che va in tal caso sostituita alla (21) è la

$$p = c_1 \mu^\gamma , \tag{22}$$

dove c_1 dipende esclusivamente dallo stato iniziale della particella considerata (pura costante, se inizialmente temperatura e densità sono uniformi); e γ è il rapporto fra i due calori specifici a volume e a pressione costante (circa 1,41 per l'aria e per gli altri gas più comuni).

51. Le (20), (21), (22) sono conseguenze particolari, valide in circostanze diverse, della cosiddetta *equazione di stato* (relazione fra pressione, densità e temperatura che sussiste in generale per qualsiasi sostanza omogenea, e che si può ritenere caratteristica della sostanza stessa).

Detto questo per incidenza, vogliamo piuttosto dare risalto ad una ovvia circostanza comune alle tre equazioni (20), (21), (22), ed è che se ne può pensare ricavato μ, e quindi anche $1/\mu$, in funzione di p: più precisamente, in funzione della sola p (e di costanti, senza intervento di x_0, y_0, z_0), se si tratta di *liquidi omogenei*, ovvero di *fenomeni sia isotermici che adiabatici di gas* (i quali seguano la legge del Boyle).

Si ha rispettivamente

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0} , \tag{20'}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{c}{p} , \tag{21'}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{c_1^{\frac{1}{\gamma}}}{p^{\frac{1}{\gamma}}} \tag{22'}$$

(con μ_0, c, c_1, γ costanti).

52. Ora è interessante rilevare che, ogniqualvolta la quinta equazione indefinita rientra nel tipo

$$\frac{1}{\mu} = \text{funzione della sola } p ,$$

si può attribuire all'equazione vettoriale del moto una forma alquanto più semplice, che è, come vedremo, importantissima per le conseguenze meccaniche.

Riprendiamo a tal fine la (19), dividendo per μ, il che dà

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} p \,,$$

e sfruttiamo l'ipotesi che $1/\mu$ dipenda esclusivamente da p, considerandola quale derivata di una funzione $\mathcal{P}(p)$, cioè ponendo

$$\mathcal{P}(p) = \int \frac{dp}{\mu} \tag{23}$$

(con che $\mathcal{P}$ rimane definita a meno di una inessenziale costante additiva).

Ove si noti [VIII, n. 6, form. (2)] che

$$\frac{d\mathcal{P}}{dp} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \mathcal{P} \,,$$

si ha la forma annunciata

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} \mathcal{P} \,. \tag{19'}$$

53. L'espressione esplicita della $\mathcal{P}$ in termini della pressione, quale risulta dalla (23) a norma delle (20'), (21'), (22'), è (omettendo l'inessenziale costante di integrazione) rispettivamente:

$$\mathcal{P} = \frac{p}{\mu} \qquad \text{(con } \mu \text{ costante)} \tag{23'}$$

per i *liquidi omogenei*;

$$\mathcal{P} = c \log p \qquad \text{(con } c \text{ costante)} \tag{23''}$$

ovvero

$$\mathcal{P} = \frac{c_1^{\frac{1}{\gamma}}}{1 - \frac{1}{\gamma}} \, p^{1 - \frac{1}{\gamma}} \qquad \text{(con } c_1, \gamma \text{ costanti)} \tag{23''}$$

per i *gas, secondo che si tratta di processi isotermici od adiabatici* (coll'avvertenza che in quest'ultimo caso si suppone uniforme la distribuzione *iniziale* della temperatura e della densità).

54. Riassumiamo, ponendoci, per fissare le idee, dal punto di vista euleriano.

Le equazioni indefinite del moto dei fluidi perfetti, nei casi praticamente più importanti, si presentano sotto la forma

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} - \operatorname{grad} \mathcal{P}, \tag{19'}$$

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{16'}$$

$\mathcal{P}$ e μ essendo funzioni ben determinate della sola pressione.

In particolare, μ costante e $\mathcal{P} = p/\mu$, se si tratta di *liquidi omogenei*; la relativa equazione di continuità si riduce a

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 . \tag{16}$$

Pei *gas, a temperatura costante*, si può ritenere

$$\mu = \frac{1}{c} p, \qquad \mathcal{P} = c \log p .$$

§ 10. – Cenno sul comportamento degli sforzi nei solidi elastici e nei fluidi viscosi.

55. Solidi elastici. — I solidi naturali sono rigidi soltanto in prima approssimazione. In realtà, essi si deformano alquanto, allorchè vengono sollecitati da forze (rilevanti); ed anzi, oltre certi limiti di sollecitazione, si provoca la rottura. Esclusi questi casi estremi, portiamo la nostra attenzione su quelli in cui il solido si comporta in maniera non troppo diversa dal caso ideale del corpo rigido. Esempi tipici si hanno nei materiali da costruzione, nelle sbarre metalliche delle travature e dei ponti in condizioni di ordinaria sollecitazione, nelle vibrazioni sonore delle campane, ecc.

Il fatto saliente che si tratta di rispecchiare è la *elasticità* dei corpi in questione.

Con qualche considerazione intuitiva (che sarebbe molto istruttiva, ma su cui non possiamo soffermarci) si rende ben plausibile che gli sforzi sono, in ogni punto del mezzo elastico, intimamente legati alla deformazione. Anzi, ove ci si ponga nelle condizioni ordinarie, si è condotti in ultima analisi ad *assumere le sei caratteristiche degli sforzi quali funzioni lineari* (ed omogenee) *delle così dette sei caratteristiche di deformazione* [1]. Associando queste sei

---

[1] Sono sei numeri, funzioni del posto, che servono a determinare, per ogni particella elementare, la deformazione da essa subita, fornendo rispettivamente gli *allungamenti* intervenuti in tre direzioni inizialmente orto-

relazioni, fra sforzi e deformazione, alle quattro, valide in ogni caso (n. 41), rimane completato il sistema delle dieci equazioni indefinite.

56. Fluidi viscosi. — Accanto alla pressione normale, intervengono, quando un fluido naturale si trova in movimento, azioni tangenziali (che hanno manifesto carattere dissipativo, tendendo ad opporsi al moto). Omettendo anche qui ogni passaggio induttivo, ci limiteremo ad accennare che gli sforzi addizionali (quelli, cioè, che si sovrappongono alla semplice pressione) devono considerarsi legati *non* alla deformazione, bensì al modo più o meno rapido con cui essa varia. Insomma *si assumono le sei caratteristiche degli sforzi addizionali come funzioni lineari delle derivate* (rispetto al tempo) *delle caratteristiche di deformazione.*

---

gonali e le variazioni degli angoli compresi fra queste stesse direzioni (*scorrimenti*). Si tratta di elementi esclusivamente cinematici, esprimibili in funzione delle incognite principali (o, meglio, delle loro derivate prime).

CAPITOLO XI.

IDROSTATICA

§ 1. – Fluidi liberi da forze. Caso generale: isobariche; superficie di separazione fra fluidi di densità differente.

1. In condizioni di equilibrio, l'accelerazione è nulla, e l'equazione fondamentale della idromeccanica (X, n. 46) si riduce a

$$\mu \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p = 0 \,, \tag{1}$$

essendo μ la densità del fluido, $\boldsymbol{F}$ la forza (unitaria) di massa, e p la pressione in un punto generico del campo occupato dalla massa fluida.

La pressione p varia in generale da punto a punto. Solo in assenza di forze, si ha $\operatorname{grad} p = 0$, talchè risultano nulle le derivate di p, e la p si mantiene *costante*.

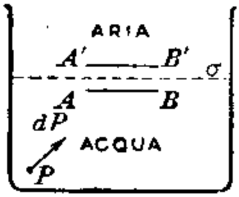
Se non si annulla $\boldsymbol{F}$, poichè μ è, per sua definizione, diverso da zero, dovunque c'è effettivamente del fluido, non si può annullare nemmeno $\operatorname{grad} p$. Perciò p non è una costante (perchè le sue derivate non si annullano), ma dipende in qualche modo dalle coordinate x, y, z del posto occupato nel campo del fluido. L'equazione

$$p(x, y, z) = \text{cost.}$$

definisce perciò una famiglia di ∞^1 superficie, su ognuna delle quali la pressione si conserva costante, mentre varia quando si passa dall'una all'altra di esse.

Queste superficie (con vocabolo greco che ne rispecchia la proprietà caratteristica) si chiamano *isobariche*. Esse si chiamano anche *superficie di livello*, per ragione che sarà ben presto manifesta (n. 3).

2. Ci proponiamo di dimostrare che, se due fluidi di diversa densità (in istato di equilibrio entro un campo di forza continuo, ma del resto comunque assegnato) confinano lungo un pezzo di superficie σ [1], questa è necessariamente isobarica. A tal fine cominciamo coll'osservare che la (1) vale nei punti interni a ciascuno dei due fluidi (acqua e aria, per fissare le idee).



