

R. Conf.  
1963

TULLIO LEVI-CIVITA E UGO AMALDI

COMPENDIO  
DI  
MECCANICA RAZIONALE

SECONDA EDIZIONE RIVEDUTA

PARTE PRIMA

CINEMATICA  
PRINCIPI E STATICA



NICOLA ZANICHELLI EDITORE  
BOLOGNA 1938-XVI

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI  
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

**Nº 1569**

## PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE

*In questo Compendio abbiamo raccolto quel tanto delle nostre Lezioni di Meccanica razionale <sup>(1)</sup>, che corrisponde, a un dipresso, al programma consueto di un corso istituzionale di Università o di Politecnico.*

*Siamo così stati condotti non soltanto a notevoli riduzioni e ai conseguenti adattamenti, ma anche a piccoli ritocchi e a qualche maggiore dilucidazione di natura didattica. In particolare si è rifatta la teoria della similitudine meccanica presentandola sotto una forma più completa e più limpida; e si sono meglio precisati taluni passaggi concettuali un po' delicati (per esempio: la deduzione della condizione di equilibrio di un punto variamente vincolato, nella ipotesi che la realizzazione del vincolo avvenga mediante appoggi; rilevando, nella statica dei fili, che la seconda equazione cardinale per un elemento generico è conseguenza del principio di reazione; aggiungendo un chiarimento nella dimostrazione della sufficienza della condizione generale di equilibrio fornita dal principio dei lavori virtuali; ecc.).*

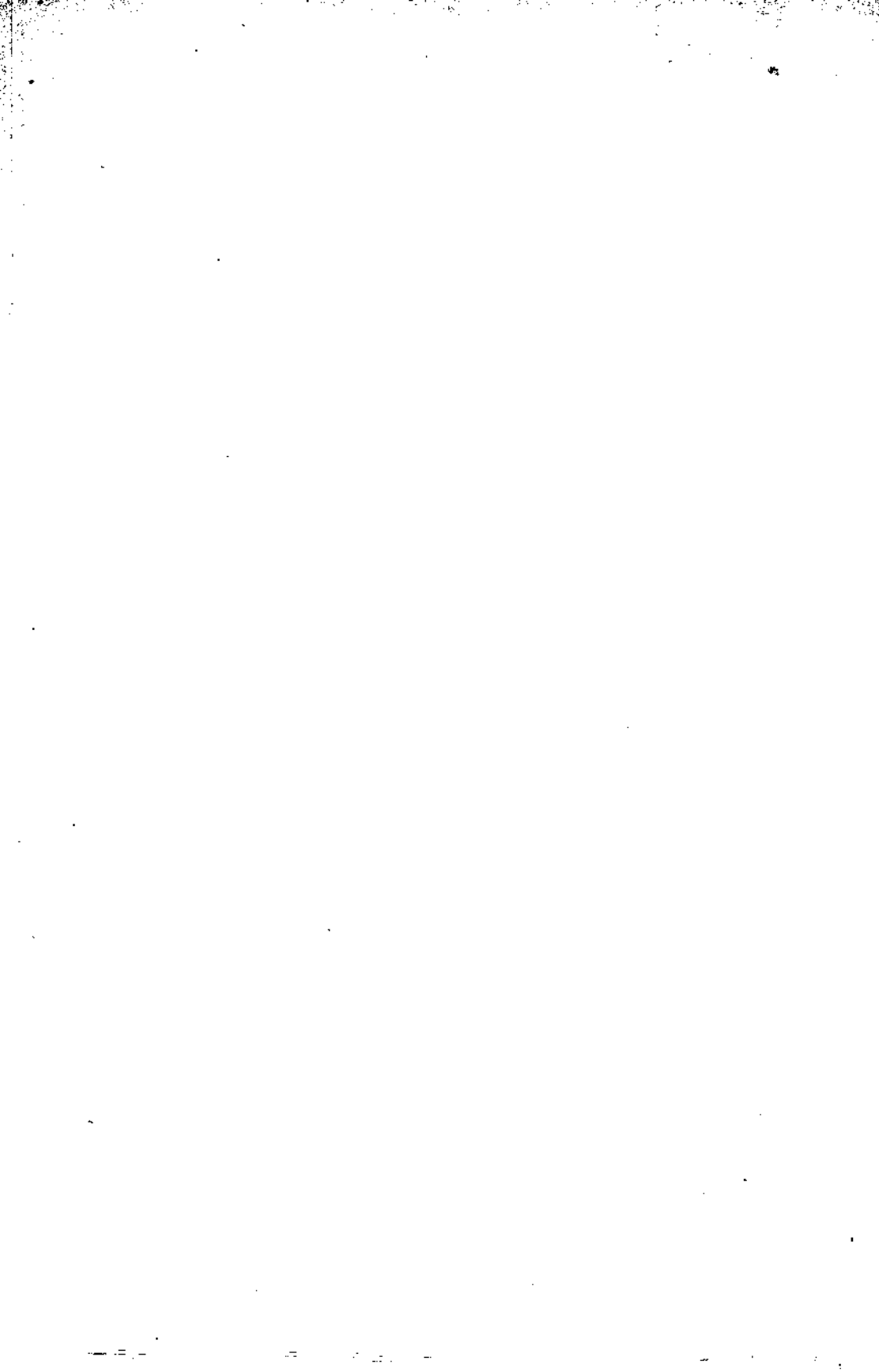
*Abbiamo omesso del tutto gli esercizi, pei quali rimandiamo all'ottimo libro del Prof. GIULIO BISCONCINI <sup>(2)</sup>, che si accorda egregiamente coll'ordine e collo spirito della nostra trattazione.*

Roma, Febbraio 1928.

---

<sup>(1)</sup> Bologna, Zanichelli; Vol. I, 2<sup>a</sup> ediz., 1930; Vol. II, 1926; Vol. II, 1927.

<sup>(2)</sup> *Esercizi e complementi di Meccanica razionale*, Milano, Libreria Editrice Politecnica, 1927.





## PREFAZIONE ALLA SECONDA EDIZIONE

*Questa seconda edizione, pur conforme nel suo complesso alla precedente, ha subito un'accurata revisione generale e scariati ritocchi particolari. Ci limitiamo qui a rilevare che nella I Parte abbiamo aggiunto un'analisi della nozione di « tempo », diretta a lumeggiare il momento preciso del distacco fra l'impostazione classica della Meccanica e della Fisica e quella relativistica; e, per quel che concerne la Statica, ri abbiamo inquadrato, senza ammissioni estranee, la determinazione delle reazioni nel cosiddetto « arco a tre cerniere » e ridotto a forma didatticamente più semplice ed espressiva il paragrafo sull'« attrito rotolante ». Nella II Parte abbiamo ulteriormente semplificato la teoria elementare dei « fenomeni giroscopici », seguendo G. BISCONCINI (1).*

*Non sfuggirà poi al lettore che nella Cinematica abbiamo sottoposto il concetto di « moto composto secondo il POINCARÉ », il quale trovava la sua principale ragion d'essere in una proprietà dei moti rigidi, che, come è stato recentemente avvertito (2), è in generale fallace.*

*Ci è infine gradito cogliere l'occasione per rinnovare i nostri più vivi ringraziamenti alla Casa Editrice NICOLA ZANICHELLI e al suo Direttore Dr. EZIO DELLA MONICA, che con larga cortesia e fattivo interessamento ha agevolato l'opera nostra.*

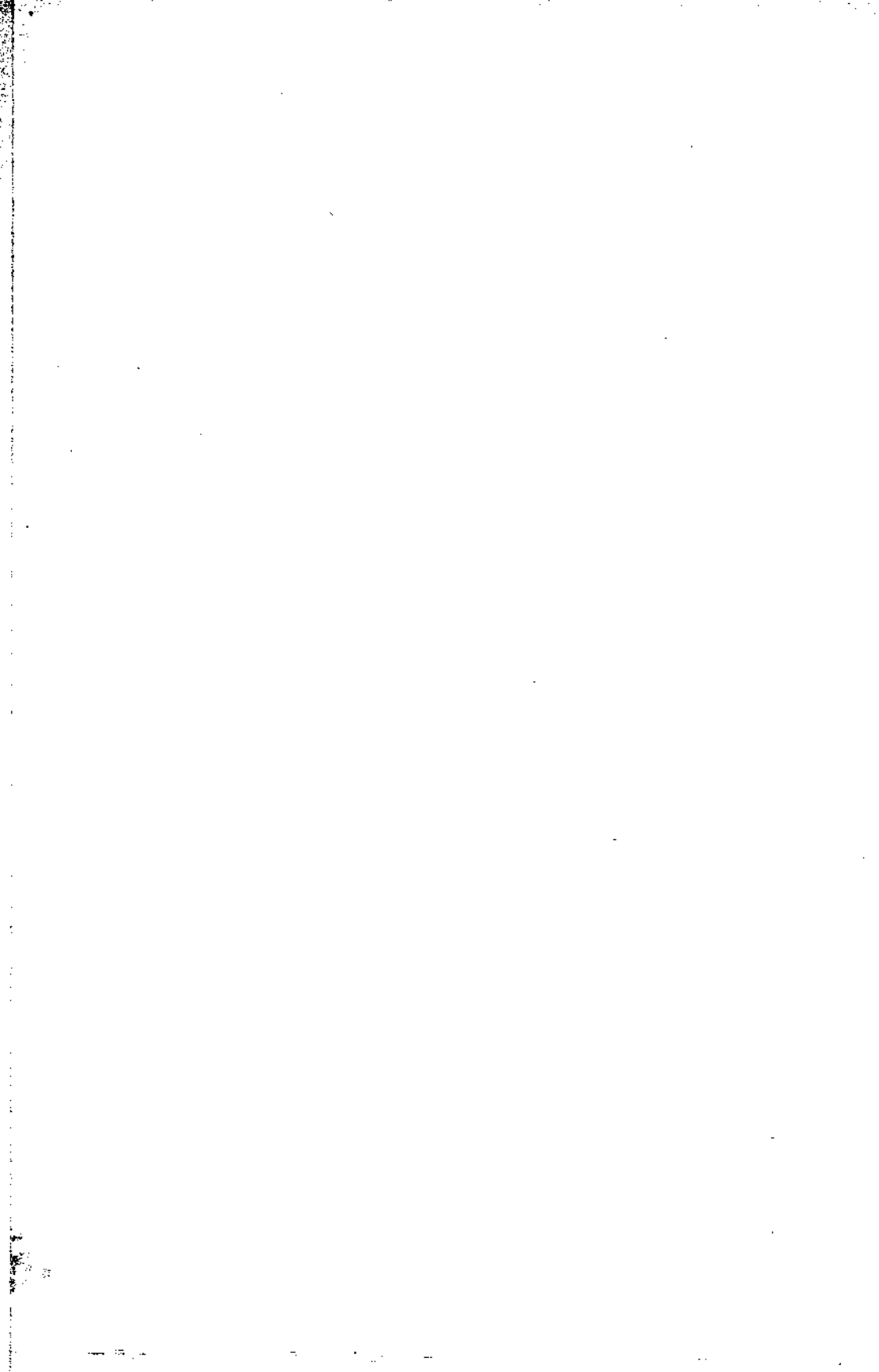
Roma, Maggio 1938-XVI.

T. LEVI-CIVITA - U. AMALDI

---

(1) Sui cosiddetti fenomeni giroscopici, « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », serie 6<sup>a</sup>, vol. XXII, 1935-XIV, pp. 417-420.

(2) G. LAMPARIELLO, Sulla composizione dei movimenti secondo il Poincaré, « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », serie 6<sup>a</sup>, vol. XXVII, 1938-XVI, pp. 27-31.



# INDICE

<i>Prefazione alla prima edizione</i> . . . . .	pag.	V
<i>Prefazione alla seconda edizione</i> . . . . .	"	VII

## CAP. I. — Teoria dei vettori.

§ 1. Segmenti orientati e vettori . . . . .	pag.	1
§ 2. Somma di punto e vettore e di vettori. Prodotto di un vettore per un numero . . . . .	"	7
§ 3. Prodotto scalare e prodotto vettoriale di due vettori . . . . .	"	14
§ 4. Vettori applicati e cursori. Momento rispetto ad un punto e rispetto ad un asse . . . . .	"	21
§ 5. Momento risultante di un sistema di vettori applicati . . . . .	"	25
§ 6. Sistemi equivalenti di vettori applicati e loro riduzione . . . . .	"	30
§ 7. Sistemi di vettori applicati paralleli . . . . .	"	39
§ 8. Sistemi di cursori e loro equivalenza . . . . .	"	43
§ 9. Derivazione di un vettore variabile . . . . .	"	44
§ 10. Derivazione di un punto variabile . . . . .	"	48
§ 11. Integrazione dei vettori . . . . .	"	52
§ 12. Proprietà differenziali delle curve . . . . .	"	53

## CAP. II. — Cinematica del punto.

§ 1. Considerazioni preliminari . . . . .	pag.	58
§ 2. Generalità sul moto di un punto . . . . .	"	62
§ 3. Velocità . . . . .	"	64
§ 4. Moti piani in coordinate polari. Velocità areolare . . . . .	"	74
§ 5. Accelerazione . . . . .	"	79
§ 6. Moti ad accelerazione costante. Moti dei gravi . . . . .	"	86
§ 7. Moti oscillatori . . . . .	"	93
§ 8. Moti centrali. Moti kepleriani . . . . .	"	108
§ 9. Moto elicoidale uniforme . . . . .	"	115

## CAP. III. — Cinematica dei sistemi rigidi.

§ 1. Generalità . . . . .	pag.	119
§ 2. Moti traslatori . . . . .	"	121
§ 3. Moti rotatori . . . . .	"	123
§ 4. Moti rototraslatori . . . . .	"	128
§ 5. Moti rigidi generali . . . . .	"	133

**CAP. IV. - Moti relativi e applicazioni ai moti rigidi.**

§ 1. Generalità . . . . .	pag. 144
§ 2. Velocità assoluta, relativa e di trascinamento . . . . .	» 145
§ 3. Teorema del Coriolis . . . . .	» 147
§ 4. Moto di un sistema rigido rispetto a due riferimenti mobili fra loro . . . . .	» 149
§ 5. Derivata vettoriale rispetto ad assi in moto . . . . .	» 150

**CAP. V. - Moti rigidi piani.**

§ 1. Generalità. - Teorema di Eulero e centro istantaneo di rotazione . . . . .	pag. 154
§ 2. Traiettorie polari . . . . .	» 157
§ 3. Profili coniugati . . . . .	» 158
§ 4. Esempi di moti rigidi piani . . . . .	» 160
§ 5. Accelerazione nei moti rigidi piani . . . . .	» 165

**CAP. VI. - Generalità sulla cinematica dei sistemi.**

§ 1. Sistemi olonomi . . . . .	pag. 171
§ 2. Spostamenti possibili e spostamenti virtuali di un sistema olonomo . . . . .	» 177
§ 3. Sistemi a legami unilaterali . . . . .	» 181

**CAP. VII. - Concetti e postulati fondamentali della Meccanica.**

§ 1. L'idea di forza . . . . .	pag. 185
§ 2. Punto materiale libero . . . . .	» 187
§ 3. Proporzionalità fra forza ed accelerazione . . . . .	» 189
§ 4. Sovrapposizione degli effetti di forze simultanee . . . . .	» 191
§ 5. Punto materiale vincolato. Reazioni . . . . .	» 192
§ 6. Equilibrio di un punto materiale. Legge del moto incipiente. Misura statica delle forze . . . . .	» 194
§ 7. Legge d'inerzia. - Massa . . . . .	» 196
§ 8. Specificazione del sistema di riferimento. Influenza correttiva della Meccanica celeste. Assi fissi e moto assoluto. Terne galileiane . . . . .	» 200
§ 9. Rappresentazione matematica delle forze naturali. Forze posizionali e forze conservative . . . . .	» 205
§ 10. Equazioni differenziali del moto di un punto . . . . .	» 215

**CAP. VIII. - Concetti meccanici derivati. - Unità meccaniche e omogeneità. - Similitudine e modelli.**

§ 1. Lavoro . . . . .	pag. 218
§ 2. Lavoro ed energia cinetica . . . . .	» 224

§ 3. Potenza . . . . .	pag. 227
§ 4. Impulso di una forza e quantità di moto. - Percossee . . . . .	» 228
§ 5. Unità meccaniche . . . . .	» 232
§ 6. Dimensioni delle grandezze meccaniche e cambiamenti di unità. - Omogeneità . . . . .	» 239
§ 7. Similitudine e modelli . . . . .	» 244

**CAP. IX. - L'attrito e la Statica del punto.**

§ 1. Equilibrio di un punto appoggiato su di una superficie . . . . .	» 256
§ 2. Indipendenza delle condizioni di equilibrio dal modo in cui sono realizzati i vincoli . . . . .	» 265
§ 3. Punto vincolato a muoversi su di una superficie o su di una curva . . . . .	» 267

**CAP. X. - Geometria delle masse.**

§ 1. Massa di un corpo . . . . .	pag. 270
§ 2. Densità . . . . .	» 271
§ 3. Baricentro di un sistema discreto di punti materiali . . . . .	» 276
§ 4. Baricentro di un corpo, di una superficie e di una linea materiale . . . . .	» 279
§ 5. Momenti di inerzia . . . . .	» 285
§ 6. Ellissoide d'inerzia. - Assi principali. Casi particolari notevoli . . . . .	» 290
§ 7. Momenti d'inerzia di corpi, superficie e linee materiali. Esempi . . . . .	» 296

**CAP. XI. - Principio di reazione. - Condizioni necessarie per l'equilibrio di un corpo.**

§ 1. Principio di reazione . . . . .	pag. 302
§ 2. Condizioni necessarie d'equilibrio comuni a tutti i sistemi materiali . . . . .	» 303

**CAP. XII. - Statica dei solidi.**

§ 1. Postulato caratteristico dei solidi e sue conseguenze . . . . .	pag. 309
§ 2. Condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un solido . . . . .	» 310
§ 3. Equilibrio dei solidi vincolati . . . . .	» 312
§ 4. Equilibrio di solidi appoggiati . . . . .	» 319
§ 5. Osservazioni sulla realizzazione dei vincoli. Schemi grafici di uso corrente nella Tecnica . . . . .	» 327
§ 6. Nozione statica di stabilità dell'equilibrio. Esempi . . . . .	» 328
§ 7. Nozioni sull'attrito volvente . . . . .	» 334
§ 8. Moto incipiente di una locomotiva. Massimo sforzo di trazione. . . . .	» 340

**CAP. XIII. - Statica dei sistemi articolati e dei fili.**

§ 1. Sistemi articolati. - Sforzi. - Sollecitazioni nodali . . .	pag. 343
§ 2. Sistemi articolati semplicemente connessi . . . . .	» 345
§ 3. Fili flessibili ed inestendibili . . . . .	» 354
§ 4. Equazioni intrinseche dell'equilibrio dei fili ed applica- cazioni . . . . .	» 374

**CAP. XIV. - Principio dei lavori virtuali e Statica generale.**

§ 1. Principio dei lavori virtuali . . . . .	pag. 382
§ 2. Condizione generale d'equilibrio. Relazione simbolica della Statica . . . . .	» 386
§ 3. Osservazioni sui postulati particolari già ammessi nella Statica dei solidi e dei fili . . . . .	» 391
§ 4. Statica dei sistemi pesanti. Principio del Torricelli . . .	» 394
§ 5. Statica dei sistemi a legami completi. Macchine sem- plici . . . . .	» 396
§ 6. Reazioni . . . . .	» 399
§ 7. Statica dei sistemi olonomi a quanti si vogliono gradi di libertà. Condizioni di equilibrio in coordinate la- grangiane . . . . .	» 401

**CAP. XV. - Equilibrio relativo.**

§ 1. Nozione di equilibrio relativo. Regola di applicazione generale . . . . .	pag. 406
§ 2. Casi particolari notevoli ed esempi illustrativi . . . . .	» 409
§ 3. Rotazione di regime di un albero orizzontale. Eccen- tricità dell'appoggio sui cuscinetti . . . . .	» 413
§ 4. Peso e attrazione terrestre. Variazione di $g$ colla lati- tudine. - Deviazione della verticale . . . . .	» 416

## CAPITOLO I.

### TEORIA DEI VETTORI

L'algoritmo più espressivo e più agile per la impostazione e la discussione matematica di molti problemi della Meccanica (e di altre teorie fisiche) è fornito dalla « Teoria dei vettori ». Ne esporremo perciò in questo Capitolo introduttivo i concetti fondamentali e le regole elementari di calcolo, non senza avvertire che talune delle considerazioni, che qui verremo svolgendo, riusciranno sostanzialmente note a chiunque abbia seguito gli ordinari corsi di Geometria analitica e di Analisi infinitesimale.

#### § 1. — Segmenti orientati e vettori.

1. SEGMENTI ORIENTATI. — I punti di un segmento (rettilineo) di estremi distinti  $A$  e  $B$  si possono pensare ordinati in due *versi* opposti: da  $A$  verso  $B$  o da  $B$  verso  $A$ .

Quando al segmento si attribuisce uno di tali *versi*, quello, ad es., che da  $A$  va a  $B$ , il *segmento* si chiama *orientato* e si indica colla notazione  $AB$ . Il punto  $A$  dicesi *origine* o *primo estremo*; il punto  $B$  *secondo estremo*, ovvero *estremo libero*, o semplicemente *estremo*; la retta su cui giace il segmento *linea d'azione*.

Se allo stesso segmento, invece del verso da  $A$  a  $B$ , si attribuisce l'altro che da  $B$  va ad  $A$ , si ha il segmento orientato  $BA$ , che ha la stessa linea d'azione di  $AB$ , ma l'origine  $B$  e l'estremo  $A$ , e che si dice l'*opposto* di  $AB$ .

Se  $A$  e  $B$  coincidono, il segmento  $AB$  si riduce all'unico punto  $A \equiv B$  e dicesi *segmento nullo*. In tale ipotesi la linea di azione e il verso risultano indeterminati, ed è questo l'unico caso in cui i due segmenti orientati *opposti*  $AB$  e  $BA$  coincidono.

Un segmento orientato non nullo  $AB$  è, dunque, un ente geometrico caratterizzato da un'*origine*, da una *lunghezza* (rapporto del segmento di estremi  $A$  e  $B$  ad una unità prefissata), da una *direzione* e da un *verso*. E ad evitare equivoci giova rilevare esplicitamente che qui con la parola « direzione » si intende denotare

la caratteristica comune ad una retta data e a tutte le sue parallele (o *punto improprio* della Geometria proiettiva) indipendentemente dalla determinazione del verso. In altre parole si riguardano come aventi la stessa direzione due segmenti orientati appartenenti alla stessa retta o a rette parallele, abbiano o no il medesimo verso.

Pei segmenti nulli risultano indeterminati, colla linea d'azione, anche la direzione e il verso.

**2. SEGMENTI ORIENTATI EQUIPOLLENTI.** — Due segmenti orientati diconsi *equipollenti* quando hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso; onde, nel caso dei segmenti nulli, si è naturalmente condotti a considerarli tutti come equipollenti, in quanto per tutti la lunghezza è nulla e la direzione e il verso risultano egualmente indeterminati.

L'equipollenza dei segmenti orientati gode, per la stessa sua definizione, delle proprietà fondamentali dell'eguaglianza, cioè: 1°) ogni segmento è equipollente a se stesso (*proprietà riflessiva*); 2°) se  $AB$  è equipollente a  $PQ$ ,  $PQ$  è equipollente ad  $AB$  (*proprietà simmetrica*); 3°) due segmenti equipollenti ad un terzo sono equipollenti fra loro (*proprietà transitiva*).

Dalla definizione di equipollenza risulta altresì che due segmenti equipollenti coincidono se hanno l'origine (o l'estremo) comune; e che, assegnati ad arbitrio un segmento  $AB$  e un punto  $P$ , esiste sempre ed è unico il segmento  $PQ$  equipollente ad  $AB$  ed avente l'origine  $P$ .

Infine, se si chiama *proiezione* di un segmento orientato  $AB$  su di una retta, o su di un piano, il segmento orientato  $A_1B_1$ , che ha per origine e per estremo le proiezioni ortogonali di  $A$  e  $B$ , rispettivamente sulla retta o sul piano considerato, è manifesto che *se due segmenti orientati sono equipollenti, sono tali anche le loro proiezioni su di una stessa retta (o su rette parallele) come pure su di uno stesso piano (o su piani paralleli)*.

**3. VETTORI.** — Se, scelto ad arbitrio un segmento orientato  $AB$ , consideriamo, insieme con esso, tutti i segmenti equipollenti, otteniamo  $\infty^3$  segmenti orientati, uno per ciascun punto dello spazio, preso come origine, e aventi comuni la lunghezza, la direzione e il verso. Ad ogni classe siffatta di  $\infty^3$  segmenti orientati, fra loro equipollenti, faremo corrispondere un nuovo ente geometrico, che chiameremo *vettore* e a cui attribuiremo la *lunghezza*, la *direzione* e il *verso* comuni agli  $\infty^3$  segmenti orientati considerati.



Ad individuare un tale vettore potremo assumere il segmento orientato  $AB$  o, indifferentemente, uno qualsiasi dei suoi equipollenti, nello stesso modo in cui a individuare una direzione si può scegliere una qualsiasi delle rette parallele aventi comune la data direzione, e a determinare una data giacitura (*retta impropria* della Geometria proiettiva) si può assumere uno qualsiasi dei piani paralleli, che la contengono.

Così, in particolare, tutti i segmenti nulli rappresentano un unico vettore, che dicesi *vettore nullo*, ed ha lunghezza nulla, direzione e verso indeterminati. Ogni altro vettore ha una lunghezza non nulla e una direzione e un verso ben determinati.

4. I vettori si designano a stampa con lettere di tipo grassetto, qual'è ad es.  $\mathbf{v}$ , mentre il vettore nullo si designa senz'altro con lo 0. La lunghezza di un vettore non nullo  $\mathbf{v}$ , la quale dicesi anche *modulo* o *tensore* del vettore, si denota con  $\text{mod } \mathbf{v}$  o  $|\mathbf{v}|$ , o più semplicemente con la stessa lettera che designa il vettore, ma di tipo corsivo: p. es.  $\text{mod } \mathbf{v} = v$ .

Un vettore di modulo 1 dicesi *unitario*; e si può dire che ogni vettore unitario individua una direzione orientata e viceversa.

Il vettore unitario che ha la stessa direzione e lo stesso verso di un vettore  $\mathbf{v}$  chiamasi *versore* di  $\mathbf{v}$  e si denota con  $\text{vers } \mathbf{v}$ .

Aggiungiamo infine che, per contrapposto ai vettori e alle grandezze vettoriali (cioè rappresentabili con vettori), i numeri (relativi) e le grandezze rappresentabili con numeri siffatti si dicono *scalari*.

5. VETTORI EGUALI. — Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  diconsi *eguali*, quando hanno eguali la lunghezza, la direzione e il verso. Perciò l'eguaglianza fra vettori si riduce alla identità logica. Essa si denota scrivendo  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ , dove, per definizione, il segno  $=$  sta ad indicare che i due simboli  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  rappresentano un medesimo vettore. Risulta di qui senz'altro che il segno  $=$  gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

6. VETTORI COMPONENTI DI UN VETTORE. — Se si tien conto della osservazione enunciata in fine al n. 2, si ha che proiettando gli  $\infty^3$  segmenti orientati fra loro equipollenti, che rappresentano un medesimo vettore  $\mathbf{v}$ , sulle  $\infty^3$  rette aventi una data direzione (o sugli  $\infty^2$  piani aventi una data giacitura) si ottengono  $\infty^3$  segmenti orientati, fra loro equipollenti e perciò atti a rappresentare anch'essi un medesimo vettore. Questo vettore dicesi *il componente* del vettore dato  $\mathbf{v}$ , secondo la prefissata direzione (o, rispettivamente, secondo la data giacitura).

Il componente di un vettore  $v$  non nullo è nullo sempre e solo quando la direzione (o giacitura) che si considera è ortogonale a  $v$ ; mentre per il vettore nullo è nullo anche il componente secondo qualsiasi direzione (o giacitura).

È poi senz'altro manifesto che, *se due vettori sono eguali, tali sono altresì i loro componenti, secondo una qualsiasi direzione (o giacitura).*

**7. MISURA DELLA COMPONENTE DI UN VETTORE SECONDO UNA DATA DIREZIONE ORIENTATA.** — Immaginiamo che su di una data retta  $r$  sia fissato uno dei due versi (da indicarsi in figura con una freccia), cioè supponiamo che la  $r$  sia, come suol dirsi, una *retta orientata*. Dato un vettore  $v$ , consideriamo la lunghezza del vettore componente di  $v$  secondo la direzione di  $r$ , e a questa lunghezza attribuiamo il segno  $+$  o  $-$ , secondo che codesto componente risulta o no di verso concorde a quello di  $r$ . Il numero con segno così ottenuto si dirà *la componente del vettore  $v$  secondo la retta orientata  $r$* , e si designerà solitamente con  $v_r$ . Questa componente  $v_r$  non cambia, se la  $r$  si sposta parallelamente a se stessa, conservando il suo verso; cambia semplicemente di segno, se si inverte l'orientazione di  $r$ .

È di fondamentale importanza la formula che esprime la  $v_r$  per mezzo della lunghezza  $v$  del vettore  $v$  e dell'angolo  $\widehat{rv}$ , che  $v$  forma colla retta orientata  $r$  <sup>(1)</sup>. Da un noto teorema di Geometria analitica si ha

$$(1) \quad v_r = v \cos \widehat{rv} = v \cos \widehat{vr};$$

e giova rilevare che questa formula si mantiene valida anche quando  $v$  si riduce al vettore nullo, perchè a primo membro  $v_r$  si annulla per definizione, e a secondo membro risulta parimenti nullo  $v$ , mentre  $\cos \widehat{rv}$ , pur essendo indeterminato l'angolo, si mantiene finito.

**8. RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEI VETTORI.** — Fissiamo una terna ortogonale di assi cartesiani  $Oxyz$ , che, secondo una convenzione che osserveremo costantemente nel seguito, supporremo *destra* (o *sinistrorsa* o *levogira*), cioè tale che, quando l'asse orientato  $x$  va a sovrapporsi all'asse orientato  $y$  descrivendo un angolo retto, l'asse  $z$  personificato lo veda rotare da destra verso sinistra; onde

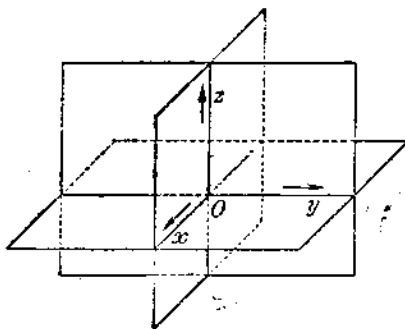
---

(1) È ben noto dalla Geometria analitica che si dice *angolo  $\widehat{r_1 r_2}$*  di due rette orientate  $r_1, r_2$  l'angolo compreso fra  $0$  e  $\pi$  (estremi inclusi), che è formato dalle due parallele ad  $r_1, r_2$ , condotte per un qualsiasi punto  $O$  ed orientate ciascuna nel verso della rispettiva parallela  $r_1, r_2$ ; e va ricordato

ovviamente risulta che appaiono nello stesso verso agli assi orientati  $x$  e  $y$  le analoghe rotazioni di  $y$  verso  $z$  e, rispettivamente, di  $z$  verso  $x$ . E importa avvertire che nel seguito si dirà *verso destro di rotazione*, intorno ad una retta orientata qualsiasi, il verso concorde a quello, che dianzi fu designato con tal nome intorno a ciascuno degli assi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Naturalmente si chiamerà *sinistro* (o *destrorso* o *destrogiro*) il verso opposto; e *sinistre* (o *destrorse* o *destrogire*) si diranno le terne ortogonali di assi cartesiani, simmetriche (e perciò non sovrapponibili) a quelle or ora caratterizzate.

L'origine delle designazioni «destra» e «sinistra» così attribuite alle terne di assi orientati sta nel fatto che il pollice, l'indice e il medio della mano destra o sinistra, divaricati come quando si conta, materializzano una terna destra o, rispettivamente, sinistra, purchè alle tre dita nominate si associno le lettere  $x$ ,  $y$ ,  $z$  in ordine ciclico (1).

Osserviamo ancora che il verso destro o sinistro di rotazione si può anche dire *antiorario* o, rispettivamente, *orario*, perchè, se ci si riferisce per esempio ad una terna destra  $Oxyz$ , l'asse  $z$  perso-



che questa definizione è legittima, in quanto l'angolo dianzi caratterizzato è indipendente dalla scelta del punto ausiliario  $O$ . Nel caso di una retta orientata  $r$  e di un vettore (non nullo)  $v$ , dicesi *angolo  $\widehat{rv}$*  l'angolo della  $r$  con una qualsiasi delle rette orientate (fra loro parallele e di verso concorde) che hanno la direzione e il verso del vettore  $v$ ; e, analogamente, per angolo  $\widehat{v_1 v_2}$  di due vettori  $v_1$ ,  $v_2$  (entrambi non nulli) si intende l'angolo di due rette orientate aventi rispettivamente la direzione e il verso di  $v_1$ ,  $v_2$ .

L'angolo  $\widehat{rv}$  risulta indeterminato se il vettore  $v$  è nullo; e così dicesi dell'angolo  $\widehat{v_1 v_2}$ , se è nullo anche uno solo dei vettori  $v_1$ ,  $v_2$ .

(1) Queste designazioni «destra» e «sinistra» corrispondono al «right-handed» e «lefthanded» degli Inglesi; i Tedeschi dicono «Rechtesystem» e «Linkssystem». — Nelle nostre *Lezioni di Meccanica razionale* (in tre volumi; Bologna, Zanichelli) abbiamo usato in luogo di «destra» e «sinistra» le parole «destrorsa» e «sinistrorsa», interpretandole come equivalenti a «proveniente da destra» e «proveniente da sinistra», in quello stesso modo che si usa per la designazione dei venti. Ma ci è stato fatto notare che questa interpretazione non è etimologicamente esatta, perchè la desinenza «...orsa» deriva da «advorsus (= adversus)» e non da «ortus» come noi avevamo ritenuto.

nificato vede rotare l'asse  $x$  verso l'asse  $y$ , traverso l'angolo retto, nel verso opposto a quello delle lancette di un orologio, il cui quadrante sia sul piano  $xy$ .

Ciò premesso, riprendiamo la terna destra  $Oxyz$ , supposta fissata dappprincipio, e ricordiamo che ad individuare un vettore  $v$  basta assegnare un segmento orientato  $AB$  (scelto ad arbitrio fra gli  $\infty^3$ , che hanno lunghezza, direzione e verso eguali a quelli di  $v$ ). Perciò qui, con riferimento alla terna prefissata, basterà dare le coordinate  $x', y', z'$  e  $x'', y'', z''$  dell'origine  $A$  e dell'estremo  $B$  di un tale segmento orientato.

Designate allora con  $v_x, v_y, v_z$  le componenti di  $v$  secondo gli assi (che sono casi particolari della  $v$ , considerata al n. precedente) si ha dalle prime nozioni di Geometria analitica

$$(2) \quad v_x = x'' - x' \quad , \quad v_y = y'' - y' \quad , \quad v_z = z'' - z' ;$$

e, d'altra parte, se si denotano con  $\alpha, \beta, \gamma$  i coseni direttori di  $v$ , risulta dalla (1)

$$(3) \quad v_x = v\alpha \quad , \quad v_y = v\beta \quad , \quad v_z = v\gamma .$$

Da queste due terne di formule consegue immediatamente che le componenti di un vettore secondo gli assi ne forniscono tutti gli elementi caratteristici. Invero dalle (2) discende per la lunghezza di  $AB$  ossia di  $v$  l'espressione

$$(4) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} ,$$

in cui il radicale va inteso in senso aritmetico, e che si annulla sempre e solo quando sono simultaneamente nulle le tre componenti  $v_x, v_y, v_z$ . Escluso questo caso, corrispondente al vettore nullo, la direzione orientata di  $v$  è individuata dai rispettivi coseni direttori, forniti dalle (3), (4) sotto la forma

$$(5) \quad \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v_y}{v} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} , \\ \gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} ,$$

onde, in particolare, risulta che per un versore o vettore unitario ( $v = 1$ ) le componenti coincidono coi rispettivi coseni direttori.

Insomma, le formule (2)-(5) mettono in luce che vi è corrispondenza biunivoca fra i vettori dello spazio e le terne dei numeri  $v_x, v_y, v_z$ , loro componenti secondo gli assi, ed è per questo che le componenti si chiamano anche *coordinate* del vettore.

Qui da ultimo giova fissare l'attenzione su due formole, altrettanto ovvie quanto importanti. Se si fissa una retta orientata  $r$  di coseni direttori  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , si ha per la componente  $v_r$ , in base al noto teorema delle proiezioni in Geometria analitica, l'espressione

$$(6) \quad v_r = v_x \alpha_1 + v_y \beta_1 + v_z \gamma_1.$$

Se poi si considerano due vettori  $v_1$  e  $v_2$  (entrambi non nulli) e si designano (per evitare i doppi indici) con  $X_1, Y_1, Z_1$ , e  $X_2, Y_2, Z_2$  le componenti, si ha, in base alle (5) e alla nota espressione del coseno dell'angolo di due direzioni orientate, di dati coseni direttori,

$$(7) \quad \cos \widehat{v_1 v_2} = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{v_1 v_2}.$$

**9. VETTORI COME DIFFERENZE DI PUNTI.** — Le relazioni (1) fra le componenti di un vettore  $v$  e le coordinate degli estremi di un suo segmento rappresentativo suggeriscono la convenzione (dovuta al GRASSMANN (1) ed oggidì adottata universalmente) di rappresentare il vettore  $v$  come differenza dei due punti  $A, B$

$$(8) \quad v = B - A.$$

Ricordando che ogni segmento orientato nullo, cioè avente gli estremi coincidenti, rappresenta il vettore nullo, si scriverà coerentemente

$$A - A = 0.$$

Va ancora notato che, per la posta convenzione, la scrittura

$$B - A = B' - A'$$

implicherà la equipollenza dei due segmenti orientati  $AB$  e  $A'B'$  ossia (se  $A, B, A'$  non sono allineati) il fatto che il quadrangolo  $ABB'A'$  è un parallelogrammo.

## § 2. — Somma di punto e vettore e di vettori.

### Prodotto di un vettore per un numero.

**10. SOMMA DI PUNTO E VETTORE. VETTORI APPLICATI.** — Dati un vettore  $v$  di componenti  $X, Y, Z$  e un punto  $A$  di coordi-

---

(1) HERMANN GRASSMANN, n. a Stettino nel 1809, visse quasi sempre in questa città, dove morì nel 1877. Gli si deve un metodo originale di calcolo geometrico (pubblicato nel 1844 sotto il titolo di *Ausdehnungslehre*) che com-

nate  $x', y', z'$ , il segmento orientato di origine  $A$ , che ha lunghezza, direzione e verso eguali a  $v$  (ed è perciò atto a rappresentarlo), ha per estremo, in virtù delle (1), il punto  $B$  di coordinate

$$(9) \quad x'' = x' + X, \quad y'' = y' + Y, \quad z'' = z' + Z.$$

Queste formule suggeriscono quest'altra convenzione, pur essa dovuta al GRASSMANN: si chiama *somma del punto  $A$  e del vettore  $v$*  l'estremo  $B$  del segmento orientato  $AB$  che rappresenta il vettore  $v$ , e si scrive

$$(10) \quad B = A + v.$$

In accordo con questa convenzione, il segmento orientato  $AB$  si chiamerà anche *vettore  $v$  applicato in  $A$* ; ed anzi nel séguito ci atterremo generalmente a questa nuova denominazione, piuttosto che a quella usata sin qui di segmento orientato.

Ravvicinando le due equazioni (8) e (10), stabilite entrambe direttamente in base ad opportune convenzioni, notiamo che, sotto l'aspetto formale, esse possono dedursi l'una dall'altra applicando le consuete regole di calcolo algebrico ai simboli di punto. Lo stesso dicasi per la identità

$$B = A + (B - A),$$

che, per la  $v = B - A$ , non è se non un diverso modo di scrivere la (10).

11. SOMMA DI VETTORI. — Dati  $n$  vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  e prefissato un punto  $O$  qualsiasi, si ponga

$$A_1 = O + v_1, \quad A_2 = A_1 + v_2, \quad \dots, \quad A_n = A_{n-1} + v_n;$$

cioè si costruisca, a partire da  $O$ , la poligonale (in generale sghemba)  $OA_1A_2 \dots A_n$ , i cui successivi lati  $OA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ , orientati ciascuno nel verso di percorrenza della poligonale da  $O$  ad  $A_n$ , rappresentano ordinatamente i vettori dati.

Se la stessa costruzione si eseguisce a partire da un altro punto  $O'$  ed è  $O'A_1'A_2' \dots A_n'$  la poligonale che così si ottiene, si riconosce immediatamente, in base a note proposizioni di Geometria elementare, che il segmento orientato  $O'A_n'$  risulta equipollente, qualunque sia  $O'$ , al segmento  $OA_n$ .

---

prende in particolare la teoria dei vettori e trova applicazione in parecchie questioni non solo di Geometria, ma anche di Meccanica e di Fisica matematica.

Ciò posto, il vettore  $A_n - O$  (cioè il vettore rappresentato dal segmento orientato  $OA_n$  o da qualsiasi altro segmento  $O'A_n'$  equipollente ad  $OA_n$ ) dicesi *somma* o (vettore) *risultante* dei vettori dati  $v_1, v_2, \dots, v_n$  e si scrive

$$(11) \quad A_n - O = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

L'operazione che dà la somma di più vettori dicesi *composizione* dei vettori dati, i quali diconsi perciò (vettori) *componenti* del vettore somma.

Dalla definizione stessa discende che il risultante di quanti si vogliano vettori paralleli ad una retta (o ad un piano) è pur esso parallelo a codesta retta (o a codesto piano).

Notiamo che in ogni caso la (11) si può scrivere

$$A_n - O = (A_1 - O) + (A_2 - A_1) + \dots + (A_n - A_{n-1}),$$

e sotto questa forma appare come una identità algebrica fra simboli di punti.

Se, in particolare, la poligonale si rinchiede, cioè se  $A_n$  coincide con  $O$ , si ha l'identità, valida per  $n$  punti  $A_1, A_2, \dots, A_n$  quali si vogliano,

$$(A_1 - A_n) + (A_2 - A_1) + \dots + (A_n - A_{n-1}) = 0,$$

di cui giova tener presenti, come quelli che più spesso si usano, i casi particolari più semplici:

$$(A_1 - A_2) + (A_2 - A_1) = 0, \quad (A_1 - A_3) + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) = 0.$$

12. *La somma di più vettori gode delle proprietà associativa e commutativa.*

Per dimostrarlo nel modo più rapido, riferiamoci ad una terna di assi cartesiani e denotiamo con  $X_i, Y_i, Z_i$  le componenti del vettore  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Se come primo vertice della poligonale costruttrice del risultante assumiamo l'origine  $O$  della terna degli assi, e in base alle (9) calcoliamo successivamente le coordinate dei vertici  $A_1, A_2, \dots$ , troviamo da ultimo per le coordinate di  $A_n$ , vale a dire per le componenti  $X, Y, Z$  del risultante  $A_n - O$  dei dati vettori, le espressioni

$$(12) \quad X = \sum_1^n X_i, \quad Y = \sum_1^n Y_i, \quad Z = \sum_1^n Z_i,$$

le quali mettono senz'altro in luce, per la somma dei vettori, la validità delle due proprietà suaccennate.

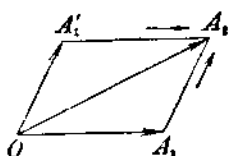
13. Poichè, data una qualsiasi direzione orientata, si può sempre immaginare di aver prescelto uno degli assi, p. es. quello delle  $x$ , parallelo e di verso concorde ad essa, si desume dalla prima delle equazioni precedenti che: *La componente del risultante di più vettori secondo una qualsiasi direzione orientata è data dalla somma (algebrica) delle analoghe componenti dei vettori considerati.*

Ne scende che *la proiezione del risultante di più vettori su di una data direzione coincide col risultante delle proiezioni dei vettori considerati su quella direzione.*

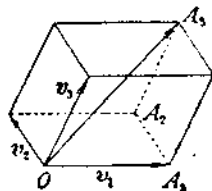
Questa proprietà si estende alle proiezioni su di una giacitura qualsiasi. Per provarlo basta immaginare scelto uno dei piani coordinati, p. es.  $xy$ , nella prefissata giacitura: allora le componenti su di essa dei vettori  $v_i$  e del loro risultante sono date da  $X_i, Y_i, 0$  e, rispettivamente,  $X, Y, 0$ ; onde in base alle due prime delle (12) si conclude appunto che *la proiezione del risultante coincide col risultante delle proiezioni.*

14. Nel caso di due soli vettori  $v_1, v_2$  (non paralleli) il risultante

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$



è rappresentato dalla diagonale  $OA_3$  del parallelogrammo  $OA_1A_2A_1'$  racchiuso dai due vettori  $v_1, v_2$  applicati ad un qualsiasi punto  $O$ . Questo parallelogrammo, al pari di ogni altro a lati ordinatamente equipollenti, quale si ottiene applicando  $v_1, v_2$  ad un altro qualsiasi punto diverso da  $O$ , dicesi *parallelogrammo dei due vettori.*



Così, per tre vettori  $v_1, v_2, v_3$  non complanari, cioè aventi direzioni non appartenenti ad una medesima giacitura, il risultante

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &= v_2 + v_3 + v_1 = v_3 + v_1 + v_2 = \\ &= v_3 + v_2 + v_1 = v_2 + v_1 + v_3 = v_1 + v_3 + v_2 \end{aligned}$$

è rappresentato dalla diagonale  $OA_4$  del parallelepipedo compreso fra i tre vettori applicati ad un medesimo punto  $O$ .

15. **SCOMPOSIZIONE DI UN VETTORE.** — È manifesto che un vettore  $v$  si può considerare decomposto, in infiniti modi diversi, nella somma di un certo numero  $n$  di vettori: se è  $v = B - A$ , basta fissare ad arbitrio  $n - 1$  punti  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  e porre

$$B - A = (A_1 - A) + (A_2 - A_1) + \dots + (B - A_{n-1}).$$



Ma fra codeste infinite possibili decomposizioni ve ne sono talune di uso corrente, che qui conviene accennare.

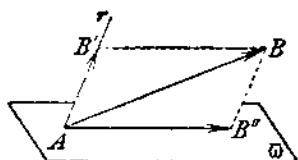
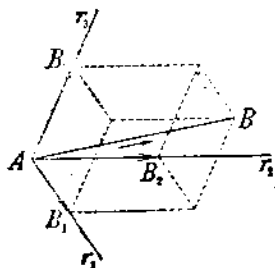
Date anzitutto tre direzioni non complanari (cioè non appartenenti ad una medesima giacitura) si considerino pel punto  $A$ , in cui si immagina applicato il rappresentante  $B - A$  di  $v$ , tre rette  $r_1, r_2, r_3$ , aventi rispettivamente le direzioni prefissate, e per  $B$  si conducano i piani paralleli ai piani  $r_2r_3, r_3r_1, r_1r_2$ , fino ad intersecare in  $B_1, B_2, B_3$  le  $r_1, r_2, r_3$  ordinatamente.

Codeste tre coppie di piani paralleli determinano un parallelepipedo di diagonale  $AB$  e di spigoli  $AB_1, AB_2, AB_3$ , talchè si ha

$$v = (B_1 - A) + (B_2 - A) + (B_3 - A).$$

I vettori  $B_1 - A, B_2 - A, B_3 - A$  diconsi i *componenti* di  $v$  secondo le tre direzioni date.

È manifesto che si annulla uno di questi tre componenti, se la direzione di  $v$  è complanare a due delle date direzioni; se ne annullano due, se la direzione  $v$  coincide con una di esse.



In secondo luogo, prefissate una direzione e una giacitura non appartenenti, si considerino per  $A$  la retta  $r$  e il piano  $\omega$  aventi rispettivamente codesta direzione e codesta giacitura e si conducano per  $B$  il piano parallelo a  $\omega$  fino ad intersecare la  $r$  in  $B'$  e la parallela ad  $r$  fino ad intersecare  $\omega$  in  $B''$ . Il quadrangolo  $AB'BB''$  è un parallelogrammo di diagonale  $AB$  e di lati  $AB', AB''$ , cosicchè si ha

$$v = (B' - A) + (B'' - A):$$

i vettori  $B' - A, B'' - A$  vengono chiamati i *componenti* di  $v$  secondo la direzione e la giacitura date.

**16. PRODOTTO DI UN VETTORE PER UN NUMERO.** — Se  $v$  è un dato vettore ed  $n$  un intero positivo qualsiasi, la somma di  $n$  vettori eguali a  $v$  è, per definizione, il vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso di  $v$  e la lunghezza  $nv$ . Esso dicesi prodotto di  $v$  per l'intero  $n$  e si designa con  $nv$ .

Più in generale, si chiama *prodotto del vettore  $v$  per un numero reale qualsiasi  $a$*  e si denota con  $av$  (o indifferentemente con  $va$ ) il vettore che ha la lunghezza  $|a|v$ , e (quando non sia nullo) la stessa direzione di  $v$ , e lo stesso verso o l'opposto secondo che  $a$

è positivo o negativo. Notiamo subito che, per definizione,  $av$  si annulla sempre e solo quando sia nullo o il numero  $a$  o il vettore  $v$  (od entrambi).

Qualunque sia  $a$ , il vettore  $av$  è parallelo a  $v$  (o nullo), e, viceversa, per  $v \neq 0$ , ogni vettore  $v'$  (nullo o) parallelo a  $v$  è rappresentabile sotto la forma

$$v' = av,$$

dove il numero  $a$  risulta univocamente determinato come quello che ha il valore assoluto  $|a|$  eguale al rapporto delle lunghezze di  $v'$  e  $v$ , e (quando non sia zero) il segno  $+$  o  $-$ , secondo che i versi di  $v$  e  $v'$  sono eguali o no.

In particolare, per  $a = -1$  si ha il vettore  $(-1)v$ , avente la stessa direzione e la stessa lunghezza di  $v$  e il verso opposto. Esso si chiama il vettore *opposto* di  $v$  e si designa semplicemente con  $-v$ .

Dalla precedente definizione e dal n. 4 risulta, per ogni possibile vettore,

$$v = v \text{ vers } v.$$

Inoltre se, rispetto ad una data terna di assi, sono  $X, Y, Z$  le componenti di  $v$ , quelle di  $av$  sono  $aX, aY, aZ$ .

Se poi è data una retta orientata  $r$  e se ne indica con  $u$  il versore (cioè il vettore unitario che ha la direzione e il verso di  $r$ ) il componente  $w$  di un generico vettore  $v$  secondo  $r$  è espresso da

$$w = v, u,$$

dove  $v, u$  denota la componente di  $v$  secondo  $r$  (n. 7). Infatti la lunghezza di  $w$  è quella della proiezione  $|v, u|$  di  $v$  su  $r$ ; la direzione è quella stessa di  $r$ , cioè di  $u$ ; e fra  $w$  e  $u$  vi è o no coincidenza di verso secondo che la  $v, u$  è positiva o negativa.

17. Pel prodotto di un vettore per un numero sussistono le identità

$$av + bv = (a + b)v, \quad a(bv) = abv, \quad av_1 + av_2 = a(v_1 + v_2).$$

La verifica delle due prime è immediata: la terza, che sarebbe pur facile dedurre direttamente dalla definizione del n. prec., si stabilisce nel modo più rapido rilevando la identità delle componenti dei due membri secondo i tre assi.

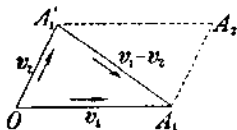
18. Combinando la definizione di prodotto di un numero per un vettore con quella di somma di quanti si vogliono vettori (n. 11) rimane più generalmente stabilito che una qualsiasi espressione

lineare del tipo  $\sum_1^n a_i v_i$  rappresenta un ben *determinato vettore*. Le sue componenti sono date da

$$\sum_1^n a_i X_i, \quad \sum_1^n a_i Y_i, \quad \sum_1^n a_i Z_i.$$

In particolare si ha la *differenza di due vettori*  $v_1 - v_2$ , che sommata con  $v_2$  riproduce  $v_1$ , e che è rappresentata dalla seconda diagonale  $A_1'A_2$  del parallelogrammo  $OA_1A_2A_1'$  di  $v_1$  e  $v_2$ .

Più generalmente va ritenuto che tutte le regole del calcolo letterale relative ai segni  $+$  e  $-$ , alla somma algebrica di polinomi, alla moltiplicazione per un numero, alla riduzione di termini simili sono senz'altro applicabili alle espressioni vettoriali  $\sum_1^n a_i v_i$ .



19. Dai nn. prec. risulta per i vettori, rispetto ad una terna di assi, una rappresentazione espressiva. Dato un vettore  $v$  di componenti  $X, Y, Z$ , applichiamo all'origine  $O$  delle coordinate e sia  $Q$  il suo estremo, vale a dire il punto di coordinate  $X, Y, Z$  (n. 8). Denotate con  $Q_1, Q_2, Q_3$  le proiezioni di  $Q$  sui tre assi, abbiamo (n. 15)

$$v = (Q_1 - O) + (Q_2 - O) + (Q_3 - O).$$

D'altra parte, se indichiamo con  $i, j, k$  i tre vettori unitari che hanno la direzione e il verso degli assi orientati  $x, y, z$  rispettivamente, o *versori fondamentali* della terna considerata, possiamo scrivere (n. 16)

$$Q_1 - O = Xi, \quad Q_2 - O = Yj, \quad Q_3 - O = Zk,$$

onde perveniamo alla preannunciata rappresentazione del vettore  $v$

$$v = Xi + Yj + Zk.$$

A quest'equazione si può dare un'altra forma, che sarà ripetutamente richiamata nel seguito, come punto di partenza di notevoli deduzioni. Dato un punto  $P$  di coordinate  $x, y, z$ , queste sono le componenti del vettore  $P - O$ , onde si ha

$$P - O = xi + yj + zk$$

e quindi

$$(13) \quad P = O + xi + yj + zk.$$

### § 3. — Prodotto scalare e prodotto vettoriale di due vettori.

20. **PRODOTTO SCALARE.** — Dati due vettori  $v_1, v_2$  entrambi diversi dallo zero, dicesi *prodotto scalare* (od *interno*) di  $v_1$  per  $v_2$  e si designa con  $v_1 \times v_2$  (da leggersi «  $v_1$  scalare  $v_2$  ») il prodotto

$$v_1 v_2 \cos v_1 v_2$$

delle lunghezze dei due vettori per il coseno del loro angolo.

Se si denotano con  $X_1, Y_1, Z_1$  e  $X_2, Y_2, Z_2$  le componenti di  $v_1$  e  $v_2$  rispettivamente, si ha senz'altro dalla (7) del n. 8 la seguente espressione formale del prodotto scalare

$$(14) \quad v_1 \times v_2 = v_1 v_2 \cos v_1 v_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 ;$$

e va notato che essa si mantiene valida anche quando sia nullo uno dei due vettori o lo siano entrambi, perchè in tal caso i due membri della (14) si annullano l'uno e l'altro identicamente.

Con questa estensione del concetto di prodotto scalare al caso di fattori nulli, si riconosce che  $v_1 \times v_2$  risulta nullo sempre e solo quando sia nullo almeno uno dei due vettori, oppure i due vettori siano ortogonali; talchè l'annullarsi del prodotto  $v_1 \times v_2$  di due vettori, entrambi diversi da zero, esprime la condizione necessaria e sufficiente per la loro ortogonalità. E se si sa che un vettore  $v_1$ , moltiplicato scalarmente per *ogni altro* vettore  $v_2$ , dà un prodotto  $v_1 \times v_2$  nullo, si può senz'altro concludere che  $v_1$  è nullo, poichè in caso contrario basterebbe prendere  $v_2$  non nullo e non ortogonale a  $v_1$  per avere  $v_1 \times v_2 \neq 0$ .

Se i due vettori  $v_1, v_2$  non sono fra loro ortogonali e sono entrambi diversi da zero,  $v_1 \times v_2$  è positivo o negativo, secondo che l'angolo dei due vettori è acuto od ottuso.

Il prodotto  $v \times v$  di un vettore per se stesso, che si vuol indicare più semplicemente con  $v^2$ , coincide (essendo  $\widehat{vv} = 0$ ) col quadrato  $v^2$  della lunghezza, onde la condizione  $v^2 = 1$  caratterizza i vettori unitari.

Così in particolare, i versori fondamentali di una terna cartesiana (ortogonale) di assi sono caratterizzati dalle sei relazioni

$$(15) \quad i^2 = j^2 = k^2 = 1, \quad j \times k = k \times i = i \times j = 0.$$

Dalla espressione  $v_1 v_2 \cos v_1 v_2$  del prodotto  $v_1 \times v_2$  risulta che esso si può interpretare come il prodotto (algebrico) della lunghezza di uno dei due vettori per la componente dell'altro secondo la direzione orientata del primo.

Anzi osserviamo che se, nel caso di due vettori quali si vogliono  $v_1$  e  $v_2$ , la linea d'azione di uno di essi, p. es. di  $v_1$ , si considera orientata nel verso opposto a quello di  $v_1$ , le componenti di  $v_1$  e  $v_2$  secondo codesta direzione orientata sono date da

$$-v_1 \quad \text{e} \quad -v_2 \cos \widehat{v_1 v_2};$$

e, poichè si ha identicamente

$$v_1 \times v_2 = (-v_1)(-v_2 \cos \widehat{v_1 v_2}),$$

concludiamo che il *prodotto scalare* di due vettori è eguale al *prodotto* (algebrico) delle loro componenti secondo la linea d'azione di uno qualsiasi di essi, COMUNQUE ORIENTATA.

Infine non sarà inutile rilevare esplicitamente che il prodotto scalare  $v \times u$  di un qualsiasi vettore  $v$  per un vettore unitario  $u$  rappresenta in simboli vettoriali la componente di  $v$  secondo la direzione orientata di  $u$ .

21. Sia dalla definizione di prodotto scalare, sia dalla sua espressione formale (14) discendono le seguenti identità, nella prima delle quali  $a$  denota un qualsiasi numero reale:

$$\begin{aligned} a(v_1 \times v_2) &= (av_1) \times v_2 = v_1 \times (av_2); \\ v_1 \times v_2 &= v_2 \times v_1 \quad (\text{proprietà commutativa}); \\ v \times (v_1 + v_2) &= v \times v_1 + v \times v_2 \quad (\text{proprietà distributiva}). \end{aligned}$$

22. **PRODOTTO VETTORIALE.** — Due vettori  $v_1, v_2$ , non paralleli (ed entrambi diversi dallo zero), determinano, nell'ordine in cui son dati, su ogni piano avente la loro giacitura comune, un certo senso di rotazione, quello in cui, sul piano considerato, la parallela a  $v_1$  per un qualsiasi punto  $O$ , orientata nel verso di  $v_1$ , deve rotare intorno ad  $O$  per sovrapporsi, *descrivendo un angolo minore di  $\pi$* , alla parallela per  $O$  a  $v_2$ , orientata nel verso di  $v_2$ . Di conseguenza i due vettori  $v_1, v_2$  permettono di distinguere l'uno dall'altro, per ogni direzione non appartenente alla giacitura di  $v_1$  e  $v_2$ , i due versi opposti: quello rispetto a cui il senso di rotazione determinato da  $v_1, v_2$  appare destro e il verso opposto.

Ciò premesso, dicesi *prodotto vettoriale* (od *esterno*) dei due vettori  $v_1, v_2$  e si designa con  $v_1 \wedge v_2$  (da leggersi «  $v_1$  vettore  $v_2$  » o «  $v_1$  esterno  $v_2$  ») il vettore che ha la lunghezza  $v_1 v_2 \sin \widehat{v_1 v_2}$  (area del parallelogrammo racchiuso da  $v_1, v_2$ ), la direzione ortogonale alla giacitura di  $v_1$  e  $v_2$  e il verso rispetto a cui appare destro il senso di rotazione determinato dai due vettori  $v_1, v_2$ , nell'ordine in cui son dati.

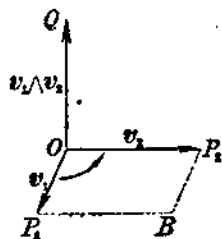
Se è nullo anche uno solo dei due vettori  $v_1, v_2$  ( $v_1 v_2 = 0$ ) o se i due vettori son paralleli (sin  $\widehat{v_1 v_2} = 0$ ), la definizione precedente è ancora applicabile, in quanto lascia bensì indeterminati la direzione e il verso di  $v_1 \wedge v_2$ , ma assegna alla sua lunghezza il valore 0. Perciò in tali ipotesi assumeremo  $v_1 \wedge v_2 = 0$ . Poichè non vi è altro caso in cui ciò possa accadere, si ha che, per due vettori entrambi diversi dallo zero, l'annullarsi del prodotto  $v_1 \wedge v_2$  dà la condizione di parallelismo. E, come pel prodotto scalare (n. 20), se si sa che è nullo il prodotto  $v_1 \wedge v_2$  di un dato vettore  $v_1$ , per ogni altro vettore  $v_2$ , si conclude che è  $v_1 = 0$ , giacchè in caso contrario basterebbe prendere  $v_2$  non nullo e non parallelo a  $v_1$  per avere  $v_1 \wedge v_2 \neq 0$ .

Giova tener presente che  $v_1 \wedge v_2$  (ove non sia zero) è sempre ortogonale a ciascuno dei vettori  $v_1$  e  $v_2$ . Se in particolare  $u$  è un vettore unitario, ortogonale ad un dato vettore  $v$ , il prodotto  $u \wedge v$  (essendo  $u = 1$ ,  $\widehat{uv} = \pi/2$ ) ha la stessa lunghezza  $v$  di  $v$ , è ortogonale ad  $u$  e  $v$  ed ha verso tale che la terna (ortogonale)  $u, v, u \wedge v$  risulta destra. Tale è perciò anche la terna  $v, u \wedge v, u$ , cosicchè il moltiplicare vettorialmente (a sinistra) un qualsiasi vettore  $v$  per un vettore unitario ortogonale  $u$  equivale a far rotare  $v$  (senza alterarne la lunghezza) intorno alla direzione orientata di  $u$ , nella giacitura ortogonale, di un angolo retto in senso destro.

Applicando le precedenti osservazioni ai versori fondamentali  $i, j, k$ , si trovano le seguenti formule, che occorre ricordare:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0 \\ i \wedge j = k, \quad j \wedge k = i, \quad k \wedge i = j. \end{array} \right.$$

Notiamo infine che per avere il vettore applicato in un generico punto  $O$ , che rappresenta il prodotto



di due vettori non nulli, nè paralleli, basta immaginare  $v_1$  e  $v_2$  applicati in  $O$ . Se è  $P_1 = O + v_1$ ,  $P_2 = O + v_2$ , il vettore  $v_1 \wedge v_2$  applicato in  $O$  ha per linea d'azione la perpendicolare in  $O$  al piano  $OP_1P_2$ , il verso rispetto a cui l'angolo (non concavo)  $P_1OP_2$  appare orientato in senso destro e la lunghezza  $OQ$  misurata dallo stesso numero che dà l'area

del parallelogrammo  $OP_1P_2$  di  $v_1, v_2$ .

23. ESPRESSIONE FORMALE DEL PRODOTTO VETTORIALE. — Ci proponiamo di trovare le espressioni delle componenti  $w_x, w_y, w_z$  del prodotto vettoriale  $w = v_1 \wedge v_2$  per mezzo delle componenti  $X_1, Y_1, Z_1$  e  $X_2, Y_2, Z_2$  dei due vettori  $v_1$  e  $v_2$ ; e qui dapprima,

ci riferiamo al caso in cui i due vettori sono entrambi diversi da zero e non paralleli, talchè su  $v_1$  e  $v_2$ , pensati applicati in un medesimo punto, si può costruire un effettivo parallelogrammo.

In questa ipotesi il vettore  $w$  deve essere, per definizione, ortogonale tanto a  $v_1$  quanto a  $v_2$ , cosicchè le  $w_x, w_y, w_z$  debbono soddisfare (n. 20) alle due condizioni

$$(17) \quad \begin{cases} v_1 \times w = X_1 w_x + Y_1 w_y + Z_1 w_z = 0, \\ v_2 \times w = X_2 w_x + Y_2 w_y + Z_2 w_z = 0. \end{cases}$$

Ora è facile convincersi che, nel caso qui considerato, i minori  $Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, Z_1 X_2 - X_1 Z_2, X_1 Y_2 - Y_1 X_2$  della matrice

$$(18) \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

non possono essere tutti e tre nulli. Invero la somma dei loro quadrati si può scrivere <sup>(1)</sup>, tenendo conto della definizione di prodotto scalare,

$$\begin{vmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \cos \widehat{v_1 v_2} \\ v_1 v_2 \cos \widehat{v_1 v_2} & v_2^2 \end{vmatrix} = v_1^2 v_2^2 (1 - \cos^2 \widehat{v_1 v_2}) = v_1^2 v_2^2 \sin^2 \widehat{v_1 v_2},$$

e, sotto le ammesse ipotesi, la quantità  $v_1 v_2 \sin \widehat{v_1 v_2}$  (area del parallelogrammo costruito su  $v_1, v_2$ ) è certamente positiva.

Perciò, in base alle (17), le  $w_x, w_y, w_z$  sono proporzionali ai minori della matrice (18), cioè si ha, indicando con  $\rho$  un fattore di proporzionalità,

$$\begin{aligned} w_x &= \rho(Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2), & w_y &= \rho(Z_1 X_2 - X_1 Z_2), \\ w_z &= \rho(X_1 Y_2 - Y_1 X_2). \end{aligned}$$

Di qui consegue che il quadrato della lunghezza di  $w$  è dato, per la stessa identità or ora invocata, da

$$w^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = \rho^2 v_1^2 v_2^2 \sin^2 \widehat{v_1 v_2};$$

e poichè questo quadrato deve identificarsi con  $v_1^2 v_2^2 \sin^2 \widehat{v_1 v_2}$ , si conclude  $\rho^2 = 1$ , cioè

$$\rho = \pm 1.$$

Per togliere questa ambiguità di segno osserviamo che il segno di  $\rho$  non può cambiare quando  $v_1, v_2$  variano con continuità, purchè

(1) Si ricordi la identità (cui si perviene eseguendo il quadrato della matrice (18)):

$$\begin{vmatrix} Y_1 Z_1 \\ Y_2 Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_1 X_1 \\ Z_2 X_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 Y_1 \\ X_2 Y_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 & X_2 X_1 + Y_2 Y_1 + Z_2 Z_1 \\ X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 & X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 \end{vmatrix}.$$

te non passi per la determinazione zero, cioè a patto che  $v_1, v_2$  si mantengano sempre entrambi non nulli e fra loro non paralleli. D'altra parte, pur escludendo le dette circostanze, in cui  $w$  va a zero, è sempre possibile (e in infiniti modi) di passare dall'una all'altra di due generiche determinazioni per  $v_1$  e  $v_2$ . Basterà dunque verificare direttamente quale segno competa a  $\rho$  in un qualsiasi caso particolare, non degenerare nel senso ora chiarito.

Scegliendo  $v_1 = i, v_2 = j$ , con che la matrice (18) diventa

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|,$$

e ricordando che  $i \wedge j = k$  e che le componenti di  $k$  sono 0, 0, 1, si riconosce che va posto  $\rho = 1$ , e si conclude che le componenti del prodotto vettoriale sono date dalle

$$(19) \quad w_x = Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, \quad w_y = Z_1 X_2 - X_1 Z_2, \quad w_z = X_1 Y_2 - Y_1 X_2.$$

Ove si introducano i versori fondamentali, si può scrivere

$$v_1 \wedge v_2 = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2)i + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2)j + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2)k,$$

ossia, sotto forma di determinante,

$$(20) \quad v_1 \wedge v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

A queste conclusioni siamo pervenuti, escludendo esplicitamente il caso di due vettori, di cui uno almeno sia nullo, e quello di due vettori paralleli. Ma le (19) e quindi la (20), si conservano valide anche in questi due casi eccezionali, perchè, nell'uno e nell'altro, ambo i membri di ciascuna delle (19) si annullano identicamente.

**24.** Dalla definizione di prodotto vettoriale (n. 22), come del resto dalle espressioni formali (19) delle sue componenti, risulta che esso non è, come il prodotto ordinario e quello scalare, commutativo, bensì *alternante*; cioè vale per esso l'identità

$$v_2 \wedge v_1 = -v_1 \wedge v_2.$$

Si verifica, invece, in base alle stesse formule (19), che seguivano a sussistere per il prodotto vettoriale le due seguenti identità nella prima delle quali  $a$  denota un numero reale qualsiasi:

$$\begin{aligned} a(v_1 \wedge v_2) &= (av_1) \wedge v_2 = v_1 \wedge (av_2), \\ v \wedge (v_1 + v_2) &= v \wedge v_1 + v \wedge v_2. \end{aligned}$$



Come in Algebra, questa proprietà distributiva si estende poi ovviamente da due a un numero qualsiasi di addendi. Da ciò e dalla regola, pocanzi indicata, di moltiplicazione per un numero scende altresì che lo sviluppo di un prodotto a fattori polinomiali, quale

$$\sum_1^n a_r v_r \wedge \sum_1^p b_s w_s$$

(dove  $n$ ,  $p$  designano interi,  $a_r$ ,  $b_s$  numeri reali,  $v_r$ ,  $w_s$  vettori quali si vogliano) si eseguisce come d'ordinario, colla sola restrizione che, in un termine generico  $a_r v_r \wedge b_s w_s$ , dello sviluppo, non si possono invertire i fattori vettoriali, pur rimanendo lecito di spostare a piacere i coefficienti  $a_r$ ,  $b_s$ , e, in particolare, di attribuire al termine testè scritto la forma  $a_r b_s v_r \wedge w_s$ .

**25. PRODOTTI MISTI.** — Dati tre vettori generici  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ , si formino i tre prodotti vettoriali

$$v_2 \wedge v_3, \quad v_3 \wedge v_1, \quad v_1 \wedge v_2,$$

e poi i tre prodotti scalari che si ottengono moltiplicandoli ciascuno per il terzo vettore della terna. I *prodotti misti* che così si ottengono sono fra loro eguali, cioè sussistono le identità

$$(21) \quad v_1 \times (v_2 \wedge v_3) = v_2 \times (v_3 \wedge v_1) = v_3 \times (v_1 \wedge v_2).$$

Per stabilirle nel modo più elementare, si riferiscano i tre vettori dati ad una terna ortogonale e, indicate con  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) le componenti di  $v_i$  secondo le direzioni orientate degli assi, si osservi che, in base alle (19) del n. 23 e alla (14) del n. 20, i tre prodotti misti sono dati rispettivamente dai determinanti, manifestamente eguali,

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

Notiamo che il valore assoluto di  $v_1 \times (v_2 \wedge v_3)$  dà il volume del parallelepipedo dei vettori  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ . Per dimostrarlo, escludiamo provvisoriamente i casi degeneri in cui sui tre vettori non si possa costruire un effettivo parallelepipedo e indichiamo con  $v$  il prodotto  $v_2 \wedge v_3$ , notando che la lunghezza di  $v$  dà l'area del parallelogrammo dei vettori  $v_2$ ,  $v_3$ , mentre la direzione di  $v$  è quella della perpendicolare al piano del parallelogrammo.

Il prodotto scalare  $v_1 \times v$  può così interpretarsi (n. 20) come prodotto di  $v$  per la componente di  $v_1$  secondo codesta perpendicolare al piano, debitamente orientata. La lunghezza di tale com-

ponente non è altro che l'altezza  $h$  del parallelepipedo sulla base di area  $\tau$ ; onde il valore assoluto di  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}$ , ossia di  $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3)$ , si identifica con  $\tau h$  (area della base per l'altezza), cioè col volume del parallelepipedo di  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ . E il segno di  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}$  è  $+ o -$ , secondo che l'angolo di  $\mathbf{v}_1$  colla direzione della perpendicolare alla giacitura di  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$ , orientata nel verso secondo cui appare destro il senso di rotazione  $\widehat{\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3}$ , è acuto od ottuso, ossia (generalizzando ovviamente la dicitura introdotta al n. 8) secondo che la terna  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  è destra o sinistra.

I casi degeneri, provvisoriamente esclusi, si ottengono per continuità, immaginando che i tre vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  tendano a divenire paralleli ad un medesimo piano, oppure che qualcuno di essi tenda ad annullarsi. Il volume del relativo parallelepipedo ha sempre per limite zero, e si ha in conformità (passando al limite del caso generale)

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) = 0;$$

donde il corollario: *L'annullarsi del prodotto misto  $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3)$ , formato con tre vettori non nulli, è condizione necessaria e sufficiente perchè essi siano complanari* (cioè paralleli ad uno stesso piano).

**26. DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE.** — Altra formula notevole, relativa a tre vettori generici  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ , è la seguente:

$$(22) \quad \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2.$$

Per dimostrarla, supponiamo dapprima che nessuno dei tre vettori sia nullo e che  $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  non siano paralleli. È allora facile riconoscere che il doppio prodotto vettoriale a primo membro della (22) è una combinazione lineare (a coefficienti scalari) di  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$ . Invero, il vettore  $\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3$  è ortogonale alla giacitura comune a  $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ , sicchè il doppio prodotto vettoriale, essendo alla sua volta ortogonale al vettore  $\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3$ , appartiene alla giacitura ora indicata e si ha

$$\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) = x\mathbf{v}_2 + y\mathbf{v}_3,$$

dove  $x, y$  sono due convenienti quantità scalari. Per determinarle e, più precisamente, per dimostrare che, in accordo con la (22), si ha  $x = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3, y = -\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ , basta applicare a questo caso le (19) del n. 23, giacchè, in forza di queste, la componente di  $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3)$  secondo la direzione orientata dell'asse delle  $x$  è data da

$$\begin{aligned} Y_1(X_2 Y_3 - Y_2 X_3) - Z_1(Z_2 X_3 - X_2 Z_3) &= \\ = (Y_1 Y_3 + Z_1 Z_3) X_2 - (Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2) X_3 \end{aligned}$$

$$(v_1 \wedge v_2) \wedge v_3 = -v_3 \wedge (v_1 \wedge v_2) = (-v_3 \times v_2) v_1 - (-v_3 \times v_1) v_2$$

c, aggiungendo e togliendo  $X_1 Y_1 Z_1$  e tenendo conto della (14) del n. 20, si può scrivere

$$(v_1 \times v_2) X_2 - (v_1 \times v_2) X_3.$$

È questa appunto la componente del secondo membro della (22) secondo l'asse delle  $x$ .

Stabilita così la (22) nel caso generale, si vede senz'altro che essa si mantiene valida anche quando uno, almeno, dei dati vettori sia nullo oppure  $v_2, v_3$  siano paralleli (sicché si abbia, per una certa quantità scalare  $m$ ,  $v_3 = m v_2$ ), giacché nell'uno e nell'altro caso entrambi i membri della (22) si annullano.

La (22) mette chiaramente in luce che i due doppi prodotti vettoriali  $v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3)$  e  $(v_1 \wedge v_2) \wedge v_3$  non coincidono; in altre parole non vale per il prodotto vettoriale la proprietà associativa (cfr. n. 24), sicché nella scrittura del doppio prodotto vettoriale la parentesi è essenziale.

#### § 4. - Vettori applicati e cursori.

##### Momento rispetto a un punto e rispetto a un asse.

27. Al n. 10 abbiamo accennato che un segmento orientato  $AB$ , in quanto si consideri individuato dalla sua origine  $A$  e dal vettore  $v = B - A$ , di cui  $AB$  è un segmento rappresentativo, si chiama anche *vettore  $v$  applicato in  $A$* . Quando si vuol mettere in evidenza questa sua genesi, un tale vettore applicato si denota con  $(A, v)$ .

Svariati esempi di enti concreti, che hanno le caratteristiche di vettori applicati, si incontrano nella Fisica e in particolare, come vedremo, nella Cinematica, nella Statica e nella Dinamica. Ma, soprattutto nella Meccanica dei solidi, si presentano anche altri enti fisici, che ammettono come naturale immagine un segmento orientato, non più legato a una determinata origine, bensì libero di scorrere lungo la rispettiva linea d'azione (conservando invariati la lunghezza e il verso). L'ente astratto, che si può far corrispondere ad una tale classe di  $\infty^1$  segmenti orientati, fra loro equipollenti e aventi sede su di una medesima retta, si dirà un *cursore*. Mentre, come si è visto, un vettore è caratterizzato da lunghezza, direzione e verso (n. 3) ossia da tre numeri, sue componenti (n. 8), un cursore lo è da cinque numeri, come tosto riconosceremo. Intanto appare dalla sua definizione che esso è individuato dalla linea d'azione, nonchè dalla lunghezza e dal verso di uno qualsiasi degli  $\infty^1$  vettori applicati, da cui esso risulta per astrazione.

La *lunghezza*, la *linea d'azione* e il *verso*, comuni a tutti codesti  $\infty^1$  vettori applicati, si possono, in conseguenza, attribuire al cursore, come già si è fatto per i vettori. Ciò posto, si noti che, per individuare una retta (nello spazio) si richiedono quattro parametri: lo si riconosce osservando, per es., che una retta qualsiasi può sempre immaginarsi congiungente delle sue due intersezioni  $M, N$  con due piani  $\pi$  e  $\pi'$ , arbitrariamente prefissati, purchè soltanto distinti. I due punti  $M, N$  (e con essi la retta) rimangono, ciascuno nel proprio piano, caratterizzati da due numeri: donde, complessivamente, quattro parametri indipendenti. Un quinto numero  $c$  (con segno) completa poi la determinazione del cursore. Ed ecco come. La linea d'azione è per se stessa non orientata; ma si può attribuirle ad arbitrio uno dei suoi due versi; e, se così orientata, la si indica con  $r$ , il cursore risulta manifestamente individuato quando se ne assegnino, in più, la lunghezza e il verso; e ciò si attua, dando il numero relativo  $c$ , che fornisce la componente secondo  $r$  di uno qualsiasi degli  $\infty^1$  vettori applicati che rappresentano il cursore, sicchè appare giustificata la convenzione di designare il cursore col simbolo  $(r, c)$ .

Se  $u$  è il versore della retta orientata  $r$  ed  $A$  è un generico punto di questa, il vettore applicato  $(A, cu)$  è uno dei vettori applicati rappresentativi del cursore; e per averli tutti, basta far variare il punto  $A$  sulla retta  $r$ .

**28.** Prima di procedere oltre, conviene fissare un criterio di confronto fra due versi quali si vogliano nello spazio; e cominceremo col chiarirlo nel caso di due rette orientate  $r, r'$ , fra loro sghembe.

Proiettando da una di esse, p. es. da  $r$ , più punti  $A, B, C, \dots$  di  $r'$ , susseguentisi nel verso della rispettiva orientazione, si genera un fascio di piani  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  e il verso di  $r'$  subordina un verso nel fascio. Rispetto ad  $r$  (cioè rispetto ad un osservatore orientato, dai piedi alla testa, come  $r$ ) il verso anzidetto (o se si vuole il corrispondente senso di rotazione) apparirà secondo i casi destro o sinistro. Ma sarà del pari destro o sinistro, come tosto si riconosce, il verso di rotazione determinato da  $r$  attorno ad  $r'$ , quando si cambia l'ufficio delle due rette  $r$  ed  $r'$ . Di qua la definizione:

*Due rette orientate sghembe  $r, r'$  si dicono fra loro destre o sinistre secondochè è destro o sinistro il verso di rotazione determinato (nel modo ora detto) da ciascuna di esse intorno all'altra.*

La qualifica *destri* o *sinistri* si trasporta senz'altro a due vettori applicati o a due cursori, non complanari, ed anche ad una coppia mista (retta orientata  $r$  e vettore applicato o cursore che non la

$$(x) \quad M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x-a & y-b & z-c \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

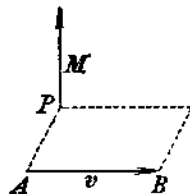
incontri, nè le sia parallelo, oppure vettore applicato e cursore non complanari) coll'intesa evidente, che ci si riporti al criterio precedente, sostituendo a ciascun vettore applicato e cursore la rispettiva linea d'azione, orientata nel verso del vettore o del cursore.

29. Dato un vettore applicato  $(A, v)$  e un punto  $P$ , il prodotto vettoriale

$$M = (A - P) \wedge v = (A - P) \wedge (B - A)$$

chiamasi momento del vettore applicato  $(A, v)$ , rispetto al punto o polo  $P$ .

Importa fissare il contenuto geometrico di questa definizione: se ci riferiamo al caso generale in cui  $AB$  non è nullo, nè allineato con  $P$ , il momento  $M$ , che, per fissare le idee, immaginiamo applicato in  $P$ , è normale al piano  $PAB$  e destro rispetto ad  $AB$  ed ha lunghezza eguale all'area del parallelogrammo costruito su  $PA$  ed  $AB$ , ossia al prodotto della lunghezza  $v$  del vettore applicato per la distanza di  $P$  dalla sua linea d'azione.



Nei casi esclusi, in cui  $AB$  è nullo, oppure ha la sua linea d'azione passante per  $P$ , è senz'altro manifesto (n. 22) che il momento  $M$  è nullo; e, viceversa, se il momento  $M$  è nullo, o è nullo anche il vettore applicato  $v$  o la sua linea di azione passa pel polo  $P$ .

Se poi riferiamo  $v$ ,  $P$  ed  $A$  ad una terna cartesiana, e sono  $X, Y, Z$  le componenti del vettore  $v$ ,  $x, y, z$  le coordinate di  $A$  e  $a, b, c$  quelle di  $P$ , le componenti di  $A - P$  sono  $x - a, y - b, z - c$ , cosicchè dalle (19) del n. 23 ricaviamo per le componenti di  $M$  le espressioni

$$(23) \quad \begin{cases} M_x = (y - b)Z - (z - c)Y, \\ M_y = (z - c)X - (x - a)Z, \\ M_z = (x - a)Y - (y - b)X. \end{cases}$$

30. Consideriamo, in particolare, come vettore applicato, uno qualsiasi dei segmenti orientati che rappresentano un dato cursore  $(r, c)$ ; e sia  $(A, cu)$ . Il corrispondente momento  $M$ , rispetto a un dato polo  $P$ , è espresso, in forza della definizione del n. prec., da

$$M = (A - P) \wedge cu;$$

ed è facile riconoscere che esso si mantiene inalterato, comunque si sposti il punto  $A$  sulla retta  $r$ . Infatti, considerando un qualsiasi altro punto  $A'$  della medesima retta e indicando con  $M'$  il mo-

mento, rispetto al medesimo polo  $P$ , del vettore applicato  $(A', cu)$ , si ha

$$\begin{aligned} M' - M &= (A' - P) \wedge cu - (A - P) \wedge cu = \\ &= [(A' - P) - (A - P)] \wedge cu = (A' - A) \wedge u; \end{aligned}$$

e quest'ultimo prodotto vettoriale è senz'altro nullo, in quanto  $A' - A$  è parallelo ad  $u$ .

Risulta così giustificata la convenzione di chiamare momento di un cursore, rispetto a un generico polo, il momento, rispetto a quel polo, di uno qualsiasi dei vettori applicati, che rappresentano il cursore.

31. Passiamo a definire il momento *assiale*, cioè relativo ad una generica retta orientata  $r$ ; e, per fissare le idee, consideriamo il caso di un vettore applicato  $(A, v)$ . La definizione si fonda sulla osservazione seguente: *La componente secondo  $r$  del momento di un vettore applicato, rispetto ad un punto qualsiasi  $P$  della stessa  $r$ , è indipendente dalla posizione di  $P$  su essa.*

Per dimostrarla basta assumere  $r$  come asse delle  $z$  e osservare che l'ultima delle (23), la quale, se  $P$  appartiene a  $r$ , si riduce alla  $M_z = xY - yX$ , risulta indipendente da  $z$ , ossia appunto dalla posizione di  $P$  sulla retta  $r$ .

Dopo ciò è giustificata la definizione seguente: per momento  $M_r$  di un vettore  $v$  applicato in  $A$  rispetto ad una retta orientata  $r$  intendesi la componente secondo  $r$  del momento di  $v$  rispetto a un punto qualsiasi  $P$  di codesta retta.

E in modo perfettamente analogo si definisce il momento di un cursore rispetto ad una retta orientata.

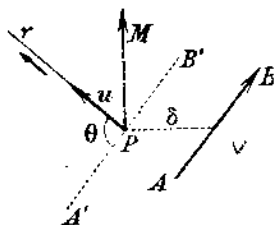
Per contrapposto al momento assiale così definito, il momento, rispetto ad un centro o polo (n. prec.) dicesi polare.

32. Se  $u$  è il versore della retta orientata  $r$ , il momento *assiale*  $M_r$  di un vettore applicato  $(A, v)$  si può rappresentare (n. 20) sotto forma di prodotto misto

$$M_r = u \times [(A-P) \wedge (B-A)] = u \times [(A-P) \wedge v];$$

onde si desume (n. 25) che  $M_r$  è positivo o negativo secondo che la terna  $u, A-P$  e  $v$  è destra o sinistra, cioè secondo che  $v$  è destro o sinistro rispetto all'asse orientato  $r$  (n. 28); e il valore assoluto di  $M_r$  è eguale al volume del parallelepipedo di  $u, A-P$  e  $v$ , talchè si annulla (oltrechè nei casi ovvi  $v = 0, A-P = 0$ ) soltanto quando i vettori  $u, A-P$  e  $v = B-A$  sono complanari, cioè quando la linea di azione del vettore  $v$  applicato in  $A$  è complanare all'asse  $r$

(linea di azione di  $u$  applicato in  $P$ ). Esclusi questi casi di annullamento, si ottiene una espressione semplice per  $M_r$ , prendendo come punto  $P$  il piede su  $r$  della minima distanza  $\delta$  della linea d'azione  $AB$  di  $(A, v)$  dalla retta  $r$  (o braccio di leva del vettore applicato rispetto alla retta  $r$ ): in tale ipotesi la lunghezza del momento polare  $M$  di  $v$  rispetto a  $P$  è data da  $v\delta$ ; ed è manifesto che, se si indica con  $\theta$  l'angolo minimo delle rette non orientate  $r$  e  $AB$  (o, ciò che è lo stesso, di  $r$  con la parallela  $A'B'$  ad  $AB$  per  $P$ ), l'analogo angolo minimo di  $r$  e della linea d'azione, non orientata, di  $M$  è il complemento di  $\theta$ , cosicchè si conclude che il valore assoluto di  $M_r$  è dato da  $v\delta \sin \theta$ ; e, per quanto si è detto pocanzi, si avrà precisamente



$$M_r = \pm v\delta \sin \theta,$$

secondo che il vettore applicato  $(A, v)$  è destro o sinistro rispetto alla retta orientata  $r$ .

Manifestamente questa stessa formola vale anche per il momento assiale di un cursore.

## § 5. - Momento risultante di un sistema di vettori applicati.

33. Dato un sistema di vettori applicati

$$(A_1, v_1), \quad (A_2, v_2), \quad \dots, \quad (A_n, v_n),$$

i cui punti di applicazione  $A_1, A_2, \dots, A_n$  siano distinti o anche, in parte o tutti, coincidenti, si dirà *risultante* del sistema il vettore

$$R = v_1 + v_2 + \dots + v_n = \sum_1^n v_i.$$

Scelto poi un qualsiasi punto  $P$  e indicati con  $M_1, M_2, \dots, M_n$  i momenti dei dati vettori applicati rispetto a  $P$ , si dirà *momento risultante* del sistema rispetto al polo  $P$  il risultante dei momenti dei singoli vettori applicati, cioè

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_1^n M_i.$$

Il polo  $P$ , rispetto a cui vengono presi i momenti, chiamasi anche *polo* o *centro di riduzione* del dato sistema di vettori applicati.

Si noti che, se i vettori del sistema hanno tutti la stessa origine  $A$ ,

il momento risultante coincide sempre col momento del risultante applicato in  $A$  (Teorema del VARIGNON) <sup>(1)</sup>.

Infatti, indicando con  $R$  codesto risultante, si ha, per la definizione di momento e per la proprietà distributiva del prodotto vettoriale, qualunque sia il centro di riduzione  $P$ ,

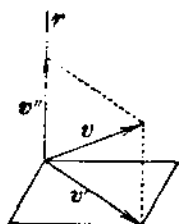
$$M = \sum_1^n M_i = \sum_1^n (A-P) \wedge v_i = (A-P) \wedge \sum_1^n v_i = (A-P) \wedge R.$$

34. Consideriamo nuovamente un generico sistema di vettori applicati  $(A_1, v_1), (A_2, v_2), \dots, (A_n, v_n)$ ; e sia  $r$  una qualsiasi retta orientata.

Ricordando (n. 13) che il risultante di più vettori ha per componente (rispetto ad un asse orientato qualsiasi) la somma delle componenti, dal n. prec. risulta subito che la componente secondo  $r$  del momento risultante del sistema rispetto ad un punto qualsiasi  $P$  della  $r$  stessa è eguale alla somma dei momenti rispetto a  $r$  dei singoli vettori del sistema.

Dopo ciò, è giustificata la definizione seguente: per *momento risultante di un sistema di vettori applicati rispetto ad una retta orientata  $r$*  intendosi la somma dei momenti assiali rispetto ad  $r$  dei singoli vettori del sistema, ossia la componente secondo  $r$  del momento risultante del sistema rispetto ad un punto qualsiasi della  $r$  stessa.

Se i vettori del sistema hanno tutti la stessa origine  $A$ , si ha anche pei momenti assiali, come per quelli polari (n. prec.), che il momento risultante rispetto ad una retta orientata coincide coll'analogo momento del risultante applicato in  $A$ .



In particolare, se immaginiamo un vettore applicato  $(A, v)$ , decomposto nei suoi componenti  $(A, v')$ ,  $(A, v'')$ , normale e parallelo ad  $r$ , e aventi la stessa origine  $A$  del dato, il momento rispetto ad  $r$  di  $(A, v)$  coincide col momento risultante del sistema formato dai vettori applicati  $(A, v')$ ,  $(A, v'')$ . Poichè il momento di  $(A, v'')$  è nullo (n. 32) si conclude che il momento rispetto all'asse  $r$  del vettore applicato  $v$  coincide coll'analogo momento del suo componente normale  $(A, v')$ .

(1) PIERRE VARIGNON, nato a Caen nel 1664, morto a Parigi nel 1722. Il teorema citato nel testo è contenuto nell'opera postuma: *Nouvelle mécanique ou statique...* (Parigi, 1725).



35. MODO DI VARIARE DEL MOMENTO AL VARIARE DEL CENTRO DI RIDUZIONE. — Siano  $M$  ed  $M'$  i momenti di un vettore applicato  $(A, v)$  rispetto a due poli distinti  $P$  e  $P'$ .

Si ha, per definizione,

$$M = (A - P) \wedge v, \quad M' = (A - P') \wedge v;$$

onde, essendo identicamente,

$$A - P' = (A - P) + (P - P'),$$

risulta

$$M' = (A - P) \wedge v + (P - P') \wedge v,$$

cioè

$$M' = M + (P - P') \wedge v.$$

Ciò premesso, consideriamo un sistema di vettori applicati  $(A_i, v_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e poniamo

$$\sum_1^n v_i = R,$$

cioè denotiamo con  $R$  il *risultante* del sistema, sul quale, per la sua definizione stessa, non ha influenza alcuna la scelta del centro di riduzione.

Non così per i momenti. Se rispetto ai due centri di riduzione  $P$  e  $P'$ , sono rispettivamente  $M_i$  ed  $M'_i$  i momenti di un vettore generico  $(A_i, v_i)$ ,  $M$  ed  $M'$  i momenti risultanti del sistema, si avranno le  $n$  relazioni

$$M'_i = M_i + (P - P') \wedge v_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

le quali, sommate, danno, come nel caso del vettore unico, la formula

$$(24) \quad M' = M + (P - P') \wedge R.$$

Tale formula si può manifestamente interpretare nel modo seguente: il *momento risultante del sistema rispetto a  $P'$*  è la somma dell'analogo momento rispetto a  $P$  e del momento, rispetto a  $P'$ , del risultante  $R$  del sistema, applicato in  $P$ .

Prendiamo, in particolare,  $P'$  coincidente coll'origine  $O$  degli assi coordinati e sia  $M_0$  il corrispondente momento risultante.

Si indichino con  $M_x, M_y, M_z$  le componenti di  $M$ , con  $M_{0|x}, M_{0|y}, M_{0|z}$  le componenti di  $M_0$ , con  $x, y, z$  (anzichè con  $a, b, c$  come al n. 27) le coordinate del punto generico  $P$  e con  $X, Y, Z$  le componenti del risultante  $R$ .

Dalla (24) e dalle (19) del n. 23 si ottengono allora facilmente le formole seguenti:

$$(25) \quad \begin{cases} M_x = M_{O|z} - yZ + zY, \\ M_y = M_{O|y} - zX + xZ, \\ M_z = M_{O|x} - xY + yX. \end{cases}$$

Dalla (24) risulta, inoltre, che:

1°) per  $R = 0$  si ha  $M' = M$ ;

2°) se  $M'$  deve coincidere con  $M$  per qualsiasi polo  $P'$ , bisogna che sia  $(P - P') \wedge R = 0$  per qualsiasi  $P'$ ; il che implica (n. 22)  $R = 0$ .

Ne viene che *pei sistemi a risultante nullo, e per questi soltanto, il momento risultante è indipendente dal centro di riduzione.*

Se il risultante  $R$  non è nullo, si ha  $M' = M$  (ossia  $(P - P') \wedge R = 0$ ), allora e allora soltanto che la retta  $PP'$  è parallela ad  $R$ .

**36. TRINOMIO INVARIANTE.** — Dalla (24) e dalla proprietà distributiva del prodotto scalare si ha:

$$M' \times R = M \times R + [(P - P') \wedge R] \times R.$$

Ma, per definizione di prodotto vettoriale, il vettore  $(P - P') \wedge R$  è perpendicolare ad  $R$  onde risulta,

$$[(P - P') \wedge R] \times R = 0;$$

e per conseguenza,

$$M' \times R = M \times R.$$

Di qui apparisce che il prodotto scalare

$$M \times R = M_x X + M_y Y + M_z Z$$

del momento risultante per il risultante è indipendente dal centro di riduzione.

Perciò il trinomio  $M_x X + M_y Y + M_z Z$  vien chiamato *trinomio invariante* del sistema. Esso verrà indicato brevemente colla lettera  $T$ .

**37.** Se il risultante di un sistema non è nullo, e quindi ha una direzione ben determinata, la componente del momento risultante secondo la direzione orientata del risultante è indipendente dal centro di riduzione.

Infatti, qualunque sia il centro di riduzione  $P$ , si ha dalla (14) del n. 20 l'equazione

$$(26) \quad M \cos \widehat{MR} = \frac{T}{R},$$

la quale dimostra l'asserto.

Notiamo poi che, sia dalla (26), sia dalle proprietà generali del prodotto scalare (n. 20), risulta che secondo che  $T$  è  $> 0$  o  $< 0$ , l'angolo del risultante  $R$  e del momento  $M$  è, comunque si prenda il centro di riduzione, sempre acuto o sempre ottuso.

Se poi  $T = 0$ , e, come si è detto, si suppone  $R \neq 0$ , il momento risultante riesce sempre perpendicolare al risultante, o, in particolare, nullo.

**38. ASSE CENTRALE. MOMENTO MINIMO.** — Dato un sistema di vettori applicati a risultante non nullo, cerchiamo il luogo dei punti  $P(x, y, z)$  rispetto ai quali il momento risultante è parallelo al risultante  $R$ , o, in particolare, nullo. La questione si potrebbe trattare per via geometrica in base alla (24). Ma è altrettanto semplice servirsi della rappresentazione analitica, particolarizzando in modo opportuno la scelta degli assi, cioè prendendo  $Oz$  parallelo ad  $R$  e diretto nello stesso verso, con che le due componenti  $X$  ed  $Y$  di  $R$  si annullano, mentre  $Z$  si identifica colla lunghezza  $R$  del risultante (per ipotesi maggiore di zero).

Le (25) diventano in queste ipotesi

$$M_x = M_{0|x} - yR, \quad M_y = M_{0|y} + xR, \quad M_z = M_{0|z},$$

onde per i punti del luogo cercato si deve avere

$$M_x = M_y = 0,$$

ossia

$$M_{0|x} - yR = 0, \quad M_{0|y} + xR = 0$$

il che porge per  $x$  e  $y$  i valori costanti

$$x = -\frac{M_{0|y}}{R}, \quad y = \frac{M_{0|x}}{R}.$$

Il luogo cercato è perciò una retta parallela al risultante  $R$ , la quale si chiama *asse centrale* del sistema.