Se P è un punto generico interno ad uno di essi, dP uno spostamento elementare coll'origine in P, dp il corrispondente incremento di pressione da P a $P+dP$, si ha, per definizione di gradiente

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz = \operatorname{grad} p \times dP\,,$$

dopodichè la (1), ove si moltiplichino scalarmente i due membri per dP, porge

$$dp = \mu \boldsymbol{F} \times dP\,. \tag{2}$$

Applichiamo questa relazione differenziale ai vari elementi dP di un cammino qualsiasi, congiungente due punti, pur quali si vogliono, A e B. Lungo tale cammino, risulterà (con manifesto significato della notazione)

$$p_B - p_A = \int_{AB} \mu \boldsymbol{F} \times dP\,. \tag{3}$$

Supponiamo, in particolare, che A, B e il cammino che li congiunge stiano nel primo fluido, molto prossimi alla superficie di separazione σ. Consideriamo un cammino analogo da banda opposta di σ, fra due punti A', B' vicinissimi ad A, B rispettivamente. Avremo analogamente

$$p_{B'} - p_{A'} = \int_{A'B'} \mu' \boldsymbol{F} \times dP\,.$$

Immaginiamo ora che i due cammini tendano ad un medesimo arco s della superficie σ. Per i postulati circa la continuità degli sforzi, le pressioni relative a punti situati da bande opposte di σ tendono ad un limite comune. I primi membri $p_B - p_A$, $p_{B'} - p_{A'}$ hanno dunque limiti eguali, e lo stesso deve accadere dei secondi. Ora la forza unitaria $\boldsymbol{F}$ (attesa la continuità del campo) ha uno stesso limite quando si tende a punti P di s da bande opposte di σ.

---

[1] Si trovano cioè a contatto lungo σ, senza l'interposizione di pareti materiali.

Non così la densità, essendo stato esplicitamente supposto che si tratti di due fluidi di densità differente.

Diciamo μ_P il limite di μ relativo al primo fluido (o il valore costante della densità, che caratterizza il primo fluido, se esso è omogeneo); con μ'_P l'analogo limite relativo al secondo fluido. Esprimendo l'eguaglianza dei limiti dei secondi membri, si ha:

$$\int_s \mu_P \boldsymbol{F}\times d\boldsymbol{P} = \int_s \mu'_P \boldsymbol{F}\times dP\,,$$

ossia

$$\int_s (\mu_P - \mu'_P)\boldsymbol{F}\times d\boldsymbol{P} = 0\,,$$

la quale deve in conclusione sussistere, qualunque sia il cammino s tracciato su σ. Se ne trae, col ragionamento già usato più volte nei due precedenti capitoli,

$$(\mu_P - \mu'_P)\boldsymbol{F}\times dP = 0$$

in ogni punto di σ, e per ogni dP situato sopra di essa.

Poichè, per ipotesi, non è μ_P eguale a μ'_P, deve annullarsi (coll'indicata specificazione)

$$\boldsymbol{F}\times dP\,.$$

Dalla (2), in cui dP s'interpreti come un generico spostamento elementare sopra σ dalla parte del fluido di densità μ, segue allora

$$dp = 0$$

su tutta la σ, il che appunto dice che p è costante sopra σ, cioè che si tratta di una superficie isobarica.

§ 2. – Forze conservative. Coincidenza delle superficie equipotenziali, o superficie di livello, colle isobariche. Fluidi pesanti. Forma espressiva della condizione di equilibrio. Liquidi omogenei. Torchio idraulico.

3. Se la forza $\boldsymbol{F}$ deriva da un potenziale U, il lavoro elementare $\boldsymbol{F}\times dP$ non è altro che dU, e la (2) assume l'aspetto

$$dp = \mu dU\,. \tag{2'}$$

Ne consegue (dovendo annullarsi dU insieme con dp), che *le superficie equipotenziali coincidono con le isobariche.*

In particolare le eventuali superficie di separazione di due fluidi di densità differente (i quali si trovino in equilibrio nello stesso campo conservativo) sono, non solo isobariche (§ prec.), ma anche equipotenziali.

Nel caso della gravità, si tratta pertanto di piani orizzontali. Ciò è ben conforme all'esperienza quotidiana, la quale ci addita costantemente come orizzontali le superficie *libere* dei liquidi pesanti in riposo.

Prendendo norma dal caso tipico della gravità, in cui le superficie equipotenziali segnano effettivamente i vari livelli, si seguitano spesso a chiamare *superficie di livello* le superficie equipotenziali $U = \text{cost}$, qualunque sia la funzione U. La coincidenza, testé riconosciuta, delle superficie equipotenziali colle isobariche giustifica la denominazione di superficie di livello, che si attribuisce talora anche a queste ultime (n. 1).

Superficie libera od anche *pelo libero* di un liquido si chiama ogni superficie, lungo cui il liquido confina con un gas (solitamente l'aria) o col vuoto.

4. Fissando la nostra attenzione sopra il caso tipico, or ora considerato, dei fluidi pesanti, conviene ricavare dalla (2') un'interpretazione espressiva della differenza di pressione in due punti generici P e P_0 del fluido. Immaginiamo a tal fine una terna di riferimento coll'asse Oz verticale verso il basso, e siano z e z_0 $(< z)$ le quote rispettive di P e di P_0; p e p_0 i valori che vi assume la pressione.

Il potenziale unitario della gravità è $U = gz$; quindi $dU = gdz$, e la (2'), integrata fra P_0 e P, lungo un cammino qualsiasi del campo in cui essa sussiste (il che è quanto dire occupato dal fluido che si considera), porge

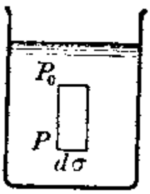
$$p - p_0 = \int_{z_0}^{z} \mu g dz \,. \tag{4}$$

Se si pensa che la densità μ (rapporto o limite del rapporto fra massa e volume) si può designare come massa dell'unità di volume [1], e quindi μg come peso, si è condotti ad interpretare ogni elemento di integrale $\mu g dz$ come peso di una colonna di fluido

---

[1] Si intende che, quando si tratta di corpi eterogenei, ciò vuol dire più precisamente: massa di un volume unitario, il quale fosse occupato da un (ipotetico) fluido omogeneo, avente la densità μ che compete al fluido reale in un determinato posto.

di base 1 e altezza elementare dz. Di qui un'ovvia interpretazione dell'integrale che figura nel secondo membro della (4). Essa diviene particolarmente espressiva se P e P_0 appartengono ad una medesima verticale, ed anche per qualsiasi situazione di P e P_0, ove si tratti di fluidi omogenei.

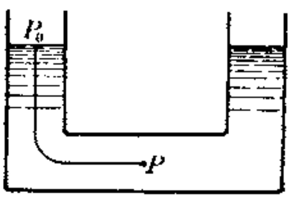


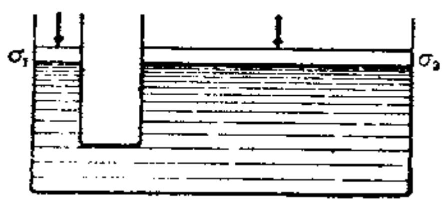
Si immagini, infatti, nel primo caso, un cilindro verticale, di sezione retta elementare $d\sigma$, compreso fra P_0 e P. Si moltiplichi la (4) per $d\sigma$, riferendo il dz all'asse del cilindro, e si leggerà: *La differenza fra le pressioni sopra una generica area elementare $d\sigma$, in P e in P_0, è misurata dal peso del cilindro verticale di fluido, compreso fra i due punti, e avente $d\sigma$ per sezione retta.*

5. Liquidi omogenei. — Se μ è costante, si può portare fuori dall'integrale, e la (4) porge, comunque siano scelti i punti P e P_0 e il cammino che li congiunge,

$$p - p_0 = \mu g(z - z_0) . \tag{4'}$$

Si ha dunque: *La pressione p in P supera la pressione p_0 in un*





generico punto più alto P_0, del peso di un cilindro di liquido (di sezione unitaria) avente per altezza il dislivello $h = z - z_0$ fra P e P_0

Ciò si applica in particolare al *torchio idraulico.*

Esso consta essenzialmente di due cilindri comunicanti, ripieni di acqua (o d'altro liquido omogeneo pesante) e chiusi superiormente da due stantuffi di aree σ_1, σ_2. Sul più piccolo si esercita direttamente una pressione (totale) χ. Il grande diviene allora atto ad esercitare una pressione (ben più rilevante) $\chi\sigma_2/\sigma_1$.

Basta pensare che, sussistendo l'equilibrio, la pressione unitaria χ/σ_1 sul primo stantuffo deve esercitarsi pure sul secondo: esattamente se si trovano al medesimo livello, a meno di μgh in generale.

Per lo più il torchio si adopera, esercitando pressioni assai notevoli, tali da poter trascurare μgh di fronte a χ/σ_1. Si può dunque ritenere senz'altro χ/σ_1 come pressione unitaria anche sullo stantuffo più grande, donde, su tutta la σ_2 la pressione totale $\chi\sigma_2/\sigma_1$.

§ 3. – Pressione atmosferica. Principio dei vasi comunicanti.

6. Assumiamo come dato di fatto che la pressione atmosferica è dell'ordine di grandezza di 1 kg per cm^2 (1,0333 al livello del mare e in condizioni normali, dal punto di vista meteorologico e climatologico). Questo dato di fatto è fornito in modo espressivo dalla celebre esperienza del TORRICELLI. Basta pensare che, a norma di questa esperienza, la pressione atmosferica sopra un generico pezzo σ di piano orizzontale è sostituibile col peso di una colonna cilindrica di mercurio avente σ per base e circa 76 cm di altezza. Dato che un cm^3 di mercurio pesa all'incirca gr 13,6, risulta appunto (per $\sigma = 1$)

$$\text{gr } 13{,}6 \times 76\,,$$

cioè un po' più di un kg, come ordine di grandezza della pressione atmosferica. Badiamo altresì al dato sperimentale che il peso di un metro cubo d'aria è dell'ordine di un kg (1,293 nelle condizioni suaccennate).