**39.** Ricordando (n. 37) che la componente del momento risultante secondo la direzione orientata del risultante è indipendente dal centro di riduzione, si vede senz'altro che la lunghezza del momento risultante assume il suo valore minimo, quando il momento riesce parallelo al risultante, ossia quando il centro di riduzione è sull'asse centrale.

Tale lunghezza minima, detta *momento minimo*, coincide col valore assoluto (costante) della componente del momento secondo

la direzione del risultante; e perciò, in base alla (26), è data da

$$\frac{|T|}{R}$$

Scende di qui che, se il trinomio invariante  $T$  è nullo, è nullo il momento risultante rispetto ai punti dell'asse centrale.

40. Nel caso finora escluso di un sistema di vettori applicati con risultante nullo, sappiamo dal n. 35 che il momento risultante è indipendente dal centro di riduzione.

Converremo di chiamare in tal caso asse centrale del sistema qualsiasi retta parallela al detto momento. Potremo così parlare di asse centrale per qualsiasi sistema di vettori.

### § 6. - Sistemi equivalenti di vettori applicati e loro riduzione.

41. Due sistemi di vettori applicati  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  diconsi equivalenti quando hanno eguale risultante ed eguale momento risultante rispetto a un dato punto  $P$ ; e quindi, per la (24), rispetto ad un punto qualsiasi.

Così, ad es., più vettori concorrenti in un punto costituiscono, pel teorema del VARIGNON (n. 33), un sistema equivalente al loro risultante applicato in quel punto. Così pure sono equivalenti due vettori applicati equipollenti, situati sulla medesima retta (cioè corrispondenti ad un medesimo cursore).

Dalla definizione di equivalenza scende senz'altro che due sistemi di vettori applicati equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro. Inoltre, se più sistemi  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  sono rispettivamente equivalenti ai sistemi  $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \dots, \Sigma'_n$ , il sistema  $\Sigma$  formato dai sistemi  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) è equivalente al sistema  $\Sigma'$  formato dai sistemi  $\Sigma'_i$ .

Dati due sistemi di vettori applicati, per verificare se essi siano equivalenti, si può, per es., ridurli all'origine delle coordinate. In formole, le condizioni che devono essere soddisfatte per l'equivalenza sono allora:

$$(27) \quad \begin{cases} X = X', & Y = Y', & Z = Z'; \\ M_x = M_x', & M_y = M_y', & M_z = M_z', \end{cases}$$

il significato delle lettere essendo manifesto.

42. Se il risultante  $R$  di un sistema di vettori applicati è nullo ( $R = 0$ ), il momento risultante  $M$  è indipendente dal centro di

riduzione, talchè, se rispetto a un punto  $P$  il momento è nullo, è pur nullo rispetto ad ogni altro polo. Ogni sistema di vettori applicati, di cui siano insieme nulli il risultante e il momento risultante (rispetto ad un qualsiasi polo) si dice *equivalente a zero* o anche (per una ragione che verrà chiarita nella Statica dei solidi) *equilibrato* o *in equilibrio*.

Relativamente a questi sistemi equilibrati giova tener presente che è nullo anche il loro momento rispetto ad una retta qualsiasi (n. 34).

Convieni inoltre osservare che due sistemi sono equivalenti, se uno d'essi si ottiene dall'altro aggiungendo dei vettori che formino un sistema equilibrato; ciò infatti non altera nè il risultante, nè il momento risultante.

Un esempio semplicissimo di sistemi equilibrati si ha nei sistemi formati da *due vettori* applicati, opposti e aventi la medesima linea d'azione, ossia, come suol dirsi, *direttamente opposti*.

Si ha senz'altro che se un sistema di vettori applicati è equilibrato, è pur tale ogni sistema di vettori direttamente opposti.

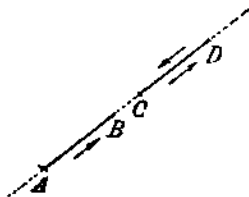
**43. OPERAZIONI ELEMENTARI.** — Dato un sistema di vettori applicati, chiameremo *operazioni elementari* le due seguenti:

1<sup>a</sup>) *La composizione o decomposizione di vettori applicati in un medesimo punto* (ossia la sostituzione di quanti si vogliono vettori del sistema, applicati in un medesimo punto  $P$ , col loro risultante applicato nello stesso  $P$ ; o, viceversa, la sostituzione di un generico vettore applicato in  $P$  con più altri, applicati nel medesimo punto, e aventi quel vettore per risultante).

2<sup>a</sup>) *L'aggiunta o soppressione di due vettori direttamente opposti* (n. prec.).

Potremo considerare come operazione elementare anche il *trasporto di un vettore lungo la sua linea d'azione*, ossia la sostituzione di un vettore qualsiasi  $B-A$  con uno  $D-C$  equipollente e situato sulla medesima retta.

Tale operazione consiste infatti nell'eseguire successivamente le due operazioni elementari seguenti: aggiungere al sistema che si considera i due vettori applicati (direttamente opposti)  $CD$ ,  $DC$ ; sopprimere dal sistema così ottenuto i vettori  $AB$  e  $DC$ .



Dal n. prec. e dal n. 41 sappiamo che il sistema di due vettori applicati, direttamente opposti, equivale a zero e che il sistema di più vettori applicati concorrenti in un punto equivale al loro risultante, applicato in quel punto.

Risulta di qui che, eseguendo successivamente sopra un sistema quante e quali si vogliono operazioni elementari, si ottiene sempre un sistema equivalente al dato.

Vedremo al n. 47 che reciprocamente, se due sistemi sono equivalenti, si può sempre da uno d'essi ottenere l'altro, eseguendo soltanto operazioni elementari.

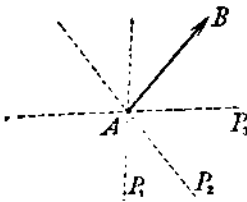
È perciò che due sistemi equivalenti diconsi anche *riducibili l'uno all'altro*. Si tratta, bene inteso, di riducibilità con sole operazioni elementari.

Ne consegue che, come definizione dell'equivalenza fra due sistemi, si potrebbe anche assumere tale loro reciproca riducibilità, come appunto faceva il POINSOT <sup>(1)</sup>.

**44. RIDUCIBILITÀ DI OGNI SISTEMA DI VETTORI APPLICATI A TRE VETTORI.** — Siano  $P_1, P_2, P_3$  tre punti dello spazio non situati in linea retta e consideriamo dapprima un solo vettore applicato  $AB$ , coll'origine  $A$ , non situata sul piano  $P_1P_2P_3$ .

Dal n. 15 sappiamo che il vettore  $AB$  può allora decomporre in tre vettori concorrenti in  $A$  e aventi per linee d'azione le rette  $AP_1, AP_2, AP_3$ . Trasportiamoli lungo tali linee d'azione fino ad avere le origini rispettivamente in  $P_1, P_2, P_3$ . Il vettore  $AB$  è così ridotto (con sole operazioni elementari) a tre altri aventi le origini nei tre punti assegnati.

Facilmente si vede che tale riducibilità del vettore  $AB$  è sempre possibile, anche se l'origine  $A$  è situata nel piano  $P_1P_2P_3$ , senza che vi appartenga la linea d'azione, oppure se  $AB$  è tutto situato nel piano suddetto. Infatti, nella prima eventualità, basta spostare



il vettore lungo la sua linea d'azione: l'origine  $A$  esce allora dal piano  $P_1P_2P_3$ , e si rientra nel caso precedente. Se poi  $AB$  appartiene al piano  $P_1P_2P_3$  delle tre rette  $AP_1, AP_2, AP_3$ , due almeno sono certamente distinte, p. es.  $AP_1, AP_2$ ; il nostro vettore si può allora decomporre (n. 15) in due (di cui uno eventualmente nullo) appartenenti a queste due rette, e quindi trasportabili in  $P_1, P_2$ ; la riduzione

è così effettuata, risultando di lunghezza nulla uno (o eventualmente anche due) dei tre vettori applicati in  $P_1, P_2, P_3$ .

<sup>(1)</sup> LOUIS POINSOT, nato a Parigi nel 1777, morto, pure a Parigi, nel 1859. Conferì perspicuità ed eleganza alla trattazione di parecchie questioni, servendosi di metodi geometrici diretti. Sono classici i suoi *Éléments de statique* [Paris, Maillet Bachelier], la cui decima edizione è del 1861.

Ciò posto, è facile vedere, più in generale, che ogni sistema di vettori applicati, è riducibile a tre vettori coll'origine in tre punti quali si vogliono non allineati.

Basterà, evidentemente, eseguire l'accennata riduzione per tutti i vettori del sistema; e comporre poi i vettori che concorrono in ciascuno dei punti assegnati.

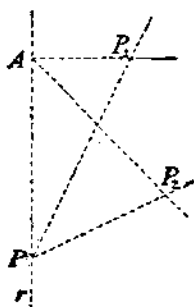
**45. RIDUCIBILITÀ DI OGNI SISTEMA DI VETTORI APPLICATI A DUE VETTORI.** — Ci proponiamo più precisamente di dimostrare che ogni sistema di vettori applicati può sempre ridursi (con sole operazioni elementari) a *due* vettori, uno dei quali coll'origine in un punto  $P$ , comunque prefissato.

Si prendano a tal fine due punti  $P_1$  e  $P_2$ , non situati su di una stessa retta con  $P$ . Pel n. prec. il sistema dato è riducibile a tre vettori (eventualmente nulli)  $v, v_1, v_2$ , rispettivamente applicati in  $P, P_1, P_2$ . Indichiamo con  $\pi_1$  il piano passante per  $P$ , che contiene il vettore  $v_1$  (un piano qualsiasi passante per  $PP_1$ , se  $v_1 = 0$ ) ed analogamente sia  $\pi_2$  il piano che contiene  $P$  e  $v_2$  (un piano qualsiasi per  $PP_2$ , se  $v_2 = 0$ ).

Consideriamo dapprima il caso generale, in cui tali due piani sono distinti, e la loro retta d'intersezione non contiene nè  $P_1$ , nè  $P_2$ .

Assunto allora su tale retta  $r$  un punto qualsiasi  $A$  distinto da  $P$ , si sa dai nn. 15, 43 che il vettore  $v_1$  del piano  $\pi_1$  è equivalente a due vettori coll'origine in  $P_1$  e situati sulle rette  $PP_1$  ed  $AP_1$ ; questi si possono poi trasportare lungo le loro linee d'azione (n. 43) in modo da avere le origini in  $P$  ed  $A$  rispettivamente. Eseguendo la stessa riduzione sul vettore  $v_2$ , possiamo concludere che il dato sistema è riducibile a tre vettori coll'origine in  $P$  e a due coll'origine in  $A$ . Basta ora eseguire la composizione di tali vettori applicati in  $A$  e in  $P$ , per ottenere la cercata riduzione a due soli vettori, uno dei quali coll'origine in  $P$ .

La stessa conclusione seguita a valere anche nei casi esclusi, in cui i piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$  coincidono, ovvero la loro intersezione  $r$  passa per uno dei punti  $P_1$  o  $P_2$ , ad es.  $P_1$ . Lo si riconosce prendendo  $A$  coincidente con  $P_1$ , e procedendo nel resto come sopra.



**46.** Sia  $\Sigma$  un sistema equilibrato (n. 42) qualsiasi, ossia con risultante e momento risultante nulli.

Eseguendo su di esso la riduzione testè indicata, i due vettori, cui da ultimo si perviene, risultano di necessità direttamente op-

posti (in particolare nulli entrambi, se lo è uno di essi), perchè, anzitutto, per l'annullarsi del risultante, tali vettori devono essere opposti; e d'altra parte devono essere situati sulla medesima retta, in quanto, se così non fosse, non si annullerebbe il momento risultante, come si vede prendendo, ad es., per centro di riduzione un punto  $P$ , situato sulla linea di azione di uno di essi.

Ma ogni sistema composto di due vettori direttamente opposti si riduce, mediante la seconda operazione del n. 43, ad un vettore nullo; cosicchè si conclude che ogni sistema equilibrato è riducibile ad un *sistema assolutamente nullo*, cioè non comprendente alcun vettore, o, ciò che è lo stesso, costituito soltanto da vettori nulli.

**47. RIDUCIBILITÀ MUTUA DI DUE SISTEMI EQUIVALENTI DI VETTORI APPLICATI.** — Siamo ora in grado di dimostrare (cfr. n. 43) che *ogni sistema  $\Sigma_1$  è riducibile a qualsiasi altro sistema equivalente  $\Sigma_2$* .

Consideriamo a tale scopo il sistema  $\Sigma_2'$  costituito dai vettori direttamente opposti ai singoli vettori di  $\Sigma_1$ , applicati negli stessi punti.

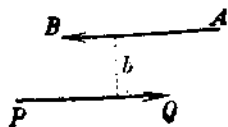
Aggiungendo al sistema  $\Sigma_1$  tutti i vettori  $B-A$  del sistema  $\Sigma_1$ , e i corrispondenti  $A-B$  del sistema  $\Sigma_2'$ , vediamo intanto che il sistema  $\Sigma_1$  è riducibile al sistema composto dai tre  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_2'$ .

D'altra parte, qualunque sia il centro di riduzione, il sistema  $\Sigma_2'$  ha il risultante e il momento risultante manifestamente opposti al risultante e al momento di  $\Sigma_2$ , e quindi anche di  $\Sigma_1$ . Il sistema formato dai sistemi  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2'$  è dunque equilibrato, ossia, per quanto abbiamo veduto al n. prec., è riducibile ad un sistema assolutamente nullo. Ne scende che il sistema formato da  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_2'$  è riducibile all'unico sistema  $\Sigma_2$ .

Si passa dunque successivamente (con sole operazioni elementari) da  $\Sigma_1$  al sistema composto  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_2'$  e da questo a  $\Sigma_2$ .

**48. COPPIE.** — Dicesi *coppia*, ogni sistema formato da due vettori applicati opposti (cioè paralleli e di verso opposto).

La distanza  $b$  delle rispettive linee d'azione dicesi *braccio della coppia*. Talora giova fare intervenire anche la nozione di *verso di una coppia*, con che si intende il verso di rotazione, concordemente determinato dai due vettori, nel loro piano, attorno ad un qualsiasi punto  $O$ , interno alla striscia limitata dalle linee d'azione dei due vettori.



Siccome il risultante di una generica coppia  $C$  è nullo, così (n. 35) il momento risultante di una coppia è indipendente dal centro di riduzione.



Siano  $AB$  e  $PQ$  i due vettori di  $C$ . Prendendo per centro di riduzione una delle due origini, ad es. il punto  $P$ , si vede tosto che il momento  $M$  della coppia  $C$  coincide col momento dell'altro vettore  $AB$ . Esso ha dunque lunghezza eguale al prodotto del braccio  $b$  della coppia per la lunghezza comune dei due vettori; è perpendicolare al piano della coppia; ed è destro (n. 29) rispetto ad  $AB$ .

Quest'ultima circostanza si riferisce al vettore  $M$  applicato in  $P$ . Per ragione di continuità, si può evidentemente sostituire a  $P$  ogni altro punto che sia situato dalla stessa banda di  $P$  rispetto alla retta  $AB$ : in particolare quindi un punto qualsiasi  $O$ , interno alla striscia compresa fra le parallele  $AB$ ,  $PQ$ . Si può così caratterizzare il verso del momento  $M$ , in modo simmetrico rispetto ai due vettori, ricorrendo al verso della coppia da essi costituito, e si ha l'enunciato:

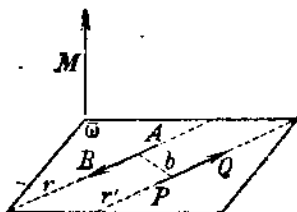
*Per un osservatore coi piedi in  $O$  (punto qualsiasi interno alla striscia compresa fra le due linee d'azione) e il capo dalla banda del momento  $M$ , il verso della coppia apparisce destro.*

49. Dal fatto che il risultante di una coppia è sempre nullo, scende che due coppie sono equivalenti allora e solo allora che, per un centro di riduzione (e quindi per tutti), coincidono i loro momenti.

Ricordando poi (n. 42) che fra i sistemi a risultante nullo equivalgono a un vettore nullo soltanto quelli il cui momento è nullo, si ha facilmente che una coppia è equivalente ad un vettore nullo, se è nullo il suo momento (ossia se sono nulli i due vettori componenti, oppure se tali vettori giacciono sulla stessa retta); e che una coppia a momento non nullo non è mai equivalente ad un unico vettore.

50. Mostriamo che un vettore  $M$  si può sempre, e in infiniti modi, considerare come il momento di una qualche coppia  $C$ ; è inutile specificare il polo, perchè (n. 48) il momento di una coppia non dipende dalla posizione del polo.

Per trovare una di queste coppie  $C$ , basta, per es., fissare un piano  $\alpha$  perpendicolare al vettore  $M$  e tracciarvi ad arbitrio due rette parallele  $r$ ,  $r'$ . Detta  $b$  la loro distanza, si costruisca una coppia  $C$ , applicando su  $r$ ,  $r'$  due vettori opposti  $AB$ ,  $PQ$ , di lunghezza comune  $M/b$  e di senso tale che il verso di  $C$ , apparisca destro rispetto al vettore  $M$ , applicato in un punto interno alla striscia  $r$ ,  $r'$ .



**51. RIDUCIBILITÀ DI OGNI SISTEMA DI VETTORI APPLICATI AD UN VETTORE E AD UNA COPPIA.** — Dall'osservazione ora fatta scende che un sistema qualsiasi di vettori applicati è sempre equivalente ad un altro costituito da un unico vettore applicato in un punto  $P$  prefissato ad arbitrio e da un'unica coppia.

Infatti, preso  $P$  per centro di riduzione, dicasi, al solito,  $R$  il risultante ed  $M$  il momento risultante del sistema dato, e sia  $C$  una qualsiasi delle coppie che hanno per momento il vettore  $M$ .

Il sistema formato dal vettore  $R$  applicato in  $P$  e dalla coppia  $C$  è appunto equivalente al sistema dato. Infatti esso pure ha per risultante  $R$  e per momento risultante quello della coppia  $C$ , ossia  $M$  (non portandovi alcun contributo il vettore  $R$  che ha l'origine nel centro di riduzione  $P$ ).

**52.** Vanno rilevati i casi particolari, in cui, nella riduzione precedente, viene a mancare o la coppia o il vettore applicato, sicchè il sistema sia equivalente o a un unico vettore applicato ( $P, R$ ) o a un'unica coppia di momento  $M$ ; ed è facile riconoscere che la condizione necessaria e sufficiente perchè si verifichi l'uno o l'altro caso è data dall'annullarsi del trinomio invariante  $T = M \times R$ .

Che la condizione sia necessaria è manifesto, giacchè sia quando in qualche centro  $P$  risulti nullo il momento  $M$  (sistema equivalente ad un unico vettore applicato, eventualmente nullo), sia quando sia nullo il risultante  $R$  (sistema equivalente ad un'unica coppia, eventualmente nulla), il prodotto scalare  $T = M \times R$  è eguale a zero, come avente nullo uno, almeno, dei suoi fattori.

Supponiamo, reciprocamente, che sia  $T = M \times R = 0$ . Esclusa l'ipotesi  $R = 0$ , cui corrisponderebbe senz'altro un sistema equivalente ad un'unica coppia, ricordiamo che l'annullarsi del trinomio invariante  $T$  implica che sia pur nullo il momento minimo (n. 39), talchè il sistema equivale all'unico vettore  $R$  applicato in un punto qualsiasi dell'asse centrale.

Associando i risultati così stabiliti a quelli del n. prec. abbiamo che:

*Un sistema di vettori applicati a trinomio invariante non nullo (nel qual caso, per essere  $T = M \times R$ , nè  $R$ , nè  $M$  possono annullarsi) è sempre equivalente ad un vettore applicato e ad una coppia.*

*Un sistema a trinomio invariante nullo equivale sempre ad un sistema più semplice, cioè equivale ad un unico vettore applicato o ad un'unica coppia, oppure è addirittura equilibrato. Si ha il primo caso, quando il risultante  $R$  non è nullo; il secondo, quando il*

risultante si annulla, senza che sia contemporaneamente  $M = 0$ ; si ha infine il terzo caso (sistema equivalente a zero), quando si annullano insieme  $R$  ed  $M$ .

53. Come immediata applicazione possiamo dimostrare che sono sempre equivalenti ad un unico vettore, o ad un'unica coppia (o, in particolare, a zero):

1°) *I sistemi piani* (costituiti cioè da vettori applicati, appartenenti ad un medesimo piano).

2°) *I sistemi paralleli* (costituiti cioè da vettori applicati, paralleli).

Basterà far vedere che il trinomio invariante si annulla.

Per i sistemi piani lo si constata prendendo come centro di riduzione un punto del piano e osservando che i momenti dei singoli vettori del sistema riescono tutti perpendicolari a tale piano. Lo stesso avviene pel momento risultante  $M$  (ove in particolare non si annulli); poichè il risultante  $R$  è invece parallelo a detto piano (o in particolare zero) il prodotto scalare  $M \times R$  è (n. 20) nullo.

Per i sistemi paralleli, scelto un centro di riduzione a piacere, il momento  $M$  riesce manifestamente normale alla comune direzione dei vettori del sistema (o in particolare si annulla); il risultante  $R$  ha invece la stessa direzione dei vettori (o si annulla), cosicchè, come or ora,  $M \times R = 0$ .

Dal n. prec. scende ancora che un sistema di quante e quali si vogliono coppie equivale ad un'unica coppia, o in particolare a zero, in quanto si annulla il risultante del sistema.

Lo studio sistematico dei *sistemi piani* (di vettori applicati, anzi di cursori) si fa, nella pratica corrente dell'ingegneria, oltre che servendosi delle generalità precedenti, coll'impiego dei poligoni funicolari e conseguenti accorgimenti costruttivi, che costituiscono uno speciale capitolo della statica, denominato *statica grafica*.

Noi rimandiamo per questa ad apposite trattazioni <sup>(1)</sup>.

(1) Cfr. in particolare il fascicolo (litografato) del Prof. ENRICO VOLTERRA (Roma, Libreria Politecnica, 1938); ovvero le *Lezioni di Meccanica razionale con elementi di Statica grafica* del Prof. SIGNORINI (Napoli, G.U.F., 1937). Naturalmente esistono anche più diffuse opere a stampa. Ci limiteremo a ricordare M. LÉVY: *La statique graphique* (Paris, Gauthier-Villars, 3° ediz., 1907); C. GUIDI: *Lezioni sulla scienza delle costruzioni, Parte I, Statica grafica* (Torino, Bona, 10° ediz., 1925); nonchè il recente opuscolo *Graphostatik* del TREFFTZ (Leipzig, Teubner, 1936).

**54. SISTEMI IN EQUILIBRIO FORMATI DA DUE O TRE VETTORI APPLICATI.** — Consideriamo ora i sistemi equilibrati (n. 42) costituiti da due o da tre vettori applicati (non nulli, beninteso).

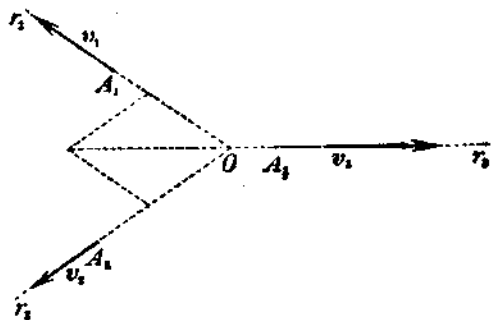
Per i sistemi in equilibrio formati da due soli vettori, già si è visto (n. 46) che questi due vettori devono essere direttamente opposti.

Per i sistemi equilibrati formati da tre vettori, si può dimostrare che tali vettori sono necessariamente situati in un medesimo piano; e che le loro linee d'azione s'incontrano in un unico punto oppure sono parallele fra loro.

Siano  $(A_1, v_1)$ ,  $(A_2, v_2)$ ,  $(A_3, v_3)$  i tre dati vettori applicati e siano  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  le loro linee d'azione. Se esse coincidono, la proprietà enunciata vale senz'altro; in caso diverso, potremo sempre trasportare ciascun vettore sulla sua linea di azione in modo che i tre punti di applicazione  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  non siano in linea retta. I momenti dei vettori applicati  $(A_1, v_1)$ ,  $(A_2, v_2)$  rispetto alla retta  $A_1A_2$  (orientata in uno qualsiasi dei suoi due versi) sono nulli (n. 32): ma anche il momento risultante del sistema deve annullarsi (n. 42). Perciò il vettore  $(A_3, v_3)$  avrà esso pure un momento nullo rispetto ad  $A_1A_2$ ; ossia sarà situato sul piano  $A_1A_2A_3$ .

Analogamente si vede che in tale piano devono giacere anche  $(A_1, v_1)$  e  $(A_2, v_2)$ ; sicchè la prima parte del nostro asserto è intanto provata.

In quanto alla seconda parte, si supponga dapprima che le rette  $r_1$  ed  $r_2$  si incontrino in un punto  $O$ . Trasportando i due vettori  $(A_1, v_1)$  e  $(A_2, v_2)$



lungo le linee d'azione fino ad avere la loro origine in  $O$  e poi componendoli, si vede che essi equivalgono ad un unico vettore applicato in  $O$ . Tale vettore, al pari del sistema  $\{(A_1, v_1), (A_2, v_2)\}$ , da cui proviene, deve costituire assieme ad  $(A_3, v_3)$  un sistema equi-

librato, e ciò esige che la sua linea d'azione coincida con quella di  $(A_3, v_3)$ , cioè che la retta  $r_3$  passi per il punto d'intersezione delle rette  $r_1$ ,  $r_2$ .

Se invece  $r_1$  ed  $r_2$  sono parallele, è parallela ad esse anche  $r_3$ . Infatti, ove, ad es.,  $r_1$  ed  $r_2$  avessero un punto comune, in tale punto, per quanto si è visto or ora, dovrebbe concorrere anche  $r_3$ , contrariamente all'ipotesi fatta.

Come applicazione del criterio dianzi stabilito si riconosce agevolmente che tre vettori applicati nei punti medi dei lati di un triangolo e ad essi rispettivamente perpendicolari sono in equilibrio, se hanno lunghezze proporzionali ai rispettivi lati e sono tutti e tre diretti verso l'esterno o verso l'interno del triangolo.

### § 7. - Sistemi di vettori applicati paralleli.

55. Abbiamo visto al n. 53 che ogni sistema di vettori applicati paralleli è equivalente ad un unico vettore o ad una coppia.

Per precisare questo risultato, consideriamo anzitutto un sistema di due vettori applicati *paralleli e di equal verso*  $\{(A_1, v_1), (A_2, v_2)\}$ .

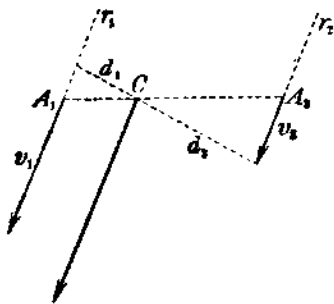
Il sistema, in quanto è a risultante diverso da zero, equivale necessariamente (n. 52) all'unico vettore  $v_1 + v_2$ , applicato in un punto (qualsiasi) di una retta parallela alle linee di azione  $r_1, r_2$  dei due dati vettori e complanare ad esse. Se queste due linee d'azione coincidono, coincide manifestamente con esse anche la linea di azione del vettore applicato  $v_1 + v_2$  equivalente al sistema.

Escluso questo caso, la linea di azione di  $v_1 + v_2$  intersecherà in un certo punto  $C$  la trasversale  $A_1A_2$  alle due rette parallele  $r_1, r_2$ . Per determinare questo punto, si osservi che in quanto il vettore applicato  $(C, v_1 + v_2)$ , equivalente al dato sistema, ha rispetto a  $C$  momento nullo, deve riuscir nullo rispetto a  $C$  anche il momento risultante del sistema, o, in altre parole, debbono riuscire di egual lunghezza e di verso opposto i momenti rispetto a  $C$  di  $(A_1, v_1), (A_2, v_2)$ .

Quest'ultima condizione, relativa al verso dei due momenti, entrambi perpendicolari al piano di  $v_1$  e  $v_2$ , implica che rispetto alla perpendicolare in  $C$  a codesto piano, orientata in un verso qualsiasi, i due vettori  $v_1, v_2$  debbono apparire di verso opposto: cioè il punto  $C$  deve essere compreso tra le due parallele  $r_1, r_2$  o, più precisamente, interno al segmento  $A_1A_2$ .

D'altra parte, se indichiamo con  $d_1, d_2$  le distanze (ancora incognite) di  $C$  dalle  $r_1, r_2$  rispettivamente, la condizione di eguaglianza delle lunghezze dei momenti di  $v_1, v_2$  rispetto a  $C$  esige che sia

$$d_1 v_1 = d_2 v_2.$$



ossia

$$\bar{d}_1 : \bar{d}_2 = v_1 : v_2.$$

Poichè, per una evidente similitudine di triangoli, si ha

$$d_1 : d_2 = A_1C : CA_2,$$

si conclude

$$A_1C : CA_2 = v_1 : v_2;$$

*cioè: Il sistema di due vettori applicati paralleli e di egual verso è equivalente al loro risultante, applicato nel punto che divide internamente il segmento dei punti di applicazione dei due vettori considerati in parti inversamente proporzionali alle rispettive lunghezze.*

Risulta di qui che il punto  $C$  non dipende dalla direzione dei due vettori, ma soltanto dalla posizione dei loro punti d'applicazione e dalle loro lunghezze, anzi, più in generale, dal rapporto delle loro lunghezze. In altre parole, il punto  $C$  resta lo stesso, comunque si facciano rotare i due vettori  $v_1$ ,  $v_2$  attorno ai loro punti di applicazione (conservandoli paralleli tra loro) e comunque si alterino le loro lunghezze in uno stesso rapporto.

56. Consideriamo in secondo luogo un sistema  $\{(A_1, v_1), (A_2, v_2)\}$ , formato da due vettori applicati aventi la stessa direzione e versi opposti.

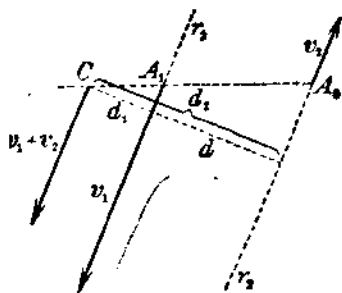
Escluso il caso già studiato della coppia (in particolare di due vettori direttamente opposti), le lunghezze dei due vettori sono diseguali; sia, ad es.,  $v_1 > v_2$ .

Se le linee d'azione  $r_1$ ,  $r_2$  coincidono, il sistema equivale manifestamente ad un vettore unico, che ha la stessa linea d'azione, il senso del vettore più lungo  $v_1$ , e, per lunghezza, la differenza  $v_1 - v_2$  fra le due lunghezze.

Se le  $r_1$ ,  $r_2$  sono distinte, la linea di azione del vettore applicato  $v_1 + v_2$  (di lunghezza  $v_1 - v_2$ ) equivalente al dato sistema interseca la retta  $A_1A_2$  in un punto  $C$ , che, come si riconosce con un ragionamento perfettamente analogo a quello del n. prec., deve essere esterno al segmento  $A_1A_2$

e avere da  $r_1$  ed  $r_2$  distanze  $d_1$  e  $d_2$  tali, che risulti ancora

$$d_1 v_1 = d_2 v_2, \quad \text{ossia} \quad d_1 : d_2 = v_2 : v_1.$$



Si avrà quindi

$$A_1C : A_2C = v_2 : v_1 ;$$

e, poichè per ipotesi è  $v_2 < v_1$ , sarà parimenti  $A_1C < A_2C$ ; cioè il punto  $C$  cadrà sul prolungamento di  $A_1A_2$  dalla parte del punto d'applicazione del vettore  $v_1$  di intensità maggiore.

Si conclude così che: *Il sistema di due vettori paralleli, di verso opposto e di lunghezze diseguali, equivale al suo risultante applicato nel punto che divide esternamente il segmento dei punti di applicazione dei due vettori in parti inversamente proporzionali alle rispettive lunghezze.*

Anche qui la posizione di  $C$  sulla retta  $A_1A_2$  dipende soltanto dalla posizione delle origini  $A_1, A_2$  e dal rapporto  $v_2/v_1$ ; rimane cioè sempre la stessa qualunque sia la direzione (comune) dei due vettori e comunque si allungino o si accorcino nello stesso rapporto le loro lunghezze.

Ed anche qui il punto  $C$  dicesi centro dei due vettori  $v_1, v_2$ .

57. Se indichiamo con  $d$  la larghezza della striscia  $r_1r_2$ , talchè sia (per l'ammessa ipotesi  $v_1 > v_2$ )  $d_2 = d + d_1$ , deduciamo dalla  $d_1v_1 = (d + d_1)v_2$

$$d_1 = \frac{dv_2}{v_1 - v_2}.$$

Ciò posto, se tenute fisse la distanza  $d$  delle due linee di azione e la lunghezza di  $v_1$ , immaginiamo che la lunghezza di  $v_2$  decresca e tenda a  $v_1$ , vediamo che  $d_1$  tende all'infinito, cioè il centro dei due vettori, che tendono a costituire una coppia, si allontana indefinitamente.

È perciò che le coppie (considerate come casi limiti del sistema di due vettori paralleli, diretti in senso opposto e le cui lunghezze tendono a coincidere) vengono talvolta assimilate a vettori infinitamente piccoli e applicati in punti infinitamente lontani.

58. Sia dato in terzo luogo un sistema  $\Sigma$  formato da più vettori applicati  $(A_1, v_1), (A_2, v_2), \dots, (A_n, v_n)$ , paralleli e diretti nello stesso senso.

Dal n. 55, si ha tosto che ai vettori  $(A_1, v_1), (A_2, v_2)$  può essere sostituito un unico vettore applicato  $(C_2, v_1 + v_2)$ , avente la stessa direzione dei vettori dati; che ai vettori  $(C_2, v_1 + v_2), (A_3, v_3)$  può essere sostituito un unico vettore  $(C_3, v_1 + v_2 + v_3)$ , avente anch'esso questa medesima direzione, e così via, finchè si arriva ad un vettore applicato  $(C, v_1 + v_2 + \dots + v_n)$  (per uniformità di

notazione si dovrebbe scrivere  $C_n$  in luogo di  $C$ ) equivalente al sistema dato  $\Sigma$  ed avente esso pure la stessa direzione, e lo stesso verso dei vettori del sistema. Dallo stesso n. 55 risulta che il punto  $C$ , per cui passa la linea d'azione di  $R = \sum_1^n v_i$ , si ottiene nel modo seguente: prendendo sul segmento  $A_1A_2$ , il punto  $C_2$  tale che il rapporto fra i segmenti  $A_1C_2$ ,  $C_2A_2$  sia  $v_2/v_1$ ; prendendo sul segmento  $C_2A_3$ , il punto  $C_3$  tale che il rapporto  $C_2C_3/C_3A_3$  sia  $v_3/(v_1 + v_2)$ , ...; prendendo sul segmento  $C_{n-1}A_n$  il punto  $C$  tale che si abbia

$$\frac{C_{n-1}C}{CA_n} = \frac{v_n}{v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}}.$$

Da questa costruzione geometrica risulta che la posizione di un tale punto  $C$ , detto *centro dei vettori paralleli* dati, non muta se si cambia la direzione comune dei vettori stessi, ma si conservano le loro origini e le loro lunghezze (oppure, più in generale, i rapporti fra le loro lunghezze).

È poi ben noto dalla Geometria analitica che, indicando con  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  le coordinate del punto  $A_i$ , le coordinate  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  del punto  $C$  sono date dalle formule:

$$(28) \quad x_0 = \frac{\sum_1^n v_i x_i}{R}, \quad y_0 = \frac{\sum_1^n v_i y_i}{R}, \quad z_0 = \frac{\sum_1^n v_i z_i}{R}.$$

Queste formule mettono in evidenza che si arriva al medesimo punto  $C$ , qualunque sia l'ordine nel quale sono stati presi i vettori.

Giova inoltre notare che le (28) possono compendiarsi in un'unica formula vettoriale, facendo intervenire, invece delle coordinate di  $A_i$  e di  $C$ , i vettori  $A_i - O$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) e  $C - O$ , dove  $O$  designa l'origine del sistema di riferimento (che del resto è un punto a priori qualsiasi dello spazio). La formula è

$$(28') \quad C - O = \frac{\sum_1^n v_i (A_i - O)}{R},$$

come risulta tosto dal fatto che, prendendo le componenti secondo gli assi coordinati, si ritrovano le (28).

59. Che il sistema  $\Sigma$  sia equivalente al vettore applicato  $(C, R)$ , avente la stessa direzione dei vettori dati, e per lunghezza la somma  $R = \sum_1^n v_i$ , si può dimostrare anche, con procedimento puramente analitico, nel modo seguente.



Indichiamo con  $k$  un vettore unitario parallelo ai vettori del sistema e diretto nello stesso senso. Si avrà allora (n. 16)

$$v_i = v_i k \text{ e}$$

$$\sum_1^n v_i = \sum_1^n v_i k = k \sum_1^n v_i = Rk.$$

Formiamo poi il momento risultante  $M$  rispetto ad  $O$ . Ciascun vettore  $v_i k$  vi contribuisce (n. 29) per

$$(A_i - O) \wedge v_i = v_i (A_i - O) \wedge k,$$

onde, sommando e badando alla (28'), si ha

$$M = R(C - O) \wedge k = (C - O) \wedge Rk,$$

da cui apparisce che il momento  $M$  di  $\Sigma$  rispetto ad  $O$  si identifica coll'analogo momento dell'unico vettore  $R$  applicato in  $C$ . Questo è dunque equivalente a  $\Sigma$ .

60. Consideriamo infine un sistema  $\Sigma$  formato da più vettori applicati paralleli, non tutti diretti nello stesso verso, e siano  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  i due sistemi formati dai vettori di  $\Sigma$  aventi rispettivamente l'uno e l'altro verso.

In base ai nn. prec., si potrà ridurre ciascuno di questi sistemi ad un unico vettore, cosicchè si sarà ricondotti al caso di due vettori paralleli e diretti in senso opposto (n. 56).

Più precisamente, se  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) sono le lunghezze dei vari vettori di  $\Sigma_1$ ,  $w_j$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) quelle dei vettori di  $\Sigma_2$ , e poniamo

$$R = \sum_1^p v_i, \quad S = \sum_1^q w_j,$$

avremo che, se  $R = S$ , il sistema  $\Sigma$  equivale ad un'unica coppia (o, in particolare, a zero).

Nel caso generale, in cui  $R \neq S$ , il sistema equivale ad un unico vettore parallelo ai dati, coll'origine in un punto  $C$  (detto anche in tale caso centro dei vettori paralleli) che dipende dalle lunghezze dei vettori di  $\Sigma$  e dalla posizione delle loro origini, ma non dalla comune direzione.

### § 8. - Sistemi di cursori e loro equivalenza.

61. Per *risultante* di un qualsiasi sistema di cursori s'intende la somma geometrica dei vettori, che intervengono nella definizione di ciascuno di essi; e, analogamente, si definisce il *momento risultante* del sistema rispetto ad un qualsiasi polo  $P$  come la somma geometrica dei momenti dei singoli cursori rispetto a quel

medesimo polo (n. 30). In base a queste definizioni tutta la teoria della equivalenza, svolta per i sistemi di vettori applicati nei precedenti §§ 6, 7, si trasporta senz'altro ai sistemi di cursori.

Solo convien chiarire bene l'aspetto che, in questo caso dei cursori, assumono le operazioni elementari di riduzione (n. 43). La prima di queste operazioni, che per i vettori applicati consisteva nella composizione o decomposizione di vettori concorrenti in un punto, trova riscontro, per i cursori, nella sostituzione di due o più cursori, le cui linee d'azione passino per uno stesso punto  $P$ , con un cursore unico, di cui la linea d'azione, l'intensità e il verso si individuino, applicando in  $P$  il risultante dei vettori corrispondenti ai singoli cursori; o, viceversa, nella decomposizione di un cursore in due o più altri, le cui linee d'azione concorrano in un punto della linea d'azione del primo e che corrispondano a vettori, il cui risultante coincida col vettore corrispondente a quel dato cursore.

Quanto alla seconda operazione elementare, cioè all'aggiunta o soppressione di due vettori applicati direttamente opposti, osservammo già al n. 43 che in suo luogo (in quanto combinata con la prima operazione elementare) si può sostituire il trasporto di un vettore applicato lungo la sua linea d'azione. Ora nel caso dei cursori, quest'ultima operazione lascia invariato ogni singolo cursore, talchè si ha la notevole circostanza che *nel caso dei sistemi di cursori, le operazioni elementari* (quali risultano sufficienti per ridurre un sistema ad un qualsiasi altro equivalente) *si riducono alla prima.*

### § 9. — Derivazione di un vettore variabile.

62. Supponiamo che, ad ogni valore di un parametro  $t$ , compreso in un certo intervallo da  $t_0$  a  $t_1$ , corrisponda un vettore  $v$  univocamente determinato.

Per ovvia estensione del concetto di funzione (dalle grandezze scalari ai vettori) si dirà in tal caso che il vettore  $v$  è funzione del parametro (o variabile indipendente)  $t$  nell'intervallo da  $t_0$  a  $t_1$  e si scriverà  $v = v(t)$ .

Questa funzione vettoriale  $v(t)$  si dice finita da  $t_0$  a  $t_1$ , se è finito in questo intervallo il rispettivo modulo  $v(t)$ ; e si dice che, per  $t$  tendente a un valore  $\bar{t}$  di quell'intervallo, ammette come limite un vettore  $\bar{v}$ , se, comunque si prefissi un numero positivo  $\epsilon$ , per quanto piccolo, esiste in corrispondenza di quest' $\bar{t}$  un intorno di  $\bar{t}$  tale che, per ogni  $t$  di esso (escluso al più  $\bar{t}$ ) si abbia

$$|v(t) - \bar{v}| < \epsilon.$$

Dopo di ciò si estende alle funzioni vettoriali l'ordinaria definizione di *continuità*, dicendo che una  $v(t)$  è *continua* per un valore  $t$  del parametro, se

$$\lim_{t \rightarrow t} v(t) = v(t).$$

Fissato fra  $t_0$  e  $t_1$  un intervallo qualsiasi da  $t_0$  a  $t_0 + \Delta t$ , si ponga

$$\Delta v = v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)$$

e si consideri il vettore

$$\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

che dicesi *rapporto incrementale* di  $v(t)$  rispetto all'intervallo da  $t_0$  a  $t_0 + \Delta t$ .

Se quando, tenuto fisso  $t_0$ , si fa tendere  $\Delta t$  allo zero, questo rapporto incrementale tende ad un vettore determinato (nel senso che o la lunghezza tenda a zero, nel qual caso il vettore limite è nullo, oppure la direzione e la lunghezza rispettive tendano ciascuna ad un limite determinato) codesto vettore dicesi *vettore derivato* di  $v$ , pel valore  $t_0$  del parametro, e si denota con  $dv/dt$  o, più semplicemente, con  $\dot{v}(t_0)$ .

È manifesto che, se il vettore  $v$  (pur variando) si conserva costantemente parallelo ad una retta, oppure ad un piano, lo stesso segue per  $\Delta v$ , e quindi anche per il rapporto incrementale e per il vettore derivato  $\dot{v}$ .

Notiamo infine che, siccome il derivato  $\dot{v}(t_0)$  è alla sua volta una funzione vettoriale di  $t_0$ , si può definire il derivato di  $\dot{v}$ , il quale dicesi *derivato secondo* di  $v$  e si designa con  $d^2v/dt^2$  o  $\ddot{v}$ ; e così dicasi per le derivate di ordine superiore al secondo.

63. Dal fatto che, quando  $\Delta t$  converge a zero  $\Delta v/\Delta t$  ha per limite  $\dot{v}$ , segue che la differenza

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} - \dot{v} = \epsilon$$

è un vettore *infinitesimo* insieme con lo scalare  $\Delta t$ , nel senso che la sua lunghezza è infinitesima con  $\Delta t$ . Perciò, generalizzando una nota locuzione del Calcolo, possiamo dire che

$$\Delta v - \dot{v}\Delta t = \epsilon\Delta t$$

è un infinitesimo d'ordine superiore al primo rispetto a  $\Delta t$ .

Se sostituiamo materialmente  $dt$  a  $\Delta t$  e chiamiamo, come in Calcolo, *differenziale della funzione* (vettoriale)  $v$  il prodotto  $\dot{v}dt$ , designandolo con  $dv$ , abbiamo l'enunciato, in tutto conforme a

quello che vale per le funzioni scalari: L'incremento  $\Delta v$ , subito da  $v$  nell'intervallo elementare  $dt$ , differisce dal differenziale  $dv$  per infinitesimi d'ordine superiore a  $dt$ .

64. Se riferiamo il vettore  $v(t)$  ad una terna cartesiana  $Oxyz$ , le sue componenti  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  sono manifestamente funzioni di  $t$ ; e se la funzione vettoriale  $v(t)$  è uniforme, finita e continua, tali risultano manifestamente anche le funzioni scalari  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$ , e reciprocamente.

Il rapporto incrementale di  $v$  ha per componenti

$$\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}, \quad \frac{Y(t + \Delta t) - Y(t)}{\Delta t}, \quad \frac{Z(t + \Delta t) - Z(t)}{\Delta t},$$

cioè i rapporti incrementali delle componenti; onde risulta che l'esistenza del derivato  $\dot{v}(t)$  implica l'esistenza delle derivate delle componenti e viceversa. Così la questione della esistenza delle derivate vettoriali è senz'altro esaurita coll'intesa che d'or innanzi le componenti  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  si suppongano derivabili quante volte occorra.

L'osservazione precedente mostra inoltre che le componenti del derivato  $\dot{v}$  di un vettore  $v$  sono date dalle derivate  $\dot{X}$ ,  $\dot{Y}$ ,  $\dot{Z}$  delle componenti di  $v$ ; e così le componenti di  $\ddot{v}$  da  $\ddot{X}$ ,  $\ddot{Y}$ ,  $\ddot{Z}$ , ecc.

65. Ne consegue che per la derivazione vettoriale valgono le regole della derivazione ordinaria. Ad es., la derivata di un vettore costante è nulla; due vettori con egual derivata differiscono per un vettore costante; la derivata di un vettore somma è somma delle derivate dei vettori addendi; se  $v$  è funzione di  $t$  pel tramite di un altro parametro  $s = s(t)$ , si ha (regola di derivazione delle funzioni composte)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad \text{ecc.}$$

Giova ancora rilevare che, se  $m$  designa uno scalare e  $v_1$ ,  $v_2$  due vettori, l'uno e gli altri comunque variabili con  $t$ , ai prodotti dei tre tipi:

$$mv_1, \quad v_1 \times v_2, \quad v_1 \wedge v_2$$

è applicabile la stessa regola di derivazione, che vige per i prodotti ordinari; valgono cioè le formule

$$\frac{d}{dt} (mv_1) = \frac{dm}{dt} v_1 + m \frac{dv_1}{dt},$$

$$\frac{d}{dt} (v_1 \times v_2) = \frac{dv_1}{dt} \times v_2 + v_1 \times \frac{dv_2}{dt},$$

$$\frac{d}{dt} (v_1 \wedge v_2) = \frac{dv_1}{dt} \wedge v_2 + v_1 \wedge \frac{dv_2}{dt}.$$

La verifica è, in ogni caso, immediata; per la prima e terza formula basta riferirsi alle componenti e riconoscere (nn. 16, 23) che le componenti omologhe sono effettivamente le stesse, nel primo e nel secondo membro. Per la seconda basta sviluppare il primo membro, ricordando la (14) del n. 20 e constatare la sua identità col secondo membro.

Un interessante corollario della formula di derivazione dei prodotti scalari si ha supponendovi  $v_1 = v_2 = v$  e  $v$  di lunghezza costante. È allora costante anche il prodotto scalare  $v \times v$  (quadrato della lunghezza) e risulta  $dv/dt \times v = 0$ , ossia (n. 20):

*Il derivato di un vettore (variabile comunque in direzione, ma) di lunghezza costante è perpendicolare al vettore stesso o nullo.*

66. Dalle considerazioni precedenti risulta come si possano estendere alle funzioni vettoriali i risultati formali del Calcolo differenziale.

Così, p. es., si può stabilire, come in Calcolo, uno sviluppo che corrisponde a quello del TAYLOR, arrestato ad un termine generico (salvo qualche minore specificazione nell'espressione del resto).

Si ha in primo luogo il così detto *teorema della media*, certamente valido per ogni funzione vettoriale finita e continua assieme alla sua derivata prima in un intervallo  $t-t_1$ .

E la formula corrispondente (che si può anche stabilire, applicando lo sviluppo del TAYLOR alle componenti) è

$$(29) \quad v(t_1) = v(t) + (t_1 - t) [\dot{v}(t) + \epsilon],$$

dove  $\epsilon$  si può in generale soltanto affermare che è una funzione vettoriale) finita e continua di  $t_1$  (e di  $t$ ), convergente a zero assieme alla differenza  $t_1 - t$ . Data l'indeterminazione di  $\epsilon$ , la (29) è espressiva solo quando si fa convergere  $t_1$  a  $t$ . D'altra parte  $v(t_1) - v(t)$  non è altro che l'incremento  $\Delta v$ , onde risulta che la (29) nulla aggiunge di interessante all'osservazione del n. 63.

Se si suppone ulteriormente che esista e sia finito e continuo nello stesso intervallo, anche il derivato secondo  $\ddot{v}$ , si può protrarre lo sviluppo fino al secondo termine, scrivendo

$$(30) \quad v(t_1) = v(t) + (t_1 - t)\dot{v}(t) + \frac{1}{2}(t_1 - t)^2[\ddot{v}(t) + \epsilon],$$

con  $\epsilon$  infinitesimo per  $t_1$  convergente a  $t$ ; ecc. Naturalmente questo  $\epsilon$  è in generale diverso da quello che compare nella (29).

67. Supponiamo che ad ogni punto  $P$  di una linea  $l$  corrisponda un certo vettore, unico e determinato,  $v(P)$ . Abbiamo così un *vet-*

*tore funzione del punto corrente su di una linea*; ma tale nozione non differisce sostanzialmente da quella di *vettore funzione di un parametro*, data precedentemente.

Immaginiamo infatti di coordinare in modo biunivoco e continuo ai vari punti di  $l$  il valore di un parametro qualsiasi, ad es. la lunghezza  $s$  dell'arco di  $l$ , valutata a partire da un punto fisso qualsiasi in un determinato verso, o *ascissa curvilinea*. Il vettore  $v$  è funzione uniforme e continua di  $s$ , se lo è di  $P$ ; e reciprocamente.

Accanto ai *vettori funzioni del punto corrente su di una linea*, si devono spesso considerare quelli *funzioni del punto variabile su di una superficie o in una regione dello spazio*.

Così, ad es., si ha un vettore funzione del punto, variabile su di una superficie, se ad ogni suo punto  $P$  facciamo corrispondere un vettore di determinata lunghezza, applicato in  $P$  e situato sulla normale alla superficie.

Dalla Fisica si hanno poi i più ovvii esempi di vettori funzione dei punti di una regione dello spazio. Basta pensare alla nozione di campo di forza, che richiamiamo ora come nota dalla Fisica, pur riservandoci di occuparcene sistematicamente in seguito (Cap. VII, § 8). Un altro caso è offerto dalla considerazione di una massa liquida in moto, ove si faccia corrispondere ad ogni punto della regione, in cui avviene il moto, il vettore che ha la direzione e l'intensità della corrente in quel punto (in un prefissato istante).

E, del resto, dato un vettore applicato, si ha un vettore funzione dei punti dello spazio, associando ad ogni punto  $P$  il momento rispetto a  $P$  del dato vettore.

Come i vettori funzioni dei punti di una linea costituiscono una immagine geometrica delle funzioni (vettoriali) di un parametro, così, secondo l'uso corrente in Calcolo, i vettori funzioni dei punti di una superficie o di una regione di spazio corrispondono alle *funzioni di due o tre parametri*. Con ovvia estensione, si passa ai *vettori funzioni di quanti si vogliono parametri*; ed è chiaro come debba, in ogni caso, intendersi la nozione di continuità.

### § 10. — Derivazione di un punto variabile.

68. Supponiamo (in modo analogo a quanto si è fatto per i vettori) che ad ogni valore di  $t$  (compreso in un certo intervallo) corrisponda un punto  $P$ . Diremo, naturalmente, che  $P$  è funzione di  $t$ ; e scriveremo  $P(t)$ .

Supponiamo inoltre che si tratti di una *funzione continua*, tale cioè che a valori  $t'$  sufficientemente vicini ad un generico  $t$  corrispondano punti  $P(t')$  prossimi quanto si vuole al punto  $P(t)$ .

Ciò premesso, ricordando (n. 9) la definizione di differenza di due punti, poniamo

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t),$$

dove con  $t$  e  $t + \Delta t$  denotiamo due valori generici dell'intervallo considerato; e formiamo il rapporto incrementale

$$(31) \quad \frac{\Delta P}{\Delta t}.$$

Se, per  $\Delta t$  convergente comunque allo zero, il vettore (31) tende verso un vettore limite determinato, quest'ultimo vettore dicesi il *derivato* del punto variabile  $P$  (relativo al valore  $t$ ); e si denota col simbolo  $dP/dt$ , oppure  $\dot{P}$ .

69. Se  $P$  è fisso (indipendente da  $t$ ) il suo derivato è evidentemente nullo.

In generale, mentre  $t$  varia con continuità,  $P(t)$  descrive una linea continua  $l$ ; se si nota che  $\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$  è il vettore rappresentato dalla corda di  $l$  che dal punto  $P(t)$  va al punto  $P(t + \Delta t)$ , si vede che al vettore limite  $\dot{P}(t)$  compete la stessa direzione della tangente alla linea  $l$  in  $P(t)$ .

Più precisamente, se sulla linea  $l$  e sulle relative tangenti si immagina assunto per verso positivo quello delle  $t$  crescenti, si può dire che il vettore  $\dot{P}$  ha la stessa direzione e lo stesso verso della tangente alla linea  $l$  nel punto  $P$  considerato.

Inoltre, introducendo, come nel caso di un vettore (n. 63), il differenziale del punto variabile  $P(t)$ ,

$$dP = \dot{P} dt,$$

si dimostra che l'incremento della funzione (punto), ossia il vettore  $P(t + dt) - P(t)$  differisce da  $dP$  per infinitesimi d'ordine superiore al primo.

Il  $dP$  stesso si suole perciò chiamare *spostamento elementare* del punto (relativo all'intervallo infinitesimo  $dt$ ).

70. Circa l'esistenza e la rappresentazione delle componenti del vettore derivato  $\dot{P}$  valgono considerazioni identiche a quelle svolte al n. 64 per il derivato di un vettore  $v$ : basta sostituire alle componenti  $X, Y, Z$  del vettore le coordinate  $x, y, z$  del punto.

Infatti, se si designano con  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  gli incrementi

$$x(t + \Delta t) - x(t), \quad y(t + \Delta t) - y(t), \quad z(t + \Delta t) - z(t),$$

ossia le componenti del vettore  $\Delta P$ , quelle del rapporto incrementale  $\Delta P/\Delta t$  sono date da

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Ammissa la derivabilità delle coordinate di  $P$ , codesti rapporti hanno rispettivamente per limiti  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ ; e son queste appunto le componenti di  $\dot{P}$ .

Ne consegue in particolare la validità della regola di derivazione delle funzioni composte, cioè:

*Se  $P$  dipende da  $t$  per tramite di un altro parametro  $s$ , funzione a sua volta di  $t$ , si ha*

$$\dot{P} = \frac{dP}{ds} \dot{s}.$$

Notiamo infine che, in quanto il derivato  $\dot{P}$  del punto variabile  $P(t)$  è un vettore pur esso funzione del parametro  $t$ , si può considerare il derivato di  $\dot{P}$ . Questo nuovo vettore dicesi *derivato secondo* del punto  $P(t)$  e si denota con  $d^2P/dt^2$  o con  $\ddot{P}$ . Le sue componenti sono (n. 60)  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{z}$ . E analogamente si definiscono i derivati di  $P$  d'ordine superiore al secondo.

71. Suppongasi che un punto  $P$  sia somma (n. 10) di un punto e di un vettore, entrambi variabili:

$$P(t) = A(t) + v(t).$$

Sia dalla diretta definizione di derivato (vettoriale e puntuale) che dalla considerazione delle componenti, si ricava immediatamente

$$\dot{P} = \dot{A} + \dot{v}$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\dot{v} = \dot{P} - \dot{A},$$

onde risulta che, anche per la somma di un punto con un vettore e per la differenza di due punti, valgono le regole della derivazione ordinaria.

Se, in particolare, un vettore variabile  $v(t)$  si immagina applicato in un punto fisso  $O$  ed è  $P$  il suo estremo necessariamente variabile, talchè sia

$$v(t) = P(t) - O,$$



se ne deduce per derivazione

$$\dot{v}(t) = \dot{P}(t);$$

cioè il derivato di un vettore variabile, applicato in un punto fisso, coincide col derivato del suo estremo libero.

Così dicasi dei derivati di ordine superiore al primo; talchè, se nello sviluppo del TAYLOR di un vettore (n. 66), p. es. nello sviluppo (30) fino ai termini del second'ordine, poniamo

$$v(t) = P(t) - O$$

(con  $O$  fisso) otteniamo il corrispondente sviluppo del TAYLOR per il punto variabile  $P(t)$ :

$$(30') \quad P(t_1) = P(t) + (t_1 - t)\dot{P}(t) + \frac{1}{2}(t_1 - t)^2 \{ \ddot{P}(t) + \epsilon \},$$

dove  $\epsilon$  converge a zero con  $t_1 - t$ .

72. Un cenno speciale merita il caso in cui  $t$  si identifichi con l'arco  $s$  della curva descritta dal punto variabile  $P$ .

Più precisamente, si supponga, come al n. 67, assegnata una generica linea (o arco di linea)  $l$ , e si contino su questa le lunghezze d'arco  $s$  a partire da un'origine arbitraria  $P_0$ , positivamente in un senso, negativamente nel senso opposto. Ad ogni valore di  $s$  (di un certo intervallo, dipendente dall'ampiezza del tratto di linea  $l$  che si prende in considerazione) viene così a corrispondere un punto determinato  $P$  della curva.

Vogliamo fissare l'attenzione sul derivato

$$t = \frac{dP}{ds}$$

di questo punto funzione dell'arco  $s$ .

Sappiamo già (n. 69) che si tratta di un vettore diretto secondo la tangente alla linea (luogo del punto variabile) nel verso concorde a quello in cui cresce il parametro, cioè nel caso nostro, l'ascissa curvilinea  $s$ .

Qui si presenta l'ulteriore circostanza che la lunghezza del vettore  $t$  è l'unità. Per riconoscerlo, basta richiamarsi alla definizione di  $t$ , pensando che esso è il limite del rapporto incrementale  $\Delta P/\Delta s$ . Ora la lunghezza del vettore  $\Delta P/\Delta s$  si presenta come rapporto fra la corda (lunghezza di  $\Delta P$ ) e l'arco corrispondente, e, come si sa dal Calcolo, questo rapporto ha per limite 1. Questo valore limite è la lunghezza di  $t$ .

### § 11. - Integrazione dei vettori.

73. Sia  $v$  un vettore variabile, funzione continua di un parametro  $t$  in un generico intervallo  $t_0, t_1$ , e siano  $X, Y, Z$  le relative componenti.

Manifestamente saranno ben definiti i tre integrali

$$\int_{t_0}^{t_1} X dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} Y dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} Z dt.$$

Il vettore  $J$  che ha per componenti tali integrali chiamasi *integrale definito* di  $v$ , relativo all'intervallo  $t_0, t_1$ , e si rappresenta col simbolo

$$J = \int_{t_0}^{t_1} v dt.$$

Sarebbe assai facile riconoscere che l'integrale  $J$  così definito può effettivamente considerarsi come il limite di una somma (vettoriale), ottenuta dividendo l'intervallo  $t_0, t_1$  in tratti  $\Delta t$  e moltiplicando ciascuno di essi per una (qualsiasi) delle determinazioni spettanti a  $v$  nell'interno del tratto.

74. Se, invece di un intervallo costante  $t_0, t_1$ , se ne considera uno  $t_0, t$  col secondo estremo  $t$  variabile, il corrispondente integrale

$\int_{t_0}^t v dt$  è un vettore, funzione di  $t$ ; ed ha manifestamente, per derivata il vettore  $v$ . Cioè, posto

$$J(t) = \int_{t_0}^t v dt,$$

risulta

$$\frac{dJ}{dt} = v.$$

Immaginando applicato tale vettore  $J(t)$  ad un punto fisso  $O$ , comunque prescelto, il secondo estremo è un punto  $P(t)$ , esso pure funzione di  $t$  ed avente per derivato il vettore  $v$  (n. 71).

75. Estendendo la definizione data al n. 73, si definisce in modo analogo l'integrale di un vettore  $v$  funzione dei punti di un campo  $C$  qualsiasi (linea, superficie o solido): cioè il vettore di componenti

$$\int_C X dC, \quad \int_C Y dC, \quad \int_C Z dC,$$

che si indica con

$$\int_C v dC.$$

Va notato che anche qui vale la formula

$$\int_C v dC = \lim \Sigma v \Delta C,$$

già osservata al n. 73 per i campi ad una dimensione.

## § 12. - Proprietà differenziali delle curve.

**76. INDICATRICE SFERICA DELLE TANGENTI.** — Dato, come al n. 72, un generico arco di curva  $l$ , fissiamo ad arbitrio un punto  $O$  dello spazio e facciamo corrispondere ad ogni punto  $P$  di  $l$  il punto

$$M = O + .t,$$

che si ottiene spiccando da  $O$  un raggio parallelo alla tangente in  $P$  (nel senso del vettore  $t$ , cioè nel senso delle  $s$  crescenti) e prendendo su questo raggio il punto  $M$  che dista 1 da  $O$ . Tutti questi punti  $M$  appartengono per costruzione ad una sfera di raggio 1 col centro in  $O$ : complessivamente essi costituiscono una linea (o arco di linea)  $\lambda$  della sfera, detta *indicatrice sferica delle tangenti* della linea  $l$  che si considera.

Se  $l$  contiene qualche tratto rettilineo, lungo ciascuno di essi  $t$  ha sempre la stessa direzione, e quindi tutti i punti  $M$ , corrispondenti ai punti  $P$  di un tal tratto, coincidono; cioè l'indicatrice di un segmento rettilineo degenera in un sol punto. Quando  $l$  è un'effettiva curva,  $t$  varia con continuità, ed  $M$  descrive un'effettiva curva sferica  $\lambda$ . Se  $l$  è piana, tale è anche  $\lambda$ , e il suo piano risulta parallelo a quello di  $l$ ; giacchè tutte le tangenti ad  $l$  appartengono, nel caso supposto, al piano della curva, e i vettori  $t$  spiccati da  $O$  si trovano tutti in un medesimo piano parallelo al primo.

Fisseremo la nostra attenzione sopra un tratto di  $l$  che sia una curva effettiva, su cui cioè il vettore  $t$  non sia costante; e lo supporremo funzione dell'arco  $s$ , finita, continua e derivabile quante volte occorre.

**77. Angolo di contingenza** relativo ad un arco  $PP_1$  d'una generica curva  $l$  si chiama l'angolo formato dalle tangenti in  $P, P_1$  (supposte orientate in versi concordi ad un medesimo verso della curva), cioè l'angolo formato dai corrispondenti vettori  $t, t_1$ . Quest'angolo è messo bene in evidenza dalla indicatrice sferica.

Se infatti sono  $M, M_1$  le immagini di  $P, P_1$  (estremi dei vettori  $t, t_1$ , spiccati da  $O$ ) l'arco  $\chi$  di circolo massimo che, sulla sfera rappresentativa, congiunge i punti  $M$  e  $M_1$ , misura manifestamente (in radianti) il detto angolo di contingenza. Esso caratterizza globalmente la deviazione dall'andamento rettilineo, che la curva  $l$  presenta nel tratto  $PP_1$ . La deviazione unitaria, vale a dire riportata all'unità di lunghezza dell'arco  $PP_1 = |\Delta s|$  ossia il rapporto

$$(32) \quad \frac{\chi}{|\Delta s|},$$

si chiama *curvatura media* dell'arco.

La sua inversa  $|\Delta s|/\chi$  si chiama invece *raggio medio di curvatura*. Esso è manifestamente il raggio che spetterebbe ad un arco di circonferenza di lunghezza  $|\Delta s|$ , il quale avesse  $\chi$  per angolo di contingenza, e quindi anche per angolo al centro. La circonferenza si presenta così come la curva tipo, atta a rendere espressiva la definizione di raggio di curvatura.

Il limite della curvatura media (32) per  $P_1$  convergente a  $P$ , cioè per  $\Delta s \rightarrow 0$ , dicesi *curvatura* o *flessione* della curva  $l$  in  $P$ ; ed è facile riconoscere che (attesa la supposta derivabilità di  $t$ ) questo limite esiste sempre ed ha una espressione assai semplice. Basta osservare che, essendo per costruzione

$$M = O + t, \quad M_1 = O + t_1,$$

la differenza

$$\Delta t = t_1 - t$$

è rappresentata dal vettore  $M_1 - M$ , talchè la corda  $MM_1$  si identifica colla lunghezza  $|\Delta t|$  del vettore  $\Delta t$ .

D'altra parte il limite del rapporto fra l'arco di circolo massimo  $\chi$  e la relativa corda  $MM_1$  è l'unità; onde scrivendo  $\chi/|\Delta s|$  sotto la forma

$$\frac{|\Delta t|}{|\Delta s|} \cdot \frac{\chi}{|\Delta t|},$$

si vede immediatamente che il limite cercato coincide colla lunghezza del vettore  $dt/ds$ . Avremo dunque, denotando con  $c$  la curvatura della  $l$  in  $P$ ,

$$(33) \quad c = \left| \frac{dt}{ds} \right|,$$

equazione equivalente (poichè  $c$  come limite di quantità tutte positive è per la sua definizione  $> 0$ ) a

$$(33') \quad c^2 = \frac{dt}{ds} \times \frac{dt}{ds}.$$

Abbiamo già supposto (n. 76) che si tratti non di una retta, ma di una effettiva curva, ossia che  $t$  non sia costante. È quindi da escludere che, per la  $l$  che si considera, sia dovunque  $dt/ds = 0$ . Possiamo pertanto riferirci a un punto  $P$ , e quindi (attesa la continuità del vettore  $dt/ds$ ) ad un tratto circostante, in cui il vettore  $dt/ds$  non si annulla. Con tale intesa si ha sicuramente  $c > 0$ , ed è quindi certo finito il raggio di curvatura in  $P$ :

$$(34) \quad r = \frac{1}{c}.$$

Inoltre è ben determinata la direzione di  $dt/ds$ , necessariamente (n. 65) perpendicolare a  $t$ , cioè normale alla curva  $l$  in  $P$ ; la retta per  $P$  che ha codesta direzione ed è orientata nello stesso verso di  $dt/ds$  si chiama *normale principale in  $P$* . Se si tratta di una curva piana, la normale principale è essa pure contenuta nel piano della curva. Infatti  $t$  si mantiene in tal caso sempre parallelo al piano della curva, e allora (n. 62) lo stesso segue per  $dt/ds$ .

In generale designeremo con  $n$  il versore di  $dt/ds$ , cioè il vettore unitario che ha la direzione e il verso della normale principale. Dacchè la lunghezza di  $dt/ds$  è  $c$ , avremo

$$(35) \quad \frac{dt}{ds} = cn,$$

ovvero (mettendo, come si suole, in evidenza il raggio di curvatura)

$$(35') \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{r} n.$$

Giova rilevare che, se si inverte sopra la curva  $l$  il senso positivo degli archi, con che  $ds$  diviene  $-ds$ , cambia naturalmente di senso il vettore  $t = dP/ds$ , ma  $n$  rimane inalterato: infatti, esso si comporta come  $dt/ds$  e questo non cambia, dacchè mutano segno sia  $t$  che  $ds$ .

**78. Piano osculatore** dicesi il piano  $\sigma$  condotto per la tangente parallelamente ad  $n$ .

Per una curva piana esso coincide (n. prec.) col piano della curva, ma per una curva sghemba varia in generale da punto a punto.

Nell'intorno del punto  $P$  cui si riferisce, gode di una proprietà di intimo ravvicinamento alla curva, donde appunto deriva l'appellativo di osculatore. La proprietà si enuncia come segue:

*Fra tutti i piani  $\pi$  passanti per  $P$ , il piano osculatore  $\sigma$  è quello che meno si scosta dalla curva  $l$  nelle vicinanze di  $P$ .*

Per dimostrarlo, consideriamo un generico punto  $P_1$  prossimo a  $P$ , e cominciamo col valutarne la distanza da un qualsiasi piano  $\pi$  passante per  $P$ . A tale scopo indichiamo con  $Q_1$  la proiezione di  $P_1$  su  $\pi$  e notiamo che il segmento  $P_1Q_1$ , si può considerare come la proiezione della corda  $PP_1$  sulla normale al piano  $\pi$ , cosicchè, detto  $\mathbf{v}$  il vettore unitario secondo tale normale (in un verso scelto a piacere) si avrà

$$P_1Q_1 = |(P_1 - P) \times \mathbf{v}|.$$

Ciò posto, in quanto  $P_1$  è prossimo a  $P$ , la differenza  $\Delta s = s_1 - s$  delle ascisse curvilinee  $s_1, s$  di  $P_1, P$ , si può considerare come infinitesima, e dalla (30') del n. 71, ponendovi

$$t = s, \quad t_1 = s_1, \quad s_1 - s = \Delta s, \quad \dot{P} = \frac{dP}{ds} = \mathbf{t}, \quad \dot{P}_1 = \frac{dP_1}{ds} = \frac{1}{r} \mathbf{n},$$

otteniamo

$$(36) \quad P_1 - P = \Delta s \mathbf{t} + \frac{1}{2r} \Delta s^2 (\mathbf{n} + \epsilon),$$

e quindi (a meno del segno), per la distanza  $P_1Q_1$ ,

$$\Delta s (\mathbf{t} \times \mathbf{v}) + \frac{1}{2r} \Delta s^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \Delta s^2 (\epsilon \times \mathbf{v}).$$

Essa consta come si vede di tre termini: il primo è infinitesimo di prim'ordine (rispetto a  $\Delta s$ ), a meno che non si annulli il prodotto scalare  $\mathbf{t} \times \mathbf{v}$ ; il secondo termine è infinitesimo di secondo ordine, a meno che non si annulli  $\mathbf{n} \times \mathbf{v}$ ; infine il terzo termine è, in ogni caso, infinitesimo d'ordine superiore al secondo, perchè vi compare, oltre a  $\Delta s^2$ , anche il vettore  $\epsilon$  il quale (n. 71) converge a zero con  $\Delta s$ . Affinchè la distanza  $P_1Q_1$  riesca, per tutti i punti  $P_1$  di  $l$  prossimi a  $P$ , quanto più piccola è possibile, bisognerà evidentemente cercare di annullare gli addendi, per così dire preponderanti, del primo e del secondo ordine. Perciò è necessario e basta che si annullino i due prodotti scalari  $\mathbf{t} \times \mathbf{v}$ , ed  $\mathbf{n} \times \mathbf{v}$ , ossia che la direzione di  $\mathbf{v}$  (normale al piano  $\pi$ ) sia perpendicolare ad un tempo a  $\mathbf{t}$  e a  $\mathbf{n}$ ; cioè, infine, che  $\pi$  coincida col piano osculatore  $\sigma$ .

79. Si vede facilmente che il piano osculatore gode di altre proprietà, ciascuna delle quali potrebbe servire a definirlo. Così per es., se si considera il piano che contiene, oltre alla tangente in  $P$ , la direzione della tangente in un altro punto  $P_1$  prossimo a  $P$ , e poi si fa avvicinare indefinitamente  $P_1$  a  $P$ , il piano considerato tende a  $\sigma$ . Basta pensare che, detto  $\mathbf{t}_1$  il vettore tangente unitario in  $P_1$ , il piano generico da noi considerato è parallelo ai vettori  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{t}_1$ ,

quindi anche a  $t$  e a  $\Delta t = t_1 - t$ , o ancora a  $t$  e a  $\Delta t/\Delta s$ . Al limite, esso sarà parallelo a  $t$  e a  $dt/ds$  e quindi coinciderà necessariamente col piano osculatore in  $P$ .

In modo analogo si riconosce che tale piano è altresì il limite dei piani proiettanti dalla tangente in  $P$  un altro punto  $P_1$  della curva, convergente a  $P$ , ed anche dei piani determinati da tre punti quali si vogliano  $P_1, P_2, P_3$ , quando questi convergono tutti a  $P$ .

Giova aggiungere che, se si considera la circonferenza, che, avendo comune con la curva la tangente in  $P$ , passa per un altro punto  $P_1$  di essa, questa circonferenza, al convergere di  $P_1$  a  $P$ , tende al cosiddetto *circolo osculatore* alla curva in  $P$ ; e questo stesso circolo si ottiene come configurazione limite della circonferenza passante per tre punti  $P_1, P_2, P_3$  della curva quando questi punti convergono, tutti e tre lungo la curva, a  $P$ . Come è ben noto e come, del resto, appare dalle precedenti considerazioni intuitive, il circolo osculatore giace sul piano osculatore; il suo raggio coincide col raggio di curvatura  $r = 1/c$  (n. 77).

**80. TRIEDRO PRINCIPALE.** — La perpendicolare al piano osculatore, orientata in guisa da costituire colle direzioni positive di  $t$  e di  $n$  un triedro (trirettangolo) destro, dicesi *binormale* della curva considerata nel punto  $P$ . Designato con  $b$  il relativo vettore unitario, il triedro  $P(t, n, b)$ , cioè il triedro (trirettangolo destro) costituito dai tre versori  $t, n, b$ , applicati in  $P$ , dicesi *triedro principale* della curva nel punto  $P$ ; e dalla stessa definizione di prodotto vettoriale segue (n. 22)

$$b = t \wedge n, \quad t = n \wedge b, \quad n = b \wedge t.$$

Delle tre facce del triedro principale, una è il piano osculatore  $P(t, n)$ ; un'altra è la  $P(n, b)$  costituita manifestamente dal *piano normale* alla curva in  $P$ ; la terza  $P(b, t)$ , cioè il piano determinato dalla tangente e dalla binormale, dicesi *piano rettificante*, perchè, come è agevole verificare, esso, fra tutti i piani passanti per  $P$ , è quello su cui la proiezione ortogonale della curva, nella immediata prossimità di  $P$ , si scosta meno da una retta.

## CAPITOLO II.

### CINEMATICA DEL PUNTO

#### § 1. — Considerazioni preliminari.

1. La Meccanica razionale è la scienza dei fenomeni di *moto*.

Ogni fenomeno di moto si svolge nello *spazio* e nel *tempo*; onde la Meccanica presuppone, quale sua necessaria premessa, la Geometria; e alle idee primitive di questa aggiunge, come suo primo concetto fondamentale, la nozione di *tempo*.

Così, in un suo primo stadio di indagini, la Meccanica analizza e discute in qual modo, durante il moto, varino in *rapporto al tempo* i caratteri geometrici delle figure o sistemi di punti, concepiti come rigidi oppure come deformabili, secondo le diverse possibili ipotesi suggerite dalla osservazione dei corpi naturali. La parte della Meccanica che si occupa di questo ordine di questioni dicesi *Cinematica*.

Ma in questo studio, che può dirsi puramente descrittivo, si prescinde dalla natura materiale dei corpi mobili e da tutte quelle manifestazioni fisiche, che nella realtà precedono o accompagnano il moto, e a cui la nostra intuizione sperimentale attribuisce l'ufficio di cause determinatrici o modificatrici di esso (p. es. sforzi muscolari, pesi, attriti, ecc.). Del moto in relazione alle circostanze testè accennate si occupa la Meccanica propriamente detta o *Dinamica*, in cui rientra, come teoria più particolare, la *Statica*, la quale indaga le condizioni, in cui dati sistemi materiali si mantengono in *quiete*.

Si può avvertire fin d'ora che, come la Cinematica è caratterizzata, in confronto della Geometria, dalla aggiunta della nozione di tempo ai concetti fondamentali geometrici, così la *Dinamica* si fonda e si sviluppa, oltre che sui concetti cinematici, sulle idee primitive di *forza* e di *massa*.

La prima parte del presente volume (Cap. II-VI) sarà dedicata alla Cinematica; e, tenuto conto della complessità del problema generale e in accordo col naturale processo di analisi matematica di ogni ordine di questioni concrete, si comincerà dallo studio del



caso più semplice possibile, cioè dallo studio del moto di un unico punto.

Notiamo che la considerazione di questo caso astratto particolare non solo costituisce, dal punto di vista teorico, il primo passo per lo studio generale della *Cinematica*, ma trova per se stessa applicazione in molti problemi concreti, potendosi spesso ritenere sufficientemente individuata la posizione di un corpo mediante quella di un solo suo punto. Così, ad es., in molte questioni astronomiche i corpi celesti si possono assimilare a punti mobili; in Balistica basta molto spesso conoscere la traiettoria di un solo punto del proietto; la posizione di una nave in alto mare si fissa per mezzo delle coordinate geografiche di un suo punto qualsiasi, e via dicendo. In ciascuno di questi casi le distanze fra i vari punti del corpo mobile considerato sono praticamente trascurabili rispetto alle dimensioni del campo, in cui si svolge il fenomeno di moto.

2. Qui subito convien fissare chiaramente una osservazione generale, altrettanto ovvia quanto importante.

La nozione di moto, al pari di quella di quiete, è di natura sua, *relativa*; cioè, più precisamente, l'asserire che un dato corpo  $C$  è in moto o in quiete ha senso preciso solo in quanto il corpo  $C$  si intenda riferito ad un altro determinato corpo  $C'$  e si constati che la posizione di  $C$  rispetto a  $C'$  va variando nel tempo o, rispettivamente, si conserva inalterata.

Perciò in ogni considerazione cinematica (o, più in generale, meccanica) è necessario stabilire quale sia l'ente di riferimento; e se spesso si parla di moto o di quiete senz'altra specificazione, ciò è legittimo unicamente in quei casi, in cui si può ritenere inutile l'indicare l'ente di riferimento, tanto esso è manifesto. Così, p. es., se si parla di un grave cadente o del moto di una vettura o di una nave, si intende tacitamente di riferirsi alla Terra; se si tratta delle bielle di una locomotiva, il loro moto si sottintende riferito al telaio di essa, e così via.

Nella rappresentazione analitica dei fenomeni di moto si assume di solito, come ente di riferimento, una terna di assi cartesiani.

3. Già dicemmo (n. 1) che in *Cinematica* il tempo si assume come concetto primitivo, sicchè potremo qui limitarci ad illustrarne, con qualche osservazione, la genesi e la misura.

Per maggiore chiarezza conviene fissare dapprima l'attenzione su di un ben determinato osservatore  $O$ , supposto in quiete rispetto al riferimento adottato. Alla successione delle sue sensazioni un tale osservatore coordinerà una successione di istanti e quindi,

passando dal discreto al continuo, una variabile indipendente  $t$  (*tempo individuale*); e, se in origine il coordinamento fra gli stati fisiopsicologici di  $O$  e i valori di codesta variabile  $t$  sarà verosimilmente avvenuto traverso fenomeni ritmici eminentemente individuali e grossolani (battito del polso, avvicinarsi di giorni o di stagioni, ecc.), l'impiego successivo di criteri impersonali, quali possono essere forniti da dispositivi del tipo delle clessidre o da pendoli o, comunque, da ben determinate vibrazioni spontanee od opportunamente disciplinate, ecc., consentirà una coordinazione più raffinata, quale si può leggere sopra un buon orologio.

Tutto ciò vale per un particolare osservatore  $O$ . Ma, accanto ad esso, consideriamone altri,  $O'$ ,  $O''$ , ..., pur essi in quiete rispetto al prefissato riferimento, e quindi anche fra loro. Ciascuno di questi osservatori, coi criteri suaccennati, può fabbricarsi il proprio tempo, dando così luogo ad altrettante variabili, a priori indipendenti,  $t'$ ,  $t''$ , ...; e si è tratti ad ammettere (premessa indispensabile di ogni teoria scientifica) che la grande maggioranza degli osservatori, posti nelle stesse condizioni, si comporti nello stesso modo. D'altra parte si può supporre che, in prossimità di due quali si vogliano di codesti osservatori, per es. di  $O$  ed  $O'$ , lo spazio ambiente sia omogeneo, immaginando che, occorrendo, siano state eliminate, per quanto è possibile, le influenze locali, quali potrebbero provenire dalla posizione geografica, dalle condizioni di temperatura, di umidità, ecc. Si possono così avere, almeno idealmente, fenomeni locali, per esempio vibratorii, identici in prossimità dei due osservatori; e allora dovranno necessariamente accordarsi gli apprezzamenti di durata, rispettivamente conseguiti da  $O$  e da  $O'$ , per fenomeni omologhi. In linguaggio matematico ciò equivale a dire che si ritiene possibile una coordinazione dei due tempi individuali  $t$  e  $t'$ , tale che ad ogni intervallo  $\Delta t$  della prima variabile faccia riscontro un eguale intervallo  $\Delta t'$  della seconda. In particolare, se si immagina che l'intervallo  $\Delta t'$  abbia inizio all'origine dei tempi per l'osservatore  $O'$ , il  $\Delta t'$  s'identifica con  $t'$  e la suaccennata identità dà

$$\Delta t' = \Delta t \quad \text{ossia} \quad t' = t - t_0,$$

essendo a priori arbitrario l'istante  $t_0$ , in cui s'inizia per l'osservatore  $O$  il fenomeno considerato. Di qui risulta che basta che l'osservatore  $O$  regoli, una volta per tutte, il suo orologio su quello di  $O'$  (cambiando  $t$  in  $t - t_0$ ), perchè risulti acquisita la possibilità della costruzione di un tempo unico per  $O$  ed  $O'$ , e quindi anche per tutti gli altri osservatori in quiete rispetto al sistema di riferimento adottato.

4. POSTULATO DEL TEMPO ASSOLUTO. ACCENNO ALLA RELATIVITÀ. — Nella precedente definizione di un tempo unico  $t$ , valido per quanti si vogliono osservatori in quiete l'uno rispetto all'altro, è essenziale, come si è visto, la presunzione della identità delle circostanze locali. Ora l'evidenza di una tale identità viene a mancare, quando un osservatore sia in moto rispetto ad un altro. Nella impostazione abituale della Cinematica si ammette che, nell'apprezzamento del tempo, il moto sia inessenziale, e, quindi, che un'unica variabile  $t$  possa fungere da tempo per tutti i possibili osservatori, siano essi in quiete od anche in moto gli uni rispetto agli altri. Si viene così a postulare l'esistenza di un *tempo assoluto*, cioè indipendente non solo dalla posizione dell'osservatore, bensì anche dalle sue condizioni di quiete o di moto, rispetto al riferimento adottato; e noi nel seguito ci atterremo sistematicamente a questo postulato.

Giova tuttavia rilevare che proprio sul tempo e sul modo di collegarne le valutazioni da parte di differenti osservatori si ha un primo e fondamentale divario fra l'impostazione classica ora accennata e la *teoria della relatività*, dovuta all'EINSTEIN, che ha possentemente rinnovato Meccanica e Fisica, pur portando nel maggior numero dei casi (e in particolare in tutti i fenomeni che interessano la Tecnica) divari quantitativi assolutamente trascurabili rispetto alle leggi già anteriormente acquisite.

La teoria della relatività non postula, come lo schema classico, una misura universale del tempo, attribuendo alle determinazioni della variabile  $t$  un significato (trascendente, o, se si vuole, convenzionale) che sia lo stesso per qualsivoglia osservatore, ma indaga più concretamente se e fino a quale punto ciò sia possibile, immaginando che più osservatori  $O, O', \dots$  cerchino di accordare le loro misure individuali di tempo  $t, t', \dots$  mediante scambio di segnali ottici.

In base a questo elemento fisico la teoria della relatività si trova condotta a sostituire la concezione astratta di un tempo assoluto con quella di tempi  $t, t', t'', \dots$  dipendenti anche dal moto dei rispettivi osservatori  $O, O', O'', \dots$  (1).

---

(1) Lo studente, desideroso di qualche ragguaglio sopra un argomento di così alto interesse speculativo, lo troverà esposto in T. LEVI-CIVITA, *Nuova impostazione elementare della Relatività*, «Atti del 1° Congresso dell'Unione Matematica Italiana», Pavia, Rossetti, 1937.

## § 2. — Generalità sul moto di un punto.

5. Consideriamo un punto  $P$  in moto rispetto ad una certa terna di assi cartesiani ortogonali  $Oxyz$ , che, secondo la convenzione già fissata al Cap. prec., supporremo sempre *destra* (I, n. 8). Ad ogni istante  $t$  dell'intervallo di tempo da  $t_0$  a  $t_1$ , in cui è definito il moto, il punto  $P$  occupa, rispetto alla terna  $Oxyz$ , una determinata posizione, talchè, in codesto intervallo,  $P$  risulta definito come un punto variabile in funzione del tempo:

$$(1) \quad P = P(t).$$

Questa unica equazione geometrica, ove con  $x, y, z$  si designino le coordinate della posizione occupata da  $P$  nell'istante  $t$ , equivale a tre equazioni scalari

$$(2) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

dove al secondo membro compaiono certe tre funzioni del tempo, definite nell'intervallo da  $t_0$  a  $t_1$ . In accordo con quei caratteri di determinatezza e di continuità che generalmente attribuiamo ai fenomeni di moto, noi supporremo che codeste tre funzioni siano univalenti, finite, continue e derivabili (fino al second'ordine almeno) in tutto l'intervallo da  $t_0$  a  $t_1$  (<sup>1</sup>).

La (1) o, indifferentemente, le sue componenti (2) diconsi *equazioni (finite) del moto del punto  $P$* .

6. Il luogo delle posizioni occupate da  $P$  durante il moto è un arco di curva che dicesi *traiettoria* del punto mobile (nel dato intervallo di tempo) e che ammette le (2) come *equazioni parametriche*. Eliminando  $t$  fra le (2) si ottiene la rappresentazione della traiettoria mediante due equazioni in  $x, y, z$ .

Se la traiettoria è un arco di curva piana o un segmento di retta, il moto del punto dicesi rispettivamente *piano* o *rettilineo*.

Mentre un punto  $P$  si muove nello spazio secondo le equazioni (2), le sue proiezioni ortogonali  $P_x, P_y, P_z$  sui tre assi si muovono ciascuna sul rispettivo asse, e le (2) danno appunto, rispettivamente, le equazioni di codesti tre moti rettilinei. Viceversa, dati ad arbitrio sugli assi  $x, y, z$ , in un medesimo intervallo di tempo, i moti rettilinei di tre punti  $P_x, P_y, P_z$ , resta defi-

(<sup>1</sup>) Soltanto in Dinamica, nella teoria degli impulsi (Parte II, Cap. VII), si è condotti ad una rappresentazione schematica di fenomeni di moto, che fa intervenire casi di discontinuità per le derivate prime.

nito nello spazio un moto del punto  $P$ , che istante per istante ammette  $P_x, P_y, P_z$  come proiezioni sugli assi.

Il moto di  $P$  dicesi *composto* dei moti rettilinei di  $P_x, P_y, P_z$  (*moti componenti*); e poichè i tre assi sono in sostanza tre rette, a due a due ortogonali, prese ad arbitrio per un punto qualsiasi dello spazio, si vede di qui come il moto di un punto nello spazio si possa *decomporre* in tre moti rettilinei secondo tre rette a due a due ortogonali, quali si vogliono.

Analogamente, mentre  $P$  si muove nello spazio, la sua proiezione ortogonale  $P_1$  sul piano  $z = 0$  risulta animata di un moto piano le cui equazioni sono le due prime (2), cioè

$$x = x(t), \quad y = y(t);$$

e il moto di  $P$  è univocamente determinato dal moto di  $P_1$  sul piano  $z = 0$  e dal simultaneo moto di  $P_z$  sull'asse  $z$ , giacchè, istante per istante, la posizione di  $P$  risulta individuata come quella che ha sul piano  $z = 0$  e sull'asse  $z$  le proiezioni  $P_1$  e  $P_z$ . Il moto di  $P$  dicesi ancora *composto* dei due moti indicati di  $P_1$  e  $P_z$ ; e poichè il piano  $z = 0$  e l'asse delle  $z$  sono in sostanza un piano e una retta, fra loro ortogonali, arbitrari, si vede come il moto di un punto nello spazio si possa *decomporre* in un moto rettilineo e in un moto piano secondo una retta e un piano fra loro ortogonali quali si vogliono.

7. ASPETTO INTRINSECO DEL MOTO DI UN PUNTO. — Per discutere l'andamento del moto di un punto  $P$ , spesso conviene fissare l'attenzione sul suo aspetto intrinseco, cioè considerare conosciuta la traiettoria, sia direttamente, sia analiticamente per il tramite delle equazioni parametriche (2); e allora per individuare il moto di  $P$ , basta esprimere in funzione del tempo un parametro, che sia atto a fissare la posizione del punto sulla sua traiettoria. In generale, come parametro, si adotta l'ascissa curvilinea  $s$  di  $P$ , cioè la lunghezza dell'arco  $P_0P$ , misurata a partire da una posizione  $P_0$  prefissata ad arbitrio (*origine degli spazi*), positivamente in un verso della traiettoria, negativamente nell'altro; e il moto di  $P$  (su traiettoria prestabilita o comunque conosciuta) risulta definito da un'unica equazione

$$s = s(t),$$

che si suole chiamare *equazione oraria* del moto. La curva, da cui essa è rappresentata, su di un piano cartesiano in cui si assumano come ascisse i tempi  $t$ , come ordinate gli spazi  $s$ , dicesi *diagramma orario*.

## § 3. - Velocità.

8. MOTO UNIFORME SU TRAIETTORIA QUALSIASI. VELOCITÀ. — In primo luogo, riferendoci al tipo dei moti più semplici che sogliono cadere sotto la nostra attenzione (moto apparente del Sole, treno in corsa, moto delle lancette dell'orologio, ecc.) supponiamo che lo spazio  $s$ , percorso da  $P$  a partire da una sua posizione  $P(t_0)$ , presa come origine degli spazi, vari proporzionalmente al tempo  $t - t_0$ , impiegato da  $P$  a percorrerlo; cioè sia

$$\frac{s}{t - t_0} = \text{cost.}$$

Se indichiamo con  $V$  questa costante, l'equazione oraria assume la forma

$$(3) \quad s = V(t - t_0);$$

cioè lo spazio  $s$  è una *funzione lineare del tempo*.

Viceversa ogni equazione oraria che sia lineare nel tempo  $t$  si può mettere manifestamente sotto la forma (3).

Ogni moto del tipo così caratterizzato, cioè avente l'equazione oraria lineare nel tempo, si dice *uniforme*.

Riferendoci alla (3), fissiamo due istanti quali si vogliano  $t$  e  $t + \Delta t$ .

Lo spazio  $\Delta s$  percorso da  $P$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  così definito sarà dato per la (3) da

$$(4) \quad \Delta s = V(t + \Delta t - t_0) - V(t - t_0) = V\Delta t,$$

onde risulta

$$(5) \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = V;$$

cioè in qualsiasi intervallo  $\Delta t$ , preso a partire da un istante quale si voglia, lo spazio percorso da  $P$  sta all'intervallo stesso nel rapporto fisso  $V$ .

In particolare, per  $\Delta t = 1$ , vediamo che  $V$  è la misura del cammino percorso da  $P$  nella *unità di tempo*. Questo numero  $V$  dicesi *velocità del moto uniforme considerato*.

La *velocità* è dunque una grandezza fisica (o più precisamente cinematica) di nuovo genere, definita come rapporto di una *lunghezza* ad un *tempo*; se l'unità scelta per le lunghezze è il metro, quella dei tempi il secondo, possiamo assumere come unità di velocità il *metro per secondo*, cioè la velocità di un punto che, movendosi di moto uniforme, fa ad ogni secondo, sulla sua traiettoria, 1 m. di cammino.

Non sarà inutile osservare che la definizione di velocità or ora data pel moto uniforme si accorda perfettamente col significato di misura della varia rapidità del moto che anche nel linguaggio comune ha una tale parola: se invero due punti  $P_1, P_2$  si muovono uniformemente con le velocità positive  $V_1, V_2$ , essi, in un medesimo intervallo di tempo  $\Delta t$ , percorrono per la (5) gli spazi

$$\Delta s_1 = V_1 \Delta t, \quad \Delta s_2 = V_2 \Delta t,$$

o si avrà

$$\Delta s_1 > \Delta s_2 \quad \text{o} \quad \Delta s_1 = \Delta s_2 \quad \text{o} \quad \Delta s_1 < \Delta s_2,$$

secondo che è

$$V_1 > V_2 \quad \text{o} \quad V_1 = V_2 \quad \text{o} \quad V_1 < V_2.$$

9. Supponiamo ora più generalmente che  $V$  possa anche essere negativo. Dalla

$$\Delta s = V \Delta t,$$

supposto  $\Delta t > 0$  (cioè considerato l'intervallo  $\Delta t$  nel suo ordine naturale di successione dei tempi), risulta che  $\Delta s$  ha lo stesso segno di  $V$ . Ciò significa che secondo che è  $V > 0$  o  $< 0$ , il punto si muove nel senso scelto come positivo per le ascisse curvilinee  $s$  sulla traiettoria o nel senso contrario. Corrispondentemente il moto dicesi *progressivo* o *retrogrado*. Così la velocità  $V$ , presa col suo segno, dà non soltanto la misura della rapidità del moto, ma anche il senso di questo.

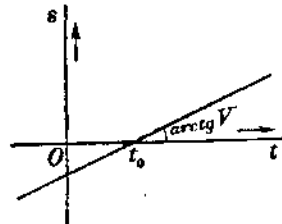
Giova tuttavia avvertire che, per lo più, parlando di velocità di un moto uniforme, si intende riferirsi alla velocità presa in valore assoluto, la quale, quando possa insorgere equivoco, si chiama *velocità intensiva*.

10. Il diagramma orario di un moto uniforme di equazione

$$s = V(t - t_0)$$

è la retta che interseca l'asse dei tempi per  $t = t_0$  (ascissa all'origine) ed ha per coefficiente angolare la velocità  $V$ .

I diagrammi (rettilinei) dei moti uniformi, tracciati su carta millimetrica, forniscono un comodo mezzo per risolvere graficamente i problemi di incrocio, di raggiungimento, ecc., relativi a più punti mobili uniformemente su di una stessa traiettoria (veicoli su di una stessa strada, treni



sullo stesso binario o su binari paralleli, ecc.). Essi trovano, in particolare, un'utile applicazione negli *orari grafici* delle Ferrovie.

11. VELOCITÀ SCALARE IN UN MOTO QUALSIASI. — Passiamo al caso, in cui, su di una traiettoria prestabilita o comunque conosciuta, sia definito un *moto vario* qualsivoglia, cioè un moto avente un'equazione oraria

$$s = s(t),$$

dove la  $s(t)$  sia una funzione non più lineare, ma di qualsiasi altra specie; e supponiamo esplicitamente che questa funzione sia non solo continua (n. 5), ma anche dotata di derivata  $\dot{s}(t)$  in ogni istante  $t$  dell'intervallo di tempo che si considera <sup>(1)</sup>.

Fissato l'intervallo di tempo  $\Delta t$  fra gli istanti  $t$  e  $t + \Delta t$ , e considerato lo spazio  $\Delta s$  percorso dal punto mobile  $P$  in codesto intervallo, cioè

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t),$$

il rapporto

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

(rapporto incrementale della funzione  $s(t)$  rispetto all'incremento  $\Delta t$  della variabile a partire dal valore  $t$ ) dicesi *velocità media* del punto *nell'intervallo di tempo*  $t$  a  $t + \Delta t$ .

Ora si ha per definizione

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s}(t),$$

il che equivale a

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s}(t) + \varepsilon,$$

con  $\varepsilon$  infinitesimo insieme con  $\Delta t$ ; e di qui risulta, per ogni  $\Delta t$  (e in particolare per  $\Delta t$  infinitesimo),

$$(6) \quad \Delta s = \dot{s}(t)\Delta t + \varepsilon\Delta t.$$

Se allora fissiamo l'attenzione sul moto di  $P$  nell'intervallo di tempo  $t$  a  $t + \Delta t$  e lo confrontiamo con un ipotetico moto uniforme, durante quello stesso intervallo di tempo, di velocità (costante)  $\dot{s}(t)$ , abbiamo per questo secondo moto, in forza della (4) del n. 8,

$$\Delta s = \dot{s}(t)\Delta t,$$

(1) Nel seguito con punti sovrapposti al simbolo di uno scalare o di un vettore o di un punto variabile denoteremo *esclusivamente* le derivate rispetto al tempo.



mentre per il moto effettivo di  $P$  sussiste la (6), sicchè il divario fra gli spazi descritti dal punto nei due moti è dato da  $\varepsilon \Delta t$ , che è infinitesimo di ordine superiore rispetto al  $\Delta t$ . Di qui appare che un qualsiasi moto vario, in un intervallo di tempo  $\Delta t$  abbastanza piccolo (perchè  $\varepsilon \Delta t$  sia trascurabile di fronte a  $\Delta t$ ), si può assimilare ad un moto uniforme, avente per velocità il valore  $\dot{s}(t)$  della derivata di  $s(t)$  nell'istante iniziale dell'intervallo di tempo considerato. Per questa ragione la  $\dot{s}(t)$  si chiama *velocità* (scalare) del punto  $P$  nell'istante  $t$ , mentre il suo valore assoluto  $|\dot{s}(t)|$  si chiama *velocità intensiva*, in quell'istante.

Per un moto uniforme, di equazione oraria (3), si ha  $\dot{s} = V$ , onde si ricade sulla velocità (costante) del moto uniforme, definita al n. 8.

12. Per la nota interpretazione geometrica della derivata, la velocità in un istante  $t$  risulta rappresentata, sul diagramma orario del moto, dal coefficiente angolare della tangente al diagramma nel punto di ascissa  $t$ . Secondo che nell'istante  $t$  la velocità  $\dot{s}(t)$  è positiva o negativa, la  $s(t)$  è, nell'intorno di  $t$ , crescente o decrescente, cioè in ogni intervallo di tempo abbastanza piccolo, che segna o preceda l'istante  $t$ , il moto è *progressivo* o *retrogrado*.

Se poi  $\dot{s}(t) = 0$ , in quell'istante si ha nel moto del punto una *posizione di arresto* (e sul diagramma orario un punto a tangente parallela all'asse dei tempi); ma non appare senz'altro il senso del moto. In tal caso si sa dal Calcolo che, per riconoscere il senso di variazione della funzione  $s(t)$ , bisogna ricorrere alle derivate successive: la prima che non si annulla fornisce la voluta indicazione.

Così, ad es. (per metterci nelle condizioni più comuni), se non si annulla la  $\ddot{s}(t)$ , si può asserire che la  $s(t)$  ha un massimo o un minimo secondo che è  $\ddot{s}(t) < 0$  o  $> 0$ ; il che, dal punto di vista cinematico, vuol dire che nell'istante  $t$  si ha un'inversione del senso del moto; e precisamente se  $\ddot{s}(t) < 0$ , il moto è progressivo subito prima dell'istante  $t$ , retrogrado subito dopo; mentre avviene il contrario per  $\ddot{s}(t) > 0$ .

Aggiungiamo infine che un moto si dice *accelerato* o *ritardato* in un dato istante  $t$  (o in un intervallo di tempo da  $t$  a  $t + \Delta t$ ) secondo che nell'intorno di quell'istante (o in quell'intervallo) la velocità, presa in valore assoluto, è crescente o decrescente; in altre parole, secondo che è crescente o decrescente  $\dot{s}(t)$ <sup>2</sup>. Considerando la derivata di  $\dot{s}(t)$ <sup>2</sup>

$$2 \dot{s} \ddot{s}$$

si conclude, che, se  $\dot{s}(t)$ ,  $\ddot{s}(t)$  sono entrambe diverse dallo zero, il

*moto è accelerato o ritardato secondo che esse hanno segno eguale o contrario.*

Il caso  $\dot{s}\ddot{s} = 0$ , che qui resta dubbio, va discusso considerando le derivate successive di  $s$ ; ma per il seguito ciò non è necessario.

**13. MOTO IN RELAZIONE ALLO SPAZIO AMBIENTE. VELOCITÀ VETTORIALE.** — Dopo avere studiato l'aspetto intrinseco del moto di un punto, conviene riprendere le generalità del n. 8, per mettere in relazione il fenomeno con lo spazio ambiente. Partiamo, a tale scopo, dall'equazione

$$(1) \quad P = P(t),$$

che definisce il moto di  $P$  rispetto a una ben determinata terna cartesiana  $Oxyz$ , in cui si può immaginare schematizzato un osservatore; e proponiamoci di studiare direttamente questo moto spaziale, introducendo la nozione di *velocità vettoriale* e collegandola a quella di velocità scalare pocanzi definita (n. 11).

Per *velocità vettoriale* del punto  $P$ , in un generico istante, s'intende il vettore

$$\mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = \dot{P},$$

che, per definizione (I, n. 68), è il limite, per  $\Delta t$  tendente a zero, del rapporto incrementale (o *velocità vettoriale media*)

$$(7) \quad \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t},$$

e che ha per componenti  $v_x, v_y, v_z$  le derivate, rispetto a  $t$ , delle coordinate  $x(t), y(t), z(t)$  del punto mobile  $P$ :

$$v_x = \dot{x}(t), \quad v_y = \dot{y}(t), \quad v_z = \dot{z}(t).$$

Se  $O$  è un punto *fisso* rispetto al riferimento adottato, per es. l'origine, si ha  $dO/dt = 0$ , onde risulta

$$\frac{d(P - O)}{dt} = \dot{P} = \mathbf{v},$$

sicchè la velocità vettoriale si può interpretare, oltre che come derivata del punto mobile  $P$ , anche come derivata del vettore (variabile)  $P - O$ .

Il vettore  $\mathbf{v} = \dot{P}(t)$ , quando il punto  $P$  si consideri come funzione di funzione del tempo, pel tramite della sua ascissa curvilinea  $s$  sulla traiettoria, si può scrivere

$$\mathbf{v} = \dot{P}(t) = \frac{dP}{ds} \dot{s}(t) = \dot{s}(t)\mathbf{t}(t),$$

dove come al n. 72 del Cap. I si è designato con  $\tau$  il vettore unitario tangente alla traiettoria nella posizione  $P(t)$ , diretto nel senso delle  $s$  crescenti. Questa espressione del vettore  $\dot{P}(t)$  mette in evidenza che esso in ogni istante ha per lunghezza il valore assoluto  $|\dot{s}(t)|$  della velocità del punto quale fu definita al n. 11; è diretto secondo la tangente alla traiettoria nella posizione  $P(t)$ ; ed infine ha il senso di  $\tau$  (cioè il senso delle  $s$  crescenti) o il contrario secondo che  $\dot{s}(t)$  è positiva o negativa, il che è quanto dire (n. 12) che  $\dot{P}(t)$  ha lo stesso senso del moto.

D'or innanzi, parlando di velocità di un punto  $P$ , intenderemo, salvo contrario avviso, la sua velocità vettoriale  $v = \dot{P}$ , mentre, come si è convenuto al n. 11, chiameremo *velocità scalare* la  $\dot{s}(t)$  e *velocità intensiva* il rispettivo valore assoluto  $|\dot{s}(t)|$ .

Notiamo infine che il vettore

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t),$$

che compare a numeratore del rapporto incrementale (7) e che è definito dalle posizioni  $P(t)$ ,  $P(t + \Delta t)$ , occupate dal punto mobile nei due istanti  $t$  e  $t + \Delta t$ , si dice *spostamento* di  $P$ , relativo all'intervallo di tempo  $\Delta t$ , a partire dall'istante  $t$ . In particolare, per  $\Delta t$  infinitesimo, lo spostamento  $\Delta P$  è dato, a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto al  $\Delta t$ , dal differenziale  $dP$  del punto mobile (I, n. 69); ed anzi, nel linguaggio corrente, si suol chiamare *spostamento elementare* del punto  $P$  questo suo differenziale  $dP$ , sicchè fra velocità e spostamento elementare sussiste ad ogni istante, per definizione, la relazione

$$dP = v dt.$$

14. CARATTERE INVARIANTE DELLA VELOCITÀ. — Per definire il moto del punto  $P$  abbiamo dovuto prefissare, come ente di riferimento, una certa terna di assi  $Oxyz$ . Se in luogo di questa si sceglie un'altra terna  $\Omega\xi\eta\zeta$ , fissa rispetto alla prima, le equazioni (cartesiane) (2) del moto di  $P$  cambiano (e precisamente subiscono la corrispondente trasformazione di coordinate); ma la velocità vettoriale non varia, nello stesso modo come non variano nè la forma geometrica della traiettoria nè la legge temporale del moto.

Ciò si può ritenere evidente, dato il carattere intrinseco, rispetto al moto, della definizione di velocità vettoriale; ma si può chiarire nei seguenti termini precisi.

Indicando con  $i, j, k$ , i versori fondamentali della terna  $Oxyz$ , e con  $x(t), y(t), z(t)$  le coordinate di  $P$  nell'istante  $t$  rispetto a codesta terna, avremo ad ogni istante (I, n. 19)

$$(8) \quad P = O + xi + yj + zk;$$

e questa equazione geometrica definirà il moto di  $P$  rispetto ad ogni possibile terna, purchè, beninteso, si riferiscano in ogni singolo caso alla terna stessa anche il punto  $O$  e i vettori  $i, j, k$ .

Supposto di riferire la (8) alla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$ , otterremo l'espressione della velocità vettoriale derivando ambo i membri di codesta equazione rispetto a  $t$ . Poichè rispetto alla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$ , che per ipotesi è fissa rispetto alla  $Oxyz$ , il punto  $O$  e i vettori  $i, j, k$ , sono costanti, si ottiene

$$\dot{P} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k,$$

onde risulta appunto che, anche col nuovo riferimento, la velocità vettoriale è quel vettore che rispetto alla terna  $Oxyz$  ha le componenti  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ .

In linguaggio cartesiano ciò si può esprimere dicendo che tanto vale calcoliar prima le componenti della velocità vettoriale rispetto ad  $Oxyz$  e poi eseguire la trasformazione di coordinate che fa passare ad  $\Omega\xi\eta\zeta$ , quanto eseguir prima questa trasformazione e poi calcolare le componenti della velocità vettoriale rispetto ad  $\Omega\xi\eta\zeta$ . Si può dir concisamente che le componenti della velocità sono *cogredienti* alle coordinate del punto.

Importa tener presente che tutto ciò vale sotto la essenziale condizione che la terna  $\Omega\xi\eta\zeta$  sia *fissa* rispetto alla  $Oxyz$ : ben altrimenti vanno le cose se la nuova terna è *in moto* rispetto alla primitiva, come vedremo in seguito (Cap. IV).

15. Per un moto piano la velocità, in quanto è ad ogni istante tangente alla traiettoria, giace costantemente nel piano del moto; e così per un moto rettilineo la velocità è diretta ad ogni istante secondo la retta, su cui si muove il punto.

Se, riferendoci ancora ad un punto  $P$  mobile nello spazio, consideriamo il moto

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

della proiezione ortogonale  $P_1$  di  $P$  sul piano  $z = 0$  (n. 5), la velocità di  $P_1$  è il vettore che giace in codesto piano e ha le componenti  $\dot{x}, \dot{y}$ , vale a dire è la proiezione sul piano  $z = 0$  della velocità di  $P$ .

Similmente la velocità della proiezione ortogonale  $P_z$  di  $P$  sull'asse  $z$  è la proiezione su quest'asse della velocità di  $P$ . E poichè ogni piano (fisso) si può assumere come piano  $z = 0$ , ogni retta (fissa) come asse  $z$ , concludiamo che: *Se un punto si muove nello spazio, la velocità della sua proiezione ortogonale su di un piano o su di una retta (fissi) quali si vogliano, è data dalla proiezione orto-*

gonale, su quel piano  $o$ , rispettivamente, su quella retta, della velocità del punto considerato.

In base al n. 6 possiamo ancora dire che: *Se il moto di un punto nello spazio si considera decomposto nei tre moti rettilinei secondo tre date rette, a due a due ortogonali, o nel moto rettilineo e nel moto piano secondo una data retta e un piano ortogonali dati, la velocità del punto è data ad ogni istante dalla risultante delle velocità che in quell'istante competono ai moti componenti.*

**16. MOTI DI VELOCITÀ COSTANTE.** — Abbiamo visto al n. 8 che i moti uniformi (su traiettoria qualsiasi) sono caratterizzati dalla costanza della velocità *scalare*. Consideriamo qui i moti (di gran lunga più particolari) *che hanno costante la velocità vettoriale*.

Se  $v$  è la velocità costante prefissata, possiamo scegliere la terna  $Oxyz$  di riferimento in modo che l'asse  $x$  abbia la direzione e il senso della  $v$ , onde le componenti di questa saranno  $v, 0, 0$ , ove al solito si denoti con  $v$  la lunghezza (che qui è costante) di  $v$ . Esprimendo che un punto mobile  $P$  di coordinate  $x, y, z$ , ha, ad ogni istante, la velocità  $v$  otteniamo le equazioni (differenziali)

$$\dot{x} = v, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = 0,$$

le quali, integrate, danno le equazioni del moto sotto la forma

$$(9) \quad x = vt - \text{cost.}, \quad y = \text{cost.}, \quad z = \text{cost.},$$

dove compaiono tre *costanti arbitrarie di integrazione*.

Si hanno dunque, corrispondentemente alle possibili scelte di codeste tre costanti arbitrarie,  $\infty^3$  moti aventi la data velocità (costante)  $v$ ; e ciascuno di essi, come risulta dalle (9), ha per traiettoria una retta (parallela all'asse  $x$ ) ed è uniforme; talchè concludiamo che *ogni moto a velocità vettoriale costante è rettilineo ed uniforme*.

Per individuare uno di codesti moti, ossia per determinare le tre costanti di integrazione, basta prefissare la posizione che il mobile deve occupare in un dato istante  $t_0$  (*condizione iniziale*): se  $x_0, y_0, z_0$  sono le coordinate di questa posizione iniziale di  $P$ , le equazioni del moto assumono la forma

$$x = v(t - t_0) + x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

come si rileva dalle (9), imponendo che per  $t = t_0$  debba essere  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ .

**17. MOTI DI DATA VELOCITÀ.** — Le osservazioni del n. prec. suggeriscono, più in generale, il problema di *determinare i moti di un punto, di cui sia data la velocità  $v$ , comunque variabile.*

Se  $v_x, v_y, v_z$  sono le componenti del vettore  $v$ , le coordinate  $x, y, z$  del punto mobile  $P$  debbono variare in funzione del tempo in modo da soddisfare alle equazioni differenziali

$$(10) \quad \dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{z} = v_z.$$

Per chiarire la natura analitica del problema di integrazione cui si è così condotti, bisogna precisare i dati, cioè in sostanza la velocità prefissata  $v$ . Se questa è data in funzione del tempo, cioè se si sa per dato quale debba essere istante per istante la velocità del punto, le  $v_x, v_y, v_z$  sono tre date funzioni di  $t$ , che qui supporremo continue, e quindi integrabili; talchè le (10) si integreranno con tre quadrature; e, indicando con  $t_0$  un istante dell'intervallo di tempo in cui è definita la  $v$ , si otterrà

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \int_{t_0}^t v_x(t) dt + \text{cost.}, \\ y = \int_{t_0}^t v_y(t) dt + \text{cost.}, \\ z = \int_{t_0}^t v_z(t) dt + \text{cost.} \end{array} \right.$$

Anche qui dunque, per la presenza delle tre costanti arbitrarie di integrazione, si hanno  $\infty^3$  moti, e si può individuarne uno prefissando la posizione che il punto deve assumere in un dato istante; p. es., se per  $t = t_0$  il punto deve essere in  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , le equazioni del moto sono

$$x = \int_{t_0}^t v_x(t) dt + x_0, \quad y = \int_{t_0}^t v_y(t) dt + y_0, \quad z = \int_{t_0}^t v_z(t) dt + z_0.$$

Queste equazioni si possono raccogliere nell'unica equazione vettoriale

$$(11) \quad P(t) = P_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt,$$

che si sarebbe potuta ottenere direttamente per integrazione della equazione differenziale vettoriale

$$\dot{P} = v(t),$$

equivalente alle (10).

La (11) mette in evidenza le relazioni che intercedono fra gli  $\infty^3$  moti di velocità  $v$ . Confrontiamone due, p. es. il moto generico (11) e il moto del punto che nell'istante  $t = t_0$  si trova nell'origine  $O$  delle coordinate e che qui per intenderci designeremo con  $\bar{P}$ , talchè avremo

$$\bar{P}(t) = O + \int_{t_0}^t v(t) dt.$$

Sottraendo membro a membro questa equazione dalla (11), otteniamo

$$P(t) - \bar{P}(t) = P_0 - O,$$

talchè si conclude che ad ogni istante la posizione di  $P$  è data dall'estremo del vettore equipollente al vettore costante  $P_0 - O$  ed applicato nella posizione assunta in quello stesso istante da  $\bar{P}$ . Risulta di qui che nei moti di  $P$  e  $\bar{P}$ , e quindi anche in due quali si vogliano moti (11), le traiettorie sono fra loro sovrapponibili con una traslazione e quindi eguali, e di più son percorse con la medesima legge temporale.

18. Più in generale può darsi che la velocità  $v$  sia nota in funzione non soltanto del tempo, ma anche della posizione istantanea del punto:

$$v = v(P | t).$$

In tal caso le componenti di  $v$  sono funzioni note dei quattro argomenti  $x, y, z, t$  e si è condotti a cercare le terne di funzioni  $x, y, z$  di  $t$ , che soddisfano al sistema di equazioni differenziali del 1° ordine

$$(12) \quad \dot{x} = v_x(x, y, z | t), \quad \dot{y} = v_y(x, y, z | t), \quad \dot{z} = v_z(x, y, z | t),$$

o, come si suol dire, ad *integrare* un tale sistema. Ora è noto dal Calcolo che, in generale, codesta integrazione non si può ottenere per quadrature (e tanto meno in termini finiti di funzioni elementari), bensì soltanto per sviluppi in serie. Ad ogni modo, sotto condizioni assai late per le tre funzioni di quattro argomenti  $v_x, v_y, v_z$ , si dimostra che il sistema (12) ammette infinite soluzioni, il cui insieme (*integrale generale*) dipende da tre costanti arbitrarie, che, beninteso, non hanno se non eccezionalmente carattere di costanti additive (1).

(1) È bene ricordare che per un sistema di equazioni differenziali ordinarie simultanee, in numero eguale a quello delle funzioni incognite, il quale

Esistono dunque, anche in questo caso generale,  $\infty^3$  moti diversi, aventi la data velocità  $v$ ; ed anche qui, disponendo delle tre costanti arbitrarie, si può individuare uno qualsiasi di codesti moti, prefissando, come condizione iniziale, il passaggio del punto in un dato istante per una data posizione. Ben si comprende che in questo caso varieranno in generale, dall'uno all'altro degli  $\infty^3$  moti, tanto la forma della traiettoria quanto la legge temporale.

#### § 4. — Moti piani in coordinate polari. Velocità areolare.

**19. VELOCITÀ RADIALE E TRASVERSA. VELOCITÀ ANGOLARE.** — Considerato nel piano, rispetto a una data coppia  $Oxy$  di assi cartesiani, il moto di un punto  $P$ , di equazioni

$$(13) \quad x = x(t), \quad y = y(t),$$

riferiamo questo stesso moto al sistema di coordinate polari che ha come polo l'origine  $O$ , come semiasse polare il semiasse positivo delle  $x$  e come verso positivo delle anomalie (da misurarsi in radianti) quello dall'asse orientato  $x$  verso l'asse orientato  $y$ , attraverso l'angolo retto.

Durante il moto, il raggio vettore  $\rho = OP$  e l'anomalia  $\theta = xOP$  di  $P$  saranno funzioni ben determinate del tempo e le

$$(14) \quad \rho = \rho(t), \quad \theta = \theta(t)$$

si potranno dire le *equazioni del moto* in coordinate polari.

Ma qui torna opportuna una osservazione. Si sa dalla Geometria Analitica che, per assicurare la biunivocità tra i punti del piano e le coppie di valori  $\rho, \theta$  delle coordinate polari, bisogna imporre alla variabilità di queste le limitazioni  $\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ . Ma allora, se il punto  $P$  nel suo moto piano, girando intorno al polo  $O$  in senso positivo, attraversa il semiasse  $x$  positivo, si è costretti a far saltare bruscamente l'anomalia  $\theta$  da valori, che ten-

sia risolubile rispetto alle derivate di ordine massimo (*sistema normale*), esiste, in generale, un sistema integrale dipendente da un numero di costanti arbitrarie eguale alla somma degli accennati ordini massimi. Così ad es. per un sistema differenziale della forma

$$\ddot{u} = \varphi(t, u, \dot{u}, v, \dot{v}, \ddot{v}), \quad \ddot{v} = \psi(t, u, \dot{u}, v, \dot{v}, \ddot{v})$$

l'integrale generale dipende da 5 costanti arbitrarie.



dono a  $2\pi$ , al valore 0; talchè si introduce nella funzione  $\theta(t)$  della seconda equazione (14) una discontinuità, che non risponde ad alcun carattere di discontinuità del moto, ma dipende soltanto dalla limitazione  $0 < \theta < 2\pi$ , convenzionalmente imposta alla coordinata  $\theta$ . In tali casi, al fine di togliere siffatta discontinuità, per così dire, artificiale, si abbandona la indicata limitazione per l'anomalia e si lascia che  $\theta$ , seguendo l'andamento continuo del moto, vari con continuità, traverso il valore  $2\pi$ , anche al di là di esso.

Analogamente, se il punto  $P$ , movendosi con continuità e senza variazioni brusche di velocità, passa pel polo, le suindicate limitazioni per la variabilità di  $\rho$  e  $\theta$  implicano che, mentre  $\rho$  raggiunge in  $O$ , decrescendo, il suo minimo zero per poi nuovamente crescere, l'anomalia  $\theta$ , al passaggio di  $P$  per  $O$ , salta bruscamente da un certo valore  $\theta_0$  (limite della anomalia di  $P$  quando esso si avvicina di moto continuo ad  $O$ ) al valore  $\theta_0 \pm \pi$ . Anche questa discontinuità artificiale di  $\theta(t)$  può all'occorrenza essere tolta, lasciando cadere la limitazione  $\rho > 0$  ed ammettendo che il raggio vettore possa con continuità passare, traverso lo zero, da valori positivi a valori negativi (e viceversa).

Ciò premesso, per mettere fra loro in relazione le due rappresentazioni (13) e (14) di uno stesso moto di un punto  $P$ , conviene considerare i versori  $i$  e  $j$  dei due assi orientati delle  $x$  e delle  $y$  rispettivamente, e associare al punto mobile  $P$  (supposto fuori dell'origine) il versore (radiale)  $u$  della retta  $OP$ , orientata da  $O$  verso  $P$ , e il versore (trasverso)  $\tau$  della perpendicolare alla  $OP$  in  $P$ , orientata rispetto alla  $OP$  come l'asse delle  $y$  rispetto a quello delle  $x$ . Poichè, essendo  $\theta$  l'anomalia di  $P$ , i coseni direttori di  $u$  e  $\tau$  sono  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  e, rispettivamente,  $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin \theta$ ,  $\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$ , si ha

$$(15) \quad u = i \cos \theta + j \sin \theta, \quad \tau = -i \sin \theta + j \cos \theta,$$

e quindi, tenendo conto delle  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ,

$$(16) \quad \rho u = xi + yj, \quad \rho \tau = -yi + xj.$$

Ora, derivando le (15) rispetto al tempo e ricordando che  $i$  e  $j$  sono fissi, si deduce

$$\dot{u} = -\dot{\theta} i \sin \theta + \dot{\theta} j \cos \theta = \dot{\theta} \tau, \quad \dot{\tau} = -\dot{\theta} i \cos \theta - \dot{\theta} j \sin \theta = -\dot{\theta} u,$$

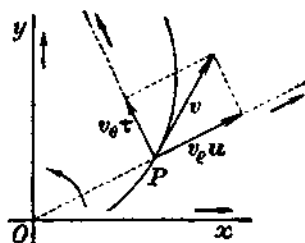
sicchè poi, partendo dalla

$$P - O = \rho u,$$

si ottiene, per derivazione rispetto a  $t$ ,

$$v = \dot{\rho} u + \rho \dot{u} = \dot{\rho} u + \rho \dot{\theta} \tau.$$

Quest'espressione della velocità  $v$  di  $P$  ne mette in luce una decomposizione in due componenti, fra loro ortogonali, che qui conviene definire direttamente. La  $\dot{\rho}$ , componente di  $v$  secondo la direzione orientata di  $u$ , si dice *velocità radiale*, e, in quanto, essendo  $\dot{\rho} = d\rho/dt$ , fornisce il rapporto fra la variazione elementare della distanza del punto mobile dal polo (fisso)  $O$  e quella corrispondente del tempo, si chiama anche *velocità di allontanamento* o di *elongazione*. Invece la  $\rho\dot{\theta}$ , componente di  $v$  secondo la direzione orientata di  $\tau$ , si dice *velocità trasversa* ed è data dal prodotto della distanza  $\rho$  di  $P$  dal polo per



$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt},$$

che si chiama *velocità angolare* (intorno ad  $O$ ), in quanto dà il rapporto della variazione elementare dell'anomalia del punto mobile a quella corrispondente del tempo.

Indicando queste due componenti di  $v$  con  $v_\rho$  e  $v_\theta$  rispettivamente, si ha dunque

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\theta = \rho\dot{\theta}.$$

Per trovare le espressioni in coordinate cartesiane di queste stesse componenti di  $v$ , o, più precisamente, dei loro prodotti per  $\rho$ , basta anzitutto ricordare che la  $v_\rho$  è la componente di  $v$  secondo la direzione orientata del versore  $u$ , i cui coseni direttori sono  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ , sicchè si ha

$$v_\rho = \dot{\rho} = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta,$$

e, quindi, moltiplicando ambo i membri per  $\rho$ ,

$$(17) \quad \rho v_\rho = \rho \dot{\rho} = x\dot{x} + y\dot{y}.$$

Similmente per la  $v_\theta$ , in quanto i coseni direttori di  $\tau$  sono  $-\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ , si trova

$$v_\theta = \rho\dot{\theta} = -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta$$

e, quindi, moltiplicando ambo i membri per  $\rho$ ,

$$(18) \quad \rho v_\theta = \rho^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}.$$

Le (17), (18) sono formule di uso corrente.

20. VELOCITÀ AREOLARE. — Mentre  $P$  si muove, il raggio vettore  $OP$  descrive un'area. Supponiamo di misurarla, a partire da una posizione iniziale  $OP_0$ , positivamente nel senso in cui crescono le anomalie, negativamente nel verso opposto; e sia  $A$  il valore che le spetta in un generico istante  $t$ , nel quale il punto occupa la posizione  $P$ . Sia  $P'$  la posizione infinitamente vicina, occupata dal punto nell'istante  $t + dt$ .

Nel tempuscolo infinitesimo dall'istante  $t$  all'istante  $t + dt$ , il punto passa dalla posizione  $P$  alla posizione  $P'$  e il raggio vettore descrive un'areola elementare  $OPP'$  che (a meno d'infinitesimi d'ordine superiore) è eguale all'area del settore circolare di raggio  $\rho$ , il cui angolo al centro ha per misura  $|d\theta|$ .

Abbiamo dunque

$$|dA| = \frac{1}{2} \rho^2 |d\theta|,$$

ed anzi, poichè, per la convenzione stabilita,  $dA$  e  $d\theta$  hanno lo stesso segno, si conclude senz'altro

$$dA = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$$

e quindi

$$A = \frac{1}{2} \rho^2 \theta.$$

Questa derivata rispetto al tempo dell'area descritta dal raggio vettore dicesi, per ovvia ragione, *velocità areolare* del punto rispetto al centro  $O$ .

Poichè dalla (18) del n. prec. risulta

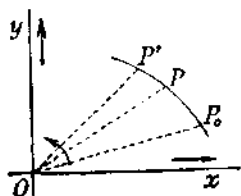
$$xy - yx = \rho^2 \dot{\theta},$$

si ottiene per la velocità areolare in coordinate cartesiane (rispetto all'origine) l'espressione

$$(19) \quad \dot{A} = \frac{1}{2} (xy - yx).$$

21. Il concetto di velocità areolare si estende anche al caso di un punto che si muova comunque nello spazio.

A tale scopo, riprendiamo dapprima il caso di un moto piano e riferiamoci alla espressione (19) della velocità areolare rispetto



all'origine  $O$ . Se in  $O$  immaginiamo condotto, perpendicolarmente al piano  $xy$ , l'asse  $z$  orientato in modo che la terna  $Oxyz$  risulti destra, il segmento orientato che su questo asse, a partire da  $O$ , ha per misura (in valore e segno) la velocità areolare (19) rappresenta un certo vettore  $V$ , che, come risulta dalla (19) stessa, è la metà del prodotto vettoriale dei due vettori di componenti

$$x, y, 0 \quad e \quad \dot{x}, \dot{y}, 0;$$

cioè di  $P - O$  e  $v$ . Abbiamo dunque

$$(20) \quad V = \frac{1}{2} (P - O) \wedge v;$$

onde si riconosce che  $V$  è la metà del momento della velocità vettoriale del punto mobile rispetto al centro (fisso)  $O$ .

A codesto vettore  $V$ , che col suo modulo dà la velocità areolare quale si è definita, in senso scalare, nel n. prec. e individua istante per istante, come destro rispetto ad esso, il senso del moto, si dà il nome di *velocità areolare vettoriale del dato punto mobile, rispetto al centro  $O$* .

Questa nuova definizione offre, rispetto a quella del n. prec., il vantaggio di attribuire alla velocità areolare un significato *intrinseco* e, perciò, indipendente dalla scelta della terna di riferimento, purchè, beninteso, anche quando si cambi l'origine delle coordinate, si tenga fisso il centro  $O$  rispetto a cui si definisce la velocità areolare.

E appunto per codesto suo carattere intrinseco, la nuova definizione si applica senz'altro anche ad un punto mobile comunque nello spazio, nel qual caso la velocità areolare rispetto ad un dato centro  $O$

$$(21) \quad \frac{1}{2} (P - O) \wedge v$$

è un vettore, funzione del tempo, che ad ogni istante  $t$  è perpendicolare al piano, generalmente variabile, che passa pel centro  $O$  e per la velocità istantanea  $v(t)$  (cioè per la tangente alla traiettoria nella posizione occupata da  $P$  in quell'istante); ha quel verso rispetto a cui il moto nell'istante considerato appare destro; ed ammette per modulo il rapporto al tempuscolo  $dt$  dell'areola descritta sul piano or ora indicato dal raggio vettore  $OP$ .

Se il moto si riferisce ad una terna avente per origine il punto  $O$ , la velocità areolare ha per componenti secondo gli assi (I, n. 23)

$$\frac{1}{2} (y\dot{z} - z\dot{y}), \quad \frac{1}{2} (z\dot{x} - x\dot{z}), \quad \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}),$$

nelle quali si riconoscono le velocità areolari, in senso scalare, delle proiezioni ortogonali del punto  $P$  rispettivamente sui piani  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$ .

Ne consegue più generalmente (in quanto qualsiasi retta per  $O$  può assumersi come asse  $Oz$ ) che la componente del vettore (21) secondo una retta qualsivoglia misura la velocità angolare, rispetto ad  $O$ , con cui si muove la proiezione ortogonale del punto mobile  $P$  sopra il piano condotto per  $O$  perpendicolarmente alla retta.

Notiamo, infine, che, come risulta dalla (21), la velocità areolare non può annullarsi se non in quegli istanti in cui si verifichi una delle seguenti circostanze (I, n. 22): o il punto  $P$  passa pel centro  $O$ ; o si annulla la velocità  $v$ ; o questa risulta diretta radialmente, cioè secondo la retta  $OP$ .

### § 5. - Accelerazione.

**22. MOTO UNIFORMEMENTE VARIO.** — Al concetto fondamentale di accelerazione si perviene valutando, per così dire, la rapidità con cui da istante ad istante varia la velocità di un punto.

Analogamente a quanto si è fatto nel caso della velocità, prendiamo le mosse dallo studio dell'aspetto intrinseco del moto supponendo prefissata la traiettoria; ed anzi consideriamo anzitutto il caso particolarmente semplice (si può dire il più semplice dopo quello del moto uniforme) in cui la velocità scalare  $\dot{s}$  (n. 11) sia funzione lineare del tempo:

$$(22) \quad \dot{s} = at + b,$$

dove  $a$  e  $b$  denotano due costanti (e, beninteso, si suppone  $a \neq 0$ , giacchè in caso contrario avremmo un moto uniforme). La costante  $b$  fornisce la velocità del punto nell'istante  $t = 0$ ; e quanto alla  $a$ , si riconosce in base alla (22), con una immediata deduzione analoga a quella del n. 8, che durante tutto il moto la variazione  $\Delta \dot{s}$ , subita dalla velocità  $\dot{s}$  in un qualsiasi intervallo di tempo  $\Delta t$ , sta all'intervallo stesso nel rapporto fisso  $a$ , cioè

$$\frac{\Delta \dot{s}}{\Delta t} = a.$$

Questa costante  $a$ , che in particolare fornisce la variazione della velocità in ogni unità di tempo, chiamasi *accelerazione* del moto considerato, il quale, con ovvia allusione al modo in cui varia nel tempo la velocità, si dice *uniformemente vario*.

Non è inutile aggiungere che il concetto di accelerazione fu per la prima volta fissato dal GALILEI (1) appunto come variazione della velocità nella unità di tempo, per il moto di caduta dei gravi che, come vedremo (§ 6), è uniformemente vario.

Tornando al nostro moto (22) notiamo che l'accelerazione  $a$  è, in questo caso, la derivata seconda  $\ddot{s}$  dell'ascissa curvilinea  $s$  rispetto al tempo, talchè in base al criterio del n. 12, avremo che in un generico istante  $t$  il moto è *accelerato* o *ritardato* secondo che è

$$a(at + b) > 0 \quad \text{oppure} \quad < 0.$$

Potendosi scrivere queste disuguaglianze sotto la forma

$$a^2 \left( t + \frac{b}{a} \right) > 0 \quad \text{oppure, rispettivamente,} \quad < 0,$$

si conclude che il moto è ritardato per  $t < -b/a$ , cioè prima dell'istante  $t = -b/a$  (in cui, annullandosi la velocità, si ha un *arresto*), e da quell'istante in poi è sempre accelerato. Si può così dire che nel moto uniformemente vario si hanno due *fasi*, separate dall'istante di arresto: la prima *ritardata*, la seconda *accelerata*.

Per precisare ulteriormente l'andamento del moto occorre ancora vedere se e quando esso sia *progressivo* o *retrogrado*. Dipendendo ciò (n. 12) dal segno della velocità  $\dot{s} = a(t + b/a)$ , distinguiamo i due casi  $a > 0$  e  $a < 0$ .

Nel primo la  $\dot{s}$  sarà positiva o negativa secondo che è  $t + b/a > 0 < 0$ ; cioè il moto sarà retrogrado prima dell'istante  $t = -b/a$ , vale a dire nella fase ritardata; progressivo dopo, cioè nella fase accelerata; mentre nel caso  $a < 0$  si verificheranno le circostanze rispettivamente contrarie.

Integrando la (22) otteniamo l'equazione oraria del moto

$$(23) \quad s = \frac{1}{2} at^2 + bt + c,$$

dove la costante  $c$  di integrazione è l'ascissa del punto mobile nell'istante  $t = 0$ .

---

(1) GALILEO GALILEI, n. a Pisa nel 1564, m. in Arcetri nel 1642, si può considerare [cfr. FAVARO, « Avvertimento al Vol. VIII dell'Edizione Nazionale delle opere di Galileo »] come continuatore di Archimede nella Statica o creatore della Dinamica. L'opera sua capitale è intitolata « *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali* ». Cfr. Ed. Naz., Vol. VIII.

Se si contano i tempi a partire dall'istante di arresto  $t = -b/a$ , vale a dire si pone

$$t_1 = t + \frac{b}{a},$$

la (22) diviene più semplicemente

$$(22') \quad \dot{s} = at_1;$$

e, analogamente, se si contano le  $s$  a partire dalla posizione di arresto (la quale è data dalla (23) per  $t = -b/a$ ) cioè si pone

$$s_1 = s - \frac{2ac - b^2}{2a},$$

la (23) si semplifica, divenendo (come quell'integrale della (22')) che si annulla per  $t_1 = 0$ )

$$(23') \quad s_1 = \frac{1}{2} at_1^2.$$

Immaginando che, come ad esempio nel caso di una traiettoria rettilinea, abbia senso la considerazione del moto (non soltanto per un certo intervallo di tempo, ma) nella sua integrità, cioè al variare di  $t$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ , si desume dalla (23') che, per  $t_1$  tendente all'infinito sia positivamente che negativamente,  $s_1$  tende all'infinito positivo o negativo, secondo che  $a > 0$  oppure  $a < 0$ . Inoltre se si considerano due istanti  $-t_1$  e  $t_1$  (di cui il primo preceda l'istante d'arresto e l'altro lo segua allo stesso intervallo di tempo) si riconosce dalle (22'), (23') che in codesti due istanti il punto passa per la medesima posizione, con la stessa velocità intensiva, diretta per altro nei due istanti considerati in senso contrario.

Tornando a lasciar generiche le origini dei tempi e degli spazi, possiamo riassumere quanto si è detto dianzi nell'enunciato seguente:

*Nel moto uniformemente vario (23) il punto proviene da distanza infinita dalla parte delle ascisse positive o negative secondo il segno dell'accelerazione  $a$ , e procede di moto uniformemente ritardato fino al punto di ascissa*

$$(24) \quad \frac{2ac - b^2}{2a}$$

*che raggiunge nell'istante  $t = -b/a$ ; dopo il quale ritorna, di moto uniformemente accelerato, all'infinito dalla stessa parte donde è provenuto; e in ogni posizione riprende, in senso contrario, la stessa velocità intensiva che in essa aveva assunto al suo primo passaggio.*

Dalla (23) risulta che il diagramma orario di un moto uniformemente vario è una parabola avente l'asse di simmetria paral-

lelo all'asse degli spazii ( $s=0$ ) e volgente la concavità verso gli spazii positivi o negativi secondo che  $a > 0$  o  $a < 0$ ; e questo diagramma mette bene in evidenza le varie circostanze dianzi assodate in via analitica.

23. ACCELERAZIONE. — Consideriamo ancora, per un momento, il moto di un punto  $P$  sopra una traiettoria prestabilita, e riferiamoci al caso di una equazione oraria qualsiasi  $s = s(t)$ .

Prefissato un generico intervallo di tempo  $\Delta t$ , a partire da un istante  $t$ , considerazioni analoghe a quelle del n. 11 conducono ad introdurre lo scalare  $\Delta s / \Delta t$  come *accelerazione media* (sulla traiettoria prestabilita) relativa all'intervallo di tempo  $\Delta t$ ; ed un passaggio al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  porta ad assumere la  $\dot{s}$  come *accelerazione* del punto (lungo la prefissata traiettoria) nell'istante  $t$ .

Poichè  $\dot{s}$  è la derivata di  $s$ , il suo segno indica istante per istante se la velocità scalare  $\dot{s}$  sia crescente o decrescente. Se poi si considera la velocità intensiva, vale l'osservazione del n. 12 che si può oramai enunciare dicendo che *un moto di legge oraria qualsiasi è, in un dato istante, accelerato o ritardato, secondo che in esso la velocità e la accelerazione (lungo la traiettoria), supposte entrambe diverse da zero, hanno segno eguale od opposto.*

Ma, come già nel caso della velocità, questa valutazione della accelerazione lungo la traiettoria, supposta prestabilita, nella maggior parte dei casi non basta; ed importa invece tener conto del

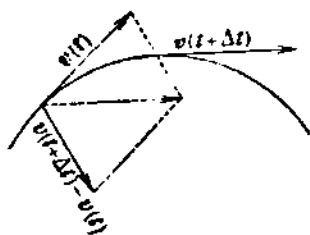
modo in cui varia, istante per istante, la velocità vettoriale rispetto allo spazio ambiente, cioè rispetto a quella prefissata terna cartesiana  $Oxyz$ , cui è riferito il moto.

Considerato l'incremento (vettoriale)  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ , che la velocità  $\mathbf{v}(t)$  subisce da un istante generico  $t$  ad un qualsiasi istante successivo  $t + \Delta t$ , e immaginatolo applicato nella posizione  $P(t)$  assunta dal punto nell'istante  $t$ , dividiamolo per lo scalare  $\Delta t$ . Il vettore così ottenuto

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t},$$

che dà il rapporto incrementale della velocità ed ha le componenti

$$\frac{\dot{x}(t + \Delta t) - \dot{x}(t)}{\Delta t}, \quad \frac{\dot{y}(t + \Delta t) - \dot{y}(t)}{\Delta t}, \quad \frac{\dot{z}(t + \Delta t) - \dot{z}(t)}{\Delta t},$$





dicesi accelerazione media del punto  $P$  nell'intervallo di tempo da  $t$  a  $t + \Delta t$ .

Chiamasi poi accelerazione del punto nell'istante  $t$  il limite cui tende codesta accelerazione media, quando, tenuto fisso  $t$ , si faccia tendere  $\Delta t$  allo zero, cioè il

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t},$$

che è precisamente la derivata  $dv/dt = \dot{v}$  della velocità  $v$  rispetto al tempo, od anche, in quanto è  $v = dP/dt$ , la derivata seconda  $d^2P/dt^2 = \ddot{P}$  del punto rispetto a  $t$ .

Designando dunque l'accelerazione, che è una determinata funzione vettoriale del tempo, con  $a(t)$ , abbiamo per definizione

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2},$$

onde risulta che le rispettive componenti secondo gli assi sono date da

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_x = \ddot{x}(t), \\ a_y = \ddot{y}(t), \\ a_z = \ddot{z}(t). \end{array} \right.$$

L'accelerazione appare così come una nuova grandezza cinematica, che, ove si prescinda dal suo carattere vettoriale, è definita come rapporto di una velocità ad un tempo. Perciò, ove sianzi adottati come unità di misura degli spazi e dei tempi il metro e il secondo, si può assumere come unità di accelerazione l'accelerazione di 1 m. per secondo, e, più specificamente, quella di un moto uniformemente accelerato, in cui ad ogni secondo la velocità aumenta di 1 m.

24. Dalla natura intrinseca, rispetto al moto, della definizione di accelerazione risulta senz'altro che le formule (25) restano valide comunque si cambino gli assi di riferimento, purchè sian fissi gli uni rispetto agli altri; e questo asserto si può anche giustificare con un'analisi più precisa, del tutto analoga a quella svolta nel caso della velocità (n. 14).

Si ha poi, come al n. 15, che: *Per un moto piano o rettilineo l'accelerazione giace costantemente sul piano o, rispettivamente, sulla retta del moto* (più precisamente, il vettore accelerazione è parallelo al piano, o, rispettivamente, alla retta).

*E se un punto si muove nello spazio, l'accelerazione della proiezione del punto su di un piano o su di una retta coincide colla proiezione su quel piano o, rispettivamente, su quella retta dell'accelerazione del punto considerato.*

25. Vedremo in Dinamica la fondamentale importanza del problema di *determinare il moto di un punto, di cui sia data l'accelerazione*. Il caso più generale, cui si è condotti nella rappresentazione teorica dei fenomeni di moto, è quello in cui l'accelerazione è nota in funzione del tempo, della posizione istantanea del punto e della velocità:

$$a = a(P, \dot{P} | t);$$

il che vuol dire che, con riferimento ad una data terna di assi, si conoscono le componenti  $a_x, a_y, a_z$  di  $a$  in funzione dei sette argomenti  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$ .

Si è così condotti ad integrare il sistema di equazioni differenziali del 2° ordine

$$\ddot{x} = a_x, \quad \ddot{y} = a_y, \quad \ddot{z} = a_z,$$

il quale, sotto condizioni assai larghe per le funzioni di sette argomenti  $a_x, a_y, a_z$ , ammette infinite soluzioni, dipendenti nel loro insieme da *sei costanti arbitrarie* (1). Abbiamo dunque  $\infty^6$  moti diversi aventi la data accelerazione.

Per individuarne uno, o, in altri termini, per determinare le sei costanti arbitrarie dell'integrale generale, occorre aggiungere delle opportune condizioni iniziali: basta, p. es., prefissare che in un dato istante  $t_0$  il punto debba passare per una data posizione  $P_0$  (di coordinate  $x_0, y_0, z_0$ ) con una data velocità  $v_0$  (di componenti  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ ).

26. ACCELERAZIONE TANGENZIALE E NORMALE. — L'accelerazione  $a(t)$  è un vettore, che ad ogni istante si considera, per definizione, applicato nella posizione  $P(t)$ , occupata in quell'istante dal punto mobile. Per vedere come codesto vettore  $a$  possa esser posto istante per istante, rispetto alla traiettoria, riprendiamo (n. 13) la

$$v = \dot{s}t,$$

e deriviamo rispetto al tempo, considerando il vettore unitario tangenziale come funzione di funzione del tempo, pel tramite della  $s(t)$ . Tenendo conto (I, n. 77) della

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{r} n,$$

dove  $r$  designa il raggio di curvatura della traiettoria, ed  $n$  il vettore unitario diretto lungo la normale principale verso il centro di

(1) Cfr. la nota a pie' di pag. 73.

$$t = \frac{ds}{dt} \frac{1}{v}$$

curvatura, otteniamo

$$\mathbf{a} = \dot{s} \mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{r} \mathbf{n} = \ddot{s} \mathbf{t} + \frac{v^2}{r} \mathbf{n}$$

Risulta di qui che ad ogni istante è nulla la componente della accelerazione secondo la binormale alla traiettoria o, in altre parole, *l'accelerazione appartiene ad ogni istante al piano osculatore della traiettoria nella posizione occupata in quell'istante dal punto mobile.*

I due componenti  $\dot{s} \mathbf{t}$ ,  $\frac{v^2}{r} \mathbf{n}$  e, spesso, anche i due scalari  $\dot{s}$   $v^2/r$  diconsi *accelerazione tangenziale* e, rispettivamente, *accelerazione normale o centripeta*.

La prima (nella cui componente  $\dot{s}$ , secondo  $t$ , ritroviamo l'accelerazione lungo la traiettoria, di cui parliamo dapprincipio) è diretta lungo la tangente, nel senso delle  $s$  crescenti o in senso contrario, secondo che è  $\dot{s} > 0$  o  $< 0$ : la seconda, in quanto lo scalare  $v^2/r$  è essenzialmente positivo, è sempre diretta verso il centro di curvatura.

L'accelerazione tangenziale è costantemente nulla sempre e solo quando sia identicamente  $\dot{s} = 0$  ossia  $s = \text{cost.}$ ; cosicchè (n. 8) *i moti uniformi* (su traiettoria qualsiasi) sono caratterizzati dall'annullarsi identico della accelerazione tangenziale o, in altre parole, dall'aver una accelerazione puramente normale.

Risulta poi dal n. 22 che *i moti uniformemente vari* (su traiettoria qualsiasi) sono caratterizzati dalla costanza dell'accelerazione tangenziale; il che non esclude la esistenza simultanea di un'accelerazione normale comunque variabile; anzi, se la traiettoria non è rettilinea, quest'ultima non può essere costantemente nulla.

Invero l'accelerazione normale  $v^2/r$  (poichè non può essere  $v = 0$  in ogni istante, ma solo negli eventuali istanti di arresto) si annulla identicamente sempre e solo quando sia, in ogni punto, della traiettoria,  $1/r = 0$ , si annulli cioè la curvatura (I, n. 77), onde si conclude che *l'annullarsi identico della accelerazione normale caratterizza i moti rettilinei.*

Combinando le precedenti osservazioni si ha che *i moti rettilinei uniformi sono caratterizzati dall'annullarsi identico della accelerazione (totale).*

## § 6. — Moti ad accelerazione costante.

### Moti dei gravi.

27. LEGGI DEL MOTO DEI GRAVI. — Stabiliti nei §§ prec. i principi generali della Cinematica del punto, li applicheremo, nel seguito di questo Cap., allo studio di vari tipi particolari di moti, che si presentano spontaneamente in diversi ordini di questioni concrete; e qui cominceremo dallo studiare i *moti ad accelerazione costante*.

L'esempio tipico di tali moti è fornito dai moti di caduta dei corpi pesanti o *gravi*, abbandonati a se stessi con una certa velocità iniziale, che in particolare può esser nulla.

Le leggi del moto di un grave sono state formulate, in base a generali induzioni fondate sulla osservazione sperimentale, dal GALILEI e si possono raccogliere, in linguaggio moderno, nei due enunciati seguenti:

1°) *Un grave abbandonato a se stesso senza velocità iniziale (cioè a partire dalla condizione di quiete) cade lungo la verticale, movendosi con una accelerazione costante e diretta verticalmente in basso, che è la stessa per tutti i corpi.*

2°) *Un grave lanciato in qualsiasi direzione e con qualsiasi velocità iniziale, si muove sempre con quella stessa accelerazione costante e diretta verticalmente in basso, che si manifesta nei gravi cadenti dalla posizione di quiete.*

Della prima legge si dà, nei corsi di Fisica, una verifica per mezzo della macchina dell'Atwood. Veramente va rilevato che la interpretazione del funzionamento di questo apparecchio non richiede soltanto nozioni cinematiche, ma si appoggia essenzialmente sui principi della Meccanica. Comunque sia, la macchina dell'Atwood fornisce anche una prima valutazione dell'accelerazione di caduta dei gravi, che si suol chiamare *accelerazione della gravità*, e si indica (in senso scalare) con  $g$ .

Importa avvertire che, come già notò il GALILEI, queste leggi possono valere soltanto se il moto avviene nel vuoto; nell'aria bisognerebbe tener conto della resistenza che l'aria stessa oppone al moto dei corpi; cosicchè le due leggi suindicate, applicate al moto dei gravi nell'aria, conducono soltanto ad una rappresentazione approssimata (spesso, solo grossolanamente approssimata) del moto effettivo.

Nè va taciuto che, anche nel vuoto, ove il campo d'osservazione non sia convenientemente ristretto, si rilevano da luogo a luogo sensibili deviazioni nella direzione della accelerazione della gra-

vità; e la stessa intensità, come è stato messo in evidenza da determinazioni sperimentali più accurate, subisce lievi variazioni al variare della stazione di esperimento: precisamente cresce al crescere della latitudine, diminuisce al crescere dell'altitudine sul livello del mare.

P. es. si ha (in  $m/sec^2$ , previa riduzione al livello del mare):

a Roma . . . . .	(latitudine Nord $41^{\circ} 53', 5$ )	$g = 9,8038,$
Padova . . . . .	( " " $45^{\circ} 24', 7$ )	$g = 9,8066,$
Vienna <sup>(1)</sup> . . . . .	( " " $48^{\circ} 12', 7$ )	$g = 9,8092,$
Parigi . . . . .	( " " $48^{\circ} 50', 2$ )	$g = 9,8096,$
Londra (Greenwich) . . . . .	( " " $51^{\circ} 28', 6$ )	$g = 9,8120,$
Berlino (Potsdam) . . . . .	( " " $52^{\circ} 22', 9$ )	$g = 9,8130,$
Singapur . . . . .	( " " $1^{\circ} 17', 3$ )	$g = 9,7807,$
Capo Flora (sped. it.) ( " " $79^{\circ} 56', 8$ )		$g = 9,8307,$
Sped. Nansen . . . . .	( " " $85^{\circ} 55', 3$ )	$g = 9,8315.$

Ad ogni modo, entro un campo d'osservazione non troppo largo, si può, in una prima approssimazione, ritenere che nel moto dei gravi l'accelerazione, che vettorialmente designeremo con  $g$ , sia costante in grandezza e direzione.

Per avere una rappresentazione schematica del moto di un grave qualsiasi, basterà studiare il moto di un punto  $P$ , avente l'accelerazione costante  $g$ ; ed è manifesto che tutto ciò che noi diremo in questo caso, varrà, senza modificazioni di sorta, pel moto di un punto ad accelerazione costante qualsiasi.

28. MOTI DEI GRAVI. — Scelta, pel riferimento, una terna il cui asse delle  $y$  sia verticale ed orientato verso il basso, dimodochè il piano  $xy$  risulti verticale, avremo come componenti della  $g$

$$0, \quad g, \quad 0;$$

e le coordinate del punto  $P$  dovranno soddisfare durante tutto il moto alle equazioni

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = g, \quad \ddot{z} = 0,$$

che, integrate, danno per le componenti della velocità  $v$  le espressioni

$$(26) \quad \begin{cases} \dot{x} = a, & \dot{y} = gt + b, & \dot{z} = c, \end{cases}$$

dove  $a, b, c$  designano le componenti (arbitrarie) della velocità  $v_0$  nell'istante  $t = 0$  (velocità iniziale).

(<sup>1</sup>) Il valore locale (all'Istituto geografico militare di Vienna, che si trova a 183 metri di altitudine sul livello del mare) sarebbe  $g = 9,8086$ .

Un'ulteriore integrazione dà le equazioni del moto

$$(27) \quad \begin{cases} x = at + a_0, & y = \frac{1}{2}gt^2 + bt + b_0, & z = ct + c_0, \end{cases}$$

dove  $a_0, b_0, c_0$  sono le coordinate (arbitrarie) della posizione  $P_0$  del punto nell'istante  $t = 0$  (posizione iniziale).

Senza restrizione essenziale, possiamo immaginare di aver collocata l'origine  $O$  delle coordinate nella posizione iniziale  $P_0$ , il che porta a porre nelle (27)  $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ ; e se in tal modo la velocità iniziale  $v_0$  non si trova già a giacere nel piano  $xy$ , cioè se non è già  $c = 0$ , possiamo, con una rotazione della terna d'assi intorno alla  $y$ , portare il piano  $xy$  a passare per la  $v_0$ , e, precisamente, in modo che la componente della  $v_0$  secondo l'asse  $x$ , se non è nulla, risulti positiva. A rotazione compiuta, avremo, nelle (26), (27),  $c = 0, a > 0$ ; talchè in ultima analisi le (26), (27) rispetto alla nuova terna dianzi individuata assumeranno la forma

$$(26') \quad \dot{x} = a, \quad \dot{y} = gt + b, \quad \dot{z} = 0;$$

$$(27') \quad x = at, \quad y = \frac{1}{2}gt^2 + bt, \quad z = 0,$$

con  $a > 0$ .

Dalla terza delle (27') risulta intanto che *in ogni caso il moto è piano, e avviene precisamente nel piano verticale della velocità iniziale.*

Naturalmente, possiamo d'or innanzi trascurare l'ultima equazione di ciascuna delle due terne (26'), (27').

29. Esaminiamo dapprima il caso  $a = 0$ , cioè il caso in cui la velocità iniziale  $v_0$  è verticale (o nulla). In tale ipotesi la prima delle (27') si riduce ad  $x = 0$ , onde il moto è *rettilineo*, lungo la verticale  $y$ ; e non restano da considerare se non le due equazioni

$$(28) \quad \dot{y} = gt + b, \quad \dot{z} = \frac{1}{2}gt^2 + bt,$$

ciascuna delle quali (n. 22) ci dice che si tratta di un *moto uniformemente vario*.

Poichè (per l'adottata orientazione dell'asse  $y$ ) l'accelerazione  $g$  è positiva, il nostro moto, considerato in tutta la successione naturale dei tempi da  $t = -\infty$  a  $t = +\infty$ , è (n. 22) *retrogrado*, cioè diretto all'insù, nella fase ritardata, cioè prima dell'istante di arresto

$$(29) \quad t = -\frac{b}{g};$$

è *progressivo*, cioè diretto all'ingiù, nella fase accelerata. Ma noi

qui intendiamo considerare il moto soltanto a partire dall'istante  $t = 0$ ; onde siamo così condotti a distinguere due casi, secondo il segno di  $b$ .

Se  $b > 0$ , cioè se la velocità iniziale è diretta (verticalmente) all'inghiù oppure nulla, l'istante d'arresto, in quanto il corrispondente valore (29) di  $t$  è  $< 0$ , è anteriore o al più identico all'istante  $t = 0$ ; cosicchè in quell'istante si è in fase accelerata progressiva, e si conclude che il punto a partire dalla posizione iniziale  $O$  si muove indefinitamente all'inghiù lungo la verticale, di moto uniformemente accelerato. Si ha così un'immagine, ben rispondente all'intuizione fisica, del moto (finchè non sia arrestato da ostacoli) di un grave lanciato verticalmente in basso, o abbandonato a se stesso dalla condizione di quiete.

Se invece è  $b < 0$ , cioè se la velocità iniziale è diretta (verticalmente) all'insù, il valore dato per  $t$  dalla (29) risulta  $> 0$ , cosicchè nell'istante  $t = 0$  si è ancora nella fase ritardata retrograda e il punto, a partire dall'istante  $t = 0$ , sale di moto uniformemente ritardato lungo la verticale, fino all'istante (29), in cui raggiunge l'altezza massima

$$(30) \quad \frac{b^2}{2g}$$

[valore assoluto di  $y$  nell'istante (29)]; poi ricade all'inghiù, lungo la verticale, movendosi indefinitamente di moto uniformemente accelerato; cosicchè nell'intervallo di tempo da  $t = -b/g$  a  $t = -2b/g$  rifà il cammino compiuto nell'ascesa e istante per istante riprende in senso contrario la stessa velocità intensiva che, salendo, aveva assunto nella medesima posizione (cfr. n. 22). Si ha così un'immagine del moto di un grave lanciato verticalmente all'insù.

30. Resta da esaminare il caso generale in cui è  $a > 0$ , e quindi la velocità non è diretta verticalmente. Riscritte le equazioni (26'), (27'), tralasciando quelle superflue,

$$(26') \quad \dot{x} = a, \quad \dot{y} = gt + b;$$

$$(27') \quad x = at, \quad y = \frac{1}{2}gt^2 + bt,$$

si rileva da queste ultime, che il nostro moto si può considerare composto (n. 6) di un moto uniforme di velocità  $a$  sull'asse  $x$  e di un moto uniformemente vario sull'asse  $y$ , che è precisamente quello considerato al n. prec.

L'equazione della traiettoria, che si ottiene eliminando il tempo fra le (27'), è data dalla

$$(31) \quad y = \frac{g}{2a^2} x^2 + \frac{b}{a} x,$$

onde si tratta di una parabola ad asse di simmetria verticale, passante per l'origine e volgente la concavità verso il basso (si ricordi l'orientazione adottata per l'asse  $y$ ): il relativo parametro vale  $a^2/g$ , e, come è evidente, tende a zero assieme ad  $a$ .

Quadrando e sommando le (26') e introducendo la velocità intensiva iniziale  $v_0$ , si ottiene per la velocità intensiva in un istante qualsiasi l'espressione

$$v^2 = v_0^2 + 2g \left( \frac{1}{2} gt^2 + bt \right),$$

onde risulta

$$(32) \quad v^2 - v_0^2 = 2gy;$$

cioè sono fra loro proporzionali l'incremento del quadrato della velocità intensiva e la quota del punto mobile rispetto alla posizione iniziale (l'uno e l'altra presi algebricamente). Questa relazione particolarmente notevole (integrale delle forze vive; cfr. Cap. VIII) vale in ogni caso, cioè anche per il moto puramente verticale ( $a = 0$ ) del n. prec.: infatti i passaggi formali non sono subordinati alla restrizione  $a \neq 0$ .

Notiamo poi che la velocità  $v$ , in quanto la sua componente orizzontale per la prima delle (26') è costantemente eguale ad  $a > 0$ , non può mai annullarsi. Si annulla invece la componente verticale  $y$  (e quindi la velocità intensiva raggiunge il suo valore minimo  $a$ ) nell'istante

$$(29) \quad t = -\frac{b}{g},$$

nel quale, risultando orizzontale la velocità (e quindi la tangente alla traiettoria), il punto deve trovarsi precisamente nel vertice  $V$  della parabola, il che si poteva ben prevedere in quanto si riconosce in (29) l'istante di arresto nel moto uniformemente vario della proiezione del punto sull'asse  $y$ . Sostituendo il valore (29) nelle (27'), si trova che il vertice  $V$  avrà le coordinate

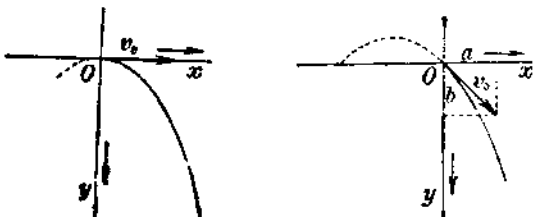
$$(33) \quad x = -\frac{ab}{g}, \quad y = -\frac{b^2}{2g},$$

di cui la seconda non può mai essere positiva, il che vuol dire che il vertice non cade mai al di sotto dell'asse orizzontale  $x$ , ossia della posizione iniziale.



Poichè, come al n. prec., intendiamo considerare il moto soltanto a partire dall'istante  $t = 0$ , dobbiamo anche qui distinguere due casi secondo il segno di  $b$ .

Se  $b > 0$ , cioè se la velocità iniziale è diretta in basso obliquamente, oppure è orizzontale, l'istante (29) del passaggio pel vertice  $V$  è anteriore o (se  $b = 0$ ) identico a  $t = 0$ ; cosicchè da questo istante in poi il punto descrive un arco discendente di parabola, con velocità intensiva che dal minimo iniziale  $v_0$  cresce indefinitamente, secondo la legge espressa dalla (32).



31. Più interessante è il caso  $b < 0$ , in cui la velocità iniziale è diretta (obliquamente) verso l'alto.

In tal caso il punto, a partire dall'istante  $t = 0$ , si muove su di un arco ascendente di parabola, fino all'istante  $t = -b/g$  in cui tocca il vertice  $V$  e perciò raggiunge l'altezza (massima) sull'orizzonte  $x$

$$(34) \quad H = \frac{b^2}{2g},$$

eguale al valore assoluto dell'ordinata (33) di  $V$  (e coincidente, come è ben naturale, colla (30) del n. 28). La velocità intensiva  $v$  in codesto primo intervallo di tempo decresce di intensità, secondo la (32), fino a toccare nel vertice il suo minimo  $a$  (velocità orizzontale costante). Dall'istante  $t = -b/g$  in poi il punto descrive l'arco discendente di parabola, con velocità intensiva crescente oltre ogni limite secondo la (32).

Esso attraversa l'orizzontale  $x$  nel punto  $L$ , simmetrico di  $O$  rispetto all'asse della parabola e perciò avente l'ascissa

$$(35) \quad -\frac{2ab}{g},$$

doppia dell'ascissa (33) del vertice; e, poichè il moto della proie-

zione del punto sull'asse  $x$  è uniforme, il punto, per descrivere l'arco di parabola  $OL$ , impiega un tempo

$$(36) \quad -\frac{2b}{g}$$

doppio di quello richiesto perchè esso tocchi il vertice  $V$ .

Scendendo lungo l'arco  $VL$ , il punto assume ad ogni istante una velocità, che per la (32) ha intensità eguale a quella della velocità assunta, salendo, nella posizione di egual quota sull'arco  $OV$ , cioè nella posizione simmetrica rispetto all'asse della parabola. In due posizioni siffatte le linee d'azione della velocità sono simmetriche rispetto all'asse della parabola e il senso è verso l'alto su  $OV$ , verso il basso su  $VL$ .

32. Le considerazioni del n. prec. possono servire a dare un'idea, in primissima approssimazione, dell'andamento del moto di un proietto lanciato da una bocca da fuoco. In tal caso si suol mettere in evidenza il cosiddetto *angolo di proiezione*, cioè l'angolo  $\alpha$  (contato positivamente verso l'alto) che l'asse della bocca da fuoco, e quindi la velocità iniziale, forma coll'orizzontale  $x$ . Si avrà allora

$$a = v_0 \cos \alpha, \quad b = -v_0 \sin \alpha,$$

onde l'equazione (32) della traiettoria assumerà la forma

$$(31') \quad y = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 - x \operatorname{tg} \alpha.$$

La *gittata*  $G$ , cioè la lunghezza (35) della corda  $OL$ , sarà data da

$$(35') \quad G = -\frac{2ab}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha;$$

l'*altezza del tiro*, cioè la massima quota (34) raggiunta dal proietto sarà data dalla costante

$$(34') \quad H = \frac{b^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{1}{4} G \operatorname{tg} \alpha,$$

la *durata del tiro* (36) da

$$(36') \quad T = -\frac{2b}{g} = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha.$$

Si rileva dalla (35') che il massimo della *gittata* si ha per un angolo di proiezione di  $45^\circ$ , nel qual caso risulta  $G = v_0^2/g$  e la durata del tiro è data, per la (36'), da

$$\sqrt{2} \frac{v_0}{g}.$$

Aggiungiamo infine che dicesi *abbassamento*  $A(x)$  del proietto per una data ascissa  $x$  il dislivello (preso in valore assoluto) fra i due punti rispettivamente giacenti sulla traiettoria e sulla tangente in  $O$ , e aventi l'ascissa considerata. Poichè l'equazione di codesta tangente è data da

$$y = -x \operatorname{tg} \alpha,$$

si trova, in base alla (31'), che l'abbassamento  $A(x)$  corrispondente all'ascissa  $x$  è dato da

$$A(x) = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

onde, sostituendovi per  $x$  la gittata  $G$  e tenendo conto della (34'), si conclude che l'altezza del tiro è eguale al quarto dell'abbassamento corrispondente alla gittata.

Ma conviene avvertire che questi risultati numerici si possono accettare soltanto come una primissima approssimazione, valida per brevi traiettorie, ossia per piccole velocità iniziali. Nel caso delle velocità impresse dalle moderne bocche da fuoco la resistenza dell'aria modifica radicalmente l'andamento del moto del proietto: così per es., nel caso di una palla di fucile animata inizialmente di una velocità di 625 m/sec., mentre la teoria elementare, testè svolta, prevederebbe (corrispondentemente all'angolo di proiezione di  $45^\circ$ ) una gittata massima di 40 Km. ed un'altezza di Km. 4, si è constatato dagli artiglieri che in realtà la gittata massima (quale si ottiene per un angolo di proiezione di circa  $32^\circ$ ) supera di poco i 3 Km., e l'altezza del tiro non va oltre il mezzo Km.

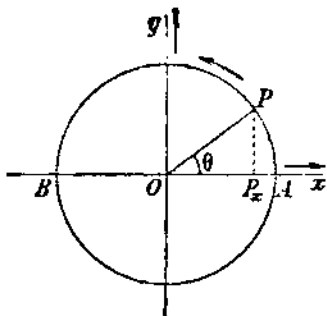
### § 7. - Moti oscillatorii.

33. MOTO CIRCOLARE UNIFORME. — Se un punto  $P$  si muove su di una circonferenza di raggio  $r$ , cioè sulla circonferenza che, riferita ad assi coordinati nel centro, ammette l'equazione

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

il moto di  $P$  risulta definito allorchè è assegnata in funzione del tempo l'anomalia  $\theta(t)$  del vettore  $P-O$  rispetto all'asse orientato  $x$ : precisamente le equazioni del moto di  $P$  saranno (n. 19)

$$x = r \cos \theta(t), \quad y = r \sin \theta(t);$$



onde la velocità avrà le componenti:

$$\dot{x} = -r\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = r\dot{\theta} \cos \theta$$

e quindi la intensità

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = r|\dot{\theta}|;$$

cioè la velocità di  $P$  è data in ogni istante dal prodotto del raggio della traiettoria per il valore assoluto della velocità angolare  $\dot{\theta}$ ; e ciò si poteva prevedere in base al n. 19, in quanto qui, essendo nulla la velocità radiale di  $P$  per la costanza della lunghezza del vettore  $P-O$ , la velocità di  $P$  si riduce alla velocità trasversa.

Perchè il moto circolare sia uniforme (cioè di velocità scalare costante) occorre e basta che sia costante la velocità angolare  $\dot{\theta}$ ; ossia, indicando con  $\omega$  il valore costante di  $\dot{\theta}$ , dovremo avere

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0,$$

dove  $\theta_0$  indica il valore dell'anomalia di  $P$  nell'istante  $t = 0$ . Risulta di qui che le equazioni del moto circolare uniforme (di raggio  $r$  e velocità angolare  $\omega$ ) sono date da

$$(37) \quad x = r \cos(\omega t + \theta_0), \quad y = r \sin(\omega t + \theta_0).$$

Secondo che  $\omega$  è positivo o negativo,  $P$  ruota nel senso positivo (o delle anomalie crescenti) o nel senso opposto.

Le componenti della velocità sono date da

$$(38) \quad \dot{x} = -r\omega \sin(\omega t + \theta_0) = -\omega y, \quad \dot{y} = r\omega \cos(\omega t + \theta_0) = \omega x;$$

quelle dell'accelerazione da

$$(39) \quad \ddot{x} = -\omega \dot{y} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = \omega \dot{x} = -\omega^2 y;$$

onde risulta

$$\mathbf{a} = -\omega^2(\mathbf{P} - \mathbf{O}) = \omega^2(\mathbf{O} - \mathbf{P});$$

cioè l'accelerazione è di intensità costante  $\omega^2 r$  ed è sempre diretta dal punto  $P$  al centro del cerchio; il che si accorda coi risultati del n. 26, in quanto, trattandosi di un moto uniforme, l'accelerazione deve risultare tutta centripeta.

A intervalli di tempo  $2\pi\omega$ , il punto  $P$  riprende la medesima posizione, con la stessa velocità e la stessa accelerazione, come risulta dalle (37), (38), (39); ciò si esprime dicendo che il moto circolare uniforme è periodico di periodo  $2\pi/\omega$ .

**34. MOTO ARMONICO.** — Riferendoci ancora al moto circolare uniforme di  $P$ , consideriamo il moto rettilineo della proiezione di

$P$  su un diametro qualsiasi del cerchio, per es. della proiezione  $P_x$  sull'asse delle  $x$ . Mentre  $P$ , proseguendo il suo moto, descrive quante volte si vogliono la circonferenza, il punto  $P_x$  oscilla altrettante volte da  $A$  a  $B$  e viceversa. Il moto rettilineo di  $P_x$  dicesi *moto armonico* ed ha una importanza tutta speciale, in quanto fornisce la rappresentazione cinematica tipica di molti fenomeni fisici vibratorii (elastici, acustici, luminosi) quando si possa prescindere dalle così dette resistenze passive (attrito, viscosità, resistenze di mezzo, ecc.). Anzi vi sono (specialmente in Ottica ed in Eletticità, per es. nella teoria dei campi magnetici rotanti) fenomeni, in cui tanto al moto armonico di  $P_x$  quanto al moto rotatorio uniforme del vettore  $P-O$  si può attribuire un significato fisico. Notiamo inoltre che ogni fenomeno periodico di moto si può rappresentare mediante la composizione di un numero più o meno grande, ed anche infinito, di moti armonici.

L'equazione del moto armonico è data (n. 6) dalla prima delle (37) del n. prec.

$$(37_1) \quad x = r \cos (\omega t + \theta_0),$$

mentre per la velocità e l'accelerazione si ha, in base alle prime delle (38), (39),

$$(38_1) \quad \dot{x} = -r\omega \sin (\omega t + \theta_0) = -\omega y;$$

$$(39_1) \quad \ddot{x} = -\omega^2 x.$$

La stessa periodicità del moto circolare uniforme si presenta anche nel moto armonico: cioè a intervalli di tempo  $T = 2\pi/\omega$  anche  $P_x$  ripassa per una medesima posizione con la medesima velocità e con la medesima accelerazione.

Il tempo  $T$  dicesi *periodo* del moto armonico e il suo reciproco  $1/T$  (numero, intero o no, dei periodi contenuti nell'unità di tempo) *frequenza* del moto, mentre  $\omega = 2\pi/T$  (velocità angolare del moto circolare) si designa col nome di *costante di frequenza o pulsazione*. Il punto  $O$  è il *centro* del moto ed  $r$  (metà dell'oscillazione semplice) l'*ampiezza*.

Infine chiamasi *fase del moto nell'istante  $t$*  il binomio  $\omega t + \theta_0$  (anomalia della corrispondente posizione di  $P$ ) riscrivendo solitamente il nome semplice di *fase* alla fase iniziale  $\theta_0$ . Così, se si hanno due moti armonici di egual periodo, come (37<sub>1</sub>) e

$$x = r' \cos (\omega t + \theta'_0),$$

si dice che il primo presenta rispetto al secondo una differenza di fase  $\theta_0 - \theta'_0$  (*anticipo o ritardo* secondo il segno). Per es., riferen-

doici ancora al moto circolare dell'estremo libero  $P$  del nostro vettore rotante, abbiamo che la proiezione  $P_y$  di  $P$  sull'asse  $y$  si muove secondo l'equazione oraria [seconda delle (37)]

$$y = r \sin(\omega t + \theta_0),$$

che può scriversi

$$y = r \cos\left(\omega t + \theta_0 - \frac{\pi}{2}\right);$$

onde si può dire che  $P_y$ , movendosi di moto armonico di periodo e ampiezza eguali a quelli di  $P_x$ , presenta rispetto a  $P_x$  una differenza di fase  $-\pi/2$ , ossia un ritardo di un quarto di periodo, in quanto l'intero periodo corrisponde ad una differenza di fase  $2\pi$ .

Viceversa, risulta da quanto precede che due moti armonici su due rette ortogonali, intorno al punto comune, i quali abbiano eguale ampiezza ed egual periodo, ma siano l'uno rispetto all'altro in ritardo di un quarto di periodo, si compongono in un moto circolare uniforme.

35. Dalla espressione (38<sub>1</sub>) della velocità di  $P_x$ , in quanto questa risulta proporzionale per ogni posizione di  $P_x$  all'ordinata del corrispondente punto  $P$ , si conclude che in  $A$  la velocità è nulla, cresce allo spostarsi di  $P_x$  verso il centro  $O$  (moto accelerato), raggiunge in questo punto il suo massimo valore assoluto  $\omega r$ , indi diminuisce di intensità (moto ritardato) fino ad annullarsi in  $B$ ; e nella oscillazione da  $B$  verso  $A$  la velocità riprende in ogni singola posizione di  $P_x$ , lo stesso valore di prima, salva l'inversione del senso.

Siccome la (38<sub>1</sub>) si può scrivere:

$$\dot{x} = r\omega \cos\left(\omega t + \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

concludiamo che la velocità ha, rispetto alla  $x$ , una differenza di fase di un quadrante, ossia un anticipo di un quarto di periodo.

L'accelerazione (39<sub>1</sub>) è sempre diretta al centro e *proporzionale alla distanza di  $P_x$  da esso*, cosicchè è massima in valore assoluto ed eguale ad  $\omega^2 r$  in  $A$  e in  $B$  e si annulla nel centro. Essa ha rispetto ad  $x$  un anticipo di mezzo periodo.

Notiamo infine che il diagramma orario del moto armonico, come pure i rispettivi diagrammi della velocità e dell'accelerazione, sono altrettante curve sinusoidali.

36. In base alla (39<sub>1</sub>) del n. 34, in qualsiasi moto armonico di periodo  $2\pi/\omega$ , o ciò che è lo stesso, di costante di frequenza  $\omega$ ,

l'accelerazione  $\ddot{x}$  e l'ascissa  $x$  del punto sono legate in ogni istante dall'equazione:

$$(39_1) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

che non dipende nè dall'ampiezza  $r$ , nè dalla fase iniziale  $\theta_0$  del moto armonico considerato. In altre parole la funzione di  $t$

$$(37_1) \quad x = r \cos(\omega t + \theta_0)$$

soddisfa, comunque si scelgano le costanti  $r$  e  $\theta_0$ , alla (39<sub>1</sub>), la quale è un'equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti, omogenea del 2° ordine.

Ma dal Calcolo sappiamo che un'equazione differenziale del 2° ordine ammette precisamente  $\infty^2$  soluzioni o *integrali particolari*, ossia che l'*integrale generale* di una tale equazione dipende da due costanti arbitrarie. Concludiamo quindi che la (37<sub>1</sub>) fornisce l'integrale generale della (39<sub>1</sub>) ed  $r$  e  $\theta_0$  sono le rispettive costanti arbitrarie; cioè la equazione differenziale (39<sub>1</sub>) definisce tutti e soli i moti armonici di dato periodo  $2\pi/\omega$  (e di ampiezza e fase arbitrarie).

**37. MOTI VIBRATORI SMORZATI.** — Abbiamo già notato che i moti armonici forniscono il tipo più semplice dei *moti vibratorii permanenti*, cioè tali che il punto riprende a intervalli di tempo eguali (*periodi*) le medesime caratteristiche geometriche e cinematiche. Indichiamo qui analogamente il tipo più semplice dei moti vibratorii smorzati, cioè tali che le ampiezze delle successive oscillazioni tendano ad estinguersi.

Come elementi primordiali di fenomeni più complessi, tali moti hanno importanza non minore degli armonici: essi s'incontrano infatti nell'analisi dei moti naturali aventi carattere vibratorio, quando si tenga debito conto delle influenze passive.

Si perviene alla definizione di codesti moti considerando ancora un vettore  $P - O$ , rotante con *velocità angolare costante* intorno al punto di applicazione  $O$ , ma tale che l'estremo libero  $P$  descriva, anziché una circonferenza, una *spirale logaritmica* di punto asintotico  $O$ . Studiamo anzitutto il moto dell'estremo libero  $P$  del vettore rotante  $P - O$  or ora definito. Rispetto al solito sistema di coordinate polari di polo  $O$ , l'equazione di una spirale logaritmica, tendente (asintoticamente) al centro  $O$  nel senso delle anomalie crescenti, è data da

$$(40) \quad \rho = ae^{-b\theta},$$

dove  $a$  e  $b$  sono due numeri positivi quali si vogliono ed  $e$  rappresenta la nota base dei logaritmi neperiani  $= 2,71828\dots$

Se il vettore  $P - O$  ruota nel senso delle anomalie crescenti ed  $\omega > 0$  ne misura la velocità angolare, mentre  $\theta_0$  è l'anomalia per  $t = 0$ , avremo, al solito, in un istante  $t$  qualsiasi,

$$\theta = \omega t + \theta_0;$$

onde le equazioni del moto di  $P$ , ove si ponga

$$b\omega = h, \quad ae^{-b\theta_0} = r,$$

saranno date da

$$(41) \quad \begin{cases} x = re^{-bt} \cos(\omega t + \theta_0), & y = re^{-bt} \sin(\omega t + \theta_0). \end{cases}$$

Di qui derivando rispetto a  $t$  si deduce

$$\begin{cases} \dot{x} = re^{-bt}[-h \cos(\omega t + \theta_0) - \omega \sin(\omega t + \theta_0)], \\ \dot{y} = re^{-bt}[-h \sin(\omega t + \theta_0) + \omega \cos(\omega t + \theta_0)]; \end{cases}$$

ossia

$$(42) \quad \dot{x} = -hx - \omega y, \quad \dot{y} = -hy + \omega x;$$

e quindi

$$(43) \quad \begin{cases} \ddot{x} = -h\dot{x} - \omega\dot{y} = (h^2 - \omega^2)x - 2h\omega y, \\ \ddot{y} = -h\dot{y} + \omega\dot{x} = (h^2 - \omega^2)y - 2h\omega x; \end{cases}$$

onde il quadrato della velocità e quello dell'accelerazione saranno dati rispettivamente da

$$(44) \quad v^2 = (h^2 + \omega^2)(x^2 + y^2) = (h^2 + \omega^2)\rho^2,$$

$$(45) \quad a^2 = (h^2 + \omega^2)^2(x^2 + y^2) = (h^2 + \omega^2)^2\rho^2.$$

Si vede così che la velocità e l'accelerazione di  $P$ , al tendere di  $t$  all'infinito, convergono allo zero come il raggio vettore  $\rho = OP$ .

E qui, incidentalmente, si può anche mostrare come dalle formule precedenti discenda, pressochè immediatamente, che lungo la spirale logaritmica il raggio  $r$  di curvatura è proporzionale al raggio vettore  $\rho$ . Invero, si riprenda l'espressione

$$(46) \quad a_n = \frac{v^3}{r}$$

dell'accelerazione normale (n. 26) e si osservi che, essendo  $\dot{x}/v$ ,  $\dot{y}/v$  i coseni direttori della tangente alla traiettoria nel senso del moto (che è poi quello, in cui la curva tende asintoticamente al



polo  $O$ ), quelli della normale orientata verso la concavità della curva, sono  $-\dot{y}/v$ ,  $\dot{x}/v$ , talchè si ha

$$a_n = \frac{\dot{x}\dot{y} - y\ddot{x}}{v},$$

ossia, in forza delle (42)-(44),

$$a_n = \omega v;$$

e di qui e dalla (46) discende la

$$r = \frac{v}{\omega},$$

che, ove si tenga conto ancora della (44) e della  $h = \omega b$ , si può scrivere

$$r = \sqrt{1 + b^2 \rho},$$

ed esprime appunto l'enunciata proporzionalità, facendo intervenire il solo parametro geometrico  $b$ . Per  $b = 0$ , come risulta dalla (40), la spirale logaritmica degenera in una circonferenza e si ha, coerentemente,  $r = \rho$ .

38. Considerata la posizione  $P_1$  assunta da  $P$  in un qualsiasi istante  $t_1$  e le corrispondenti coordinate

$$x_1 = re^{-ht_1} \cos(\omega t_1 + \theta_0), \quad y_1 = re^{-ht_1} \sin(\omega t_1 + \theta_0),$$

è chiaro che nell'istante  $t_1 + \pi/\omega$ , essendosi la anomalia  $\theta = \omega t + \theta_0$  aumentata di  $\pi$ ,  $P$  giunge nel punto  $P_2$ , in cui la spirale incontra (per la prima volta dopo  $P_1$ ) la retta  $P_1O$  e ha ivi le coordinate

$$\begin{aligned} x_2 &= re^{-h(t_1 + \pi/\omega)} \cos(\omega t_1 + \theta_0 + \pi) = -e^{-h\pi/\omega} x_1, \\ y_2 &= re^{-h(t_1 + \pi/\omega)} \sin(\omega t_1 + \theta_0 + \pi) = -e^{-h\pi/\omega} y_1; \end{aligned}$$

cioè ad intervalli di tempo  $\pi/\omega$  le coordinate di  $P$ , cambiano segno e si riducono (proporzionalmente) nel rapporto  $e^{-h\pi/\omega} = \frac{1}{e^{h\pi/\omega}}$ .

Ricordando le espressioni delle componenti della velocità e dell'accelerazione per mezzo delle coordinate di  $P$ , si assoda che se  $\dot{x}_1, \dot{y}_1; \ddot{x}_1, \ddot{y}_1$ , e  $\dot{x}_2, \dot{y}_2; \ddot{x}_2, \ddot{y}_2$  sono le componenti della velocità e dell'accelerazione di  $P_1$  e  $P_2$  rispettivamente, sussistono le relazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -e^{-h\pi/\omega} \dot{x}_1, & \dot{y}_2 &= -e^{-h\pi/\omega} \dot{y}_1, \\ \ddot{x}_2 &= -e^{-h\pi/\omega} \ddot{x}_1, & \ddot{y}_2 &= -e^{-h\pi/\omega} \ddot{y}_1; \end{aligned}$$

cioè anche le componenti della velocità e della accelerazione a intervalli di tempo  $\pi/\omega$  cambiano segno e si riducono, proporzionalmente,

nel medesimo rapporto  $e^{-h\pi/\omega}$ . Perciò le velocità di  $P$  in  $P_1$  e  $P_2$  (avendo componenti proporzionali e di segno contrario) sono parallele e di verso discorde; sarà, per la stessa ragione, parallela ad esse (nell'uno o nell'altro verso) la velocità di  $P$ , tutte le volte che questo punto riattraverserà, sulle spire successive, la retta  $OP_1$ ; e altrettanto potrà dirsi delle accelerazioni.

Notiamo anzi che, essendo

$$\frac{x}{\rho}, \quad \frac{y}{\rho} \quad \text{e} \quad \frac{\dot{x}}{\rho\sqrt{h^2 + \omega^2}}, \quad \frac{\dot{y}}{\rho\sqrt{h^2 + \omega^2}},$$

rispettivamente, i coseni direttori della  $OP$  e della velocità di  $P$  (tangente in  $P$  alla traiettoria) l'angolo di codeste due rette è dato da:

$$\cos \alpha = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\rho^2\sqrt{h^2 + \omega^2}},$$

ossia per le (42) da

$$(47) \quad \cos \alpha = -\frac{h}{\sqrt{h^2 + \omega^2}},$$

o più semplicemente da <sup>(1)</sup>

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\omega}{h}.$$

Poichè questo angolo  $\alpha$  risulta costante (cioè indipendente dal tempo) ritroviamo la nota proprietà della spirale logaritmica di incontrare sotto angolo costante le rette uscenti dal suo punto asintotico  $O$ .

Condotta allora per  $O$  la retta, del secondo e quarto quadrante degli assi, che forma coll'asse  $x$  l'angolo  $\alpha - \pi/2$ , avremo che, in una qualsiasi sua intersezione  $A_0$  colla spirale, la tangente (e quindi la velocità di  $P$  nella posizione  $A_0$ ) risulta ortogonale all'asse  $x$  (vedasi fig. della p. 98); ed evidentemente non vi sono sulla spirale altri punti aventi la stessa proprietà. Per fissare le idee, supponiamo che  $A_0$  appartenga al quarto quadrante, e indichiamo con  $A_1, A_2, \dots$  le successive intersezioni della spirale col segmento  $OA_0$ , da  $A_0$  verso  $O$  <sup>(2)</sup>; con  $B_0, B_1, B_2, \dots$  le corrispondenti intersezioni delle stesse spire con la semiretta opposta alla  $OA_0$ .

<sup>(1)</sup> Si avverta che, nella ipotesi da noi fissata che la spirale tenda al centro avvolgendosi nel senso delle anomalie crescenti, l'angolo  $\alpha$  risulta ottuso.

<sup>(2)</sup> Il prolungamento del segmento  $OA_0$  (oltre  $A_0$ ) intersecherà la spirale in infiniti altri punti che potremo indicare con  $A_{-1}, A_{-2}, \dots$ , cui corrispon-

Discende dalle osservazioni fatte in principio di questo num. che i segmenti

$$(48) \quad OA_0, OB_0, OA_1, OB_1, \dots$$

costituiscono una progressione geometrica di ragione  $e^{-k\pi/\omega}$  ( $< 1$ ) e perciò tendono allo zero.

39. Ciò posto, consideriamo, simultaneamente al moto dianzi studiato di  $P$  sulla spirale logaritmica, il moto rettilineo della sua proiezione  $P_x$  sull'asse delle  $x$ . Evidentemente  $P_x$  oscilla; e, se consideriamo il moto di  $P$  a partire dalla posizione  $A_0$ , gli estremi delle successive oscillazioni di  $P_x$ , o posizioni di arresto, sono le proiezioni  $A_0', B_0', A_1', B_1', \dots$  dei punti  $A_0, B_0, A_1, B_1, \dots$ , della spirale, in cui la tangente (e quindi la velocità di  $P$ ) risulta ortogonale all'asse  $x$ . I segmenti sull'asse  $x$

$$OA_0', OB_0', OA_1', OB_1', \dots$$

(ampiezze delle successive semioscillazioni), in quanto coincidono colle ascisse delle successive intersezioni  $A_0, B_0, A_1, B_1, \dots$ , della spirale con una stessa retta per l'origine, costituiscono, per n. prec., una progressione geometrica di ragione  $e^{-k\pi/\omega}$  e perciò tendono allo zero; onde risulta giustificato il nome di moto vibratorio smorzato che si dà al moto di  $P_x$ .

L'equazione del moto vibratorio smorzato sarà la prima delle (41), cioè la

$$(41_1) \quad x = re^{-kt} \cos(\omega t + \theta_0).$$

Siccome il vettore  $P-O$  ruota uniformemente, è senz'altro chiaro che fra due passaggi consecutivi di  $P_x$  pel polo  $O$  del moto intercede l'intervallo di tempo costante  $\pi/\omega$  (quale occorre per aumentare di  $\pi$  l'anomalia  $\omega t + \theta_0$  di  $P$ ) e che  $\pi/\omega$  è altresì la durata costante di ogni oscillazione semplice fra due posizioni di arresto consecutive,  $A_0'$  e  $B_0'$ , o  $B_0'$  e  $A_1'$ , ecc. (1). Perciò sarà pur

dono, come intersezioni delle stesse spire con  $OB_0$ , altrettanti punti  $B_{-1}, B_{-2}, \dots$ . Ma noi, per fissare le idee, consideriamo il moto di  $P$  a partire dall'istante in cui si trova in  $A_0$ .

(1) Si avverta per altro che in una oscillazione semplice, per es.,  $A_1/B_1'$ , l'istante del passaggio pel polo  $O$  del moto non è alla metà della durata  $\pi/\omega$  della oscillazione. Ciò risulta evidente ove si consideri il moto uniforme di rotazione del vettore  $P-O$ , e si osservi che l'anomalia corrispondente alle posizioni  $A_1', B_1'$ , è congrua, mod.  $2\pi$ , a  $\pi/2 - \alpha$  o, rispettivamente, a  $3\pi/2 - \alpha$ , mentre in  $O$  è congrua a  $\pi/2$ .

costante, ed uguale a  $T = 2\pi/\omega$ , la durata di ogni *oscillazione completa* (da  $A_0'$  ad  $A_1'$ , da  $B_0'$  a  $B_1'$ , da  $A_1'$  ad  $A_2'$ , ecc.). Questa durata costante  $T$  delle oscillazioni complete dicesi *periodo* del moto vibratorio smorzato, per quanto sia evidente che il moto non ha affatto carattere periodico (salvo che nella durata delle oscillazioni).

Per precisare quali alterazioni cinematiche avvengano nel moto di  $P_x$  a intervalli di tempo  $T = 2\pi/\omega$ , torniamo per un momento al punto  $P$  e ricordiamo che ad intervalli di tempo  $\pi/\omega$ , cioè di un *semiperiodo*  $T/2$ , le coordinate di  $P$  e le componenti della sua velocità e della sua accelerazione cambiano segno e, quanto al valore assoluto, si riducono, proporzionalmente, nel rapporto  $e^{-h\pi/\omega}$ . Se teniamo conto del fatto che  $P_x$  è la proiezione di  $P$  sull'asse  $x$  e ha per velocità e per accelerazione le proiezioni su  $x$  della velocità e dell'accelerazione di  $P$  e consideriamo l'effetto di due semiperiodi consecutivi, cioè di un intero periodo  $T = 2\pi/\omega$ , concludiamo che *a intervalli di tempo  $T = 2\pi/\omega$  la distanza di  $P_x$  dal polo e la velocità e l'accelerazione rispettive si riducono, proporzionalmente (e senza mutamento di segno), alla frazione  $e^{-2h\pi/\omega}$  dei loro valori primitivi.*

Si ha dunque che ogni intervallo di tempo  $T$  determina, per così dire, sui caratteri del moto una contrazione (smorzamento) nel rapporto  $e^{-2h\pi/\omega}$ .

Perciò tanto l'ascissa quanto la velocità e l'accelerazione di  $P_x$ , calcolate in una successione di istanti, susseguentisi a intervalli di un periodo o di un semiperiodo, danno luogo ciascuna ad una *progressione geometrica* (decescente) di ragione  $e^{-2h\pi/\omega}$  o  $e^{-h\pi/\omega}$  rispettivamente; onde i loro logaritmi naturali costituiscono una *progressione aritmetica* di differenza  $-2h\pi/\omega$  o  $-h\pi/\omega$  rispettivamente. Il numero  $h\pi/\omega$  dicesi *decremento logaritmico* (relativo al semiperiodo). Quanto più piccolo è  $h\pi/\omega$ , tanto meno sensibile è lo smorzamento (ad ogni semiperiodo), poichè è tanto più vicino ad 1 il rapporto di riduzione  $e^{-2h\pi/\omega}$ . Se  $h\pi/\omega = 0$ , cioè se  $h = 0$ , risulta senz'altro dall'equazione (41) del moto vibratorio smorzato che esso si riduce ad un moto armonico. Notiamo infine che il decremento logaritmico si può scrivere:

$$\frac{h\pi}{\omega} = \frac{hT}{2}$$

onde risulta anche

$$e^{-2h\pi/\omega} = e^{-hT}$$

40. Fissato un istante  $t = t_1$  si chiama, rispetto al moto oscillatorio smorzato (41<sub>1</sub>), *moto armonico tangente*, relativo all'istante  $t_1$ , il moto definito dall'equazione

$$x = re^{-\lambda t_1} \cos(\omega t + \theta_0).$$

Manifestamente, un tale moto si avrebbe, sempre per proiezione di  $P$  sull'asse  $x$ , se, nell'istante  $t_1$ , il punto  $P$ , anzichè proseguire lungo la spirale, prendesse a muoversi di moto circolare uniforme intorno ad  $O$  (ancora con la velocità angolare  $\omega$  e a partire dalla posizione raggiunta sulla spirale nell'istante  $t_1$ ).

La considerazione del moto armonico tangente è particolarmente vantaggiosa, allorchè la  $h$  è così piccola che, anche quando, a partire dall'istante  $t_1$ , si faccia variare  $t$  per la durata di parecchi periodi  $T$ , l'esponenziale  $e^{-\lambda t}$  si mantenga sensibilmente costante e, quindi, eguale ad  $e^{-\lambda t_1}$ . Perchè ciò accada occorre e basta manifestamente, che risulti trascurabile la costante  $hT$ , anche moltiplicata per un numero intero di qualche rilievo. Se, infatti, è  $n$  un tale numero, il tempo  $t$ , nell'intervallo dall'istante  $t_1 - nT$  all'istante  $t_1 + nT$ , si potrà porre sotto la forma  $t = t_1 + \alpha nT$  con  $|\alpha| < 1$ , e si avrà

$$re^{-\lambda t} = re^{-\lambda t_1 - \alpha n h T},$$

ossia, potendosi trascurare il numero  $-\alpha n h T$ ,

$$re^{-\lambda t} = re^{-\lambda t_1} = \text{cost.}$$

Finchè  $e^{-\lambda t}$  risulta sostituibile con  $e^{-\lambda t_1}$  (cioè per quel certo numero  $n$  di oscillazioni prima e dopo di  $t_1$ ) il moto oscillatorio smorzato si può, con sufficiente approssimazione, considerare coincidente col suo moto armonico tangente.

Nell'ampiezza  $re^{-\lambda t}$  del moto armonico tangente, relativo ad un generico istante  $t$ , l'esponenziale mette in rilievo lo smorzamento; ed è perciò che la  $h$  si chiama *costante di smorzamento*. Per quanto precede, lo smorzamento si dovrà dir piccolo, quando risulti piccolo (cioè minore del reciproco  $1/n$  di un intero abbastanza considerevole) il prodotto  $hT$ . Il reciproco  $1/h$  della costante  $h$  dicesi tempo di rilassamento e fornisce il tempo necessario a ridurre nel rapporto da 1 ad  $1/e$  l'ampiezza di oscillazione del moto armonico tangente. Si ha infatti

$$re^{-\lambda \left(t + \frac{1}{h}\right)} = \frac{1}{e} re^{-\lambda t}.$$

Perciò il prodotto  $hT$  si può interpretare come rapporto fra la durata  $T$  di una oscillazione completa e il tempo di rilassamento.

41. Teoricamente i moti oscillatori smorzati non si estinguono mai. Ma in pratica, se si prende un numero  $\tau$  positivo tale che  $h\tau \ll \omega$  trascurabile, basterà prendere  $t > 1/\tau$  perchè risulti sempre trascurabile la distanza del punto mobile dal polo  $O$ . Perciò, a partire dall'istante  $t = 1/\tau$ , il punto  $P$  si potrà considerare, praticamente, in quiete (rispetto agli assi di riferimento).