Ciò premesso, riprendiamo la (4), applicandola all'aria atmosferica. Senza alcuna ipotesi particolare sulla costituzione, ma solo sfruttando l'ordine di grandezza di μg (poco più di 1 kg per m^3), risulta che l'integrale $\int_{z_0}^{z} \mu g dz$, esteso a h metri di dislivello, corrisponde ad una pressione che è poco più di (1,293 h) kg per m^2.

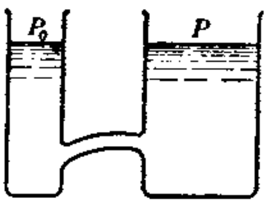
Il divario di pressione atmosferica $p - p_0$ fra punti discosti pochi metri è, dunque, in ogni caso, trascurabile di fronte al valore di p_0 (o di p), che supera i 10.000 kg per m^2.

Si può dunque, con grande approssimazione (errore relativo dell'uno per mille, e anche meno), considerare costante la pressione atmosferica, entro campi abbastanza ristretti (quali, ad es., i soliti ambienti).

7. PRESSIONI SUL FONDO, E VASI COMUNICANTI. — Con la precedente avvertenza circa la pressione atmosferica, si ricava dal risultato del n. 5 la nota conseguenza che la pressione (ben s'intende unitaria), esercitata da un liquido omogeneo in quiete sul

fondo di un recipiente che lo contiene, dipende esclusivamente dall'altezza della superficie libera sul fondo.

E si ricava altresì il PRINCIPIO DEI VASI COMUNICANTI: *Le superficie libere di un liquido omogeneo, contenute in due vasi comunicanti* (più precisamente tali che si possa passare dall'uno all'altro dei peli liberi lungo un qualche cammino tutto contenuto entro il liquido), *appartengono ad un medesimo piano orizzontale.* Basta applicare la (4') a due punti P e P_0, situati l'uno sull'una, l'altro sull'altra delle due superficie libere. Avendosi, su entrambe, eguali pressioni (la pressione atmosferica), cioè $p - p_0 = 0$, dovrà essere nulla la differenza di altezza.



§ 4. – Complementi d'indole generale. L'equazione fondamentale dell'idrostatica sotto forma finita.

8. Torniamo al caso di un fluido in equilibrio, sotto l'azione di forze quali si vogliano, purchè conservative. La (2'),

$$dp = \mu d U ,$$

dà luogo non solo all'interpretazione geometrica, già rilevata al n. 3 (coincidenza delle due famiglie di superficie p=cost, U=cost), ma ancora al fatto (equivalente) che U si può considerare funzione di x, y, z, pel tramite della sola p; si ha cioè $U = \Phi(p)$. La constatazione è immediata. Basta pensare che, dato un valore generico di p, rimane fissata una superficie isobarica, la quale è anche equipotenziale, e individua quindi un valore ben definito di U. Quest'ultima si presenta dunque come funzione della sola p, in quanto il valore di U risulta univocamente determinato da quello di p (senza bisogno di specificazione locale, cioè senza esplicito intervento di x, y, z).

Si ha con ciò

$$dU = \frac{d\mathcal{P}}{dp}\, dp\,,$$

cosicchè la (2) si riduce a

$$\frac{1}{\mu} = \frac{d\mathcal{P}}{dp}\,. \tag{5}$$

Questa ci dice che, *in un fluido in equilibrio, soggetto a forze conservative, la densità dipende dalla sola pressione*. Essa è dunque costante, oppure varia soltanto da un'isobarica all'altra, sicchè le isobariche sono in ogni caso superficie di eguale densità (*isopicnotiche*). Così, nell'atmosfera, in quanto si trovi in equilibrio, la densità può variare solo coll'altezza.

9. Già fu notato (Cap. prec., n. 53) che, nei casi usuali (liquidi omogenei; gas perfetti, in regime sia isotermico, che adiabatico) una relazione del tipo (5) si può assumere a priori come derivante da proprietà intrinseche dello stato liquido e gassoso. Essa ci si è ora affacciata sotto altra luce: come conseguenza dell'equilibrio di un fluido, quale esso sia (cioè indipendentemente da ogni equazione di stato), in un campo di forza conservativo.

Osserviamo per incidenza che l'aver ritrovato la (5) (senza introdurla a priori) nei problemi statici più importanti, costituisce un argomento di più a suo favore, per farla senz'altro figurare tra le equazioni indefinite.

Qui vogliamo piuttosto osservare che, se effettivamente ci si limita fin da principio ai casi praticamente più importanti, in cui, potendosi considerare la densità funzione della sola pressione, sussista una relazione di tipo (5), allora l'equazione fondamentale (1) diviene [si ricordi la formula (2) del n. 6 del Cap. VIII]

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{grad}\, p = \frac{d\mathcal{P}}{dp}\,\mathrm{grad}\, p = \mathrm{grad}\,\mathcal{P}\,.$$

Questa ci dice che la forza $\boldsymbol{F}$ è il *gradiente di uno scalare* $\mathcal{P}(p)$, funzione del posto (x, y, z) pel tramite di p. *Si esige dunque per l'equilibrio che la forza* $\boldsymbol{F}$ *sia conservativa.* Soddisfatta questa prima condizione, ove si indichi con U il relativo potenziale, l'equazione (1) suddetta (vettoriale e differenziale) rimane sostituita dall'unica relazione (scalare e in termini finiti) perfettamente equivalente

$$\mathcal{P}(p) = U + \mathrm{cost}\,. \tag{6}$$

D'ora innanzi invocheremo sempre questa, come equazione locale dell'idrostatica, avvertendo ancora una volta che ad essa si è di necessità condotti, sol che si ammetta a priori o che la densità sia funzione della sola pressione o che le forze di massa siano conservative.

10. Richiamandoci al Cap. prec. (n. 53) possiamo aggiungere che la (6) si specifica sotto la forma

$$\frac{p}{\mu} = U + \text{cost.}, \tag{7}$$

per i *liquidi omogenei*; sotto la forma

$$c \log p = U + \text{cost}, \tag{8}$$

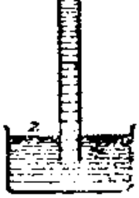
per i *gas che seguono la legge del* BOYLE, nell'ipotesi che sia uniforme la temperatura: c vi rappresenta la costante della legge del BOYLE (per la corrispondente temperatura). È appena necessario avvertire che, se il campo di forza si riduce a quello della gravità, la (7) si identifica colla (4′) del n. 5, mentre la (8) (sottraendo dall'equazione generica quella che si riferisce ad un valore particolare z_0, e passando poi dai logaritmi ai numeri) assume l'aspetto

$$p = p_0 e^{\frac{g(z-z_0)}{c}}. \tag{8′}$$

Qui, come già nella (4′), si suppone l'asse delle z diretto verticalmente verso il basso.

§ 5. – Barometro. Misura delle altezze.

11. Applicando la (4′) al mercurio di un barometro, possiamo giustificare l'impiego di questo strumento nella misura delle pressioni. Infatti, delle due superficie libere del mercurio una confina col vuoto cosicchè su di essa si ha $p_0 = 0$, l'altra è a contatto coll'aria esterna; e quindi la pressione p, che sovr'essa si esercita, è la pressione esterna; p risulta dunque proporzionale alla differenza di livello $z_0 - z$ fra le due superficie, cioè all'altezza della colonna di mercurio. Ecco perchè la pressione riesce misurata dall'altezza della colonna.



12. La (8') relativa ai gas, e in particolare all'aria, può essere adoperata per la misura delle altezze, poichè, note le pressioni atmosferiche p e p_0 in due stazioni qualisivogliano, possiamo ricavare la differenza di livello $z - z_0$ delle due stazioni. Va notato per altro che il valore ottenuto in tal modo è molto grossolano, in primo luogo perchè si considera l'aria atmosferica come un gas perfetto in equilibrio, ma soprattutto poi perchè, trattandosi in generale di un campo piuttosto esteso, è insufficiente l'approssimazione $U = gz$ per rappresentare l'azione della gravità.

§ 6. – Equilibrio relativo di un fluido pesante, quando il vaso che lo contiene ruota uniformemente intorno ad un asse verticale.

13. Immaginiamo che un vaso contenente un liquido (omogeneo) ruoti intorno ad un asse verticale con velocità angolare costante ω, e supponiamo che il liquido si trovi in equilibrio relativo rispetto al vaso. Si tratta di determinare la forma della superficie libera nella ipotesi che il liquido sia soggetto all'azione della gravità.

Assunta per sistema di riferimento una terna x, y, z, rigidamente collegata al vaso, coll'asse di rotazione per asse z e la direzione positiva rivolta *verso l'alto*, le questioni di equilibrio relativo (rispetto a questi assi, cioè rispetto al vaso) si riducono (XV$_1$, n. 6) a questioni di equilibrio assoluto, purchè s'aggiunga alle forze attive la forza centrifuga, che ammette il potenziale unitario $\omega^2(x^2 + y^2)/2$.

Avremo dunque per il nostro U l'espressione

$$U = gz + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

e la equazione della superficie libera (che deve essere, come sappiamo, una superficie equipotenziale) si ottiene ponendo U eguale ad una conveniente costante. Tale superficie è un paraboloide rotondo che ha per asse l'asse di rotazione del sistema.