42. Riprendiamo qui da ultimo le (42) del n. 37

$$(42) \quad \dot{x} = -hx - \omega y, \quad \dot{y} = -hy + \omega x;$$

eliminatane la  $y$ , con che

$$\omega \dot{y} = h\dot{x} + (h^2 + \omega^2)x,$$

sostituiamo questa espressione di  $\omega \dot{y}$  nella derivata della prima delle (42)

$$\ddot{x} = -h\dot{x} - \omega \dot{y}.$$

Otteniamo così la equazione lineare a coefficienti costanti

$$(49) \quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + (h^2 + \omega^2)x = 0,$$

che lega l'ascissa, la velocità e l'accelerazione del punto  $P$ , animato del solito nostro moto vibratorio smorzato

$$(41_1) \quad x = re^{-ht} \cos(\omega t + \theta_0).$$

Questa funzione di  $t$  soddisfa alla equazione differenziale (49), comunque si fissino le costanti  $r, \theta_0$ ; e poichè la (49) è del 2° ordine, si conclude che la (41<sub>1</sub>) ne fornisce l'integrale generale ove si considerino le  $r$  e  $\theta_0$  come *costanti arbitrarie*. In altre parole <sup>(1)</sup> l'equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti, omogenea, del 2° ordine

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + (h^2 + \omega^2)x = 0,$$

dove  $h$  ed  $\omega$  sono due dati numeri positivi, definisce tutti e soli i moti vibratorii smorzati di periodo  $2\pi/\omega$  e di costante di smorzamento  $h$ .

Com'è ben naturale, per  $h = 0$  la (49) si riduce all'equazione differenziale (39<sub>1</sub>) dei moti armonici (n. 34).

(1) Non sarà inutile osservare che, senza pregiudizio della generalità, si può, se si vuole, ritenere  $r > 0$ . Infatti ogni espressione (41<sub>1</sub>) può anche scriversi:

$$-re^{-ht} \cos(\omega t + \theta_0 + \pi);$$

e delle due basta considerare quella in cui il primo fattore ( $r$  o  $-r$ ) è  $> 0$ .

43. MOTI DEFINITI DA UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE OMOGENEA DEL 2° ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI. — Movendo dall'osservazione del n. prec., ci proponiamo qui, inversamente, di studiare, in generale, i moti per i quali sussiste una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti fra l'ascissa (curvilinea se non si tratta di moto rettilineo), la velocità (scalare) e l'accelerazione (tangenziale); cioè i moti definiti da un'equazione differenziale lineare omogenea del 2° ordine a coefficienti costanti (e, beninteso, reali)

$$(50) \quad \ddot{x} + 2hx + kx = 0.$$

Moti siffatti si presentano spontaneamente in vari ordini di questioni meccaniche e fisiche.

Cominciando con alcuni richiami di Calcolo, ricordiamo che ogni equazione differenziale lineare del 2° ordine nella funzione incognita  $x$  della variabile  $t$  ammette due soluzioni  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  linearmente indipendenti, cioè tali che il loro rapporto non è costante; e l'integrale generale dell'equazione è dato da

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t),$$

dove  $c_1$ ,  $c_2$  sono le costanti arbitrarie.

Nel caso di un'equazione a coefficienti costanti, quale la (50), cercando le soluzioni della forma  $e^{zt}$  dove  $z$  denota una costante, si trova, che, avendosi per sostituzione nella (50)

$$e^{zt}(z^2 + 2hz + k) = 0,$$

la  $z$  deve soddisfare all'equazione algebrica di 2° grado

$$(51) \quad z^2 + 2hz + k = 0.$$

Se quest'equazione ha due radici distinte  $z_1$ ,  $z_2$ , cioè se  $h^2 \neq k$ , si ottengono così le due soluzioni particolari  $e^{z_1t}$ ,  $e^{z_2t}$ ; talchè l'integrale generale è dato da

$$(52) \quad c_1e^{z_1t} + c_2e^{z_2t}.$$

Se invece è  $h^2 = k$  e perciò la (51) ha la radice doppia  $-h$ , si trova in tal modo la sola soluzione particolare  $e^{-ht}$ ; ma si verifica agevolmente che in questo caso una seconda soluzione, linearmente indipendente, è data da  $te^{-ht}$ ; cosicchè l'integrale generale diventa

$$(53) \quad (c_1 + c_2t)e^{-ht}.$$

Ciò premesso, passiamo allo studio dei moti definiti dalla (50); ed anzitutto notiamo che, se  $h$  è negativo ed è precisamente

$h = -h_1$ , talchè la (50) si possa scrivere

$$(50') \quad \ddot{x} - 2h_1\dot{x} + kx = 0,$$

basta eseguire il cambiamento di variabile

$$t_1 = -t$$

perchè risulti

$$\dot{x} = -\frac{dx}{dt_1}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt_1^2}$$

e quindi la (50') si trasformi nella equazione

$$(50'') \quad \frac{d^2x}{dt_1^2} + 2h_1\frac{dx}{dt_1} + kx = 0,$$

in cui il coefficiente di  $dx/dt_1$  è positivo. L'integrale generale della (50') si otterrà ponendo  $t = -t_1$ , nell'integrale generale della (50''), cosicchè, interpretando cinematicamente, possiamo dire che ogni moto definito dalla (50') si ottiene immaginando di invertire l'ordine naturale di successione dei tempi in uno dei moti definiti dalla (50'') (*moto inverso*). Perciò in ultima analisi, volendo discutere tutti i possibili moti definiti dalla (50), basterà prendere in esame diretto le due ipotesi  $h > 0$  e  $h = 0$ , avendo cura di considerare, accanto ad ogni moto ottenuto nella prima ipotesi, il rispettivo moto inverso.

Ora per l'accennata discussione, giova distinguere tre casi, secondo che è  $h^2 < k$  o  $h^2 > k$  o  $h^2 = k$ .

1)  $h^2 < k$  (il che implica  $k > 0$ ).

In tale ipotesi, se si pone  $k - h^2 = \omega^2$ , la (50) diventa

$$\ddot{x} - 2hx + (h^2 + \omega^2)x = 0;$$

e sappiamo già (n. 42) che questa equazione differenziale caratterizza per  $h > 0$  i moti oscillatori smorzati (di periodo  $2\pi/\omega$  e costante di smorzamento  $h$ ) e per  $h = 0$  i moti armonici (di periodo  $2\pi/\omega$ ).

Il caso  $h < 0$ , che qui si presenta come nuovo, corrisponde ai moti inversi degli oscillatori smorzati, cioè ai moti che per ovvie ragioni, si chiamano *moti espansivi*.

Del resto è facile ritrovar qui direttamente le equazioni orarie di questi vari moti, partendo dai risultati riassunti dappprincipio sulla forma dell'integrale generale della (50). Sotto l'ipotesi  $h^2 < k$  le due radici  $z_1, z_2$  della (51) sono (per qualsiasi  $h$ ) complesse coniugate e si ha precisamente

$$z_1 = -h + i\omega, \quad z_2 = -h - i\omega,$$



dove  $i$  denota, secondo l'uso, l'unità immaginaria. Risultano perciò complesse coniugate le due soluzioni particolari

$$e^{z_1 t} = e^{-ht} e^{i\omega t}, \quad e^{z_2 t} = e^{-ht} e^{-i\omega t},$$

che, combinate linearmente con coefficienti costanti arbitrari, danno l'integrale generale. Poichè l'equazione oraria di un moto non può essere che reale, qui si dovranno scegliere codesti coefficienti arbitrari in modo che risulti reale la indicata combinazione.

A tale scopo basta prenderli complessi coniugati, cioè porre

$$c_1 = \frac{1}{2} r e^{i\theta_0}, \quad c_2 = \frac{1}{2} r e^{-i\theta_0},$$

dove  $r$ ,  $\theta_0$  denotano due costanti arbitrarie, la prima delle quali si può sempre (p. 104, nota) ritenere positiva. Con ciò l'integrale generale assume la forma

$$x = r e^{-ht} [e^{i(\omega t + \theta_0)} + e^{-i(\omega t + \theta_0)}],$$

ossia, per la nota formula di EULERO <sup>(1)</sup>,

$$x = r e^{-ht} \cos(\omega t + \theta_0);$$

e questa equazione oraria, mentre per  $h > 0$  o  $h = 0$  si identifica con quella già nota dei moti oscillatori smorzati o, rispettivamente, dei moti armonici, fornisce per  $h < 0$  l'equazione oraria dei moti espansivi.

B)  $h^2 > k$ .

Sotto questa ipotesi la (51) ammette due radici reali distinte

$$z_1 = -h + \sqrt{h^2 - k}, \quad z_2 = -h - \sqrt{h^2 - k},$$

onde l'integrale generale della equazione differenziale (50) è dato da

$$(52) \quad x = c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t}.$$

In questa equazione del moto si riconosce (e il dimostrarlo costituirà un facile esercizio) che il moto è in ogni caso aperiodico e presenta al più una inversione di senso. Considerandolo per tutta la sua durata (da  $t = -\infty$  a  $t = +\infty$ ) si assoda che,

<sup>(1)</sup> LEONARDO EULERO, n. a Basilea nel 1707, m. a Leningrado nel 1783, diresse successivamente le Accademie delle Scienze di Berlino e di Leningrado. Fu uno dei maggiori e più fecondi matematici di tutti i tempi, sia nel campo dell'analisi pura che delle sue applicazioni alla meccanica, alla fisica, e alle più svariate questioni tecniche. In verità pare che la formula citata nel testo risalga al matematico inglese R. Cotes (1682-1716).

secondo le varie possibili scelte delle costanti arbitrarie  $c_1, c_2$ , si verifica l'uno o l'altro dei seguenti tre casi:

a) (che potrebbe dirsi il caso generale, come quello che si presenta se non si fanno speciali ipotesi sulle costanti) il mobile proviene da distanza infinita e poi si allontana indefinitamente (con o senza inversione di senso):

b) il mobile proviene da distanza infinita e (con o senza inversione di senso) tende ad una posizione determinata a distanza finita (*smorzamento asintotico*);

c) il mobile proviene dalle immediate vicinanze di una data posizione a distanza finita per poi allontanarsene indefinitamente (con o senza inversione di senso).

C)  $h^2 = k$ .

Questa ipotesi, che conduce all'integrale generale

$$(53) \quad x = (c_1 + c_2 t) e^{-2t},$$

si può considerare come un caso limite della precedente ipotesi B) e dà luogo, anch'essa, a moti aperiodici, appartenenti all'uno o all'altro dei tre tipi a), b), c), or ora indicati. Rientra in quest'ultimo (per  $h = k = 0$ ) il moto uniforme.

### § 8. - Moti centrali. Moti kepleriani.

44. Il moto di un punto  $P$  dicesi *centrale*, se in esso la linea d'azione dell'accelerazione (quando ha un senso, cioè quando l'accelerazione è diversa da zero) passa sempre per un punto  $O$ , fisso rispetto al riferimento del moto, detto *centro del moto*.

In forma equivalente: l'accelerazione  $\alpha$  ed il vettore  $P - O$  (ove non siano eventualmente nulli) hanno la stessa linea d'azione; sicchè si annulla il momento  $(P - O) \wedge \alpha$  dell'accelerazione rispetto al centro  $O$ .

Viceversa, si vede subito che se  $(P - O) \wedge \alpha = 0$ , il moto è centrale. Sappiamo infatti dalla teoria dei vettori (I, n. 29) che, quando s'annulla il momento di un vettore  $\alpha$  applicato in  $P$ , rispetto al polo  $O$ , o lo stesso vettore  $\alpha$  è nullo, oppure la sua linea d'azione va a passare per  $O$ ; come appunto si richiede perchè il moto sia centrale. Dunque la

$$(54) \quad (P - O) \wedge \alpha = 0$$

costituisce la condizione vettoriale caratteristica dei moti centrali.

45. Dalla (54) segue agevolmente che la velocità areolare di ogni moto centrale rispetto al centro  $O$ , è un vettore costante.

Infatti, ricordiamo (n. 21) che la velocità areolare rispetto ad  $O$  è data, a meno del fattore  $1/2$ , da  $(P - O) \wedge v$ . Ora, qualunque essa sia, si ottiene, derivandola rispetto al tempo,

$$\frac{d}{dt} [(P - O) \wedge v] = \dot{P} \wedge v + (P - O) \wedge a,$$

ossia, in quanto è  $\dot{P} \wedge v = v \wedge v = 0$ ,

$$(55) \quad \frac{d}{dt} [(P - O) \wedge v] = (P - O) \wedge a.$$

Questa identità vale per qualsiasi moto: nel caso dei moti centrali, ne risulta, in base alla (54),

$$\frac{d}{dt} [(P - O) \wedge v] = 0,$$

onde si conclude appunto

$$(56) \quad (P - O) \wedge v = c,$$

dove  $c$  denota un vettore costante in grandezza e direzione (doppio della velocità areolare del moto centrale).

Si può aggiungere che l'equazione (56) è, al pari della (54), caratteristica per i moti centrali.

Infatti essa è una conseguenza della (54), come s'è visto ora; e reciprocamente, ammessa la (56), basta derivare e tener conto della (55), per ritrovare immediatamente la (54).

Consideriamo in particolare la lunghezza del momento  $(P - O) \wedge v$  della velocità rispetto al centro  $O$ . Tale lunghezza si può esprimere come prodotto di  $v$  (grandezza della velocità) per la distanza di  $O$  dalla linea d'azione di  $v$ . Con ciò la costanza di  $(P - O) \wedge v$  dà luogo al seguente corollario:

*In ogni moto centrale è costante il prodotto della velocità intensiva per la distanza della tangente alla traiettoria dal centro del moto.*

46. È interessante notare che ogni moto centrale è necessariamente un moto piano.

Ciò si vede ovviamente osservando, che, per essere le accelerazioni situate sui piani osculatori (n. 26), tali piani devono passare tutti per il centro; e che quindi il piano (in generale univocamente determinato) passante per il centro e per la velocità, relativa ad un istante generico  $t$ , contiene anche la velocità relativa all'istante successivo  $t + dt$ . A partire da questo istante si ragiona nello

stesso modo; e si è così tratti a concludere che il piano considerato contiene la velocità relativa ad un istante qualsiasi, e quindi tutta intera la traiettoria del mobile.

Per essere completi, conviene considerare anche l'eventualità che il centro  $O$  e la velocità del mobile nell'istante generico  $t$  non individuino un piano. Ciò accade quando codesta velocità va costantemente a passare per  $O$  (o in particolare si annulla). Il moto è in tale ipotesi rettilineo (oppure degenera nella quiete); comunque, rientra ancora come caso particolare fra i moti piani. Si constata che il mobile (quando non sta fermo) si muove sopra una retta, riflettendo che la velocità, quando non è nulla, è radiale. Lo stesso quindi segue per ogni spostamento (infinitesimo) di  $P$  durante un tempuscolo  $dt$ . È chiaro pertanto che  $P$  non abbandona mai il raggio vettore spiccato da  $O$ , sul quale si trova inizialmente.

47. Del resto la dimostrazione analitica del fatto, che ogni moto centrale è piano, risulta pressochè immediata.

Ripresa la

$$(56) \quad (P - O) \wedge v = c,$$

e, supposto dapprima  $c \neq 0$ , moltiplichiamo scalarmente ambo i membri per  $P - O$ : poichè  $P - O$  è ortogonale a  $(P - O) \wedge v$ , si conclude

$$c \times (P - O) = 0.$$

Di qui discende che  $P - O$  è costantemente perpendicolare a  $c$ , e quindi il punto mobile  $P$  giace sempre nel piano normale a  $c$  condotto per  $O$ . Ecco provato l'asserto, e precisato il piano del moto. Vale la pena di rilevare che ove si indichino con  $c_1, c_2, c_3$  le componenti di  $c$  e si rammenti che, assunto  $O$  per origine delle coordinate, le componenti di  $P - O$  non sono altro che le coordinate  $x, y, z$  del mobile, l'equazione precedente si scrive

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0.$$

È questa l'equazione cartesiana del piano su cui  $P$  si trova costantemente.

Resta da esaminare il caso particolare in cui  $c$  si annulla. Possiamo intanto escludere che ciò provenga dall'identico annullarsi di  $P - O$ , caso banale, in cui il mobile sta fermo in  $O$ . Biferiamoci dunque a un intervallo di tempo, nel quale  $P - O$  si mantiene diverso da zero. Posto  $P - O = pu$ , dove  $u$  designa il ver-

sore di  $P - O$  e  $\rho$  la distanza  $OP$ , si trae dalla (56), nel caso qui considerato di  $c = 0$ ,

$$v = c(P - O) = c\rho u,$$

dove  $c$  denota un conveniente scalare (che, in generale, sarà, al pari di  $\rho$ , funzione del tempo). Di qui, essendo  $v = d(P - O)/dt$ , si trae

$$\dot{\rho}u + \rho\dot{u} = c\rho\dot{u};$$

$$v = \frac{d\rho u}{dt}$$

e poichè  $\dot{u}$  non può essere (I, n. 65) che ortogonale ad  $u$  o nullo, si conclude, moltiplicando scalarmente per  $\dot{u}$ ,

$$\rho\dot{u} \times \dot{u} + \rho\dot{u} \times \dot{u} = \rho\dot{u} \times \dot{u} = 0,$$

il che, per essere  $\rho$  diverso da zero, dà

$$\dot{u} = 0;$$

cioè il vettore  $u$  è costante, e il moto di  $P = O + \rho u$  risulta rettilineo (caso particolare dei moti piani).

48. Poichè i moti centrali sono piani, conviene caratterizzarli formalmente restando nel piano del moto, assunto come piano coordinato  $Oxy$ . Con ciò si annullano  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  e il vettore  $(P - O) \wedge a$  ha due componenti nulle, mentre la terza vale  $x\ddot{y} - y\ddot{x}$ . Se ne deduce, in base alla (54), che l'equazione differenziale

(54')

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$$

è caratteristica per moti centrali. Avendosi identicamente

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

si può sostituirla coll'equivalente

(56')

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \text{cost.}$$

che esprime (n. 20) la costanza della velocità areolare, e scende direttamente (proiettando sull'asse delle  $s$ ) dalla (56).

#### 49. ACCELERAZIONE RADIALE E TRASVERSA NEL MOTO PIANO. —

Per discutere più agevolmente una importante categoria di moti centrali procuriamoci anzitutto, per un moto piano qualsiasi, riferito a coordinate polari (n. 19), le espressioni delle accelerazioni radiale e trasversa, vale a dire delle componenti  $a_r$  e  $a_\theta$  di  $a$ , secondo la direzione orientata  $OP$  e la direzione ortogonale, orientata rispetto ad  $OP$  come l'asse  $y$  è orientato rispetto all'asse  $x$ .

Indicando, come al n. 19, con  $u$  e  $\tau$  i versori di codeste due direzioni orientate, si ha per la velocità  $v$ , secondo quanto si è allora visto, l'espressione

$$v = \dot{\rho}u + \rho\dot{\theta}\tau,$$

da cui, derivando rispetto al tempo, si deduce

$$a = \ddot{\rho}u + \frac{d}{dt}(\rho\dot{\theta})\tau + \dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\tau;$$

e, poichè, come si è riconosciuto al citato n. 19, sussistono le identità

$$\dot{u} = \dot{\theta}\tau, \quad \dot{\tau} = -\dot{\theta}u,$$

l'espressione dianzi ottenuta per l'accelerazione si può scrivere

$$a = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)u + \left(\frac{d}{dt}(\rho\dot{\theta}) + \dot{\rho}\dot{\theta}\right)\tau.$$

Di qui si desumono senz'altro, come coefficienti di  $u$  e  $\tau$ , le componenti radiale e trasversa  $a_\rho$  e  $a_\theta$  di  $a$ ; e si ha precisamente

(57)

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2,$$

(58)

$$a_\theta = \frac{d}{dt}(\rho\dot{\theta}) + \dot{\rho}\dot{\theta}.$$

A quest'ultima si può anche dare l'una o l'altra delle due forme seguenti:

(58')

$$a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})$$

Notiamo che, nel caso di un moto circolare intorno ad  $O$  ( $\rho = \text{cost.}$ ), le (57), (58) si riducono alle

(59)

$$a_\rho = -\rho\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = \rho\ddot{\theta}.$$

Son queste, pel moto circolare, le accelerazioni normale e tangenziale del n. 26, con la sola modificazione che la prima è qui valutata in senso centrifugo (da  $O$  verso  $P$ ), anzichè centripeto (da  $P$  verso  $O$ ).

**50. FORMULA DEL BINET.** — Ciò premesso, applichiamo le formule così ottenute al caso dei moti centrali. Per la definizione stessa, essi sono caratterizzati dall'annullarsi della accelerazione trasversa  $a_\theta$  (rispetto ad un determinato punto  $O$ , centro del moto); talchè la rispettiva equazione differenziale caratteristica, in coordinate polari, è data, in forza della seconda delle (58'), dalla

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0,$$

la quale, com'è naturale, dice soltanto che è costante la  $\rho^2\dot{\theta}$  (doppio della velocità areolare).

Tenendo conto della

$$(60) \quad \rho^2\dot{\theta} = c,$$

si può dare alla accelerazione radiale  $a_\rho$  (che in questo caso dei moti centrali dà, in valore assoluto, l'intera accelerazione del punto) una espressione puramente geometrica, cioè indipendente dalle derivate di  $\rho$  e  $\theta$  rispetto a  $t$ , e far intervenire soltanto l'equazione polare  $\rho = \rho(\theta)$  della traiettoria. In virtù di tale equazione, il raggio vettore  $\rho$  si può considerare funzione di  $t$  pel tramite di  $\theta$ , talchè si ottiene

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\theta} \dot{\theta},$$

ossia, eliminando  $\dot{\theta}$  mediante la (60),

$$\dot{\rho} = \frac{c}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} = -c \frac{d}{d\theta} \frac{1}{\rho}.$$

Se, riguardando ancora il secondo membro come una funzione di  $t$  composta mediante la  $\theta$ , deriviamo ulteriormente rispetto a  $t$  e poniamo, in base alla (60),  $\dot{\theta} = c/\rho^2$ , otteniamo

$$\ddot{\rho} = -\frac{c^2}{\rho^3} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{\rho},$$

e, sostituendo quest'espressione di  $\ddot{\rho}$  nella (57) ed eliminando ancora una volta  $\dot{\theta}$  mediante la (60), perveniamo all'annunciata espressione dell'accelerazione radiale

$$(61) \quad \left\{ a_\rho = -\frac{c^2}{\rho^3} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\rho^2} \frac{1}{\rho} \right) \right\},$$

che è nota sotto il nome di *formula del BINET* <sup>(1)</sup>, per quanto fosse nota già prima al *NEWTON* <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> JACQUES BINET, nato a Rennes nel 1786, m. a Parigi nel 1856, insegnò Astronomia al Collège de France.

<sup>(2)</sup> ISAAC NEWTON n. in un villaggio della Contea di Lincoln nel 1642 (anno della morte di GALILEI), m. in un sobborgo di Londra nel 1727. Qui basti ricordare i suoi *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, editi la prima volta in Londra nel 1687, dove sono esposti (nella forma divenuta subito classica) i fondamenti della Meccanica razionale e della Fisica matematica e alcune loro conseguenze grandiose. Per poterle ricavare, il *NEWTON* si

**51. MOTO KEPLERIANO.** — Un moto centrale particolarmente interessante è quello dei pianeti attorno al sole. Tale moto diceasi *kepleriano*, essendo stato KEPLERO <sup>(1)</sup> il primo che ne enunciò le leggi.

Le leggi di KEPLERO sono, come è noto, le seguenti:

1<sup>a</sup>) *Le orbite dei pianeti sono ellissi e il Sole ne occupa uno dei fuochi.*

2<sup>a</sup>) *Le aree descritte dal raggio vettore che va dal Sole a un pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle.*

3<sup>a</sup>) *I quadrati dei tempi impiegati dai vari pianeti a percorrere le loro orbite (durata delle rivoluzioni) sono proporzionali ai cubi dei semiasse maggiori.*

In virtù della legge 2<sup>a</sup>, il moto di ciascun pianeta è centrale (n. 45) ed ha il Sole per centro.

Determiniamo il valore che compete alla componente  $a_r$  dell'accelerazione secondo il raggio vettore.

È noto dalla Geometria analitica che, se si prende il polo in uno dei due fuochi di una ellisse e l'asse polare diretto secondo l'asse maggiore verso il vertice più vicino, e si denota con  $a$  il semiasse maggiore, con  $b$  il semiasse minore, con  $e$

l'eccentricità

$$\sqrt{1 - b^2/a^2},$$

con  $p$  il parametro  $b^2/a$ , si ha

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

creò da sè lo strumento adatto, cioè in sostanza il Calcolo infinitesimale. Egli divide quindi con BONAVENTURA CAVALIERI e col LEIBNIZ anche il merito della scoperta del Calcolo, spettando però al LEIBNIZ l'espressivo simbolismo dei differenziali, tuttora in uso.

Il NEWTON si considera come il maggior genio scientifico che sia mai esistito. Sulla sua tomba, nell'Abbazia di Westminster a Londra, sta scritto:

*Sibi gratulentur Mortales tale tantumque exstitisse  
Humani Generis Decus.*

(1) JOHANN KEPLER, nato in un villaggio del Württemberg nel 1571, m. a Ratisbona nel 1630. Fu dapprima assistente e poi successore del danese TYCHO BRAHE quale matematico ed astronomo della corte imperiale a Praga. Delle celebri tre leggi, le prime due furono pubblicate in *Astronomia nova, sive etc.* (Heidelbergae, 1609) e la terza in *Harmonices mundi Libri V, etc.* (Linz, 1619).



Di qui si ricava successivamente

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \theta, \quad \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} = -\frac{e}{p} \cos \theta, \quad \frac{1}{\rho} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} = \frac{1}{p}.$$

La (61) diventa in tal caso

$$a_e = -\frac{c^2}{p} \frac{1}{\rho^2},$$

onde intanto vediamo che l'accelerazione è sempre diretta verso il Sole ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza del pianeta da esso.

Inoltre è facile dedurre dalla 3<sup>a</sup> legge di KEPLERO che il fattore di proporzionalità

$$\frac{c^2}{p} = \frac{ac^2}{b^2}$$

è lo stesso per tutti i pianeti.

Indicando infatti con  $T$  la durata della intera rivoluzione, e ricordando che  $c$  è il doppio della velocità areolare, è manifesto che l'area  $\pi ab$  dell'orbita ellittica ci è data anche da  $cT/2$ .

Abbiamo quindi

$$c = \frac{2\pi ab}{T};$$

onde, quadrando e dividendo per  $p = b^2/a$ , risulta

$$\frac{c^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2};$$

ma per la 3<sup>a</sup> legge il rapporto  $a^3/T^2$  è sempre il medesimo, qualunque sia il pianeta che si considera; lo stesso può dunque dirsi del rapporto  $c^2/p$ .

### § 9. - Moto elicoidale uniforme.

52. Come ultimo esempio di moto, consideriamo il moto composto (n. 6) di un moto circolare uniforme su di un dato piano  $\pi$  e di un moto rettilineo uniforme lungo una retta perpendicolare a  $\pi$ .

Dalla definizione stessa di moto composto risulta che si ottiene sempre il medesimo moto circolare uniforme, proiettando il punto mobile  $P$  su di un qualsiasi altro piano parallelo a  $\pi$ ; e si ha, parimente, il medesimo moto rettilineo uniforme, proiettando  $P$  su di una qualsiasi retta perpendicolare a  $\pi$ . Perciò si può sup-

porre, senza restrizione di generalità, che la traiettoria del moto componente rettilineo sia la perpendicolare a  $\pi$  nel centro  $O$  della traiettoria del moto componente circolare. Supponiamo di contare i tempi dall'istante in cui il punto che descrive codesta perpendicolare di moto uniforme si trova in  $O$ ; e assumiamo come origine delle coordinate il punto  $O$ , come asse  $z$  la traiettoria del moto componente rettilineo, orientata nel verso rispetto a cui il moto componente circolare appare destro, e, infine, come asse  $x$  positivo la semiretta che da  $O$  va alla posizione occupata su  $\pi$  dal punto  $P_1$ , che si muove di moto circolare uniforme, nell'istante  $t = 0$ , cioè nell'istante in cui il punto  $P_2$ , che descrive l'asse delle  $z$  di moto uniforme, passa per  $O$ . L'asse orientato  $y$  risulta univocamente determinato dalla solita condizione che la terna  $Oxyz$  sia destra.

Ciò posto, siano  $r$  ed  $\omega$  il raggio della traiettoria di  $P_1$ , e la rispettiva velocità angolare (*costante positiva*); sia  $V$  il valore assoluto della velocità (pur essa *costante positiva*) del moto rettilineo di  $P_2$ .

Le equazioni del moto circolare uniforme del punto  $P_1$ , in quanto si sono scelte l'origine dei tempi e la terna di riferimento in modo che, nell'istante  $t = 0$ ,  $P_1$  assuma nel piano  $xy$  la posizione di coordinate  $r, 0$ , saranno date, pel n. 33, da

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t;$$

mentre il moto uniforme di  $P_2$  sull'asse  $z$ , in quanto  $P_2$  per  $t = 0$  deve trovarsi in  $O$ , ammetterà l'equazione

$$z = \pm Vt,$$

dove andrà preso il segno  $+$  o  $-$ , secondochè, rispetto al senso positivo fissato sull'asse  $z$ , il dato moto rettilineo uniforme di  $P_2$  risulta progressivo o retrogrado.

Componendo i due moti di  $P_1$  e di  $P_2$ , avremo pel *moto composto* le equazioni

$$(62) \quad x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t, \quad z = \pm Vt.$$

Quadrando e sommando le prime due di queste equazioni si trova:

$$(63) \quad x^2 + y^2 = r^2;$$

onde si conferma la circostanza, ben evidente a priori, che il punto  $P$  animato del moto (62), si muove sulla superficie cilindrica rotonda di asse  $z$  e raggio  $r$ .

La velocità  $v$  di  $P$  ha le componenti

$$\dot{x} = -r\omega \sin \omega t, \quad \dot{y} = r\omega \cos \omega t, \quad \dot{z} = \pm V,$$

e quindi l'intensità

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + V^2}$$

la quale risulta *costante*, talchè il *moto composto* (62) è uniforme al pari dei componenti.

Inoltre dei tre coseni direttori di  $v$ , il terzo

$$\frac{\dot{z}}{v} = \pm \frac{V}{\sqrt{r^2\omega^2 + V^2}}$$

è pur esso costante; ciò vuol dire che la velocità, e quindi la tangente alla traiettoria, si mantiene, durante il moto, inclinata di un angolo costante rispetto all'asse  $z$ , ossia rispetto alle singole generatrici del cilindro di rotazione (63), che il punto  $P$  mano mano interseca nel suo cammino. Di qui si conclude che la traiettoria è un'elica di codesto cilindro; onde potremo caratterizzare il moto (62), chiamandolo un moto elicoidale uniforme, di asse  $z$ , di raggio  $r$  e di angolo di inclinazione

$$\text{arc cos } \pm \frac{V}{\sqrt{r^2\omega^2 + V^2}}.$$

L'accelerazione, che, trattandosi di moto uniforme, prevediamo riuscirà tutta centripeta (n. 26), ha le componenti

$$\ddot{x} = -r\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x; \quad \ddot{y} = -r\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y; \quad \ddot{z} = 0.$$

Essa ammette l'intensità costante  $\omega^2 r$  ed è diretta lungo la perpendicolare dal punto  $P$  all'asse  $z$ ; cosicchè coincide (n. 33) con l'accelerazione che al punto spetterebbe nel moto circolare uniforme di velocità angolare  $\omega$ , sul piano perpendicolare all'asse e con centro sull'asse stesso.

Notiamo infine che in un intervallo di tempo  $2\pi/\omega$  (periodo del moto circolare componente) il punto  $P_1$  percorre l'intera sua circonferenza, e quindi il punto  $P$  descrive una intera *spira* dell'elica (cioè un arco di elica compreso fra due sue intersezioni consecutive con una stessa generatrice del cilindro); corrispondentemente, la terza coordinata  $z = \pm Vt$  di  $P$  varia di

$$\pm \frac{2V\pi}{\omega},$$

onde  $2V\pi/\omega$  sarà il passo dell'elica (cioè la distanza fra due intersezioni consecutive dell'elica con una medesima generatrice); esso dipende soltanto dal rapporto  $V/\omega$  delle velocità dei due moti componenti ed è, più precisamente, proporzionale direttamente

alla velocità del moto rettilineo, inversamente a quella del moto circolare.

Un moto elicoidale uniforme si dice *destro* o *sinistro*, secondo che è tale il moto componente circolare rispetto all'asse del moto, orientato nel senso del moto componente rettilineo. Siccome nelle (62) l'asse  $z$  positivo si intende orientato in modo che, rispetto ad esso, il moto circolare appaia destro, avremo che le (62) rappresentano un moto elicoidale destro o sinistro, secondo che nella terza di esse si prenda il segno  $+$  o  $-$ .

## CAPITOLO III.

### CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI

#### § 1. — Generalità.

1. PRIMA IMPOSTAZIONE COL SUSSIDIO DI ASSI SOLIDALI. — Dopo avere studiato nel Cap. prec. i moti di un solo punto, passiamo alla Cinematica delle *figure* o *sistemi di punti* (in numero finito o infinito, eventualmente distribuiti, in quest'ultimo caso, con continuità su linee o superficie o in regioni spaziali); e anzitutto occupiamoci dei moti di un qualsivoglia *sistema rigido*, cioè di una figura che, durante il moto, conservi inalterate le mutue distanze dei suoi punti, presi a due a due in tutti i modi possibili. Così si concepiscono le figure in Geometria elementare, quando, nello stabilire i postulati della uguaglianza, si immagina di muoverle nello spazio, l'una rispetto all'altra, per verificarne la eventuale sovrapponibilità.

Ora una prima, fondamentale impostazione della Cinematica dei sistemi rigidi è suggerita dalla rappresentazione cartesiana dei punti e dei vettori (I, nn. 8, 19).

Sia  $\Omega\xi\eta\zeta$  la terna di assi, cui intendiamo riferire il moto di un sistema rigido  $S$ . Per tener conto della rigidità di  $S$ , consideriamo una seconda terna  $Oxyz$ , destra al pari di  $\Omega\xi\eta\zeta$  e invariabilmente collegata ad  $S$ ; e, per intenderci, diciamo *fissa* la prima terna, *solidale* quest'ultima. Dal fatto che la  $Oxyz$  e il dato sistema  $S$  costituiscono ancora, nel loro insieme, un sistema rigido consegue che ogni punto  $P$  di  $S$  (o anche semplicemente solidale con  $S$ ) pur movendosi rispetto ad  $\Omega\xi\eta\zeta$ , conserva, durante il moto, posizione invariata rispetto ad  $Oxyz$ ; in altre parole, le coordinate  $x, y, z$  di  $P$ , rispetto alla terna solidale, risultano costanti (cioè indipendenti dal tempo).

Perciò il moto del generico punto  $P$  di  $S$ , rispetto ad  $\Omega\xi\eta\zeta$ , resta completamente caratterizzato, quando da un lato sia prefissata la posizione di  $P$  nel sistema, per mezzo delle sue coordinate  $x, y, z$  rispetto ad  $Oxyz$ , e dall'altro si conosca, istante per istante, la posizione di codesta terna solidale rispetto a quella fissa; e a quest'ultimo scopo basta siano assegnati in funzione del

tempo (e con riferimento ad  $\Omega\xi\eta\zeta$ ) l'origine  $O$  e i tre versori fondamentali  $i, j, k$  della terna solidale.

In queste condizioni, l'equazione (geometrica) del moto del generico punto  $P$  di  $S$  è fornita dalla identità (I, n. 19)

$$(1) \quad P = \dot{O} + xi + yj + zk,$$

purchè (giova ripeterlo)  $O, i, j, k$  si intendano definiti in funzione di  $t$  con riferimento agli assi fissi e le  $x, y, z$  si considerino costanti.

Se si introducono, rispetto ad  $\Omega\xi\eta\zeta$ , le coordinate  $\xi, \eta, \zeta$  di  $P$  e  $\alpha, \beta, \gamma$  di  $O$ , nonchè le componenti  $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$  ( $h = 1, 2, 3$ ) di  $i, j, k$  (o loro coseni direttori), si ottengono dalla (1), per proiezione sugli assi fissi, le

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ \eta = \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ \zeta = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{cases}$$

Sono queste le equazioni generali del moto di un sistema rigido, in quanto definiscono direttamente in funzione del tempo le coordinate del punto generico  $P$  di  $S$  rispetto alla terna fissa, quando di  $P$  sia prefissata, per mezzo delle costanti  $x, y, z$ , la posizione nel sistema.

In codeste equazioni compaiono, oltre siffatte costanti, dodici funzioni del tempo, cioè le  $\alpha, \beta, \gamma$  e i nove coseni direttori  $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$  ( $h = 1, 2, 3$ ), i quali ultimi, corrispondendo a tre versori, a due a due ortogonali, sono legati dalle note relazioni (I; form. (15) del n. 20)

$$\begin{aligned} \alpha_h^2 + \beta_h^2 + \gamma_h^2 &= 1, & (h = 1, 2, 3), \\ \alpha_h \alpha_k + \beta_h \beta_k + \gamma_h \gamma_k &= 0 & (h, k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Come già per le equazioni di un generico moto del punto (II, n. 5), ammetteremo che le funzioni  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_h, \beta_h, \gamma_h$ , siano tutte univalenti, finite, continue ed, anzi, derivabili (almeno fino al second'ordine) in tutto l'intervallo di tempo in cui è definito il moto.

Qui da ultimo giova notare che l'equazione (1) o le equivalenti (2) valgono non soltanto per ogni punto  $P(x, y, z)$ , che faccia parte del dato sistema rigido  $S$  in moto, ma anche per ogni altro punto che, pur non appartenendo ad  $S$ , si consideri come solidale col sistema; cosicchè dal moto di  $S$  resta definito un moto dell'intero spazio dei punti rigidamente connessi ad  $S$ . Si è così condotti a pensare sovrapposto allo spazio solidale colla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$  (spazio fisso) uno spazio solidale con  $S$  (o, ciò che è lo stesso, colla terna  $Oxyz$ ) e quindi in moto rispetto al primo. Perciò si

parla spesso di *moto rigido*, nel senso di moto di un intero spazio rigido, senza specificare il particolare sistema, considerato per definirlo.

2. SECONDA IMPOSTAZIONE DIRETTAMENTE DESUNTA DALLA INVARIABILITÀ DELLE MUTUE DISTANZE. — In un sistema rigido  $S$  in moto, due punti quali si vogliono  $P_1, P_2$  conservano inalterata la loro distanza  $r$ , talchè, durante tutto il moto, sussiste l'identità

$$(3) \quad (P_2 - P_1) \times (P_2 - P_1) = r^2,$$

dove lo scalare  $r$  è indipendente dal tempo. Di qui, per derivazione rispetto a  $t$ , si deduce

$$(4) \quad (P_2 - P_1) \times \left( \frac{dP_2}{dt} - \frac{dP_1}{dt} \right) = 0,$$

ossia

$$(5) \quad (P_2 - P_1) \times \frac{dP_2}{dt} = (P_2 - P_1) \times \frac{dP_1}{dt};$$

e questa equazione, ove si immagini divisa pel tensore  $r$  di  $P_2 - P_1$ , esprime l'eguaglianza delle componenti delle velocità  $\dot{P}_1$  e  $\dot{P}_2$  secondo la retta  $P_1P_2$ .

Poichè inversamente, dalla (5) si risale alla (4) e quindi, per integrazione, alla (3) con  $r$  costante, concludiamo, che i *moti rigidi di un sistema di punti sono caratterizzati dalla circostanza che ad ogni istante le velocità di due punti quali si vogliono del sistema hanno la stessa componente secondo la congiungente dei due punti*.

In altre parole, la differenza (geometrica) delle velocità di due punti è, ad ogni istante, ortogonale alla congiungente dei due punti; cosicchè, in particolare, se, ad un dato istante, un punto  $P_1$  ha velocità nulla, ogni altro punto  $P_2$  ha, in quello stesso istante, velocità normale alla retta  $P_1P_2$  (o nulla).

## § 2. — Moti traslatorii.

3. Prima di studiare il moto rigido più generale, consideriamo alcuni tipi di moti rigidi particolarmente semplici. E in primo luogo supponiamo che in un certo moto rigido si verifichi la circostanza, che ogni vettore  $P_2 - P_1$ , determinato da due punti in moto quali si vogliono, si mantenga costante, non solo in lunghezza come in ogni altro moto rigido, ma anche in direzione e verso. Ogni moto rigido siffatto dicesi traslatorio.

Riprendendo la equazione geometrica (1) di un moto rigido qualsiasi, si riconosce, che, se esso è traslatorio, debbono essere, in particolare, costanti i tre vettori fondamentali  $i, j, k$ . Inversamente, se, durante un moto rigido, i versori  $i, j, k$  sono costanti, tale risulta, in virtù della (1), per ogni punto  $P$  del sistema mobile, il vettore  $P - O$ , e quindi anche, per due quali si vogliano punti in moto, il vettore  $P_2 - P_1 = (P_2 - O) - (P_1 - O)$ , onde si tratta di un moto traslatorio. Perciò la (1) rappresenta un moto traslatorio sempre e solo quando i tre versori fondamentali degli assi mobili sono costanti.

Per avere la forma delle equazioni cartesiane di un moto traslatorio, immaginiamo di avere scelto inizialmente gli assi della terna mobile paralleli e di verso concorde a quelli della terna fissa; allora i versori  $i, j, k$ , che, trattandosi di un moto traslatorio, sono costanti, conserveranno durante tutto il moto, rispetto agli assi fissi, le componenti

$$1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1,$$

talchè le (2) assumeranno la forma

$$(6) \quad \xi = x + \alpha(t), \quad \eta = y + \beta(t), \quad \zeta = z + \gamma(t)$$

dove, in sostanza, le  $\alpha, \beta, \gamma$  designano le coordinate di un punto  $O$  qualsiasi del sistema mobile (o di un punto ad esso solidale).

#### 4. L'identità

$$(7) \quad P_2 - P_1 = \text{cost.},$$

valida per due punti quali si vogliano durante un moto traslatorio, esprime che il moto di  $P_2$  si può definire come quello dell'estremo di un vettore applicato costante, il cui punto di applicazione coincida istante per istante con la posizione occupata da  $P_1$ . Risulta dunque dalla (7) [come dalle equivalenti (6)] che in un moto traslatorio le traiettorie dei singoli punti sono eguali, egualmente poste (cioè sovrapponibili con una traslazione) e percorse con la medesima legge.

Quest'ultima asserzione si può precisare osservando che, avendosi per derivazione della (7) rispetto a  $t$ ,

$$(8) \quad \frac{dP_2}{dt} = \frac{dP_1}{dt},$$

tutti i punti del sistema hanno, istante per istante, velocità equipollenti.

Inversamente, se, in un sistema in moto, ad ogni istante le velocità dei singoli punti sono equipollenti, il moto è traslatorio, giacchè,



valendo la (8) per ogni coppia di punti  $P_1, P_2$ , si conclude, integrando rispetto al tempo, che vale per essi anche la (7).

Così ogni moto traslatorio è caratterizzato da un certo vettore, funzione esclusivamente del tempo, che istante per istante dà la velocità comune, in quell'istante, a tutti i punti del sistema mobile.

Questo vettore dicesi velocità del moto traslatorio, e a suo rappresentante si può assumere la velocità di un punto qualsiasi del sistema, p. es. la velocità  $\dot{O}$  (di componenti  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ ) dell'origine  $O$  della terna mobile.

Analogamente, derivando la (8) rispetto a  $t$ , si conclude che le accelerazioni di tutti i punti del sistema sono, ad ogni singolo istante, equipollenti fra loro e quindi alla accelerazione  $\ddot{O}$  (di componenti  $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$ ) di  $O$ . Il vettore così definito (in funzione esclusivamente del tempo), dicesi accelerazione del moto traslatorio.

Se la velocità del moto traslatorio è costante e, quindi, l'accelerazione è nulla, tutti i punti del sistema si muovono (II, n. 16) di moto rettilineo uniforme (su traiettorie parallele, con la stessa velocità), e il moto rigido si dice traslatorio uniforme.

### § 3. - Moti rotatori.

5. Un altro tipo assai notevole di moto rigido è il moto rotatorio, cioè quello, in cui rimangono fissi tutti i punti di una retta che dicesi asse di rotazione. Per realizzare un tal moto, basta manifestamente, per la condizione di rigidità, fissare due punti dell'asse.

Preso nel sistema mobile  $S$ , fuori di codesto asse, che chiameremo  $z$ , un punto  $P$ , la perpendicolare  $PQ$  abbassata sull'asse si manterrà, per la ipotesi della rigidità, di lunghezza costante ed ortogonale all'asse; cioè ogni punto di  $S$ , fuori dell'asse, si muoverà sulla circonferenza del piano ortogonale a  $z$ , che ha il centro  $Q$  sull'asse stesso. La posizione del sistema  $S$ , rotante intorno a  $z$ , risulta individuata, istante per istante, dalla posizione di un suo punto  $P$  non appartenente all'asse (sulla rispettiva traiettoria circolare) o, ciò che sostanzialmente è lo stesso, dalla posizione di un semipiano  $p$ , uscente dall'asse e solidale con  $S$ ; posizione che si potrà individuare assegnando ad ogni istante l'anomalia  $\theta = \pi p$  di  $p$  rispetto ad un determinato semipiano  $\pi$  uscente da  $z$  e solidale con la terna fissa di riferimento. Per dare un segno a codeste anomalie (da misurarsi in radianti) orienteremo ad arbitrio l'asse di rotazione  $z$  e assumeremo come verso positivo delle  $\theta$  quello destro rispetto a quest'asse orientato.

Durante il moto, l'anomalia  $\theta$  del semipiano mobile  $p$  è una determinata funzione  $\theta(t)$  del tempo, che, al solito, supporremo continua e derivabile (almeno fino al second'ordine); e qui, come già nel caso del moto piano in coordinate polari (II, n. 19), per non essere costretti a introdurre nella  $\theta(t)$  discontinuità accessorie, ammetteremo che l'anomalia  $\theta$  possa variare, con continuità, anche al di là di quell'intervallo da 0 a  $2\pi$ , che effettivamente basta a individuare tutte le possibili posizioni di  $p$  intorno all'asse.

Ciò posto, è evidente che se, in un certo intervallo di tempo  $\Delta t$ , l'anomalia  $\theta$  di  $p$  varia di  $\Delta\theta$ , tutti i punti di  $S$ , nello stesso tempo  $\Delta t$ , descrivono, sulle rispettive traiettorie circolari, archi il cui angolo al centro è  $\Delta\theta$ ; cosicchè, considerando il

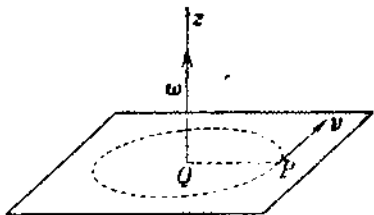
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta},$$

si conclude che ad ogni istante tutti i punti di un sistema rigido animato di moto rotatorio hanno la medesima velocità angolare.

In base alle poste convenzioni questa ~~velocità angolare~~  $\dot{\theta}$  (funzione esclusivamente del tempo) indica, istante per istante, col suo segno positivo o negativo, se il moto rotatorio sia destro o sinistro (rispetto all'asse orientato); e serve a definire il moto rotatorio (a meno di opportune condizioni iniziali), quando si assegni in più l'asse di rotazione. Ora la  $\dot{\theta}$  e la direzione dell'asse si sogliono rappresentare insieme, considerando il vettore  $\omega$ , avente ad ogni istante la lunghezza  $|\dot{\theta}(t)|$ , la direzione dell'asse di rotazione e quel verso, rispetto a cui il moto appare destro. Codesto vettore  $\omega$ , di lunghezza generalmente variabile (in funzione del solo tempo) ma di direzione costante, si dice velocità angolare (vettoriale) del moto rotatorio. Esso ha evidentemente la  $\dot{\theta}$  come componente lungo l'asse orientato  $z$ , onde, introducendo il versore  $k$  di questo asse  $z$ , si può scrivere

$$\omega = \dot{\theta}k$$

6. Il vettore  $\omega$  permette di esprimere agevolmente la velocità (vettoriale)  $v$  di ogni punto  $P$  del sistema rotante. Poichè  $P$  si muove di moto circolare, nel piano  $\pi$  ortogonale all'asse, intorno



al punto  $Q$  (proiezione ortogonale di  $P$  su  $z$ ) con velocità angolare  $\dot{\theta}$ , la sua velocità ha l'intensità  $|\dot{\theta}| QP$  (II, n. 33) ed è diretta, nel piano  $\pi$ , tangenzialmente alla circonferenza di centro  $Q$  e raggio  $QP$ , cioè ortogonalmente a  $QP$  e

anche al vettore  $\omega$ . Di più  $v$  appare, per le convenzioni del n. prec., destro rispetto ad  $\omega$ ; onde risulta senz'altro per la velocità di un punto  $P$  la espressione  $(Q - P) \wedge \omega$ , ossia

$$(9) \quad \underline{v = \omega \wedge (P - Q)}.$$

In questa formula appare, oltre il punto  $P$ , di cui si vuole la velocità, la sua proiezione  $Q$  sull'asse  $z$ , la quale varia, in generale, con  $P$ . Ma questo punto  $Q$  si può eliminare introducendo un punto *fisso*  $\Omega$  (qualsiasi), giacente sull'asse di rotazione. Invero, si ha in ogni caso

$$P - Q = (P - \Omega) + (\Omega - Q);$$

onde, sostituendo nella (9) e notando che i vettori  $\omega$  e  $\Omega - Q$ , come paralleli, hanno prodotto vettoriale nullo, si conclude che la velocità di ogni punto  $P$  di uno spazio rotante con velocità angolare vettoriale  $\omega(t)$  è data da

$$(10) \quad \underline{v(t) = \omega(t) \wedge (P - \Omega)},$$

dove  $\Omega$  designa un punto *fisso* ed  $\omega$  un vettore di direzione *fissa*.

7. L'espressione (10) della velocità è caratteristica per i moti rotatori (subordinatamente alle circostanze *testè* ricordate per  $\Omega$  e  $\omega$ ). Se invero i punti di un sistema si muovono in modo che la velocità di ciascuno sia esprimibile sotto la forma (10), avremo per due punti  $P_1, P_2$  quali si vogliono

$$v_1 = \omega \wedge (P_1 - \Omega), \quad v_2 = \omega \wedge (P_2 - \Omega),$$

e quindi, sottraendo membro a membro,

$$(11) \quad v_2 - v_1 = \omega \wedge (P_2 - P_1).$$

Ora il prodotto  $\omega \wedge (P_2 - P_1)$  è per definizione ortogonale a  $P_2 - P_1$  (o nullo), talchè moltiplicando scalarmente per quest'ultimo vettore ambo i membri della (11) troviamo

$$(v_2 - v_1) \times (P_2 - P_1) = 0,$$

ossia

$$v_2 \times (P_2 - P_1) = v_1 \times (P_2 - P_1),$$

e questa relazione, sussistendo per ogni coppia di punti del sistema, ci dice intanto che il moto è *rigido* (n. 2).

Che poi si tratti di moto rotatorio risulta senz'altro dal fatto che in base alla (10) tutti i punti  $P$ , tali che  $P - \Omega$  sia paral-

lelo al vettore di direzione fissa  $\omega$  (cioè i punti della parallela ad  $\omega$  pel punto fisso  $\Omega$ ), hanno velocità nulla, ossia sono fissi.

8. All'espressione dell'accelerazione di un generico punto  $P$  del sistema rigido rotante  $S$  si può giungere in modo istruttivo, tenendo conto della circostanza, che ogni punto di  $S$  si muove di moto piano circolare, e ricordando (Cap. prec., n. 26) le espressioni generali  $\dot{s}$ ,  $v^2/r$  delle componenti tangenziale e normale dell'accelerazione. La seconda coincide qui manifestamente colla radiale centripeta, ossia con  $-a_e$ . Tenendo conto che  $\dot{s} = \rho\dot{\theta}$  e che  $\rho$  rimane costante identificandosi col raggio di curvatura  $r$  della traiettoria circolare, si ha

$$\dot{s} = \rho\dot{\theta}, \quad a_e = -\rho\dot{\theta}^2.$$

La  $\dot{s}$  è la componente della accelerazione  $\alpha$  di  $P$ , secondo il solito versore  $t$  tangenziale alla traiettoria (circolare) e orientato nel verso delle anomalie crescenti. Ora questo versore  $t$  coincide con quello della velocità  $v$  o col suo opposto, secondo che la  $\dot{\theta}$  è positiva o negativa, talchè, potendosi scrivere la  $v$  sotto la forma (n. 6)

$$v = \dot{\theta}k \wedge (P - \Omega)$$

ed essendo  $\rho\dot{\theta}$  la velocità scalare di  $P$ , si ha  $v = \rho\dot{\theta}t$ , donde

$$t = \frac{1}{\rho} k \wedge (P - \Omega).$$

Moltiplicando per  $\dot{s} = \rho\dot{\theta}$  si ottiene pel componente tangenziale di  $\alpha$  l'espressione

$$\dot{\theta}k \wedge (P - \Omega) = \dot{\omega} \wedge (P - \Omega).$$

Quanto al componente normale, osserviamo che il versore della retta orientata  $QP$  è dato da

$$\frac{1}{\rho} (P - Q),$$

cosicchè, moltiplicando per  $a_e = -\rho\dot{\theta}^2$ , si ottiene codesto componente sotto la forma

$$-\dot{\theta}^2(P - Q) = -\omega^2(P - Q).$$

Dopo di che, per somma geometrica dei due componenti ottenuti, si perviene alla voluta espressione caratteristica della accelerazione di un generico punto  $P$  del sistema rigido rotante

$$(12) \quad \alpha = \dot{\omega} \wedge (P - \Omega) - \omega^2(P - Q).$$

Del resto, a questo stesso risultato si perviene formalmente, derivando rispetto al tempo l'espressione caratteristica (10) della velocità, giacchè in tal modo si ottiene

$$\alpha = \dot{\omega} \wedge (P - \Omega) + \omega \wedge v;$$

e basta tener conto della (10) stessa e della formola del doppio prodotto vettoriale (I, n. 26) per ritrovare la (12).

Se la velocità angolare  $\omega$  è costante (non solo in direzione ma anche in lunghezza), ciascun punto  $P$  del sistema si muove di moto circolare uniforme (con velocità che varia da punto a punto proporzionalmente alla distanza dell'asse); e il moto rigido si dice *rotatorio uniforme*. La rispettiva accelerazione, come risulta dalla (12), si ha, in accordo col n. 26 del Cap. II, al suo componente normale

$$a = -\omega^2(P - Q).$$

9. Per dedurre dalle (2) del n. 1 le equazioni di un moto rotatorio nella loro forma più semplice, conviene scegliere gli assi  $z$  e  $\zeta$  della terna mobile e di quella fissa coincidenti entrambi con l'asse di rotazione; e, fissata la loro origine in comune, in un punto  $O \equiv \Omega$  qualsiasi dell'asse, assumere come semiassi positivi  $x$  e  $\xi$  le due semirette ortogonali a  $z \equiv \zeta$ , che giacciono rispettivamente nei due semipiani  $p$  e  $\pi$  (mobile il primo, fissa il secondo) che adottammo al n. 5 per determinare l'anomalia istantanea  $\theta(t)$ .

Sarà allora manifestamente

$$(13) \quad \widehat{\xi x} = \theta(t), \quad \widehat{\xi y} = \theta(t) + \frac{\pi}{2};$$

e, mentre il versore fondamentale  $k$  (diretto secondo l'asse positivo  $z = \zeta$ ) è costante, di componenti

$$\alpha_z = 0, \quad \beta_z = 0, \quad \gamma_z = 1,$$

i versori  $i$  e  $j$  avranno per le (15) le componenti

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos \theta, & \beta_1 &= \sin \theta, & \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_2 &= -\sin \theta, & \beta_2 &= \cos \theta, & \gamma_2 &= 0; \end{aligned}$$

onde infine, tenendo conto che  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , si ottengono come casi particolari delle (2), le equazioni di un qualsiasi moto rotatorio, intorno all'asse  $z \equiv \zeta$ , sotto la forma

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ \eta = x \sin \theta + y \cos \theta, \\ \zeta = z, \end{array} \right.$$

dove, beninteso,  $\theta$  è una determinata funzione del tempo. Derivando due volte la (14), si ricaverebbero formule scalari equivalenti alle (10) e (12), cioè precisamente le proiezioni di queste equazioni vettoriali sugli assi  $\Omega\xi\eta\zeta$ .

#### 14. - Moti rototraslatorii.

10. Nei precedenti §§ 2, 3 abbiamo studiato due tipi elementari di moti rigidi:

a) i *moti traslatori*, in cui, istante per istante, tutti i punti del sistema mobile hanno una medesima velocità, la quale è perciò rappresentata da un certo vettore  $\tau$  (velocità del moto traslatorio), che dipende esclusivamente dal tempo;

b) i *moti rotatori*, in cui la velocità di ogni singolo punto  $P$  del sistema mobile è espressa da

$$v = \omega \wedge (P - \Omega),$$

dove  $\Omega$  è un punto *fisso* (preso ad arbitrio sull'asse di rotazione) e  $\omega$  (velocità angolare) è un vettore *puramente temporale di direzione fissa* (cioè parallelo all'asse di rotazione).

Più generalmente consideriamo, sotto le stesse condizioni ora ammesse per il punto  $\Omega$  e per i vettori  $\tau$ ,  $\omega$ , un moto, in cui la velocità del generico punto  $P$  del sistema mobile sia espressa da

$$(15) \quad v = \tau + \omega \wedge (P - \Omega).$$

Un tale moto è necessariamente rigido, giacchè dalla (15) seguono per le velocità  $v_1$ ,  $v_2$  di due generici punti  $P_1$ ,  $P_2$  del sistema mobile le espressioni

$$v_1 = \tau + \omega \wedge (P_1 - \Omega), \quad v_2 = \tau + \omega \wedge (P_2 - \Omega),$$

onde, sottraendo membro a membro, si ha l'eguaglianza

$$v_2 - v_1 = \omega \wedge (P_2 - P_1),$$

e quindi, moltiplicando scalarmente ambo i membri per  $P_2 - P_1$ , la

$$(v_2 - v_1) \times (P_2 - P_1) = 0,$$

che, come si è visto al n. 7, esprime l'eguaglianza delle componenti di  $v_1$ ,  $v_2$  secondo la congiungente  $P_1P_2$ ; e ciò assicura la rigidità del moto (n. 2).

Il moto rigido così definito si dice *rototraslatorio*, alludendo con questa qualifica (come ben si comprende) alla circostanza che in un tale moto la velocità (15) di un generico punto  $P$  del si-

stema mobile è, istante per istante, somma delle due velocità  $\tau$  e  $\omega \wedge (P - \Omega)$ , che a quel punto e in quell'istante competerebbero in certi due moti rigidi, di cui uno è traslatorio, l'altro rotatorio.

Dalla (15) si può, in infiniti modi, dedurre per la velocità del punto generico  $P$ , nel dato moto rototraslatorio, un'altra espressione che, come vedremo, si presenta con ufficio assai significativo nella teoria dei moti rigidi generali.

Scelto un qualsiasi punto  $O$  solidale col sistema rigido e indicatane con  $v_0$  la velocità, che per la (15) sarà data da

$$(16) \quad v_0 = \tau + \omega \wedge (O - \Omega),$$

sottraiamo questa identità membro a membro dalla (15). Otteniamo così la formola cercata

$$(17) \quad v = v_0 + \omega \wedge (P - O),$$

che presenta una evidente analogia formale colla (15), ma ne differisce essenzialmente per la circostanza che il punto  $O$  non è fisso qual'era  $\Omega$ , bensì solidale col sistema. Ne consegue che la decomposizione messa in luce per la velocità del dato moto rototraslatorio dalla (17) è sostanzialmente diversa da quella di definizione espressa dalla (15).

Invero, mentre anche qui il vettore  $v_0$ , in forza della (16) risulta puramente temporale, il prodotto vettoriale  $\omega \wedge (P - O)$  si presenta come analogo a  $\omega \wedge (P - \Omega)$  soltanto con riferimento ad una terna, rispetto a cui siano fissi il punto  $O$  e la direzione di  $\omega$ . Tale manifestamente, per la invariabilità di direzione di  $\omega$  rispetto ad  $\Omega\xi\eta\zeta$ , è la terna che ha l'origine in  $O$  e gli assi paralleli a  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , e che, perciò, si muove con  $O$  di moto traslatorio di velocità  $v_0$ .

La decomposizione che per la velocità di un moto rototraslatorio è fornita dalla (17) si dirà *impropria*, in contrapposto a quella primitiva espressa dalla (15), che si chiamerà *propria*: ed è manifesto che, al variare del punto  $O$  solidale col sistema, si ottengono per la velocità di uno stesso moto rototraslatorio infinite decomposizioni improprie diverse.

11. Inversamente, suppongasì dato un moto in cui la velocità del generico punto  $P$  del sistema mobile ammetta una decomposizione rototraslatoria impropria, rappresentata dalla (17), dove  $v_0$  ed  $\omega$  designino due quali si vogliano vettori temporali, di cui il secondo a direzione fissa ed  $O$  sia un punto del sistema mobile, che, rispetto agli assi di riferimento  $\Omega\xi\eta\zeta$ , va pensato come fun-

zione di  $t$ . Se ne deduce immediatamente che il moto  $\mathfrak{B}$  (in infiniti modi) rototraslatorio (in senso proprio).

Se, invero, scelto nello spazio un qualsiasi punto fisso  $\Omega$ , si considera il vettore

$$\tau = v_0 + \omega \wedge (\Omega - O),$$

che risulta puramente temporale, e si sottrae membro a membro questa identità dalla (17), si riottiene la (15) che mette in luce per la velocità  $v$  del generico punto  $P$  del sistema mobile una decomposizione rototraslatoria propria.

**12. MOTI ROTOTRASLATORII UNIFORMI OD ELICOIDALI.** — Fra i moti rototraslatori, hanno particolare importanza quelli in cui i vettori  $\tau$  ed  $\omega$  sono entrambi costanti (rispetto alla terna fissa  $\Omega\xi\zeta$ ) e che, riserbandoci di giustificare fra poco una tal designazione, chiameremo senz'altro moti rototraslatori uniformi; e avvertiamo sin d'ora che in tal caso, come si vedrà al prossimo Cap. (n. 8), risultano parimenti costanti rispetto ad assi solidali col sistema mobile, i vettori  $v_0$ ,  $\omega$  di ogni decomposizione impropria della velocità; e viceversa.

Qui, per chiarire l'andamento del moto, dimostriamo il seguente teorema fondamentale: *In ogni moto rototraslatorio uniforme esiste per la velocità del generico punto del sistema mobile una decomposizione propria, in cui l'addendo traslatorio risulta parallelo alla velocità angolare dell'addendo rotatorio.*

Escludiamo naturalmente, che sia  $\tau = 0$  (moto rotatorio) od  $\omega = 0$  (moto traslatorio) o infine che sia  $\omega$  parallelo a  $\tau$ , nel qual caso l'asserto è già verificato; e decomponiamo  $\tau$  nel componente  $V$  secondo la direzione (fissa) di  $\omega$  e nel componente  $V'$  secondo la giacitura ortogonale, talchè risulti

$$(18) \quad \tau = V + V',$$

con  $V$  e  $V'$  costanti, al pari di  $\tau$ , e  $V'$  certamente non nullo.

Ora è facile dimostrare che, come conseguenza della ortogonalità di  $V'$  ed  $\omega$ , esiste un vettore  $h$  costante e tale che sia

$$(19) \quad V' = -\omega \wedge h.$$

A tal fine cominciamo coll'osservare che, per la definizione stessa di prodotto vettoriale (Cap. I, n. 22), il moltiplicare vettorialmente a sinistra, come in  $\omega \wedge V'$ , un vettore  $V'$  per un altro vettore  $\omega$ , ortogonale ad esso, equivale a far rotare  $V'$  intorno ad  $\omega$  di un angolo retto in verso destro e a moltiplicare la lun-



ghezza per il tensore  $\omega$  di  $\omega$ . Perciò, se  $\omega \wedge V'$  si moltiplica ancora a sinistra per  $\omega$ , si ottiene  $-\omega \cdot V'$ . Possiamo dunque scrivere

$$V' = -\frac{1}{\omega^2} \omega \wedge (\omega \wedge V') = -\omega \wedge \left( \frac{1}{\omega^2} \omega \wedge V' \right);$$

onde appunto si rileva che il cercato vettore costante  $h$ , soddisfacente alla (19), è dato da

$$h = \frac{1}{\omega^2} \omega \wedge V'.$$

Ciò premesso, tenendo conto delle (18) e (19), la (15) si potrà scrivere

$$v = V + \omega \wedge (P - \Omega) - \omega \wedge h,$$

ossia, indicando con  $\Omega_1$  il punto  $\Omega + h$ , che, per la fissità di  $\Omega$  e la costanza di  $h$ , risulta pur esso *fisso*,

$$(20) \quad v = V + \omega \wedge (P - \Omega_1);$$

ed è questa, per la velocità del generico punto  $P$  nel dato moto rototraslatorio uniforme, la preannunciata decomposizione propria, in cui l'addendo traslatorio  $V$  risulta parallelo alla velocità angolare  $\omega$  dell'addendo rotatorio.

Notiamo che in questa nuova decomposizione (20) della velocità la velocità angolare del componente rotatorio è la stessa  $\omega$ , che si aveva nella decomposizione primitiva.

Inoltre, se  $\tau$  è ortogonale ad  $\omega$ , risulta nella (18), e quindi nella (20),  $V = 0$ , sicchè in tal caso il moto definito dalla (15) si riduce (n. 7) ad un semplice moto rotatorio intorno alla retta per  $\Omega_1$  parallela ad  $\omega$ .

13. La decomposizione (20), che al n. prec. si è dimostrata possibile per la velocità di un generico punto in qualsiasi moto rototraslatorio uniforme, permette senz'altro di riconoscerne l'andamento.

Escluso il caso  $V = 0$  (moto rotatorio uniforme), la (20) fornisce la velocità  $v$  di ogni singolo punto  $P$  come somma di due vettori  $V$  ed  $\omega \wedge (P - \Omega_1)$ , il primo parallelo ad  $\omega$  e il secondo ortogonale ad esso; cosicchè, se pel punto  $\Omega_1$  si considerano la retta  $\zeta$  parallela ad  $\omega$  (asse del componente rotatorio) e il piano  $\pi$  ortogonale ad essa, codesti due addendi  $V$  ed  $\omega \wedge (P - \Omega_1)$  rappresentano le velocità delle proiezioni ortogonali  $P_\zeta$  e  $P_\pi$  di  $P$  su  $\zeta$  e  $\pi$  rispettivamente. Poichè  $V$  è costante, il moto (rettilineo) di  $P_\zeta$  è uniforme; e quanto a  $P_\pi$ , la cui velocità  $\omega \wedge (P - \Omega_1)$ , avendosi

$$P - \Omega_1 = (P - P_\pi) + (P_\pi - \Omega_1)$$

con  $P - P_1$  parallelo ad  $\omega$ , si può scrivere sotto la forma

$$\omega \wedge (P_1 - \Omega_1),$$

esso si muove di moto rotatorio uniforme intorno ad  $\Omega_1$  (n. 7). Si riconosce così che il moto del generico punto  $P$  del sistema si può decomporre in un moto circolare uniforme sul piano  $\pi$  e in un moto rettilineo uniforme lungo una retta perpendicolare a  $\pi$  ed è, quindi, un *moto elicoidale uniforme* (II, n. 52).

Questo moto elicoidale è destro o sinistro, secondo che i due vettori paralleli  $V, \omega$  hanno o no verso concorde; e il passo della traiettoria elicoidale, dato per il n. 52 del Cap. II da  $2\pi V/\omega$ , è lo stesso per tutti i punti del sistema rigido. Invece la velocità intensiva,

$$\sqrt{V^2 + \omega^2 P_1 P^2}$$

(costante per ciascun punto  $P$ ) varia colla distanza del punto  $P$  dall'asse  $\zeta$ .

In particolare, i punti che ad un istante qualsiasi, p. es. per  $t = 0$ , giacciono su  $\zeta$  definiscono una retta solidale col sistema, che scorre rigidamente sulla  $\zeta$  con velocità intensiva costante  $V$  nel verso di  $V$ .

In base a queste osservazioni appare giustificato chiamare *elicoidale* ogni moto rototraslatorio uniforme, e il designare col nome di *asse* del moto elicoidale la retta  $\zeta$ , cioè la retta per  $\Omega_1$ , che ha la direzione comune ad  $\omega$  e a  $V$ .

14. Per scrivere le equazioni del nostro moto elicoidale scegliamo come terna mobile  $Oxyz$ , una qualsiasi terna solidale col sistema il cui asse  $z$  sia la retta scorrente su  $\zeta$ , orientata nel verso di  $\omega$ ; e come terna fissa  $\Omega\xi\eta\zeta$  assumiamo precisamente la posizione assunta da  $Oxyz$  nell'istante  $t = 0$ .

La componente di  $\omega$  secondo  $\Omega\zeta$  è data allora, in valore e segno da  $\omega$ , mentre quella di  $V$  sarà uguale a  $\pm V$  secondo che  $V$  ed  $\omega$  hanno o no verso concorde, cioè (n. prec.) secondo che il moto elicoidale è destro o sinistro.

Considerate di un punto generico  $P$  le proiezioni  $P_2$  e  $P_1$  su  $\zeta$  e su  $\xi\eta$  rispettivamente, avremo che  $P_2$  descrive la  $\zeta$  con moto uniforme di velocità  $\pm V$ ; e poichè per  $t = 0$  si ha  $\zeta \equiv z$  (come pure  $\xi \equiv x, \eta \equiv y$ ), l'equazione del moto di  $P_2$  sarà

$$(21) \quad \zeta = \pm Vt + z.$$

La proiezione  $P_1$ , invece, ruota su  $\xi\eta$  di moto circolare uniforme intorno ad  $\Omega$  con velocità angolare  $\theta = \omega$ , talchè l'ano-

malia  $\theta$  dell'asse mobile  $Ox$  rispetto a  $O\xi$ , che deve annullarsi con  $t$ , sarà data da  $\theta = \omega t$ . Perciò le equazioni del moto di  $P$ , si otterranno ponendo  $\theta = \omega t$  nelle prime due equazioni (14) del n. 9; dopo di che, associando le equazioni così ottenute alla (21), perveniamo alle equazioni del moto elicoidale

$$\begin{cases} \xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t, \\ \eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t, \\ \zeta = \pm Vt + z, \end{cases}$$

che per  $V = 0$  si riducono, com'è naturale, alle (14), ove si ponga  $\theta = \omega t$ .

### § 5. - Moti rigidi generali.

**15. FORMULE DEL POISSON.** — Dopo esserci soffermati a studiare i tipi particolari più notevoli di moti rigidi, ritorniamo al problema generale posto al n. 1. Per determinare la velocità di un generico punto  $P$  in un moto rigido qualsiasi, bisognerà riprendere, in tutta la sua generalità, l'equazione geometrica (n. 1)

$$P = O + xi + yj + zk$$

e derivarla rispetto al tempo: onde si è condotti a considerare le derivate rispetto a  $t$  dei versori fondamentali mobili  $i, j, k$ . Esse sono fra loro legate da certe equazioni vettoriali, che qui ci proponiamo di stabilire.

Considerando, per fissar le idee, la  $di/dt$ , notiamo che, in quanto le sue componenti rispetto agli assi mobili sono esprimibili sotto la forma (Cap. I, n. 20)

$$\frac{di}{dt} \times i, \quad \frac{di}{dt} \times j, \quad \frac{di}{dt} \times k,$$

possiamo porre

$$(22) \quad \frac{di}{dt} = \left( \frac{di}{dt} \times i \right) i + \left( \frac{di}{dt} \times j \right) j + \left( \frac{di}{dt} \times k \right) k.$$

Ma dalle sei identità esprimenti che i vettori  $i, j, k$ , sono unitari e a due a due ortogonali (I, n. 20)

$$\begin{aligned} i \times i &= 1, & j \times j &= 1, & k \times k &= 1; \\ j \times k &= 0, & k \times i &= 0, & i \times j &= 0 \end{aligned}$$

si deducono, per derivazione rispetto a  $t$ , le identità

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} \times i &= 0, & \frac{dj}{dt} \times j &= 0, & \frac{dk}{dt} \times k &= 0, \\ \frac{dj}{dt} \times k + \frac{dk}{dt} \times j &= 0, \\ \frac{dk}{dt} \times i + \frac{di}{dt} \times k &= 0, & \frac{di}{dt} \times j + \frac{dj}{dt} \times i &= 0; \end{aligned}$$

onde, tenendo conto della prima e della quinta di queste, la (22) si potrà scrivere

$$\frac{di}{dt} = \left( \frac{di}{dt} \times j \right) j - \left( \frac{dk}{dt} \times i \right) k.$$

Ma dal fatto che la terna di versori  $i, j, k$  è ortogonale e destra risulta (I, n. 22)

$$j = k \wedge i, \quad k = i \wedge j = -j \wedge i,$$

cosicchè alla equazione precedente si potrà dare la forma,

$$\frac{di}{dt} = \left\{ \left( \frac{dk}{dt} \times i \right) j + \left( \frac{di}{dt} \times j \right) k \right\} \wedge i$$

o ancora, aggiungendo al secondo membro il termine

$$\left\{ \left( \frac{dj}{dt} \times k \right) i \right\} \wedge i,$$

che come prodotto esterno di due vettori paralleli è identicamente nullo,

$$\frac{di}{dt} = \left\{ \left( \frac{dj}{dt} \times k \right) i + \left( \frac{dk}{dt} \times i \right) j + \left( \frac{di}{dt} \times j \right) k \right\} \wedge i.$$

È questa la prima delle preannunziate relazioni tra le derivate dei versori fondamentali mobili; ove si ponga

$$(23) \quad \omega = \left( \frac{dj}{dt} \times k \right) i + \left( \frac{dk}{dt} \times i \right) j + \left( \frac{di}{dt} \times j \right) k,$$

essa si può scrivere

$$\frac{di}{dt} = \omega \wedge i.$$

Per le  $dj/dt$ ,  $dk/dt$  varranno relazioni analoghe, che si otterranno permutando circolarmente nella precedente i versori  $i, j, k$ ; e poichè una tale permutazione lascia inalterato il vettore  $\omega$ , definito dalla (23) si ottengono complessivamente le tre equazioni cercate

$$(24) \quad \frac{di}{dt} = \omega \wedge i, \quad \frac{dj}{dt} = \omega \wedge j, \quad \frac{dk}{dt} = \omega \wedge k,$$

che si designano sotto il nome di *formule del POISSON* <sup>(1)</sup>, in quanto a lui si debbono le equazioni scalari che da esse si ottengono per proiezione su gli assi.

Giova ricavarne subito una espressiva conseguenza geometrica che serve in pari tempo a compendiare le (24) in una formula unica. Consideriamo perciò un generico vettore  $w$ , solidale col corpo rigido in movimento, ciò che, formalmente, si traduce nella circostanza che le tre componenti  $w_x, w_y, w_z$ , rispetto agli assi solidali  $Oxyz$  sono da riguardarsi costanti, ossia indipendenti da  $t$ . Ne viene che, derivando (con referenza agli assi fissi  $\Omega\xi\eta\zeta$ ) la identità,

$$w = w_x i + w_y j + w_z k,$$

si ottiene, in virtù delle (24),

$$\frac{dw}{dt} = w_x(\omega \wedge i) + w_y(\omega \wedge j) + w_z(\omega \wedge k).$$

Attribuendo i coefficienti scalari  $w_x, w_y, w_z$  ai secondi fattori e raccogliendo  $\omega$  a fattore comune, si può scrivere più semplicemente

$$(24') \quad \frac{dw}{dt} = \omega \wedge w,$$

che è l'annunciata espressione della derivata di un generico vettore solidale  $w$ . Essa include manifestamente le formule (24) del POISSON come casi particolari, bastando introdurvi ordinatamente  $i, j, k$ , al posto di  $w$ .

Del vettore ausiliario  $\omega$  vedremo tra un momento l'importante significato cinematico. Giova intanto rilevare che le componenti di  $\omega$  secondo gli assi solidali  $Oxyz$  si sogliono designare con  $p, q, r$ ; cioè si suol porre, tenuto conto della (23),

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{dj}{dt} \times k = -\frac{dk}{dt} \times j, \\ q = \frac{dk}{dt} \times i = -\frac{di}{dt} \times k, \\ r = \frac{di}{dt} \times j = -\frac{dj}{dt} \times i. \end{array} \right.$$

Notiamo da ultimo che qui si è dato al parametro  $t$  da cui dipendono  $i, j, k$ , il significato di tempo; ma di tale interpretazione non si è fatto, nelle precedenti deduzioni, alcun uso; talchè

(1) SIMÉON DENIS POISSON, n. a Pithiviers (Loiret) nel 1781, m. a Parigi nel 1842, insegnò Meccanica razionale alla Sorbona e fu tra i più strenui promotori di questa disciplina. Le formule ricordate nel testo si trovano nel suo classico *Traité de mécanique*, Paris, 1831.

le (24), (24') valgono per ogni terna di versori a due a due ortogonali  $o$ , rispettivamente, per un vettore solidale  $\omega$ , dipendenti da un parametro qualsiasi.

16. VELOCITÀ IN UN MOTO RIGIDO GENERALE. — Se  $O$  e  $P$  sono due punti quali si vogliono di un solido mobile, il vettore  $P-O$  è necessariamente un vettore solidale, talchè vale per esso la formula (24'), ossia

$$\frac{d(P-O)}{dt} = \omega \wedge (P-O).$$

Indicando con  $v(t)$  e  $v_o(t)$  le velocità  $dP/dt$ ,  $dO/dt$  di  $P$  ed  $O$  rispettivamente, si ricava

$$(26) \quad v = v_o + \omega \wedge (P-O).$$

È questa dunque l'espressione della velocità di un punto generico  $P$  di un sistema rigido in moto, e giova tener presente che in essa anche  $O$  designa un punto qualsiasi del sistema (o solidale con esso) e i vettori  $v_o$ ,  $\omega$  rappresentano rispettivamente la velocità di  $O$  e il vettore definito dalla (23) del n. prec., talchè l'uno e l'altro risultano funzioni esclusivamente del tempo ( $o$ , in particolare, costanti) ed entrambi indipendenti da  $P$ .

Inversamente, un'argomentazione perfettamente analoga a quella del n. 7, assicura che se, prefissati ad arbitrio due vettori  $v_o$ ,  $\omega$  in funzione del tempo, un sistema di punti  $P$  si muove in modo che la velocità di ciascuno sia esprimibile sotto la forma (26), essendo  $O$  un punto che non dipende da  $P$ , le mutue distanze di codesti punti  $P$  si conservano, durante il moto, inalterate; cosicchè si tratta di un moto rigido. Si ha cioè che l'espressione (26) è caratteristica per la velocità dei punti di un moto rigido.

Così, rispetto alla solita terna fissa, un moto rigido risulta determinato (a meno di opportune condizioni iniziali) quando, prescelto nel sistema mobile un punto qualsiasi  $O$ , si prefissino, ad arbitrio, i vettori puramente temporali  $v_o$  ed  $\omega$ . Perciò questi due vettori diconsi vettori caratteristici del moto rigido rispetto al polo o centro di riduzione  $O$ ; e chiamansi caratteristiche del moto, rispetto ad  $O$ , le componenti secondo gli assi mobili dei due vettori caratteristici  $v_o$  ed  $\omega$ .

Già designammo al n. prec. con  $p$ ,  $q$ ,  $r$  le componenti di  $\omega$ ; se indichiamo con  $u$ ,  $v$ ,  $w$  quelle di  $v_o$ , la (26) proiettata sugli assi mobili dà luogo alle equazioni scalari, dette di EULERO:

$$(27) \quad \begin{cases} v_x = u + qz - ry, \\ v_y = v + rx - pz, \\ v_z = w + py - qx. \end{cases}$$

Alla loro volta, le  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , in quanto sono le componenti secondo gli assi mobili del vettore  $v$ , che secondo gli assi fissi ha le componenti  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\gamma}$ , sono date da

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = v_0 \times i = \dot{\alpha}\alpha_1 + \dot{\beta}\beta_1 + \dot{\gamma}\gamma_1, \\ v = v_0 \times j = \dot{\alpha}\alpha_2 + \dot{\beta}\beta_2 + \dot{\gamma}\gamma_2, \\ w = v_0 \times k = \dot{\alpha}\alpha_3 + \dot{\beta}\beta_3 + \dot{\gamma}\gamma_3. \end{array} \right.$$

**17. DISTRIBUZIONE ISTANTANEA DELLE VELOCITÀ (ATTO DI MOTO) E MOTO ELICOIDALE TANGENTE.** — Dei due vettori caratteristici  $v_0$  ed  $\omega$  di un moto rigido rispetto ad un dato polo  $O$  (solidale col sistema mobile) il primo ha già per definizione un significato cinematico preciso come velocità del punto  $O$ . L'interpretazione cinematica del secondo risulterà dalla seguente osservazione. Se indichiamo con  $\bar{v}_0$  ed  $\bar{\omega}$  le determinazioni assunte da  $v_0$  ed  $\omega$  in un dato istante  $t$ , la (26) dà per la velocità  $v$  di un generico punto  $P$  in quell'istante l'espressione

$$v = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \wedge (P - O),$$

onde, ricordando la (17) del n. 10, si conclude che la distribuzione delle velocità nei vari punti di  $S$  nell'istante  $t$  è quella stessa che si avrebbe se il sistema fosse animato da un moto rototraslatorio uniforme o, ciò che è lo stesso, elicoidale, la cui velocità è decomponibile in senso improprio nel componente traslatorio  $\bar{v}_0$  e nel componente rotatorio di velocità angolare  $\bar{\omega}$ , intorno all'asse per  $O$  nella direzione di  $\bar{\omega}$ , trasportato parallelamente a se stesso con velocità traslatoria  $\bar{v}_0$ .

Come variano generalmente nel tempo i vettori  $v$  ed  $\omega$ , varia altresì codesto moto elicoidale, che ad ogni singolo istante dà luogo alla stessa distribuzione di velocità del moto rigido. Perciò esso dicesi *moto elicoidale tangente* al moto rigido nell'istante considerato. Chiamando col MAGGI <sup>(1)</sup> *atto di moto* la distribuzione istantanea di velocità, l'osservazione precedente si può enunciare in forma concisa dicendo, che ogni atto di moto rigido è elicoidale.

(<sup>1</sup>) Cfr. *Geometria del movimento* (Bologna, Zanichelli, 1927), Cap. III. GIAN ANTONIO MAGGI, n. a Milano nel 1856, m. ivi nel 1937, insegnò Calcolo a Modena e a Messina, poi Meccanica razionale a Pisa e a Milano. Eccezionalmente versatile, fu anche umanista e poliglotta. Oltre a pregevoli studi intorno a importanti questioni di dinamica analitica, di teoria del potenziale, di elasticità, di elettromagnetismo, gli si debbono acute indagini sui fondamenti della meccanica classica e relativistica. Le idee personali in tal guisa maturate dominano i vari suoi trattati.

Risulta da quanto s'è detto che il vettore  $\omega$  è interpretabile istante per istante come la velocità angolare del corrispondente moto elicoidale tangente; perciò  $\omega$  si chiama senz'altro *velocità angolare* del moto rigido. La retta passante per  $O$  nella direzione di  $\omega$  (cioè l'asse del componente rotatorio nella decomposizione impropria, relativa ad  $O$ , della velocità del moto elicoidale tangente) dicesi *asse istantaneo di rotazione* rispetto ad  $O$ ; mentre l'asse del moto elicoidale tangente (pur esso parallelo istante per istante ad  $\omega$ ) si dice *asse di moto* (rigido) nell'istante considerato (<sup>1</sup>).

Naturalmente l'asse di moto varia in generale nel tempo, tanto rispetto agli assi mobili quanto a quelli fissi; e ad ogni istante è per la sua stessa definizione, il luogo dei punti la cui velocità è in quell'istante parallela alla determinazione istantanea della velocità angolare; talchè in base alle (27), le sue equazioni, rispetto agli assi mobili, sono date da

$$\frac{u + qz - ry}{p} = \frac{r - rx - pz}{q} = \frac{w + py - qx}{r}.$$

L'asse di moto risulta indeterminato in tutti e soli quegli istanti in cui l'atto di moto rigido è puramente traslatorio.

18. Il *moto istantaneo* del sistema  $S$ , cioè l'insieme degli spostamenti elementari  $dP = vdt$  che i singoli suoi punti  $P$  subiscono dall'istante generico  $t$  all'istante  $t + dt$ , è rappresentato, in base alla (26), ove si tenga conto che è  $v_0 dt = dO$  e si designi con  $\Psi$  il vettore infinitesimo  $\omega dt$ , dall'equazione vettoriale

$$dP = dO + \Psi \wedge (P - O),$$

la quale mette in luce come codesto spostamento risulti dalla composizione dello spostamento  $dO$  (manifestamente traslatorio come quello che è lo stesso per tutti i punti del sistema) e dello spostamento  $\Psi \wedge (P - O)$  (di cui è rilevabile direttamente il carattere rotatorio, in quanto esso è nullo per tutti i punti della retta passante per  $O$  nella direzione di  $\Psi = \omega dt$ , vale a dire dell'asse istantaneo di rotazione relativo al punto  $O$ ).

Lo scalare  $\Psi = \omega dt$ , fornisce istante per istante l'ampiezza della rotazione elementare componente.

(<sup>1</sup>) L'esistenza dell'asse di moto fu segnalata per la prima volta nel 1763 da GIULIO MOZZI, n. a Firenze nel 1730, m. ivi nel 1813, letterato e, in tarda età, Ministro di Maria Luisa. Pubblicò un solo lavoro scientifico, in cui è contenuta l'importante proprietà cinematica suindicata.



**19. MODO DI VARIARE DEI VETTORI CARATTERISTICI.** — I vettori caratteristici  $v_0, \omega$  sono stati definiti rispetto ad un dato polo o centro di riduzione  $O$ , talchè per un medesimo moto rigido si hanno, corrispondentemente alle  $\infty^3$  possibili scelte del polo, altrettante determinazioni di codesti due vettori. Il loro significato cinematico permette di riconoscere immediatamente come essi variano al variare del polo.

Il vettore  $\omega$ , in quanto fornisce istante per istante la velocità angolare del moto elicoidale tangente, ha carattere intrinseco al moto rigido dato, talchè, se indichiamo con  $v_0', \omega'$  i vettori caratteristici rispetto ad un qualsiasi punto  $O'$ , diverso da  $O$ , ma, beninteso, pur esso solidale con  $S$ , avremo intanto

$$\omega' = \omega .$$

Del resto, questa indipendenza del vettore caratteristico  $\omega$  dalla scelta del polo si può anche riconoscere direttamente sulla sua espressione formale (23). A tal fine, mostriamo anzitutto che  $\omega$  non varia, quando, mantenendo il polo in  $O$ , si cambia l'orientazione, entro il sistema, della terna solidale. Invero, se per un momento denotiamo con  $\omega^*$  la velocità angolare calcolata con riferimento ad una nuova terna solidale (avente ancora l'origine  $O$ ), la velocità di un generico punto  $P$  del sistema è data, secondo che esso è riferito alla primitiva terna solidale o alla nuova, da

$$v_0 + \omega \wedge (P - O) \quad \text{o} \quad v_0 + \omega^* \wedge (P - O) .$$

Eguagliando queste due espressioni di un medesimo vettore, otteniamo l'identità

$$\omega \wedge (P - O) = \omega^* \wedge (P - O) ,$$

che si può scrivere

$$(\omega - \omega^*) \wedge (P - O) = 0 ,$$

e, dovendo valere per qualsiasi scelta di  $P$ , ossia del vettore  $P - O$ , implica appunto (I, n. 22)

$$\omega^* = \omega .$$

Ciò premesso, cambiamo il polo, portandolo da  $O$  ad  $O'$ . Per verificare l'effetto sulla velocità angolare  $\omega$ , fornita dalla (23), possiamo, in base alla osservazione precedente, adottare in  $O'$ , senza danno di generalità, una qualsiasi terna solidale particolare. Prendiamo precisamente quella che ha gli assi paralleli e di verso concorde agli assi solidali primitivi. Con ciò non variano i ver-

sori fondamentali e quindi non varia, in base alla (23), nemmeno la velocità angolare  $\omega$ .

Diverso è il comportamento dell'altro vettore caratteristico  $v_0$ . Invero il nuovo  $v_0'$  è dato dalla velocità di  $O'$ , cosicchè, in virtù della (26), si ha

$$v_0' = v_0 + \omega \wedge (O' - O) = v_0 + (O - O') \wedge \omega.$$

Di qui, ricordando il n. 35 del Cap. I, si conclude che i vettori caratteristici  $\omega$  e  $v_0$  di un moto rigido, al variare del polo, si comportano rispettivamente come il risultante e il momento risultante di un sistema di vettori applicati al variare del centro di riduzione.

Perciò i risultati ottenuti nel Capitolo I sulla riduzione dei sistemi di vettori applicati forniscono immediatamente altrettante proposizioni relative agli atti di moto rigido.

Così l'asse centrale del sistema di vettori, come luogo dei punti, in cui il momento risultante è parallelo al risultante, dà in questo caso l'asse del moto elicoidale tangente, cioè l'asse del moto rigido, che vien così ritrovato per una nuova via.

La velocità traslatoria lungo l'asse di moto è data dal momento minimo del sistema di vettori applicati (n. 39 del Cap. I)

$$\frac{v_0 \times \omega}{\omega} = \frac{up + vq + wr}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Infine l'annullarsi in un dato istante del trinomio invariante

$$v_0 \times \omega = up + vq + wr = 0$$

fornisce la condizione necessaria e sufficiente, affinchè in quell'istante si annulli o la velocità angolare o la velocità di traslazione lungo l'asse di moto: cioè la condizione suindicata caratterizza gli istanti, in cui l'atto di moto rigido è puramente traslatorio o puramente rotatorio.

**20. MOTI RIGIDI CON UN PUNTO FISSO O PARALLELI AD UNA GIACITURA FISSA.** — È agevole dimostrare che per entrambi questi tipi di moti si annulla identicamente, cioè per tutta la durata del moto, il trinomio invariante  $v_0 \times \omega$ .

Infatti nel caso di un moto rigido con un punto fisso, basta prendere questo punto come centro di riduzione perchè sia identicamente  $v_0 = 0$  e quindi  $v_0 \times \omega = 0$ . Poichè si può supporre che la velocità angolare  $\omega$  non sia identicamente nulla (il che, insieme con la condizione  $v_0 = 0$ , implicherebbe uno stato di quiete) si ha per l'osservazione finale del n. prec. che, ad ogni

istante della durata del moto, l'atto di moto è puramente rotatorio intorno ad un asse per  $O$ , che naturalmente, varierà in generale da istante ad istante.

Si consideri in secondo luogo un moto rigido parallelo ad una giacitura fissa, la quale si può realizzare costringendo un piano  $p$  solidale col sistema rigido a muoversi su di un piano  $\pi$  fisso. Se i piani  $\pi$  e  $p$  si assumono come piani di riferimento  $\xi\eta$  e  $xy$  rispettivamente, il versore  $k$  si mantiene costante (in quanto risulta sempre ortogonale al piano  $\xi\eta$ ) cosicchè, per le (24) del n. 15, si ha

$$\omega \wedge k = 0;$$

cioè la velocità angolare  $\omega$  è pur essa costantemente ortogonale a  $\xi\eta$ . Poichè d'altra parte la velocità  $v_0$  del polo, al pari di quella di ogni altro punto del sistema mobile, si conserva parallela a codesto stesso piano  $\xi\eta$ , si conclude che il trinomio invariante  $v_0 \times \omega$  è identicamente nullo e perciò ogni atto del nostro moto è o puramente traslatorio (parallelamente al piano  $\xi\eta$ ) o puramente rotatorio (intorno ad un asse ortogonale a codesto piano).

Su questo tipo di moti torneremo più diffusamente nel Cap. V.

21. COMPOSIZIONE DEGLI ATTI DI MOTO RIGIDI. — Se per un medesimo sistema di punti si considerano, a partire da una stessa posizione, due diversi atti di moto, si dice atto di moto *composto* dei due dati quello, in cui ogni punto del sistema ha come velocità la somma geometrica delle velocità spettanti a quel medesimo punto nei due atti di moto considerati.

Si riconosce subito che l'atto di moto composto di due atti di moto rigidi è pur esso rigido. Infatti se  $P_1$  e  $P_2$  sono due punti quali si vogliono del sistema, nella posizione a partire dalla quale sono definiti i due atti di moto rigidi componenti, e se  $v_1', v_2'$  e  $v_1'', v_2''$  sono le velocità che a questi due punti spettano, rispettivamente, nel primo e nel secondo atto di moto, l'ipotesi della rigidità implica che secondo la retta  $P_1P_2$  hanno componenti eguali tanto  $v_1'$  e  $v_2'$ , quanto  $v_1''$  e  $v_2''$ . Di qui discende che la stessa proprietà vale per le velocità  $v_1' + v_1''$  e  $v_2' + v_2''$ , che a  $P_1$  e  $P_2$  competono nell'atto di moto composto, il quale è perciò rigido (n. 2).

Per lo studio diretto della composizione degli atti di moto rigidi è essenziale l'ovvia osservazione seguente. Se  $v_0', \omega'$  e  $v_0'', \omega''$  sono i vettori caratteristici dei due atti di moto componenti rispetto ad un medesimo polo  $O$ , talehè siano

$$v_0' + \omega' \wedge (P - O) \quad e \quad v_0'' + \omega'' \wedge (P - O)$$

le corrispondenti velocità di un generico punto  $P$ , vale per la

velocità di questo stesso punto nell'atto di moto composto l'espressione

$$v_0' + v_0'' + (\omega' + \omega'') \wedge (P - O),$$

*cioè i vettori caratteristici, rispetto a un dato polo, di un atto di moto rigido composto si ottengono sommando vettorialmente gli omonimi vettori caratteristici dei moti componenti, rispetto a quel medesimo polo.*

22. Per avere un interessante esempio di composizione di atti di moto si considerino due atti di moto rigido intorno ad un medesimo punto fisso  $O$  e perciò entrambi rotatori, intorno ad assi concorrenti in  $O$ . Rispetto al polo  $O$  si annullerà per tutti e due il primo vettore caratteristico, talchè, se  $\omega'$ ,  $\omega''$  sono le rispettive velocità angolari, l'atto di moto composto avrà rispetto ad  $O$  i vettori caratteristici  $v_0 = 0$ ,  $\omega = \omega' + \omega''$ ; cioè l'atto di moto composto di due atti di moto rotatori intorno ad assi concorrenti in un punto è pur esso rotatorio intorno ad un asse passante per quel punto, ed ha per velocità angolare la somma geometrica delle velocità angolari dei moti componenti.

23. Analogo risultato sussiste quando si compongono due atti di moto rotatori intorno ad assi paralleli.

Siano  $\omega'$ ,  $\omega''$  le velocità angolari (parallele) dei due atti di moto, ed  $O'$ ,  $O''$  due punti dei rispettivi assi di rotazione  $r'$ ,  $r''$ . Supposto in primo luogo che i due vettori  $\omega'$ ,  $\omega''$  non siano opposti (cioè non abbiano la stessa lunghezza e verso contrario), prendiamo come polo dei vettori caratteristici dei due atti di moto il centro  $O$  dei due vettori applicati paralleli  $(O', \omega')$ ,  $(O'', \omega'')$ . In  $O$  codesti vettori caratteristici diventano (n. 19)

$$(O' - O) \wedge \omega', \quad \omega' \quad \text{e} \quad (O'' - O) \wedge \omega'', \quad \omega'',$$

talchè, componendo, otterremo l'atto di moto rigido, i cui vettori caratteristici, rispetto ad  $O$ , sono dati da

$$(O' - O) \wedge \omega' + (O'' - O) \wedge \omega'', \quad \omega' + \omega''.$$

Ma poichè  $O$  è il centro dei vettori paralleli  $(O', \omega')$ ,  $(O'', \omega'')$ , il primo di codesti due vettori caratteristici è nullo (I, nn. 55, 56); cosicchè, componendo due atti di moto rotatorio intorno a due assi paralleli  $r'$ ,  $r''$  e di velocità angolari  $\omega'$ ,  $\omega''$  non opposte, si ottiene un atto di moto rotatorio di velocità  $\omega' + \omega''$ , il cui asse è parallelo ad  $r'$ ,  $r''$ , e giace nel piano della striscia  $r'$ ,  $r''$ , dividendola in parti inversamente proporzionali ad  $\omega'$ ,  $\omega''$ , internamente o esternamente, secondo che  $\omega'$ ,  $\omega''$  sono di verso concorde o discorde.