§ 7. – Pressioni che un fluido in equilibrio esercita sul vaso che lo contiene o sopra un fluido immerso. Principio di Archimede. Caso di un galleggiante.

14. Consideriamo un fluido soggetto a forze date, il quale riempia *completamente* un recipiente chiuso e proponiamoci di determinare il risultante ed il momento risultante delle pressioni che il fluido esercita sul vaso. La cosa è subito fatta, se si ricorre alle equazioni cardinali dell'equilibrio, nella forma che loro conviene per i sistemi continui (cfr. X, n. 12). Da esse (applicate all'intera massa liquida contenuta nel vaso) risulta che quando sussiste l'equilibrio, le forze di massa e le pressioni esterne (nel caso generale, si diceva *sforzi*) costituiscono un sistema equivalente a zero; quindi il risultante ed il momento risultante delle forze di massa sono eguali ed opposti al risultante ed al momento risultante delle pressioni esterne. Ma le pressioni, che il fluido esercita sul vaso sono eguali ed opposte a quelle che il vaso esercita sul fluido e queste (quando il liquido è completamente racchiuso dal vaso) esauriscono le pressioni esterne. Perciò *il risultante ed il momento risultante delle pressioni, sopportate dal vaso, sono rispettivamente eguali al risultante ed al momento risultante delle forze di massa.*

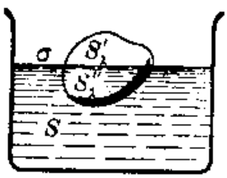
15. Lo stesso vale anche se il vaso non è chiuso o non completamente riempito di fluido, purchè però la superficie di questo che rimane libera confini col vuoto. In tal caso, infatti, la pressione esterna sulla superficie libera è nulla, ed è ancor vero che il sistema delle pressioni sopportate dal vaso è eguale ed opposto al complesso delle pressioni esterne.

16. Considerazioni analoghe che, come vedremo, trovano subito una applicazione importante, si possono istituire, immaginando nel seno della massa fluida in equilibrio, una ipotetica superficie chiusa σ_1 e cercando di dare forma espressiva ai vettori caratteristici, risultante e momento risultante, dell'insieme delle pressioni esercitate sulla σ_1 dal fluido circostante. Detto S_1 il campo racchiuso da σ_1, applichiamo al sistema materiale che lo occupa le equazioni cardinali. Esse ci dicono che il sistema delle pressioni in questione è equilibrato dal complesso delle forze di massa che si esercitano su S_1, ossia *equivale* (vettorialmente) *al sistema delle forze di massa cambiate di senso.*

17. Come applicazione del risultato precedente, consideriamo un corpo rigido S_1, tutto immerso in un fluido S e, designata con σ_1 la superficie che limita il corpo verso l'esterno, supponiamo che il potenziale U delle forze agenti sul liquido si possa estendere analiticamente (come funzione finita e continua insieme colle sue derivate prime) anche entro lo spazio S_1 occupato dal solido. Così stando le cose, potremo immaginare, accanto al caso reale, un ipotetico caso di equilibrio, in cui il campo S_1 si trova occupato, anzichè dal solido, anch'esso da fluido della stessa natura del fluido circostante, e sollecitato da forze di massa provenienti da un potenziale (l'accennata estensione di U al campo S_1). Ci troviamo così nelle condizioni del n. prec., talchè sussiste il teorema:

Un corpo rigido, circondato tutto all'intorno da un fluido, subisce un complesso di pressioni, il cui risultante e il cui momento risultante sono eguali ed opposti al risultante ed al momento risultante delle forze di massa che agirebbero sul fluido spostato.

18. Questo teorema può essere generalizzato al caso di un corpo S_1, che non sia totalmente immerso in uno stesso fluido, ma, come avviene nei galleggianti, parte in un fluido e parte in un altro. Possiamo immaginare che la superficie σ di separazione dei due fluidi (che è una certa superficie $U = \text{cost}$) venga continuata entro S_1 e che, nelle due porzioni S_1', S_1'' di S_1, così determinate, seguitino rispettivamente a valere le equazioni di equilibrio dei due fluidi. Diviene così legittimo di applicare separatamente il teorema alle due porzioni S_1', S_1''. Il complesso delle pressioni agenti su entrambe si comporrà delle pressioni effettivamente esercitate dai fluidi sopra il contorno σ_1 e di quelle che avrebbero luogo sulla ipotetica superficie di separazione tra S_1' e S_1''. Ma queste, ammessa la continuità dei due fluidi, sono da ritenersi eguali ed opposte, per cui rimangono le pressioni effettivamente subìte da S_1, le quali appariscono così equivalenti alle forze di massa che agirebbero sui fluidi spostati.



19. Prendiamo, ad esempio, un corpo S_1 immerso totalmente in un fluido pesante in equilibrio. La espressione gz del potenziale (unitario) U si può manifestamente estendere (rispettando la continuità, ecc.) anche dentro S_1, e le forze di massa che vengono ivi ad agire sull'ipotetico fluido, si riconducono al relativo peso. Di qui il cosiddetto *principio di* ARCHIMEDE [1]:

Un corpo immerso in un fluido subisce un insieme di pressioni che equivalgono ad una forza unica (spinta idrostatica) *eguale ed*

---

[1] ARCHIMEDE, siracusano, n. nel 286 a. C., ucciso nell'assedio della sua città natale (212 a. C.), è il più grande genio scientifico dell'antichità. Intuì per primo l'essenza e la fecondità dei procedimenti infinitesimali e

opposta al peso del fluido spostato ed avente per linea d'azione la verticale del centro di spinta.

Così si denomina il punto che sarebbe baricentro di S_1, qualora tale spazio fosse occupato dal fluido. Il centro di spinta coincide manifestamente col baricentro del corpo, quando questo è omogeneo (e si tratta di liquidi omogenei).

20. Nel caso di un galleggiante, avremo da considerare due fluidi pesanti: un liquido ed un gas. Immaginiamo continuato entro il galleggiante il piano orizzontale, che separa i due fluidi, e chiamiamo *sezione d'affioramento* la sezione ideale, praticata da questo piano.

Il galleggiante risulta così diviso in due regioni S' ed S'' e si potrà applicare il teorema generalizzato; donde segue che il sistema delle pressioni equivale alle due spinte del liquido e del gas. Ma siccome, per la tenue densità del gas, la seconda spinta è trascurabile di fronte alla prima, così *le pressioni subite dal galleggiante riescono sensibilmente equivalenti alla spinta del liquido spostato*, cioè di quello che occuperebbe il volume compreso tra la superficie immersa e la sezione d'affioramento.

---

li applicò, tra l'altro, alla risoluzione dei celebri problemi della quadratura del cerchio (calcolo di π) e della cubatura della sfera. Fondatore della Statica e della Idrostatica, scoperse il principio della leva, ideò l'elica ed altri strumenti, introdusse la nozione di peso specifico, ecc.

Capitolo XII.

IDRODINAMICA

§ 1. – Moti dotati di potenziale di velocità. Aspetto ridotto del problema idrodinamico.

1. Abbiamo visto (X, n. 52) che, pei fluidi perfetti, sia liquidi che gassosi (almeno nelle circostanze più comuni, che soprattutto interessano in pratica), si ha, per ogni particella, una equazione di stato del tipo

$$\frac{1}{\mu} = \text{funzione della sola } p,$$

dove è addirittura $\mu = \mu_0 = \text{cost}$ nel caso dei liquidi omogenei; $\mu = cp$ (c costante) nel caso di gas perfetti e di fenomeni isotermici, ecc.

Con ciò, posto

$$\mathcal{P} = \int \frac{dp}{\mu}, \tag{1}$$

risulta, a meno di una inessenziale costante additiva,

$$\mathcal{P} = \begin{cases} \dfrac{p}{\mu_0} & \text{pei liquidi omogenei;} \\ c \log p & \text{pei gas perfetti (processi isotermici):} \\ \text{ecc.} \end{cases} \tag{1'}$$

Ogniqualvolta sussiste una equazione di stato del tipo suindicato, l'equazione indefinita del moto del fluido assume la forma [(19') del cit. Cap. X].

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} \mathcal{P}\,.$$

Limitandoci, in questo nostro più che sommario cenno di idrodinamica, a considerare il caso di forze di massa conservative, sarà (VIII, n. 6) $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U$, e potremo assumere l'equazione vettoriale del moto sotto la forma

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}(U - \mathcal{P}) \,. \tag{2}$$

Ove si tenga conto delle espressioni esplicite [(9′) del Cap. IX] delle componenti del vettore $\boldsymbol{a}$, la (2) proiettata sugli assi, dà luogo alle equazioni equivalenti scalari

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z &= \frac{\partial(U - \mathcal{P})}{\partial x}\,, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z &= \frac{\partial(U - \mathcal{P})}{\partial y}\,, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z &= \frac{\partial(U - \mathcal{P})}{\partial z}\,. \end{aligned}\right. \tag{2′}$$

2. Un caso particolarmente importante in cui alla *equazione vettoriale* (2) [o, ciò che è lo stesso, alle tre equivalenti equazioni scalari (2′)] *si può sostituire una sola equazione scalare, si ha supponendo che esista un potenziale di velocità*, cioè una funzione $\varphi(x, y, z \mid t)$ tale che si abbia (in ogni posto del campo occupato dalla massa fluida e in ogni istante dell'intervallo di tempo che si considera)

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi \,.$$

Ciò vale quanto dire che le componenti v_x, v_y, v_z della velocità $\boldsymbol{v}$ si suppongono eguali alle derivate di una stessa funzione φ del posto e del tempo.

In tal caso il moto si dice *irrotazionale*.

Riserbandoci di mostrare al prossimo n. come, nell'ipotesi dianzi precisata, le funzioni incognite si possano ridurre da quattro a due (oltre a $\mathcal{P}$, la sola φ in luogo delle v_x, v_y, v_z), ci indugiamo qui un momento a spiegare rapidamente la origine della qualifica di « irrotazionale ».

Per giustificarla completamente bisognerebbe ricorrere ad un teorema generale sugli spostamenti infinitesimi dei sistemi continui, che noi qui ci limiteremo ad accennare e che costituisce in un certo senso una estensione della proprietà stabilita al n. 18 del Cap. III$_1$ per gli spostamenti elementari dei sistemi rigidi. Si è visto allora che nel moto rigido più generale, lo spostamento elementare dP di un punto generico, quando si prefissi un centro di riduzione O, si può pensare decomposto in due addendi $d_1P = \boldsymbol{v}_0 dt$ e $d_2P = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)dt$, di cui il primo è lo stesso per tutti i punti P del sistema (e corrisponde, quindi, ad una traslazione elementare) e l'altro definisce la rotazione elementare intorno ad un asse passante pel polo O.

Orbene, quando si tratta di un sistema continuo, comunque deformabile, e se ne considera una particella (o porzione infinitesima) intorno ad un generico punto O, lo spostamento elementare dP di un qualsiasi punto P di codesto intorno di O si può considerare come somma di tre addendi d_1P, d_2P, d_3P, di cui i primi due corrispondono ancora, rispettivamente, a una traslazione e a una rotazione intorno a O, mentre d_3P caratterizza la deformazione della particella; e se, denotata con $\boldsymbol{v}$ la velocità di O, con $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$ quella di P, si esprimono d_1P, d_2P, d_3P per mezzo di $\boldsymbol{v}$ e del suo derivato, si riconosce che la rotazione elementare d_2P della particella risulta identicamente nulla sempre e solo quando la velocità $\boldsymbol{v}$ deriva da un potenziale $\varphi(x, y, z)$.

Avvertiamo, infine, che i moti, che non sono irrotazionali, si dicono *vorticosi*. Ce ne occuperemo ai §§ 4 e 5.

3. Dopo questa breve digressione, passiamo a dimostrare come, secondo l'asserto del n. prec., l'equazione vettoriale (2), sotto la ipotesi

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi\,, \tag{3}$$

si riduce ad un'unica condizione scalare.

A tal fine riprendiamo l'espressione locale della accelerazione [form. (9) del Cap. IX, n. 13], la quale, in base alla (3) e alla permutabilità dell'operatore grad con le derivazioni parziali rispetto a ciascuno degli argomenti x, y, z, t, si può in questo caso scrivere

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_x \operatorname{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + v_y \operatorname{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + v_z \operatorname{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,.$$

Ma, in virtù della (2) del Cap. VIII e della $v_x = \partial\varphi/\partial x$, si ha manifestamente

$$v_x \operatorname{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2;$$

e, naturalmente, sussistono le analoghe identità che da questa si deducono per circolazione di x, y, z. Si riconosce così che, ogniqualvolta vale la (3), l'espressione locale della accelerazione è fornita dalla

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \Phi\,,$$

dove per brevità si è posto

$$\Phi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2\,. \tag{4}$$

Con ciò l'equazione dinamica (2) diviene

$$\operatorname{grad}(\Phi - U + \mathcal{P}) = 0\,,$$

e mette in luce come la funzione

$$\Phi - U + \mathcal{P}$$

abbia nulle tutte e tre le derivate (rispetto alle coordinate di spazio). Per conseguenza l'equazione *vettoriale* (2) equivale all'unica equazione scalare

$$\Phi - U + \mathcal{P} = C\,, \tag{5}$$

dove C designa una costante rispetto ad x, y, z, ossia una funzione della sola t.

4. Nel caso dei *liquidi omogenei* (X, n. 53) va posto $\mathcal{P} = p/\mu$, ove p designa la pressione e μ il valore costante della densità; nel caso dei *gas (a temperatura costante)* $\mathcal{P} = c \log p$, con c costante assegnata; ecc. Comunque, la (5) [attesa l'espressione (4) di Φ] definisce direttamente la pressione in termini di U e di φ. Il potenziale delle forze U è di solito uno dei dati del problema idrodinamico. L'incognita essenziale è la φ, che definisce la distribuzione delle velocità, a norma della formula

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi\,. \tag{3}$$

5. Ma abbiamo ancora, accanto all'equazione del moto, un'altra equazione indefinita, di cui bisogna tener conto, cioè l'equazione di continuità (X, § 7); cosicchè vediamo che, per i moti irrotazionali, le quattro equazioni, con altrettante incognite (v_x, v_y, v_z, $\mathcal{P}$), del caso generale si riducono a due [la (5) e l'equazione di continuità] colle incognite $\mathcal{P}$ e φ.

Pei liquidi omogenei (e, più in generale, pei fluidi incomprimibili) si ha (X, n. 39)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0\,, \tag{6}$$

ossia (cfr. VIII, n. 12)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta^2\varphi = 0\,; \tag{6'}$$

onde possiamo dire che, in tali casi, il potenziale di velocità è una *funzione armonica*.

6. Accanto alle due equazioni indefinite [la (5) e l'equazione di continuità], conviene aver riguardo a condizioni ai limiti, variabili da problema a problema.

Per es., se la superficie terminale σ (supponiamo, per fissare le idee, di un liquido) è a contatto di una parete rigida fissa, sarà nulla in quei punti la componente della velocità del fluido secondo la normale alla parete, perchè il liquido non la attraversa, ma può soltanto scorrere tangenzialmente lungo la parete stessa. Avremo allora, designando al solito con n la normale a σ (cioè alla parete),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0\,.$$

Quanto poi alle superficie libere, esse non hanno forma fissata a priori, ma vengono determinate dall'andamento stesso del moto. Rappresentandone con

$$f(x, y, z \mid t) = 0$$

la incognita equazione, dovrà intanto essere $p = p_0$ per $f = 0$; talchè la (5) ci porge una prima condizione.

Siccome poi, per ragioni di continuità, una molecola che appartiene al contorno nell'istante t, seguita ad appartenervi nell'istante $t + dt$, così si deve avere, assieme ad $f = 0$,

$$f(x + dx,\ y + dy,\ z + dz \mid t + dt) = 0\,,$$

dove dx, dy, dz, denotando le componenti dello spostamento di una molecola fluida, sono dati da

$$v_x dt\,,\quad v_y dt\,,\quad v_z dt\,,$$

cioè, nel caso presente, da

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dt\,,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dt\,,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dt\,.$$

Ne viene

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\,.$$

Infine dovranno essere date le condizioni iniziali del moto.

7. Come si vede, anche pei moti irrotazionali di un liquido [equazioni indefinite (6) e (6')] il problema generale si presenta abbastanza complicato; ma qualche semplificazione, che si scorge ovviamente, interviene per i *fenomeni stazionari*.

Con tutto ciò non si sa raggiungere la soluzione completa, anzi si può dire che manchino perfino indicazioni precise sulla sua possibilità. Certo alcuni casi particolari, anzi intere categorie di casi, sono state esaurientemente trattate, ma non è qui il luogo di occuparsene, tanto più che, per la massima parte, l'interesse sarebbe prevalentemente teorico. Per i problemi, che hanno vera importanza pratica (quali, ad esempio, l'efflusso di un liquido da un serbatoio, il moto in un tubo o in un canale) bisogna quasi sempre accontentarsi di soluzioni approssimative, possedendosi finora ben pochi risultati rigorosi.

8. Alcune conseguenze di carattere generale si possono dedurre dalla equazione (5), che, in certo modo, corrisponde all'integrale delle forze vive.

Infatti, attesa l'espressione (4) di Φ, la (5) stessa lega v ed U (se non esclusivamente tra loro come nell'integrale delle forze vive) con $\mathcal{P}$ e $\partial\varphi/\partial t$. Questa ultima derivata viene a mancare nel caso (praticamente assai importante) dei *moti stazionari*, e si ha fra i tre soli elementi v, U e $\mathcal{P}$ (possiamo dire velocità, forza e pressione) la relazione semplicissima

$$\frac{1}{2}v^2 - U + \mathcal{P} = \text{cost}\,. \tag{5'}$$

Abbiamo scritto nel secondo membro esplicitamente « costante » perchè tale va considerata la C della (5) (che può a priori dipendere da t), quando si tratta di moti stazionari, in cui, per definizione, nè v, nè U, nè $\mathcal{P}$ dipendono da t.