Se poi i vettori  $\omega'$ ,  $\omega''$  sono opposti, cosicchè applicati in  $O'$ ,  $O''$  rispettivamente, costituiscano una coppia, si prenda come polo dei vettori caratteristici il punto  $O'$ . Si ottengono così per gli atti di moto componenti i vettori caratteristici

$$0, \omega' \quad \text{e} \quad (O'' - O') \wedge \omega'', \omega'',$$

e quindi per l'atto di moto composto

$$(O'' - O') \wedge \omega'', \quad \omega' + \omega'';$$

onde, per l'annullarsi di  $\omega' + \omega''$ , si conclude che *codesto atto di moto è puramente traslatorio, in direzione ortogonale al piano degli assi  $r'$ ,  $r''$  degli atti di moto componenti ed ha per velocità il momento della coppia delle velocità angolari  $\omega'$ ,  $\omega''$ , localizzate ciascuna lungo l'asse rispettivo.*

## CAPITOLO IV.

### MOTI RELATIVI E APPLICAZIONI AI MOTI RIGIDI

#### § 1. - Generalità.

1. Nei due Cap. prec. abbiamo studiato il moto di un punto o di un sistema rigido rispetto ad una determinata terna di riferimento  $\Omega\xi\eta\zeta$ . Se il moto si riferisce ad una terna diversa, ne mutano in generale gli aspetti; ed è a priori manifesto come importi determinare in qual modo i caratteri cinematici dipendano dalla scelta del riferimento.

Il caso in cui la nuova terna sia immobile rispetto alla terna primitiva è già stato considerato al n. 14 del Cap. II; e si è visto che, con un tale cambiamento, puramente geometrico, di coordinate, la velocità e l'accelerazione di ogni singolo punto restano intrinsecamente invariate, in quanto le rispettive componenti variano cogredientemente alle coordinate del punto mobile.

Ben diverse circostanze si presentano nel caso cinematicamente più importante, in cui la nuova terna sia in moto rispetto alla primitiva e che qui appunto ci proponiamo di studiare. Riferendoci dapprima ad un unico punto  $P$  in moto rispetto ad una terna  $\Omega\xi\eta\zeta$ , e considerando una seconda terna  $Oxyz$  mobile rispetto alla prima, avremo che  $P$  si muoverà anche rispetto alla seconda terna; e qui dobbiamo indagare le relazioni che, istante per istante, intercedono fra i caratteri cinematici dei due moti simultanei di  $P$  rispetto alle due terne. Si può dire, in altre parole, che si tratta di studiare le relazioni intercedenti fra gli aspetti, che il moto di un punto presenta a due diversi osservatori, l'uno in moto rispetto all'altro.

Per pura comodità di locuzione, designamo come *fissa* la terna  $\Omega\xi\eta\zeta$  e come *mobile* la terna  $Oxyz$ : e, nel medesimo senso convenzionale, chiamiamo *assoluto* il moto di  $P$  rispetto alla terna *fissa*, *relativo* quello rispetto alla terna *mobile*. Infine diciamo *moto di trascinamento* il moto rigido della terna *mobile*  $Oxyz$  (e di tutti i punti solidali con essa) rispetto alla terna *fissa*.

Designate con  $\xi, \eta, \zeta$  e  $x, y, z$  le coordinate di  $P$  rispetto alle due terne ordinatamente, avremo che tanto le une quanto le altre varieranno, durante il moto, in funzione del tempo. Se sono date le equazioni del moto relativo di  $P$

$$(1) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

e di più supponiamo assegnato il moto di trascinamento mediante le funzioni vettoriali  $O(t), i(t), j(t), k(t)$ , dove  $i, j, k$  designano al solito i versori fondamentali della terna mobile  $Oxyz$ , il moto assoluto di  $P$  è rappresentato dall'equazione geometrica

$$(2) \quad P = O + xi + yj + zk,$$

dove le  $x, y, z$  denotano precisamente le funzioni (1). Notiamo che quest'equazione si ridurrebbe alla (1) del n. 1 del Cap. prec., se il punto  $P$  fosse immobile rispetto alla terna  $Oxyz$ , cioè se il moto relativo (1) si riducesse alla quiete (relativa), o, in altre parole, restassero costanti le  $x, y, z$ .

Proiettando la (2) sugli assi fissi, si ottengono le equazioni del moto assoluto, le quali si presentano sotto la stessa forma delle (2) del Cap. prec., salva l'essenziale circostanza or ora accennata che qui le  $x, y, z$  vanno interpretate come funzioni del tempo, date dalle (1).

Si ha così la determinazione esplicita del moto assoluto, quando siano dati il moto relativo e quello di trascinamento. Viceversa, basta invertire, nella (2) o nelle sue componenti scalari, l'ufficio delle due terne per trarne la determinazione del moto relativo, quando sia dato, oltre il moto di trascinamento, quello assoluto.

## § 2. - Velocità assoluta, relativa e di trascinamento.

2. In accordo colle locuzioni fissate al n. prec., distingueremo la velocità e l'accelerazione di  $P$  rispetto alla terna fissa da quelle rispetto alla terna mobile, chiamando *assolute* le prime, *relative* le seconde e designandole rispettivamente con

$$v_a, a_a \quad \text{e} \quad v_r, a_r.$$

I vettori  $v_a$  ed  $a_a$  sono dati per definizione, da  $dP/dt$  e  $d^2P/dt^2$ , ove, beninteso, la variabilità di  $P$  si riferisca alla terna fissa  $\Omega\xi\eta\zeta$ ; mentre la velocità e l'accelerazione relative  $v_r$  ed  $a_r$  dipendono dalla variabilità di  $P$  rispetto alla terna mobile e hanno per componenti rispetto ad essa le derivate prime e seconde

$$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \quad \text{e} \quad \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$$

delle funzioni (1).

Ciò premesso, occupiamoci del punto variabile  $P(t)$ , riferito alla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$ . Derivando la (2) rispetto a  $t$ , si deduce per la velocità assoluta l'espressione

$$(3) \quad \frac{dP}{dt} = \frac{dO}{dt} + x \frac{di}{dt} + y \frac{dj}{dt} + z \frac{dk}{dt} + xi + yj + zk,$$

dove, al secondo membro, il trinomio  $xi + yj + zk$ , è appunto la velocità relativa  $v_r$ , mentre il quadrinomio

$$(4) \quad \frac{dO}{dt} + x \frac{di}{dt} + y \frac{dj}{dt} + z \frac{dk}{dt}$$

fornisce istante per istante la velocità, da cui, nel moto di trasciamento, risulta animato, rispetto alla terna fissa, quel punto, solidale colla  $Oxyz$ , in cui viene a trovarsi in quell'istante il punto  $P$ . Ciò si vede nel modo più evidente applicando alla (3) l'ipotesi che nell'istante  $t$ , improvvisamente, il punto  $P$  si arresti nel suo moto (relativo) rispetto ad  $Oxyz$  e si lasci semplicemente trascinare da questa terna, giacchè allora, annullandosi la  $v_r$ , il secondo membro della (3) si riduce alla sola (4). Designando la (4) col nome di *velocità di trasciamento* (della posizione occupata da  $P$  nell'istante considerato) e indicandola con  $v_t$ , possiamo scrivere la (3) sotto la forma

$$(5) \quad v_o = v_r + v_t;$$

e concludiamo che *ad ogni istante la velocità assoluta di un punto è la risultante della sua velocità relativa e della simultanea sua velocità di trasciamento.*

Questo risultato risponde ad una veduta direttamente intuitiva, perchè, se, ad es., un viaggiatore passeggia nel corridoio di un treno, appare naturale di valutare, istante per istante, la velocità del viaggiatore rispetto alla circostante campagna, come la risultante della sua velocità rispetto al treno, e della simultanea velocità del treno.

Per questo suo carattere intuitivo il precedente teorema fu un tempo assunto come postulato, talchè ancora oggi conserva il nome di *principio dei moti relativi* o del *parallelogrammo delle velocità*. Ma come si è visto, si tratta di una conseguenza logica delle premesse generali, la quale non involge alcun nuovo postulato.



### § 3. - Teorema del Coriolis.

3. Una ulteriore derivazione della (3) rispetto al tempo fornisce per l'accelerazione assoluta l'espressione

$$(6) \quad \frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2O}{dt^2} + x \frac{d^2i}{dt^2} + y \frac{d^2j}{dt^2} + z \frac{d^2k}{dt^2} + \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k + \\ + 2 \left( \dot{x} \frac{di}{dt} + \dot{y} \frac{dj}{dt} + \dot{z} \frac{dk}{dt} \right),$$

dove, al secondo membro, il trinomio

$$\ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k$$

rappresenta l'accelerazione relativa  $\alpha_r$ , mentre il quadrinomio

$$\frac{d^2O}{dt^2} + x \frac{d^2i}{dt^2} + y \frac{d^2j}{dt^2} + z \frac{d^2k}{dt^2}$$

è, nello stesso senso dato a tale locuzione nel caso della velocità, l'accelerazione di trascinamento, che designeremo con  $\alpha_t$ . Resta infine il doppio del vettore

$$(7) \quad \dot{x} \frac{di}{dt} + \dot{y} \frac{dj}{dt} + \dot{z} \frac{dk}{dt},$$

che dipende tanto dal moto relativo quanto da quello di trascinamento e prende il nome di *accelerazione complementare* o *centrifuga composta*. Denotandola con  $\alpha_c$ , la (6) si può scrivere

$$(8) \quad \alpha_n = \alpha_r + \alpha_t + 2\alpha_c,$$

e si conclude: *L'accelerazione assoluta è ad ogni istante la risultante della accelerazione relativa, dell'accelerazione di trascinamento e del doppio dell'accelerazione complementare (teorema del CORIOLIS) (1).*

L'accelerazione complementare non ha un significato cinematico immediato, ma assume una forma espressiva e adatta alle applicazioni se si introduce la velocità angolare  $\omega$  del moto (rigido) di trascinamento. In base alle formule del POISSON (Cap. prec., n. 15) l'espressione (7) di  $\alpha_c$  si può scrivere

$$\omega \wedge (\dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k),$$

(1) GUSTAVE GASPARD CORIOLIS, n. a Parigi nel 1792, m. ivi nel 1843. Il suo espressivo enunciato si trova inserito in una memoria del « Journal de l'École Polytechnique (1836) ». Egli fu direttore di questa Scuola (per la parte scientifica).

talchè si conclude

$$\mathbf{a}_e = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r.$$

Poichè ad ogni istante il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  dà la direzione dell'asse di moto della terna  $Oxyz$ , risulta di qui che l'accelerazione  $\mathbf{a}_e$  è sempre ortogonale all'asse del moto di trascinamento e alla velocità relativa, e si annulla: 1°) quando la velocità relativa risulta parallela all'asse del moto di trascinamento; 2°) quando  $\mathbf{v}_r = 0$  (istante di arresto nel moto relativo); 3°) quando  $\boldsymbol{\omega} = 0$  (atto di moto di trascinamento puramente traslatorio).

4. MOTI DI TRASCINAMENTO PARTICOLARI. — a) Se il moto di trascinamento è *traslatorio*, tutti i punti solidali colla terna mobile  $Oxyz$  hanno ad ogni istante la stessa velocità e la stessa accelerazione (Cap. prec., n. 4), talchè la velocità e la accelerazione di trascinamento si riducono a due vettori puramente temporali, che si possono identificare colla velocità  $\mathbf{v}_0(t)$  e coll'accelerazione  $\mathbf{a}_0(t)$  dell'origine  $O$ . Poichè si mantiene costantemente nulla la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  della terna mobile, è pur nulla identicamente l'accelerazione complementare (n. prec.): e si conclude, in base alle (5), (8),

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{a}_e = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_0,$$

dove i vettori a secondo membro dipendono tutti esclusivamente dal tempo.

b) Supponiamo, in secondo luogo, che il moto di trascinamento sia *rotatorio uniforme* di velocità costante  $\boldsymbol{\omega}$ .

Se come origine  $O$  della terna mobile si prende un punto (fisso) dell'asse e si designa al solito con  $Q$  la proiezione ortogonale di  $P$  sull'asse, la velocità e l'accelerazione di trascinamento sono date (III, nn. 6, 8) da

$$\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O), \quad \mathbf{a}_r = -\boldsymbol{\omega}^2 (P - Q),$$

cosicchè pel moto assoluto si avrà, in base alle (5), (8),

$$(9) \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O), \quad \mathbf{a}_e = \mathbf{a}_r - \boldsymbol{\omega}^2 (P - Q) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r.$$

Di qui, se si assume come asse  $z$  della terna mobile l'asse di rotazione, orientato nel verso di  $\boldsymbol{\omega}$ , si deducono per le componenti di  $\mathbf{v}_e$  ed  $\mathbf{a}_e$  secondo gli assi mobili le espressioni

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{e|x} = \dot{x} - \omega y, \\ v_{e|y} = \dot{y} + \omega x, \\ v_{e|z} = \dot{z}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{e|x} = \ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega \dot{y}, \\ a_{e|y} = \ddot{y} - \omega^2 y + 2\omega \dot{x}, \\ a_{e|z} = \ddot{z}. \end{array} \right.$$

c) Se infine il moto di trascinamento è *elicoidale uniforme* e

L'origine  $O$  della terna mobile si assume sul relativo asse di moto, abbiamo

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O), \quad \mathbf{a}_r = -\omega^2(P - Q),$$

dove la velocità (costante)  $\mathbf{v}_0$  di  $O$  ha la stessa direzione della velocità angolare. Di qui per la velocità assoluta risulta l'espressione

$$(10) \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O),$$

mentre per l'accelerazione assoluta vale ancora l'espressione (9), pocanzi ottenuta nel caso del moto di trascinamento rotatorio uniforme. Ciò appare ben naturale se si osserva che la velocità (10) differisce soltanto per l'addendo costante  $\mathbf{v}_0$  dalla (9) corrispondente al caso  $b$ ).

#### § 4. - Moto di un sistema rigido rispetto a due riferimenti mobili fra loro.

5. Le nozioni di moto assoluto, relativo e di trascinamento, introdotte e studiate nei §§ prec. per il caso di un solo punto mobile, si estendono ovviamente a sistemi quali si vogliano di punti in moto, in particolare ai sistemi rigidi. In ogni caso varranno ad ogni istante e per ogni punto del sistema il principio dei moti relativi (n. 2) e la regola del CORIOLIS (n. 3); e nell'insieme delle equazioni (5), (8), valide per tutti i punti del sistema, si ha quanto basta per determinare la distribuzione delle velocità e delle accelerazioni.

Limitiamoci qui ad alcune osservazioni sul caso, in cui si riferisca a due terne  $\Omega\xi\eta\zeta$ ,  $Oxyz$ , mobili l'una rispetto all'altra, il moto di un dato sistema rigido  $S$ .

Pel principio dei moti relativi la velocità assoluta  $\mathbf{v}_a$  di ogni singolo punto  $P$  di  $S$  si ottiene, istante per istante, sommando geometricamente due velocità  $\mathbf{v}_r$  e  $\mathbf{v}_0$ , come nella composizione di due atti di moto (III, n. 21). Tuttavia i due casi non vanno concettualmente confusi; giacchè nell'atto di moto composto la velocità di  $P$  era la risultante delle velocità che in certi due atti di moto competevano al medesimo punto  $P$ . Qui invece, mentre la velocità relativa  $\mathbf{v}_r$  corrisponde ad un effettivo moto del punto  $P$ , la velocità  $\mathbf{v}_0$  di trascinamento riflette un moto non del punto stesso, bensì di quel punto solidale colla terna  $Oxyz$  pel quale  $P$  si trova istantaneamente a passare.

La differenza fra i due casi riesce evidente se si considera un qualsiasi moto rototraslatorio, in quanto esso, istante per istante, può riguardarsi tanto come un moto composto, quanto come un moto generato per trascinamento.

Invero, mentre l'espressione della velocità (15) del n. 10 del Cap. III, cioè la

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O),$$

traduce semplicemente la scomponibilità dell'atto di moto in un moto traslatorio e in uno rotatorio, l'altra espressione (17) che diammo ottenuta per *decomposizione impropria*, cioè la

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O),$$

può essere interpretata come la rappresentazione delle velocità assolute dei punti di un sistema rigido, il quale, rispetto ad una terna  $Oxyz$ , animata da moto traslatorio di velocità  $\mathbf{v}_0$ , si muova con moto rotatorio di velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  intorno all'asse, solido con  $Oxyz$ , che passa per  $O$  ed è parallelo ad  $\boldsymbol{\omega}$ .

### § 5. — Derivata vettoriale rispetto ad assi in moto.

6. I risultati stabiliti nei §§ prec. trovano larghe ed eleganti applicazioni nella discussione dei problemi di Cinematica, in quanto gran parte di questi si possono ricondurre a problemi di moto relativo, nel senso dato a questa parola nel presente Capitolo. Qui ci limiteremo a dare un esempio di tal genere di considerazioni.

Se  $P(t)$  e  $Q(t)$  sono due punti comunque mobili rispetto ad un osservatore, schematizzato da una terna  $\Omega\xi\eta\zeta$ , la loro differenza  $P(t) - Q(t)$  definisce un vettore  $\mathbf{w}(t)$ , anch'esso in generale variabile, nel tempo, rispetto a quell'osservatore; e, reciprocamente, ogni vettore  $\mathbf{w}(t)$ , funzione del tempo, si può considerare come differenza di due punti mobili  $P(t)$  e  $Q(t)$ , di cui uno si può assumere ad arbitrio. In ogni caso, considerando la variazione temporale del vettore  $\mathbf{w}(t)$  rispetto alla terna suaccennata, si avrà

$$\dot{\mathbf{w}} = \dot{Q} - \dot{P}.$$

Pensiamo, dopo ciò, un secondo osservatore comunque mobile rispetto al primo e schematizzato, alla sua volta, da una seconda terna  $Oxyz$ . Molte volte interessa mettere in relazione fra loro i due modi, in cui, nel tempo, varia lo stesso vettore  $\mathbf{w}(t)$  rispetto ai due osservatori, cioè rispetto alle due terne  $\Omega\xi\eta\zeta$  e  $Oxyz$ . Come

per i punti mobili, così per le loro differenze, cioè per i vettori, diremo *derivate assolute* quelle valutate rispetto alla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$  e *relative* quelle valutate, invece, rispetto alla terna  $Oxyz$ . Denotando queste due derivate, per un generico vettore  $w(t)$ , rispettivamente con

$$\frac{d_a w}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{dw}{dt},$$

avremo in entrambi i casi la derivata del vettore, espressa come differenza delle velocità, rispettivamente assolute e relative, degli estremi, cioè

$$(11) \quad \frac{d_a w}{dt} = \frac{d_a Q}{dt} - \frac{d_a P}{dt}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dP}{dt}.$$

Ma, in forza della (5), si ha, ad esempio, per il punto  $P$ ,

$$\frac{d_a P}{dt} = \frac{dP}{dt} + v_r,$$

dove  $v_r$ , velocità di trascinamento, è la velocità, da cui, in un generico istante, risulterebbe animato il punto  $P$ , qualora nell'istante considerato, restasse solidale con la terna mobile  $Oxyz$  nella posizione attualmente occupata. Questa velocità di trascinamento, ove si denotino con  $v_0$  e  $\omega$  i vettori caratteristici del moto rigido della terna  $Oxyz$  rispetto alla  $\Omega\xi\eta\zeta$ , è data, in base all'espressione fondamentale (26) trovata al n. 16 del Cap. III per la velocità di un generico punto di un sistema rigido in moto, da

$$v_r = v_0 + \omega \wedge (P - O),$$

onde si ha

$$\frac{d_a P}{dt} = \frac{dP}{dt} + v_0 + \omega \wedge (P - O).$$

Analogamente per il punto  $Q$  vale la

$$\frac{d_a Q}{dt} = \frac{dQ}{dt} + v_0 + \omega \wedge (Q - O);$$

cosicchè, sottraendo membro a membro queste due ultime eguaglianze e tenendo conto delle (11) e della  $Q - P = w$ , si conclude che fra le due derivate assoluta e relativa di un qualsiasi vettore variabile nel tempo sussiste la relazione

$$(12) \quad \frac{d_a w}{dt} = \frac{dw}{dt} - \omega \wedge w.$$

In particolare, se  $w$  è un vettore solidale colla terna  $Oxyz$  ( $\frac{dw}{dt} = 0$ ), rimane

$$\frac{d_a w}{dt} = \omega \wedge w,$$

già rilevata (III, n. 15), come sintesi geometrica delle formule del POISSON.

Si rileva dalla (12) che le due derivate coincidono sempre e solo quando si annulla  $\omega \wedge w$ , cioè quando  $w$  è parallelo all'asse di moto della terna mobile o quando (annullandosi  $\omega$ ) il moto della terna mobile è puramente traslatorio.

7. La (12) così ottenuta è una formula particolarmente notevole e nel seguito avremo occasione di applicarla più volte. Qui intanto deduciamone qualche conseguenza immediata.

Applicandola, anzitutto, alla velocità angolare  $\omega$ , si ottiene

$$(13) \quad \frac{d_a \omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt};$$

*cioè nel moto di un sistema rigido la velocità angolare ha la stessa derivata (accelerazione angolare) rispetto alla terna fissa e a quella solidale col sistema.*

Così tenendo conto dell'identità

$$\omega = \omega \text{ vers } \omega$$

e osservando che la derivata di uno scalare è manifestamente indipendente dalla terna di riferimento, deduciamo dalla (13)

$$\frac{d_a \text{vers } \omega}{dt} = \frac{d \text{vers } \omega}{dt};$$

*onde risulta che queste due derivate si annullano insieme; cioè, se, durante il moto di un sistema rigido, l'asse di moto ha direzione fissa entro il sistema, ha pur direzione fissa nello spazio e viceversa.*

8. Mostriamo, in secondo luogo, che la (12) del n. 6 permette di dimostrare il teorema già enunciato ed applicato al n. 16 del Cap. prec.: *Ogni moto elicoidale uniforme ha, per ogni possibile centro di riduzione, vettori caratteristici costanti rispetto agli assi mobili.*

Designate al solito con  $\tau$  e  $\omega$  le velocità componenti di un moto rototraslatorio, e con  $v_0$ ,  $\omega$  i corrispondenti vettori caratteristici (rispetto ad un qualsiasi polo  $O$ ), rileviamo anzitutto dalla (13)

del n. prec. che, se  $\omega$  è costante rispetto alla terna fissa, tale risulta altresì rispetto alla terna mobile e viceversa.

Quanto poi a  $\tau$  e  $v_0$ , ricordando che essi sono legati dalla relazione (n. 10 del Cap. prec.)

$$v_0 = \tau + \omega \wedge (O - \Omega),$$

e derivando rispetto a  $t$ , con riferimento alla terna fissa, si ricava, nella ipotesi della costanza di  $\omega$ ,

$$\frac{d_0 v_0}{dt} = \frac{d_0 \tau}{dt} + \omega \wedge \frac{d_0 O}{dt} = \frac{d_0 \tau}{dt} + \omega \wedge v_0.$$

Ma la (12), applicata a  $v_0$ , fornisce

$$\frac{d_0 v_0}{dt} = \frac{dv_0}{dt} + \omega \wedge v_0,$$

onde, confrontando colla equazione precedente, si conclude

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{d_0 \tau}{dt};$$

si ha cioè che se  $\omega$  è costante (pel n. prec. è indifferente supporre questa costanza rispetto alla terna fissa o a quella mobile), la derivata di  $v_0$  rispetto agli assi mobili e quella di  $\tau$  rispetto agli assi fissi coincidono, talchè l'annullarsi dell'una implica l'annullarsi dell'altra.

## CAPITOLO V.

### MOTI RIGIDI PIANI

#### § 1. - Generalità - Teorema di Eulero e centro istantaneo di rotazione.

1. Riprendiamo a considerare i moti di un sistema rigido  $S$  paralleli ad una data giacitura (solidale col riferimento che convenzionalmente chiamiamo *fisso*) (III, n. 20). Osservammo già che un tal moto si realizza, imponendo ad un piano  $p$ , solidale col sistema mobile  $S$ , di muoversi su di un piano  $\pi$  fisso. Considerato in  $S$  un punto  $P$  fuori di  $p$  e designata con  $P_1$  la sua proiezione ortogonale su  $\pi$ , avremo che, durante il moto, il vettore  $P - P_1$ , per la condizione di rigidità, si manterrà, oltrechè costante di lunghezza, ortogonale a  $\pi$  (e al piano sovrapposto  $p$ ), cosicchè si muoverà in un piano parallelo a  $\pi$ , descrivendo una traiettoria congruente e parallela a quella di  $P_1$ , con la stessa legge oraria. Insomma nel moto considerato ogni piano parallelo a  $p$  (e solidale con  $S$ ) si muove su se stesso; e su codesti  $\infty^1$  piani paralleli il moto presenta istante per istante i medesimi caratteri cinematici, cosicchè potremo limitarci a studiare i moti rigidi di un solo piano su se stesso o moti rigidi piani.

Dato l'interesse che tali moti presentano anche per le applicazioni, qui non ne dedurremo le proprietà dai teoremi generali sui moti rigidi (Cap. III e IV), ma svolgeremo alcune considerazioni elementari che permettono di stabilirne la teoria in modo diretto ed autonomo.

2. La circostanza assodata al n. 20 del Cap. III che un moto rigido parallelo ad una giacitura fissa presenta ad ogni istante un atto di moto rotatorio (intorno ad un asse perpendicolare alla giacitura prefissata) o traslatorio (in una direzione parallela a codesta giacitura) implica che ogni atto di moto rigido piano è puramente rotatorio (intorno ad un punto del piano) o traslatorio (sul piano stesso).



Ridimostriamo questo importante risultato per via diretta ed elementare; al quale scopo convien premettere un teorema relativo agli spostamenti finiti. Fissiamo l'attenzione sulle posizioni assunte dal piano mobile  $p$  sul piano di riferimento  $\pi$  in due diversi istanti quali si vogliano  $t$  e  $t + \Delta t$ . Dall'una all'altra di codeste due posizioni il piano  $p$  sarà passato con un certo moto continuo; ma vogliamo far vedere, che, ove si prescindia dalle circostanze cinematiche relative agli istanti compresi fra  $t$  e  $t + \Delta t$ , si può sempre far passare il piano  $p$  dalla prima alla seconda delle posizioni prefissate con una rotazione  $\theta$ , in casi particolari, con una traslazione (rettilinea); si tratta, cioè, di stabilire il teorema di EULERO: *Ogni spostamento rigido di un piano su se stesso è attuabile con una certa rotazione  $\theta$ , in particolare, con una certa traslazione (rettilinea).*

Ciò va inteso in senso puramente geometrico, perchè rimane indeterminata la legge temporale di codesta rotazione o traslazione.

Per dimostrare il teorema or ora enunciato occorre anzitutto individuare geometricamente, l'una rispetto all'altra, le due posizioni considerate di  $p$  su  $\pi$ . Se  $A$  e  $B$  sono le posizioni occupate su  $\pi$  inizialmente da certi due punti di  $p$ , basta conoscerne su  $\pi$  le posizioni finali  $A'$  e  $B'$  (che per la rigidità debbono essere tali che  $A'B' = AB$ ) perchè risulti individuata la posizione finale dell'intero piano. Invero se  $C$  è la posizione inizialmente occupata su  $\pi$  da un qualsiasi punto di  $p$ , esso alla fine dovrà assumere la posizione  $C'$  tale che la terna  $A'B'C'$  (triangolare o allineata) risulti direttamente uguale ad  $ABC$ .

Discende di qui che ogni moto che porti la coppia di punti  $A, B$  in  $A', B'$  fa passare l'intero piano  $p$  dalla prima alla seconda delle posizioni prefissate.

Ora, se per caso  $A'$  coincide con  $A$ , basta a tale scopo la rotazione di centro  $A \equiv A'$  e di ampiezza  $B\hat{A}B'$ .

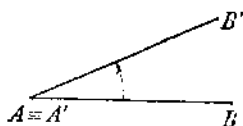
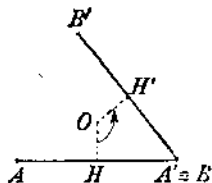
Escluso questo caso, cioè supposto  $A'$  distinto da  $A$ , scegliamo come secondo punto su  $p$  quello la cui posizione iniziale  $B$  coincide precisamente con  $A'$ .

La sua posizione finale  $B'$ , per la condizione  $A'B' = AB$ , giacerà sulla circonferenza di

centro  $A' \equiv B$  e di raggio  $BA$ ; e necessariamente do-

vrà presentarsi l'una o l'altra delle seguenti tre circostanze, che partitamente discuteremo:

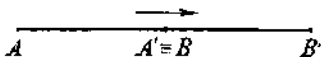
a)  $B'$  non giace sulla retta  $AA'$ . Detto  $O$  il punto di intersezione degli assi di  $AA', BB'$  (cioè delle perpendicolari nei rispettivi punti



medi  $H, H'$ ) la coppia  $A, B$  si porta in  $A', B'$  mediante la rotazione di centro  $O$  e ampiezza  $\overline{HOH'}$ .

b)  $B'$  è allineato con  $A$  e  $B$  e coincide con  $A$ . In tal caso, basta al nostro scopo far *rotare* il piano di  $180^\circ$  intorno al punto medio di  $AA'$  (e di  $BB'$ ).

c) Se, infine,  $B'$  è sul prolungamento di  $AA'$  (simmetrico di  $A$  rispetto ad  $A' \equiv B$ ) la coppia  $A, B$  si porta in  $A', B'$  colla traslazione rappresentata dal segmento orientato  $AA'$ .



Stabilito così il teorema di EULERO, osserviamo che dalla dimostrazione stessa discende che, quando lo spostamento è attuabile con una rotazione, pel centro di questa passa l'asse del segmento che congiunge le posizioni iniziale e finale di ogni punto del piano mobile.

Notiamo, infine, che il caso *c*) della traslazione si può riguardare come limite di quello della rotazione, immaginando che il centro di questa si allontani all'infinito (in direzione ortogonale a quella della traslazione).

3. Ciò premesso, riferiamoci ad un dato moto rigido di  $p$  su se stesso; e in un intervallo di tempo da  $t$  a  $t + \Delta t$ , appartenente alla durata del moto, consideriamo simultaneamente il moto effettivo e il moto fittizio, rotatorio o traslatorio (supposto ad es. uniforme) che produce su  $p$  lo stesso spostamento finale del primo. Se, tenuto fisso  $t$ , facciamo tendere  $\Delta t$  allo zero, il moto fittizio varierà con  $\Delta t$ ; ma al limite tenderà ad un certo moto infinitesimo, rotatorio o traslatorio, che, in quanto produce su ogni punto  $A$  di  $p$  lo stesso spostamento (infinitesimo)  $dA$  del moto effettivo, non è altro che il moto elementare effettivo nel tempuscolo da  $t$  a  $t + dt$ . Resta così dimostrato che ogni atto di moto rigido piano è rotatorio o, in particolare, traslatorio.

4. In ogni istante, in cui l'atto di moto è rotatorio, il centro  $I$  della rotazione elementare (limite del centro  $O$  della rotazione finita fittizia) dicesi *centro* (istantaneo) *di rotazione* o *polo* del moto rigido nell'istante considerato; ed è l'analogo nel piano dell'asse di moto rigido nello spazio (III, n. 17). Se poi l'atto di moto è traslatorio, il centro si può immaginare all'infinito (in direzione ortogonale alla traslazione infinitesima).

Poichè, in un generico  $\Delta t$ , il centro del moto rotatorio fittizio è comune agli assi degli spostamenti finiti  $A' - A$  dei singoli

punti  $A$  di  $p$ , si ha, passando al limite, il teorema dello CHASLES <sup>(1)</sup>:  
*In un moto rigido piano, ad ogni istante le normali nei singoli punti del piano mobile alle rispettive traiettorie passano pel centro istantaneo di rotazione, oppure, se l'atto di moto è traslatorio, sono parallele.*

E, in base alle osservazioni del n. 6 del Cap. III, nel primo caso la velocità dei singoli punti  $A$  del piano mobile sono, ad ogni istante, ortogonali alle loro congiungenti  $AI$  col centro istantaneo di rotazione  $e$ , scolarmente, proporzionali alle rispettive distanze da  $I$ .

Così, in particolare, in ogni atto di moto rotatorio il centro istantaneo di rotazione è caratterizzato sul piano mobile come l'unico punto  $I$  che abbia velocità nulla; mentre ben sappiamo che in ogni atto di moto traslatorio tutti i punti del piano mobile hanno velocità equipollenti.

## § 2. - Traiettorie polari.

5. RULLETTA E BASE. — Se durante il moto rigido di  $p$  su  $\pi$  vi sono degli intervalli di tempo, in cui l'atto di moto è ad ogni istante traslatorio (cioè il centro istantaneo di rotazione è costantemente a distanza infinita) il moto, in ciascuno di codesti tratti di tempo, si mantiene traslatorio; nel qual caso, per realizzarlo, basta (III, n. 4) aver riguardo a un solo punto del sistema, tutti gli altri descrivendo traiettorie congruenti.

In ognuno degli intervalli di tempo residui, il centro istantaneo di rotazione potrà allontanarsi all'infinito solo in istanti isolati, talchè l'intera durata del moto potrà immaginarsi suddivisa in un certo numero di tratti di tempo, in ciascuno dei quali il moto o è costantemente traslatorio oppure presenta ad ogni istante (salvo agli istanti estremi) un atto di moto rotatorio.

Riferendoci ad un intervallo di tempo di quest'ultima specie, avremo che ad ogni istante il piano mobile ammette su  $\pi$  un certo determinato centro di rotazione o polo  $I$ , che al trascorrere del tempo, varierà di posizione tanto su  $\pi$ , quanto su  $p$ , descrivendo su codesti due piani rispettivamente certe due curve  $\lambda$  ed  $l$ , che chiamansi traiettorie polari. Più precisamente la curva  $\lambda$  descritta sul piano fisso dicesi base, mentre la  $l$  solidale col piano mobile si chiama rulletta.

(1) MICHELE CHASLES, n. a Épernon (Eure et Loir) nel 1793, m. ivi nel 1880, fu professore di Geometria superiore all'Università di Parigi, e coltivò anche la storia delle matematiche.

6. L'importanza della considerazione delle due traiettorie polari risulta dal fatto che: *Durante il moto, la rulletta rotola, senza strisciare, sulla base.*

Questo teorema si dimostra ricorrendo alla considerazione di un moto relativo fittizio.

La rulletta e la base hanno comune ad ogni istante il rispettivo polo  $I$ . Consideriamo il moto sul piano mobile  $p$  del punto che istante per istante occupa la posizione del polo  $I$  e che, perciò, ha come traiettoria su  $p$  la rulletta  $l$ . Questa rulletta, in quanto è solidale con  $p$  viene trascinata da questo piano nel suo dato moto rigido sul piano fisso  $\pi$ ; onde il moto di  $I$  rispetto a  $\pi$  si può riguardare come un *moto assoluto*, definito dal moto dato di  $p$ , quale moto di trascinamento, e dal moto di  $I$  lungo la rulletta, quale moto relativo; e in codesto moto assoluto la traiettoria di  $I$  su  $\pi$  è appunto la base  $\lambda$ . Indicando allora con  $v_a$ ,  $v_r$  le velocità assoluta e relativa di  $I$  (cioè le sue velocità rispetto a  $\pi$  e a  $p$ ), le quali risultano tangenti rispettivamente a  $\lambda$  e ad  $l$ , avremo senz'altro, pel principio dei moti relativi (n. 2 del Cap. prec.),

$$(1) \quad v_a = v_r,$$

in quanto la velocità di trascinamento, cioè la velocità rispetto a  $\pi$  della posizione occupata istantaneamente da  $I$  su  $p$  (polo istantaneo) è costantemente nulla (n. 4). E la (1) ci assicura appunto che le due traiettorie polari hanno ad ogni istante nel punto comune la medesima tangente; e di più, in quanto dalla identità delle due velocità discende quella dei rispettivi spostamenti elementari, rotolano l'una sull'altra *senza strisciare*.

Resta dunque stabilito che ogni moto rigido piano, quando non sia traslatorio, è attuabile mediante il rotolamento di una curva solidale col piano mobile (rulletta) su di una curva fissa (base).

Notiamo, infine, che, per la natura relativa del moto, quando è definito un moto rigido di un piano  $p$  su di un piano  $\pi$ , resta conseguentemente determinato il moto di  $\pi$  su  $p$ . Questo dicesi il *moto reciproco* del dato, ed ha manifestamente le medesime traiettorie polari, salvo lo scambio fra rulletta e base.

### § 3. — Profili coniugati.

7. Il concetto di traiettorie polari è suscettibile di una generalizzazione che presenta un notevole interesse applicativo.

Nel moto di una figura rigida  $F$  sul piano, sia  $c$  una curva (piana) solidale con essa. Le posizioni successivamente assunte da  $c$ ,

nel suo moto di trascinamento assieme alla  $F$ , ammetteranno in generale un involuppo  $\gamma$ . Ogni qual volta esso esiste effettivamente, lo si dirà profilo coniugato della  $c$ . Per la proprietà caratteristica degli involuppi la curva mobile  $c$  deve mantenerglisi sempre tangente, potendo variare, da istante a istante, il punto di contatto  $M$ . Di qua apparisce in primo luogo che la relazione fra  $c$  e  $\gamma$  è reciproca. Infatti se si considera il cosiddetto moto reciproco, cioè quello della curva  $\gamma$  rispetto alla figura  $F$ , la  $c$  si presenta come involuppo delle varie posizioni occupate da  $\gamma$  (in  $F$ ), essendo tangente a ciascuna di esse. Questo giustifica la denominazione di profili coniugati, senza che occorra specificare quale dei due sia il profilo mobile e quale l'involuppo.

8. Comunque, la normale comune a  $c$  e a  $\gamma$  nel loro punto di contatto  $M$  va a passare ad ogni istante per il corrispondente centro istantaneo di rotazione (sia esso proprio od improprio). Se  $M$  coincide con  $I$  la cosa è manifesta. Nel caso generale in cui  $M$  è distinto da  $I$  si ricorre al solito criterio dei moti relativi (n. 6), mettendo a raffronto la velocità  $v_r$  di  $M$  su  $c$  (che diremo velocità relativa, attenendoci all'immagine del moto di  $F$  rispetto agli assi fissi, cioè di  $c$  rispetto a  $\gamma$ ) colla sua velocità  $v_a$  (assoluta, cioè concernente il suo spostamento su  $\gamma$ ). Poichè  $c$  e  $\gamma$  si toccano,  $v_a$  e  $v_r$  sono dirette secondo la tangente comune. Lo stesso deve quindi seguire per la differenza  $v_a - v_r$ , ossia per la velocità di trascinamento del punto  $M$ . Poichè quest'ultima (n. 4) è perpendicolare ad  $IM$ , si conclude che  $IM$  coincide colla normale comune ai due profili.

Si noti altresì che, in quanto qui, a differenza di ciò che accadeva per le traiettorie polari (n. 6), la velocità di trascinamento  $v_a - v_r$  è, generalmente, diversa da zero, il rotolamento di  $c$  su  $\gamma$  è accompagnato da uno strisciamento, espresso dallo spostamento elementare corrispondente a codesta velocità  $v_a - v_r$ ; e, poichè tale velocità è data da  $\omega \wedge (M - I)$ , con  $\omega$  perpendicolare a  $\pi$  e, quindi, ad  $M - I$ , il rispettivo valore assoluto è  $\omega \cdot IM$ , sicchè anche lo strisciamento risulta proporzionale alla distanza  $IM$  del punto di contatto  $M$  dal polo e si annulla soltanto quando  $M$  coincida con  $I$ , il che accade ad ogni istante se i due profili coniugati coincidono con quelli polari.

Nel caso limite della traslazione ( $I$  a distanza infinita), la velocità di trascinamento e, con essa, le tangenti ai profili hanno appunto la direzione della traslazione.

9. Come caso particolare della proposizione testè stabilita, si ritrova il teorema dello CHASLES (n. 4). Basta supporre il profilo

solidale  $c$  ridotto ad un unico punto  $P$ , o, se si vuole (per rendere più espressiva la particolarizzazione), ad una circonferenza infinitesima attorno a  $P$ . L'involuppo  $\gamma$  si identifica manifestamente colla traiettoria di  $P$ ; il punto di contatto  $M$  fra  $c$  e  $\gamma$  coincide ad ogni istante colla posizione di  $P$  in quell'istante, e quindi la normale comune ai profili colla normale alla traiettoria.

10. Un altro notevole corollario si ha supponendo che il moto di  $F$  avvenga in modo che un profilo solidale  $c$  passi costantemente per un punto fisso  $\Omega$ . Il profilo coniugato  $\gamma$  si riduce in questo caso allo stesso punto  $\Omega$ , e il risultato da ritenere è che: *Se un profilo  $c$  solidale con  $F$  passa costantemente per un punto fisso  $\Omega$ , la normale a  $c$  condotta da  $\Omega$  (la quale generalmente varia da istante a istante) contiene il centro istantaneo di rotazione (relativo alla considerata posizione della figura e quindi di  $c$ ). A ciò si perviene altresì come immediata conseguenza del teorema di CHASLES, purchè si consideri il moto reciproco.*

11. Aggiungiamo un'osservazione d'indole meccanica, circa la materiale realizzazione di un moto piano mediante due profili coniugati  $c$  e  $\gamma$ .

Oltrechè teoricamente più semplice, la realizzazione mediante le traiettorie polari presenta il vantaggio di sopprimere le influenze passive, dovute al cosiddetto *attrito radente* (cfr. Cap. IX), il quale entra in gioco tanto più intensamente (cioè fa un lavoro resistente tanto maggiore) quanto maggiore è lo strisciamento dei due profili. Finchè questi coincidono con le traiettorie polari, interviene soltanto l'*attrito volvente*, i cui effetti sono di gran lunga inferiori (cfr. Cap. XII). E siccome lo scorrimento del profilo mobile  $c$  sul suo coniugato  $\gamma$  è proporzionale alla distanza del punto di contatto dal polo (n. 8), se ne conclude che, se determinate esigenze pratiche non consentono di far coincidere i profili  $c$  e  $\gamma$  con le traiettorie polari, sarà per altro, in ogni caso, buona norma lo scostarsene il meno possibile.

#### § 4. — Esempi di moti rigidi piani.

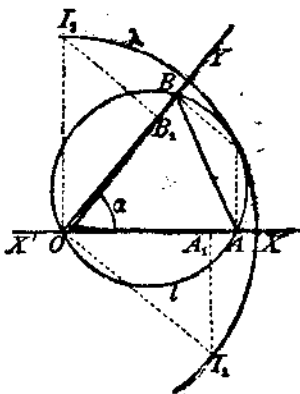
12. Ad illustrazione delle considerazioni generali precedenti diamo qualche esempio elementare di determinazione delle traiettorie polari di dati moti rigidi piani. A problemi di questo genere si è condotti, nelle applicazioni tecniche, tutte le volte che si vuole realizzare con un dispositivo meccanico un dato moto rigido piano,

in quanto, come si è visto, esso è in ogni caso attuabile (salvo le difficoltà di ordine pratico) mediante il rotolamento (senza strisciamento) delle due traiettorie polari l'una sull'altra. E notiamo, pur senza indugiareci sull'argomento, che per la Meccanica applicata (teoria degli ingranaggi) hanno particolare interesse i cosiddetti *moti epicycloidali*, cioè i moti, le cui traiettorie polari sono entrambe circolari.

Qui intanto importa notare che in ciascuno degli esempi seguenti supporremo assegnata la successione delle posizioni della figura mobile, non la legge temporale secondo cui esse vengono mano mano occupate, cosicchè in sostanza si tratterà di questioni di geometria del moto, in cui faremo talvolta intervenire il tempo e i concetti cinematici per sola comodità di argomentazione e di linguaggio.

**13. ASTA SCORREVOLE FRA GUIDE RETTILINEE.** — Consideriamo un'asta rigida, schematizzata in un segmento rettilineo, i cui estremi  $A, B$  scorrono sui lati di un angolo fisso  $XOY = \alpha < \pi$ .

Le traiettorie di  $A$  e  $B$  sono per ipotesi le semirette  $OX$  e  $OY$ , talchè, considerata l'asta in una generica posizione  $AB$ , il corrispondente polo  $I$  sarà l'intersezione delle perpendicolari alle  $OX, OY$ , in  $A$  e  $B$  rispettivamente. Di qui risulta che il quadrangolo  $O A I B$ , avendo due angoli opposti retti, è iscrivibile, cosicchè il segmento  $AB$  è, in ogni sua posizione, visto dal corrispondente polo  $I$  sotto l'angolo costante  $\beta = \pi - \alpha$ . Perciò la *rulletta* (luogo dei poli sul piano solido con  $AB$ ) è un arco circolare di estremi  $A$  e  $B$ , capace dell'angolo  $\beta$ .



Per la iscrivibilità del quadrangolo  $O A I B$ , la circonferenza  $l$  di codesto arco passa, qualunque sia la posizione di  $AB$ , pel punto fisso  $O$ ; e per la perpendicolarità delle corde  $OA, AI$  (come pure delle  $OB, BI$ ) i punti  $O$  ed  $I$  riescono, per ogni posizione di  $AB$ , diametralmente opposti sulla  $l$ ; onde si conclude che  $I$  si mantiene, rispetto ad  $O$ , a distanza costantemente eguale al diametro di  $l$ ; cioè la base è un arco della circonferenza  $\lambda$  di centro  $O$  e raggio uguale al diametro di  $l$ .

Sotto le ipotesi poste, le posizioni estreme dell'asta  $AB$  si avranno quando essa si dispone lungo la semiretta  $OX$  coll'estremo

$B$  in  $O$  ed  $A$  in  $A_1$ , e quando si dispone lungo la  $OY$  con l'estremo  $A$  in  $O$  e  $B$  in  $B_1$ .

Il polo  $I_1$  o  $I_2$  corrispondente a codesta prima o seconda posizione di  $AB$  si ottiene sulla  $\lambda$  come estremo del raggio  $OI_1$  od  $OI_2$ , perpendicolare alla  $OY$  od  $OX$  dalla stessa parte della  $OX$  od  $OY$  rispettivamente; cosicchè la base del moto rigido è precisamente l'arco di circonferenza  $\widehat{I_1I_2}$ , il cui angolo al centro è  $\pi - \alpha$ , cioè  $\beta$ . Inoltre osservando che il triangolo  $OA_1I_1$  risulta rettangolo in  $A_1$  e che l'angolo  $OA_1I_1$  è, in valore assoluto, uguale a  $\pi/2 - \alpha$ , si conclude che il raggio  $OI_1$  di  $\lambda$  (e quindi il diametro di  $l$ ) è dato da

$$(2) \quad \frac{AB}{\sin \alpha}.$$

Condotta allora la semiretta  $OX'$  opposta ad  $OX$ , si immagini che l'asta  $AB$ , proseguendo il suo moto al di là della posizione  $OB_1$  dianzi considerata, scorra con l'estremo  $A$  lungo la  $OX'$  e con l'estremo  $B$  ancora lungo la  $OY$ .

Si potranno ripetere le considerazioni precedenti, cosicchè, anche in questa seconda fase del moto, base e rulletta saranno due archi di circonferenza, ed anzi, poichè  $\widehat{YOX'} = \pi - \alpha$ , il raggio della nuova base (o diametro della nuova rulletta)

$$\frac{AB}{\sin(\pi - \alpha)}$$

non differirà da quello trovato dianzi, cioè le due nuove traiettorie polari sono ancora archi delle circonferenze or ora designate con  $\lambda$  e  $l$ . È poi chiaro che in questa seconda fase del moto, la base è l'arco di  $\lambda$  (minore di una semicirconferenza) compreso fra  $I_2$  e il punto  $I_1$ , diametralmente opposto ad  $I_1$ .

Così, considerando il prolungamento  $OY'$  di  $OY$  e immaginando proseguito il moto di  $AB$  negli angoli  $\widehat{XOY'}$  e  $\widehat{Y'OX}$ , si conclude che l'intero moto (evidentemente periodico quanto alle circostanze geometriche) si attua col rotolamento della circonferenza  $l$  di diametro (2) entro una circonferenza  $\lambda$  di diametro doppio. Si tratta dunque di un moto epicycloidale.

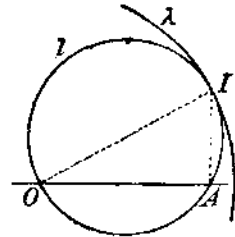
14. Viceversa, ogni moto rigido piano, definito dal rotolamento di una circonferenza  $l$  entro una circonferenza  $\lambda$  di raggio doppio si può (in infiniti modi) realizzare facendo scorrere su due rette, passanti pel centro della circonferenza fissa, gli estremi di una corda della circonferenza mobile.

Questa affermazione risulterà stabilita se dimostreremo il se-



guente teorema del CARDANO <sup>(1)</sup>: *Se una circonferenza  $l$  rotola senza strisciare entro una circonferenza  $\lambda$  di raggio doppio, ogni punto della circonferenza mobile descrive un diametro della circonferenza fissa.*

A tal fine osserviamo anzitutto che, ad ogni istante della durata del moto, il centro istantaneo di rotazione è dato dal punto di contatto  $I$  di  $l$  e  $\lambda$ . D'altra parte, considerato un punto  $A$  qualsiasi di  $l$ , la sua velocità  $\dot{A}$  deve, pel corollario del teorema dello CHASLES rilevato al n. 4, risultare istante per istante perpendicolare alla corda  $AI$  di  $l$ . Conseguentemente la linea d'azione di  $\dot{A}$  passa costantemente pel punto di  $l$ , diametralmente opposto a  $I$ , vale a dire pel centro  $O$  della  $\lambda$  che, al pari di questa, è fisso. La traiettoria di  $A$  è dunque una tale linea, di cui tutte le tangenti concorrono in  $O$ : evidentemente codesta linea non può essere altro che una retta passante per  $O$ . Si può del resto procurarsene una verifica formale, introducendo il versore  $u$  della velocità  $\dot{A}$ , e ponendo

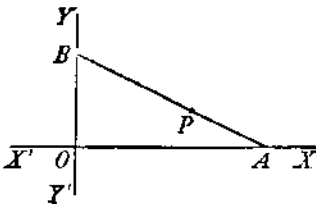


$$(3) \quad A - O = \rho u,$$

dove  $\rho$  designa un opportuno scalare (variabile col tempo). Di qui derivando rispetto a  $t$ , deduciamo

$$\dot{A} = \dot{\rho}u + \rho\dot{u},$$

e poichè  $\dot{A}$  è diretta secondo  $u$ , e  $\dot{u}$  non può essere che ortogonale ad  $u$  o nullo (I, n. 61), concludiamo (moltiplicando scalarmente per  $\dot{u}$ )  $\rho\dot{u}^2 = 0$  e quindi  $u = \text{cost.}$  Ciò, in base alla (3), vuol dire appunto che  $A$ , durante il moto di rotolamento di  $l$ , descrive il diametro  $OA$  della circonferenza fissa  $\lambda$ .



**15. ELLISSOGRAFO.** — Uno strumento atto al tracciamento continuo di ellissi si costruisce, utilizzando la circostanza che nel moto rigido studiato ai prec. nn. 13, 14 la traiettoria di ogni punto, che non appartenga alla rulletta  $l$ , è un'ellisse. Basta

dimostrarlo nel caso (effettivamente applicato negli ellissografi)

<sup>(1)</sup> GIROLAMO CARDANO n. a Pavia nel 1501, m. a Roma nel 1576, insegnò Matematiche a Milano, e quindi Medicina a Pavia e a Roma.

in cui le due guide sono ortogonali e quindi il segmento, i cui estremi scorrono su di esse, è un diametro della rulletta.

Scelte le guide come assi coordinati e preso sul segmento  $AB$  o su uno dei suoi prolungamenti un punto qualsiasi  $P$ , poniamo  $AP = b$ ,  $PB = a$  (immaginando, ad es., orientata la  $AB$  da  $A$  verso  $B$ ). Se indichiamo con  $\theta$  l'angolo delle due rette orientate  $AB$  ed  $OX$ , abbiamo

$$x = -a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta,$$

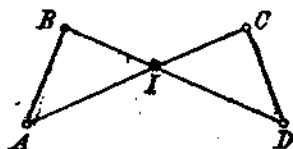
onde, eliminando  $\theta$ , risulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Perciò una punta scrivente, fissabile in un punto a piacere dell'asticella  $AB$  o dei suoi prolungamenti, descrive sul piano, al muoversi di  $AB$ , un'ellisse.

16. Il moto reciproco (n. 6) di quello studiato ai nn. prec. si realizzerà mediante un angolo rigido (in particolare una squadra) che si muova sul piano in modo che i suoi lati passino costantemente per due punti fissi  $A$  e  $B$ . Qui la rulletta sarà una circonferenza rotolante (non esternamente) intorno ad una circonferenza di raggio metà.

17. ANTIPARALLELOGRAMMO ARTICOLATO. — Si consideri un antiparallelogrammo, cioè un quadrangolo piano intrecciato  $ABCD$  a lati opposti uguali ( $AB = CD$ ,  $AC = BD$ ), e lo si immagini a lati rigidi ed articolato, cioè dotato di cerniere nei vertici.



Se, tenute fisse due cerniere, ad es.  $A$  e  $B$ , si fanno ruotare le aste mobili (nel loro piano), l'antiparallelogrammo si deforma, conservando per altro inalterata la lunghezza di ciascun lato. Si

consideri in particolare  $CD$  come figura mobile. Dei due punti  $C$  e  $D$  rimangono assegnate le traiettorie quali circonferenze di centri  $A$  e  $B$  rispettivamente, cosicchè (n. 4) il centro istantaneo  $I$  è l'intersezione di  $AC$  con  $BD$ .

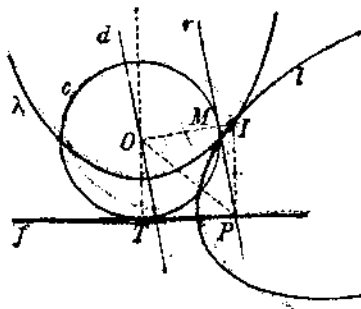
D'altra parte i due triangoli  $IAB$ ,  $IDC$  sono eguali, tali essendo (oltre agli angoli in  $I$  opposti al vertice) gli angoli in  $B$  e in  $C$  e i lati  $AB$ ,  $DC$  per la definizione stessa dell'antiparallelogrammo. Ne segue  $IA = ID$ ,  $IB = IC$ , donde

$$IA + IB = IC + ID,$$

queste due somme avendo valore costante (cioè indipendente dalla posizione di  $CD$ ), perchè sempre eguale alla lunghezza comune delle due aste  $AC$ ,  $BD$ . Possiamo quindi concludere: Le traiettorie polari  $\lambda$  ed  $l$  sono ellissi eguali, aventi rispettivamente per fuochi i vertici fissi  $A$ ,  $B$  e i vertici mobili  $C$ ,  $D$ .

18. Sono date una circonferenza  $c$  e una retta  $f$  fissa, tangenti in  $T$ . Un profilo rettilineo  $r$  si muove in modo da restare sempre tangente a  $c$ , mentre un suo punto  $P$  scorre su  $f$ .

Detto  $M$  il punto di contatto fra  $c$  ed  $r$ , si può intanto individuare  $I$  come punto di incontro della perpendicolare ad  $f$  in  $P$  (n. 4) col raggio  $OM$ . Guidato poi  $OP$ , che biseca l'angolo  $TPM$ , appare immediatamente che il triangolo  $OIP$  ha i due angoli in  $O$  e in  $P$  eguali. Infatti l'angolo in  $P$  è il complemento di  $OPT$  e l'angolo in  $O$  (in quanto appartiene anche al triangolo rettangolo  $OMP$ ) è il complemento dell'angolo eguale  $OPM$ . Ne consegue che  $I$  dista egualmente da  $O$  e da  $P$ , o, se si vuole, dal punto fisso  $O$  e dalla retta  $f$  (pur fissa).



Questa proprietà di  $I$  (indipendente dalla speciale posizione del profilo mobile) ne caratterizza il luogo, cioè la base  $\lambda$ , come una parabola che ha  $O$  per fuoco ed  $f$  per direttrice.

Colla stessa facilità si constata che la rulletta  $l$  è una parabola eguale, avente  $P$  per fuoco e per direttrice una retta  $d$  parallela ad  $r$  (distante da essa quanto il raggio di  $c$ ). All'uopo si immagini guidata per  $O$  la parallela ad  $r$ , la quale risulta solidale colla figura mobile, perchè dista da  $r$  del segmento costante  $OM$ . L'equidistanza di  $I$  da  $P$  e da  $O$ , ossia da  $P$  e da  $d$ , si traduce precisamente nell'asserto comportamento di  $l$ .

### § 5. - Accelerazione nei moti rigidi piani.

19. In molte questioni tecniche ha importanza anche lo studio della distribuzione delle accelerazioni dei vari punti di una figura rigida, che si muova in un piano. Tutto si riduce a derivare rispetto al tempo l'espressione della velocità  $v$  del generico punto  $P$  della figura mobile, e manifestamente si può limitarsi a trattare il caso

generale, in cui, nell'istante che si considera, l'atto di moto è rotatorio (e, quindi, il centro istantaneo di rotazione  $I$  è a distanza finita), giacchè in un atto di moto traslatorio si ha senz'altro che le accelerazioni di tutti i punti della figura mobile sono, istante per istante, fra loro equipollenti. Supposto, dunque, rotatorio l'atto di moto, possiamo assumere per la velocità del generico punto  $P$  l'espressione

$$(4) \quad v = \omega \wedge (P - I),$$

dove, beninteso, va tenuto presente che  $I$  non è fisso nel tempo, ma generalmente varia con  $t$ , descrivendo, rispetto all'osservatore fisso, la traiettoria polare  $\lambda$ . Se indichiamo con  $i$  il versore tangenziale a  $\lambda$  nella posizione istantaneamente occupata da  $I$ , orientato nel verso del moto di questo centro, e con  $V$  il valore assoluto della velocità di scorrimento dello stesso  $I$  su  $\lambda$ , abbiamo

$$\dot{I} = Vi;$$

e fin d'ora giova introdurre, accanto ad  $i$ , il versore  $k$  della velocità angolare  $\omega$  e il terzo versore fondamentale  $j$ , normale ad  $i$  nel piano del moto ed orientato in modo che la terna trirettangola  $ijk$  risulti destra. Avremo  $\omega = \omega k$ , con che,  $k$  essendo fisso, l'accelerazione angolare (derivata di  $\omega$  rispetto a  $t$ ), sarà data da

$$\dot{\omega} = \dot{\omega} k.$$

Dopo ciò, derivando rispetto al tempo la (4), otterremo per la cercata distribuzione dell'accelerazione la formola

$$a = \dot{\omega} k \wedge (P - I) + \omega \wedge v - \omega \wedge \dot{I},$$

e, quindi, in forza della (4) stessa e delle espressioni di  $\dot{\omega}$  e  $\dot{I}$ ,

$$a = \dot{\omega} k \wedge (P - I) + \omega \wedge (\omega \wedge (P - I)) - \omega \wedge Vi.$$

Nel secondo membro il secondo termine, per la formola del doppio prodotto vettoriale (I, n. 27), si può più semplicemente scrivere

$$- \omega^2(P - I),$$

mentre il terzo termine, essendo  $\omega = \omega k$ , si riduce a

$$- \omega V k \wedge i = - \omega V j.$$

Risulta così

$$(5) \quad a = \dot{\omega} k \wedge (P - I) - \omega^2(P - I) - \omega V j.$$

$$\dot{\omega} k \wedge (xi + yj) = \dot{\omega} (x.k \wedge i + y.k \wedge j)$$

20. CENTRO DELLE ACCELERAZIONI. — La formula (5), valida per ogni punto  $P$  della figura mobile, consente, in particolare, di riconoscere agevolmente che, ad ogni istante, esiste, ed è univocamente determinato, un punto  $C$ , detto centro delle accelerazioni, la cui accelerazione, in quell'istante, si annulla. Infatti l'equazione vettoriale, che si ottiene eguagliando a zero il secondo membro della (5), equivale a due equazioni scalari, manifestamente lineari nelle coordinate di  $P$ . Precisamente, se come riferimento si prendono due assi  $x, y$ , aventi l'origine  $I$  e i versori fondamentali  $i$  ed  $j$ , con che si ha  $P - I = xi + yj$ , la (5) si può scrivere

$$(5') \quad a = \dot{\omega}(xj - yi) - \omega^2(xi + yj) - \omega Vj;$$

onde, eguagliando a zero il secondo membro, si è condotti al sistema di due equazioni scalari

$$-\omega^2 x - \dot{\omega} y = 0, \quad \dot{\omega} x - \omega^2 y = -\omega V,$$

il cui determinante  $\omega^2 + \dot{\omega}^2$  è certamente diverso da zero per l'ipotesi che, nell'istante considerato,  $\omega$  non sia nulla.

Accertata così l'univoca esistenza del centro  $C$  delle accelerazioni, si può valersene per semplificare l'espressione (5) dell'accelerazione di un generico punto  $P$ : basta sottrarre membro a membro dalla (5) la eguaglianza particolare, che da essa si ottiene facendovi coincidere  $P$  con  $C$ ; e si perviene alla

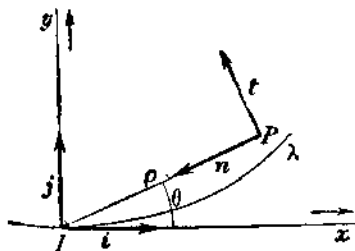
$$(6) \quad a = \dot{\omega} k \wedge (P - C) - \omega^2(P - C)$$

21. ACCELERAZIONI TANGENZIALE E NORMALE. — Per il generico punto  $P$  indichiamo con  $\rho$  il raggio vettore  $IP$  rispetto al centro istantaneo  $I$  e con  $\theta$  l'anomalia rispetto all'asse polare  $Ix$  (tangente alla base  $\lambda$ ). Poichè, in forza del teorema dello CHASLES (n. 4), la traiettoria di  $P$  è normale a  $P - I$ , il versore  $t$ , tangenziale a questa traiettoria nel senso del moto è perpendicolare a  $P - I$ ; onde, indicando con  $n$  il versore normale, orientato in modo che la coppia  $tn$  sia di verso concorde alla  $ij$ , si ha

$$P - I = -\rho n;$$

e con ciò si è in grado di calcolare, in base alla (5), le componenti  $a_t = a \times t$  e  $a_n = a \times n$  dell'accelerazione  $a$ . Si ha così, per la componente tangenziale, l'espressione

$$a_t = -\dot{\omega} k \wedge \rho n \times t - \omega V j \times t;$$



e anzitutto, in quanto il prodotto vettoriale di  $k$  per un generico vettore del piano normale si riduce al vettore stesso, rotato di  $90^\circ$  in verso positivo, risulta  $k \wedge n = -t$ , sicchè il primo termine del secondo membro si riduce ad  $\omega\rho$ . D'altra parte, osservando che i due versori  $j$  e  $t$ , rotati entrambi, nel piano comune, di  $90^\circ$  in senso positivo, si sovrappongono, rispettivamente, a  $-i$  ed  $n$ , si trova  $j \times t = -i \times n$  e quindi, tenendo conto che, per la definizione della anomalia  $\theta$ , sono  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  i coseni direttori di  $-n$ ,  $j \times t = \cos \theta$ . Si conclude perciò

$$(7) \quad a_t = \omega\rho - \omega V \cos \theta.$$

Analogamente l'accelerazione normale è data da

$$a_n = -\rho\omega k \wedge n \times n + \rho\omega^2 n \times n - \omega V j \times n,$$

dove, a secondo membro, il primo termine, in quanto  $n$  è perpendicolare a  $k \wedge n$ , va a zero, mentre il secondo si riduce a  $\rho\omega^2$  e, quanto al terzo, si ha  $-j \times n = \sin \theta$ . Perciò

$$(8) \quad a_n = \omega^2\rho + \omega V \sin \theta.$$

**22. CIRCONFERENZE DI STAZIONARIETÀ E DEI FLESSI.** — Le formule (7) ed (8) permettono di determinare i luoghi dei punti del piano mobile, che, in un dato istante, hanno nulla l'accelerazione tangenziale o, rispettivamente, quella normale.

Infatti la condizione, cui debbono sottostare le coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$  di  $P$ , affinché sia  $a_t = 0$ , cioè, in forza della (7), la

$$\omega\rho - \omega V \cos \theta = 0,$$

ove se ne moltiplichino ambo i membri per  $\rho$  e si sostituiscano a  $\rho$  e  $\theta$  le coordinate cartesiane  $x$  e  $y$  già usate al n. prec., assume l'aspetto

$$\omega(x^2 + y^2) - \omega V x = 0,$$

ed è quindi l'equazione di una circonferenza, che passa per  $I$  ed ha il centro sulla retta  $Ix$ , tangente comune alle due traiettorie polari. Essa dicesi *circolo di stazionarietà*, perchè, nel corrispondente istante, si annulla la derivata della velocità scalare, quale è appunto la  $a_t$ .

Se, invece, si vuole il luogo dei punti, in cui si annulla l'accelerazione normale  $a_n$ , si è condotti dalla (8) all'equazione

$$\omega^2\rho + \omega V \sin \theta = 0,$$

la quale in coordinate cartesiane si scrive

$$\omega^2(x^2 + y^2) + \omega V y = 0$$

$$\frac{V^2}{\rho^2} \rho^2 + \frac{V}{\rho} V y = 0$$

ed è quindi l'equazione di un'altra ~~circonferenza~~ passante per  $I$ , ma avente il centro, anziché sulla tangente, sulla normale comune alle due traiettorie polari. Essa si chiama circonferenza dei flessi.

Per giustificare questa denominazione, si ricordi (II, n. 26) che la componente dell'accelerazione di un qualsiasi punto mobile, secondo la normale alla traiettoria, *orientata verso la concavità*, è espressa da  $v^2/r$ , sicché qui, in quanto  $a_n$  denota l'analoga componente secondo la normale diretta in un verso prestabilito in relazione al senso del moto e non alla concavità della traiettoria, si ha

$$(9) \quad a_n = \pm \frac{v^2}{r},$$

dove vale il segno superiore o quello inferiore, secondo che il versore  $n$  risulta volto dalla parte della concavità o dalla parte opposta. In ogni caso l'annullarsi di  $a_n$  implica che si annulli la curvatura  $1/r$ , cioè che il punto  $P$  si trovi in un flesso della traiettoria (od anche in un punto, in cui la traiettoria abbia con la tangente un contatto di ordine superiore al secondo).

### 23. CURVATURA DELLA TRAIETTORIA E FORMULA DEL SAVARY. —

Escluso il caso suddetto di un punto di flesso, rendiamo esplicita la formula (9), sostituendovi ad  $a_n$  la sua espressione (8) e dividendo ambo i membri per  $v^2$ . Con ciò al secondo membro resta soltanto  $\pm 1/r$ , mentre nel primo conviene sostituire a  $v$  la sua espressione  $\omega\rho$ , che risulta dalla (4) o, più semplicemente, dall'osservazione che nell'istante considerato l'atto di moto di  $P$  si riduce ad una rotazione infinitesima di velocità angolare  $\omega$  intorno ad  $I$ . Si ottiene così

$$\pm \frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} + \frac{V}{\omega\rho^2} \sin \theta$$

ossia, introducendo la lunghezza costante (vogliamo dire indipendente, nell'istante cui ci si riferisce, dal considerato punto  $P$  della figura)  $h = V/\omega$ ,

$$(10) \quad \pm \frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} + \frac{h}{\rho^2} \sin \theta.$$

Fissiamo ora l'attenzione sul centro di curvatura  $\Gamma$  della traiettoria in  $P$ . Il vettore  $\Gamma - P$  ha per lunghezza il raggio  $r$  di curvatura ed è sempre diretto normalmente alla traiettoria dalla

parte della concavità, cosicchè si ha

$$\Gamma - P = \pm r n,$$

dove vale il segno superiore o quello inferiore, secondo che  $n$  è rivolto verso la concavità o nel senso opposto. D'altra parte si ha  $P - I = -\rho n$ , onde, sommando membro a membro con l'eguaglianza precedente, si trova

$$\Gamma - I = -(\rho \mp r)n.$$

Perciò, indicando con  $d$  l'ascissa, a partire da  $I$ , del centro di curvatura  $\Gamma$  sulla retta  $IP$  orientata da  $I$  verso  $P$ , cioè come  $-n$ , si ha

$$d = \rho \mp r,$$

dove ancora vale il segno superiore o quello inferiore, secondo che nel verso di  $n$  la traiettoria volge la concavità o la convessità.

Sostituendo nella (10)  $\rho - d$  al posto di  $\pm r$ , si ottiene

$$\frac{1}{\rho - d} = \frac{1}{\rho} + \frac{h}{\rho^2} \sin \theta,$$

ossia, isolando nel secondo membro  $\sin \theta$ ,

$$\frac{\rho d}{\rho - d} = h \sin \theta,$$

o, infine, invertendo,

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{h \sin \theta}.$$

È questa la cosiddetta *formula del SAVARY* <sup>(1)</sup>, la quale definisce sulla retta  $IP$  (normale alla traiettoria di  $P$ ), orientata da  $I$  verso  $P$ , l'ascissa  $d$  del centro di curvatura  $\Gamma$ , in funzione della ubicazione di  $P$  rispetto alle traiettorie polari (distanza  $\rho$  di  $P$  da  $I$ , inclinazione  $\theta$  della  $IP$  sulla loro tangente comune), nonchè della costante positiva  $h (= V/\omega)$ . Dalla formula si può dedurre una espressiva costruzione geometrica del punto  $\Gamma$  facendo intervenire la circonferenza dei flessi <sup>(2)</sup>.

(1) FÉLIX SAVARY, n. a Parigi nel 1797, m. a Estagel (Pirenei orientali) nel 1841, insegnò astronomia e geodesia alla École Polytechnique. In verità la formula, or ora stabilita, che va sotto il suo nome, era stata già data in precedenza da EULERO.

(2) Cfr. per es. G. JULIA: *Cours de cinématique*, Paris, Gauthier-Villars, 1928, pp. 104-108.



## CAPITOLO VI.

### GENERALITÀ SULLA CINEMATICA DEI SISTEMI

#### § 1. - Sistemi olonomi.

1. Accanto alle figure rigide, che dal punto di vista cinematico costituiscono il più semplice tipo di sistemi di punti, la esperienza quotidiana offre esempi innumerevoli di sistemi deformabili, che in condizioni di moto subiscono flessioni, torsioni, dilatazioni, ecc. Si verifica talvolta che il moto di taluni punti del sistema determini quello di tutti i rimanenti, come appunto accade, per es., per le figure rigide, il cui moto risulta individuato da quello di tre loro punti non allineati; e più spesso avviene, quanto meno, che il moto di alcuni punti del sistema limiti la libertà di movimento degli altri, come accade nei sistemi costituiti da parti rigide variamente collegate (giunti, sospensioni, cerniere, ecc.), quale sarebbe, ad es., un parallelogrammo articolato.

Si è così condotti a studiare, in generale, la mobilità di quei sistemi, nei quali, durante ogni loro possibile moto, sussistono, istante per istante, certe determinate relazioni fra i caratteri cinematici dei vari loro punti (posizione, velocità, accelerazione,...); e sono particolarmente notevoli quelli nei quali codeste relazioni vincolano esclusivamente le posizioni simultanee dei diversi punti. Così, per riferirci ai casi più semplici possibili, un punto  $P$  può essere vincolato a muoversi su di una data curva o su di una data superficie, talché il punto, nelle infinite posizioni di cui è suscettibile, andrà considerato come funzione, rispettivamente, di uno o due parametri

$$(1) \quad P = P(q) \quad \text{o} \quad P = P(q_1, q_2),$$

dove  $q$  può essere, ad es., la lunghezza d'arco della curva data, a partire da un determinato suo punto, e  $q_1, q_2$  designano un qualsiasi sistema di coordinate curvilinee sulla data superficie.

Se poi codesta curva o superficie, luogo delle infinite posizioni possibili del punto, varia da istante ad istante, avremo per  $P$ , in

luogo della (1), un'equazione rispettivamente della forma

$$P = P(q | t) \quad \text{o} \quad P = P(q_1, q_2 | t).$$

Più in generale noi qui considereremo un sistema di un numero qualsiasi di punti  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), i quali, anzichè liberamente mobili gli uni rispetto agli altri, siano vincolati ad assumere, istante per istante, soltanto le posizioni rappresentabili mediante certe determinate funzioni di un dato numero  $n$  di parametri arbitrari  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ed, eventualmente, del tempo

$$(2) \quad P_i = P_i(q_1, q_2, \dots, q_n | t) \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Se  $x_i, y_i, z_i$  sono le coordinate del punto  $P_i$  rispetto ad una terna scelta come riferimento del sistema, le equazioni geometriche (2) si traducono nelle  $3N$  equazioni scalari equivalenti

$$(2') \quad \begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n | t), \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n | t), \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n | t), \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

dove a secondo membro compaiono certe  $3N$  funzioni degli argomenti  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ed eventualmente  $t$ , che noi supporremo univalenti, finite, continue e derivabili (fino al 2° ordine almeno) entro un determinato campo di valori per codesti argomenti.

Un tale sistema vincolato dicesi *olonomo* <sup>(1)</sup>; e, se il tempo  $t$  non compare nelle (2) o (2'), il sistema olonomo si dice a *vincoli indipendenti dal tempo*. I parametri arbitrari  $q_1, q_2, \dots, q_n$  si chiamano *coordinate generali* o *lagrangiane* del sistema.

2. Ad un dato istante, cioè per un dato valore di  $t$ , le (2) o (2'), al variare di  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , entro il rispettivo campo di valori, forniscono tutte e sole le possibili *configurazioni* del sistema nell'istante considerato, cioè i gruppi di  $N$  punti dello spazio  $x, y, z$ , in cui possono localizzarsi in quell'istante i punti  $P_i$  del dato sistema; ed è manifesto che, se i vincoli dipendono dal tempo, le configurazioni possibili pel sistema in un dato istante  $t_1$  non coincidono in generale con quelle relative ad un istante diverso  $t_2$ . Cor-

<sup>(1)</sup> Questa denominazione, derivante da *δλος* (intero) e *νόμος* (legge), allude alla circostanza, che, come vedremo meglio al n. 4, il vincolo si traduce in relazioni in termini finiti fra le coordinate dei punti. Essa fu introdotta dal grande Fisico e Matematico H. HERZT (n. ad Hamburg nel 1857, m. a Bonn nel 1894) che per primo riuscì a realizzare sperimentalmente le onde elettriche.

rispondentemente alle  $\infty^n$  possibili scelte dei valori degli  $n$  parametri  $q_1, q_2, \dots, q_n$  nel rispettivo campo, le configurazioni del sistema omonomo (2) in un dato istante saranno  $\infty^n$  al più: esse saranno esattamente  $\infty^n$  sempre e solo quando al variare delle coordinate  $q_h$  varia altresì la corrispondente configurazione; e perchè ciò accada occorre e basta che le equazioni (2') siano risolubili rispetto alle  $q_h$ , ossia, come si sa dal Calcolo, che la matrice jacobiana

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial q_h} & \frac{\partial y_1}{\partial q_h} & \frac{\partial z_1}{\partial q_h} \dots \frac{\partial x_m}{\partial q_h} & \frac{\partial y_m}{\partial q_h} & \frac{\partial z_m}{\partial q_h} \end{array} \right\| \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

sia, per valori generici delle  $q_h$ , di caratteristica  $n$ .

Quando si verifica questa circostanza, si dice indifferentemente che  $n$  è il grado di libertà del sistema o che questo ha  $n$  gradi di libertà; cosicchè si può dire che il grado di libertà di un sistema omonomo è il numero dei parametri *essenziali* da cui dipendono le sue configurazioni in un generico istante.

Solitamente, parlando di coordinate lagrangiane di un sistema omonomo, si intende riferirsi a coordinate tutte *essenziali*, cioè in numero eguale ai gradi di libertà del sistema; e qui possiamo notare che nella scelta delle coordinate lagrangiane, vi è una grande arbitrarietà; giacchè in luogo di certe  $n$  coordinate  $q_h$  si possono introdurre altri  $n$  parametri  $q'_k$  legati ai primitivi da  $n$  equazioni quali si vogliono

$$q'_k = q'_k(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

sotto la sola condizione che il determinante funzionale

$$\left\| \frac{\partial q'_k}{\partial q_h} \right\| \quad (h, k = 1, \dots, n)$$

non sia identicamente nullo nel campo di variabilità delle  $q_h$ .

3. Durante un suo moto qualsiasi, il sistema omonomo passerà mano mano per configurazioni relative ai successivi istanti, onde il moto risulterà definito quando le coordinate lagrangiane del sistema siano assegnate in funzione del tempo. Le equazioni

$$q_h = q_h(t) \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

cui si dà così luogo, si diranno le equazioni orarie del moto in coordinate lagrangiane.

Per l'atto di moto del sistema, cioè per le velocità  $v_i$  dei singoli suoi punti  $P_i$ , si hanno, derivando le (2) e tenendo conto che

le  $q$  sono funzioni del tempo pel tramite delle equazioni orarie, le espressioni

$$(3) \quad v_i = \frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial P_i}{\partial t} + \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Si può rilevare il caso speciale dei sistemi olonomi ad un solo grado di libertà e a vincoli indipendenti dal tempo, pei quali le configurazioni dipendono da un unico parametro lagrangiano (e non da  $t$ ):

$$P_i = P_i(q) \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Per tali sistemi, che diconsi a vincoli completi, sono determinate a priori le traiettorie dei singoli punti del sistema, e a definire il moto basta un'unica equazione oraria

$$q = q(t),$$

la quale determina la legge temporale, secondo cui codeste traiettorie sono percorse dai rispettivi punti.

4. Se fra le  $3N$  equazioni scalari (2') eliminiamo le  $n$  coordinate lagrangiane, otteniamo, nell'ipotesi che la matrice jacobiana del n. 2 sia di caratteristica  $n$ , esattamente  $3N - n$  equazioni indipendenti fra le  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) ed, eventualmente, il tempo:

$$(4) \quad f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, z_N | t) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 3N - n),$$

le quali esprimono analiticamente le relazioni che istante per istante intercedono fra le posizioni simultanee dei singoli punti del sistema. Esse diconsi equazioni dei vincoli o legami o, più semplicemente, vincoli o legami. Il loro numero è dato dalla differenza  $3N - n$  fra il numero delle coordinate cartesiane dei punti del sistema e quello delle coordinate lagrangiane (o grado di libertà del sistema).

Viceversa, se ad un sistema di  $N$  punti  $P_i$  si impone la condizione di soddisfare colle coordinate  $x_i, y_i, z_i$  dei rispettivi punti ad un certo numero  $l$  di equazioni (indipendenti) della forma (4), il sistema è olonomo. Invero, risolvendo le (4) rispetto ad  $l$  delle  $3N$  coordinate  $x_i, y_i, z_i$  e assumendo come parametri lagrangiani le rimanenti  $3N - l$ , si ottiene precisamente un sistema di equazioni della forma (2'). Rileviamo che il grado di libertà  $3N - l$  è uguale alla differenza fra il numero  $3N$  delle coordinate cartesiane dei punti del sistema e il numero  $l$  dei vincoli.

5. **ESEMPI DI SISTEMI OLONOMI.** — Il grado di libertà di un sistema olonomo è, per definizione, il numero delle rispettive coordinate lagrangiane (essenziali). In pratica, quando si fissa l'attenzione su di un sistema di data struttura materiale, si riconosce direttamente se esso sia olonomo, esaminando se le sue configurazioni in un generico istante siano individuabili mediante un certo numero finito di parametri indipendenti; e, in caso affermativo, codesto numero fornisce senz'altro il grado di libertà del sistema.

Applichiamo il suaccennato criterio ad alcuni tipi particolarmente semplici di sistemi.

Una figura rigida mobile su di un piano è un sistema olonomo con 3 gradi di libertà, in quanto occorrono e bastano 2 parametri per individuare la posizione di un suo punto  $M$  (coordinate) e un ulteriore parametro per fissare la sua orientazione intorno ad  $M$ .

Il sistema di due aste rigide collegate a cerniera ha nel piano 4 gradi di libertà, perchè la posizione della cerniera dipende da 2 parametri, ed altri 2 ne occorrono e bastano per individuare le orientazioni delle due aste. Perciò sarà 4 anche il grado di libertà nel piano di un quadrilatero articolato.

6. Una sbarra nello spazio ha 5 gradi di libertà. Per fissare infatti la configurazione di un tale sistema basta conoscere la posizione di un suo punto  $P$  e la direzione della sbarra. D'altra parte è ben noto che occorrono 3 parametri per fissare la posizione di  $P$ , 2 per fissare la direzione della sbarra. E di qui risulta che i gradi di libertà della sbarra si riducono a 2 se il punto  $P$  è fisso.

Per un sistema rigido generale i gradi di libertà nello spazio sono tanti quanti quelli di una terna di assi (solidale colla figura) cioè 6; in quanto occorrono 3 parametri per fissare l'origine ed altri 3 per determinare l'orientazione degli assi (p. es. due destinati a individuare l'orientazione di  $Oz$  [uno degli assi solidali] rispetto agli assi di riferimento e uno per fissare l'orientazione del solido attorno ad  $Oz$ ).

Dal n. prec. risulta che un solido ha 3 gradi di libertà anche nel caso in cui debba muoversi sempre parallelamente ad un piano.

Un solido con un gancio scorrevole lungo un anello ha 4 gradi di libertà: 1 per fissare la posizione del gancio e 3 per fissare la orientazione del solido attorno ad esso.

Un solido con un asse scorrevole su se stesso ha due soli gradi di libertà: 1 per fissare la posizione dell'asse, 1 per fissare l'orientazione del solido attorno all'asse stesso.

Infine un solido  $C$  che debba sempre toccare (in un sol punto) un altro solido  $C_1$  ha 5 gradi di libertà. Occorrono infatti 2 parametri per fissare il punto di contatto sulla superficie del corpo  $C$  e 2 ne occorrono per fissarlo sulla superficie di  $C_1$ ; d'altra parte, escluso il caso eccezionale in cui il punto di contatto sia singolare per l'una o per l'altra superficie, basta un ulteriore parametro per fissare la posizione relativa delle due superficie attorno alla normale comune.

Terminiamo determinando il grado di libertà di una bicicletta posta sul piano stradale (1).

Per fissare la posizione del telaio sono necessari 4 parametri: 2 per fissare la posizione di un punto della traccia sul piano stradale, 1 per fissare la direzione di questa traccia, 1 per fissare l'inclinazione del telaio.

Altri due parametri occorrono per fissare la posizione dello sterzo e della ruota anteriore. La posizione della ruota posteriore della catena e del volante dipende da 1 solo parametro.

Tenendo conto dei 2 volantini dei pedali abbiamo altri due parametri. Il grado di libertà è dunque complessivamente 9.

Abbiamo implicitamente supposto che la bicicletta non sia a ruota libera. Vi sarebbe altrimenti un parametro di più e il grado di libertà sarebbe 10.

7. Tutti i sistemi olonomi considerati nei prec. nn. 5, 6 sono rigidi o costituiti di parti rigide variamente collegate fra di loro. Altri tipi di sistemi, che pur cadono sotto la nostra esperienza quotidiana, non sono olonomi, come ad es. un filo completamente flessibile, cioè suscettibile di disporsi secondo una curva arbitraria. Invero non si possono localizzare gli infiniti suoi punti con un numero finito di parametri.

D'altra parte anche sistemi rigidi o costituiti da parti rigide possono benissimo non essere olonomi, in quanto siano sottoposti a vincoli che involgono non solo le posizioni simultanee dei loro punti, ma anche le rispettive velocità. Tale è, ad es., (ci limitiamo ad affermarlo) una sfera rigida vincolata a rotolare senza strisciare sopra un piano.

---

(1) Prescindiamo dai vincoli *anulonomi* (cioè non olonomi) che risulterebbero dal tener conto che le ruote devono (almeno in condizioni normali) rotolare senza strisciamento.

## § 2. — Spostamenti possibili e spostamenti virtuali di un sistema olonomo.

8. SPOSTAMENTI POSSIBILI. — Un punto libero  $P$  può subire, a partire da una qualsiasi posizione iniziale  $P_0$ , uno spostamento (elementare o infinitesimo) arbitrario  $dP = vdt$ . Invero, comunque si prefissi un vettore  $v$ , basta considerare il moto (rettilineo uniforme)

$$P = P_0 + (t - t_0)v,$$

od ogni altro moto, la cui equazione si ottenga aggiungendo al secondo membro un addendo  $(t - t_0)^2c$ , dove  $c$  designa un vettore qualsiasi (anche funzione del tempo).

Ma è chiaro che questa assoluta libertà di spostamenti risulta limitata per un punto o per un sistema vincolato. Se un sistema olonomo in moto ha assunto in un generico istante  $t$  una certa configurazione (fra quelle relative a quell'istante), non può passare nel successivo tempuscolo  $dt$  se non ad una configurazione infinitamente vicina alla prima, ma relativa all'istante  $t + dt$ . Ogni spostamento (infinitesimo) di un sistema olonomo che lo faccia passare da una qualsiasi configurazione  $C$ , relativa ad un istante  $t$ , ad una configurazione infinitamente vicina  $C'$ , relativa all'istante  $t + dt$ , dicesi per il sistema *spostamento possibile* nell'istante  $t$  (a partire dalla configurazione  $C$ ).

Se un sistema olonomo di  $N$  punti è riferito a certe  $n$  coordinate lagrangiane indipendenti

$$(2) \quad P_i = P_i(q_1, q_2, \dots, q_n | t) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

e se ne fissa, in un generico istante  $t$ , una qualsiasi configurazione  $C$ , dando alle  $q_s$  valori quali si vogliono, si otterrà una generica configurazione  $C'$ , infinitamente vicina a  $C$  e relativa all'istante consecutivo  $t + dt$ , dando nelle (2) alle  $q_s$  e a  $t$  gli incrementi arbitrari (e fra loro indipendenti)  $dq_s$  e  $dt$ ; talchè, mettendo in evidenza gli spostamenti  $dP_i$  dei singoli  $P_i$ , avremo

$$P_i + dP_i = P_i(q_1 + dq_1, \dots, q_n + dq_n | t + dt).$$

Di qui, sviluppando i secondi membri, sottraendo membro a membro le (2) e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo, si deduce

$$(6) \quad dP_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial P_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial P_i}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt;$$

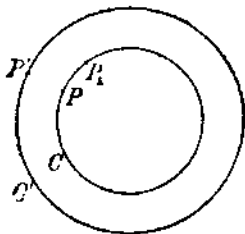
ed è questa l'espressione analitica del più generale spostamento possibile del sistema nell'istante  $t$  (a partire dalla configurazione di coordinate  $q_n$ ) ove si riguardino gli incrementi infinitesimi  $dq_n$  e  $dt$  come arbitrari e indipendenti fra loro. È appena necessario osservare che, se gli incrementi  $dq_1, dq_2, \dots, dq_n$  si suppongono realizzati nel tempuscolo  $dt$  (in corrispondenza ad un ben determinato moto del sistema), basta dividere la (5) per  $dt$  per ritrovare l'espressione (3) delle velocità.

**9. SPOSTAMENTI VIRTUALI.** — Vedremo in seguito come in Meccanica sia di essenziale importanza il considerare, accanto agli spostamenti possibili di un sistema olonomo, quegli ipotetici spostamenti, che sono atti a far passare il sistema da una qualsiasi sua configurazione ad un'altra infinitamente vicina e *relativa al medesimo istante*. Ogni spostamento siffatto dicesi *spostamento virtuale* del sistema olonomo.

Se i vincoli sono indipendenti dal tempo, come accade nei sistemi rigidi, le configurazioni del sistema sono, nel loro complesso, le stesse in tutti i successivi istanti, talchè ogni spostamento virtuale è pur possibile e viceversa.

Ma se i legami dipendono dal tempo, variano in generale da istante ad istante le configurazioni del sistema, cosicchè uno spostamento virtuale, in quanto fa passare il sistema dall'una all'altra di due configurazioni infinitamente vicine, *relative ad uno stesso istante*, può non corrispondere ad un moto effettivo; in altre parole non è uno spostamento possibile, bensì uno spostamento puramente ipotetico.

Ad es. si consideri, in un piano, un punto vincolato a restare su di una circonferenza di centro  $O$  fisso e di raggio crescente col tempo; se  $C, C'$  rappresentano le configurazioni di codesta circonferenza negli istanti consecutivi  $t$  e  $t + dt$ , e il punto si immagina posto nell'istante  $t$  in una posizione  $P$  su  $C$ , uno spostamento possibile dovrà farlo passare da  $P$  ad una posizione  $P'$  infinitamente vicina su  $C'$ , mentre uno spostamento virtuale dovrà farlo passare da  $P$  ad una posizione  $P_1$ , pur essa infinitamente vicina a  $P$ , ma situata sulla stessa circonferenza  $C$ .



**10.** Per distinguere gli spostamenti virtuali dai possibili, i primi si designano con la lettera  $\delta$  anzichè colla  $d$ , talchè, dato un sistema olonomo, lo spostamento, subito da un suo punto  $P$ , in



uno spostamento virtuale dell'intero sistema si indica con  $\delta P_i$ , e le sue componenti secondo gli assi si denotano con  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$ ,  $\delta z_i$ .

Ragionando come nel caso degli spostamenti possibili, salva la ipotesi che qui il tempo non varia, si trova per gli spostamenti virtuali, nel caso di un sistema olonomo riferito a coordinate lagrangiane indipendenti, l'espressione generale

$$(6) \quad \delta P_i = \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

che risulta lineare omogenea nelle variazioni elementari (arbitrarie e indipendenti)  $\delta q_h$  delle coordinate lagrangiane (anche se i vincoli dipendono dal tempo). Tali arbitrarie sono manifestamente in numero eguale a quello dei gradi di libertà.

Dalla forma lineare omogenea delle (6) discendono due ovvie ma notevoli conseguenze.

Se a certe variazioni, comunque scelte,  $\delta q_h$  corrisponde per le (6) lo spostamento  $\delta P_i$ , le stesse (6) danno, corrispondentemente alle  $-\delta q_h$ , lo spostamento  $-\delta P_i$ , cioè:

*Un sistema olonomo, ad ogni istante e a partire da ogni sua configurazione, ammette insieme con ogni suo spostamento virtuale  $\delta P_i$  anche il suo opposto  $-\delta P_i$ ; o, come si suol dire, per sistemi olonomi tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili.*

Questa osservazione ha una ragion d'essere, in quanto, come vedremo (n. 15), per sistemi non olonomi possono esistere spostamenti virtuali non reversibili.

Ancora dalla forma lineare omogenea delle (6) discende che, se si considerano, a partire da una stessa configurazione del sistema, due spostamenti virtuali,

$$\delta_1 P_i = \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta_1 q_h, \quad \delta_2 P_i = \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta_2 q_h \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

si ha, sommando membro a membro,

$$\delta_1 P_i + \delta_2 P_i = \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} (\delta_1 q_h + \delta_2 q_h) \quad (i = 1, 2, \dots, N);$$

*cioè: Componendo, a partire da una stessa configurazione del sistema, due o più spostamenti virtuali, si ottiene ancora uno spostamento virtuale.*

**11. SPOSTAMENTI VIRTUALI DI UN SISTEMA RIGIDO.** — I vincoli di rigidità, in quanto sono espressi da equazioni della forma

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = \text{cost.},$$

sono manifestamente olonomi e indipendenti dal tempo; talchè per un qualsiasi sistema rigido gli spostamenti virtuali non differiscono dagli spostamenti possibili o effettivi. Ora sappiamo (III, n. 18), che questi ultimi rientrano nel tipo

$$(7) \quad dP = dO + \omega dt \wedge (P - O),$$

dove  $dO$  rappresenta lo spostamento del centro di riduzione e  $\omega dt$  la rotazione elementare (intorno all'asse istantaneo passante per  $O$ ).

Se il sistema rigido è libero, cioè sottoposto ai soli vincoli di rigidità, i due vettori infinitesimi  $dO$  e  $\omega dt$  sono entrambi suscettibili di ogni possibile determinazione (infinitesima); onde la (7) fornisce anche la rappresentazione compendiosa di tutti gli spostamenti virtuali di un sistema rigido, in funzione dei due vettori arbitrari  $dO$  e  $\omega dt$ .

Se si nota che ogni vettore dipende da tre parametri (ad es. le sue componenti), si arriva alla conclusione che, a caratterizzare gli spostamenti di un sistema rigido (sottoposto ai soli legami di rigidità), intervengono sei elementi arbitrari (infinitesimi, tali essendo i vettori da cui provengono). Questa circostanza poteva essere a priori preveduta (n. prec.), trattandosi nel caso presente di un sistema con sei gradi di libertà (n. 6).

In conformità alla notazione convenuta per gli spostamenti virtuali (n. 10), giova indicare con  $\delta P$  lo spostamento virtuale di un punto generico  $P$  del sistema e con  $\delta O$  lo spostamento virtuale del centro di riduzione  $O$ . Con ciò  $\delta O$  sta a rappresentare il primo vettore caratteristico (infinitesimo) dello spostamento, che finora era designato con  $dO$ .

Se poi, per evitare anche l'apparenza di un moto istantaneo effettivo, si designa il secondo vettore caratteristico (infinitesimo) arbitrario  $\omega dt$  con  $\chi$  si ha dalla (7) la rappresentazione di ogni possibile spostamento virtuale sotto la forma

$$(7') \quad \delta P = \delta O + \chi \wedge (P - O).$$

12. Se il sistema rigido considerato, invece che essere libero, ha un punto fisso, conviene naturalmente prendere tale punto come centro di riduzione  $O$ ; sicchè allora la caratteristica  $\delta O$  è sempre nulla.

La (7') che dà il complesso di tutti gli spostamenti virtuali si riduce quindi a

$$\delta P = \chi \wedge (P - O),$$

dove  $\chi$  denota ancora un vettore (infinitesimo) arbitrario.

Di qui si vede che a caratterizzare gli spostamenti di un sistema rigido con un punto fisso intervengono tre elementi arbitrari soltanto (cioè le componenti di  $\chi$ ), com'era del resto prevedibile, in quanto il sistema ha soltanto 3 gradi di libertà (n. 6).

### § 3. — Sistemi a legami unilaterali.

13. VINCOLI DI POSIZIONE. — Fra i sistemi non olonomi giova prendere in considerazione una speciale classe di sistemi, di cui l'esempio più semplice si ha supponendo data una superficie  $\sigma$  e immaginando un punto libero di muoversi da una data banda di  $\sigma$ , ma vincolato a non attraversarla.

Se  $\varphi(x, y, z) = 0$  è l'equazione di  $\sigma$ , le due regioni, in cui essa divide lo spazio, sono rispettivamente caratterizzate dalle due disequaglianze  $\varphi < 0$  e  $\varphi > 0$ ; cosicchè, cambiando segno, ove occorra, alla funzione  $\varphi$ , il vincolo supposto pel nostro punto si può esprimere, imponendo alle sue coordinate  $x, y, z$  la condizione

$$\varphi(x, y, z) \leq 0.$$

Un tale vincolo dicesi *unilaterale*; e la stessa denominazione si usa anche quando il campo, in cui può muoversi il punto, sia limitato da più superficie, come ad es.

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

per un punto vincolato a non uscire dal triedro delle coordinate positive (o nulle).

Più in generale un sistema ad  $n$  gradi di libertà

$$(2) \quad P_i = P_i(q_1, q_2, \dots, q_n | t) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

si dice soggetto a *vincoli unilaterali* (di posizione), se le rispettive coordinate lagrangiane debbono soddisfare ad un certo numero di relazioni (dipendenti o no dal tempo) del tipo

$$(8) \quad \varphi_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n | t) \leq 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \lambda).$$

Così, ad esempio, consideriamo due punti  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  collegati da un filo flessibile ed inestendibile di lunghezza  $l$ . Si tratta manifestamente di un vincolo unilaterale (di posizione), perchè le coordinate dei due punti debbono soddisfare alla disequaglianza (compreso il caso limite della eguaglianza)

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \leq l^2.$$

Per contrapposto ai vincoli così definiti, diconsi *bilaterali* i vincoli olonomi considerati al principio di questo Capitolo.

**14. CONFIGURAZIONI DI CONFINE E SPOSTAMENTI VIRTUALI IRREVERSIBILI.** — Fra le configurazioni, di cui è suscettibile un sistema (2) soggetto a vincoli unilaterali, diconsi *ordinarie* quelle, in cui le corrispondenti relazioni (8) sono soddisfatte tutte come vere disequaglianze, mentre diconsi configurazioni *di confine* quelle in cui almeno una delle (8) è soddisfatta per eguaglianza.