Nel caso dei liquidi omogenei $\mathcal{P} = p/\mu$, e si ha in particolare

$$\frac{1}{2}v^2 - U + \frac{p}{\mu} = \text{cost}\,. \tag{5''}$$

9. Consideriamo un ipotetico stato di equilibrio dello stesso liquido cui si riferisce la (5''), sotto l'azione delle stesse forze. Si avrebbe (X, n. 10), indicando con p^* la pressione relativa al caso statico

$$\frac{p^*}{\mu} = U + \text{cost}\,,$$

mentre la (5''), risoluta rispetto a p/μ, dà

$$\frac{p}{\mu} = U + \text{cost} - \frac{1}{2}v^2\,.$$

Il confronto dei valori di p relativi ad un medesimo posto (e quindi a valori eguali di U) mostra che, a parità delle altre condizioni, cioè quando la costante del secondo membro sia la stessa nel caso statico e nel caso dinamico, si ha

$$p = p^* - \frac{1}{2}\mu v^2 . \tag{5'''}$$

Il termine addizionale $-\mu v^2/2$ è essenzialmente negativo dovunque c'è moto; perciò *la pressione idrodinamica* (relativa ad uno stato di moto permanente) *è sempre più piccola della corrispondente pressione idrostatica.*

10. Portata. — Particolare menzione merita il caso semplicissimo del deflusso di un liquido lungo un tubo o un canale. Rispetto alla distribuzione vettoriale $\boldsymbol{v}$ (relativa ad un istante generico) il tubo stesso costituisce manifestamente un tubo di flusso (VIII, n. 7). D'altra parte, in causa dell'equazione di continuità (6), è $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, ossia si tratta di una distribuzione solenoidale, e quindi (è proprio questo il caso tipico che ha dato origine alla nozione di tubo di flusso) il volume di liquido che entra attraverso una sezione generica σ_0 è eguale a quello che esce attraverso un'altra qualsiasi sezione σ.

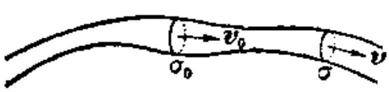
Chiamando *portata*, come in pratica si suole, la quantità Q di liquido che passa *nell'unità di tempo* attraverso una sezione generica, il teorema del flusso assume l'aspetto intuitivo: *portata costante.*

Se in particolare σ_0 è attraversata da tutti i filetti fluidi normalmente e colla stessa velocità v_0, si ha senz'altro

$$Q = \mu \sigma_0 v_0 ;$$

in caso contrario, bisogna dividere in elementi e prendere l'integrale.

11. Moto in una dimensione. — In pratica avviene abbastanza spesso che i filetti siano (o si possano sensibilmente considerare) paralleli in tutto il percorso interno al tubo. Allora essi attraversano ogni sezione normale σ perpendicolarmente e con una stessa velocità v (variabile in generale da sezione a sezione, e da istante a istante, se il moto non è permanente).



Comunque, si ha

$$\sigma_0 v_0 = \sigma v \,. \tag{7}$$

In questo caso semplice, l'equazione differenziale (6) può essere, come si vede, sostituita da una equazione in termini finiti, cioè dalla (7), la quale determina la distribuzione locale delle velocità lungo il tubo, ossia v, in funzione di dati geometrici (σ_0 e σ) e del regime relativo ad una particolare sezione, cioè di v_0.

S'intende che alla (7) bisogna sempre associare l'altra equazione (quella che proviene dalla originaria equazione vettoriale, e collega il moto colla pressione e colle forze). Se si tratta di un moto permanente, basta riportarsi alla (5″), che già si presenta sotto la forma più opportuna, anche pel caso attuale, comparendovi la sola v (oltre ad U e p).

Per il moto vario (sia detto per incidenza) converrebbe risalire alla (5) e operare in modo da liberarsi dal potenziale di velocità φ, ciò che introduce anche le derivate della v.

12. Caso della gravità (nei moti permanenti). — Quando la forza (unitaria) di massa si riduce al peso, il relativo potenziale U vale $-gz$, supposto l'asse delle z verticale verso l'alto.

La (5″) assume allora l'aspetto

$$\frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{p}{\mu} = \text{cost}\,, \tag{8}$$

od anche, dividendo per g,

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\mu g} = \text{cost}\,. \tag{8'}$$

13. Interpretazione espressiva degli idraulici. — La z è la effettiva quota verticale del posto generico P, che si considera; ma anche gli altri due addendi possono interpretarsi come altezze. L'addendo $v^2/2g$ è manifestamente (basta ricorrere all'integrale delle forze vive o riportarsi alla Cinematica del punto) l'altezza da cui dovrebbe cadere un grave per acquistare la velocità v spettante al liquido in P; essa si dice *altezza* o *quota cinetica*, o anche *dovuta alla velocità v*.

Il terzo addendo $p/\mu g$ si dice *altezza* o *quota* o *colonna piezometrica*, ed ha un semplice significato idrostatico, rappresentando (XI, n. 5) l'altezza (sopra il punto P) di una colonna liquida capace di produrre col suo peso la pressione p.

Dopo ciò è chiaro che la (8′) si può enunciare come segue:

Le tre quote verticali, effettiva, cinetica e piezometrica, hanno somma costante in ogni punto di un liquido pesante animato da moto irrotazionale permanente.

§ 2. – Teorema del Torricelli.

14. Si consideri un liquido pesante, il quale fluisca da un recipiente in quiete, attraverso un'apertura della parete. Se il livello del liquido nel recipiente vien mantenuto costante, il regime è rigorosamente stazionario; se tale livello si abbassa molto lentamente (come avviene quando l'ampiezza dell'orifizio di efflusso è piccola rispetto alle dimensioni del vaso) lo si può ritenere tale in via approssimativa.

Supposto che il movimento sia irrotazionale, sussisterà la (8). Applichiamola tanto ad un punto P_0 della superficie libera $z = z_0$ del fluido nel vaso, quanto ad un punto Q della superficie della vena di efflusso, e sottraiamo i due risultati. Verrà, notando che, per $z = z_0$, la velocità è (o si può considerare) nulla, e che la pressione p è la stessa nei due casi (la pressione atmosferica p_0),

$$\frac{v^2}{2} = -g(z - z_0) = gh\,,$$

essendo v la velocità in Q ed h il *carico* o *battente*, cioè la differenza di livello fra l'orifizio e il pelo libero (fra Q e P_0).

Se ora si immagina un punto pesante che parta dalla quiete e scenda di un'altezza h, l'integrale delle forze vive ci mostra che esso acquista una velocità v, espressa essa pure da $v^2/2 = gh$, donde il *teorema del* TORRICELLI: *La velocità, con cui le particelle di un liquido pesante effluiscono da un piccolo orifizio è quella stessa che corrisponderebbe alla caduta libera di un grave dal livello superiore del liquido, cioè $\sqrt{2gh}$, se h è il battente.*

§ 3. – Teorema del Bernoulli.

15. Nel caso di un moto stazionario qualsiasi (in generale *vorticoso*, mentre dal n. 2 in poi ci siamo occupati esclusivamente di moti irrotazionali), si può stabilire una notevole proprietà delle linee di flusso, enunciata per la prima volta da DANIELE BERNOULLI [1].

Riprendiamo perciò l'equazione dinamica fondamentale (n. 1)

$$a = \operatorname{grad}(U - \mathcal{V}), \tag{2}$$

che definisce, si può dire, il moto d'una generica particella fluida.

Per l'ipotesi che il moto sia permanente, nè U, nè $\mathcal{V}$ contengono esplicitamente t. La (2) si può così interpretare come l'equazione (vettoriale) del moto di un punto materiale di massa 1, sollecitato da una forza (totale), che deriva dal potenziale $U - \mathcal{V}$.

A noi basterà ritenere che una necessaria conseguenza è l'integrale delle forze vive. Siccome la massa è 1, e la velocità (in valore assoluto) della particella mobile, ad un istante generico, non è che la v già considerata nei §§ precedenti, potremo ritenere che sia, durante il moto,

$$\frac{1}{2} v^2 - U + \mathcal{V} = \text{cost},$$

pur potendo la costante essere diversa da una particella ad un'altra.

Comunque, ove si tenga presente che, sempre per la stazionarietà del moto, le traiettorie coincidono colle linee di flusso (IX, n. 9), è lecito concludere che

$$\frac{1}{2} v^2 - U + \mathcal{V}$$

ha valore costante lungo una medesima linea di flusso.

In ciò consiste il *teorema del* BERNOULLI.

16. Si ricorderà (n. 8) che, per i *moti stazionari irrotazionali*, si può dire qualche cosa di più, e cioè che il trinomio

$$\frac{1}{2} v^2 - U + \mathcal{V}$$

---

[1] DANIELE BERNOULLI (figlio di Giovanni e nipote di Giacomo, l'uno e l'altro matematici di grido) nacque a Basilea nel 1700 e vi morì nel 1782. Amicissimo di EULERO, gli fu per una ventina d'anni collega a Pietroburgo (Leningrado); poi tornò in patria e insegnò successivamente Medicina, Metafisica e Filosofia naturale. Oltre a contributi notevolissimi ai fondamenti della teoria dell'elasticità e della resistenza dei materiali, gli si devono un'opera sull'Idrodinamica (contenente fra l'altro la celebre formula indicata nel testo), ricerche famose sulle corde vibranti, e un primo tentativo scientifico di teoria cinetica dei gas (che il MAXWELL riprese oltre un secolo dopo, precisandone, con la sua legge statistica di distribuzione delle velocità, le conseguenze quantitative).

ha valore costante addirittura in *tutti* i punti del campo occupato dalla massa fluida, non semplicemente lungo ciascuna linea di flusso.

Va notato del resto che, limitatamente ad ogni linea siffatta, valgono le conseguenze della costanza di codesto trinomio, già rilevate a proposito dei moti irrotazionali. In particolare, se si tratta di liquidi pesanti (n. 13), si può affermare che, lungo uno stesso filetto fluido, la quota reale, quella piezometrica e quella cinetica hanno somma costante.

§ 4. – Moti vorticosi. Circolazione e sua invariabilità di fronte a forze conservative.

17. Nel § precedente abbiamo considerato moti permanenti, in generale *vorticosi*, cioè non soggetti alla ipotesi restrittiva (n. 2) che v sia il gradiente di una funzione φ. Lasciamo ora cadere anche la particolarizzazione della permanenza (IX, n. 5). Si tratti dunque semplicemente del moto di un fluido perfetto sotto l'azione di forze conservative, con che sussiste (n. 1) l'equazione indefinita

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\,(U - \mathcal{P})\,. \tag{2}$$

Entro l'ambiente occupato dal fluido in movimento, consideriamo una generica linea *chiusa* l.

Circolazione, relativa alla linea l, e all'istante t, del moto fluido in questione, si intende quella che compete alla distribuzione vettoriale $\boldsymbol{v}$, cioè (VIII, n. 6)

$$C = \int_l \boldsymbol{v} \times dP\,. \tag{9}$$

18. Se si suppone di far variare t, si può domandarsi come varia C:

1°) allorchè ci si riferisce sempre alla stessa linea geometrica (variazione locale);

2°) allorchè ci si riferisce ad una stessa linea materiale, cioè ad una linea costituita in ogni istante dalle stesse particelle (variazione molecolare).

Nella seconda accezione la C non si altera, purchè sussista la (2). In ciò consiste il *teorema di invariabilità della circolazione.*

19. Per dimostrarlo, basterà formare la derivata di C rispetto a t, raffigurandoci intuitivamente l'integrale C come somma dei suoi elementi $\boldsymbol{v}\times dP$, riferiti alle varie particelle materiali, di cui consta C.

Quando si passa dall'istante t all'istante vicinissimo $t+dt$, e si seguono le vicende di ciascuna particella, il primo fattore del prodotto, cioè $\boldsymbol{v}$, subisce un'alterazione che, per definizione stessa di accelerazione, è $\boldsymbol{a}dt$. Perciò la derivazione del primo fattore $\boldsymbol{v}$ dà luogo (sommando i contributi dei singoli termini) a

$$\int_l \boldsymbol{a}\times dP\,.$$

In virtù della (2), $\boldsymbol{a}$ deriva dal potenziale $U-\Phi$, e l'integrale ora scritto si presenta come circolazione relativa ad un campo conservativo; esso è quindi nullo [cfr. il citato n. 6 del Cap. VIII].

Ma anche dP (elemento della linea di integrazione) varia in generale con t, in conseguenza del moto delle particelle. Per valutarne la derivata ci farà comodo di considerare anzitutto un particolare istante t_0, e la configurazione l_0 di l in questo istante, riguardando i singoli punti P_0 di l_0 come funzioni di un parametro λ (per es. l'arco di curva, contato a partire da una posizione arbitraria); l'intera curva si avrà facendo variare il parametro λ fra due limiti ben determinati, che diremo a, b. Ad ognuno degli ∞^1 punti $P_0(\lambda)$ di l_0 si può coordinare la particella materiale che lo occupa nell'istante t_0. In un generico istante t, la stessa particella occuperà la posizione $P(t,\lambda)$, e, complessivamente, la configurazione di l relativa al detto istante si otterrà tenendo t fisso e facendo variare λ da a e b.

Ciò premesso, nulla di più facile che valutare l'alterazione con t di un generico elemento dP di l. Basta pensare che dP è, per sua definizione, il vettore che fa passare da un punto generico $P(t,\lambda)$ di l a un punto vicinissimo della stessa linea, nello stesso istante, cioè a $P(t,\lambda+d\lambda)$.

Ne viene $dP=\dfrac{dP}{d\lambda}d\lambda$. Siccome λ e t sono due parametri indipendenti, si ha senz'altro, derivando rispetto a t,

$$\frac{d}{dt}dP=d\lambda\frac{d}{dt}\frac{dP}{d\lambda}=d\lambda\frac{d}{d\lambda}\frac{dP}{dt}\,,$$

o, in definitiva, dacchè $\dfrac{dP}{dt}$ non è altro che la velocità $\boldsymbol{v}$,

$$\frac{d}{dt}dP=d\lambda\frac{d\boldsymbol{v}}{d\lambda}\,.$$

In base a questa formula, si ha dalla (9), per materiale derivazione,

$$\frac{dC}{dt} = \int_l \left[\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times dP + \boldsymbol{v} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{d\lambda} d\lambda \right] = \int_l \boldsymbol{a} \times dP + \frac{1}{2} \int_l \frac{d}{d\lambda} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}) d\lambda .$$

Il primo termine è zero, come si è visto pocanzi; nel secondo si presenta come funzione integranda (rispetto al parametro λ, lungo l'intera linea l, cioè fra a e b) $\frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v})$ o, se si vuole, $\frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} v^2$. Si ha quindi l'integrale indefinito $\frac{1}{2} v^2$; e, limitando, vien zero, poichè la linea di integrazione è chiusa. In definitiva $\frac{dC}{dt} = 0$.

20. Osservazione. — La proprietà della circolazione di rimanere invariabile per ogni linea chiusa (sostanziale) è valida in generale, sotto la sola ipotesi che sussista la (2). Essa può quindi applicarsi in particolare anche ai moti irrotazionali. Ma per questi diviene illusoria, perchè per essi ogni circolazione è zero, appunto in quanto il campo vettoriale $\boldsymbol{v}$ deriva da un potenziale (uniforme) [cfr., ancora una volta, il n. 6 del Cap. VIII].

§ 5. – Moti vorticosi. Teoremi dell'Helmholtz (1).

21. Quando il vettore $\boldsymbol{v}$ non deriva da un potenziale, il suo rotore rot $\boldsymbol{v}$ è diverso da zero [VIII, n. 20]. Esso si collega (n. 2) colla rotazione intestina delle particelle fluide; e rappresenta preci-

(1) Hermann v. Helmholtz, n. a Potsdam nel 1821, m. nel 1894 a Berlino, cominciò la sua carriera come medico militare. Tale era nel 1847 quando comunicò alla Società di Fisica di Berlino (fondata due anni avanti) le sue famose riflessioni *Ueber der Erhaltung der Kraft*, in cui per la prima volta è data formulazione energetica all'integrale delle forze vive, estendendosi il principio di conservazione ad ogni altri ordine di fenomeni fisici e naturali. (Incidentalmente va notato che nel 1842 l'equivalenza tra calore e lavoro era stata valutata da J. R. Mayer e misurata sperimentalmente dal Joule).

Riconosciuto, specie per influenza di Alessandro v. Humboldt, il merito eccezionale del giovane medico, questi fu chiamato (nel 1839) ad insegnare Anatomia e Fisiologia a Königsberg, poi a Bonn, e a Heidelberg, dove, dal 1858 al 1871, la sua multiforme produzione scientifica raggiunse samente il doppio della loro velocità angolare, onde è giustificata la denominazione di *vortice* attribuita al vettore

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \ . \tag{10}$$

22. Entro un campo, il quale si trovi occupato a un dato istante da un fluido in moto vorticoso, è in conformità diverso da zero il vettore $\boldsymbol{\omega}$. Rimangono per ciò univocamente definite (VIII, n. 5) le linee del campo dirette in ogni punto come $\boldsymbol{\omega}$. Esse si chiamano, come è naturale, *linee vorticose*. Si chiama poi *superficie vorticosa* o *vorticoide* ogni superficie (o pezzo di superficie) χ costituita da una semplice infinità di linee vorticose, e tale quindi che la linea vorticosa, passante per un suo punto generico P, appartiene alla superficie. Se n è la direzione normale a χ in P (in un verso a piacere), la componente ω_n del vortice (relativo al punto P) è manifestamente nulla.

23. Reciprocamente, se in ogni punto di una superficie χ, si ha

$$\omega_n = 0 \ , \tag{11}$$

si tratta di un vorticoide.

Per rendersene conto basta considerare la linea vorticosa — diciamo s — passante per un punto generico P della χ, e constatare che essa è effettivamente contenuta in χ. All'uopo si nota che, sussistendo la (11), essendo cioè $\boldsymbol{\omega}$ tangente alla superficie, il punto vicinissimo $P + dP$ della s è ancora in χ. A partire da

---

forse le vette più eccelse. Passò quindi a Berlino quale Presidente della Phys.-Technische Reichsanstalt.

Secondo il KLEIN [*Vorlesungen über die Entwickelung der Math. im XIX^{ten} Jahrhundert*, Berlin, Springer, 1926, p. 224] la mente dell'HELMHOLTZ è caratterizzata da una comprensione egualmente geniale, profonda e creatrice in tutte le scienze della natura, dalla Fisiologia, in cui lascia opere classiche sulle sensazioni ottiche e acustico-musicali, alla critica dei principî della Geometria. Nell'ambito della Meccanica le sue ricerche più celebrate si riferiscono all'Idro e Aero-dinamica (teoria dei vortici, dei getti liquidi, della circolazione atmosferica, delle vibrazioni sonore nelle canne da organo). Le memorie scientifiche furono da lui stesso raccolte in tre volumi (Leipzig, Barth, 1882-1895); e in altri due le conferenze e gli articoli di volgarizzazione. Fu poi pubblicato, a cura di scolari (presso lo stesso editore), l'intero ciclo, in sei volumi, delle lezioni di Fisica matematica da lui professate a Berlino.