Così pel punto vincolato a non oltrepassare una superficie  $\sigma$  sono configurazioni ( $\sigma$ , qui meglio, posizioni) di confine quelle in cui il punto appartiene a  $\sigma$ ; per due punti collegati da un filo flessibile e inestendibile sono di confine quelle configurazioni, in cui il filo risulta teso.

Ciò premesso e supposta estesa ai sistemi a vincoli unilaterali la definizione di spostamento virtuale data pei sistemi olonomi al n. 9, avremo che per un sistema (2), sottoposto ai vincoli (8), ogni spostamento virtuale, a partire dalla configurazione di coordinate lagrangiane  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , sarà dato da

$$\delta P_i = \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

dove le variazioni  $\delta q_k$  delle coordinate lagrangiane dovranno soddisfare alle relazioni

$$\varphi_x(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n | t) \leq 0 \quad (x = 1, 2, \dots, \lambda),$$

ossia, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, alle

$$(9) \quad \varphi_x(q_1, q_2, \dots, q_n) + \delta \varphi_x \leq 0.$$

Ora, se la configurazione di partenza (di coordinate lagrangiane  $q_1, q_2, \dots, q_n$ ) è ordinaria, tutte le  $\varphi_x(q_1, q_2, \dots, q_n)$  sono negative, onde risulteranno tali, per ragioni di continuità, anche tutte le  $\varphi_x + \delta \varphi_x$ , comunque si scelgano le variazioni infinitesime  $\delta q_k$ . Perciò le (9) sono necessariamente soddisfatte; e si conclude che, a partire da una configurazione ordinaria, i vincoli unilaterali non impongono alcuna limitazione agli spostamenti virtuali del sistema.

Se invece si parte da una configurazione di confine, cioè da una configurazione in cui si annulla almeno una delle  $\varphi_x$ , ad es. la  $\varphi_1$ , la corrispondente relazione (9) richiede la condizione

$$(10) \quad \delta \varphi_1 = \sum_1^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k} \delta q_k \leq 0;$$

e questa rappresenta un'effettiva limitazione per gli spostamenti del sistema.

Si ha dunque che i *vincoli unilaterali implicano delle condizioni per gli spostamenti virtuali soltanto a partire dalle configurazioni di confine*.

Questa osservazione appare del tutto intuitiva se ci riferiamo agli esempi considerati al n. prec. Un punto, vincolato a non attraversare una superficie  $\sigma$ , è suscettibile, quando non sia su  $\sigma$ , di tutti i possibili spostamenti virtuali, come se fosse libero; mentre, se giace su  $\sigma$ , ammette come virtuali soltanto gli spostamenti (tangenziali a  $\sigma$ ) che lo mantengono sulla superficie e quelli che ne lo distaccano dalla parte consentita dal vincolo. Similmente due punti collegati da un filo flessibile, ma inestendibile, di lunghezza  $l$ , ammettono, quando il filo non è teso, ogni possibile spostamento, come se fossero liberi; mentre, se il filo è teso, sono compatibili col vincolo soltanto gli spostamenti che non fanno allontanare i due punti.

15. Aggiungiamo un'ultima osservazione. Vedemmo che pei sistemi olonomi tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili (n. 10); ora, poichè i vincoli unilaterali, a partire da configurazioni ordinarie, non impongono agli spostamenti virtuali limitazione alcuna, è senz'altro manifesto che, *purchè si parta da una configurazione ordinaria, anche per un sistema a vincoli unilaterali tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili*.

Non così se si muove da una configurazione di confine. Invero, riferendoci ancora al sistema (2) soggetto ai vincoli (8), si supponga di partire da una configurazione in cui sia nulla una e una sola delle  $\varphi$ , diciamo la  $\varphi_i$ . Allora gli spostamenti virtuali del sistema dovranno soddisfare alla

$$(11) \quad \delta\varphi_i \leq 0;$$

e poichè l'opposto di uno spostamento si ottiene cambiando segno a tutte le variazioni delle coordinate lagrangiane e quindi anche alla  $\delta\varphi_i$ , uno spostamento virtuale, a partire dalla considerata configurazione di confine, sarà reversibile sempre e solo quando renderà soddisfatta insieme colla (10) anche la

$$-\delta\varphi_i \leq 0;$$

il che implica l'annullarsi di  $\delta\varphi_i$ ; onde si conclude che, *a partire da una configurazione di confine, gli spostamenti virtuali sono in generale irreversibili*: sono reversibili tutti e solo quelli che, con

ogni relazione (8) soddisfatta per eguaglianza, verificano altresì la corrispondente  $-\delta\varphi_x = 0$ .

Anche di ciò è facile rendersi conto sugli esempi considerati. Per un punto vincolato a non attraversare una superficie  $\sigma$  e situato su di essa, sono irreversibili gli spostamenti che tendono a staccarlo da  $\sigma$  (dalla parte consentita dal vincolo), reversibili gli  $\infty^1$  spostamenti tangenziali. Per due punti collegati da un filo flessibile e inestendibile e supposti localizzati a filo teso, sono irreversibili gli spostamenti che avvicinano i due punti, reversibili quelli che ne mantengono inalterata la distanza.

## CAPITOLO VII.

### CONCETTI E POSTULATI FONDAMENTALI DELLA MECCANICA

1. Dallo studio puramente descrittivo dei fenomeni di moto, che costituisce il compito della Cinematica, passiamo oramai a quella indagine causale di codesti fenomeni che sin dappprincipio indicammo quale oggetto della Meccanica propriamente detta o *Dinamica*. Già dicemmo come questa sia caratterizzata, in confronto della Cinematica, dalla introduzione delle idee primitive di *forza* e di *massa*. Noi qui fissaremo, in base ad osservazioni di origine sperimentale, quei principi o postulati, che determinano questi due concetti in relazione colle entità cinematiche già ben definite. Stabiliti codesti principi, ne svolgeremo le più importanti conseguenze qualitative e quantitative e le più semplici applicazioni a questioni concrete.

Giova avvertire che le osservazioni empiriche, da cui ci faremo guidare alla formulazione dei suaccennati principi, non hanno e non possono avere, singolarmente prese, se non un valore di orientamento e di stimolo alla nostra induzione intuitiva.

La piena giustificazione del sistema di postulati, che saremo così condotti a stabilire, risulterà soltanto a posteriori, dall'accordo fra la realtà fisica e le conseguenze teoriche, che verremo man mano traendo da quei postulati per via deduttiva.

#### § 1. — L'idea di forza.

2. Le sensazioni muscolari di sforzo, quali si destano nell'innalzare o nel tenere sollevati dei pesi, nel trascinarli o nello spingerli sul pavimento, si distinguono anzitutto per una maggiore o minore *intensità*; associandole ad altri dati tattili o visivi, possiamo anche, in molti casi, fissare una *direzione*, secondo cui il nostro sforzo si esercita, ed un *punto* (od almeno una regione assimilabile praticamente ad un punto) dell'oggetto, cui esso viene applicato. Allo sforzo rimane così coordinato un certo *vettore*  $F$ , imma-

gine geometrica della più alta importanza, per quanto il criterio di coordinazione possa essere in un primo stadio puramente soggettivo e grossolano.

Le accennate sensazioni muscolari danno origine ad un concetto astratto più generale che si designa col nome di *forza*.

Il procedimento, con cui vi si giunge, può essere schematizzato come segue. Suppongasì un corpo  $S$ , in dato stato di moto, o più semplicemente, in quiete (p. es. rispetto alla Terra). Suppongasì inoltre che tra le circostanze, che influiscono sul moto o sulla quiete di  $S$  ve ne sia una,  $C$ , cui si possa sostituire uno sforzo muscolare, senza che le altre circostanze concomitanti rimangano per nulla alterate, come accade, p. es., allorchando, avendosi una fune avvolta ad una carrucola con un oggetto appeso ad una estremità e un contrappeso all'altra estremità, e il tutto si trovi in quiete, si tolga il contrappeso e si mantenga fermo il sistema esercitando una trazione colla mano. Così, se un corpo  $S$  è appoggiato su di un tavolo, possiamo sostituire all'azione di sostentamento di questo, almeno entro certi limiti dipendenti dalla nostra robustezza, uno sforzo muscolare, sostenendo con la mano il corpo  $S$  nella stessa posizione di quiete in cui si trovava dapprima.

La circostanza  $C$  (azione del contrappeso o del tavolo di sostegno negli esempi indicati), per questa sua equivalenza ad uno sforzo muscolare negli effetti provocati sullo stato di moto o di quiete di  $S$ , si chiama una *forza* e le si attribuisce la stessa rappresentazione vettoriale, che conviene allo sforzo corrispondente.

E si ha un altro criterio, di non minore evidenza intuitiva, che porta a riconoscere ad una circostanza  $C$  il carattere di forza. Suppongasì che un dato effetto di moto di un corpo apparisca dovuto ad una causa  $C$ , nel senso che, quando manca  $C$ , l'effetto non si determini. Se questo stesso annullamento si può conseguire anche quando interviene  $C$ , purchè si eserciti, in contrasto, un conveniente sforzo muscolare, la  $C$  va ancora qualificata come una *forza*; e si è tratti naturalmente a rappresentarla col vettore applicato direttamente opposto a quello che corrisponde allo sforzo, per rispecchiare geometricamente il fatto che lo sforzo muscolare e la  $C$ , presi simultaneamente, si neutralizzano. Così, ad esempio, mediante l'appoggio di un corpo sopra un sostegno gli impediamo di cadere, e allora la reazione dell'appoggio annulla l'azione del peso: o ancora, con una opportuna pressione della mano, possiamo neutralizzare gli effetti di una molla sul punto di scattare o la spinta del vento che sta per spalancare un'imposta, ecc.

Con tali criteri, già in base ad esperienze del tutto primitive e grossolane, siamo condotti ad annoverare tra le forze il peso dei



corpi, le pressioni o trazioni esercitate da solidi o da funi, la tensione elastica delle molle, la spinta del vento, la resistenza dell'acqua al moto dei galleggianti, e via dicendo.

Più generalmente se, dopo avere riconosciuto il carattere di forza ad una certa circostanza  $C$ , constatiamo che un'altra circostanza  $C'$ , sostituita a  $C$ , produce, a parità delle altre condizioni, gli stessi effetti sul moto di un corpo  $S$ , diciamo che anche  $C'$  è una forza e la rappresentiamo collo stesso vettore già coordinato a  $C$ .

Queste considerazioni mostrano come, in un grandissimo numero di casi, si possa attribuire un significato positivo alla nozione di forza, anzi di *forza applicata ad un punto determinato di un corpo*. Appare quindi giustificata la introduzione di questo nuovo concetto, accanto a quelli di spazio e di tempo. La nozione di tempo è scalare; la sua caratteristica è la rappresentabilità mediante i valori di una variabile  $t$  (cfr. Cap. II, nn. 3, 4). La nozione di forza è invece vettoriale, ed implica la rappresentabilità mediante un vettore  $F$  applicato.

Gli attributi inerenti al concetto di forza, precisati con opportuni postulati, forniscono, come mostreremo nei prossimi §§. alcuni criteri di misura, cioè permettono di individuare il vettore rappresentativo di una data forza, in modo assai più preciso che non sia consentito dall'originario apprezzamento muscolare.

## § 2. — Punto materiale libero.

3. Le forze naturali, che si incontrano nell'esperienza quotidiana, come negli esempi poco fa ricordati, si presentano applicate a corpi aventi per lo più dimensioni notevoli e spesso collegati tra loro in modo vario: così quando un veicolo è trainato mediante una fune, esso poggia sul piano stradale; quando un pendolo oscilla sotto l'azione della gravità (peso), esso si trova attaccato ad un filo o ad un'asta metallica, ecc. Queste circostanze complicano il riconoscimento dei rapporti che passano fra le forze e il moto dei corpi, ai quali esse sono applicate; talchè, in un primo studio, conviene considerare quei casi in cui codeste circostanze influiscono il meno possibile.

Quanto alla esistenza di *vincoli* o *legami* del mobile con altri corpi, vi sono dei casi effettivi, in cui si può senz'altro prescindere, come ad es. nel moto dei gravi nel vuoto o nel moto della Terra e degli altri pianeti attorno al Sole.

Ma ciò non basta ancora a ridurre le nostre possibili esperienze a quella semplicità schematica, che può permettere di desumerne

i caratteri inerenti al concetto di forza. *Tutti i corpi sono dotati di una certa estensione*; e noi abbiamo visto nello studio della Cinematica, anche solo nel caso particolare del moto di un sistema rigido, quanto, durante il moto, ne sia in generale diverso, da punto a punto, il comportamento cinematico (traiettoria, velocità, accelerazione). Se noi ci proponiamo di trarre qualche induzione generale sul carattere delle forze dall'analisi dei loro effetti dinamici, è evidente come la suaccennata molteplicità di manifestazioni cinematiche simultanee debba necessariamente mascherare e quasi sottrarre alla nostra intuizione sintetica la possibile rappresentazione schematica del fenomeno. Ora, ad eliminare siffatta molteplicità di circostanze complicatrici, converrà riferirsi a corpi di dimensioni abbastanza piccole (rispetto a quelle del campo in cui si svolge il moto) perchè la loro posizione si possa ritenere individuata, senza errore sensibile, da un punto geometrico. Ogni corpo così considerato si dirà un *punto materiale*.

Questa designazione non solo non ripugna alla nostra intuizione dei fenomeni reali, ma, come già si è notato in Cinematica (II, n. 1), risponde ad una veduta che ci è consueta; così, ad es., la posizione in mare di una nave, si suole assegnare dandone la latitudine e la longitudine, le quali, in realtà individuano sulla superficie terrestre un punto geometrico, che noi identifichiamo colla nave solo in ragione della piccolezza di questa rispetto alle dimensioni della Terra; e così (per citare un esempio ancora meglio rispondente alla suindicata definizione) noi tutti ci rappresentiamo gli astri come punti della sfera celeste, pur sapendo quanto grandi siano le loro dimensioni rispetto ai corpi che ci attorniano sulla Terra.

Il punto materiale, per ciò che riguarda i caratteri puramente cinematici (posizione, traiettoria, velocità, accelerazione, ecc.), andrà per la sua stessa definizione, considerato come un punto geometrico; ma, di fronte all'azione delle forze, non cesserà di comportarsi come un corpo naturale. La semplicità schematica degli aspetti cinematici dei moti di un punto materiale ci permetterà di coglierne le leggi dinamiche fondamentali; e la Dinamica del punto fornirà la base di tutta la Meccanica, in quanto, come vedremo in seguito, le leggi del moto di ogni altro corpo, di cui non sia lecito trascurare le dimensioni (rispetto a quelle della regione spaziale in cui ha luogo il moto) si possono stabilire, considerando codesto corpo come un aggregato di punti materiali.

### § 3. - Proporzionalità fra forza e accelerazione.

4. CASO DEL PESO. — Nel moto dei gravi riconosciamo l'influenza di due distinti elementi; il *peso* del grave e le *condizioni iniziali* del suo moto. GALILEO stabilì dapprima la legge della caduta libera, provando che è costante (a parità di tempo) la variazione di velocità lungo la verticale (e quindi l'accelerazione). Per studiare poi il caso generale dei gravi comunque lanciati, fu guidato da un concetto di indipendenza di effetti. Egli intuì, che, come nella caduta libera si verifica una variazione di velocità, sempre costante, e quindi indipendente dai diversi valori della velocità stessa, così analogamente debba avvenire nel caso generale dei gravi lanciati: e l'esperienza confermò questa sua intuizione.

Alla costanza di variazione di velocità si collega il fatto che è pur costante il peso del grave, in ogni possibile condizione di moto; si è quindi tratti a considerare la costante variazione di velocità (accelerazione) come dovuta all'incessante azione della forza « peso », la quale si esplica nello stesso modo qualunque sia la velocità del mobile.

In altri termini, appare acquisito questo risultato: nel moto di un grave, il peso determina, durante un generico intervallo di tempo  $\Delta t$ , una variazione di velocità (nel senso della verticale) proporzionale a  $\Delta t$  ed indipendente dalla velocità, da cui è animato il grave all'inizio dell'intervallo.

5. CASO DELLE FORZE COSTANTI. — Ciò posto, viene spontaneo il pensiero che anche le altre forze si comportino come il peso; almeno quelle che col peso sono più direttamente confrontabili, in quanto hanno comune con esso la caratteristica fondamentale di conservarsi inalterate durante il moto del corpo. Più precisamente, immaginiamo per fissare le idee, che il corpo sia un semplice punto materiale  $P$ , e che su di esso agisca, durante un certo intervallo di tempo  $\Delta t$ , una ed una sola forza, rappresentata da un vettore  $F$ , costante in grandezza e direzione.

La invocata analogia porta ad ammettere che la velocità  $v$  di  $P$  subisca, durante l'intervallo di tempo  $\Delta t$ , una variazione (vettoriale)  $\Delta v$ , diretta come  $F$ , proporzionale in valore assoluto a  $\Delta t$ , e indipendente dall'atto di moto di  $P$  (posizione e velocità) all'inizio dell'intervallo in questione.

6. Resta da farsi un'idea del fattore di proporzionalità, che chiameremo  $h$ . Nel caso del peso, esso è una quantità costante,

la nota  $g$  (II, n. 27), qualunque sia il corpo, e quindi qualunque sia il punto materiale.

Sarà ancora lo stesso per una forza costante generica  $F$ ? Le più elementari esperienze conducono ad escluderlo, suggerendo però altre semplici ipotesi circa la natura di  $h$ .

A tale scopo basta analizzare un po' l'inizio del moto di un corpo, che si trovi in quiete, e a cui venga impressa colla mano, o con altro sforzo muscolare, una certa velocità. Si suppone, bene inteso, che il corpo sia abbastanza piccolo perchè si possa parlare di velocità, senza bisogno di distinguere da punto a punto. Lo sforzo muscolare che determina la velocità non è evidentemente una forza costante in grandezza e direzione, ma si può riguardare approssimativamente tale, se supponiamo brevissimo l'intervallo di tempo  $\Delta t$ , durante il quale esso si esercita.

La velocità (intensiva)  $h\Delta t$  impressa al corpo non è altro che un caso particolare della variazione  $\Delta v$  finora considerata: essa ci si presenta, per uno stesso corpo, tanto più rilevante, quanto più energico è l'atto muscolare, cioè maggiore la forza; e a parità di sforzo, tanto meno rilevante, quanto maggiore è il peso dell'oggetto.

Il modo più semplice per rispecchiare questo stato di cose è di supporre  $h$  direttamente proporzionale all'intensità della forza, inversamente proporzionale al peso  $p$  del corpo; il fattore di proporzionalità  $k$ , essendo poi sempre lo stesso (per ogni corpo assimilabile ad un punto materiale).

Una ulteriore induzione porta ad ammettere che sia, in ogni caso (cioè per qualsiasi forza  $F$  costante in grandezza e direzione)

$$h = k \frac{F}{p},$$

$F$  designando al solito l'intensità del vettore  $F$ .

7. Riassumendo, la variazione di velocità  $\Delta v$ , che si verifica durante un generico intervallo di tempo  $\Delta t$  sotto la sollecitazione di una forza costante  $F$ , è a ritenersi diretta come  $F$  ed eguale in valore assoluto ad  $h\Delta t = k\Delta t F/p$ , con  $k$  indipendente così dal punto materiale, come dalla forza che gli è applicata.

Immaginando in particolare che  $F$  sia il peso, il valore assoluto del primo membro non è altro che  $g\Delta t$ , quello del secondo  $\frac{k\Delta t}{p} p$ : perciò risulta  $k = g$  e nel caso di una forza generica si può scrivere, isolando  $F$ ,

$$(1) \quad F = \frac{p}{g} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

dove non resta più alcuna indeterminata.

Questa equazione, nel caso qui considerato di una generica forza  $F$  costante, esprime la costanza della accelerazione media  $\Delta v/\Delta t$  del mobile, relativa ad un intervallo di tempo  $\Delta t$  qualsiasi, e la sua proporzionalità alla forza. Facendo tendere  $\Delta t$  allo zero e denotando con  $a$  l'accelerazione istantanea del mobile otteniamo la

$$(2) \quad F = \frac{p}{g} a .$$

**8. CASO DELLE FORZE VARIABILI.** — Siamo così pervenuti, nel caso delle forze costanti, ad una legge, che si mantiene valida istante per istante per tutta la durata del moto. Ciò rende plausibile l'ipotesi che lo stesso comportamento istantaneo seguiti a valere anche per una *forza variabile* con legge qualsiasi. Conseguentemente assumeremo la (2) come relazione fondamentale tra forza (di natura qualsiasi) e moto, da ritenersi valida in ogni istante della durata del fenomeno. In parole, ammetteremo che: in ogni caso vi è, istante per istante, proporzionalità tra forza ed accelerazione, il fattore di proporzionalità  $p/g$  non dipendendo nè dalla forza, nè dall'atto di moto del punto materiale.

#### § 4. — Sovrapposizione degli effetti di forze simultanee.

9. Sinora abbiamo considerato il moto di un punto materiale libero su cui agisca un'unica forza  $F$ , come avviene nel caso tipico dei gravi (nel vuoto); ma per lo più accade che sia sensibile ad un tempo l'influenza di più forze: p. es. nel caso di un aerostato intervengono manifestamente il peso, la forza ascensionale e la spinta del vento.

Supponiamo per fissare le idee, che su di un punto materiale libero  $P$  di peso  $p$  agiscano simultaneamente due forze  $F_1, F_2$  (e queste due soltanto). Sappiamo, in base alla (2), che, se su  $P$  agisse la sola  $F_1$  o la sola  $F_2$ , il punto assumerebbe rispettivamente la accelerazione

$$a_1 = \frac{g}{p} F_1 \quad \text{o} \quad a_2 = \frac{g}{p} F_2 ;$$

ma i principi sin qui stabiliti nulla ci dicono sugli effetti dinamici dell'azione simultanea delle forze considerate. Occorre quindi fissare qualche nuovo principio induttivo; e precisamente si ammette il postulato generale che *la simultaneità di più forze non modifica le loro azioni individuali*, o, in altre parole, che ciascuna di esse

seguita a provocare sul moto del punto considerato la stessa accelerazione che produrrebbe agendo da sola.

Questo postulato si presenta come naturale estensione di quello che, nella sua essenza, si può dire galileiano e che afferma l'indipendenza della variazione di velocità, cioè dell'effetto di una unica forza, dalla velocità preesistente. Quando le forze sono più d'una, si ha indipendenza in un senso più generale, non solo dalla velocità man mano acquistata, ma anche dalle azioni concomitanti. Traducendo in formole, si ha che l'azione simultanea di  $F_1$  ed  $F_2$  dà luogo alla accelerazione

$$a = a_1 + a_2 = \frac{g}{p} (F_1 + F_2),$$

cioè a quella stessa accelerazione che sarebbe dovuta all'unica forza  $F_1 + F_2$ , risultante dalle due forze fisicamente distinte  $F_1$  ed  $F_2$ .

In generale, *qualunque sia il numero delle forze agenti sopra un punto materiale P, esse sono sempre sostituibili, nei riguardi del moto del punto, con un'unica forza, rappresentata dalla loro risultante geometrica, che dicesi forza totale applicata al punto.*

In tale sostituibilità consiste il *principio del parallelogrammo* (o, in generale, della composizione) *delle forze applicate ad uno stesso punto materiale.* Esso non è che una diversa forma, matematicamente più comoda, per quanto fisicamente meno espressiva, dell'ammesso postulato di indipendenza.

Concludendo, anche quando sul punto agiscono simultaneamente quante si vogliano forze, vale l'equazione fondamentale (2), colla avvertenza essenziale che la  $F$  deve rappresentarvi la *forza totale applicata al punto.*

### § 5. - Punto materiale vincolato. Reazioni.

10. Un generico corpo naturale  $C$  si può sempre immaginare diviso in un numero di parti abbastanza grande, perchè sia lecito considerare una qualsiasi di esse come un semplice punto materiale  $P$ . Evidentemente un tale punto  $P$  non è libero nel senso chiarito al n. 3; è anzi manifesto che in generale la mobilità di  $P$  è subordinata o almeno collegata a quella degli altri elementi del corpo  $C$ .

Consideriamo d'altra parte un corpo (pure abbastanza piccolo, per poterlo direttamente assimilare ad un punto materiale  $P$ ) il quale poggia, per es., sopra una tavola, o sia attaccato ad un filo,

o si trovi comunque in contatto con altri corpi. Qui ancora interverranno nella maggior parte dei casi effettive limitazioni di mobilità.

Diremo sempre che  $P$  è un *punto materiale vincolato*, i *vincoli* o *legami* provenendo, secondo i casi, dalle particelle circostanti del corpo  $C$ , cui appartiene  $P$ , ovvero dal sostegno o dal filo o, in generale, da corpi contigui.

Ciò posto, prendiamo a considerare un qualsiasi punto materiale  $P$ , comunque vincolato e sollecitato, e supponiamo di saper riconoscere le varie forze che agirebbero su  $P$  se fosse libero, e indichiamone con  $F$  la risultante, che chiameremo *forza attiva o direttamente applicata* al punto. È intuitivo che, sotto la sollecitazione di  $F$ , il punto vincolato non assumerà quello stesso moto che gli sarebbe impresso dalla stessa forza  $F$  se esso fosse libero: in altre parole, il moto del punto vincolato è dovuto non soltanto alla sollecitazione della forza attiva, ma anche all'azione dei vincoli. Poichè nel caso di un punto libero siamo stati indotti a riconoscere ogni variazione nelle modalità del moto alla presenza di qualche forza, appare naturale l'ammettere in base ad una considerazione di *analogia*, il seguente POSTULATO DELLE REAZIONI VINCOLARI: *Per un punto materiale comunque vincolato e sollecitato da forze, l'azione dei vincoli è sostituibile con quella di una forza (fittizia) aggiuntiva, che dicesi reazione o forza vincolare.*

In altre parole, si ammette che in ogni caso esista, insieme alla forza attiva  $F$ , una certa forza  $R$ , tale che il considerato punto  $P$  si comporti come se fosse libero e sollecitato simultaneamente dalle due forze  $F$  ed  $R$ ; onde per il punto vincolato l'equazione fondamentale della Dinamica assume la forma

$$(3) \quad F + R = \frac{P}{g} a.$$

In taluni casi, dalle modalità fisiche di attuazione dei vincoli si può desumere, in modo semplice, la legge secondo cui si esplica la reazione  $R$  o, quanto meno, qualche dato sul suo comportamento; e allora la (3) costituisce un vero postulato, che richiede un opportuno controllo sperimentale, almeno a posteriori, come per gli altri principi meccanici. In altri casi, invece, non si riesce a riconoscere direttamente il modo in cui agiscono i vincoli; ed allora la (3) fornisce una semplice definizione della forza vincolare  $R$ , per mezzo di  $F$  e di  $a$ .

### § 6. — Equilibrio di un punto materiale.

#### Legge del moto incipiente. Misura statica delle forze.

11. EQUILIBRIO DI UN PUNTO MATERIALE. — Si dice che un punto materiale è in equilibrio o che le forze che lo sollecitano si fanno equilibrio, quando l'azione complessiva di codeste forze è *atta a mantenere in quiete il punto*, cioè non determina sul punto, *a partire dalla quiete*, alcuna variazione di velocità.

Un punto in quiete è certamente in equilibrio; ma non reciprocamente, giacchè le forze agenti su di un punto possono benissimo farsi equilibrio, cioè avere l'attitudine potenziale a mantenerlo in quiete, qualora esso già vi fosse, senza che il punto si trovi effettivamente in quiete: se esso possedeva già prima una certa velocità, la conserva inalterata sotto la sollecitazione delle forze equilibrate.

Dalle equazioni (2) e (3) dei nn. 7, 10 risulta che per l'equilibrio di un punto, vale a dire perchè esso abbia un'accelerazione costantemente nulla, occorre e basta che si annulli la forza attiva, se si tratta di un punto libero, la risultante della forza attiva e della reazione, se si tratta di un punto vincolato. In quest'ultimo caso si può anche dire che la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio, si è che la forza attiva sia direttamente opposta alla reazione.

12. LEGGE DEL MOTO INCIPIENTE. — Supponiamo che un punto  $P$ , ad un dato istante  $t_0$ , cominci a muoversi a partire dalla quiete, sotto la sollecitazione di una forza totale  $F$  (non nulla). In ogni istante  $t$ , posteriore a  $t_0$ , la direzione e il senso del moto di  $P$  saranno quegli stessi del vettore velocità  $v$ . Nell'istante iniziale  $t_0$ , in cui la velocità è nulla, viene a mancare questa norma; ma, ammessa la continuità, la direzione e il senso iniziale del moto si possono desumere come limite della direzione e del senso di  $v$  negli istanti immediatamente consecutivi a  $t_0$ . Ora si ha che

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} v = a_0,$$

dove  $a_0$  designa l'accelerazione di  $P$  nell'istante  $t_0$ ; onde si conchiude che la direzione e il senso del moto nell'istante  $t_0$  coincidono con quelli di  $a_0$ , ossia per la (2), della  $F$ .

Questa conclusione (*legge del moto incipiente*) fornisce un criterio per individuare la direzione e il senso della  $F$  nell'istante  $t_0$ . Basta farla agire sopra un punto materiale in riposo: la direzione e il senso della forza sono quegli stessi del moto iniziale o, come si può dire, del primo elemento di cammino descritto dal punto.



Altri svariati criteri per riconoscere tanto la direzione quanto la intensità di una forza si possono desumere dai caratteri dei moti che hanno luogo sotto l'azione di essa.

Noi qui ci limiteremo ad accennare (nn. 13-14) alla così detta *misura statica*, che si ricava dalla considerazione dell'equilibrio delle forze applicate ad un punto materiale, ed è forse il criterio più semplice (dopo quello impreciso, fornito dalle sensazioni muscolari) di effettiva misura di una forza.

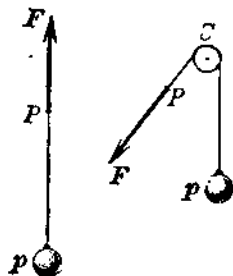
**13. SCALA DEI PESI.** — La forza tipo è il peso. Una graduazione dei pesi si ha considerando i diversi possibili volumi di una *sostanza omogenea*, p. es. di acqua, e attribuendo ai pesi corrispondenti valori proporzionali ai volumi. Il fattore di proporzionalità dipende evidentemente dall'unità di misura, cioè da quel volume, cui si vuole attribuire il valore 1. In pratica, l'unità di misura adottata è il kilogrammo, che si indica abbreviatamente con kg, ed è il peso (nel vuoto) di un decimetro cubo di acqua (distillata, al suo massimo di densità, cioè a circa 4°). Secondo i casi, si adoperano poi i sottomultipli o i multipli del kilogrammo: grammo =  $10^{-3}$  kg, quintale =  $10^2$  kg, tonnellata =  $10^3$  kg.

Ora alla scala dei pesi può essere paragonata una forza  $F$  qualsiasi.

Infatti, supponiamo anzitutto che  $F$  sia verticale e diretta verso l'alto; appliciamola ad un punto libero  $P$  ed equilibriamola con un opportuno peso  $p$ . La forza totale agente su  $P$  è allora nulla, e l'intensità di  $F$  risulta eguale a quella del peso equilibrante.

Se la direzione di  $F$  è qualsiasi, l'equilibrio si può stabilire nel modo seguente: attacchiamo a  $P$  l'estremità di una funicella recante un peso all'altra estremità e facciamo in modo, avvolgendo la funicella ad una carrucola  $C$  e scegliendo opportunamente il peso  $p$ , che  $P$  rimanga in equilibrio.

La forza  $F$  è allora equilibrata dalla *tensione del filo*. Ammettendo come evidente che questa tensione si eserciti nella direzione del filo, cioè  $PC$ , e che la sua intensità sia quella del peso, trasmessa, per così dire, integralmente dal filo <sup>(1)</sup>, rimane ovviamente determinata così la direzione come la intensità di  $F$ .



(1) Questa ipotesi apparisce plausibile in via approssimata; ma è pur chiaro che il peso proprio del filo e l'appoggio sulla carrucola debbono eser-

Notiamo ancora, a proposito dell'equilibrio di un punto materiale libero, che si può profittarne per una diretta verifica sperimentale del principio del parallelogrammo delle forze. A tal fine è stato ideato dal VARIGNON un dispositivo, nel quale si usufruiscono le tensioni di tre funi di cui, mediante pesi e carrucole, si regola a piacere la direzione e la intensità.

14. DINAMOMETRI. — In pratica, per misurare una forza *staticamente* (cioè mediante esperienze sull'equilibrio dei corpi), si ricorre ad uno strumento, detto *dinamometro*. Esso si riduce schematicamente ad una molla elicoidale  $AP$ , la quale viene orientata nella direzione della forza  $F$  che si tratta di valutare. Si fissa l'estremità  $A$ ; alla  $P$  si applica la forza. La molla allora si tende, e si stabilisce l'equilibrio in una posizione diversa dalla naturale. Il cammino, percorso dal punto  $P$  nel senso dell'asse, è messo in evidenza dallo spostamento di un indice, connesso a  $P$ , rispetto ad una scala graduata, collegata ad  $A$ . Per graduare la scala, si adoperano dei pesi. L'indicazione, che si legge, quando su  $P$  agisce una data forza  $F$ , poggia senz'altro la richiesta misura della forza. Questa conclusione poggia sull'ipotesi che la tensione della molla eserciti sul punto  $P$  una forza  $\Phi$ , diretta, secondo l'asse dello strumento, verso  $A$ ; e che l'intensità di questa forza (almeno ad equilibrio stabilito) dipenda soltanto dalla posizione di  $P$ , o ciò, che è lo stesso, dell'indice. Allora infatti si può da un lato assimilare l'equilibrio di  $P$  a quello di un punto libero sotto l'azione delle due forze  $F$  e  $\Phi$ ; dall'altro, ogniqualvolta l'indice si trova nella stessa posizione, si hanno le stesse  $\Phi$ . Si può perciò asserire che anche le  $F$  sono le stesse; eguali in particolare al peso, che ha originariamente servito a segnare la posizione dell'indice.

### § 7. — Legge d'inerzia - Massa.

15. Riprendiamo l'equazione fondamentale

$$(2) \quad F = \frac{p}{g} a,$$

che lega la forza al moto. Come sua immediata conseguenza risulta che ogni qualvolta si annulla la forza totale  $F$ , agente sul punto, si annulla del pari l'accelerazione; talchè, se, in un certo

---

citare una qualche influenza. Vedremo nella Statica dei fili flessibili e inestensibili (Cap. XIII, § 4) come si possa tener conto di questi elementi e riconoscere i limiti, entro cui è giustificato il prescindere.

intervallo di tempo, su di un punto non agisce forza alcuna o, ciò che è lo stesso, l'insieme delle forze agenti è a risultante costantemente nulla, il punto, finchè durano siffatte condizioni, non risente alcuna variazione di velocità. Ciò vuol dire che il punto, se inizialmente era in quiete, vi permane in tutto l'intervallo di tempo considerato; se invece era animato da una certa velocità iniziale, la conserva inalterata in tutto codesto tratto di tempo, cioè si muove di moto rettilineo uniforme (II, n. 16); e codeste condizioni di quiete o di moto rettilineo uniforme persistono immutate fino a quando intervenga sul punto l'azione di qualche nuova forza.

Questo principio, che, come conseguenza della (2), è implicito nell'insieme di ipotesi da noi precedentemente ammesse sugli effetti dinamici delle forze, prende il nome di *legge di inerzia*, in quanto può enunciarsi in forma espressiva, dicendo che la *materia è per se stessa inerte*.

Esso comprende due affermazioni, l'una relativa al caso di un punto in quiete, l'altra al caso di un punto già animato da una certa velocità.

La conclusione relativa alla quiete è affatto banale. Le più comuni constatazioni mettono in evidenza che per modificare uno stato di quiete, per vincere, come si dice, l'inerzia, si richiede sempre l'azione di una qualche forza.

La seconda parte della legge d'inerzia ha tutt'altro carattere; essa non proviene dall'osservazione diretta, e sembra anzi contraddetta dall'esperienza volgare che tutti i movimenti, non mantenuti con appositi dispositivi (forze), tendono ad estinguersi. È soltanto per astrazione che si giunge a rendersi conto della plausibilità che, in assenza di forze, si conservino le velocità preconcette. Basta analizzare uno qualsiasi dei fenomeni, in cui la conservazione manca, per riconoscervi senza difficoltà l'influenza di qualche forza. Non solo, ma si può verificare direttamente che ogniquale volta si riesce ad attenuare la forza, la tendenza a modificare la velocità è sempre meno sensibile. Viceversa, abbiamo esempi grandiosi della incapacità della materia a modificare la propria velocità: basta pensare all'azione energica che è d'uopo esercitare per fermare un treno, e alle conseguenze disastrose di un brusco arresto.

Così, con un po' di riflessione, procedendo dal concreto all'astratto per approssimazione successiva, si finisce col trovare naturale un asserto, che, a prima vista, sembra paradossale.

Storicamente è interessante notare che solo dopo un'elaborazione secolare, fu nettamente riconosciuta e formulata la seconda

parte della legge d'inerzia (forse da LEONARDO DA VINCI<sup>(1)</sup>, e fors'anco più tardi dagli immediati successori di COPERNICO<sup>(2)</sup>) e, in sostanza, da GALILEO). La prima parte, direttamente accessibile all'osservazione grossolana, era invece nota anche agli antichi e figura tra i principi aristotelici.

16. A precisare ulteriormente il significato e la portata della equazione fondamentale

$$(2) \quad F = \frac{p}{g} a$$

è necessario fermare la nostra attenzione sul coefficiente  $p/g$ .

Ove si badi al valore assoluto dei due membri, si deduce dalla (2)

$$(4) \quad \frac{F}{a} = \frac{p}{g},$$

cioè, qualunque sia la forza  $F$  sollecitante un dato punto, il rapporto delle intensità di  $F$  alla conseguente accelerazione scalare è uguale a  $p/g$ , taichè questo rapporto fornisce un carattere inerente al punto considerato.

Ma qui è necessaria una riflessione di essenziale importanza. A formulare i vari principi sugli effetti dinamici delle forze, che sono riassunti nella (2), siamo stati condotti da una serie di osservazioni sperimentali di *carattere locale*, in quanto si è sempre tacitamente ammesso di sperimentare *in un dato luogo*; cosicchè sorge spontanea la domanda se questo carattere puramente locale si rifletta anche sulla stessa equazione (2), tanto più che, come si è già rilevato in Cinematica (II, n. 27), l'accelerazione  $g$  varia alcun

(<sup>1</sup>) LEONARDO DA VINCI, n. a Vinci (Firenze) nel 1452, m. nel 1519 in un castello presso Amboise, messo a sua disposizione dal Re di Francia Francesco I, visse dal 1482 al 1499 a Milano quale ingegnere del Duca Lodovico Sforza (il Moro). Genio universale, lasciò opere immortali e germi di concezioni grandiose nei più svariati campi del pensiero. A noi basterà ricordare, accanto alle vedute innovatrici nel campo della Meccanica (che abbracciano tra l'altro la teoria delle onde e quella del volo), i suoi contributi d'ogni genere all'ingegneria militare ed idraulica.

(<sup>2</sup>) NICOLA COPERNICO, n. a Thorn in Polonia nel 1473, m. nel 1543 a Frauenburg (Prussia orientale), dove egli era canonico della cattedrale. Studiò a Cracovia e a Vienna, poi a Bologna, a Padova e a Roma, nella quale ultima città tenne anche lezioni di matematica e di astronomia. Il sistema che da lui prende il nome fu pubblicato a Norimberga nel 1543, subito dopo la sua morte, sotto il titolo « De revolutionibus orbium caelestium Libri VI ». Pare che l'opera fosse pronta fin dal 1507.

poco da luogo a luogo. Ma se, pur senza entrare in particolari, si accetta la veduta, oramai entrata nel comune patrimonio delle conoscenze volgari, che la forza-peso sia dovuta alla attrazione della Terra, si riconosce la possibilità a priori della circostanza (verificabile anche in via sperimentale diretta) che anche il peso  $p$  subisca da luogo a luogo piccole variazioni paragonabili a quelle di  $g$ ; e se, d'altro canto, si tien conto che *in un dato luogo*, per la (4), il rapporto della intensità della forza sollecitante alla conseguente accelerazione scalare non dipende dalla forza considerata, si è naturalmente condotti ad ammettere, con una nuova estensione della veduta di indipendenza già ripetutamente invocata, che il rapporto  $p/g$  sia, per un dato punto materiale, un carattere assolutamente intrinseco, dipendente dalla natura materiale del punto, ma scevro da qualsiasi influenza locale (<sup>1</sup>).

Codesto rapporto  $p/g$  dicesi massa del punto materiale e si indica con  $m$ , cosicchè l'equazione fondamentale (2) assume la sua forma classica

$$(5) \quad F = ma,$$

che può considerarsi come la sintesi completa di tutti i postulati finora introdotti. In essa il vettore  $F$ , in generale variabile, compendia tutte le azioni esercitate sul moto del punto dalle circostanze esterne, mentre la massa  $m$ , che vi compare come un semplice coefficiente positivo, invariabile rispetto al moto, caratterizza ciò che, in forma vaga ma espressiva, possiamo dire la quantità e qualità di materia costituente il punto, o, per essere meno imprecisi, il comportamento di codesta materia di fronte alle sollecitazioni dinamiche.

Invero, se confrontiamo le masse di due corpuscoli materiali, costituiti della medesima sostanza omogenea (ad es. acqua distillata a 4° C. e a 760 mm. di pressione, o ferro omogeneo, o acciaio, ecc.), esse, in quanto, in un dato luogo, vanno valutate in base all'equazione

$$(6) \quad m = \frac{p}{g},$$

---

(<sup>1</sup>) Non è male avvertire che questo carattere assolutamente intrinseco della massa, pur potendosi ritenere verificato per i corpi naturali con approssimazione grandissima (più che sufficiente non solo per la Tecnica, ma anche per le applicazioni fisiche e astronomiche) non è accettato come rigorosamente vero nella cosiddetta *Meccanica relativistica* (cfr. Cap. II, n. 4), in cui si è condotti ad ammettere che la quantità di materia possa essere (tenuissimamente) alterata per effetto del moto o anche, più generalmente, delle varie sollecitazioni dinamiche.

risultano proporzionali ai rispettivi pesi (locali), ossia, trattandosi di sostanza omogenea, ai rispettivi volumi. E, d'altro canto, se ci riferiamo a due corpuscoli di qualsiasi costituzione materiale e di masse  $m_1$  ed  $m_2$ , e immaginiamo di sollecitarli separatamente con una stessa forza  $F$ , avremo per le rispettive accelerazioni  $a_1, a_2$

$$F = m_1 a_1 \quad \text{ed} \quad F = m_2 a_2,$$

onde scalarmente risulta

$$a_1 : a_2 = m_2 : m_1;$$

cioè, a parità di sollecitazione, le accelerazioni scalari risentite dai vari punti materiali sono inversamente proporzionali alle rispettive masse; talchè la massa indica il diverso grado di refrattarietà dei punti materiali a risentire gli effetti dinamici delle forze o, in altre parole, la loro diversa *inerzia dinamica*; onde appare giustificato il nome, che talvolta si dà alla massa, di *coefficiente di inerzia*. Notiamo infine, che in base alla (6) dovrà dirsi di massa 1 ogni corpuscolo, il cui peso in un dato luogo abbia lo stesso valore della locale accelerazione  $g$  della gravità. Ove si assuma per  $g$  il valore di 9,80 (metri al secondo) si ha dalla (6) la formula approssimata

$$m = 0,102 p,$$

che si usa nella pratica per calcolare la massa di un corpo di dato peso.

### § 8. — Specificazione del sistema di riferimento. Influenza correttiva della Meccanica celeste. Assi fissi e moto assoluto. Terne galileiane.

17. Siamo giunti a questo punto in base ad induzioni più o meno immediate, ma sempre desunte da semplici e comunissimi fenomeni, i quali cadono sotto il diretto dominio dei sensi.

Nell'osservazione di questi fenomeni e nelle successive induzioni, si è sempre trattato di forze e di moti; ma non è stato detto esplicitamente (perchè, dato il modo di considerare la questione, poteva ritenersi superfluo) che si contemplavano sempre moti (e quindi velocità, stati di quiete, variazioni di velocità, accelerazioni) rispetto ad osservatori in quiete in una data località, o, ciò che è lo stesso, rispetto ad assi comunque fissati sulla superficie terrestre.

Ora il NEWTON fu tratto ad idealizzare maggiormente i principi della Meccanica, ritenendoli applicabili non solo ai fenomeni terrestri, bensì anche al moto dei corpi celesti. Ma in questa estensione bisogna por mente ad una circostanza essenziale; cioè alla scelta del sistema di riferimento. Dopo che, per opera di COPERNICO, di KEPLERO e di GALILEO, fu dimostrata insostenibile la concezione geocentrica dell'Universo, e fu riconosciuto che il moto dei vari pianeti assumeva caratteri più semplici ed omogenei quando era riferito al Sole anziché alla Terra, si presentava spontaneo il pensiero che le leggi della Dinamica, se pur restavano applicabili, dovessero essere riferite a qualche corpo meno particolare della nostra Terra. E il NEWTON ammise, senz'altro, che la relazione fondamentale (5) dovesse ritenersi valida per le variazioni di moto dei corpi celesti (di quelli del sistema solare in particolare) quando tali moti sieno riferiti alle cosiddette stelle fisse; cioè a quelle — e ve ne ha moltissime — che (almeno nel campo dei nostri mezzi di osservazione) si presentano come punti luminosi, tra cui non si riscontra da secoli alcun sensibile cambiamento di posizione relativa. In verità le ricerche di Astronomia siderale, che hanno tanto progredito in questi ultimi tempi, mettono in luce, anche per le stelle, moti propri e correnti d'insieme; ma se ne tiene conto, precisando il riferimento con considerazioni di media statistica <sup>(1)</sup>, cosicché rimane giustificata la designazione di *riferimento desunto dalle stelle fisse*.

Ma qui si presenta una difficoltà. Al concetto di forza, per la sua stessa origine antropomorfa, desunta da sensazioni muscolari, noi attribuiamo un valore assoluto, cioè indipendente dallo stato di moto o di quiete dell'osservatore. L'opposto accade per il vettore  $\alpha$ : esso partecipa del carattere relativo del corrispondente moto, e perciò varia in generale da uno ad un altro sistema di riferimento (quando, beninteso, si tratti di sistemi che non siano in quiete l'uno rispetto all'altro).

Così, per un punto materiale generico, l' $\alpha$  relativo alle stelle fisse, non è l' $\alpha$ , quale apparisce ad un osservatore terrestre, poiché la Terra, com'è noto dalle più elementari nozioni di Cosmografia, è animata da un duplice moto, di rotazione attorno al proprio asse, e di traslazione attorno al Sole, che a sua volta si muove, rispetto alle stelle fisse, verso la costellazione di Ercole.

---

<sup>(1)</sup> Il lettore desideroso di cultura sull'argomento può consultare il *Trattato di Astronomia siderale* di G. ARMELLINI (Bologna, Zanichelli). Vedasi, in particolare, vol. I, p. 348.

Qualora la differenza fra codeste due accelerazioni fosse di un ordine di grandezza non trascurabile, verrebbe manifestamente a mancare ogni base alla induzione newtoniana, per cui si estendono alla Dinamica dell'Universo i principi sperimentalmente stabiliti per la Meccanica terrestre.

Ma si può invece constatare, in base alla teoria del moto relativo (Cap. IV), che la differenza delle due accelerazioni di un medesimo punto rispetto ad un riferimento terrestre e ad un riferimento stellare non è grande ed anzi è in generale trascurabile per i fenomeni che possono interessare la Tecnica.

18. Si parta invero dal teorema del CORIOLIS (IV, n. 3)

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t + 2\mathbf{a}_c,$$

assumendo come assoluto il moto di un dato punto  $P$  rispetto ad un riferimento stellare, e come relativo il moto di  $P$  rispetto alla Terra: il moto di trascinamento sarà perciò il moto della Terra, che, come si è notato pocanzi, si deve considerare roto-traslatorio <sup>(1)</sup>. Si tratta di valutare l'ordine di grandezza del valore assoluto della differenza fra  $\mathbf{a}_s$  ed  $\mathbf{a}_r$ , cioè di

$$\mathbf{a}_t + 2\mathbf{a}_c.$$

Dell'accelerazione  $\mathbf{a}_t$  di trascinamento consideriamo separatamente l'addendo dovuto alla rivoluzione annua della Terra e quello dovuto alla rotazione diurna. Nel primo moto, trattandosi di traslazione, l'accelerazione è la stessa per tutti i punti della Terra, ed ha, in valore assoluto, l'espressione (II, n. 51)

$$\frac{c^2}{p} \frac{1}{\rho^3},$$

dove  $c$  è il doppio della velocità areolare,  $p$  il parametro dell'orbita terrestre e  $\rho$  la distanza della Terra dal Sole; ma per la terza legge di KEPLERO si ha

$$\frac{c^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^3},$$

dove  $a$  designa il semiasse maggiore dell'orbita e  $T$  il tempo

<sup>(1)</sup> Prescindiamo qui dal moto che trascina l'intero sistema solare verso la costellazione di Ercole, in quanto, allo stato attuale delle nostre conoscenze, tutto fa ritenere che si tratti di un moto sensibilmente rettilineo ed uniforme e perciò privo di qualsiasi influenza sul valore della accelerazione dei singoli corpi (IV, n. 4).



periodico; talchè, sostituendo ad  $a$  e a  $\rho$  la distanza media della Terra dal Sole che è all'incirca di 150 milioni di km ossia  $15 \cdot 10^{10}$  m, si ha come ordine di grandezza della considerata accelerazione in metri al secondo

$$\frac{4\pi^2 \cdot 15 \cdot 10^{10}}{T^2},$$

se  $T$  è il numero di secondi contenuti in un anno: ne risulta un'accelerazione alquanto inferiore ad 1 cm per secondo, cioè di circa 1/1000 di  $g$ .

Per valutare l'ordine di grandezza di  $a_c$ , resta da considerare l'accelerazione dovuta alla rotazione diurna della Terra, la cui velocità angolare sarà data in valore assoluto da  $\omega = 2\pi/N$ , ove  $N$  designi il numero di secondi contenuti in un giorno, cioè nell'intervallo di tempo, in capo al quale la Terra riprende una medesima orientazione rispetto alle stelle fisse. Ora se si tratta di secondi di tempo medio siderale si ha per definizione

$$1 \text{ giorno} = 24^h = (24 \times 60 \times 60)'' = 86400'';$$

se si tratta invece di tempo medio solare come si usa solitamente, la durata del moto di rotazione diurna si trova espressa dal numero un po' più piccolo 86164, cosicchè avremo

$$\omega = \frac{2\pi}{86164};$$

e l'accelerazione di un punto alla distanza  $\delta$  dall'asse polare sarà  $\omega^2 \delta$  (II, n. 33). Se supponiamo che il punto sia alla superficie della Terra e indichiamo con  $\lambda$  la sua latitudine, con  $R$  il raggio terrestre, avremo  $\delta = R \cos \lambda$  e quindi per l'accelerazione

$$\frac{4\pi^2 R \cos \lambda}{(86164)^2}.$$

Ponendo  $\cos \lambda = 1/\sqrt{2}$  (cioè supponendo  $\lambda = 45^\circ$ ) e sostituendo ad  $R$  il suo valor medio di km 6371, si trova che codesta accelerazione è un po' minore di 2,5 cm al secondo.

Quanto infine, alla accelerazione complementare  $a_c$ , se si tien conto della sua espressione (IV, n. 3)

$$a_c = \omega \wedge v,$$

e si assume per  $v$ , una velocità non maggiore di 60 m al secondo, quale nelle applicazioni tecniche difficilmente si raggiunge (1), si

(1) Questo limite viene notevolmente superato in Balistica, in quanto i proiettili possono raggiungere velocità di parecchie centinaia di metri al

trova un valore di meno che 0,5 cm per secondo; cosicchè in conclusione il divario fra le accelerazioni di un punto rispetto alla Terra e rispetto alle stelle, in confronto della accelerazione della gravità, la quale può prendersi come base nelle valutazioni di interesse tecnico, è dell'ordine di pochi millesimi. Ed anzi importa rilevare che in pratica si commette effettivamente un errore di gran lunga minore, perchè abitualmente, oltre ad adottare il riferimento terrestre, ci si attiene, nella valutazione delle forze, ad altre approssimazioni (cfr. Cap. XV, § 4), il cui effetto compensa in massima parte l'errore derivante dalla sostituzione del riferimento terrestre a quello stellare.

19. La precedente constatazione fornisce una elementare giustificazione a priori della induzione, per cui si assume a postulato universale la validità della equazione dinamica (5) rispetto alle stelle; mentre, per contrapposto, il riferimento terrestre, che pur ha servito per scoprirla, si riguarderà oramai come atto a renderla soddisfatta soltanto in via approssimativa (largamente sufficiente per i bisogni della pratica). Un tal modo di vedere che, come dicemmo, ha avuto origine dal desiderio di estendere la Meccanica al campo astronomico, ha ivi trovato le più luminose e meravigliose conferme.

In Dinamica è consuetudine costante di chiamare *moto assoluto* il moto riferito ad una qualsiasi terna, che conservi posizione invariata rispetto alle stelle, o che, almeno, possa ritenersi sensibilmente tale. Con questa convenzione, il postulato fondamentale della Meccanica si enuncia in modo conciso ed esatto, dicendo che *vale la (5) pel moto assoluto*.

È giova ripetere che *per i moti di corpi terrestri, quali sono in particolare quelli che si considerano nelle applicazioni tecniche, è ancora lecito ritenere valida la (5) rispetto ad un riferimento terrestre, se non come espressione rigorosa della realtà, almeno con una approssimazione che, nella maggior parte dei casi, supera quella fisicamente raggiungibile nelle misure*.

20. TERNE DI RIFERIMENTO GALILEIANE. — Ad eliminare, in ordine al riferimento, ogni restrizione inessenziale importa aggiungere una osservazione. Se, essendo  $\Omega\xi\zeta$  una terna immobile ri-

---

secondo. In tali condizioni non è più lecito, in generale, trascurare a priori il termine  $\alpha_c$ . Da esso, anzi, dipende essenzialmente uno dei cosiddetti problemi secondari della Balistica esterna.

spetto alle stelle, denotiamo con  $\Omega'\xi'\eta'\zeta'$  una seconda terna animata, rispetto alla prima da un moto traslatorio uniforme (vale a dire da un moto traslatorio di velocità costante e, quindi di accelerazione nulla; III, n. 4) risulta senz'altro dalla teoria dei moti relativi (IV, n. 4, a) che l'accelerazione di un qualsiasi punto rispetto alla terna  $\Omega'\xi'\eta'\zeta'$  si mantiene, istante per istante, identica alla accelerazione del punto stesso rispetto alla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$ , talchè abbiamo che l'equazione fondamentale (5) si conserva rigorosamente valida, quando il moto del punto sia riferito ad una qualsiasi terna, animata da un moto traslatorio uniforme rispetto alle stelle, o, in altre parole, ad una qualsiasi terna, che, rispetto alle stelle, abbia gli assi di direzioni invariabili e l'origine in moto rettilineo uniforme.

Nel seguito, ogni qual volta applicheremo la (5), intenderemo, ove non si avverta esplicitamente il contrario, che il moto del punto sia riferito ad una delle terne or ora considerate, che, per brevità, si diranno *terne inerziali o galileiane*. Quest'ultimo appellativo fu proposto dall'EINSTEIN nella prima pubblicazione (1905) sulla sua teoria della relatività ed è ormai universalmente accettato. Esso appare non solo giustificato, ma per così dire doveroso, in quanto nelle opere del GALILEI si trova espresso, in termini mirabilmente limpidi e precisi, il riconoscimento che i fenomeni meccanici si svolgono colle stesse leggi per due osservatori, animati l'uno rispetto all'altro da un moto traslatorio uniforme.

Osserviamo da ultimo che spesso, nella impostazione dei problemi meccanici, avremo occasione di parlare di punti o rette o piani *fissi*. Con ciò intenderemo alludere a punti o rette o piani, *immobili rispetto al riferimento meccanico adottato*, il quale, in accordo con quanto si è dianzi detto, sarà, secondo i casi, fornito da una terna galileiana o (quando ci si accontenti della approssimazione caratterizzata ai nn. 18, 19) da una terna terrestre.

## § 8. - Rappresentazione matematica delle forze naturali.

### Forze posizionali e forze conservative.

21. Riassunti i principi della Meccanica del punto materiale nella equazione fondamentale

$$(5) \quad F = ma,$$

possiamo proporci due tipi di problemi, l'uno inverso dell'altro:

1°) Conosciuto in qualche modo il moto di un punto materiale di data massa, cercare la forza atta ad imprimergli, come forza totale applicata, il moto considerato.

2°) Data la forza totale applicata, determinare il moto del punto.

Il primo problema è immediatamente risolvibile, almeno in un certo senso, con sole derivazioni; giacchè se

$$P = P(t)$$

o, rispetto ad una terna galileiana, sono

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

le equazioni del moto, risulta senz'altro dalla (5) che la forza totale applicata al punto è data, in funzione del tempo, da

$$m\dot{P},$$

ossia è rappresentata dal vettore di componenti

$$m\ddot{x}, \quad m\ddot{y}, \quad m\ddot{z}.$$

Più difficile è in generale il secondo problema, che costituisce appunto il problema fondamentale della Dinamica del punto; e qui, per poterlo porre in equazione, occorre anzitutto precisare in qual senso e in qual modo debba intendersi *data* una forza.

22. Prendendo anche qui le mosse dalla considerazione della forza-peso, o come anche diremo, della forza di gravità, sappiamo che essa ha un carattere locale: se consideriamo la regione di spazio circostante alla Terra, ad es. l'atmosfera, e immaginiamo di potervi liberamente trasportare in una posizione qualsiasi un corpo assimilabile (rispetto alla Terra) ad un punto materiale, ad es. di massa 1, abbiamo che ad ogni punto della regione considerata resta associata, come peso che agirebbe sul nostro corpo qualora fosse ivi collocato, una ben determinata forza. Generalizzando, possiamo immaginare che in una certa regione  $C$  dello spazio sussistano condizioni fisiche tali che un punto materiale libero  $P$ , per es. di massa 1, collocato in ogni singola posizione di  $C$ , risenta una forza  $F$  ben determinata, la quale dipenda esclusivamente dalla posizione del punto. Potremo scrivere

$$(7) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(P),$$

ossia, indicando con  $X, Y, Z$  le componenti di  $\mathbf{F}$  rispetto a certi tre assi e con  $x, y, z$  le coordinate della posizione di  $P$ ,

$$X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z).$$

Ogni siffatta forza si dirà *posizionale*; e naturalmente si riguarderà *data*, quando sia assegnato il vettore funzione di  $P$ , che rappresenta la forza stessa riferita alla unità di massa.

Il concetto di forza posizionale è suscettibile di una immediata generalizzazione, cui si perviene immaginando che le condizioni fisiche che in una certa regione spaziale  $C$  determinano una forza  $F$  su di un punto materiale ivi collocato in una posizione qualsiasi, varino nel tempo; in tal caso la forza  $F$ , riferita all'unità di massa, sarà funzione non solo del punto  $P$  di applicazione, ma anche di  $t$ , cioè

$$(8) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(P | t),$$

ossia

$$X = X(x, y, z | t), \quad Y = Y(x, y, z | t), \quad Z = Z(x, y, z | t).$$

E generalizzando ancora, si può avere che la forza  $F$ , nella regione  $C$ , dipenda non soltanto dal punto di applicazione e dal tempo, ma anche dalla *velocità istantanea* con cui il punto materiale di massa 1 viene a passare in quell'istante per quella data posizione: cioè può aversi

$$(9) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(P, \dot{P} | t),$$

ossia

$$(10) \quad \begin{cases} X = X(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} | t), \\ Y = Y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} | t), \\ Z = Z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} | t). \end{cases}$$

A priori sono concepibili leggi di forza di natura ancor più generale, p. es. dipendenti dalla accelerazione, ed anche dalle successive derivate (vettoriali) di questa (come accade effettivamente nei cosiddetti *fenomeni ereditari*); ma nella Meccanica razionale si suole limitarsi alla considerazione di forze del tipo (9), poichè tali si possono ritenere, nella grande maggioranza dei casi, le forze che si presentano in natura.

Perciò d'or innanzi, noi diremo *conosciuta* la legge di una forza in una data regione spaziale  $C$ , quando il vettore  $F$ , che rappresenta la forza come agente su di un punto materiale di massa unitaria, sia o possa considerarsi come determinabile in corrispondenza ad ogni atto di moto del punto, cioè in funzione della posizione  $P$  occupata dal punto, della velocità da cui il punto è animato ed eventualmente dell'istante, cui si riferiscono codesta posizione e codesta velocità.

In ogni caso noi supporremo che le componenti (10) della forza siano rispetto ai loro sette argomenti, funzioni uniformi, finite, continue e derivabili quanto occorre (entro il campo  $C$  per le  $x, y, z$  ed entro un certo determinato campo di variabilità per  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  e  $t$ ).

È manifesto che le forze posizionali (7) e le forze di tipo (8) rientrano come casi particolari in quelle così caratterizzate.

### 23. FORZE MOTRICI E RESISTENTI - RESISTENZE PASSIVE. —

Convien qui fissare per le forze una distinzione qualitativa. Se un punto  $P$  si muove ed  $F$  è la forza, o una delle forze, che lo sollecitano, si dirà che  $F$  è *forza motrice* o *forza resistente* rispetto al moto considerato, in un dato istante, secondochè, in quell'istante, la direzione del moto e quella della forza formano un angolo acuto od ottuso.

Si vede subito che una forza posizionale può essere, secondo i casi, motrice o resistente. Infatti fissata una posizione generica, la forza è ivi sempre la stessa, qualunque sia la velocità, con cui il mobile vi transita; basta pertanto che cambi (p. es. che si inverta) la direzione di questa velocità, perchè la forza, da motrice divenga resistente o viceversa. Così, in particolare, la gravità ha carattere di forza motrice quando il corpo discende, di forza resistente quando il corpo sale.

Vi sono invece alcune forze naturali che non si presentano mai come motrici. Tali forze assumono il nome di *resistenze passive*: forme tipiche sono le varie resistenze di mezzo (p. es. aria ed acqua) o d'attrito, dovute al contatto del mobile con altri corpi. Esse agiscono sempre in una direzione che contrasta il moto, anzi in direzione opposta ad esso, quando si considerano soltanto punti materiali.

**24. CAMPI DI FORZA.** — Prima di proceder oltre, conviene aggiungere alcune considerazioni sulle forze posizionali.

La regione spaziale  $C$ , in cui è definita una forza posizionale, dicesi *campo di forza*, e chiamasi *forza del campo*, in un suo generico punto, la forza  $F$  che ivi agirebbe sull'unità di massa e che perciò si identifica colla corrispondente accelerazione.

Un campo di forza si dice *uniforme* se la rispettiva forza è costante (di direzione e di intensità) da punto a punto, come p. es. accade sensibilmente per la forza di gravità, quando si considera una regione terrestre abbastanza ristretta, perchè siano trascurabili le variazioni della direzione verticale.

In questo caso il vettore che rappresenta la forza del campo è

il solito  $g$ , e su di un corpo (punto materiale) di massa  $m$  agisce, come sappiamo, il peso  $mg$ , prodotto della forza del campo per la massa.

Ora si è constatato sperimentalmente che, nei campi di forza che effettivamente si presentano in natura, si verifica una circostanza analoga: cioè, se  $F$  è la forza del campo in un dato posto (vale a dire quella che agisce sulla unità di massa ivi collocata), la forza da cui risulta sollecitata una qualsiasi massa  $m$  nel medesimo posto è data da  $mF$ . Questo fatto sperimentale si esprime talvolta dicendo che la massa pesante (cioè quel coefficiente per cui bisogna moltiplicare la forza del campo per avere la forza agente sul corpo considerato) si identifica colla massa inerte (cioè [n. 16] col rapporto tra la forza e la conseguente accelerazione).

Nel seguito, parlando di campi di forza, intenderemo riferirci sempre a quelli in cui si verifica la circostanza suindicata.

25. LINEE DI FORZA DI UN CAMPO. — Per avere un'immagine geometrica del modo in cui in un dato campo varia la direzione della corrispondente forza  $F$  conviene considerare le cosiddette *linee di forza* o *linee del campo*.

Considerata una porzione del campo di forza, in cui la forza  $F$  non si annulli mai, si parta da un punto generico  $P_0$  e sulla linea d'azione della forza in  $P_0$ , si prenda nel senso stesso della forza un punto  $P_1$  vicino a  $P_0$ . Sulla linea di azione della forza in  $P_1$ , che in generale sarà distinta da  $P_0P_1$ , si scelga un punto  $P_2$ , vicino a  $P_1$ , sempre nel senso della forza; e così si seguiti (finché il procedimento non faccia uscire dalla porzione considerata del campo o non riporti in  $P_0$ ).

Avremo così una poligonale  $P_0P_1P_2\dots$ , tale che ogni suo lato, preso nel verso di successione dei vertici, dà la direzione e il verso della forza nel suo primo estremo. Se i punti  $P_0, P_1, P_2, \dots$  si fanno avvicinare infinitamente, al limite si otterrà una linea (generalmente curva)  $\lambda$ , che in ogni suo punto  $P(x, y, z)$  risulta tangente alla forza  $F(X, Y, Z)$  in quel punto. Il verso di percorrenza, che rimane fissato sopra codesta linea, determina il senso, secondo cui agisce la forza.

Ogni linea  $\lambda$  così generata si chiama appunto *linea di forza* o *del campo*; e dallo stesso procedimento dianzi indicato discende che per ogni punto del campo passa una linea siffatta ed una sola.

Per definire analiticamente le linee di forza basta osservare che esse sono caratterizzate dalla condizione che lo spostamento elementare  $dP$  lungo una qualsiasi di esse, a partire da un suo punto  $P$  qualsivoglia, deve avere la stessa direzione e lo stesso senso della

forza  $F$  in  $P$ , talchè le linee di forza risultano definite, in ogni porzione del campo in cui la forza non si annulli, come le  $\infty^2$  curve integrali del sistema

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

equivalente ad un sistema di due equazioni del 1° ordine in due funzioni incognite di una sola variabile; p. es., se  $Z$  non è identicamente nulla, al sistema

$$\frac{dx}{dz} = \frac{X}{Z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{Y}{Z}$$

nelle due funzioni incognite  $x, y$  dell'unica variabile  $z$ .

Per un campo uniforme e più in generale per un campo, la cui forza sia di direzione costante da luogo a luogo, le linee di forza sono rette parallele; mentre, invece, se la forza del campo è costantemente diretta ad un centro fisso  $O$ , le linee di forza sono le rette della stella di centro  $O$ .

**26. FORZE CONSERVATIVE.** — Tra i campi di forza sono particolarmente notevoli, per ragioni che chiariremo meglio nel prossimo Cap., quelli per cui il prodotto scalare  $F \times dP$  della forza  $F$  del campo per un qualsiasi spostamento elementare  $dP$  del punto di applicazione  $P$  è il differenziale esatto di una funzione  $U$  di  $P$ , ossia delle sue coordinate  $x, y, z$ :

$$(11) \quad F \times dP = dU.$$

Siffatti campi di forza diconsi *conservativi*; e la funzione  $U(x, y, z)$ , che noi supporremo uniforme, finita, continua e derivabile, almeno fino al second'ordine, in tutto il campo, dicesi *potenziale* del campo o *funzione delle forze* (1).

Notiamo subito che, se vi è una funzione  $U$  soddisfacente alla (11), vi soddisfano anche tutte le funzioni  $U + c$ , dove  $c$  designa una costante additiva arbitraria. Nei casi concreti si suol profittare di codesta costante per fare in modo che il potenziale assuma in una data posizione un prefissato valore, ad es. lo zero.

La proprietà caratteristica (11) dei campi di forza conservativi è del tutto indipendente dal riferimento, talchè si mantiene inalterata qualunque sia la terna di assi cui vien riferito il campo di

(1) Alcuni autori designano la funzione  $U$  esclusivamente con quest'ultimo nome e chiamano *potenziale* la  $-U$ .



forza. Infine, scrivendo la (11) in forma esplicita

$$(11') \quad Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

e notando che questa identità deve sussistere per qualsiasi scelta dello spostamento elementare  $dx, dy, dz$ , si conclude (<sup>1</sup>)

$$(12) \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Giova ritenere più generalmente che *la derivata del potenziale secondo una direzione qualsiasi non è altro che la componente della forza del campo secondo quella direzione*. Ciò si può giustificare ricorrendo ad una qualsiasi, per es. alla prima, delle (12) (che valgono, come s'è detto, per qualsiasi terna di riferimento) e considerando che si può sempre immaginare di far coincidere l'asse delle  $x$  con una direzione arbitrariamente prefissata. Ma si può ricavarlo direttamente dalla (11) in base alla definizione di derivata di direzione: limite del rapporto fra l'incremento della funzione  $U$ , quando ci si sposta in una direzione determinata, e la lunghezza dello spostamento. Infatti, se  $\mathbf{n}$  è il versore corrispondente allo spostamento  $dP$ , e  $ds$  la lunghezza (infinitesima) di tale spostamento, la (11) può essere scritta

$$\mathbf{F} \times \mathbf{n} \cdot ds = dU,$$

donde, dividendo per  $ds$ , l'eguaglianza annunciata, perchè il rapporto dei due differenziali  $dU$  e  $ds$  è precisamente la derivata di  $U$  secondo la direzione  $\mathbf{n}$ , ed  $\mathbf{F} \times \mathbf{n}$  (I, n. 20) la componente di  $\mathbf{F}$  secondo la stessa direzione.

Giova ancora rilevare che, siccome dalle (12) si risale senz'altro alla (11'), ossia alla (11), i campi conservativi si possono anche caratterizzare come quelli, la cui forza ha per componenti rispetto ad una (qualsivoglia) terna di assi (e quindi rispetto a tutte le altre) le tre derivate parziali di una funzione della posizione del punto di applicazione (potenziale).

27. Eliminando fra le (12) la  $U$ , si trovano le tre equazioni

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

(<sup>1</sup>) Basta applicare la (11') supponendo lo spostamento elementare parallelo ai singoli assi, e non nullo, cioè supponendo successivamente  $dy = dz = 0, dx \neq 0; dx = dz = 0, dy \neq 0; dx = dy = 0, dz \neq 0$ .

da cui si rileva, come del resto si sa sotto altra forma dal Calcolo, che l'esistenza di un potenziale (cioè il fatto che  $Xdx + Ydy + Zdz$  sia un differenziale esatto) implica condizioni restrittive per le tre funzioni  $X, Y, Z$  di  $x, y, z$ : in altri termini una forza posizionale  $F$  non è in generale conservativa.

A titolo d'esempio si può assumere:

$$X = -y, \quad Y = x, \quad Z = 0,$$

la quale non è certamente conservativa, dacchè:

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = -2$$

e non zero, come accade ogniqualevolta esiste un potenziale.

Importa rilevare che, nel definire le forze conservative, abbiamo supposto, quale preliminare specificazione qualitativa, che la funzione  $U(P)$  soddisfacente alle (11) sia *uniforme*, cioè, per ogni punto  $P$ , dotata di un solo valore, in tutto il campo che si considera. Questa limitazione (circa la natura della funzione, o, eventualmente, circa l'ampiezza del campo da considerare) è conforme a ciò che si suol fare negli elementi del Calcolo, e basta per la maggior parte delle applicazioni meccaniche. In certi casi per altro giova abbandonare l'ipotesi restrittiva della uniformità in tutto il campo (vedasi in proposito l'esempio *d*) del n. 29).

28. In un campo di forza conservativo di potenziale  $U$ , diconsi *superficie equipotenziali* le  $\infty^1$  superficie

$$U = \text{cost.},$$

cioè le superficie, di cui ciascuna è il luogo dei punti aventi un dato potenziale. Per ogni punto  $x_0, y_0, z_0$ , del campo passa una superficie equipotenziale ed una sola, cioè, quella di equazione

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0).$$

Se al punto di applicazione della forza si fa subire uno spostamento elementare  $dP$  sulla superficie equipotenziale passante per la sua posizione iniziale, si ha per la (11), in quanto il potenziale  $U$  si mantiene costante sulla superficie equipotenziale,

$$F \times dP = 0,$$

onde risulta che la  $F$  è ortogonale al  $dP$ . Poichè ciò vale qualunque sia lo spostamento elementare  $dP$  sulla superficie equipotenziale, si conclude che in ogni punto del campo la forza è normale alla superficie equipotenziale passante per esso. In altre parole,

in un campo conservativo le linee di forza sono le traiettorie ortogonali delle superficie equipotenziali.

### 29. ESEMPI DI CAMPI CONSERVATIVI.

a) È conservativo ogni campo uniforme.

Se invero è  $F$  la forza (costante di intensità, di direzione e di senso) basta scegliere l'asse di riferimento  $z$  nella direzione e nel verso di  $F$  per avere

$$F \times dP = Fdz ;$$

e questo è un differenziale esatto. Integrando, si ha che il potenziale, a meno della solita costante additiva arbitraria, è dato da  $Fz$ , onde le superficie equipotenziali sono i piani  $z = \text{cost.}$ , ortogonali alla direzione fissa della forza.

In particolare, per la gravità (ove si assuma l'asse delle  $z$  verticale ed orientato verso il basso) il potenziale, riferito alla unità di massa, è dato (a meno di una costante additiva arbitraria) da  $gz$ .

b) Sia in secondo luogo un campo, in cui la forza sia di direzione fissa e di intensità dipendente esclusivamente dalla distanza del punto di applicazione da un certo piano fisso, ortogonale alla direzione della forza. Scelto questo piano come piano di riferimento  $z = 0$ , le componenti della forza secondo gli assi  $x$  ed  $y$  risulteranno nulle, mentre la terza sarà una certa determinata funzione  $\varphi(z)$  della sola coordinata  $z$ , onde avremo

$$F \times dP = \varphi(z)dz .$$

Integrando, si ottiene come potenziale, a meno della costante additiva arbitraria, la funzione della sola  $z$

$$\int \varphi(z)dz ;$$

ed anche qui le superficie equipotenziali sono i piani ortogonali alla direzione fissa della forza.

c) Si consideri infine un campo, in cui la forza  $F$  sia, in ogni punto  $P$ , diretta ad un certo centro fisso  $O$  ed abbia una intensità dipendente esclusivamente dalla distanza  $\rho = OP$ , del punto di applicazione dal centro  $O$  (forza centrale). La  $F$ , nei singoli punti del campo, può essere diretta dal centro  $O$  verso il punto di applicazione (forza repulsiva) o nel senso contrario (forza attrattiva); noi rappresenteremo con  $\varphi(\rho)$  la componente della  $F$  secondo la retta orientata  $OP$ , cosicchè la  $\varphi$  risulterà, in se stessa, positiva o negativa secondo che la forza è repulsiva o attrattiva. In ogni

caso il prodotto scalare  $F \times dP$  si può esprimere come prodotto delle componenti di  $F$  e di  $dP$  secondo la stessa direzione orientata  $OP$  (I, n. 20), talchè abbiamo

$$F \times dP = \varphi(\rho) d\rho ;$$

onde, integrando questo differenziale esatto, si ottiene pel potenziale a meno della costante additiva arbitraria, la funzione della sola  $\rho$

$$U(\rho) = \int_{e_0}^{\rho} \varphi(\rho) d\rho .$$

Le superficie equipotenziali

$$U(\rho) = \text{cost.},$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\rho = \text{cost.},$$

sono le sfere concentriche in  $O$ ; mentre, come già si notò al n. 25, le linee di forza sono le rette della stella di centro  $O$ .

d) Diamo anche un esempio di potenziale *non uniforme* in tutto il campo di forza in cui sussiste la (11); dapprima in due dimensioni, considerando l'intero piano  $Oxy$ . Immaginiamo introdotte anche le coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$  (di polo  $O$  ed asse polare  $Ox$ , ossia legate alle cartesiane dalle relazioni  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ) e sia la forza  $F$  del campo in un generico punto  $P$ , distinto dall'origine  $O$ , così definita: direzione normale al raggio vettore  $OP$ ; verso delle anomalie crescenti; intensità  $k/\rho$ , con  $k$  costante. Abbiamo escluso l'origine, perchè ivi la definizione cadrebbe in difetto (direzione indeterminata, intensità infinita).

Il prodotto scalare  $F \times dP$ , valutato come prodotto dell'intensità della forza  $k/\rho$  per la componente (trasversa)  $\rho d\theta$  dello spostamento secondo  $F$  (cfr. Cap. II, n. 19) si riduce manifestamente a  $k d\theta$ , talchè  $k\theta$  si può considerare come potenziale del campo. Fissata per l'anomalia  $\theta_0$ , in un particolare punto  $P_0$ , una delle sue determinazioni ad arbitrio, p. es. quella compresa fra  $0$  e  $2\pi$ , il valore di  $\theta$ , e quindi di  $U = k\theta$ , in un altro punto  $P$  qualsiasi può immaginarsi dedotto per continuità da  $\theta_0$ , andando, lungo una linea qualsiasi, da  $P_0$  a  $P$ . Con ciò, in quanto si consideri l'intero piano (pur eccettuando il punto  $O$ ), è chiaro che  $U = k\theta$  non è funzione uniforme del posto, in quanto, se si parte da  $P$  con una certa determinazione e si gira attorno all'origine con continuità, sempre in uno stesso verso, si ritorna in  $P$  con successive deter-

minazioni aumentate (o diminuite secondo il senso) di  $2\pi k$  ad ogni giro. Lo stesso potenziale  $U = k\theta$  rimane invece funzione uniforme del posto, qualora si consideri come campo non l'intero piano, ma una regione limitata, che escluda l'origine e sia inoltre tale che non si possa (senza uscire dalla regione) girare attorno l'origine <sup>(1)</sup>.

È facile trasportare l'esempio allo spazio  $Oxyz$ , considerando per ogni punto  $P$ , di coordinate  $x, y, z$ , la sua proiezione  $Q$ , di coordinate  $0, 0, z$  sull'asse  $z$  e il parallelo, cioè la circonferenza di centro  $Q$  passante per  $P$ . La forza  $F$  in  $P$  si definisce, come nel caso precedente, considerando il piano del parallelo. Il vettore  $F$  risulta quindi lo stesso in tutti i punti  $P$  situati sopra una stessa retta parallela all'asse  $z$ .

Immaginando sostituite alle coordinate  $x, y, z$  le così dette coordinate cilindriche  $\rho, \theta, z$ , essendo  $\rho$  e  $\theta$  nient'altro che coordinate polari rispetto ad  $x, y$ , cioè legate a queste dalle relazioni  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ , si ha anche qui il potenziale  $U = k\theta$ , il quale è uniforme soltanto in campi limitati, ma non nell'intero spazio, in quanto si accresce di  $\pm 2\pi k$  ogni qualvolta si gira, in un senso o nell'altro, attorno all'asse delle  $z$ .

### § 9. - Equazioni differenziali del moto di un punto.

30. Chiarito il senso in cui deve intendersi *data* una forza, torniamo al problema 2° del n. 21. Se, per considerare il caso generale, supponiamo che la forza totale  $F$ , agente su di un punto materiale  $P$  di massa  $m$ , dipenda dalla posizione del punto, dalla sua velocità e dal tempo, il moto di  $P$  deve soddisfare per la relazione fondamentale della Dinamica, all'equazione differenziale vettoriale

$$(13) \quad m\ddot{P} = F(P, \dot{P} | t),$$

ossia, rispetto a tre assi fissi, alle tre equazioni differenziali del 2° ordine

$$(13') \quad \begin{cases} m\ddot{x} = X(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} | t), \\ m\ddot{y} = Y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} | t), \\ m\ddot{z} = Z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} | t); \end{cases}$$

onde si rileva che il problema analitico di determinare il moto di un punto materiale sollecitato da una data forza totale non diffe-

(1) Tale sarebbe ovviamente una regione qualsiasi appartenente al primo quadrante; non lo sarebbe invece una corona circolare di centro  $O$ .

risce dal problema già considerato in Cinematica di determinare per un punto il moto di data accelerazione (II, n. 25). L'integrale generale della (13) o delle (13') dipende da sei costanti arbitrarie, cosicchè nelle date condizioni sono possibili pel punto  $\infty^0$  moti diversi, ciascuno dei quali si individuerà prefissando opportunamente certe sei condizioni ulteriori, che consistono per lo più nell'imporre che il punto, in un dato istante  $t_0$ , occupi una assegnata posizione  $P_0$  di coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$  ed abbia una assegnata velocità  $v_0$  di componenti  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ .

In taluni casi intervengono semplificazioni immediatamente suggerite dai dati del problema. Se, p. es., la data forza  $F$  è costantemente parallela ad una giacitura fissa, basta scegliere il piano di riferimento  $z = 0$  parallelo a codesta giacitura, perchè la componente  $Z$  della  $F$  risulti identicamente nulla; e allora la terza delle (13'), riducendosi ad

$$m\ddot{z} = 0,$$

dà per integrazione immediata

$$(14) \quad \dot{z} = \dot{z}_0, \quad z = \dot{z}_0 t + z_0,$$

dove  $\dot{z}_0, z_0$  designano due prime costanti arbitrarie, cioè la terza componente della velocità e la terza coordinata del punto nell'istante  $t = 0$ ; onde si rileva intanto, per la seconda delle (14), che, ove la velocità iniziale si assuma parallela alla giacitura fissa ( $\dot{z}_0 = 0$ ), il moto risulta piano.

In ogni caso, eseguendo nelle due prime equazioni differenziali del moto (13') le sostituzioni (14), si riduce il problema alla integrazione delle due equazioni differenziali nelle sole funzioni incognite  $x(t), y(t)$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X(x, y, \dot{z}_0 t + z_0; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}_0 | t), \\ m\ddot{y} = Y(x, y, \dot{z}_0 t + z_0; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}_0 | t), \end{cases}$$

nel cui integrale generale compaiono le ulteriori quattro costanti arbitrarie.

Analogamente, se la forza  $F$  ha direzione fissa, basta scegliere l'asse di riferimento  $x$  parallelo alla  $F$  per ridurne identicamente nulle le componenti  $Y$  e  $Z$ , talchè la seconda e la terza delle equazioni (13') assumono la forma

$$m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0.$$

Di qui, integrando, si deduce

$$\dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0; \quad y = \dot{y}_0 t + y_0, \quad z = \dot{z}_0 t + z_0,$$

dove  $y_0, z_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  designano quattro costanti arbitrarie; onde risulta che, se la velocità iniziale è parallela alla direzione fissa della forza, si ha un moto rettilineo. Ad ogni modo, sostituendo nella prima delle (13') le espressioni così ottenute per  $y, z$  (ed  $\dot{y}, \dot{z}$ ), si riduce il problema alla integrazione dell'unica equazione

$$m\ddot{x} = X(x, \dot{y}_0 t + y_0, \dot{z}_0 t + z_0; \dot{x}, \dot{y}_0, \dot{z}_0 | t),$$

il cui integrale generale conterrà due nuove costanti arbitrarie.

31. Aggiungiamo qui da ultimo che talvolta conviene proiettare l'equazione fondamentale (13) non già sugli assi cartesiani (fissi), bensì sui tre spigoli del triedro principale (mobile) della traiettoria, quali risultano determinati, punto per punto, in direzione e verso secondo le convenzioni del n. 80 del Cap. I, dai tre versori  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  (tangente, normale principale, binormale). Tenendo conto delle note espressioni delle componenti tangenziale e centripeta della accelerazione (II, n. 26), si ottengono in tal modo le tre cosiddette equazioni intrinseche del moto

$$(15) \quad m\ddot{s} = F_t, \quad m \frac{v^2}{r} = F_n, \quad 0 = F_b,$$

dove, al solito,  $s$  è l'arco di traiettoria,  $r$  il raggio di curvatura,  $v$  la velocità intensiva ed  $F_t, F_n, F_b$  denotano le componenti della forza totale  $F$  secondo le direzioni orientate di  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  rispettivamente.

## CAPITOLO VIII.

### CONCETTI MECCANICI DERIVATI. UNITÀ MECCANICHE E OMOGENEITÀ. SIMILITUDINE E MODELLI.

1. Dai concetti di forza e di massa e dalle caratteristiche cinematiche del moto si deducono altri concetti meccanici, che diconsi perciò *derivati* e che riflettono ciascuno un qualche aspetto o una qualche manifestazione fisica del fenomeno dinamico. Ci proponiamo qui di definirli, e di studiarne le vicendevoli relazioni.

#### § 1. - Lavoro.

2. LAVORO DELLE FORZE COSTANTI. — Nel comune linguaggio si dice, in generale, che un uomo *lavora* quando esplica uno sforzo muscolare a produrre un qualche spostamento di oggetti materiali; onde anche volgarmente si riconnette l'idea di *lavoro* a quelle di *forza* e di *spostamento*.

In Meccanica, data una forza  $F$ , che qui supporremo dapprima *costante*, e fissato uno spostamento  $P_2 - P_1$  del suo punto d'applicazione, dicesi *lavoro della forza, corrispondente al dato spostamento* del punto di applicazione, il prodotto scalare dei due vettori che rappresentano la forza e lo spostamento; cioè, indicando con  $L$  il lavoro, si pone:

$$(1) \quad L = F \times (P_2 - P_1).$$

Per una nota proprietà del prodotto scalare si può anche dire che il lavoro è dato dal prodotto delle componenti della forza e dello spostamento secondo la direzione dell'uno o dell'altra (comunque orientati).

Il lavoro  $L$  dicesi *motore* o *resistente* secondo che risulta positivo o negativo, cioè secondo che l'angolo della forza e dello spostamento è acuto od ottuso.

Se poi lo spostamento è ortogonale alla forza, il lavoro è nullo; e, viceversa, se una forza (non nulla) per un dato spostamento dà un lavoro nullo, codesto spostamento è ortogonale alla forza.



Notiamo, infine, che se, rispetto ad una certa terna di assi, sono  $X, Y, Z$  le componenti di  $\mathbf{F}$ ,  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  quelle dello spostamento, il lavoro è dato da

$$L = X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z ;$$

in particolare, per uno spostamento infinitesimo  $dP$ , si ha il lavoro infinitesimo o elementare

$$dL = \mathbf{F} \times dP = Xdx + Ydy + Zdz .$$

Sempre nel caso di forze costanti, dalle identità evidenti

$$\begin{aligned} (-\mathbf{F}) \times (P_2 - P_1) &= -[\mathbf{F} \times (P_2 - P_1)] , \\ \mathbf{F} \times (P_1 - P_2) &= -[\mathbf{F} \times (P_2 - P_1)] , \\ [\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2] \times (P_2 - P_1) &= \mathbf{F}_1 \times (P_2 - P_1) + \mathbf{F}_2 \times (P_2 - P_1) , \\ \mathbf{F} \times (P_2 - P_1) + \mathbf{F} \times (P_2 - P_2) + \dots + \mathbf{F} \times (P_n - P_{n-1}) &= \\ &= \mathbf{F} \times (P_n - P_1) \end{aligned}$$

risulta che:

a) Quando si inverte la forza o lo spostamento, il lavoro cambia segno (e conserva inalterato il valore assoluto).

b) Il lavoro della risultante di più forze applicate ad un medesimo punto, per un dato spostamento di questo, è eguale alla somma (algebrica) dei lavori, rispetto al medesimo spostamento, delle singole forze componenti.

c) La somma (algebrica) dei lavori di una forza rispetto a più spostamenti consecutivi è eguale al lavoro della forza rispetto al risultante degli spostamenti considerati.

**3. LAVORO DELLE FORZE VARIABILI.** — Sia  $\mathbf{F}$  una forza variabile qualsiasi, cioè, per considerare il caso più generale, dipendente dal tempo, dalla posizione del suo punto di applicazione  $P$ , e dalla rispettiva velocità  $\dot{P}$ ; e sia definito per codesto punto  $P$  un moto qualsiasi:

$$(2) \quad P = P(t) \quad \text{ossia} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

che per ora supporremo affatto indipendente dal moto, che la forza  $\mathbf{F}$  imprimerebbe a  $P$ , se esso fosse un punto materiale libero, soggetto all'azione esclusiva della forza  $\mathbf{F}$ .

Durante codesto moto del punto di applicazione, la forza  $\mathbf{F}$ , ove si tenga conto delle equazioni (2) e delle loro derivate, risulta definita come funzione esclusivamente del tempo; cosicchè in un tempuscolo  $dt$ , compreso fra due istanti generici consecutivi  $t$  e  $t + dt$ , la  $\mathbf{F}$  si può riguardare, a meno di infinitesimi dell'ordine

di  $dt$  almeno, come costante ed eguale ad una qualsiasi delle sue determinazioni in codesto tempuscolo, p. es. a quella che le compete nell'istante  $t$ . Perciò si assume come *lavoro elementare* della forza variabile  $F$ , corrispondente allo spostamento infinitesimo da  $P(t)$  a  $P(t + dt)$ , lo scalare infinitesimo

$$dL = F \times dP,$$

che, ove si designi con  $v$  la velocità del moto (2) e si tenga conto della espressione  $dP = vdt$  dello spostamento elementare, si può esprimere nella forma

$$(3) \quad dL = F \times vdt = (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})dt,$$

dove, per quanto si è detto, le  $X, Y, Z$  si intendono espresse mediante le (2) e le loro derivate, come funzioni della sola variabile  $t$ .

Ciò posto, dicesi lavoro della  $F$  corrispondente al moto (2) del punto di applicazione fra due istanti generici  $t_1$  e  $t_2$ , o dalla posizione  $P(t_1)$  alla posizione  $P(t_2)$ , la somma di tutti i lavori elementari (3) relativi ai successivi spostamenti elementari subiti da  $P$ , nel moto (2), fra le due posizioni estreme considerate. Cioè si pone

$$(4) \quad L = \int_{t_1}^{t_2} F \times vdt = \int_{t_1}^{t_2} (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})dt,$$

dove, a secondo membro, compare un integrale definito ordinario.

In base ad una elementare proprietà degli integrali definiti si generalizza alle forze variabili il teorema c) stabilito al n. 2 per il lavoro delle forze costanti, cioè: *Il lavoro totale di una forza lungo due cammini consecutivi del punto di applicazione è eguale alla somma dei lavori della forza lungo i due cammini parziali.*

4. La precedente definizione di lavoro come integrale di lavori elementari acquista un senso più concreto, se, risalendo alla origine del concetto di integrale, si pensa  $L$  come limite di una convergente somma.

Indicando con  $c$  l'arco di traiettoria descritto dal punto di applicazione  $P$  della forza  $F$  dall'istante  $t_1$  all'istante  $t_2$ , si immagini iscritta in esso una poligonale di lato generico  $\Delta P$ ; poi, associata ad ogni latercolo  $\Delta P$  una delle determinazioni di  $F$  sul corrispondente archetto di traiettoria, p. es. quella relativa al primo estremo (nelle condizioni di moto di  $P$  quando passa per codesta posizione), si consideri la somma

$$(5) \quad \Sigma F \times \Delta P$$

dei lavori di codeste forze, assimilate a costanti, per i corrispondenti spostamenti  $\Delta P$ . Indicata con  $v$  la velocità di  $P$  nel primo estremo del  $\Delta P$ , abbiamo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = v$$

e quindi

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = v + \epsilon,$$

ossia

$$\Delta P = v\Delta t + \epsilon\Delta t,$$

dove  $\epsilon$  è infinitesimo insieme con  $\Delta t$ ; talchè la somma (5) si può scrivere

$$(5') \quad \Sigma F \times v\Delta t + \Sigma F \times \epsilon\Delta t.$$

Se si fanno tendere allo zero i singoli lati della poligonale, la seconda parte della precedente somma tende allo zero, come risulta da note norme di Calcolo; e la prima tende all'integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} F \times v dt,$$

cioè al lavoro  $L$ ; onde si conclude

$$L = \lim \Sigma F \times \Delta P.$$

Resta così giustificata pel lavoro, sotto l'aspetto concettuale, la notazione sintetica

$$L = \int_c F \times dP = \int_c (Xdy + Ydz + Zdx),$$

che formalmente si può dedurre dalla (4) sostituendovi  $dP$  a  $vdt$ , ossia  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , a  $\dot{x}dt$ ,  $\dot{y}dt$ ,  $\dot{z}dt$  rispettivamente.

**5. LAVORO DELLE FORZE POSIZIONALI.** — In questo caso, per il calcolo del lavoro, non è necessaria, come nel caso generale considerato dianzi, la conoscenza delle equazioni del moto del punto di applicazione  $P$ , ma basta conoscere la traiettoria. Invero, se

$$(6) \quad P = P(s) \quad \text{ossia} \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

sono le equazioni parametriche di codesta traiettoria, dove suppor-

remo senz'altro che  $s$  designi la lunghezza d'arco (misurata da una qualsiasi origine determinata), la data forza posizionale  $F(P)$ , mentre  $P$  descrive codesta curva, risulta definita come funzione della sola variabile  $s$ ; e d'altro canto lo spostamento elementare

$$dP = \frac{dP}{ds} ds$$

non è altro che il prodotto del  $ds$  per il versore  $dP/ds = \mathbf{t}$ , tangenziale alla traiettoria, che è pur esso funzione della sola  $s$ . Il lavoro elementare si potrà in questo caso esprimere sotto la forma

$$dL = \mathbf{F} \times \mathbf{t} ds = \left( X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

ossia, indicando con  $F_t$  la componente della forza secondo la tangente alla traiettoria di  $P$  nel verso delle  $s$  crescenti,

$$dL = F_t ds;$$

e, poichè  $F_t$  dipende esclusivamente da  $s$ , il lavoro compiuto dalla forza  $\mathbf{F}$  lungo la curva (6) fra due punti generici  $P(s_1)$  e  $P(s_2)$  sarà dato, qualunque sia la legge temporale secondo cui il punto d'applicazione descrive codesta curva, dall'integrale definito ordinario

$$L = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = \int_{s_1}^{s_2} \left( X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Risulta di qui (cfr. n. 2, a) che se si inverte il senso del cammino del punto di applicazione, il lavoro di una forza posizionale cambia segno (e conserva inalterato il suo valore assoluto).

Non vi è luogo a fare una analoga osservazione per una forza dipendente dal tempo o dalla velocità, perchè, in tal caso, interviene essenzialmente, oltre il cammino, la legge temporale, con cui si muove il punto di applicazione della forza.

**6. LAVORO DELLE FORZE CONSERVATIVE.** — Per questa particolare classe di forze posizionali si verifica la circostanza notevolissima che per il calcolo del lavoro non si richiede nemmeno più la conoscenza della traiettoria del punto di applicazione della forza, ma basta ne siano assegnati gli estremi  $P_1$  e  $P_2$ . Infatti, per la identità caratteristica delle forze conservative

$$\mathbf{F} \times dP = dU,$$

dove la  $U(x, y, z)$  rappresenta il potenziale (VII, n. 26), il lavoro elementare è, in questo caso, dato da

$$dL = dU ;$$

talchè, integrando, si ottiene pel lavoro  $L_{P_1 P_2}$  lungo un qualsiasi cammino del punto di applicazione da  $P_1$  a  $P_2$  il valore

$$(7) \quad L_{P_1 P_2} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) ,$$

ove con  $x_1, y_1, z_1$  e  $x_2, y_2, z_2$  si designano le coordinate di  $P_1$  e  $P_2$ , rispettivamente. Si ha dunque che: *Qualunque sia il cammino descritto dal punto di applicazione di una forza conservativa entro il suo campo, il lavoro da essa compiuto è eguale alla differenza di potenziale fra la posizione di partenza e quella di arrivo del punto di applicazione.*

Se profittando della costante additiva arbitraria facciamo in modo che il potenziale si annulli in un certo punto  $P_0$  del campo e designamo con  $P(x, y, z)$  un punto generico, abbiamo per la (7)

$$L_{P_0 P} = U(x, y, z) ,$$

cosicchè il potenziale in  $P$  può essere definito come il lavoro compiuto dalla forza, quando il suo punto di applicazione si trasporta dalla posizione  $P_0$  alla posizione  $P$ , lungo un cammino qualsiasi entro il campo di forza. Vien così resa fisicamente intuitiva la indipendenza del concetto di potenziale dal sistema di riferimento, che abbiamo già rilevato in base alla identità caratteristica delle forze conservative (VII, n. 26).