$P + dP$ si può ragionare nello stesso modo [in quanto la (11) rimane sempre soddisfatta], e così indefinitamente [1], talchè si conclude giusta l'asserto.

La (11) è dunque *condizione caratteristica* (necessaria e sufficiente) perchè una superficie sia vorticosa.

24. A questa categoria di superficie appartengono in particolare i così detti *tubi vorticosi*, costituiti dal complesso delle linee vorticose che passano per i singoli punti di un contorno chiuso (che non sia esso stesso una linea vorticosa, se no il tubo degenera in questa sola linea).

Evidentemente i tubi vorticosi sono, rispetto al campo vettoriale del vortice $\boldsymbol{\omega}$, ciò che, per un campo qualsiasi, abbiamo genericamente chiamato (VIII, n. 13) *tubi di flusso.*

25. Siccome (ibidem, n. 21) la divergenza d'un rotore è nulla, si ha dalla (10)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0 ;$$

ossia *il campo costituito dai vortici è sempre solenoidale.*

Vale quindi (loco cit., n. 13), per ogni loro tubo di flusso χ (tubo vorticoso) la proprietà che il flusso di $\boldsymbol{\omega}$, attraverso una generica sezione trasversale σ,

$$M = \int_\sigma \omega_n d\sigma \tag{12}$$

è costante, cioè sempre lo stesso, qualunque sia la sezione.

Il numero M si suol chiamare *momento* o anche *intensità del tubo.*

26. Nel caso particolare di un tubo molto sottile — *filetto vorticoso* — la sezione (cfr. la figura a pag. 226) potrà trattarsi come infinitesima (e quindi piana). Detto φ l'angolo che la sua normale n forma colla direzione del vortice (φ si potrà ritenere acuto, scegliendo convenientemente il senso di n), sarà $\omega_n = \omega \cos \varphi$, e l'espressione di M (riducendosi l'integrale a un solo elemento stante la piccolezza di σ) potrà scriversi

$$M = \sigma\, \omega \cos \varphi .$$

---

[1] A questa dimostrazione intuitiva, basata su considerazioni infinitesimali, se ne potrebbe sostituire una puramente analitica, invocando i teoremi di esistenza (degli integrali delle equazioni definienti le linee vorticose).

Ove si tratti di sezione normale (a una e quindi, sensibilmente, a tutte le linee vorticose che costituiscono il tubo) sarà $\cos\varphi = 1$ e rimane

$$M = \sigma\,\omega\,, \tag{11'}$$

in cui si legge:

Lungo un generico filetto vorticoso, è costante il prodotto dell'intensità del vortice per la sezione retta.

27. Fin qui abbiamo sfruttato soltanto il carattere solenoidale del campo dei vortici. Passiamo a indagare le proprietà che gli derivano dal suo significato specifico, in relazione al moto dei fluidi perfetti. Ci appoggeremo essenzialmente sull'invariabilità della circolazione (§ prec.), ed ecco come.

Fissiamo una generica linea l tracciata su χ, chiusa, o più precisamente riducibile ad un punto per deformazione continua, *senza uscire dalla superficie*, e tale quindi da costituire da *sola* [1] il contorno di una porzione χ' della χ. Si ha allora dalla formula dello STOKES (VIII, n. 10), applicata al vettore $\frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}$ e al suo rotore $\boldsymbol{\omega}$,

$$\int_{\chi'} \omega_n d\chi' = \frac{1}{2}\int_l \boldsymbol{v}\times dP\,. \tag{13}$$

Il secondo membro non è altro (n. 17) che la circolazione C relativa alla l. Il primo membro è zero, in virtù della (11), ogniqualvolta si tratta di un vorticoide.

Ne consegue

$$C = 0$$

per tutte le linee di un vorticoide, costituenti sul medesimo un contorno completo.

28. Ma anche la reciproca è vera. Cioè, se la circolazione C è nulla per *tutte* le linee l suddette, appartenenti ad un pezzo di superficie χ, questa è necessariamente un vorticoide.

Per dimostrarlo, consideriamo una porzione arbitraria χ' di χ,

---

[1] Una linea di una superficie può manifestamente essere chiusa senza costituire da sola il contorno completo di un campo χ. Esempio tipico è quello delle superficie tubolari, in cui i contorni s delle varie sezioni trasversali σ *non* sono riducibili, per deformazione continua, a punti senza uscire dalla superficie. È invece riducibile ogni circuito, diremo così, longitudinale.

e sia l il relativo contorno. Dacchè è nulla, per l'ipotesi, la circolazione relativa alla l, si ha dalla (13)

$$\int_{\chi'} \omega_n d\chi' = 0 ;$$

e siccome ciò vale per *qualsiasi* porzione χ' di χ, così, con un ragionamento impiegato più volte (cfr., per es., VIII, n. 11), si conclude che deve essere $\omega_n = 0$ in ogni punto di χ, ossia (n. 23) che si tratta di un vorticoide.

29. La condizione caratteristica $\omega_n = 0$ è dunque equivalente all'altra: Circolazione nulla per tutte le linee chiuse della superficie.

Sotto questa forma si presenta spontanea la proprietà fondamentale del moto dei fluidi perfetti di conservare i vortici.

Più precisamente, si vede che le particelle materiali, le quali in un dato istante appartengono ad una superficie vorticosa, costituiscono, in un altro istante qualsiasi, ancora una superficie vorticosa. Questo per il carattere invariantivo, di fronte al moto, della condizione $C = 0$, riferita a tutte le curve chiuse della superficie.

30. Risulta di qua che ogni tubo vorticoso, in particolare un filetto (e al limite anche una singola linea vorticosa), pensati come costituiti sempre dalle stesse particelle, migrano colla massa fluida e (in generale) si deformano, ma sempre mantengono la loro qualità di tubo, filetto (o linea) vorticosi. Ciò si interpreta fisicamente come l'indistruttibilità dei vortici per effetto del moto (sotto forma analitica, impossibilità che il valore di $\boldsymbol{\omega}$, corrispondente ad un'assegnata particella, divenga zero nel corso del moto, se non lo è inizialmente).

31. Siamo ormai in grado di stabilire la *proprietà fondamentale dei tubi vorticosi, di conservare invariato in ogni istante il momento M*, qualunque sia il moto (del fluido perfetto) cui partecipano.

Riprendiamo all'uopo l'espressione (12) di M, che rappresenta il flusso di $\boldsymbol{\omega}$ attraverso una generica sezione trasversale σ di un tubo vorticoso χ. E sia s il contorno di σ (intersezione della stessa σ colla superficie laterale del tubo). Si avrà dalla formula dello Stokes [la (13), in cui si sostituisce σ a χ' ed s ad l]

$$M = \frac{1}{2} \int_s \boldsymbol{v} \times dP .$$

Il momento M del tubo, può pertanto interpretarsi anche quale semicircolazione relativa ad s, ed è così manifesta la sua indipendenza da t.

Volendo specificare i singoli passaggi logici, si dirà: Al variare di t, le particelle costituenti una sezione trasversale σ di χ e il suo contorno s seguitano a godere di tale proprietà. Siccome χ si conserva vorticoide, il suo momento M è espresso dalla (12), colle determinazioni di σ e di ω relative all'istante generico t. Ma, per la formula dello STOKES, anche questa espressione di M può interpretarsi come semicircolazione spettante al contorno; la circolazione è invariabile; dunque, ecc.

32. Per i filetti vorticosi si ha in conformità (n. 26): Il prodotto d'una sezione normale per il vortice è costante, lungo tutto il tubo e in ogni tempo, comunque (subordinatamente al moto del fluido) si sposti e si deformi il tubo. Dalla costanza del prodotto segue in particolare che un filo vorticoso [come del resto ogni tubo elementare di flusso in un campo solenoidale (VIII, n. 15)] non può terminare nell'interno del fluido. Infatti, finchè il vortice ω è finito e diverso da zero, per ogni punto passa (ad un istante qualsiasi) una sola linea vorticosa; e quindi quelle, che costituiscono il filo, non possono saldarsi fra loro, ma debbono continuare distinte. D'altra parte, in un dato filo, non è possibile che ω si annulli, perchè il prodotto $\sigma\omega$ ha un valore costante M, essenzialmente diverso da zero. Se ne conclude che un filo vorticoso o rientra in se stesso o termina alla superficie del fluido.

33. Queste proprietà dei movimenti privi di potenziale furono scoperte dall'HELMHOLTZ. Se ne ha in natura una manifestazione assai semplice negli anelli di fumo, i quali sono altrettanti vorticoidi d'aria, resa visibile dalle particelle solide, che essa contiene sospese. Questi anelli di fumo si trasportano effettivamente, in seno all'aria circostante, serbandosi però distinti da essa. Certo, dopo un tempo più o meno lungo, essi finiscono col dileguarsi, ma ciò va attribuito da un lato alla viscosità, dall'altro a resistenze accidentali (che non corrispondono a forze conservative) e di cui non è tenuto conto nella precedente teoria.