7. La proprietà stabilita al n. prec., è caratteristica per le forze conservative, giacchè se per una forza  $F$  il lavoro compiuto per un qualsiasi cammino del punto di applicazione, fra due punti generici  $P_1$  e  $P_2$  di una certa regione spaziale, dipende esclusivamente dalle posizioni estreme  $P_1, P_2$  (e non dalla traiettoria), la  $F$  è conservativa. Infatti, se in  $C$  si fissa un punto  $P_0$ , il lavoro di  $F$  da  $P_0$  ad un generico punto  $P(x, y, z)$  di  $C$  è per, le ammesse ipotesi, una determinata funzione uniforme di  $x, y, z$ :

$$(8) \quad L_{P_0 P} = U(x, y, z) ;$$

ed è facile dimostrare che la  $F$  deriva appunto dal potenziale  $U$ . A tale scopo si osservi che, fissato un qualsiasi spostamento elementare  $dP$ , che faccia passare da  $P$  a  $P_1 = P + dP$ , il corrispondente lavoro elementare

$$L_{PP_1} = F \times dP ,$$

per l'ammessa indipendenza del lavoro dal cammino, si può valutare, immaginando che il punto di applicazione passi prima da  $P$  a  $P_0$ , poi da  $P_0$  a  $P_1$ ; onde si avrà

$$F \times dP = L_{PP_0} + L_{P_0P_1},$$

od anche

$$F \times dP = L_{P_0P_1} - L_{P_0P},$$

cioè, per la (8)

$$F \times dP = U(x + dx, y + dy, z + dz) - U(x, y, z).$$

Di qui risulta, a meno di infinitesimi di ordine superiore,

$$F \times dP = dU;$$

talchè si conclude che la  $F$  è veramente conservativa ed ammette il potenziale  $U$ .

8. Notiamo infine che dalla (7) del n. 6 discende in particolare che, se il punto di applicazione di una forza conservativa ritorna alla sua posizione di partenza dopo aver descritto entro il campo un cammino chiuso, il lavoro totale della forza è nullo.

In questo risultato risiede la giustificazione della qualifica di *conservative* attribuita alle forze, che ammettono un potenziale. Nei rispettivi campi, quando si fa descrivere al punto di applicazione un ciclo chiuso, non si guadagna nè si perde lavoro. Considerando il lavoro di una forza come una forma di energia fisica, ceduta o eventualmente sottratta al suo punto di applicazione, constatiamo che questa energia è complessivamente nulla in capo ad un generico ciclo; vi è dunque, nel senso accennato, conservazione di energia.

## § 2. - Lavoro ed energia cinetica.

9. Tornando ad una forza variabile qualsiasi  $F$ , immaginiamola applicata, come forza totale, ad un punto materiale libero  $P$  di massa  $m$  e consideriamo il lavoro compiuto da  $F$  durante un tempuscolo  $dt$ . In base alla equazione fondamentale della Dinamica

$$F = ma,$$

il lavoro elementare della  $F$  per lo spostamento  $dP = vdt$ , che  $P$  subisce nel considerato tempuscolo  $dt$ , si può scrivere

$$dL = ma \times vdt.$$

Ma l'accelerazione  $\alpha$  del punto non è che la derivata della velocità  $v$ , cosicchè avremo

$$m\alpha \times v = mv \times \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} mv \times v \right];$$

onde si conclude che, se si pone

$$(9) \quad T = \frac{1}{2} mv \times v = \frac{1}{2} mv^2,$$

il lavoro elementare della forza  $F$  per uno spostamento elementare da essa impresso al punto materiale libero cui è applicata è dato da

$$(10) \quad dL = dT.$$

Qui è necessario fermarsi un momento su questo importante risultato e prima ancora sulla grandezza scalare  $mv^2/2$ , che abbiamo indicato con  $T$ .

Codesto semiprodotto della massa di un punto materiale per il quadrato della velocità (scalare) istantanea dicesi *forza viva* o *energia cinetica* (ossia di moto) del punto nell'istante considerato. E per dar anzitutto ragione, in via intuitiva, di codesto secondo nome, notiamo come a nessuno di noi possa essere sfuggito che i corpi materiali, quando sono animati da una certa velocità, acquistano un'attitudine a produrre lavoro, che non hanno affatto in condizione di quiete: per es., un sasso, che può senza danno esser sostenuto da una lastra di vetro, la infrange se vi è lanciato contro; il martello, cui la mano abbia impresso una certa velocità, conficca in una tavola, per es. orizzontale, un chiodo, mentre non produrrebbe quasi nessun effetto se fosse semplicemente appoggiato sulla testa del chiodo; i proiettili producono i loro terribili effetti solo in quanto sono animati da elevate velocità, ecc.

Se teniamo conto che anche le più comuni esperienze mostrano che codesta specie di energia, che i corpi materiali acquistano in dipendenza del loro stato di moto, si manifesta con effetti tanto più sensibili quanto è maggiore, a parità di massa, il valore assoluto della velocità, e, a parità di velocità, la massa, apparirà consentaneo alla nostra intuizione fisica il chiamare *energia cinetica* <sup>(1)</sup> il semiprodotto (9).

(1) L'altro nome di *forza viva* appare in sè poco opportuno, in quanto l'energia cinetica dipende bensì da una forza, ma non è essa stessa una forza. Ma il nome ha una ragione storica, in quanto il LEIBNIZ contrapponeva la *forza morta* o come noi diremmo statica (quale la pressione di un grave in quiete su di un piano d'appoggio) e la *forza viva* o forza con

Ciò posto, l'equazione (10) esprime il seguente teorema (*della forza viva*): *Durante il moto determinato da una forza su di un punto materiale libero, il lavoro elementare della forza è, in ogni tempuscolo, eguale (in valore e segno) all'incremento subito in quel tempuscolo dall'energia cinetica del punto.*

Più espressivamente si può dire che tutte le volte che la forza spende lavoro, di altrettanto si accresce l'energia cinetica del punto; tutte le volte che la  $F$  assorbe lavoro, di altrettanto diminuisce codesta energia.

Si consideri allora il lavoro  $L$  compiuto da  $F$  nell'intervallo di tempo da un istante fisso  $t_0$  ad un istante variabile  $t$ , e si integri la (10) da  $t_0$  a  $t$ ; otterremo:

$$(11) \quad L = T - T_0,$$

dove  $T_0$  indica la energia cinetica del punto nell'istante  $t_0$ , sicchè: *La variazione che, in un qualsiasi intervallo di tempo, subisce l'energia cinetica di un punto libero sollecitato è eguale al lavoro compiuto in quell'intervallo di tempo dalla forza totale sollecitante.*

10. Se (come già nel precedente §) ci rappresentiamo il lavoro  $L$ , compiuto dalla forza totale che sollecita un punto materiale, come

moto. E la scuola del LEIBNIZ valutava appunto la forza agente su di un punto mobile mediante la energia cinetica impressa al punto, il che è esatto, se, trattandosi di forze costanti, si fanno agire le varie forze per un dato cammino del punto mobile. Invero, considerata una forza costante  $F$ , che, applicata ad un punto materiale libero di massa  $m$  inizialmente in quiete, gli imprime un moto rettilineo uniformemente accelerato (II, n. 22), avremo fra forza  $F$ , accelerazione  $a$ , velocità  $v$ , e spazio percorso  $s$  le relazioni scalari:

$$F = ma, \quad s = \frac{1}{2} at^2, \quad v = at,$$

e quindi

$$Fs = \frac{1}{2} ma^2 t^2 = \frac{1}{2} mv^2;$$

talchè, confrontando due forze costanti  $F_1, F_2$  per lo stesso cammino  $s$  del punto mobile, avremo

$$F_1 s = \frac{1}{2} mv_1^2, \quad F_2 s = \frac{1}{2} mv_2^2$$

e quindi

$$F_1 : F_2 = \frac{1}{2} mv_1^2 : \frac{1}{2} mv_2^2.$$



*energia* somministratagli dalle circostanze esterne, che ne determinano il moto, — *L* misurerà l'energia ceduta dal punto all'esterno. Siccome la (11) si può scrivere

$$(11') \quad T - L = \text{costante},$$

potremo dire che al moto di un punto sollecitato da una data forza (totale) le leggi della Meccanica conferiscono un carattere conservativo, in quanto v'è compenso tra l'energia *T*, che il mobile possiede ad ogni istante sotto forma cinetica, e l'energia — *L*, che, da un istante generico *t*, in avanti, esso è andato cedendo all'esterno sotto forma di lavoro: la loro somma (*energia totale*) rimane costante.

11. Questa conclusione diviene particolarmente espressiva nel caso delle forze conservative. L'energia — *L* non è altro che il potenziale *U* cambiato di segno (a meno di una inessenziale costante additiva). Si ha allora dalla (11'), designandosi con *E* una costante,

$$(11'') \quad T - U = E,$$

relazione importantissima tra i due elementi *T* ed *U* (cioè in sostanza tra le velocità e la posizione del mobile) soddisfatta durante tutto il movimento.

La quantità — *U*, per il suo significato e per la circostanza che dipende soltanto dalla posizione del mobile, si chiama *energia di posizione*, od anche *energia potenziale*.

La (11''), che si suol chiamare equazione o *integrale delle forze vive*, esprime perciò il principio di conservazione dell'energia sotto un aspetto più ristretto, che assimila il punto materiale ad un sistema isolato.

Ogni atto di moto del punto (caratterizzato dalla velocità e dalla posizione) si può riguardare dotato di due forme intrinseche di energia: cinetica e potenziale. Il moto si presenta così come un fenomeno di trasformazione di energia cinetica in potenziale o viceversa; la quantità totale di energia rimane però costantemente la stessa, senza che dall'esterno ne venga mai ceduta o sottratta.

### § 3. — Potenza.

12. È manifesto come, soprattutto in vista delle applicazioni tecniche, occorra valutare il lavoro non soltanto in se stesso, ma anche in rapporto al tempo richiesto per produrlo; perciò si introduce il concetto di *potenza*.

Se una forza  $F$ , di natura qualsiasi, è applicata ad un punto che comunque si sposti, dicesi *potenza media* della forza in un generico intervallo di tempo da  $t$  a  $t + \Delta t$  il rapporto del lavoro compiuto in quell'intervallo di tempo alla durata di esso, cioè

$$\frac{\int_t^{t+\Delta t} F \times dP}{\Delta t}.$$

Dicesi poi *potenza nell'istante*  $t$  il limite, per  $\Delta t \rightarrow 0$ , di codesta potenza media, cioè il rapporto del lavoro elementare al tempuscolo corrispondente

$$F \times \frac{dP}{dt} = F \times v = Xx + Yy + Zz.$$

Risulta di qui che in ogni caso (anche quando la forza è posizionale e il lavoro non dipende dalla legge oraria del moto del punto di applicazione) il calcolo della potenza richiede di regola la conoscenza della velocità di codesto punto.

#### § 4. - Impulso di una forza e quantità di moto - Percosse.

13. IMPULSO. — Supposto ancora una volta che il punto di applicazione di una forza variabile  $F$  sia animato di un moto qualsiasi, si dice *impulso* della  $F$  fra due istanti  $t_0$  e  $t$  l'integrale

$$I = \int_{t_0}^t F dt,$$

cioè il vettore che ha per componenti

$$I_x = \int_{t_0}^t X dt, \quad I_y = \int_{t_0}^t Y dt, \quad I_z = \int_{t_0}^t Z dt.$$

Circa il calcolo effettivo dell'integrale vettoriale  $I$ , o, ciò che è lo stesso, delle sue tre componenti  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ , si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle del n. 3: cioè, quando sia assegnato il moto del punto di applicazione della forza, gli integrali definiti suindicati si riducono a integrali ordinari, relativi alla variabile di integrazione  $t$ . Ma è manifesto che, a differenza di quanto accade pel lavoro, l'impulso  $I$ , anche quando la forza  $F$  è posizionale o in particolare conservativa, dipende non solo dalla natura geometrica della traiettoria del punto di applicazione, ma anche dalla legge temporale con cui esso la descrive.

In ogni caso, se si tien fisso  $t_0$  e si lascia variare  $t$ , l'impulso  $I$  è una funzione (vettoriale) di  $t$ , che si annulla per  $t = t_0$  e che ha per vettore derivato la forza:

$$\frac{dI}{dt} = F;$$

*cioè la derivata dell'impulso rispetto al tempo è eguale alla forza*

**14. QUANTITÀ DI MOTO E IMPULSO DI UNA FORZA NEL MOTO IMPRESSO.** — Applicata la  $F$ , come forza totale, ad un punto materiale libero di massa  $m$ , consideriamo l'impulso di  $F$  da  $t_0$  a  $t_1$ , rispetto al moto impresso al punto dalla forza stessa. Avremo, per la equazione fondamentale della Dinamica,

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F dt = \int_{t_0}^{t_1} ma dt = m \int_{t_0}^{t_1} \frac{dv}{dt} dt,$$

ossia

$$(12) \quad I = \Delta(mv),$$

ove si indichi con  $\Delta(mv)$  l'incremento che la grandezza vettoriale  $mv$  subisce dall'istante  $t_0$  all'istante  $t_1$ .

Codesto vettore  $mv$  dicesi *quantità di moto* del punto di massa  $m$ , animato della velocità  $v$ ; onde la (12) può esprimersi dicendo che:

*Se una forza agisce come forza totale su di un punto materiale libero, l'impulso della forza in un dato intervallo di tempo è eguale alla variazione di quantità di moto del punto nel medesimo intervallo di tempo* <sup>(1)</sup>.

**15. PERCOSSE.** — Sinora, nello studio del moto di un punto materiale, abbiamo sempre ammesso che il fenomeno, negli inter-

(1) La scuola del DES CARTES sosteneva, in contrasto coi Leibniziani (n. 9, nota), che le forze vanno valutate mediante le quantità di moto, anziché mediante le forze vive. La veduta cartesiana è esatta se si conviene di considerare forze (costanti) agenti per un medesimo intervallo di tempo (anziché per un medesimo cammino, come si richiede per legittimare la valutazione Leibniziana). Invero, se si riprendono le notazioni della nota a pie' della pag. 225, si ha, per una forza costante  $F$ ,

$$Ft = mat = mv;$$

onde per due forze  $F_1, F_2$ , agenti per un medesimo tempo  $t$ , risulta effettivamente

$$F_1 : F_2 = mv_1 : mv_2.$$

valli di tempo considerati, si svolgesse con continuità (si ricordino le ipotesi poste una volta per tutte al n. 5 del Cap. II). Ma può anche accadere che un punto materiale, ad un dato istante, cambi bruscamente di velocità, senza che muti sensibilmente, in quell'istante, la sua posizione. Ciò si verifica quando il punto è sollecitato da certe speciali forze, di cui ancora non abbiamo fatto cenno, e che prendono il nome di *percosse*. Alla considerazione di forze siffatte si è indotti, quando si osservi, per es., un colpo di martello su di un incudine, un colpo di stecca su di una palla da biliardo, l'urto di una palla di gomma lanciata contro un muro, ecc.

Si osservi anzitutto che se la forza  $F$ , durante tutto il tempo in cui la consideriamo, si mantiene d'intensità finita, cioè minore di un numero assegnabile, il rispettivo impulso da  $t_0$  a  $t_1$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F dt$$

tende, per  $t_1 \rightarrow t_0$ , allo zero; il che si può anche esprimere, dicendo che l'*impulso istantaneo*  $F dt$ , cui si riduce in tal caso

l' $\int_{t_0}^{t_1} F dt$ , è evanescente (come prodotto di un vettore  $F$  di intensità finita per lo scalare infinitesimo  $dt$ ).

Ma si può invece immaginare che una forza  $F$ , agendo per un brevissimo intervallo di tempo  $\tau$  compreso fra gli istanti  $t_0$  e  $t_1$ , assuma in esso intensità grandissime, per modo che l'impulso della forza in quel pur brevissimo intervallo di tempo abbia un valore assoluto finito e determinato.

Per schematizzare matematicamente su di un esempio tipico le accennate circostanze fisiche, consideriamo una forza (costante) che in un dato intervallo di tempo, dall'istante  $t_0$  all'istante  $t_1$ , sia espressa da

$$(13) \quad F = \frac{I_0}{\tau},$$

dove  $I_0$  designa un vettore costante e  $\tau$  la durata  $t_1 - t_0$  dell'intervallo di tempo considerato. L'accelerazione, da cui sarà animato un punto materiale libero di massa  $m$ , sollecitato da codesta forza sarà data da

$$\frac{dv}{dt} = \frac{I_0}{m\tau},$$

onde, integrando dall'istante  $t_0$  ad un generico istante  $t$  del consi-

derato intervallo di tempo, e designando con  $v_0$  la velocità nell'istante  $t_0$  risulta

$$v = v_0 + \frac{t - t_0}{m\tau} I_0.$$

Questa velocità  $v$ , poichè la frazione  $(t - t_0)/\tau$  è propria, si mantiene minore, in valore assoluto, di  $v_0 + I_0/m$ , e

$$(14) \quad v_1 = v_0 + \frac{1}{m} I_0,$$

nell'istante  $t_1$ , assume precisamente codesta determinazione  $v_1$ , indipendente da  $\tau$ . D'altra parte, calcolando l'impulso  $I$  della forza (13), dall'istante  $t_0$  all'istante  $t_1$ , si trova, in base alla  $t_1 - t_0 = \tau$ ,

$$I = I_0.$$

Perciò, se si fa tendere  $\tau$  allo zero, la forza (13) tende, in valore assoluto, all'infinito, ma il suo impulso, anche ridotto al primo tempuscolo  $dt$  consecutivo all'istante  $t_0$ , conserva il valore finito  $I_0$ . Così la velocità acquisita dal punto in capo a codesto tempuscolo è data ancora dalla (14), mentre lo spostamento subito dal punto è infinitesimo, come si verifica facendo tendere  $t_1$  a  $t$  nella sua espressione generale

$$\Delta P = \int_{t_0}^{t_1} v dt$$

e ricordando che  $v$  si mantiene finita.

Concludendo, al limite per  $\tau$  tendente allo zero, abbiamo la rappresentazione matematica di una forza che, agendo per un tempuscolo infinitesimo con intensità infinitamente grande, determina sul punto materiale sollecitato una brusca variazione finita di velocità, pur imprimendogli uno spostamento infinitesimo.

Senza entrare in particolari, che riserbiamo alla teoria del moto impulsivo (Parte II, Cap. VII), notiamo che, sotto condizioni poco restrittive che a tempo opportuno saranno precisate, sussistono conclusioni analoghe, anche per forze di natura più generale della (13), subordinatamente alla circostanza che esista e sia finito e diverso da zero il vettore

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \int_{t_0}^{t_1} F dt.$$

In ogni caso, codeste forze, che agendo con intensità grandissima per un tempo brevissimo, imprimono ad un punto materiale

uno spostamento trascurabile e una brusca variazione finita di velocità, diconsi *percosse*. Esse si valutano mediante il rispettivo impulso istantaneo, vale a dire mediante la variazione di quantità di moto da esse determinata; e l'equazione

$$I = m\Delta v$$

compie nella teoria delle percosse un ufficio analogo a quello che, nello studio delle forze ordinarie, spetta all'equazione fondamentale della Dinamica.

### § 5. - Unità meccaniche.

16. GRANDEZZE PRIMITIVE E GRANDEZZE DERIVATE. — Nello studio della Meccanica siamo venuti man mano introducendo varie specie di grandezze, scalari o vettoriali. Alle grandezze geometriche: *segmenti di rette ed archi di curve, superficie, solidi*, abbiamo aggiunto le *grandezze cinematiche: tempi, velocità* (di varie specie), *accelerazioni*, e poi, più di recente, le grandezze che potremo dire *dinamiche: forze* (e, in particolare, *percosse*), *masse, forze vive e lavori, potenze, impulsi e quantità di moto*.

Ora importa svolgere alcune considerazioni, del tutto elementari ma pur di importanza fondamentale, sulla *misura* di codeste varie specie di grandezze, che qui considereremo tutte sotto l'aspetto scalare, cioè fissando la nostra attenzione, anche per quelle che hanno carattere vettoriale, sul rispettivo valore assoluto.

A priori, per ciascuna delle classi di grandezze dianzi enumerate (nei cui riguardi supponiamo valide certe premesse di carattere generale, che si possono trovare ben specificate in trattati elementari <sup>(1)</sup>), è lecito scegliere in modo del tutto arbitrario l'*unità di misura*, cioè la grandezza cui per convenzione si fa corrispondere la misura 1; dopo di che resta determinato il numero che compete come misura ad ogni altra grandezza della classe considerata. Ma codesta scelta arbitraria e indipendente delle varie unità di misura, pur essendo logicamente lecita, non è opportuna, in quanto il non tener conto delle relazioni che *intercedono* fra le diverse classi di grandezze porta ad introdurre nelle formule certi fattori di proporzionalità che complicherebbero inutilmente i calcoli.

È appunto per evitare questo inconveniente che in Geometria, fissata l'unità delle lunghezze (il metro), si assumono come unità

(<sup>1</sup>) Cfr. per es., F. ENRIQUES e U. AMALDI: *Geometria elementare*, Bologna, Zanichelli, 1938, Parte II, Cap. I, III.

delle aree e dei volumi rispettivamente il *quadrato di lato 1* e il *cubo di spigolo 1* <sup>(1)</sup>.

Sotto questo rispetto, dicesi *fondamentale* o *primitiva* l'unità delle lunghezze, in quanto è scelta in modo del tutto arbitrario e convenzionale; mentre diconsi *derivate* le unità delle aree e dei volumi, in quanto vengono definite per mezzo della unità delle lunghezze, e in base a determinate relazioni sussistenti fra superficie e solidi da una parte e segmenti dall'altra (proporzionalità dei rettangoli e dei parallelepipedi di data base alle rispettive altezze). Per la stessa ragione diconsi, più in generale, *grandezze primitive* le lunghezze, *grandezze derivate* le superficie e i solidi.

Analoga distinzione si può stabilire, come tosto vedremo, nell'ambito delle grandezze cinematiche e di quelle dinamiche; ma non è superfluo il rilevare, fin dal caso delle grandezze geometriche, che una tale distinzione è, in ultima analisi, di natura convenzionale, in quanto dipende dalla particolare scelta dell'unità per le superficie e pei volumi.

17. UNITÀ CINEMATICHE. — Per la misura del tempo, come è notorio (cfr. Cap. II, n. 3) l'unità si fissa direttamente in base ad osservazioni cosmografiche (anno, giorno, ora, minuto, secondo di tempo siderale o solare medio, a norma dei casi): cioè in Cinematica alle *lunghezze* si aggiungono, come *grandezze primitive*, i *tempi*. Ciò è per così dire imposto dal fatto che, fra codeste due specie di grandezze non sussiste alcuna relazione naturale, che possa permettere, in base a criteri non artificiosi, di *derivare* l'unità dei tempi da quella delle lunghezze.

Invece, quando siansi assunte come grandezze primitive le lunghezze e i tempi, si presenta come grandezza derivata, per la sua stessa definizione, ogni velocità: rapporto (o limite di rapporto) tra una lunghezza e un tempo. Fissate le unità di lunghezza e di tempo, la misura delle velocità è senz'altro individuata. Unità di velocità è a dirsi in particolare ogni velocità, che abbia 1 per misura: come rappresentante tipica (che fa riscontro al quadrato e al cubo di lato 1) può assumersi la velocità di un mobile, che è animato di moto uniforme e percorre l'unità di spazio nell'unità di tempo.

<sup>(1)</sup> Per convincersene nel caso più banale possibile, si supponga di prendere come unità di misura delle aree il quadrato di lato  $k$  (anziché di lato 1): allora l'area del rettangolo di dimensioni  $a$  e  $b$  è dato da  $ab/k^2$  anziché da  $ab$ .

Analogamente, per le accelerazioni: rapporti o limiti di rapporti tra velocità e tempi. Rappresentante tipica dell'unità di accelerazione è quella di un moto uniformemente accelerato, in cui la velocità aumenta di 1 nell'unità di tempo.

In conclusione, due sono le *unità fondamentali* della Cinematica, l'unità di *lunghezza* e quella di *tempo*. Fissati, per es., *metro* e *secondo*, tutte le altre misure risultano individuate. È ben noto che alle due unità derivate della Geometria si dà un nome particolare (metro quadrato e metro cubo), e così le misure si indicano abitualmente senza richiamare in forma esplicita i prodotti di lunghezze da cui provengono.

Invece in Cinematica, non si è sentito il bisogno di dare un nome alle unità di velocità e di accelerazione, sembrando più espressivi gli enunciati diretti: velocità o accelerazione di tanti metri per minuto secondo.

18. Non sarà male osservare esplicitamente che, come già le aree e i volumi, così anche le velocità e le accelerazioni sono grandezze derivate *solo per convenzione*.

Nulla vieterebbe a priori di riguardarle come grandezze primitive: basterebbe soltanto partire dai loro caratteri specifici e desumere la misura per confronto diretto. Ecco come si dovrebbe procedere.

Consideriamo, per fissar le idee, le velocità, e riferiamoci al caso più semplice (da cui il generale scende per via di limite) dei moti rettilinei uniformi. Immaginiamo di avere, circa le velocità come grandezze fisiche, l'intuizione fondamentale che esse rispecchiano l'attitudine a percorrere del cammino e desumiamo di qui il criterio di misura.

Dati (con evidente significato delle lettere) due moti uniformi  $s = at + b$ ,  $s_1 = ht + k$ , le velocità (intese come attitudini) vanno raffrontate, badando agli spazi percorsi in uno stesso tempo.

La misura della prima rispetto alla seconda, assunta per unità, si trova così espressa dal rapporto

$$\frac{a(t_2 - t_1)}{h(t_2 - t_1)} = \frac{a}{h}$$

degli spazi percorsi in uno stesso intervallo di tempo da  $t_1$  a  $t_2$ .

Questa misura  $a/h$  differisce dall'ordinaria (rapporto fra spazi e tempi) per il fattore numerico costante  $1/h$  che dipende dalla scelta dell'unità.

Conclusione ben ovvia, quando si pensi che l'introduzione di un fattore di proporzionalità equivale appunto a lasciare indeterminata l'unità di misura.



In pratica è apparso più conveniente di prendere senz'altro  $h = 1$ , presentando la velocità (e così l'accelerazione) come una grandezza derivata per la sua stessa definizione.

**19. UNITÀ DINAMICHE. — SISTEMA TECNICO.** — In Dinamica abbiamo desunto direttamente dalla intuizione il concetto di forza, di cui si è ravvisato il modello fisico nella *forza-peso*; mentre tutte le altre grandezze dinamiche successivamente introdotte si sono definite per mezzo della forza e delle grandezze geometriche e cinematiche. Perciò, assunta l'unità di forza come *primitiva*, resteranno definite come *derivate* le unità di tutte le altre grandezze dinamiche da noi considerate; onde intanto si vede che tutto il *sistema delle unità meccaniche* resta definito quando siano fissate convenzionalmente le *tre unità fondamentali di lunghezza, di tempo e di forza*.

Negli usi pratici, come si è già accennato (VII, n. 13), si assume come *unità di forza* il *chilogrammo-peso*, cioè la forza peso che agisce su di 1 dm<sup>3</sup> di acqua distillata, a 4°C e a 760 mm di pressione atmosferica (o meglio il peso agente sul *Chilogrammo-campione* che è un particolare cilindro di platino conservato al *Bureau international des poids et mesures* di Sèvres).

E allora, per la massa che fu definita da noi (VII, n. 16) quale rapporto di un peso ad una accelerazione

$$m = \frac{p}{g},$$

si dovrà assumere come unità (ove si voglia *derivarla* da quelle precedentemente introdotte) la massa di un qualsiasi corpo per cui il rapporto testè indicato si riduca ad 1, cioè la massa di un corpo il cui peso sia approssimativamente di kg 9,80. Codesta unità non ha un nome.

Ha invece un nome l'*unità pratica di lavoro*, cioè il *Chilogrammetro* (kgm), che è il lavoro compiuto da una forza costante di 1 kg-peso per lo spostamento di 1 m del suo punto di applicazione, nella direzione e nel senso della forza stessa.

Infine la *potenza* si misura in pratica in *cavalli-vapore* o *H.P.* (dall'inglese *horse-power*), pari a 75 kgm per secondo, e talvolta anche in *poncelet*, cioè 100 kgm per secondo.

**20. SISTEMI ASSOLUTI DI UNITÀ.** -- Nel sistema tecnico considerato al n. prec. si è assunta come *unità primitiva* quella di peso e si è definita come *derivata* quella di massa in base alla relazione

$$m = \frac{p}{g} \quad \text{ossia} \quad mg = p,$$

la quale non è se non un caso particolare della equazione fondamentale della Dinamica

$$ma = F.$$

Ma, come ben sappiamo, il peso ha un carattere locale, cosicchè, se si vuol essere precisi e avere per i pesi un'unità ben determinata, è necessario indicare il luogo cui corrisponde quel peso, per es. Roma. Allora 1 litro di acqua distillata (a 4°C e a 760 mm di pressione) a Parigi non pesa esattamente 1 kg, ma un po' di più e precisamente, variando i pesi locali come le corrispondenti accelerazioni della gravità  $\frac{9,8096}{9,8038}$  kg (II, n. 27).

Questa correzione è manifestamente trascurabile nell'industria, e, da questo punto di vista, si capisce come, data la diretta accessibilità del peso, giovi far capo ad esso per la misura delle altre quantità meccaniche e fisiche.

Ma non è più così dal punto di vista teorico. Il GAUSS <sup>(1)</sup> osservò, per primo, che scientificamente è preferibile adottare come primitiva l'unità di massa in luogo di quella di forza. Infatti, atteso il carattere intrinseco della massa, si ha il vantaggio, che l'unità scelta non esige (come per il peso) una specificazione locale. Il corpo che fornisce l'unità di massa a Roma resta teoricamente unitario dovunque lo si trasporti. Per questa circostanza si dà il nome di *sistema assoluto* ad ogni sistema di misura che ha per unità primitive quelle di *lunghezza*, di *tempo* e di *massa*.

Come unità di massa si può, per es., adottare quella del campione, che precedentemente si assumeva per unità di peso: la massa cioè di un dm<sup>3</sup> di acqua distillata, ecc. Tale unità si chiama *Chilogrammo-massa*, o semplicemente *Chilogrammo*, quando non vi sia pericolo di confusione coll'ordinario *Chilogrammo-peso*.

Restando fissi il metro ed il secondo, da

$$F = ma$$

appare che una rappresentante dell'unità di forza si ha in quella

(<sup>1</sup>) CARLO FEDERICO GAUSS, n. a Braunschweig nel 1777, m. a Gottinga nel 1855, fu, dal 1807 fino alla sua morte, professore all'Università di Gottinga e Direttore di quell'Osservatorio astronomico. Creatore della geometria differenziale e del metodo dei minimi quadrati, sommo analista e fisico-matematico, astronomo e geodeta, fu detto dai contemporanei « princeps mathematicorum ». Ebbe per divisa di lavoro *pauca sed matura*. Effettivamente le sue opere furono e sono celebrate anche per perfezione di forma; il *pauca* riempie tuttavia undici grossi volumi.

forza che, agendo (con intensità costante) per un secondo sopra un corpo di massa 1, è capace di aumentare di 1 m/sec la sua velocità.

Volendo materializzarla mediante un peso, bisogna rendere uguale ad uno  $p = mg$ , ossia prendere un corpo di massa  $m = 1/g$ . Un tale campione di peso 1 (in misura assoluta) è variabile da luogo a luogo; all'ingrosso è il peso di 1/10 di litro d'acqua, e corrisponde quindi press'a poco al peso (ordinario) di un ettogrammo.

21. Il sistema *C. G. S.* (centimetro, grammo, secondo) è un sistema assoluto, che differisce da quello ora considerato, soltanto perchè, come unità di lunghezza e di massa, si sostituiscono al metro ed al chilogrammo il centimetro e il grammo (massa).

La corrispondente unità di forza prende il nome di *dine*. Per determinare la relazione numerica tra la dine e il grammo (peso) ricordiamo anzitutto che l'accelerazione di gravità  $g$  in unità *C. G. S.* è a Roma 980,38; a Parigi 980,96, ecc.; adotteremo il valore approssimato 980, o, in cifra tonda,  $10^3$ .

D'altra parte un grammo (peso) è (per la solita  $p = mg$ ) eguale a  $g$  volte un grammo (massa), ma il prodotto  $mg$  è una forza, e il numero che la rappresenta (se  $m$  e  $g$  sono espressi in unità *C. G. S.*) risulta espresso in dine. Si ha dunque

$$1 \text{ grammo (peso)} = g \text{ dine} = 980 \text{ dine,}$$

ossia

$$1 \text{ dine} = \frac{1}{980} \text{ grammo (peso).}$$

Ne consegue:

$$(15) \quad 1 \text{ kg (peso)} = 10^3 \cdot 980 \text{ dine,}$$

cioè, all'ingrosso, 1 kg vale  $10^6$  dine, multiplo dell'unità di forza, che ha ricevuto un nome speciale e si chiama *megadine*. Più esattamente una megadine vale  $\frac{10^6}{10^3 g}$  kg, ossia, approssimativamente 1,02 kg.

L'unità di lavoro nel sistema *C. G. S.* dicesi *erg* e corrisponde al lavoro eseguito da una forza (costante) di 1 dine per uno spostamento del suo punto di applicazione di 1 cm, nella direzione e nel senso della forza. Dalla (15) si deduce subito che la relazione tra chilogrammetro (n. prec.) ed erg è data da

$$1 \text{ erg} = \frac{1}{10^5 \times 980} \text{ kgm,}$$

ossia, ponendo  $10^6 \text{ erg} = 1 \text{ megaerg}$ ,

$$1 \text{ megaerg} = \frac{1}{98} \text{ kgm} ;$$

cioè 1 megaerg è poco più di  $\frac{1}{100} \text{ kgm}$ .

In luogo dell'erg (o del megaerg) gli elettricisti usano come unità di lavoro il *joule*, che è uguale a  $10^7 \text{ erg}$  (ossia al lavoro di una megadine per lo spostamento di 1 dm.). Perciò

$$(16) \quad 1 \text{ joule} = \frac{1}{9,8} \text{ kgm}.$$

Infine l'unità di potenza nel sistema *C. G. S.*, corrispondente alla potenza di una forza che compie 1 erg di lavoro per secondo, non ha un nome speciale; in luogo di essa gli elettrotecnici usano il *watt*, pari alla potenza di 1 joule per secondo, e il *kilowatt* eguale a  $10^3 \text{ watt}$ . Poichè 1 H.P. è dato da 75 kgm per secondo, si deduce dalla (16)

$$1 \text{ kilowatt} = \frac{10^3}{9,8 \times 75} \text{ H.P.},$$

cioè approssimativamente 1,36 H.P.

Similmente

$$1 \text{ kilowatt} = \frac{1}{0,98} \text{ poncelet}.$$

**22. SISTEMA GIORGI.** — G. GIORGI, per armonizzare le convenienze della pratica con l'impostazione scientifica dell'Elettrotecnica, ha ideato un nuovo sistema con quattro grandezze primitive, che, per la parte strettamente meccanica, è ancora assoluto ed assume come unità fondamentali per le lunghezze il *metro*, per i tempi il *secondo di tempo medio* e per le masse il *kilogrammo-massa*. Analogamente al sistema *C. G. S.* esso si designa con la sigla *M. K. S.*; e, dopo maturi studi e larghe discussioni, è stato, nel 1935, adottato dalla Commissione Elettrotecnica Internazionale.

Le unità di lunghezza e di tempo sono perfettamente adeguate all'uso corrente; e, quanto a quella di forza, che il GIORGI ha chiamato *vis*, basta osservare che il peso di un corpo di massa 1 (cioè di 1 dm<sup>3</sup> di acqua distillata, nelle solite condizioni di temperatura e di pressione) deve risultare eguale a  $g = 9,8$  unità di forza per riconoscere che la *vis* corrisponde approssimativamente ad 1 *ettogrammo-peso*. Invece le unità di lavoro e di potenza riproducono esattamente il *joule* e il *watt*, già universalmente adottati dagli

elettrotecnici. Lo si può verificare in modo elementare diretto o, più semplicemente, in base alle regole generali, che esporremo nel prossimo paragrafo.

### § 6. — Dimensioni delle grandezze meccaniche e cambiamenti di unità. - Omogeneità.

23. La misura  $A$  di una superficie è somma o limite di somme di prodotti di due lunghezze. Se tutti i numeri, che esprimono queste lunghezze, vengono moltiplicati per uno stesso fattore  $\lambda$  (come accade per es., quando, restando inalterato l'ente geometrico, si cambi l'unità di lunghezza, assumendo come nuova unità la  $\lambda$ -esima parte dell'unità primitiva) l'area  $A$  rimane moltiplicata per  $\lambda^2$ : in altre parole essa è una funzione omogenea di secondo grado delle varie lunghezze, da cui dipende.

Con una notazione introdotta dal MAXWELL <sup>(1)</sup>, si designa simbolicamente tale circostanza, scrivendo

$$[A] = l^2 .$$

In generale, se, rispetto ad un certo sistema assoluto di unità,  $Q$  è la misura di una grandezza, che dipende non solo da un numero qualsiasi di lunghezze, ma anche da quanti si vogliano tempi e da quante si vogliano masse, per mettere in evidenza che l'espressione di  $Q$  è omogenea di grado  $n_1$  rispetto alle lunghezze, omogenea di grado  $n_2$  rispetto ai tempi e omogenea di grado  $n_3$  rispetto alle masse, si scrive

$$[Q] = l^{n_1} t^{n_2} m^{n_3} ,$$

ed  $n_1, n_2, n_3$  si chiamano le *dimensioni di  $Q$* ; mentre l'equazione simbolica testè scritta dicesi equazione delle dimensioni della grandezza  $Q$ .

Se qualcuna delle dimensioni è nulla, le cose vanno come se  $Q$  non dipendesse dal corrispondente gruppo di argomenti; così, per es., il precedente simbolo  $[A]$  potrebbe anche scriversi  $l^2 m^0$ . Ma,

(1) JAMES CLERK MAXWELL, n. a Edimburgo nel 1831, m. nel 1879 a Cambridge, dove era professore di fisica dal 1871. Illustre fisico-matematico, diede espressione matematica alle vedute intuitive e sperimentali del FARADAY nel classico « Treatise on electricity and magnetism » (Londra, 1873), dove sono previste le onde elettriche, realizzate più tardi dal HERTZ e applicate dal MARCONI, ed è stabilita la teoria elettromagnetica della luce. A lui pure è dovuta la prima impostazione quantitativa della teoria cinetica dei gas.

di solito, nella indicazione delle dimensioni si conviene di sopprimere quei fattori, cui competerebbe l'esponente zero.

Dopo ciò, è chiaro che si ha, per un generico volume  $V$ :

$$[V] = l^3;$$

per una velocità  $v$  (rapporto o limite di rapporto tra lunghezze e tempi):

$$[v] = lt^{-1};$$

per una accelerazione  $a$ :

$$[a] = lt^{-2}.$$

Ne viene, in quanto si considerino le masse come grandezze primitive e le forze come derivate a norma della relazione fondamentale  $F = ma$ , che le dimensioni di una generica forza sono ordinatamente  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = -2$ ,  $n_3 = 1$ ; si ha cioè

$$[F] = lt^{-2}m.$$

Un lavoro  $L$  (somma di prodotti di forze per lunghezze) sarà un'espressione omogenea del tipo:

$$[L] = l^2t^{-2}m;$$

e lo stesso dicasi per un potenziale, nei casi in cui esiste, in quanto non è altro che un certo lavoro (n. 6).

Per una forza viva  $T$  (semiprodotto di una massa per il quadrato di una velocità) si ha ancora

$$[T] = l^2t^{-2}m,$$

ciò che era a priori da aspettarsi, dato che le due quantità  $T$  ed  $L$  non sono che aspetti diversi (come, ad es., i cubi e le sfere rispetto ai volumi) di una stessa entità fisica: l'energia.

Per una potenza  $\Pi$  (rapporto tra lavoro e tempo) si ha

$$[\Pi] = l^2t^{-3}m.$$

Infine quantità di moto (velocità per massa) e impulso (prodotto o somma di prodotti di forze per intervalli di tempo) rispondono entrambi alla formola:

$$[I] = lt^{-1}m.$$

Anche tale omogeneità era senz'altro prevedibile, dacchè, in virtù della (12) del n. 14, ogni impulso si può considerare come la differenza di due quantità di moto.

24. Se invece si adotta il sistema tecnico di unità e perciò, colle lunghezze e coi tempi, si assumono come grandezze primitive le *forze*, anzichè le masse, queste ultime, divenute oramai grandezze derivate, ammettono, in base alla relazione fondamentale della Dinamica, l'equazione delle dimensioni

$$(17) \quad [m] = l^{-1}t^2f,$$

dove  $f$  è il simbolo generico di forza. Così per le altre grandezze dinamiche, tenendo conto delle rispettive definizioni, si ottengono le seguenti equazioni simboliche

$$[L] = lf, \quad [\Pi] = lt^{-1}f, \quad [I] = tf,$$

le quali si deducono dalle equazioni stabilite al n. prec., sostituendovi al posto del simbolo  $m$  della massa la sua espressione (17).

25. CAMBIAMENTI DI UNITÀ. — La considerazione delle dimensioni di una generica grandezza meccanica  $Q$  permette di valutare speditamente come vari la misura di codesta grandezza, quando si cambiano le unità delle grandezze primitive. Infatti, se in un dato sistema assoluto, si riduce l'unità delle lunghezze nel rapporto da 1 ad  $1/\lambda$ , quella dei tempi da 1 ad  $1/\tau$ , quella delle masse da 1 ad  $1/\mu$ , e si ha

$$[Q] = l^{n_1} t^{n_2} m^{n_3},$$

risulta dalla triplice omogeneità delle grandezze della specie considerata, rispetto a lunghezze, tempi e masse, che l'unità derivata corrispondente si riduce nel rapporto da 1 a

$$\frac{1}{\lambda^{n_1} \tau^{n_2} \mu^{n_3}} = \lambda^{-n_1} \tau^{-n_2} \mu^{-n_3}$$

e la misura di  $Q$  viene moltiplicata per

$$\chi = \lambda^{n_1} \tau^{n_2} \mu^{n_3}.$$

Questo prodotto dicesi coefficiente di riduzione delle grandezze di dimensioni  $n_1, n_2, n_3$ .

Così, designando con  $v, a, \varphi, \epsilon, \pi, i$  i coefficienti di riduzione spettanti rispettivamente a velocità, accelerazione, forza, energia, potenza ed impulso, si deduce dalle rispettive equazioni delle dimensioni (n. 23)

$$(18) \quad v = \lambda \tau^{-1}, \quad a = \lambda \tau^{-2}$$

$$(19) \quad \varphi = \lambda \tau^{-2} \mu, \quad \epsilon = \lambda^2 \tau^{-2} \mu, \quad \pi = \lambda^2 \tau^{-1} \mu, \quad i = \lambda \tau^{-1} \mu.$$

Se invece si adotta il sistema tecnico di unità, restano, naturalmente, inalterati i coefficienti di riduzione (18) della velocità e

della accelerazione; ma quelli della massa e delle altre grandezze dinamiche derivate diventano

$$(20) \quad \mu = \lambda^{-1}\tau^2\varphi, \quad \varepsilon = \lambda\varphi, \quad \pi = \lambda\tau^{-2}\varphi, \quad \iota = \tau\varphi.$$

I sistemi (18), (19) e (18), (20) sono fra loro algebricamente equivalenti: il primo è risoluto in termini di  $\lambda$ ,  $\tau$ ,  $\mu$ , il secondo in termini di  $\lambda$ ,  $\tau$ ,  $\varphi$ .

Ora diconsi dimensionalmente indipendenti tre grandezze tali, che le espressioni monomiche dei loro coefficienti di riduzione in termini di  $\lambda$ ,  $\tau$ ,  $\mu$  siano algebricamente indipendenti, nel qual caso risultano pur indipendenti, in virtù delle (20), le loro espressioni in termini di  $\lambda$ ,  $\tau$ ,  $\varphi$ .

Tale, ad esempio, è la terna *lunghezza, massa e forza* (che differisce da quella fondamentale del sistema pratico per la sola sostituzione della massa al tempo), come pure la terna *velocità, accelerazione ed energia*, in quanto si ha  $v = \lambda\tau^{-1}$ ,  $\alpha = \lambda\tau^{-2}$ ,  $\varepsilon = \lambda^2\tau^{-2}\mu$ . Non sono, invece, dimensionalmente indipendenti *tempo, energia e potenza*, perchè, in base alla (19),  $\pi = \varepsilon\tau^{-1}$ .

Dalla definizione stessa risulta che, se si prefissano tre quali si vogliano grandezze dimensionalmente indipendenti, i coefficienti di riduzione di tutte le altre grandezze sono esprimibili per mezzo di quelli spettanti alle tre prefissate. Così, se si fissa la terna *velocità, accelerazione ed energia*, si ha, in base alle (18), (19), o alle equivalenti (18), (20),

$$\begin{aligned} \lambda &= v^2\alpha^{-1}, & \tau &= v\alpha^{-1}, \\ \mu &= v^{-2}\varepsilon, & \varphi &= v^{-2}\alpha\varepsilon, & \pi &= v^{-1}\alpha\varepsilon, & \iota &= v^{-1}\varepsilon. \end{aligned}$$

Possiamo anche dire che le terne di grandezze dimensionalmente indipendenti sono quelle che si possono assumere come grandezze primitive e che permettono di definire tutte le altre come grandezze derivate.

Queste osservazioni si applicano spesso nei calcoli numerici relativi ai cambiamenti di unità, in quanto, secondo i casi, torna opportuno adottare l'una o l'altra delle varie possibili terne di grandezze dimensionalmente indipendenti.

26. Se una certa entità, definita mediante lunghezze, tempi e masse, ha nulle le tre dimensioni (nel qual caso sono pur nulle le sue dimensioni rispetto ad ogni altra terna di grandezze dimensionalmente indipendenti), la sua misura non cambia, comunque si mutino le unità primitive. Una siffatta entità dicesi un numero puro o, semplicemente, un numero.



Tale è la misura (in radianti) di un angolo (rapporto della lunghezza di un arco circolare a quella del corrispondente raggio); onde si deduce che una *velocità angolare* (rapporto di un angolo ad un tempo) ha le dimensioni

$$t^{-1}.$$

**27. OMOGENEITÀ.** — Supponiamo che fra le grandezze meccaniche rilevabili in un dato fenomeno sussista una certa relazione, la quale esprima una legge del fenomeno stesso.

Designate con  $q, q', q'', \dots$  le misure, in un qualsiasi sistema assoluto, delle grandezze meccaniche  $Q, Q', Q'', \dots$ , legate dall'accennata relazione, immaginiamo che questa sia risolta rispetto alla  $q$  sotto la forma

$$(21) \quad q = \psi(q', q'', \dots),$$

e teniamo presente che quest'equazione, in quanto esprime una legge del fenomeno, deve restare valida, qualunque sia il sistema di unità adottato.

Ciò posto, supponiamo che le equazioni delle dimensioni delle grandezze  $Q, Q', Q'', \dots$ , siano, rispettivamente

$$[Q] = l^{n_1} t^{n_2} m^{n_3}, \quad [Q'] = l^{n_1'} t^{n_2'} m^{n_3'}, \quad [Q''] = l^{n_1''} t^{n_2''} m^{n_3''}, \dots,$$

e immaginiamo di ridurre le unità di lunghezza, tempo e massa nei soliti rapporti  $\lambda, \tau, \mu$ , con che le nuove misure delle grandezze  $Q, Q', Q'', \dots$ , assumono i valori (n. 25)

$$\lambda^{n_1} \tau^{n_2} \mu^{n_3} q, \quad \lambda^{n_1'} \tau^{n_2'} \mu^{n_3'} q', \quad \lambda^{n_1''} \tau^{n_2''} \mu^{n_3''} q'', \dots,$$

Perciò, insieme con la (21), deve necessariamente sussistere anche l'equazione

$$\lambda^{n_1} \tau^{n_2} \mu^{n_3} q = \psi(\lambda^{n_1'} \tau^{n_2'} \mu^{n_3'} q', \lambda^{n_1''} \tau^{n_2''} \mu^{n_3''} q'', \dots)$$

comunque siano stati scelti  $q, q', q'', \dots$ , nonchè  $\lambda, \mu, \tau$ . Se in quest'equazione al posto di  $q$  sostituiamo la sua espressione fornita dalla (21), e invertiamo l'ordine dei due membri, otteniamo l'identità

$$(22) \quad \psi(\lambda^{n_1'} \tau^{n_2'} \mu^{n_3'} q', \lambda^{n_1''} \tau^{n_2''} \mu^{n_3''} q'', \dots) = \lambda^{n_1} \tau^{n_2} \mu^{n_3} \psi(q, q', \dots),$$

la quale si presenta manifestamente come un'estensione dell'ordinaria condizione di omogeneità, su cui si ricade se, ad esempio, si ha

$$\tau = \mu = n_1' = n_1'' = \dots = 1.$$

Una analoga omogeneità generalizzata sussiste rispetto ad ogni altra terna di grandezze dimensionalmente indipendenti, quando si pensino espresse per mezzo di queste tutte le grandezze che appaiono nella legge considerata.

Sono in questo senso omogenee l'equazione fondamentale della Dinamica e le equazioni che esprimono il teorema delle forze vive e quello degli impulsi e delle quantità di moto:

$$F = ma, \quad L = T - T_0, \quad I = \Delta(mv).$$

Il lettore lo verifichi per esercizio.

### § 7. — Similitudine e modelli.

28. Alle considerazioni del § prec. sulle dimensioni della grandezze meccaniche e sui cambiamenti di unità si riattacca la teoria della *similitudine meccanica*, di cui daremo qui un rapido cenno.

Cominciamo col ricordare che due figure o sistemi di punti si dicono *geometricamente simili*, se è possibile stabilire fra i loro punti una corrispondenza biunivoca tale che due segmenti omologhi quali si vogliono stiano fra loro in un rapporto costante  $\lambda$ . E di qui conseguono notoriamente la eguaglianza degli angoli corrispondenti e la proporzionalità delle aree e dei volumi omologhi, nei rapporti  $\lambda^2$  e  $\lambda^3$  rispettivamente.

29. SIMILITUDINE CINEMATICA. — Consideriamo due sistemi di punti  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  entrambi in moto rispetto ad uno stesso riferimento  $\Omega\xi\eta\zeta$ , il primo in un certo intervallo di tempo  $t_0-t_1$ , il secondo in un intervallo di tempo, generalmente diverso,  $t'_0-t'_1$ , dove  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t'_0$ ,  $t'_1$  rappresentano valori della medesima variabile indipendente  $t$ , tempo assoluto di cui al n. 4 del Cap. II.

Designato con  $\tau$  il rapporto  $(t_1 - t_0)/(t'_1 - t'_0)$ , conveniamo di chiamare corrispondenti od omologhi due istanti  $t$ ,  $t'$  delle durate dei due moti, tali che sia

$$t - t_0 = \tau(t' - t'_0),$$

con che i differenziali di  $t$  e  $t'$  risultano legati dalla relazione di proporzionalità  $dt = \tau dt'$ ; e supponiamo che sia possibile scegliere due terne ortogonali  $T$  e  $T'$ , entrambe in quiete rispetto ad  $\Omega\xi\eta\zeta$  e tali che negli istanti corrispondenti le due figure  $(\Sigma, T)$ ,  $(\Sigma', T')$ , pur deformandosi ciascuna, da istante ad istante, per effetto del moto di  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ , risultino sempre geometricamente simili, essendo  $\lambda$  il rapporto costante (cioè indipendente dal tempo) di ciascun segmento della prima all'omologo della seconda.

In tal caso si dice che i due sistemi  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  sono cinematicamente simili.

Qui ci proponiamo di dimostrare che per due sistemi siffatti:

1°) *Le traiettorie descritte dai vari punti di  $\Sigma$  costituiscono nel loro insieme una figura geometricamente simile a quella costituita dalle traiettorie dei punti omologhi di  $\Sigma'$ ;*

2°) *Le velocità e le accelerazioni di due punti omologhi di  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  hanno, in istanti corrispondenti, direzioni e versi omologhi nella similitudine geometrica tra le rispettive configurazioni delle traiettorie, ed intensità che stanno nel rapporto costante  $\lambda\tau^{-1}$  e  $\lambda\tau^{-2}$  rispettivamente.*

Infatti se  $P$ ,  $P'$  sono due generici punti omologhi di  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ , le due figure  $(P, T)$  e  $(P', T')$  sono, in istanti corrispondenti  $t$  e  $t'$ , geometricamente simili, talchè, indicate con  $x, y, z$  le coordinate di  $P$  rispetto a  $T$ , con  $x', y', z'$  quelle di  $P'$  rispetto a  $T'$  si ha necessariamente

$$x(t) = \lambda x'(t'), \quad y(t) = \lambda y'(t'), \quad z(t) = \lambda z'(t');$$

e queste equazioni, valendo per ogni coppia di punti omologhi e per ogni coppia di istanti corrispondenti, dimostrano l'affermazione relativa alle traiettorie.

Se poi codeste equazioni si derivano rispetto a  $t$ , tenendo conto che  $dt = \tau dt'$ , si ottengono le

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda\tau^{-1} \frac{dx'}{dt'}, & \frac{dy}{dt} &= \lambda\tau^{-1} \frac{dy'}{dt'}, & \frac{dz}{dt} &= \lambda\tau^{-1} \frac{dz'}{dt'}, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \lambda\tau^{-2} \frac{d^2x'}{dt'^2}, & \frac{d^2y}{dt^2} &= \lambda\tau^{-2} \frac{d^2y'}{dt'^2}, & \frac{d^2z}{dt^2} &= \lambda\tau^{-2} \frac{d^2z'}{dt'^2}, \end{aligned}$$

le quali provano appunto l'asserto relativo alle velocità e alle accelerazioni.

**30. CRITERIO DI SIMILITUDINE CINEMATICA.** — Dalla definizione di similitudine cinematica data al n. prec. si può dedurre un criterio, che, permettendo di riconoscere siffatta similitudine in base al confronto degli atti di moto iniziali e delle sole accelerazioni negli istanti generici corrispondenti, conduce a notevoli conseguenze.

Consideriamo due sistemi di punti  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  in moto rispetto ad uno stesso riferimento  $\Omega\xi\eta\zeta$ , e supponiamo che sia possibile fissare due terne  $T$  e  $T'$  in quiete rispetto ad  $\Omega\xi\eta\zeta$  e stabilire una corrispondenza biunivoca fra i punti di  $\Sigma$  e quelli di  $\Sigma'$ , in modo che:

a) *la configurazione assunta da  $(\Sigma, T)$  in un istante  $t_0$ , sia simile (geometricamente) a quella che  $(\Sigma', T')$  assume in un determinato istante, generalmente diverso,  $t'_0$ ;*

b) le velocità, da cui si trovano animati in codesti due istanti iniziali i punti di  $\Sigma$  e gli omologhi di  $\Sigma'$ , siano egualmente orientate rispetto ai corrispondenti triedri  $T$  e  $T'$  ed abbiano intensità proporzionali.

Se  $\lambda$  e  $\nu$  sono i rapporti di proporzionalità iniziale fra le lunghezze e le velocità di  $\Sigma$  e quelle di  $\Sigma'$ , poniamo  $\nu = \lambda\tau^{-1}$ , cioè  $\tau = \lambda\nu^{-1}$ ; e, considerando i moti di  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  a partire dai corrispondenti istanti iniziali  $t_0$  e  $t'_0$ , fissiamo fra gli istanti  $t$ , successivi a  $t_0$ , e  $t'$ , successivi a  $t'_0$ , la corrispondenza definita da

$$(23) \quad t = t_0 + \tau(t' - t'_0).$$

In queste condizioni diciamo che ad assicurare la similitudine cinematica fra i due sistemi in moto basta che:

c) negli istanti corrispondenti  $t$ ,  $t'$  le accelerazioni dei punti omologhi di  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  siano egualmente orientate rispetto a  $T$ ,  $T'$  ed abbiano intensità proporzionali nel rapporto  $\alpha = \lambda\tau^{-2}$ .

Infatti, usando le stesse notazioni del n. prec., si ha, in base alla c),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda\tau^{-2} \frac{d^2x'}{dt'^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda\tau^{-2} \frac{d^2y'}{dt'^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda\tau^{-2} \frac{d^2z'}{dt'^2};$$

onde, integrando rispetto a  $t$  e ricordando che per la (23) si ha  $dt = \tau dt'$ , si ottengono le

$$\frac{dx}{dt} = \lambda\tau^{-1} \frac{dx'}{dt'} + c_1, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda\tau^{-1} \frac{dy'}{dt'} + c_2, \quad \frac{dz}{dt} = \lambda\tau^{-1} \frac{dz'}{dt'} + c_3;$$

e basta tener conto della proporzionalità iniziale delle velocità e della  $\nu = \lambda\tau^{-1}$  per riconoscere che le tre costanti di integrazione  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  sono tutte nulle.

Dopo di ciò una ulteriore integrazione, associata alla condizione b) di similitudine geometrica iniziale (di rapporto  $\lambda$ ), porta alle

$$x(t) = \lambda x'(t'), \quad y(t) = \lambda y'(t'), \quad z(t) = \lambda z'(t'),$$

le quali mettono appunto in luce la similitudine cinematica dei due sistemi.

**31. SIMILITUDINE MATERIALE E SIMILITUDINE MECCANICA.** — Si dice che due sistemi di punti materiali  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ , fra loro in corrispondenza biunivoca sono *simili materialmente*, se le masse di elementi corrispondenti quali si vogliono stanno fra loro in un rapporto costante  $\mu$ .

E convien notare subito che, nel caso di sistemi geometricamente simili, questa similitudine materiale si realizza nel modo

più ovvio, costruendo gli elementi omologhi con lo stesso materiale.

Ciò premesso, supponiamo che, dati due sistemi  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  in moto, sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due sistemi e una corrispondenza biunivoca fra gli istanti delle durate dei due moti, in guisa che i due sistemi presentino insieme similitudine materiale e similitudine cinematica. In tal caso i due sistemi si dicono *meccanicamente simili*.

Se  $m$  è la massa di un punto di  $\Sigma$ ,  $a$  la sua accelerazione ed  $F$  la forza totale che lo sollecita, e d'altro canto, sono  $m'$ ,  $a'$ ,  $F'$  gli analoghi elementi relativi al punto corrispondente di  $\Sigma'$ , avremo

$$F = ma, \quad F' = m'a'.$$

Di qui, in quanto  $a$  ed  $a'$ , in istanti corrispondenti, hanno direzioni omologhe nella similitudine geometrica, risulta che la stessa circostanza si verificherà per le forze  $F$  ed  $F'$ ; e di più, avendosi

$$m = \mu m', \quad a = \lambda \tau^{-2} a',$$

sussisterà tra le forze omologhe, in istanti corrispondenti, la relazione

$$F = \lambda \tau^{-2} \mu F';$$

cioè le forze agenti su  $\Sigma$  stanno alle forze omologhe, agenti su  $\Sigma'$ , nel rapporto costante  $\lambda \tau^{-2} \mu$ . In altre parole, indicando con  $\varphi$  il rapporto di similitudine delle forze, sussiste tra i quattro rapporti  $\lambda$ ,  $\tau$ ,  $\mu$ ,  $\varphi$  l'equazione

$$(24) \quad \varphi = \lambda \tau^{-2} \mu,$$

per cui, prefissati tre degli indicati rapporti, resta determinato il quarto; e risultano altresì determinati, in base alle rispettive dimensioni (n. 25), i rapporti di similitudine di tutte le altre grandezze meccaniche, corrispondenti nei due sistemi.

La relazione (24) risale in sostanza al NEWTON, cui si deve il concetto di similitudine meccanica.

**32. TEOREMA DEL NEWTON.** — Le considerazioni precedenti sono essenzialmente subordinate all'ipotesi che pei due sistemi  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  sussista effettivamente la similitudine meccanica, la quale implica insieme la similitudine geometrica, quella cinematica e quella materiale.

Ora, mentre, anche se si tratta di sistemi deformabili, la similitudine materiale e, almeno in un determinato istante, quella geometrica sono realizzabili, come già si è accennato, con ovvie mo-

dalità costruttive (parti omologhe simili e dello stesso materiale), ben diverso è il caso per la similitudine cinematica, perchè due sistemi materiali, quando anche gli atti di moto iniziali presentino la voluta similitudine, si muovono poi nel modo imposto dalle circostanze fisiche (vincoli e sollecitazioni) cui sono soggetti, e non v'è, in generale, ragione che risulti da loro realizzata la similitudine meccanica.

In quest'ordine di idee sussiste una importante proposizione che risale al NEWTON. Supponiamo che due sistemi materiali  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ , fra loro in corrispondenza biunivoca, verifichino le condizioni di similitudine iniziale a) e b) del n. 30 e, in luogo della c), queste altre due:

*c')* i due sistemi  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ , siano materialmente simili, intercedendo fra masse omologhe la relazione  $m = \mu m'$  (con  $\mu$  costante);

*c'')* negli istanti corrispondenti  $t$ ,  $t'$ , legati dalla (23), le forze totali omologhe  $F$ ,  $F'$  siano egualmente orientate rispetto ai relativi triedri  $T$ ,  $T'$ , e fra le loro intensità interceda la relazione di proporzionalità  $F = \varphi F'$ , con  $\varphi = \lambda \mu \tau^{-2}$ .

Sotto queste ipotesi si riconosce immediatamente che i due sistemi sono meccanicamente simili. Invero, tenendo conto che per ogni coppia di punti omologhi le accelerazioni sono date da  $a = F/m$ ,  $a' = F'/m'$ , basta combinare le *c')*, *c'')* per dedurne la *c)* del n. 30. Vale dunque la similitudine cinematica; e poichè, per ipotesi, sussiste anche quella materiale, i due sistemi sono meccanicamente simili.

Questo risultato acquista nelle applicazioni concrete una particolare importanza, in quanto seguita a sussistere (almeno nel caso ideale di sistemi privi di attrito; cfr. Cap. XIV) anche se la ipotesi fondamentale *c')* si riferisce alle sole forze direttamente applicate, che a differenza delle reazioni provenienti dai vincoli fanno parte dei dati del problema.

Ci limitiamo ad affermarlo, accontentandoci di rilevare che questa notevole estensione del risultato del NEWTON <sup>(1)</sup> è una conseguenza del principio dei lavori virtuali, di cui ci occuperemo al Cap. XIV.

**33. MODELLI.** — La similitudine meccanica trova un'importante applicazione nello studio di una macchina su di un modello ridotto.

(1) Essa è dovuta a J. BERTRAND, *Note sur la similitude en Mécanique*, Journ. de l'Éc. Polytechnique, Cahier XXXII, 1848.

L'inventore di una macchina, il quale, prima di realizzare in vera grandezza la sua invenzione, desidera procurarsi qualche dato sul suo funzionamento, può ricorrere allo studio di un modello in piccolo, opportunamente costruito: se questo modello, in azione, è meccanicamente simile alla macchina progettata, l'inventore ricaverà, da ogni grandezza meccanica misurata direttamente sul modello, il valore della corrispondente grandezza meccanica sulla macchina (valendosi del rispettivo rapporto di similitudine meccanica).

Ma la possibilità di costruire un modello che possa riguardarsi, anche solo in via approssimata, meccanicamente simile alla macchina progettata, dipende da un insieme di condizioni e di circostanze, che è necessario valutare e discutere caso per caso, e che talvolta rendono addirittura insuperabili le difficoltà pratiche del problema.

Dal punto di vista storico, si può ricordare che già il GALILEI ebbe a chiedersi come accada che talvolta il modello in piccolo di una macchina funzioni in modo perfetto, mentre poi la macchina costruita in grande non dia risultati soddisfacenti; e con geniale intuito attribuì questo fatto al diverso comportamento delle resistenze passive nel modello e nella macchina.

Noi qui per chiarire l'accennata difficoltà e, d'altro canto, per illustrare l'utilità del metodo nei casi favorevoli, prenderemo in considerazione alcune questioni concrete.

34. Supponiamo che di una macchina  $\Omega$  si sia costruito un modello  $\omega$ , simile ad  $\Omega$  non soltanto sotto l'aspetto geometrico, ma anche nei riguardi della struttura delle singole parti omologhe, che immaginiamo costruite in  $\Omega$  e in  $\omega$  con materiale identico; e sia  $\lambda$  il rapporto di similitudine geometrica tra  $\Omega$  ed  $\omega$ .

Codesti organi corrispondenti di  $\Omega$  ed  $\omega$ , come geometricamente simili e aventi la stessa struttura materiale, hanno pesi proporzionali ai rispettivi volumi, che stanno fra loro nel rapporto  $\lambda^3$ ; e poichè l'accelerazione  $g$  della gravità non varia da  $\Omega$  ad  $\omega$  (in quanto possiamo immaginare di eseguir le prove in una regione terrestre abbastanza ristretta) è pur eguale a  $\lambda^3$  il rapporto  $\mu$  di similitudine fra le masse. Se, come accade nella maggior parte dei casi concreti, non si può prescindere, nei riguardi del funzionamento della macchina e del suo modello, dall'influenza del peso delle singole loro parti, bisogna considerare codesti pesi fra le forze agenti su  $\Omega$  ed  $\omega$ ; e, poichè per i pesi omologhi le ipotesi poste impongono già il rapporto  $\lambda^3$ , non si potrà avere similitudine meccanica tra  $\Omega$  ed  $\omega$  se non a condizione che anche tutte le altre

forze omologhe, che entrano in giuoco, stiano fra loro nel medesimo rapporto  $\lambda^3$ .

Ora intervengono spesso forze speciali (come attriti e resistenze di mezzo) che per la stessa loro natura non possono, a parità di altre condizioni, variare dalla macchina al modello nel rapporto  $\lambda^3$ . In questi casi si può, caso per caso, tentar di superare la difficoltà, rinunciando alla similitudine materiale e cercando di modificare opportunamente la struttura materiale dei singoli organi del modello, le condizioni fisiche, in cui questo si fa funzionare, ecc.; ma non è qui il luogo di insistere su siffatti problemi che appartengono al dominio della Tecnica.

Piuttosto procediamo oltre nell'ipotesi favorevole, che tutte le forze omologhe agenti su  $\Omega$  ed  $\omega$  stiano fra loro nel rapporto  $\lambda^3$  dei pesi; onde, ponendo nella equazione (24)

$$(25) \quad \mu = \varphi = \lambda^3,$$

si conclude subito che, per la possibilità della similitudine meccanica, il rapporto dei tempi dev'essere uguale a

$$(26) \quad \tau = \lambda^{1/2}.$$

Si riconosce così che, quando fra le forze intervengono in modo essenziale i pesi, la similitudine meccanica, nella più favorevole delle ipotesi, dipende dal solo rapporto  $\lambda$  delle lunghezze omologhe.

In queste condizioni, un generico coefficiente di riduzione

$$\chi = \lambda^{n_1} \tau^{n_2} \mu^{n_3}$$

diventa, in base alle (25), (26),

$$\chi = \lambda^{n_1 + \frac{1}{2}n_2 + 3n_3},$$

onde si può enunciare la seguente regola del NEWTON: *Se di una macchina  $\Omega$  si è costruito un modello  $\omega$ , geometricamente e materialmente simile, e se di più è soddisfatta la condizione essenziale che le forze omologhe agenti su  $\Omega$  e su  $\omega$  stiano fra loro nel rapporto  $\lambda^3$ , si può prevedere il valore  $Q$  di una qualsiasi grandezza meccanica relativa ad  $\Omega$  e avente le dimensioni  $n_1, n_2, n_3$ , determinando sul modello  $\omega$  la misura  $q$  della considerata grandezza e applicando la formula*

$$(27) \quad Q = \lambda^{n_1 + \frac{1}{2}n_2 + 3n_3} q.$$

35. Come applicazione semplicissima del teorema precedente, consideriamo due pendoli, comunque complicati, ma simili fra loro



sia geometricamente che materialmente, e cerchiamo il rapporto delle rispettive durate  $T$  e  $T'$  delle oscillazioni.

Se, come è lecito in una prima approssimazione, si prescinde dalla resistenza dell'aria e dall'attrito sui coltelli di sospensione, le sole forze direttamente applicate ai pendoli sono i rispettivi pesi, il cui rapporto è  $\lambda^3$ , se  $\lambda$  è il rapporto di similitudine geometrica; talchè risulta applicabile il teorema del n. prec., e si ha senz'altro dalla (27) [o addirittura dalla (26)]

$$T = \lambda^{1/2} T' .$$

\* Il rapporto di similitudine  $\lambda$  (di due generici segmenti omologhi) si può in particolare interpretare come il rapporto delle lunghezze dei due pendoli. Donde sotto forma espressiva: *Le durate di oscillazione di due pendoli simili stanno tra loro come le radici quadrate delle rispettive lunghezze.*

36. Giova notare, che, quando si tenga conto della resistenza dell'aria, i due pendoli non si possono considerare come meccanicamente simili. Invero l'esperienza permette di assodare che per moti lenti (quali sono ordinariamente le oscillazioni di un pendolo) la resistenza incontrata nell'aria da ciascun elemento superficiale è, a parità di tutte le altre condizioni, direttamente proporzionale all'area dell'elemento e alla velocità. Poichè il rapporto di similitudine delle aree è  $\lambda^2$ , e quello delle velocità  $\lambda^{-1}$ , le resistenze incontrate dai due pendoli stanno fra loro nel rapporto  $\lambda^{2 \cdot -1}$ . D'altra parte, per la possibilità della similitudine, si deve avere (n. 34)  $\tau = \lambda^{1/2}$ , sicchè il rapporto della resistenza risulta eguale a  $\lambda^{1/2}$ , anzichè a  $\lambda^2$ , come si richiederebbe, in condizioni di similitudine, per tutte le forze omologhe.

37. Il rapporto  $\lambda^{1/2}$  vale, nel caso di sistemi geometricamente e materialmente simili, per resistenze di qualsiasi specie, purchè direttamente proporzionali all'area investita e alla velocità, cioè per quelle resistenze, che, come vedremo in Dinamica, si dicono *viscose*.

Se invece si tratta di resistenze cosiddette *idrauliche*, cioè direttamente proporzionali, oltrechè all'area investita, *al quadrato* della velocità, il rapporto corrispondente è dato, sempre nell'ipotesi della similitudine geometrica e materiale, da

$$\lambda^2 (\lambda^{1/2})^2 = \lambda^3,$$

cosicchè in questo caso le resistenze soddisfano alla condizione richiesta dalla similitudine.

Al tipo idraulico or ora definito si può assegnare, almeno in prima approssimazione, la resistenza che incontra una nave, per es. tratta a rimorchio. Se allora consideriamo una nave  $\Omega$  e un suo modello  $\omega$ , geometricamente e materialmente simile, le resistenze  $R$  ed  $r$  che  $\Omega$  ed  $\omega$  incontrano, in condizioni di moto omologhe nella similitudine, sono legate, per quanto si è dianzi notato, dalla relazione

$$R = \lambda^3 r ;$$

e se, per precisare le condizioni di corrispondenza nella similitudine, ricorriamo alla velocità, che è il carattere cinematico più facilmente valutabile, abbiamo che la relazione testè determinata per le resistenze sussisterà per velocità che stiano fra loro nel rapporto  $\lambda^{3/2}$ , cioè per velocità legate dalla equazione

$$V = \lambda^{3/2} v .$$

Si perviene così alla *Regola del FROUDE*: *Se di una nave si è costruito un modello geometricamente e materialmente simile, tale che il rapporto fra le lunghezze omologhe della nave e del suo modello sia  $\lambda$ , e se per una velocità  $v$  il modello incontra una resistenza  $r$ , la nave per una velocità  $v\lambda^{3/2}$  incontrerà una resistenza  $r\lambda^3$ .*

Analoga, fra le potenze  $\Pi$  e  $\pi$  necessarie per la propulsione o per il rimorchio della nave e del modello, nelle condizioni di velocità or ora indicate, si trova, in base alla (27) e tenendo conto delle dimensioni  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = -3$ ,  $n_3 = 1$  della potenza (n. 23), la relazione

$$\Pi = \lambda^{3/2} \pi .$$

38. Sin qui abbiamo ragionato nella ipotesi che fra le forze applicate figurassero i pesi; ma vi son dei casi, in cui l'azione della gravità si può riguardare o per se stessa trascurabile o, quanto meno, neutralizzata da altre forze, esplicitansi *esclusivamente* in questo effetto.

Torniamo, per es., al caso di una nave. È senz'altro manifesto che sul comportamento della nave in navigazione influisce il peso; ma appare del tutto ragionevole l'ammettere in prima approssimazione, che in acque tranquille codesto peso si espliciti *esclusivamente* nel regolare le condizioni di immersione, e che, una volta stabilitesi codeste condizioni, l'azione del peso sia sotto ogni rapporto compensata dall'azione antagonista della spinta dell'acqua, talchè si possa senz'altro prescindere da entrambe. E notiamo, incidentalmente, che altrettanto potrà dirsi pei sottomarini e, nell'aria, per gli aerostati e i dirigibili.

Ciò posto, consideriamo, come al n. prec., una nave  $\Omega$  e un suo modello  $\omega$ , geometricamente e materialmente simile, e sia ancora  $\lambda$  il rapporto di similitudine geometrica. Anche qui la similitudine materiale di  $\Omega$  ed  $\omega$  impone per le masse il rapporto  $\mu = \lambda^3$ ; ma poichè, nel senso testè chiarito, possiamo trascurare i pesi, non resta a priori determinato il rapporto delle forze omologhe. In altre parole si presenta qui una similitudine meccanica dipendente non più da *un solo* rapporto arbitrario (quello delle lunghezze) come nei nn. prec., ma da *due* rapporti arbitrari: il rapporto geometrico  $\lambda$  e un altro rapporto di tipo meccanico. Per determinare la similitudine possiamo prefissare oltre  $\lambda$ , il rapporto  $\varphi$  delle forze o quello  $\tau$  dei tempi o, infine, il rapporto di una qualsiasi altra specie di grandezze meccaniche (non dipendenti esclusivamente da lunghezze e masse). Noi qui supporremo prefissato il rapporto  $v$  delle velocità, in quanto queste hanno per se stesse, nel caso di cui ci occupiamo, un significato particolarmente espressivo in ordine agli scopi pratici del problema. Il rapporto  $v$  delle velocità è legato ai rapporti  $\lambda$  e  $\tau$  delle lunghezze e dei tempi dalla relazione

$$(28) \quad v = \lambda \tau^{-1} \quad \text{ossia} \quad \tau = \lambda v^{-1};$$

cosicchè per grandezze meccaniche, le quali abbiano rispetto a lunghezze, tempi e masse le dimensioni  $n_1, n_2, n_3$ , il rapporto

$$\lambda^{n_1} \tau^{n_2} \mu^{n_3}$$

assume nel nostro caso, ove, in base alla  $\mu = \lambda^3$  rispecchiante la similitudine materiale e alla (28), si esprima mediante  $\lambda$  e  $v$ , il valore

$$\lambda^{n_1} (\lambda v^{-1})^{n_2} \lambda^{3n_3} = \lambda^{n_1+n_2+3n_3} v^{-n_2}.$$

Se perciò indichiamo con  $Q$  e  $q$  le misure (in uno stesso sistema di unità) di una grandezza di dimensioni  $n_1, n_2, n_3$ , valutata rispetto alla nave e al modello, avremo

$$Q = \lambda^{n_1+n_2+3n_3} v^{-n_2} q.$$

Così ad es., fra le potenze  $\Pi$  e  $\pi$ , necessarie ad imprimere alla nave e al modello velocità che stiano fra loro nel rapporto  $v$ , sussisterà la relazione ( $n_1 = 2, n_2 = -3, n_3 = 1$ )

$$(29) \quad \Pi = \lambda^3 v^3 \pi.$$

39. Per indicare una interessante applicazione della formula (29), mostriamo come essa renda ragione della tendenza, che domina le moderne costruzioni navali, ad aumentare le dimensioni

dei piroscafi da carico, anche indipendentemente da ogni perfezionamento di tipo.

Per non mutar notazioni, indichiamo con  $\Omega$  ed  $\omega$  due piroscafi, simili fra loro geometricamente e materialmente in tutti i loro particolari e quindi anche nelle macchine, nelle eliche, ecc.; proponiamoci anzitutto di vedere in quale rapporto stiano fra loro le velocità dei due piroscafi, quando le rispettive macchine funzionano nello stesso modo.

Naturalmente, perchè la questione abbia un senso, bisogna anzitutto fissar bene che cosa debba intendersi per questa eguaglianza di funzionamento. Attesa la ammessa identità di tipo fra le macchine di  $\Omega$  e di  $\omega$ , appare ragionevole il dire che esse funzionano nello stesso modo quando consumano, a parità di tempo, quantità di carbone proporzionali alle capacità dei rispettivi forni, cioè aventi il rapporto  $\lambda$ .

D'altra parte osserviamo che, in periodo di regime, il lavoro fornito da una macchina termica in un dato tempo sta alla quantità di carbone consumato in un rapporto costante e caratteristico per il tipo della macchina, cosicchè nel nostro caso codesto rapporto sarà lo stesso per le macchine di  $\Omega$  e di  $\omega$ . Ne consegue che il rapporto delle quantità di carbone consumato sui due piroscafi nell'unità di tempo non può differire dal rapporto delle potenze delle rispettive macchine, cioè, per la (29), da  $\lambda^2 v^2$ . Tenendo conto della duplice valutazione così ottenuta per il rapporto fra le quantità di carbone consumate sulle due navi, in condizioni di egual funzionamento, concludiamo che dovrà essere

$$\lambda^2 = \lambda^2 v^2 ;$$

onde risulta

$$v = \sqrt[3]{\lambda}$$

e la cercata relazione tra le velocità  $V$  e  $v$  dei due piroscafi sarà

$$V = \sqrt[3]{\lambda} \cdot v ;$$

*cioè, in condizioni di egual funzionamento delle macchine, la velocità cresce come la radice cubica del rapporto di similitudine geometrica.*

Se si nota che in  $\omega$  e in  $\Omega$ , i volumi e quindi i tonnellaggi stanno, come le spese di combustibile, nel rapporto  $\lambda^3$ , si vede che, a parità di tempo, il prezzo di trasporto per tonnellata è lo stesso nei due casi. Ma a parità di percorso si ha evidentemente vantaggio per la nave più veloce, perchè i prezzi di trasporto (ragguagliati, per es., alla tonnellata-chilometro) riescono inversamente

proporzionali alle velocità. Il costo della tonnellata-chilometro, a bordo di  $\Omega$ , è dunque

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}$$

dell'analogo costo a bordo di  $\omega$ .

Così, per es., se  $\omega$  è una nave lunga 100 m., che fila normalmente a 20 nodi all'ora (1 nodo = 1 miglio marino = 1652 metri), costruendo una nave simile di 130 metri di lunghezza si raggiungerebbe una velocità di

$$20 \sqrt[3]{\frac{130}{100}} = 20 \times 1,091 = 21,82,$$

cioè quasi 22 nodi, ed il costo della tonnellata-chilometro si ridurrebbe a  $1/1,091 = 0,916$  di quello relativo ad  $\omega$ : vi sarebbe dunque un risparmio superiore all'8%, oltre al vantaggio di far più presto.

40. Se in secondo luogo, ci accontentiamo di mantenere la stessa velocità per  $\omega$  e  $\Omega$  ( $v = 1$ ), la (29) mostra che il rapporto delle potenze, che debbono essere fornite dai due macchinari, è  $\lambda^3$ .

Supponendo qui ancora, a titolo almeno di apprezzamento grossolanamente plausibile, che il rapporto delle potenze sia quello del combustibile, consumato in uno stesso tempo, cioè quello delle corrispondenti spese  $S$  ed  $s$ , potremo porre

$$\frac{S}{s} = \lambda^3.$$

D'altra parte il rapporto dei tonnelli  $K/k$  è sempre quello dei volumi, cioè  $\lambda^3$ . Ne consegue

$$\frac{S}{K} : \frac{s}{k} = \frac{1}{\lambda}$$

$S$  ed  $s$  rappresentano spese a parità di tempo; riferendole in particolare al tempo (identico, attesa la eguale velocità) che  $\Omega$  ed  $\omega$  impiegano a percorrere un chilometro, i due rapporti  $S/K$ ,  $s/k$  non sono altro che i costi delle tonnellate-chilometro. Quello relativo ad  $\Omega$  è dunque appena  $1/\lambda$  dell'analogo costo a bordo di  $\omega$ .

Nell'esempio precedente  $1/\lambda = 100/130 = 0,769$ : il risparmio ascende perciò al 23%, senza guadagno nè perdita nella velocità.

Queste riflessioni, pur non avendo un esatto valore quantitativo, sono tuttavia espressive come norme di tendenza ed illustrano sufficientemente i vantaggi dei colossi navali.

## CAPITOLO IX.

### L'ATTRITO E LA STATICA DEL PUNTO

#### § 1. - Equilibrio di un punto appoggiato su di una superficie.

1. Si è visto al n. 11 del Cap. VII che, affinchè un punto materiale, durante un certo intervallo di tempo, si mantenga in equilibrio, è necessario e sufficiente che, ad ogni istante, si annulli la risultante di tutte le forze agenti sul punto, vale a dire di tutte le *forze attive* se si tratta di un punto libero, delle *forze attive* e delle *reazioni* se si tratta di un punto vincolato.

In quest'ultimo caso, non si potrà desumere dalla enunciata condizione di equilibrio alcuna effettiva indicazione sul comportamento, in condizioni statiche, della risultante delle forze attive, se non quando si riesca a riconoscere direttamente in qual modo si comportino le reazioni; al che manifestamente non si potrà pervenire se non indagando sperimentalmente, caso per caso, gli effetti dei vincoli.

Ora i tipi più semplici di vincoli possibili per un punto sono i tre seguenti:

a) Punto vincolato a stare su di una curva (un grado di libertà).

b) Punto vincolato a stare su di una superficie (due gradi di libertà).

c) Punto vincolato a non attraversare una data superficie (vincolo unilaterale: tre gradi di libertà).

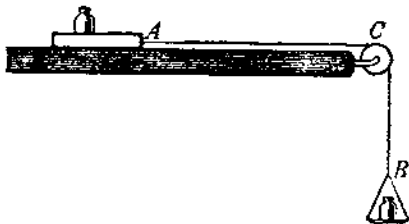
Ci proponiamo di renderci conto del comportamento della reazione in questi vari casi, cominciando dal terzo.

2. PUNTO SU PIANO ORIZZONTALE. - ESPERIENZE DEL COULOMB. — Per metterci nelle condizioni più semplici possibili, consideriamo anzitutto un grave, assimilabile ad un punto materiale  $P$ , appoggiato su di un suolo rigido, piano ed orizzontale. Se su  $P$  non agisce, oltre il peso, nessun'altra forza direttamente applicata, constatiamo sperimentalmente che  $P$  rimane in quiete, vale a dire

è in equilibrio. Poichè  $P$  è in questo caso soggetto esclusivamente all'azione del peso e della reazione di sostentamento del suolo, concludiamo, in base alla condizione di equilibrio, che la reazione è direttamente opposta al peso, cioè si esplica normalmente al piano di appoggio.

Ma non è sempre così. Se si cerca di spostare il grave  $P$  sul piano, sottoponendolo ad una trazione orizzontale in una data direzione, vediamo che per sforzi di trazione abbastanza piccoli il punto continua a mantenersi in quiete; soltanto quando la trazione orizzontale abbia superato una certa intensità,  $P$  comincia a muoversi. Dicesi *trazione (orizzontale) limite* la massima intensità  $\tau_0$  di una forza orizzontale che, applicata in  $P$ , lo lascia in quiete; mentre ogni forza di intensità maggiore di  $\tau_0$ , anche di pochissimo, lo mette in moto.

L'esperienza quotidiana pone in evidenza come la trazione limite dipenda dal peso del grave  $P$  e dalla natura materiale del grave stesso e del suolo di appoggio. Per riconoscere le leggi di codesta dipendenza il COULOMB <sup>(1)</sup> ha istituito la seguente esperienza. Una scatola senza coperchio, avente la forma di un parallelepipedo, è collocata sopra una tavola orizzontale e può strisciare su essa. Ad un punto  $A$  della scatola è attaccata una cordicella recante all'altra estremità  $B$  un piattino con pesi. La corda si fa passare per la gola di una carrucola  $C$  in modo che il tratto  $AC$  sia orizzontale. Per quanto abbiamo già avuto occasione di rilevare (cfr. Cap. VII, n. 13) si potrà in prima approssimazione ritenere che la corda eserciti in  $A$  una trazione orizzontale eguale al peso (anzi all'importo complessivo dei pesi, compreso quello del piatto) di cui è caricata in  $B$ .



Con questo dispositivo si può variare a piacere il peso  $p$  del

(<sup>1</sup>) CHARLES AUGUSTIN COULOMB, n. ad Angoulême nel 1736, m. a Parigi nel 1806. Dopo aver esercitata per alcuni anni la professione d'ingegnere, entrò nel corpo del Genio; fu membro dell'Istituto di Francia, e, negli ultimi anni della sua vita, ispettore generale dell'Università di Parigi. Gli si devono importanti ricerche sull'attrito e sulle altre forme di resistenze passive, nonché sull'elettromagnetismo. A quest'ultimo proposito basterà rammentare che la celebre legge delle azioni elementari elettrostatiche e magnetostatiche porta appunto il suo nome.

corpo, su cui si sperimenta (la scatola con l'aggiunta dei pesi), e si può pur regolare la trazione  $\tau$  della corda, variando i pesi del piattino.

Così il COULOMB, sperimentando su scatole e piani di appoggio di materiali diversi e determinando le trazioni limiti corrispondenti a pesi differenti, è stato condotto alle conclusioni seguenti: *La trazione limite per un corpo pesante, appoggiato su di un suolo piano orizzontale: 1°) è, a parità di altre condizioni, proporzionale al peso del grave; 2°) dipende dalla natura fisica delle superficie a contatto del grave e del suolo, non dalla loro forma e dalla loro estensione.*

Se dunque è  $p$  il peso del grave,  $\tau_0$  la corrispondente trazione limite, il rapporto  $\tau_0/p$  non dipende dal peso considerato o dalla forma od estensione della superficie di appoggio, ma solo dalla natura fisica del grave e del suolo e in particolare dalla loro maggiore o minore levigatezza e durezza. Codesto rapporto  $\tau_0/p$  si chiama *coefficiente di attrito* (relativo alle sostanze materiali del grave e del suolo) e si suole indicare con  $f$  (iniziale delle parole « frottement » e « friction » con cui si denomina l'« attrito » in francese e in inglese); talchè fra peso, trazione limite e coefficiente di attrito sussiste la relazione

$$\tau_0 = fp.$$

Il coefficiente di attrito è sempre minore di 1; ma può elevarsi fino a circa 0,75 tra pietre rugose calcari; varia da 0,15 a 0,20 pel legno e pei metalli più comuni in quelle condizioni di levigatezza che generalmente si raggiungono nella costruzione delle macchine e degli apparecchi industriali; e può anche ridursi a 0,07, se si ha cura di evitare l'immediato contatto a secco delle superficie solide coll'impiego di lubrificanti.

Notiamo infine che, quanto alle dimensioni, il coefficiente di attrito, come rapporto di due forze, è un numero puro.

3. PUNTO APPOGGIATO AD UNA SUPERFICIE QUALSIASI. — Dal n. prec. risulta che per l'equilibrio di un punto materiale  $P$  di peso  $p$ , appoggiato su di un suolo orizzontale e sollecitato da una trazione orizzontale di intensità  $\tau$ , occorre e basta che  $\tau$  non superi la trazione limite, ossia che, indicando con  $f$  il coefficiente di attrito fra le sostanze costitutive del punto e del suolo, si abbia

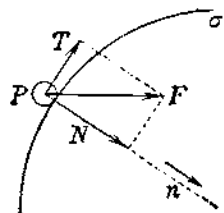
$$\tau < fp.$$

Questa conclusione ci mette in grado di discutere più in generale il problema dell'equilibrio di un punto  $P$ , appoggiato su di una superficie qualsiasi  $\sigma$ , che esso non possa attraversare.



Immaginando che, ad un dato istante,  $P$  sia a contatto con la  $\sigma$  sotto la sollecitazione di certe forze attive, di cui sia  $F$  la risultante (inclusovi il peso, se  $P$  è un punto materiale pesante), indichiamo con  $n$  la normale interna in  $P$  alla superficie, cioè la normale orientata nel verso, in cui al punto è vietato il moto dal vincolo. Se la risultante  $F$  delle forze attive è diretta verso l'esterno, cioè, più precisamente, forma con la normale interna  $n$  un angolo ottuso, talechè sia  $F_n < 0$ , il vincolo, per la sua stessa natura unilaterale, non è atto a limitare in alcun modo la libertà del punto, il quale perciò obbedisce alla sollecitazione di  $F$ , come se fosse libero. Segue di qui come condizione necessaria per l'equilibrio di  $P$  la relazione

$$(1) \quad F_n > 0.$$



Supposta verificata questa condizione, consideriamo, accanto alla componente  $F_n$  della  $F$  secondo la normale interna  $n$ , il suo componente  $F'$  secondo il piano tangente a  $\sigma$  (ortogonale ad  $n$ ) e, uniformandoci all'uso corrente, denotiamo con  $N$  e  $T$  rispettivamente i valori assoluti di  $F_n$  e di  $F'$ , rilevando che sotto la condizione (1), la  $N$  coincide (anche in segno) con la  $F_n$ . Il punto  $P$  si può allora considerare soggetto a due forze attive: una forza di intensità  $N$  secondo la normale interna, e una forza di intensità  $T$ , parallela al piano tangente a  $\sigma$  in  $P$ . D'altra parte, qualunque sia la risultante  $F$  delle forze attive sollecitanti il punto, la superficie di appoggio  $\sigma$  non è atta a contrastare la libertà di movimento di  $P$  se non con la sua arèola immediatamente contigua ad esso, la quale si può identificare con l'elemento di piano tangente a  $\sigma$  nella posizione occupata da  $P$ . Conseguenza di qui che le condizioni di equilibrio saranno quelle stesse che varrebbero se si realizzasse codesto piano tangente con la medesima sostanza materiale di cui è costituito il corpo limitato da  $\sigma$ . Insomma si è condotti a riconoscere che il punto  $P$  si trova in condizioni perfettamente analoghe a quelle, studiate pocanzi, di un punto di peso  $p$ , appoggiato su di un suolo orizzontale e soggetto ad una trazione  $\tau$  parallela al piano di appoggio: l'ufficio del peso  $p$  e della trazione  $\tau$  è qui assunto rispettivamente dalle due forze dianzi indicate di intensità  $N$  e  $T$ . Ora per quella stessa veduta di indipendenza degli effetti delle forze dalle modalità secondo cui la sollecitazione è realizzata, che già abbiamo applicato nel caso del punto libero, siamo condotti a ritenere che il comportamento del punto  $P$  sia quello stesso che si avrebbe se, essendo orizzontale

l'elemento piano di appoggio, il punto fosse soggetto esclusivamente ad un peso  $N$  e ad una trazione orizzontale di intensità  $T$ . Concludiamo di qui che, ove si indichi con  $f$  il coefficiente di attrito del punto  $P$  rispetto alla superficie  $\sigma$ , la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è data, beninteso sotto l'ipotesi (1), dalla relazione

$$(2) \quad T \leq fN.$$

In particolare l'equilibrio sussisterà anche per  $T = fN$ , nel qual caso si dice che si ha uno *stato di equilibrio limite*, in quanto basta anche un piccolissimo aumento della componente tangenziale della risultante attiva per determinare la rottura dell'equilibrio.

4. ANGOLO E CONO DI ATTRITO. — Alle condizioni (1), (2) si può dare una forma espressiva e comoda per le applicazioni. Considerato l'angolo che la risultante attiva  $F$  forma colla normale interna  $n$ , abbiamo (in valore e segno, poichè si tratta di un angolo non ottuso)

$$\operatorname{tg} \widehat{Fn} = \frac{T}{N},$$

sicchè la (2) si può scrivere

$$\operatorname{tg} \widehat{Fn} < f,$$

ossia, indicando con  $\varphi$  l'angolo (minore di  $\pi/4$ , perchè  $f < 1$ ) la cui tangente è  $f$ ,

$$\widehat{Fn} < \varphi.$$

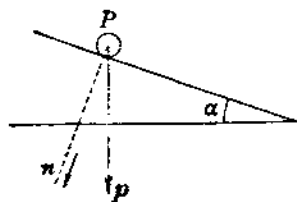
Chiamando *angolo di attrito* codesto angolo  $\varphi$  e *falda interna* del cono di attrito il luogo delle semirette uscenti da  $P$  che formano l'angolo  $\varphi$  colla normale interna, concludiamo che *per l'equilibrio di un punto materiale appoggiato ad una superficie è necessario e sufficiente che la forza attiva totale non sia esterna alla falda interna del cono di attrito*.

Si ha dunque che per la forza totale attiva la massima deviazione dalla normale interna, compatibile con l'equilibrio, è data dall'angolo di attrito; e questo massimo caratterizza gli stati di equilibrio limite.

Insomma le condizioni di equilibrio (1), (2) impongono delle limitazioni alla direzione e al verso della forza attiva risultante  $F$ , non alla sua intensità; ma è ovvio che ciò può incondizionatamente valere soltanto nella ipotesi puramente ideale che il vincolo possieda una solidità assoluta, così da resistere, senza infran-

gersi, al cimento di sollecitazioni normali di intensità arbitrariamente grande. Praticamente le (1), (2) risultano applicabili soltanto sino a quando la intensità  $N$  della sollecitazione normale non supera il limite di rottura del vincolo.

5. La nozione di angolo d'attrito interviene in modo particolarmente semplice nel caso dell'equilibrio di un punto pesante sopra un piano inclinato. Detta  $\alpha$  l'inclinazione del piano sull'orizzonte, si riconosce immediatamente che la condizione di equilibrio si riduce a questo: *l'inclinazione  $\alpha$  non dev'essere superiore all'angolo d'attrito  $\varphi$ .*



6. SUPERFICIE PRIVE DI ATTRITO. — Il coefficiente di attrito  $f$ , sempre minore di 1, è tanto più piccolo quanto meglio levigate sono le superficie a contatto; ed anzi si è notato (n. 2) che, ricorrendo all'uso di lubrificanti, si può ridurre  $f$  a pochi centesimi. L'ipotesi limite  $f = 0$ , pur non essendo realizzabile con alcun dispositivo sperimentale, merita tuttavia di essere considerata a parte, perchè dà luogo (nella Statica e più ancora nella Dinamica, come vedremo a suo tempo) a teorie generali notevolmente semplici e comprensive, le quali non sono troppo discoste da certi casi reali (che, a rigore, sarebbero talvolta molto complicati) e possono quindi, almeno in prima approssimazione, essere applicate a questi casi. Quando  $f = 0$ , si dice che l'appoggio o il contatto sono realizzati *senza attrito*, o anche che la superficie  $\sigma$  è *priva d'attrito*. Il cono d'attrito si rinserra, per così dire, attorno alla normale e la (2) si riduce allora a

$$(3) \quad T = 0.$$

Si esige dunque per l'equilibrio che la forza attiva  $F$  sia puramente normale; è poi necessario in virtù della (1) (ed è d'altra parte sufficiente) che questa sollecitazione normale sia rivolta verso l'interno del corpo che realizza l'appoggio o il contatto con  $P$ .

Così, ad es., per un punto pesante, appoggiato su di una superficie materiale priva di attrito, saranno posizioni di equilibrio tutte e solo quelle, in cui la normale interna è verticale e diretta verso il basso.

7. REAZIONE ED ATTRITO. — In base alle condizioni (1), (2) si può oramai caratterizzare il comportamento della reazione  $\mathbf{R}$ , che, in condizioni statiche, la superficie di appoggio  $\sigma$  esercita sul punto sollecitato dalla forza attiva totale  $\mathbf{F}$ . Sappiamo che, in condizioni di equilibrio, dev'essere (VII, n. 11)

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = 0 \quad \text{ossia} \quad \mathbf{R} = -\mathbf{F},$$

cosicchè debbono equilibrarsi separatamente i componenti normali e i componenti tangenziali di  $\mathbf{R}$  ed  $\mathbf{F}$ , e, in particolare, debbono coincidere le rispettive intensità.

Perciò, tenendo conto dei nn. prec. e chiamando *falda esterna* del cono di attrito la opposta al vertice della falda interna, possiamo senz'altro affermare che: *La reazione  $\mathbf{R}$ , che una superficie materiale  $\sigma$  esplica su di un punto materiale  $P$  in contatto con essa, dipende dalla sollecitazione totale attiva  $\mathbf{F}$  di  $P$ . In condizioni statiche, la  $\mathbf{R}$  è sempre rivolta verso l'esterno e non esterna alla falda esterna del cono di attrito. In altre parole, si esplica secondo la direzione normale a  $\sigma$  con una intensità  $N$ , eguale a quella della componente normale di  $\mathbf{F}$ , e secondo la giacitura tangenziale a  $\sigma$  con una intensità che non può superare  $fN$ , se  $f$  è il coefficiente di attrito fra il punto e la superficie.*

*Nel caso ideale di una superficie priva di attrito, la componente tangenziale della reazione è nulla o, in altre parole, la reazione si esplica tutta secondo la normale esterna.*

La componente tangenziale della reazione  $\mathbf{R}$ , in condizioni statiche, dicesi *attrito radente* o *statico* (nel caso limite in cui  $T = fN$ , anche di *primo distacco*) od anche semplicemente *attrito*, fintantochè non siavi luogo ad equivoco con l'*attrito volvente*, di cui parleremo più innanzi (XII, § 6).

8. SIMULTANEITÀ DI PIÙ VINCOLI UNILATERALI. — I principi stabiliti nei nn. prec. permettono di discutere le condizioni di equilibrio di un punto materiale  $P$ , il quale sia *simultaneamente* a contatto con due o più superficie materiali (si pensi, per es., ad una pallina, che riposi sul suolo e sia addossata ad una o due pareti). A ciascun punto di contatto corrisponde una reazione: in realtà si tratta di forze applicate a punti geometrici diversi, ma, poichè  $P$  si considera come un punto materiale, codesti vari punti di applicazione si possono riguardare come tutti coincidenti in uno solo.

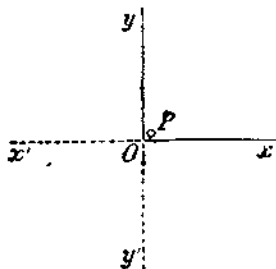
Per l'equilibrio sarà necessario e sufficiente che la somma geometrica di tutte le reazioni sia direttamente opposta alla forza attiva  $\mathbf{F}$ .

Basterà dunque indagare, caso per caso, se sia o no possibile che vettori, appartenenti alle falde esterne dei vari coni d'attrito, abbiano per somma  $-F$ . Ma qui si presenta come essenziale la seguente avvertenza: bisogna preventivamente esaminare, per ogni singola superficie  $\sigma$  in contatto con  $P$ , se la rispettiva componente  $F_n$  (secondo la normale a  $\sigma$ , volta all'interno) è positiva o negativa. Nel primo caso si può effettivamente avere una reazione (appartenente, beninteso, alla falda esterna del cono d'attrito); nel secondo caso la  $\sigma$  non è atta ad opporre alcuna resistenza, e le cose vanno come se essa non esistesse.

In conclusione, per l'equilibrio si richiede che sia  $-F$  la somma di tutte le reazioni, offerte da quelle superficie, che sono effettivamente atte ad offrirne (il che accade ogni qual volta la forza  $F$  forma un angolo acuto con la normale interna).

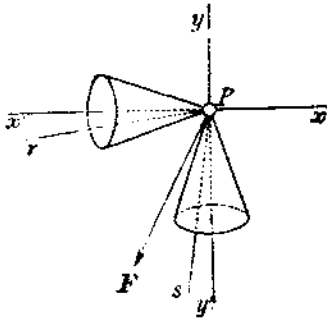
9. Un esempio semplice si ha immaginando un punto materiale  $P$  vincolato a non oltrepassare due piani ortogonali, quali sarebbero il pavimento e una parete verticale di una stanza, che in figura rappresenteremo mediante le loro sezioni  $Ox$ ,  $Oy$  con un piano di profilo.

Il punto  $P$  potrà assumere ogni possibile posizione entro il diedro di sezione normale  $\widehat{xOy}$ , o sulle facce di esso, ma non attraversare le facce stesse. È allora manifesto come l'azione simultanea dei due vincoli possa esplicarsi solo quando il punto  $P$  sia a contatto di entrambe le pareti; giacchè in tutti gli altri casi o non agirà nessuno dei due vincoli (se  $P$  non è a contatto nè dell'una, nè dell'altra parete) o ne agirà uno solo (se  $P$  appoggia su una sola parete). Supposto dunque  $P$  appoggiato a tutte e due le pareti, per es. in  $O$ , sottoponiamolo ad una forza  $F$  (totale e perciò includente il peso, se questo è da tenere in considerazione) che supporremo agente nel piano  $xOy$ . Se la  $F$  risulta interna all'angolo  $\widehat{xOy}$ , nessuna delle due pareti si oppone al moto di  $P$ , il quale obbedirà, come punto libero, alle sollecitazioni, onde l'equilibrio sarà impossibile (se non è  $F = 0$ ). Se, indicati con  $Ox'$ ,  $Oy'$  i prolungamenti di  $Ox$  e  $Oy$  rispettivamente, la  $F$  è diretta nell'angolo  $\widehat{xOy'}$  (o  $\widehat{yOx'}$ ), entra in azione solo un vincolo, quello del piano  $Ox$  (o, rispettivamente,  $Oy$ ) e ricadiamo nel caso già esaurito nei nn. prec. Se infine la  $F$  è diretta nell'angolo  $\widehat{x'Oy'}$ , agiscono entrambi i vincoli e l'equilibrio è in ogni caso assicurato, come risulta



decomponendo  $F$  nei suoi componenti  $F_x$ ,  $F_y$ , e notando che, qualunque sia il coefficiente di attrito delle due singole pareti, codeste due forze  $F_x$ ,  $F_y$ , come normali alle due pareti stesse, sono equilibrate ciascuna dalla corrispondente reazione di appoggio.

Notiamo che, se le due pareti sono *prive di attrito*, ciascuna di esse è atta ad esplicare una reazione di appoggio soltanto in direzione normale (n. prec.), talchè le reazioni esercitate sul punto nel caso testè considerato risultano *determinate univocamente* come direttamente opposte ai componenti  $F_x$ ,  $F_y$  della forza attiva.



Ma se le due pareti hanno un coefficiente di attrito (anche diverso l'una dall'altra) e se fissiamo per  $O$ , nel piano  $Ox'y'$ , due direzioni quali si vogliono  $r$  ed  $s$  non esterne rispettivamente ai coni di attrito delle due pareti in  $O$ , possiamo considerare la  $F$  decomposta nei suoi due componenti  $F_x$  e  $F_y$ , e le due pareti sono atte ad esplicare due reazioni direttamente opposte a codesti due componenti.

Insomma, *data l'arbitrarietà di scelta delle direzioni  $r$  ed  $s$  nei due coni di attrito*, nulla possiamo dire circa l'intensità e la direzione delle reazioni esplicate dalle due singole pareti, ma solo affermare che la loro azione simultanea assicura l'equilibrio.

10. Codesta indeterminatezza delle due reazioni appare paradossale in confronto con quella veduta, insita nel nostro modo di rappresentarci i fatti naturali, per cui ammettiamo che, *in ogni fenomeno ben determinato, ogni singola circostanza debba pur risultare univocamente determinata.*

Della insufficienza delle conclusioni, cui or ora pervenimmo nella discussione del problema particolare considerato, possiamo renderci ragione riflettendo che, nel costruire la nostra rappresentazione teorica dei fenomeni meccanici, abbiamo proceduto per successive idealizzazioni dei dati sperimentali, prescindendo man mano da quelle circostanze di fatto, che apparivano trascurabili in una prima approssimazione.

Così, nel caso concreto presente, l'*indeterminazione statica* si toglierebbe subito, tenendo conto che in realtà il punto  $P$  non è un punto geometrico e gli appoggi sul suolo e sulla parete hanno luogo in punti prossimi all'origine, ma distinti fra loro.

## § 2. - Indipendenza delle condizioni di equilibrio dal modo in cui sono realizzati i vincoli.

11. Nel § prec. abbiamo sempre supposto che il vincolo unilaterale (o ciascuno dei vincoli unilaterali) a cui si immaginava soggetto un punto materiale  $P$ , fosse determinato dall'appoggio alla superficie di un corpo fisicamente dato; ma in pratica un vincolo unilaterale di codesto tipo può essere realizzato anche in altri modi: p. es. un punto  $P$ , collegato ad un punto fisso  $O$  mediante un filo flessibile e inestendibile di data lunghezza  $l$ , può muoversi soltanto all'interno o sulla superficie della sfera di centro  $O$  e di raggio  $l$  (per quanto questa non abbia una esistenza materiale).

Ora è bensì vero che le condizioni di equilibrio del punto materiale  $P$  sono state da noi determinate sotto la esplicita condizione che il vincolo unilaterale fosse realizzato nel primo modo; ma si può ritenere che le condizioni di equilibrio così trovate abbiano una portata molto più comprensiva. Infatti, quando studieremo in generale la Statica di un sistema materiale qualsivoglia, vedremo (cfr. Cap. XIV, § 1) che, almeno nell'ipotesi ideale in cui sia lecito prescindere dagli attriti e da ogni forma di resistenza passiva, l'azione meccanica dei vincoli è del tutto indipendente dal modo in cui essi sono realizzati. Questa conseguenza di un principio fondamentale della Meccanica razionale che sarà stabilito più innanzi (*principio dei lavori virtuali*) va in verità accolta soltanto come una legge limite; ma serve utilmente, almeno come norma direttiva, anche nei casi reali in cui si deve tener conto delle resistenze passive, purchè si abbia cura di controllarla caso per caso con l'indagine diretta delle condizioni fisiche del problema e, ove se ne presenti il bisogno, di modificarla in qualche dettaglio.

In questo senso e con le accennate riserve, potremo ritenere che per un punto materiale vincolato, *in un modo qualsiasi*, a non oltrepassare una superficie  $\sigma$  le condizioni dell'equilibrio in una posizione di  $\sigma$  siano sempre date dalle

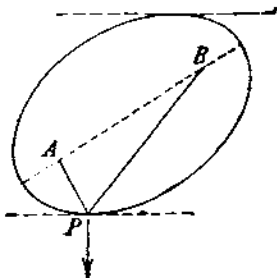
$$(1) \quad (2) \quad F_* > 0, \quad T < fN.$$

In parole, per l'equilibrio di  $P$  occorre e basta che la forza attiva totale  $F$  non sia esterna ad una certa falda di cono, avente per asse la normale interna a  $\sigma$ , cioè la normale orientata nel verso vietato a  $P$  dal vincolo.

Nel caso limite dell'assenza d'attrito (fisicamente irraggiungibile, ma rispondente spesso ad un'utile ipotesi di approssimazione) occorre e basta che la  $F$  agisca secondo codesta normale interna a  $\sigma$ .

12. Applichiamo il principio di indipendenza del n. prec. ad un problema particolare.

Si consideri un anello pesante  $P$ , scorrevole lungo un filo, flessibile e inestendibile, fissato agli estremi in due punti  $A$  e  $B$ ; e si supponga che la lunghezza  $l$  del filo sia  $> AB$ . Ci proponiamo di determinare le posizioni di equilibrio dell'anello.



In un piano qualsiasi per  $A$ ,  $B$  il luogo delle posizioni possibili per l'anello  $P$  a filo teso è, in quanto dev'essere in ciascuna di esse  $AP + BP = l$ , l'ellisse di fuochi  $A$  e  $B$  e di asse maggiore  $l$ ; mentre le posizioni possibili per  $P$  su codesto stesso piano a filo lento sono tutte e sole quelle interne all'ellisse ora indicata. Perciò, immaginando di far rotare

intorno ad  $AB$  il piano considerato, si può assimilare l'anello  $P$  ad un punto vincolato a muoversi all'interno o sulla superficie dell'ellissoide di rotazione allungato  $E$  di fuochi  $A$ ,  $B$  e di asse maggiore  $l$ .

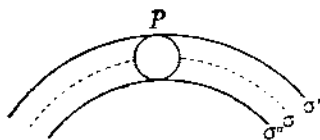
Ora manifestamente entro  $E$  non possono aversi per l'anello  $P$  posizioni di equilibrio, giacchè quando il filo è lento, l'anello si può assimilare ad un punto pesante e libero. Perciò le posizioni di equilibrio vanno cercate sulla superficie di  $E$ .

Se ammettiamo che il filo sia flessibilissimo e che l'anello possa scorrere lungo di esso senza incontrare una resistenza sensibile, si è molto vicini al caso di un vincolo privo di attrito. Mettendoci addirittura nell'ipotesi limite, siamo condotti a cercare quei punti di  $E$ , in cui il peso risulta diretto normalmente ad  $E$  nel verso non consentito dal vincolo, o, in altre parole, i punti di  $E$  in cui la normale orientata verso l'esterno è diretta verticalmente verso il basso. Poichè su di una superficie di rotazione la normale in ogni suo punto giace nel piano meridiano passante per esso, le eventuali posizioni di equilibrio di  $P$  si troveranno sull'ellisse in cui  $E$  vien segato dal piano verticale passante per  $AB$ . Ora su questa ellisse esistono due punti, in cui la normale risulta verticale, cioè i punti di contatto delle due tangenti orizzontali (punto più alto e punto più basso dell'ellisse); e di questi due punti soltanto l'inferiore è posizione di equilibrio dell'anello, giacchè soltanto in esso la normale orientata verso l'esterno di  $E$  risulta diretta all'ingiù.



### § 3. — Punto vincolato a muoversi su di una superficie o su di una curva.

13. Consideriamo un punto materiale  $P$  costretto a muoversi su di una data superficie  $\sigma$  (vincolo bilaterale). Il modello fisico tipico di una tale specie di vincolo si ha per la massa oscillante di un pendolo ad asta rigida (di peso trascurabile) e a sospensione sferica; ma lo stesso legame si può immaginare realizzato anche in altri modi, p. es. mediante due superficie materiali  $\sigma'$ ,  $\sigma''$ , vicinissime a  $\sigma$  dall'una e dall'altra parte di essa, e tali da rinserrare fra loro, con piccolissimo giuoco, il punto  $P$ ; con ciò si realizza appunto il vincolo geometrico che il punto non possa mai abbandonare la superficie  $\sigma$ .



In ogni caso si perviene agevolmente a determinare le condizioni di equilibrio, prendendo come norma direttiva il principio di indipendenza del n. 11. Così il nostro vincolo bilaterale si potrà considerare come realizzato dall'azione simultanea dei due vincoli unilaterali, determinati dalle due superficie materiali di appoggio  $\sigma'$  e  $\sigma''$ , vietanti ciascuno a  $P$  la libertà di abbandonare  $\sigma$  da una delle due bande. Di codesti due vincoli unilaterali entra in azione l'uno o l'altro, secondo che la forza attiva (totale)  $F$  sollecitante  $P$  è diretta da una parte o dall'altra, rispetto al piano tangente a  $\sigma$  nella posizione occupata da  $P$ . Considerando allora, anche in questo caso, il coefficiente di attrito (che riterremo senz'altro eguale su  $\sigma'$  e su  $\sigma''$ ) e chiamando *cono di attrito* l'insieme delle due falde di cono relative ai due vincoli unilaterali costituenti il vincolo bilaterale, potremo senz'altro ritenere che: *Condizione necessaria e sufficiente, affinché un punto materiale, vincolato a muoversi su una superficie, resti in equilibrio sotto la sollecitazione di una forza, è che questa forza non sia esterna al cono di attrito.*

In particolare, se la superficie è priva di attrito, sarà necessario e sufficiente che la forza sia diretta secondo la normale alla superficie (nell'uno o nell'altro senso indifferentemente).

In ogni caso, la reazione  $R$ , in condizioni statiche, risulta univocamente determinata, come direttamente opposta alle forza sollecitante.

14. Proponiamoci da ultimo di determinare le condizioni di equilibrio di un punto vincolato a restare su di una data curva  $c$ .

A tal fine, approfittiamo ancora una volta del postulato di indipendenza del n. 11 e fissiamo la nostra attenzione sul caso di una

pallina scorrevole entro un tubo. Con questa realizzazione del vincolo, notiamo da un lato che, qualunque sia la sollecitazione attiva  $F$ , la pallina non può trovare appoggio se non su di *un solo* elemento superficiale (o faccetta) della parete del tubo, come se fra pallina e tubo vi fosse un piccolissimo giuoco; e d'altra parte *ogni* faccetta della parete del tubo, in condizioni opportune di sollecitazione, è atta ad offrire appoggio alla pallina. Perciò, da questo punto di vista, le cose vanno come se il punto potesse essere ritenuto da tutte le superficie  $\sigma$  passanti per  $c$ , intervenendo l'una o l'altra secondo la sollecitazione.

Ciò premesso, proiettiamo la forza attiva  $F$  sulla tangente a  $c$  e sul piano normale e diciamo  $T$  ed  $N$  i valori assoluti dei due componenti così ottenuti,  $n$  la linea d'azione del componente normale.

Tra le superficie passanti per  $c$ , fissiamone una, avente  $n$  per normale, e osserviamo che, se sono soddisfatte le condizioni di equilibrio per  $P$ , in quanto sia costretto a restare sopra tale superficie  $\sigma$ , lo saranno a fortiori per il caso reale, in cui  $P$  è ulteriormente soggetto ad altri vincoli.

Ne consegue, essendo  $f$  un certo coefficiente, il quale può a priori dipendere dalla speciale superficie  $\sigma$  considerata, che

$$T < fN$$

è condizione sufficiente per l'equilibrio di  $P$ .

Il significato geometrico è ovvio. Essendo, al solito,  $\varphi$  l'angolo d'attrito ( $\operatorname{tg} \varphi = f$ ), la condizione  $T < fN$  esprime che la linea d'azione di  $F$  forma colla tangente a  $c$  un angolo non inferiore a  $\pi/2 - \varphi$ ; cioè la forza deve essere *esterna* o *non interna* al cono  $\Gamma$ , che ha per asse la tangente e per semiapertura il complemento dell'angolo d'attrito (cono delle rette per  $P$  che col piano normale della curva formano l'angolo  $\varphi$ ).

15. Invertiamo il precedente risultato, limitandoci al caso, in cui  $f$  sia o possa ritenersi lo stesso per tutte le ipotetiche superficie passanti per la curva  $c$ .

Si tratta di dimostrare che, se il punto  $P$ , sotto una data forza attiva  $F$ , è in equilibrio sulla curva, si ha

$$T < fN,$$

o, in altre parole, la  $F$  è esterna o non interna al cono  $\Gamma$ .

Infatti, riferendoci ancora all'immagine della pallina scorrevole entro un tubo, l'equilibrio non può sussistere se non in quanto il

punto sia ritenuto da una determinata faccetta della parete del tubo.

Ora, se fosse  $T > fN$ , cioè la  $F$  fosse interna al cono  $\Gamma$ , essa formerebbe colla tangente un angolo più piccolo di  $\pi/2 - \varphi$ , e perciò si scosterebbe per più di  $\varphi$  dal piano normale. In ogni caso nessuna delle superficie passanti per  $c$  sarebbe atta ad impedire il moto di  $P$ , perchè tutte le normali a tali superficie formerebbero con  $F$  un angolo superiore all'angolo d'attrito  $\varphi$ .

Riassumendo, si ha la regola: *Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un punto materiale  $P$  costretto a restare sopra una curva  $c$  è che il valore assoluto della componente tangenziale  $T$  della forza attiva non superi una certa frazione  $f$  del valore assoluto  $N$  della componente normale, o, più concisamente, che la forza attiva non sia interna ad un certo cono rotondo che ha la tangente per asse.*

Il caso di un vincolo privo di attrito implica  $T = 0$ , cioè una sollecitazione puramente normale alla curva.

## CAPITOLO X.

### GEOMETRIA DELLE MASSE

1. Nei precedenti Cap. VII-IX ci siamo occupati esclusivamente del punto materiale. Per estendere i risultati così ottenuti a corpi materiali quali si vogliono è anzitutto necessario precisare anche per siffatti corpi la nozione di *massa*, alla quale si riconnette direttamente, come premessa necessaria alle future deduzioni meccaniche propriamente dette, una serie di considerazioni indipendenti dai concetti di tempo e di forza, che si sogliono raccogliere sotto il nome di *Geometria delle masse*.

#### § 1. — Massa di un corpo.

2. Pel punto materiale la nozione di massa è stata stabilita idealizzando il rapporto  $p/g$  fra il peso del punto e l'accelerazione della gravità (VII, n. 16). Questo rapporto ha un senso fisicamente determinato anche per un corpo (o più generalmente per un sistema materiale)  $S$  qualsiasi, purchè le dimensioni del corpo siano tali che entro la regione spaziale da esso occupata l'accelerazione  $g$  risulti sensibilmente costante; e, come nel caso del punto materiale, codesto rapporto del peso di  $S$  alla accelerazione della gravità va assunto come un *carattere intrinseco* del corpo, *invariante per ogni possibile movimento ed ogni possibile deformazione di  $S$* .

È questa la *definizione pratica* di massa di un corpo.

3. Sperimentalmente si riconosce che il peso di un corpo  $S$ , *comunque* suddiviso, è *sempre* eguale alla somma dei pesi delle singole parti; cosicchè in base alla definizione del n. prec., si è condotti ad attribuire anche alla massa la *proprietà additiva*, per cui *la massa di un corpo è eguale alla somma delle masse delle sue parti, qualunque sia il modo in cui esso si immagina suddiviso*.

Perciò, in particolare, se un dato corpo  $S$  si immagina suddiviso in parti assimilabili a punti materiali, la somma delle masse di

tutti questi punti non dipende dalla speciale suddivisione considerata.

Viceversa, se, in base alle constatazioni sperimentali testè accennate, si ammette come postulato che, comunque si immagini suddiviso un corpo in punti materiali, si ottiene sempre, come somma delle masse di codesti punti, un medesimo numero, si è condotti a definire come massa di un corpo la somma delle masse dei punti materiali, in cui esso, con una legge qualsiasi, può immaginarsi suddiviso.

Questa nuova definizione, in quanto si fonda sul concetto di massa del punto materiale (e può quindi, per ogni siffatto punto, essere determinata, nei modi più svariati, quale rapporto fra forza totale e accelerazione corrispondente) conferisce alla massa di un corpo qualsiasi quel carattere di universalità (o indipendenza da ogni considerazione relativa al campo terrestre) che già le riconoscemmo, per astrazione, limitatamente al caso del punto (VII, n. 16).

## § 2. - Densità.

4. Per precisare analiticamente la legge di distribuzione della massa entro un corpo, occorre introdurre il concetto di *densità*.

I corpi fisicamente *omogenei* (acqua, ferro oligisto, ecc.) sono caratterizzati dalla proprietà che i pesi (misurati localmente) delle loro parti sono proporzionali ai rispettivi volumi. Si ha quindi proporzionalità (e questa volta in senso universale, cioè indipendentemente da ogni considerazione locale rispetto alla Terra) fra le masse delle varie parti di un corpo omogeneo e i corrispondenti volumi.

Perciò, se indichiamo con  $C$  il volume di un qualsiasi corpo omogeneo  $S$ , con  $m$  la sua massa e con  $\Delta C$  e  $\Delta m$  il volume e la massa di una qualsiasi sua parte, avremo

$$\frac{\Delta m}{\Delta C} = \frac{m}{C};$$

e questo rapporto non sarà altro che la massa dell'unità di volume della considerata sostanza materiale. Esso dicesi *densità* (o massa specifica) del corpo  $S$ , o della sua sostanza materiale. Indicandolo con  $\mu$  avremo

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta C},$$

e questa eguaglianza sussisterà qualunque sia il volume della parte di  $S$  considerata, purchè sia  $\Delta m$  la massa rispettiva. Perciò, imma-

ginando che codesta parte di  $S$  rimpiccolisca intorno ad un punto, in modo che il suo volume tenda allo zero, avremo, al limite,

$$(1) \quad \mu = \frac{dm}{dC},$$

onde, usando quel linguaggio espressivo che il calcolo legittima rigorosamente, possiamo dire che  $\mu$  fornisce il rapporto tra la massa di una particella infinitesima del nostro corpo al corrispondente volume. Scriveremo

$$(2) \quad dm = \mu dC$$

e la massa  $m$  del corpo  $S$  si potrà rappresentare con l'integrale

$$\int_C dm$$

esteso a tutta la regione  $C$  dello spazio, occupata da  $S$ . Esso in base alla (2) non differisce da

$$\int_C \mu dC,$$

ossia da

$$\mu \int_C dC = \mu C,$$

in accordo con la definizione da noi data di  $\mu = m/C$ .

Queste ovvie osservazioni suggeriscono una generalizzazione che risponde nello stesso tempo alla nostra intuizione fisica e allo spirito del Calcolo infinitesimale.

Noi possiamo immaginare che un corpo naturale  $S$  sia costituito, anzichè di una sostanza omogenea, di un miscuglio di sostanze diverse; e, idealizzando, possiamo addirittura supporre che la struttura materiale di  $S$  vari da punto a punto con continuità. Allora il rapporto

$$(3) \quad \frac{\Delta m}{\Delta C}$$

della massa di una particella di  $S$  al rispettivo volume (*densità media* del corpo  $S$  nel volume  $\Delta C$ ) varierà al variare della particella stessa. Supponiamo che quando il volume  $\Delta C$  si fa tendere allo zero, intorno ad un dato suo punto, il rapporto (3) tenda ad un limite determinato e finito

$$(4) \quad \mu = \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta C}.$$

Questo limite dicesi *densità* del corpo nel punto  $P$  e varia da punto a punto con una legge che, in accordo colle proprietà rilevabili nei corpi naturali, supporremo generalmente dotata di continuità <sup>(1)</sup>. Cioè *ammetteremo come caratteristica di un generico corpo naturale  $S$  l'esistenza della densità locale  $\mu$ , funzione finita e generalmente continua <sup>(2)</sup> e quindi, in particolare, integrabile dei punti  $P$  del campo  $C$  occupato dal corpo.*

A partire da questa funzione  $\mu$ , si ritrova la massa  $m$  come l'integrale di  $\mu$  esteso a  $C$ . Basta a tale scopo riflettere che, se si designa con  $\varepsilon$  una quantità convergente a zero con  $\Delta C$ , la (4) può essere scritta

$$\frac{\Delta m}{\Delta C} = \mu + \varepsilon,$$

od anche

$$(5) \quad \Delta m = \mu \Delta C + \varepsilon \Delta C;$$

e di qui si deduce

$$m = \Sigma(\mu \Delta C + \varepsilon \Delta C),$$

ove la sommatoria va estesa a tutto il volume  $C$  occupato da  $S$ . Poichè questa relazione vale qualunque sia la divisione in parti del corpo, basta far tendere allo zero, con una legge qualsiasi, il volume  $\Delta C$  di ogni singola particella per ottenere in base a note considerazioni di calcolo

$$(6) \quad m = \int_C \mu(x, y, z) dC,$$

dove  $dC$  denota l'elemento di campo.

L'elemento dell'integrale di campo a tre dimensioni (6) si può rappresentare, in base alla (5) (e a meno di infinitesimi di ordine superiore), con

$$(7) \quad dm = \mu(x, y, z) dC.$$

Questo *elemento materiale* (massa infinitesima localizzata in un campo infinitesimo) è una pura finzione matematica; ma, poichè nel porre i principi della Meccanica del punto materiale e nel

<sup>(1)</sup> Infatti i corpi che interessa considerare sono quasi sempre (sensibilmente) omogenei o costituiti da un numero finito di parti (sensibilmente) omogenee.

<sup>(2)</sup> Si vuol dire con ciò che v'è al più un numero finito di superficie attraverso le quali la funzione presenta variazioni brusche (discontinuità).

ricavarne le successive deduzioni, si è sempre fatto astrazione dalla grandezza assoluta del corpuscolo che chiamammo punto, in guisa che siffatti postulati e siffatti teoremi sussistono per corpuscoli di dimensioni quanto piccole si vogliano, essi possono ritenersi validi al limite, anche per gli elementi materiali or ora considerati, pur avvertendo una volta per tutte che in ogni singolo caso sarebbe possibile di sostituire a codesta veduta intuitiva un rigoroso passaggio al limite.

Osserviamo che la (6) per  $\mu$  costante (cioè indipendente da  $x, y, z$ ) dà

$$m = \mu \int_C dC = \mu C,$$

con che si ritrova la definizione di densità dei corpi omogenei da cui siamo partiti.

**5. SUPERFICIE E LINEE MATERIALI.** — Consideriamo in particolare un corpo, di cui una dimensione sia trascurabile, per es. una piastra o una membrana o le pareti di un recipiente di spessore così piccolo (rispetto alle altre dimensioni del corpo) che lo spazio occupato si possa sensibilmente individuare mediante un pezzo di superficie (piana o curva). Un tale corpo si chiama una superficie materiale.

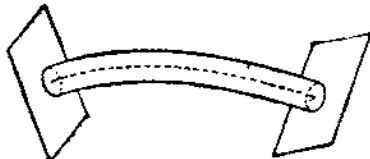
Analogamente si chiama linea materiale un corpo assimilabile (quanto allo spazio occupato) ad una linea geometrica, p. es. un filo, un'asticciuola, un anello (di apertura tale che non sia lecito trattarlo come un unico punto materiale).

Denotiamo ancora con  $C$  il campo geometrico (a due dimensioni o ad una soltanto) che si fa corrispondere ad una superficie o ad una linea materiale. Introduciamo poi una qualche convenzione, mediante la quale ogni porzione  $\Delta C$  del campo individui una porzione  $\Delta S$  del corpo. Il criterio più semplice, che si suole spesso sottintendere, tanto appare spontaneo, è:

1. (nel caso delle superficie) far corrispondere a  $\Delta C$  la porzione di corpo interna al cilindroide, che è costituito dalle normali alla superficie  $C$ , spiccate dai singoli punti del contorno di  $\Delta C$ .

Quando la superficie  $C$  è un piano, il cilindroide è un vero cilindro; può sempre considerarsi un cilindro, per  $\Delta C$  infinitesimo.

2. (nel caso delle linee) far





corrispondere a  $\Delta C$  la porzione di corpo compresa tra i due piani normali alla linea  $S$  negli estremi di  $\Delta C$ .

Poichè tutti i punti dello spazio occupato dal corpo si possono confondere con punti di  $C$ , si può manifestamente considerare il corpo come aggregato di punti materiali localizzati su  $C$ . Diviso  $C$  in parti  $\Delta C$  abbastanza piccole, ad ognuna fa riscontro un punto materiale, secondo le regole testè convenute.

6. Conformemente a quanto abbiamo fatto per i campi a tre dimensioni, giova introdurre la densità media  $m/C$ , e la locale

$$\lim \frac{\Delta m}{\Delta C},$$

riferendo il limite al rimpiccolimento indefinito di  $\Delta C$  attorno ad un determinato punto  $P$  di  $C$ .

Circa l'esistenza di questo limite e circa il suo comportamento, come funzione dei punti del campo  $C$ , valgono considerazioni analoghe a quelle del n. 4.

In ultima analisi basterà ritenere le formule (6) e (7) coll'ovvia avvertenza che, se  $\mu$  seguita a designare una funzione (integrabile) dei punti del campo  $C$ , è però diversa la sua natura fisica, secondo le dimensioni del campo; nel caso generale del n. 4,  $\mu$  era il rapporto (o limite di rapporto) di una massa ad un volume, e quindi di dimensioni  $l^{-3}m$ ; per le superficie materiali, si tratta del rapporto di una massa ad un'area colle dimensioni  $l^{-2}m$ ; per le linee materiali, del rapporto tra una massa e una lunghezza colle dimensioni  $l^{-1}m$ .

Quando vi sia pericolo di ambiguità, si distinguono queste tre specie di densità coi nomi rispettivi di *densità cubica* o *densità di volume* (concetto valido per qualsiasi corpo), *densità superficiale* (che ha interesse per le superficie materiali), *densità lineare* (che ha interesse per le linee materiali).

7. Una superficie materiale si dice *omogenea* quando è costante la sua densità superficiale. Si noti che una superficie materiale omogenea come corpo a tre dimensioni, cioè dotata di densità cubica costante, può benissimo non essere omogenea come superficie, cioè non avere densità superficiale costante. Basta pensare ad una piastra di sostanza omogenea, con spessore variabile da punto a punto; giacchè in tal caso la densità superficiale varia proporzionalmente allo spessore.

Analogamente per le linee materiali.

### § 3. — Baricentro di un sistema discreto di punti materiali.

8. Dato un sistema  $S$  costituito da un numero finito qualsiasi di punti materiali  $P_i$  di masse  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), si consideri per ognuno di essi il rispettivo peso  $m_i g$ . Questi pesi sono rappresentati da altrettanti vettori paralleli e di egual verso, il cui sistema ammette, come sappiamo (I, n. 58), un ben determinato centro  $G$ , che ove si denoti con  $O$  un qualsiasi punto (geometrico) di riferimento e con  $m$  la massa totale  $\sum_i m_i$  del sistema, è individuato dall'equazione vettoriale

$$(8) \quad G - O = \frac{\sum_i m_i (P_i - O)}{m}.$$

Questo punto  $G$  chiamasi *baricentro* o *centro di gravità* del sistema. Esso dipende esclusivamente dalla configurazione del sistema e dalle masse dei suoi singoli punti, onde si dice anche *centro di massa* del sistema. Si può anzi osservare che  $G$  dipende soltanto dai rapporti delle masse; e in verità, se le masse dei punti del sistema si fanno variare tutte in un medesimo rapporto, il secondo membro della (8) non cambia.

Rispetto ad un generico sistema di coordinate coll'origine in  $O$ , si ha

$$(8') \quad x_0 = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_0 = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_0 = \frac{\sum_i m_i z_i}{m},$$

se  $x_i, y_i, z_i$  designano le coordinate dei punti  $P_i$  del sistema e  $x_0, y_0, z_0$  quelle del baricentro  $G$ .

9. Risulta dalla (8) che, se tutte le masse appartengono ad un medesimo piano o ad una medesima retta, lo stesso avviene del loro centro di gravità.

Infatti, nel caso del piano, ove si assuma su di esso il punto  $O$ , vi giacciono manifestamente tutti i vettori  $P_i - O$  e quindi per la (8) anche il vettore  $G - O$  e il baricentro  $G$  stesso. Nel caso della retta, basta analogamente prendere  $O$  sulla retta e aver riguardo alla (8).

10. REGOLA DEI MOMENTI STATICI. — Della (8) si può dare una interpretazione geometrica che in qualche applicazione risulta vantaggiosa, in quanto permette di evitare la scelta preventiva di un qualsiasi sistema coordinato.

A tale scopo si definisca come *momento statico di una massa  $m$ , localizzata in un punto, rispetto ad un piano  $\pi$* , il prodotto di  $m$

per la sua distanza dal piano, preso col segno +, se la massa è situata in uno (arbitrariamente scelto) dei due semispazi determinati da  $\pi$ , col segno -, se la massa è situata nell'altro semispazio.

Facendo coincidere con  $\pi$  uno dei piani coordinati, per es.  $z = 0$ , si deduce dalla terza delle (8') che: *La somma dei momenti statici delle masse di un sistema, rispetto ad un generico piano  $\pi$ , coincide col momento statico della massa totale, supposta localizzata nel baricentro.*

È questa l'annunciata regola equivalente alla (8): da essa infatti si ripassa alle (8'), applicandola ai tre piani coordinati.

Per masse situate in un medesimo piano si ha un enunciato analogo cui si perviene definendo in modo ovvio, per una massa localizzata in un punto, il momento statico rispetto ad una retta.

11. Dalla definizione di baricentro discendono per esso alcune notevoli proprietà: dimostriamone in primo luogo una che, più in generale, sussiste per il centro di ogni sistema di vettori applicati, paralleli e diretti nello stesso verso (cfr. Cap. I, n. 58).

*Il centro di gravità di un sistema è interno ad ogni superficie convessa  $\sigma$ , che racchiuda tutte le masse del sistema.*

Basta far vedere che rispetto a un qualsivoglia piano  $\pi$  tangente alla superficie  $\sigma$ , il centro di gravità  $G$  giace dalla stessa banda di  $\sigma$ , giacchè allora esso deve appartenere alla regione invilupata dai vari piani tangenti, cioè, appunto, deve essere interno a  $\sigma$ .

Ora, fissato un generico piano tangente  $\pi$ , immaginiamo di assumerlo come piano coordinato  $xy$ , prendendo l'asse  $z$  orientato verso la parte in cui giace  $\sigma$ . Le  $z$  dei singoli punti  $P_i$  sono allora positive, e per conseguenza anche  $z_0 = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}$  risulta  $> 0$ .

Con analogo ragionamento si prova che:

*Il baricentro di un sistema di masse situate in un medesimo piano è interno ad ogni linea chiusa, convessa, la quale racchiuda tutte le masse del sistema.*

*Il baricentro di un sistema di masse situate sopra una medesima retta è interno al segmento determinato dalle due masse estreme.*

12. PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL BARICENTRO. — Se un sistema  $S$  di punti materiali si considera scisso in due sistemi parziali  $S'$  ed  $S''$  e sono  $m'$ ,  $m''$  le masse totali di  $S'$ ,  $S''$  e  $G'$ ,  $G''$  i rispettivi baricentri, il baricentro  $G$  di  $S$  coincide con quello delle masse  $m'$ ,  $m''$  supposte localizzate in  $G'$ ,  $G''$  rispettivamente.

Invero, se si denotano con  $P_i', P_i''$  i punti di  $S', S''$ , con  $m_i', m_i''$  le rispettive masse, si ha, per un qualsiasi punto  $O$ ,

$$G' - O = \frac{\sum_i m_i' (P_i' - O)}{m'}, \quad G'' - O = \frac{\sum_i m_i'' (P_i'' - O)}{m''}$$

e quindi

$$m'(G' - O) + m''(G'' - O) = \sum_i m_i' (P_i' - O) + \sum_i m_i'' (P_i'' - O).$$

Poichè nella somma a secondo membro compaiono tutti i punti del dato sistema, si conclude, in base alla (8),

$$m'(G' - O) + m''(G'' - O) = m(G - O);$$

cioè, appunto,  $G$  è il baricentro delle masse  $m', m''$  localizzate in  $G', G''$  rispettivamente.

13. PIANI DIAMETRALI E DI SIMMETRIA. — Si dice che un sistema  $S$  di punti materiali possiede un *piano diametrale*  $\pi$  coniugato ad un'assegnata direzione  $r$  (non parallela al piano), quando ad ogni punto di  $S$  ne fa riscontro un altro di egual massa situato sulla parallela ad  $r$  passante pel primo, alla stessa distanza dal piano  $\pi$  e dalla banda opposta.

I punti, che così si corrispondono, si chiamano *coniugati*.

Un piano diametrale  $\pi$  si chiama in particolare *piano di simmetria* quando è perpendicolare alla direzione coniugata  $r$ , falcchè i punti coniugati risultano simmetrici rispetto a  $\pi$ . In generale, poichè il centro di gravità di due punti di egual massa è il loro punto medio, ogni coppia di punti coniugati ha il baricentro sul piano diametrale  $\pi$ .

Immaginando scisso il sistema  $S$  in tante parti, quante sono le coppie di punti coniugati, e applicando la proprietà distributiva, si conclude che:

*Se un sistema possiede un piano diametrale, od in particolare un piano di simmetria, il centro di gravità giace in questo piano.*

Ne viene che, *se vi sono due piani diametrali, il centro di gravità è situato sulla loro intersezione*; e ancora: *Se un sistema ammette più piani diametrali, questi hanno necessariamente almeno un punto comune, cioè il centro di gravità del sistema.*

Nel caso particolare di sistemi, i cui punti sono tutti situati in un medesimo piano, si possono manifestamente considerare *rette diametrali* (coniugate ad un'assegnata direzione), in particolare *assi di simmetria*; e valgono conclusioni analoghe a quelle ora enunciate.

§ 4. — Baricentro di un corpo,  
di una superficie e di una linea materiale.

14. Per definire il baricentro di un corpo qualsiasi  $S$ , lo si immagini comunque decomposto in parti  $\Delta S$  assimilabili a punti materiali, e si consideri il baricentro  $G'$  di codesti punti materiali costituenti il corpo  $S$ . Al variare della suddivisione di  $S$  varia, in generale, anche codesto baricentro  $G'$ ; ma, come tosto mostremo, il punto  $G'$ , quando si facciano tendere simultaneamente a zero i volumi  $\Delta S$  di tutte le singole particelle di  $S$ , tende sempre ad una ben determinata posizione limite  $G$ , indipendente dall' legge con cui si son fatti tendere a zero i volumi delle particelle di  $S$ . Quando sarà assodata questa circostanza, risulterà giustificato il chiamare *baricentro del corpo* il punto  $G$  così definito.

Ora per dimostrare l'esistenza e la unicità di  $G$ , si ricordi che se  $\mu(x, y, z)$  è la densità (cubica, locale) di  $S$ , la massa  $\Delta m$  di una generica particella  $\Delta S$  di volume  $\Delta C$ , in una qualsiasi suddivisione, è data (n. 4) da

$$\Delta m = \mu \Delta C + \varepsilon \Delta C,$$

dove  $\mu$  si intende calcolata in un punto della particella  $\Delta S$ , di volume  $\Delta C$ , ed  $\varepsilon$  è convergente a zero insieme con  $\Delta C$ ; cosicchè detta  $m$  la massa totale di  $S$ , il baricentro  $G'$  del sistema di punti materiali  $\Delta S$  costituenti il corpo  $S$ , è definito, rispetto alla origine  $O$  delle coordinate, dalla equazione vettoriale

$$(9) \quad m(G' - O) = \Sigma(P - O)\mu\Delta C + \Sigma(P - O)\varepsilon\Delta C.$$

Ora si immagini di variare la decomposizione di  $C$  in modo che il volume  $\Delta C$  di ogni singola sua particella tenda allo zero; poichè per ipotesi (n. 4) la  $\mu(x, y, z)$  è integrabile e quindi sono tali altresì le funzioni  $x\mu$ ,  $y\mu$ ,  $z\mu$  e il vettore  $(P - O)\mu$ , la prima sommatoria del secondo membro di (10) tende ad

$$\int_C (P - O)\mu dC,$$

esteso al volume  $C$  di  $S$ . D'altra parte, per note considerazioni di Calcolo, la seconda sommatoria, in cui  $\varepsilon$  è infinitesimo con  $\Delta C$ , tende allo zero qualunque sia la legge con cui tendono a zero i volumi delle singole particelle di  $S$ ; onde si conclude che  $G'$  ammette in ogni caso, come posizione limite, il punto  $G$  definito dall'equazione vettoriale

$$m(G - O) = \int_C (P - O)\mu dC,$$

la quale, ove si tenga conto della (6) del n. 4, si può scrivere

$$(10) \quad G - O = \frac{\int (P - O)\mu dC}{\int \mu dC}$$

e proiettata sugli assi dà, per le coordinate  $x_0, y_0, z_0$  di  $O$ , le espressioni

$$(10') \quad x_0 = \frac{\int x\mu dC}{\int \mu dC}, \quad y_0 = \frac{\int y\mu dC}{\int \mu dC}, \quad z_0 = \frac{\int z\mu dC}{\int \mu dC}.$$

Resta così definito il baricentro di un corpo qualsiasi; ed è manifesto che le considerazioni precedenti e le formule finali (10), (10') valgono anche per una qualsiasi superficie o linea materiale, quando si sostituiscono alla densità cubica la densità superficiale o lineare e al campo d'integrazione a tre dimensioni la superficie o, rispettivamente, la linea.

In forma rapida, ma non meno precisa per chi tenga presente il completo contenuto (espresso o sottinteso) delle abituali locuzioni del Calcolo, il risultato ottenuto si può enunciare dicendo che, *anche nel caso di sistemi continui, il baricentro è sempre definito dall'equazione vettoriale (8) del n. 8. Solo basta sostituire ad ogni massa parziale una massa elementare (cioè il prodotto della densità locale per il corrispondente elemento di campo) e, di conseguenza, alla somma un integrale.*

Notiamo infine che per i sistemi omogenei ( $\mu = \text{cost.}$ ) le (10), (10') diventano

$$(11) \quad G - O = \frac{\int (P - O)dC}{C},$$

$$(11') \quad x_0 = \frac{\int x dC}{C}, \quad y_0 = \frac{\int y dC}{C}, \quad z_0 = \frac{\int z dC}{C}.$$

Il baricentro dipende allora esclusivamente dalla natura geometrica del campo  $C$ .

Perciò si può parlare di centro di gravità di una figura solida, di una superficie, di una linea come di un puro elemento geometrico, ad esse coordinato mercè la (11) o le (11'); ma l'interesse

precipuo di un tale punto è quello che proviene dal suo significato meccanico, quando si pensa il campo  $C$  quale sede di materia omogeneamente distribuita.

### 15. DETERMINAZIONE DEL BARICENTRO DI ALCUNE FIGURE. —

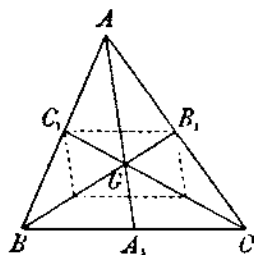
Per le figure che posseggono un centro (intersezione di tre piani diametrali non coassiali, se si tratta di figure solide, di due rette diametrali, se si tratta di figure piane) il centro di gravità coincide col centro di figura (n. 13).

Per un **parallelepipedo**, i piani mediani di ogni coppia di facce parallele sono manifestamente diametrali (coniugati alla direzione dei quattro spigoli compresi fra tali facce); di qua segue facilmente che il centro di gravità coincide col punto di incontro delle tre diagonali; per un **parallelogrammo** col punto di incontro delle due diagonali; per un **ellissoide** o per un **ellisse** col rispettivo centro, ecc.

Risulta poi manifesto, ragionando in una dimensione come al n. 13, che il centro di gravità di un segmento è il suo punto di mezzo.

a) **Triangolo**. Ciascuna mediana è linea diametralmente coniugata alla direzione del lato, che essa dimezza. Il punto di incontro delle mediane è dunque centro di figura e centro di gravità.

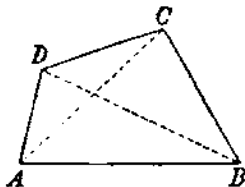
Semplici considerazioni di geometria elementare (cfr. la figura) mostrano che su ciascuna mediana, il centro di gravità si trova ad un terzo, a partire dal piede. Si può anche dire, fissato un lato come base, che il centro di gravità si trova sulla corrispondente mediana, ad un terzo di essa a partire dalla base.



b) **Quadrangoli e poligani**. Sia dato un quadrangolo semplice (cioè non intrecciato)  $ABCD$ . Le diagonali  $AC$ ,  $BD$  lo decompongono ciascuna in due triangoli  $ABC$ ,  $ACD$ , e  $BAD$ ,  $BCD$ .

Per quanto precede, siamo in grado di assegnare i baricentri  $G'$ ,  $G''$ ,  $G_1'$ ,  $G_1''$  di ciascuno di questi quattro triangoli.

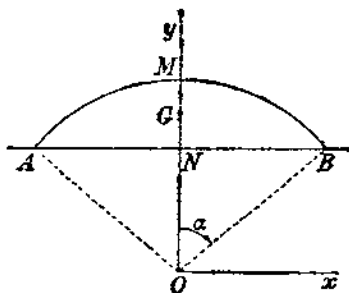
Per la proprietà distributiva (n. 12) il baricentro  $G$  del quadrangolo è anche baricentro dei due punti  $G'$ ,  $G''$ , in quanto si attribuisca a ciascuno una conveniente massa (quella del triangolo corrispondente). Ne viene che  $G$  appartiene al segmento  $G'G''$ . Per la stessa ragione esso deve appartenere



al segmento  $G_1'G_1''$ , talchè il baricentro  $G$  del quadrangolo si ha senz'altro come intersezione di  $G'G''$  con  $G_1'G_1''$ .

Per un poligono di  $n$  lati si può adottare un procedimento di successiva riduzione a poligoni di minor numero di lati e quindi, da ultimo, a triangoli. Basta, per es., decomporlo in due modi in un poligono di  $n - 1$  lati e in un triangolo. Designando con  $G'$ ,  $G_1'$  i baricentri dei due poligoni, con  $G''$ ,  $G_1''$  quelli dei rispettivi triangoli (rispettivi nel senso che completano l'assegnato poligono), si ha, come sopra, il baricentro  $G$  nell'intersezione di  $G'G''$  e  $G_1'G_1''$ .

c) *Arco di circonferenza.* Sia  $\widehat{AB}$  l'arco,  $O$  il centro della circonferenza,  $M$  il punto medio dell'arco. La retta  $OM$  è manifestamente un asse di simmetria, talchè il baricentro  $G$  va cercato sopra di essa. Si può anche aggiungere, designando con  $N$  l'intersezione di  $OM$  colla corda  $AB$ , che  $G$  deve appartenere al segmento  $MN$ .



Infatti  $G$  è anche centro di gravità di punti appartenenti tutti al segmento  $MN$  (i baricentri parziali delle coppie di punti simmetrici rispetto alla  $MN$ ); esso è dunque interno, o almeno non esterno, al medesimo segmento (n. 11).

Per precisare la posizione di  $G$  sulla  $MN$ , giova ricorrere alle formole, adottando un sistema di assi coll'origine in  $O$ , e coll'asse di simmetria per asse delle  $y$ , la direzione positiva essendo quella rivolta verso l'arco. La seconda delle (11') dà allora, per  $y_0$ , che nel caso attuale è  $OG$ ,

$$OG = \frac{\int y dC}{C}$$

il campo di integrazione  $C$  essendo l'arco  $\widehat{AB}$ . L'integrale che sta a numeratore si valuta nel modo più semplice, adottando come variabile d'integrazione l'angolo  $\theta$  che un generico raggio  $OP$  forma con l'asse  $y$  contato positivamente nel verso da  $y$  verso  $x$ .

Per i punti  $P$  dell'arco,  $\theta$  varia da  $-\alpha$  a  $+\alpha$ , ove si designi con  $2\alpha$  l'apertura dell'arco, cioè l'angolo al centro  $\widehat{AOB}$ . Si ha manifestamente, designando con  $r$  il raggio,

$$y = r \cos \theta, \quad dC = r d\theta.$$



L'integrale da valutare diviene così:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos \theta d\theta ;$$

$r$  essendo costante, si trova immediatamente  $2r^2 \sin \alpha$ . Se si osserva che  $2r \sin \alpha$  è la lunghezza della corda  $AB$ , si ha da ultimo l'equazione

$$OG = r \frac{AB}{C},$$

la quale esprime che la distanza  $OG$  del baricentro dell'arco dal centro del cerchio sta al raggio come la corda all'arco.

Per il caso particolare  $\alpha = \pi$  (semicirconferenza) si ha manifestamente  $AB = 2r$ ,  $C = \pi r$  e risulta

$$OG = \frac{2}{\pi} r.$$

d) *Prisma e cilindro*. Consideriamone quante si vogliono sezioni parallele alla base; esse sono tutte eguali. I rispettivi centri di gravità sono punti omologhi e appartengono tutti ad una medesima retta  $g$ , parallela agli spigoli (o rispettivamente alle generatrici).

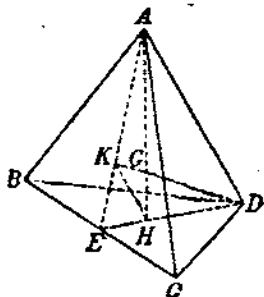
Il centro di gravità  $G$  è il punto medio del segmento, tagliato dal solido sopra questa retta  $g$ . Si può anche dire: il centro di gravità del solido coincide con quello della sezione parallela alle basi, praticata a metà dell'altezza.

Per constatarlo, basta immaginare diviso il prisma (o cilindro) in strati infinitesimi mediante piani equidistanti, paralleli alla base. Ciascuno strato è assimilabile ad una superficie materiale omogenea ed ha il suo centro di gravità  $G'$  su  $g$ . Per la proprietà distributiva,  $G$  è baricentro di tutti questi  $G'$ , cui siano attribuite le masse dei rispettivi strati. Ma questi sono tutti eguali tra loro. I punti  $G'$  costituiscono dunque un segmento omogeneo, e il centro di gravità è di conseguenza il loro punto medio.

e) *Tetraedro*. Diremo *mediani* i piani determinati da uno spigolo e dal punto di mezzo dello spigolo opposto. Ogni tetraedro possiede manifestamente sei piani mediani.

Essi sono, come tosto si riconosce, altrettanti piani diametrali (coniugati alla direzione dello spigolo da essi dimezzato) e non passano tutti sei per una medesima retta (poichè ne seguirebbe che i quattro vertici del tetraedro si trovano su questa retta); essi determinano pertanto il centro di gravità  $G$ , come loro comune intersezione (n. 13).

Per ciascun vertice, per es. per  $A$ , passano tre piani mediani. Essi intersecano la faccia opposta  $BCD$  nelle tre mediane; quindi contengono tutti il baricentro  $H$  del triangolo  $BCD$ , e per conseguenza la retta  $AH$ .



Possiamo così individuare il baricentro  $G$  del tetraedro anche come il punto di incontro delle rette che congiungono ciascun vertice col centro di gravità della faccia opposta.

Importa osservare che il baricentro divide ciascuna di queste congiungenti nel rapporto di 1 a 3, si trova cioè ad un quarto di essa, a partire dalla faccia. Per dimostrarlo, diciamo  $E$  il punto medio del lato  $BC$ , e conduciamo  $DE$  e  $AE$ . I baricentri  $H$ ,  $K$  dei due triangoli  $BCD$  e  $ABC$  si trovano su queste due mediane ad un terzo dal piede  $E$ , ossia  $EH$  ed  $EK$  sono la terza parte di  $ED$  e di  $EA$  rispettivamente. Ne consegue che i due triangoli  $EHK$  ed  $EDA$  sono simili, avendo uno stesso angolo compreso tra lati proporzionali; perciò anche  $HK$  è la terza parte di  $AD$ . Ciò posto, congiungiamo  $H$  e  $K$  coi vertici opposti  $A$  e  $D$ , e badiamo che la loro intersezione  $G$  è precisamente il baricentro del tetraedro. Dalla simiglianza dei triangoli  $GHK$ ,  $GAD$  scende precisamente che  $GH$  e  $GK$  sono rispettivamente la terza parte di  $GA$  e di  $GD$ .

Fissata una generica faccia del tetraedro come base, si può anche enunciare la regola seguente: *Il baricentro di un tetraedro coincide col centro di gravità della sezione parallela alla base, praticata ad un quarto dell'altezza, a partire dalla base.*

Infatti  $G$  appartiene ad una tale sezione, per quanto si è visto or ora, e ne è il centro di gravità perchè giace sui tre piani mediani passanti per  $A$ , i quali segnano le mediane su ciascuna sezione parallela alla base.

f) *Piramide.* Il centro di gravità di una piramide (e, come caso limite, di un cono) appartiene al segmento, luogo dei baricentri delle sezioni piane parallele alla base, e divide questo segmento (a partire dalla base) nel rapporto 1/3. Si può anche dire che esso coincide col centro di gravità della sezione parallela alla base praticata a un quarto dell'altezza a partire dalla base.

La constatazione è assai semplice. Si immagini la base della piramide divisa in triangoli  $T'$ ,  $T''$ , ..., e siano  $S'$ ,  $S''$ , ..., i tetraedri corrispondenti, che hanno cioè quei triangoli per base, e per vertice il vertice della piramide.

Si consideri ancora la sezione  $\sigma$ , praticata a un quarto dell'al-

tezza. Essa taglia i tetraedri  $S', S'', \dots$ , secondo triangoli  $T_1', T_1'', \dots$ , che sono simili a  $T', T'', \dots$  (i lati omologhi stando tra loro nel rapporto di 3 a 4 e quindi le aree nel rapporto di 9 a 16). Dicendo  $G', G'', \dots$  i baricentri dei tetraedri  $S', S'', \dots$ , possiamo intanto affermare, per quanto precede, che essi coincidono coi centri di gravità di  $T_1', T_1'', \dots$ . D'altra parte, per la proprietà distributiva (n. 12), il baricentro  $G$  della piramide si può riguardare come il baricentro dei punti  $G', G'', \dots$ , cui siano attribuite le masse di  $S', S'', \dots$ . Queste sono proporzionali ai volumi, quindi, trattandosi di tetraedri della stessa altezza, alle aree delle basi  $T', T'', \dots$ , ossia infine alle aree di  $T_1', T_1'', \dots$ . Ora il centro di gravità della sezione  $\sigma$ , praticata ad un quarto dell'altezza, coincide anch'esso, per la proprietà distributiva, col baricentro dei punti  $G', G'', \dots$ , (centri di gravità dei triangoli  $T_1', T_1'', \dots$ , che insieme costituiscono  $\sigma$ ), in quanto a tali punti siano attribuite per masse quelle dei triangoli. Siccome un comune fattore di proporzionalità, applicato alle masse dei punti di un sistema, non ne altera il baricentro (n. 8), così rimane provato che il baricentro  $G$  della piramide non differisce da quello della sezione  $\sigma$ .

### § 5. - Momenti di inerzia.

16. DEFINIZIONI. — Siano  $P$  un punto materiale di massa  $m$ ,  $r$  una retta generica,  $\delta$  la distanza di  $P$  da  $r$ .

Per momento di inerzia di  $P$  (o, come si suol dire, della sua massa  $m$ ) rispetto all'asse  $r$ , si intende il prodotto  $m\delta^2$  della massa di  $P$  per il quadrato della sua distanza dall'asse.

Più generalmente, se è dato un sistema  $S$ , costituito da un numero (finito) qualsiasi di punti materiali  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), si chiamerà momento di inerzia del sistema rispetto all'asse  $r$ , la somma dei momenti di inerzia dei singoli suoi punti.

Indicando con  $J$  tale momento d'inerzia, con  $m$ , la massa del punto generico  $P_i$  del sistema, con  $\delta$ , la sua distanza da  $r$ , avremo per definizione

$$(12) \quad J = \sum_i m_i \delta_i^2,$$

dove la somma va manifestamente estesa a tutti i punti del sistema.

Designata al solito con  $m$  la massa totale  $\sum_i m_i$  del sistema e posto

$$(13) \quad J = m\delta^2,$$

il numero (positivo)  $\delta$  così definito, cioè

$$\delta = \sqrt{\frac{J}{m}},$$

viene detto *giratore* o *raggio di girazione* di  $S$  rispetto alla retta  $r$ .

Il significato apparisce senz'altro dalla (13):  $\delta$  è la distanza dall'asse  $r$ , per cui un'unica massa, eguale alla massa totale del sistema, possiede lo stesso momento d'inerzia  $J$  dell'intero sistema.

Le dimensioni di un momento d'inerzia sono (come risulta dalla definizione)  $l^2m$ ; quelle di un giratore  $l$ , ciò che è messo direttamente in evidenza dall'interpretazione indicata.

17. Analogamente al momento di inerzia di un sistema materiale  $S$ , rispetto ad un asse, si può definire:

1°) Il momento di inerzia rispetto ad un punto  $P$ , cioè la somma dei prodotti delle masse dei punti del sistema  $S$  per i quadrati delle loro distanze da  $P$  (i cosiddetti momenti polari).

2°) Il momento d'inerzia rispetto ad un piano  $\pi$ , cioè la somma dei prodotti delle masse dei punti di  $S$  per i quadrati delle loro distanze dal piano  $\pi$ .

Nelle applicazioni hanno precipuo interesse i momenti di inerzia rispetto a rette; onde a questi limiteremo il nostro studio.

18. MODO DI VARIARE AL VARIARE DELL'ASSE. — Per un dato sistema materiale  $S$  si hanno infiniti momenti d'inerzia  $J$ , corrispondendone uno ad ogni retta  $r$ , arbitrariamente prescelta. Ci proponiamo di riconoscere come varia  $J$  al variare di  $r$ .

L'indagine si semplifica coll'osservazione preliminare, che si può limitarsi a discutere due casi particolari, e precisamente:

- a) come variano i momenti d'inerzia rispetto ad assi paralleli;
- b) come variano i momenti d'inerzia rispetto ad assi concorrenti.

Suppongasì infatti di aver riconosciuta la legge di variazione dei momenti di inerzia nei due casi a) e b). Saremo subito in grado di mettere in relazione i momenti di inerzia relativi a due assi  $r, s$  posti comunque nello spazio. Basterà condurre per un punto, scelto a piacere su  $s$ , una retta  $r'$  parallela ad  $r$ . Mediante a) si passa dal momento di inerzia rispetto ad  $r$  a quello relativo ad  $r'$ , e da questo, mediante b), al momento di inerzia relativo ad  $s$ .

19. MOMENTI DI INERZIA RISPETTO AD ASSI PARALLELI. — Dimostriamo in primo luogo il teorema che risale all'HUYGENS<sup>(1)</sup> (e fu enunciato da EULERO, cui è dovuta la nozione e la teoria sistematica dei momenti di inerzia):

*Il momento di inerzia di un sistema rispetto ad un asse  $r$  è eguale al momento di inerzia  $J_0$  rispetto all'asse parallelo  $r_0$ , passante per il centro di gravità, aumentato del prodotto della massa totale  $m$  per il quadrato della distanza  $d$  di questi due assi.*

Le due rette parallele  $r, r_0$  individuano un piano, che gioverà prendere come uno dei piani coordinati: sia  $yOz$ . Assumeremo addirittura la retta  $r_0$ , passante per il baricentro  $G$ , come asse  $Oz$  e supporremo di orientare l'asse  $Oy$  verso  $r$ , in modo che l'equazione della retta  $r$  del piano  $yOz$  sarà  $y = d$ , cui, nello spazio, va naturalmente associata la condizione  $x = 0$ .

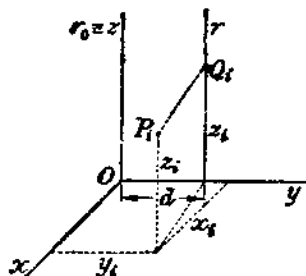
Designando con  $x_i, y_i, z_i$  le coordinate di un punto generico  $P_i$  del sistema  $S$ , quelle della sua proiezione  $Q_i$  sulla retta  $r$  (intersezione di questa retta col piano perpendicolare ad essa, e quindi anche all'asse  $Oz$ , condotto per  $P_i$ ) saranno  $0, d, z_i$ .

La distanza  $\delta_i$  di  $P_i$  dall'asse  $r$  non è altro che la lunghezza del segmento  $P_iQ_i$ . Mediante le coordinate di questi due punti possiamo scrivere senz'altro

$$\delta_i^2 = x_i^2 + (y_i - d)^2,$$

e, per conseguenza, dalla definizione di momento di inerzia,

$$J = \sum_i m_i [x_i^2 + (y_i - d)^2] = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + d^2 \sum_i m_i - 2d \sum_i m_i y_i.$$



(1) CRISTIANO HUYGENS, patrizio olandese, n. all'Aia nel 1629, m. ivi nel 1695, fu tra i primi soci stranieri dell'Accademia delle Scienze di Parigi e della Società Reale di Londra. I suoi maggiori titoli di gloria sono: la scoperta dell'anello di Saturno; la prima teoria ondulatoria della propagazione luminosa, che gli permise di spiegare, oltre ai fenomeni noti, quello della doppia rifrazione da lui stesso scoperto nello spato d'Islanda; infine i suoi notevoli contributi alla meccanica, tra cui ci limiteremo a ricordare le leggi del moto pendolare, con applicazioni pratiche alla costruzione degli orologi. È appunto nelle sue ricerche sul pendolo composto che interviene sostanzialmente la nozione di momento di inerzia e il teorema del testo. Cfr. *Horologium oscillatorium* (Parigi, 1673).

Se si nota che l'asse delle  $z$  si è fatto passare per il centro di gravità  $G$ , sicchè deve in particolare annullarsi la coordinata  $y_0$  di questo punto, si riconosce (n. 8) che  $\Sigma_i m_i y_i$  è zero. D'altra parte  $\Sigma_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$  è ciò che diviene  $\mathcal{J}$  per  $d = 0$ , ossia il momento di inerzia rispetto all'asse  $z$ , che è il nostro  $\mathcal{J}_0$ ;  $\Sigma_i m_i$  è la massa totale  $m$  del sistema. Si ha quindi

$$(14) \quad \mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + md^2,$$

secondo l'enunciato.

Questa formula mostra che, tra tutti gli assi paralleli a una direzione data, quello, per cui il momento di inerzia è minimo, passa per il centro di gravità. Inoltre se di un dato sistema si conosce il momento di inerzia  $\mathcal{J}$ , rispetto all'asse  $r$ , e la posizione del centro di gravità, la (14) permette di calcolare il valore  $\mathcal{J}'$  del momento di inerzia, relativo ad un'altra retta qualsiasi  $r'$ , parallela ad  $r$ . Si hanno infatti le due relazioni:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + md^2, \quad \mathcal{J}' = \mathcal{J}_0 + md'^2,$$

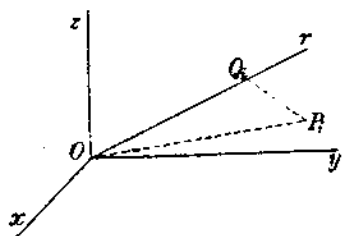
rappresentandosi con  $d'$  la distanza del baricentro dalla retta  $r'$ , ossia la distanza dei due assi  $r'$  ed  $r_0$ . L'eliminazione di  $\mathcal{J}_0$  porge

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J} + m(d'^2 - d^2).$$

Date le ipotesi, le quantità del secondo membro sono tutte conosciute.

## 20. MOMENTI DI INERZIA RISPETTO AD ASSI CONCORRENTI. —

Determinato così come variano i momenti d'inerzia, quando gli assi, a cui si riferiscono, cambiano di posizione, ma non di direzione, esaminiamo il modo di comportarsi dei momenti stessi, rispetto ad assi passanti per un medesimo punto  $O$ .



Poniamo in  $O$  l'origine delle coordinate e siano  $\alpha, \beta, \gamma$ , i coseni direttori di  $r$  (comunque orientata). Dal triangolo rettangolo  $OP_iQ$ , si desume che la distanza  $\delta$  di un generico punto  $P_i$ , di  $S$  dall'asse  $r$ , è data da

$$\delta_i^2 = OP_i^2 - OQ_i^2;$$

e poichè  $OP_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$  e  $OQ_i$ , (componente di  $P_i - O$  secondo  $r$ ) vale  $x_i\alpha + y_i\beta + z_i\gamma$ , avremo

$$\begin{aligned} \delta_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (x_i\alpha + y_i\beta + z_i\gamma)^2 = \\ &= (1 - \alpha^2)x_i^2 + (1 - \beta^2)y_i^2 + (1 - \gamma^2)z_i^2 \\ &\quad - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\gamma\alpha z_i x_i - 2\alpha\beta x_i y_i. \end{aligned}$$

Scrivendo  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  al posto dell'unità, verrà, ove si ordini rispetto ad  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ :

$$\delta_i^2 = \alpha^2(y_i^2 + z_i^2) + \beta^2(x_i^2 + x_i^2) + \gamma^2(x_i^2 + y_i^2) \\ - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\gamma\alpha z_i x_i - 2\alpha\beta x_i y_i, \quad (1)$$

onde risulta

$$J = \sum m_i \delta_i^2 = \alpha^2 \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) + \beta^2 \sum m_i (x_i^2 + x_i^2) \\ + \gamma^2 \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2\beta\gamma \sum m_i y_i z_i - 2\gamma\alpha \sum m_i z_i x_i \\ - 2\alpha\beta \sum m_i x_i y_i,$$

ossia

$$(15) \quad J = \mathcal{A}\alpha^2 + \mathcal{B}\beta^2 + \mathcal{C}\gamma^2 - 2\mathcal{A}'\beta\gamma - 2\mathcal{B}'\gamma\alpha - 2\mathcal{C}'\alpha\beta,$$

ove si è posto:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad \mathcal{B} = \sum m_i (x_i^2 + x_i^2), \quad \mathcal{C} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2); \\ \mathcal{A}' = \sum m_i y_i z_i, \quad \mathcal{B}' = \sum m_i z_i x_i, \quad \mathcal{C}' = \sum m_i x_i y_i. \end{array} \right.$$

La (15) determina il momento di inerzia, rispetto ad ogni direzione  $\alpha, \beta, \gamma$ , passante per  $O$ , in funzione delle sei costanti  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$ , che dipendono, come è evidente, dalla natura del sistema, ma non dal particolare asse  $r$ . A secondo membro della (15) si presenta una funzione quadratica omogenea di  $\alpha, \beta, \gamma$ , che perciò rimane inalterata, se si cambiano simultaneamente  $\alpha, \beta, \gamma$  in  $-\alpha, -\beta, -\gamma$ . Ciò era ben prevedibile, perchè collo scambio di  $\alpha, \beta, \gamma$  in  $-\alpha, -\beta, -\gamma$  si muta soltanto il verso da attribuirsi ad  $r$ , non la retta stessa, e il momento di inerzia  $J$ , per sua definizione, non ha alcun rapporto con il verso.

I coefficienti  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  hanno un significato ovvio. Essi (come apparisce direttamente dalla (15) ponendovi ordinatamente  $\alpha, \beta, \gamma$  eguali ad 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1) sono i momenti di inerzia rispetto

(1) Questa espressione di  $\delta_i^2$  si potrebbe anche ricavare considerando il momento, rispetto al punto  $P_i$ , del vettore dell'asse  $r$ , che penseremo applicato in  $O$ . Le componenti di questo momento sono date (I, n. 29) dai minori della matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc} -x_i & -y_i & -z_i \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array} \right\|$$

e quindi il quadrato della lunghezza da

$$(\beta z_i - \gamma y_i)^2 + (\gamma x_i - \alpha z_i)^2 + (\alpha y_i - \beta x_i)^2.$$

Tale lunghezza (prodotto dell'unità per la distanza del polo  $P_i$  dalla linea d'azione  $r$ ) coincide manifestamente con  $\delta_i$ .

agli assi coordinati. Gli altri tre coefficienti  $\mathcal{A}' = \Sigma m_i y_i z_i$ ,  $\mathcal{B}' = \Sigma m_i z_i x_i$ ,  $\mathcal{C}' = \Sigma m_i x_i y_i$ , si sogliono chiamare prodotti di inerzia, ovvero anche (per una ragione che si rende manifesta nella dinamica dei solidi) momenti di deviazione.

A norma delle (16), la valutazione dei tre momenti d'inerzia  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , si riconduce subito a quella delle tre somme

$$(17) \quad s_1 = \Sigma m_i x_i^2, \quad s_2 = \Sigma m_i y_i^2, \quad s_3 = \Sigma m_i z_i^2,$$

che possono interpretarsi come i momenti d'inerzia del sistema rispetto ai piani coordinati. Si ha infatti identicamente

$$(18) \quad \mathcal{A} = s_2 + s_3, \quad \mathcal{B} = s_3 + s_1, \quad \mathcal{C} = s_1 + s_2.$$

### § 6. - Ellissoide d'inerzia. - Assi principali. Casi particolari notevoli.

21. La legge di variazione dei momenti d'inerzia attorno ad un medesimo punto, espressa analiticamente dalla (15), è suscettibile di una comoda interpretazione geometrica.

Immaginiamo di portare su ciascun raggio, di coseni direttori  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , uscente da  $O$ , il segmento

$$(19) \quad OL = \frac{1}{\sqrt{J}},$$

essendo  $J$  la funzione quadratica di  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  definita dalla (15).

Se si esclude il caso particolare che tutti i punti  $P_i$  di  $S$  appartengano ad una medesima retta, passante per  $O$ , il momento d'inerzia  $J = \Sigma m_i \delta_i^2$  non può essere nullo per nessuna direzione  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , spiccata da  $O$ ;  $1/\sqrt{J}$  è perciò, in corrispondenza ad ogni raggio, un numero finito, e il luogo  $E$  dei punti  $L$  costituisce una superficie chiusa, attorno ad  $O$ , anzi simmetrica rispetto al punto  $O$ , perchè su due raggi opposti i punti  $L$  cadono alla stessa distanza da  $O$ , come si desume dalla (19) ricordando (n. prec.) che  $J$  non cambia quando si cambia segno ad  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Ora si può assegnare facilmente la equazione della superficie  $E$ . Avremo infatti, designando con  $x$ ,  $y$ ,  $z$  le coordinate di un generico punto  $L$ ,

$$x = OL \cdot \alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{J}}, \quad y = OL \cdot \beta = \frac{\beta}{\sqrt{J}}, \quad z = OL \cdot \gamma = \frac{\gamma}{\sqrt{J}};$$

ossia

$$\alpha = x \sqrt{J}, \quad \beta = y \sqrt{J}, \quad \gamma = z \sqrt{J}.$$



e quando si portano nella (15) questi valori di  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  scompare anche  $J$ , e si ottiene

$$(20) \quad \mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 + \mathcal{C}z^2 - 2\mathcal{A}'yz - 2\mathcal{B}'zx - 2\mathcal{C}'xy = 1.$$

È questa l'equazione della superficie  $E$ ; onde si conclude che si tratta di una superficie del secondo ordine e, più precisamente (poichè sappiamo che  $E$  dev'essere chiusa), di un ellissoide il cui centro è  $O$ , come risulta dalla simmetria di  $E$  rispetto ad  $O$ .

22. L'ellissoide  $E$  si chiama *ellissoide d'inerzia relativo al punto  $O$* . Quando esso sia dato, si ha subito il momento d'inerzia rispetto ad ogni retta  $r$  passante per  $O$ . Infatti, detto  $L$  uno dei due punti in cui  $r$  incontra l'ellissoide, sarà, per la (19),

$$(19') \quad J = \frac{1}{OL^2}.$$

Di qui risulta che, tra tutti gli assi condotti per  $O$ , quello che dà il più piccolo momento d'inerzia è l'asse maggiore, quello che dà il più grande momento d'inerzia è l'asse minore dell'ellissoide.

Gli assi dell'ellissoide d'inerzia si chiamano *assi principali d'inerzia relativi al punto considerato*.

Assumendoli come assi coordinati, la (20) si riduce, com'è noto, alla forma particolare

$$(20') \quad \mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 + \mathcal{C}z^2 = 1;$$

cioè vanno a zero i prodotti di inerzia  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{C}'$ , ossia, in base alle (16), le somme:

$$\sum_i m_i y_i z_i, \quad \sum_i m_i z_i x_i, \quad \sum_i m_i x_i y_i;$$

$\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  conservano manifestamente il loro significato e sono per conseguenza *i momenti d'inerzia relativi agli assi principali*, o, come si suol dire brevemente, *i momenti principali d'inerzia*. I giratori corrispondenti  $\sqrt{\mathcal{A}/m}$ ,  $\sqrt{\mathcal{B}/m}$ ,  $\sqrt{\mathcal{C}/m}$  si dicono *giratori principali*.

Giova notare che, affinchè l'asse  $Oz$  sia asse principale d'inerzia rispetto ad  $O$ , occorre e basta che si annullino i prodotti di inerzia  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{B}'$ , cioè sussistano le due condizioni

$$\sum_i m_i y_i z_i = 0, \quad \sum_i m_i z_i x_i = 0.$$

23. L'ellissoide d'inerzia relativo al centro di gravità di un sistema si chiama *ellissoide centrale d'inerzia*.

In generale, quando si vuol caratterizzare in modo completo la distribuzione dei momenti d'inerzia di un dato sistema, si asse-

gnano (oltre alla massa totale) gli elementi determinativi dell'ellissoide centrale, cioè gli assi e i momenti (o i giratori) principali relativi al centro di gravità. Sono allora individuati in modo comprensivo i momenti d'inerzia relativi ad un generico asse baricentrale; quelli relativi ad un asse non baricentrale si hanno poi subito dalla (14).

In parecchi casi, la speciale configurazione del sistema (n. 13) mostra ovviamente dove sta il baricentro e come sono diretti i relativi assi principali. Assumendoli allora come assi coordinati, si può dire (n. 20) che tutto si riduce ad assegnare le tre somme

$$s_1 = \sum_i m_i x_i^2, \quad s_2 = \sum_i m_i y_i^2, \quad s_3 = \sum_i m_i z_i^2,$$

ossia i momenti di inerzia del sistema rispetto ai piani principali dell'ellissoide centrale.

Importa rilevare in modo esplicito, per usarne senz'altro a suo tempo, che quando si riferisce un sistema  $S$  agli assi principali d'inerzia, passanti per il centro di gravità, le sei somme

$$\sum_i m_i x_i, \quad \sum_i m_i y_i, \quad \sum_i m_i z_i, \quad \sum_i m_i y_i z_i, \quad \sum_i m_i z_i x_i, \quad \sum_i m_i x_i y_i,$$

sono tutte zero: le prime tre, perchè l'origine cade nel centro di gravità (n. 8), le seconde tre (n. prec.), perchè gli assi coordinati sono gli assi principali d'inerzia.

24. *Ogni asse principale d'inerzia, rispetto al baricentro, è asse principale d'inerzia anche rispetto ad ogni altro suo punto.*

Infatti sia  $O$  il baricentro ed  $Oz$  un suo asse principale di inerzia. Avremo

$$\mathcal{A}' = \sum_i m_i y_i z_i = 0, \quad \mathcal{B}' = \sum_i m_i z_i x_i = 0.$$

Preso su  $Oz$  un qualsiasi punto  $O_1$  diverso da  $O$ , poniamo  $OO_1 = a$  e consideriamo la terna  $O_1 x_1 y_1 z_1$ , i cui assi  $x_1, y_1$  siano paralleli e di verso concorde ad  $x, y$  rispettivamente. Le nuove coordinate del punto  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  sono date da  $x_i, y_i, z_i - a$ ; cosicchè i nuovi prodotti di inerzia valgono

$$(21) \quad \begin{cases} \mathcal{A}'_1 = \sum_i m_i y_i (z_i - a) = \sum_i m_i y_i z_i - a \sum_i m_i y_i; \\ \mathcal{B}'_1 = \sum_i m_i (z_i - a) x_i = \sum_i m_i z_i x_i - a \sum_i m_i x_i; \end{cases}$$

e si annullano entrambi, perchè, per le ipotesi, sono nulli i prodotti d'inerzia  $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$  e i momenti statici  $\sum_i m_i x_i, \sum_i m_i y_i$ . Ciò vuol dire appunto che la  $Oz$  è asse principale di inerzia anche rispetto al suo generico punto  $O_1$ .

Viceversa, se si suppone che  $O$  sia un punto generico del sistema e che un suo asse principale d'inerzia  $Oz$  passi pel baricentro  $O_1$ , le (21), che restano valide anche in questa nuova interpretazione, mostrano che, essendo qui ancora, per le ipotesi,

$$\mathcal{A}' = \mathcal{D}' = \sum_i m_i x_i = \sum_i m_i y_i = 0,$$

si annullano anche  $\mathcal{A}'_1$  e  $\mathcal{D}'_1$ . Cioè: *Se una retta è asse principale d'inerzia rispetto ad un suo punto e passa per il baricentro, è pur asse principale d'inerzia rispetto al baricentro (e quindi rispetto ad ogni altro suo punto).*

25. Osserviamo ancora che, se il sistema considerato  $S$  possiede un piano di simmetria (n. 13), basta assumerlo come piano coordinato, perchè due dei prodotti d'inerzia si annullino.

Infatti, ove il piano di simmetria si prenda per piano  $z = 0$ , si ha

$$\sum_i m_i x_i z_i = 0, \quad \sum_i m_i y_i z_i = 0,$$

in quanto, per due masse simmetriche rispetto al piano  $z = 0$ , le  $m_i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$ , sono le stesse, mentre le  $z_i$  hanno valore eguale e segno opposto. Perciò i termini delle sommatorie si elidono a due a due.

Abbiamo dunque che: *Se un sistema ammette un piano di simmetria, ogni perpendicolare a questo piano è asse principale d'inerzia rispetto al suo piede.*

Inoltre: *Se un sistema possiede due piani ortogonali di simmetria, questi sono necessariamente piani principali dell'ellissoide d'inerzia relativo ad un punto qualsiasi della loro intersezione.*

Infatti, assunti questi piani come coordinati, si annullano evidentemente tutti i prodotti d'inerzia.

Ciò trova una notevole applicazione nel caso di *corpi rotondi*. Ogni piano meridiano è manifestamente piano di simmetria, sicchè l'asse di rotazione è asse principale di inerzia per ogni suo punto, e i relativi ellissoidi di inerzia sono essi pure tutti rotondi (attorno a quest'asse).

26. SISTEMI PIANI. — Se tutte le masse del sistema appartengono ad un medesimo piano, il momento d'inerzia, rispetto ad un asse qualsiasi perpendicolare al piano, è la somma dei momenti relativi ad una qualsivoglia coppia di assi perpendicolari, situati nel piano, condotti per l'intersezione del piano stesso col primo asse.

La dimostrazione è immediata. Basta assumere il piano del sistema come piano  $z = 0$ , l'asse perpendicolare come asse delle  $z$ , e gli altri due assi, tra loro ortogonali, per assi delle  $x$  e delle  $y$ .

Si ha allora, per ogni massa  $m$ , del sistema,  $z_i = 0$ , e quindi dalle (17)  $s_2 = 0$ , con che le (18) danno

$$\mathcal{A} = s_1, \quad \mathcal{B} = s_2, \quad \underline{\mathcal{C} = s_1 + s_2 = \mathcal{A} + \mathcal{B}},$$

il che dimostra l'asserto.

**27. ELLISSE D'INERZIA.** — In alcuni casi interessa lo studio della distribuzione dei momenti d'inerzia rispetto ad assi concorrenti in un punto  $O$  e giacenti in un piano  $\pi$  passante per  $O$ . Un esempio tipico è quello dei sistemi piani, appartenenti al piano considerato (n. prec.). In ogni caso la variazione dei momenti di inerzia intorno ad  $O$ , secondo la interpretazione geometrica chiarita al n. 23, è caratterizzata dall'ellisse d'inerzia  $e$ , che si ottiene segnando con  $\pi$  l'ellissoide di inerzia  $E$  relativo ad  $O$ . Se questa ellisse  $e$  si riferisce ai suoi assi principali  $O\xi$ ,  $O\eta$  e si denotano con  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{K}'$  i rispettivi momenti di inerzia, la rispettiva equazione è data da

$$(22) \quad \underline{\mathcal{K}\xi^2 + \mathcal{K}'\eta^2 = 1};$$

e il momento d'inerzia  $J_r$  relativo ad una qualsiasi retta  $r$  per  $O$  in  $\pi$ , i cui coseni direttori rispetto ad  $O\xi\eta$  siano  $\alpha$  e  $\beta$  vale (n. 20)

$$(23) \quad \underline{J_r = \mathcal{K}\alpha^2 + \mathcal{K}'\beta^2}.$$

Ciò premesso, dimostriamo per l'ellisse d'inerzia  $e$  la seguente notevole proprietà: *La distanza dal centro  $O$  di una qualsiasi tangente all'ellisse d'inerzia è proporzionale alla radice quadrata del momento d'inerzia  $J_r$  relativo alla parallela per  $O$  alla tangente considerata ed è data precisamente (in valore assoluto) da*

$$(24) \quad \underline{p = \sqrt{\frac{J_r}{\mathcal{K}\mathcal{K}'}}}$$

Infatti, se si indicano con  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  le coordinate del punto di contatto della tangente ad  $e$ , si rileva dalla rispettiva equazione

$$\mathcal{K}\xi_1\xi + \mathcal{K}'\eta_1\eta = 1 \quad \text{Tangente}$$

che i coseni direttori della normale a codesta tangente (orientata da  $O$  verso la tangente) e la distanza  $p$  di questa da  $O$  sono dati da

$$\frac{\mathcal{K}\xi_1}{\sqrt{\mathcal{K}^2\xi_1^2 + \mathcal{K}'^2\eta_1^2}}, \quad \frac{\mathcal{K}'\eta_1}{\sqrt{\mathcal{K}^2\xi_1^2 + \mathcal{K}'^2\eta_1^2}}, \quad p = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}^2\xi_1^2 + \mathcal{K}'^2\eta_1^2}}$$

Di qui risulta che i coseni direttori della parallela  $r$  (per  $O$ ) alla tangente (orientata nell'uno o nell'altro verso) valgono

$$\alpha = \frac{\pm \mathcal{K}\eta_1}{\sqrt{\mathcal{K}^2\xi_1^2 + \mathcal{K}^2\eta_1^2}} = \pm \mathcal{K}\eta_1 p, \quad \beta = \frac{\mp \mathcal{K}\xi_1}{\sqrt{\mathcal{K}^2\xi_1^2 + \mathcal{K}^2\eta_1^2}} = \mp \mathcal{K}\xi_1 p,$$

cosicchè la (23) diventa

$$J_r = \mathcal{K}\mathcal{K}(\mathcal{K}\xi_1^2 + \mathcal{K}\eta_1^2)p^2,$$

e poichè, in virtù della (22), essa si riduce a

$$J_r = \mathcal{K}\mathcal{K}p^2,$$

risulta dimostrata la (24).

28. Dalla proprietà or ora stabilita segue più in generale che se, in corrispondenza ad ogni retta  $r$  per  $O$ , si conducono da una parte e dall'altra, le parallele che hanno da  $O$  la distanza  $p' = \lambda\sqrt{J_r}$ , dove  $\lambda$  è un arbitrario coefficiente costante di proporzionalità, l'involuppo delle rette così ottenute è l'ellisse  $e'$ , omotetica alla  $e$ , essendo  $p'/p$ , cioè, in base alla (24),  $\lambda\sqrt{\mathcal{K}\mathcal{K}}$  il rapporto di omotetia tra  $e'$  ed  $e$ .

Se, in particolare, si prende  $\lambda = 1/\sqrt{m}$ , dove  $m$  denota la massa totale del sistema, si perviene ad un'ellisse  $e_0$  tale che la distanza di ciascuna sua tangente dalla parallela  $r$  per il centro è data da  $\sqrt{J_r/m}$ , cioè precisamente dal raggio  $\delta_r$  di girazione del sistema rispetto alla  $r$ . In quanto il rapporto di omotetia fra l'ellisse  $e_0$  e la  $e$  vale  $\sqrt{\mathcal{K}\mathcal{K}/m}$ , l'equazione della  $e_0$  è data dalla

$$\mathcal{K}\xi^2 + \mathcal{K}\eta^2 = \frac{\mathcal{K}\mathcal{K}}{m},$$

ossia, ove si denotino con  $h$  e  $k$  i raggi di girazione corrispondenti ai due assi  $O\xi$ ,  $O\eta$ , talchè sia  $\mathcal{K} = mh^2$ ,  $\mathcal{K} = mk^2$  da

$$\frac{\xi^2}{k^2} + \frac{\eta^2}{h^2} = 1.$$

Si tratta, dunque, della ellisse, che ha per semiassi, secondo  $O\xi$  e  $O\eta$ , i raggi di girazione relativi ad  $O\eta$  e  $O\xi$  rispettivamente; e, più in generale, la distanza dal centro di ogni sua tangente fornisce il raggio di girazione relativo al diametro parallelo alla tangente considerata.

**§ 7. - Momenti d'inerzia  
di corpi, superficie e linee materiali. - Esempi.**

29. È appena necessario avvertire che la nozione di momento di inerzia e le proprietà relative si possono senz'altro estendere dal caso di masse discrete a quello di masse distribuite con continuità in volumi, superficie o linee.

Basta riportarsi alle considerazioni, con cui è stata giustificata l'analoga estensione per i centri di gravità (n. 14).

Dal punto di vista del calcolo, tutto si riduce a scambiare, nella formula di definizione

$$J = \sum m_i \delta_i^2,$$

e più generalmente dovunque compariscano somme estese ai punti di  $S$ , le somme stesse con integrali estesi al campo  $C$  (volume, superficie o linea) occupato dal sistema.

Così, se  $dC$  è un elemento generico di campo intorno ad un punto  $P$  e si denotano con  $dm$  la massa dell'elemento, con  $\delta$  la distanza di  $P$  dall'asse  $r$ , con  $\mu$  la densità (cubica, superficiale o lineare) in  $P$ , avremo

$$(25) \quad J = \int_C \delta^2 dm = \int_C \mu \delta^2 dC,$$

che, per un sistema omogeneo, può scriversi

$$(25') \quad J = \mu \int_C \delta^2 dC.$$

30. PARALLELEPIPEDO RETTO OMOGENEO. — Il baricentro  $O$  è il punto d'incontro delle diagonali (n. 15). I tre piani mediani (cioè paralleli alle facce) condotti per  $O$  sono piani di simmetria e quindi (n. 25) piani principali dell'ellissoide centrale; cosicchè conformemente all'osservazione generale del n. 23, tutto si riduce ad assegnare i momenti  $s_1, s_2, s_3$ , rispetto a questi tre piani.

Indichiamo al solito con  $\mu$  la densità (per ipotesi, costante); e siano  $a, b, c$  le lunghezze dei tre spigoli. Sarà  $m = \mu abc$ .

Poniamo in  $O$  l'origine delle coordinate, e dirigiamo gli assi secondo gli spigoli, con che le equazioni delle sei facce sono

$$x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{b}{2}, \quad z = \pm \frac{c}{2}.$$

Avremo

$$s_1 = \mu \iiint x^2 dx dy dz,$$

dove le integrazioni rispetto ad  $x$ ,  $y$ ,  $z$  vanno ordinatamente estese tra

$$-\frac{a}{2} \text{ e } +\frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} \text{ e } +\frac{b}{2}, \quad -\frac{c}{2} \text{ e } +\frac{c}{2}.$$

Dacchè la funzione integranda  $x^2$  non dipende nè da  $y$ , nè da  $z$ , si può integrare rispetto a questi due argomenti per un  $x$  generico, il che dà

$$s_1 = \mu bc \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 dx,$$

e quindi, ricordando che la massa totale vale  $\mu abc$ ,

$$s_1 = \mu bc \frac{2}{3} \frac{a^3}{8} = m \frac{a^2}{12}.$$

Per sostituzione circolare sulle lettere  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , si ha manifestamente

$$s_2 = m \frac{b^2}{12}, \quad s_3 = m \frac{c^2}{12},$$

donde i momenti principali:

$$\mathcal{A} = m \frac{b^2 + c^2}{12}, \quad \mathcal{B} = m \frac{c^2 + a^2}{12}, \quad \mathcal{C} = m \frac{a^2 + b^2}{12};$$

e i corrispondenti giratori:

$$\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{12}}, \quad \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{12}}, \quad \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}}.$$

**31. RETTANGOLO OMOGENEO.** — Il centro  $O$  del rettangolo ne è il baricentro. Il piano del rettangolo e i due piani perpendicolari ai lati condotti per  $O$  sono manifestamente piani principali, sicchè gli assi principali sono le parallele ai lati e la perpendicolare al piano del rettangolo.

La valutazione dei momenti e dei giratori può farsi anche senza calcolo diretto (che sarebbe del resto assai semplice), riportandosi al caso precedente. Consideriamo infatti un parallelepipedo omogeneo di lati  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e di densità cubica  $\mu$  e supponiamo e trascurabile di fronte ad  $a$ ,  $b$ , sicchè il parallelepipedo riesca assimilabile ad un rettangolo omogeneo, corrispondendo ad ogni suo elemento  $dC$  la massa  $\mu cdC$ , e quindi la densità superficiale (costante)  $\nu = \mu c$ .

Si può evidentemente fare in modo che  $v$  assuma un valore prefissato, anche riservandosi di far convergere  $c$  a zero: basta immaginare che la densità cubica del parallelepipedo vada crescendo in conformità, adottandosi per  $\mu$  il valore  $v/c$ .

Per lo scopo nostro, basta del resto notare che, data la genesi del rettangolo materiale come limite del parallelepipedo, la massa totale  $m$  del rettangolo è, in ogni caso (anche al decrescere indefinito di  $c$ ), la stessa  $m$  del parallelepipedo.

Ciò posto, se nelle formule relative al parallelepipedo, nelle quali intervengono soltanto  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ed  $m$ , si pone  $c = 0$ , si hanno senz'altro le formule corrispondenti, relative al rettangolo omogeneo.

Saranno dunque

$$\mathcal{A} = m \frac{b^3}{12}, \quad \mathcal{B} = m \frac{a^3}{12}, \quad \mathcal{C} = m \frac{a^2 + b^2}{12}$$

i tre momenti (principali) relativi alle mediane del rettangolo, e alla perpendicolare comune nel loro punto d'incontro;

$$\frac{b}{\sqrt{12}}, \quad \frac{a}{\sqrt{12}}, \quad \left| \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{12} \right.$$

i corrispondenti giratori. Come si vede,  $\mathcal{C}$  coincide con  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ , il che doveva essere in base all'osservazione generale del n. 26.

**32. ELLISSOIDE OMOGENEO.** — Il centro e i tre piani principali dell'ellissoide costituiscono manifestamente il baricentro del corpo ed i piani principali del suo ellissoide centrale d'inerzia.

Detti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i semiassi del dato ellissoide,  $\mu$  la densità, sarà  $\frac{4}{3}\pi abc$  il volume dell'ellissoide, e quindi

$$m = \frac{4}{3}\pi\mu abc$$

la massa totale. Sarà poi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'equazione della superficie terminale riferita agli assi, e ci troveremo qui ancora ricondotti (n. 23) al calcolo di  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ . Basterà anzi valutarne uno solo, perchè gli altri due se ne potranno senza altro desumere permutando circolarmente le lettere  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

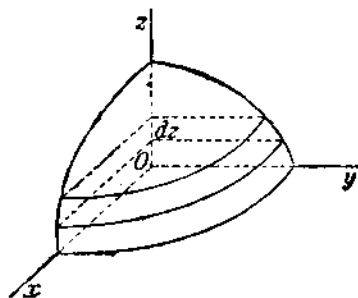


Consideriamo per es.

$$s_z = \iiint z^2 dx dy dz,$$

dove l'integrazione va estesa al campo racchiuso dall'ellissoide.

Per eseguire la integrazione nel modo più spiccio, immaginiamo di decomporre il campo di integrazione in dischi elementari di spessore  $dz$ , compresi tra piani paralleli al piano  $z = 0$ . La funzione  $z^2$  sotto il segno rimane costante sopra ciascun disco o il contributo, recato all'integrale triplo dal disco, sarà evidentemente il prodotto di  $z^2$  per il volume del disco, la cui base, corrispondentemente ad un generico valore di  $z$ , è la sezione del nostro ellissoide col piano cui compete quel valore di  $z$ . Il contorno di tale sezione è un'ellisse, che si proietta in vera grandezza sul piano  $xy$  nell'ellisse di equazione



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}.$$

ossia

$$\frac{x^2}{\left(a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

I semiassi di tale sezione ellittica sono pertanto

$$a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \quad b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}},$$

sicchè l'area vale

$$\pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

e il volume del disco elementare:

$$\pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz.$$

Per esaurire il campo, bisogna evidentemente far variare  $z$  da  $-c$  a  $+c$ . L'espressione di  $s_z$  può dunque essere scritta

$$s_z = \mu \pi ab \int_{-c}^c z^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz.$$

L'effettiva integrazione porge

$$s_2 = \frac{4}{15} \pi \mu abc,$$

o più semplicemente, introducendo la massa totale  $m$ ,

$$s_2 = m \frac{c^2}{5}$$

Ne seguono i valori analoghi

$$s_1 = m \frac{a^2}{5}, \quad s_3 = m \frac{b^2}{5};$$

e per conseguenza i momenti principali

$$\mathcal{A} = m \frac{(b^2 + c^2)}{5}, \quad \mathcal{B} = m \frac{(c^2 + a^2)}{5}, \quad \mathcal{C} = m \frac{(a^2 + b^2)}{5},$$

nonchè i corrispondenti giratori

$$\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{5}}, \quad \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{5}}, \quad \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}.$$

**33. SFERA.** — Il momento d'inerzia  $J_0$  di una sfera omogenea di raggio  $R$ , rispetto ad un suo diametro, si otterrà da una qualsiasi delle trovate espressioni di  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , facendovi  $a=b=c=R$ .

Avremo quindi

$$J_0 = \frac{2}{5} mR^2,$$

e il raggio di girazione sarà

$$\sqrt{\frac{2}{5}} R.$$

**34. MOMENTO DI INERZIA, RISPETTO ALL'ASSE, DI UN CILINDRO OMOGENEO DI RIVOLUZIONE, LIMITATO DA DUE PIANI PARALLELI.** — Diciamo  $R$  il raggio del cilindro,  $h$  la sua altezza,  $\mu$  la densità,  $J$  il cercato momento d'inerzia. Possiamo risparmiarci il calcolo diretto, usando del seguente artificio. Il momento  $J$  è una funzione del raggio  $R$ , ed è chiaro, che, quando ( $h$  e  $\mu$  rimanendo inalterati)  $R$  si accresce di  $dR$ ,  $J$  subisce un aumento  $dJ$  che è il momento d'inerzia di uno strato cilindrico di raggio interno  $R$  e spessore  $dR$ . Siccome la distanza dei punti dello strato dall'asse è costantemente  $R$  (a meno di infinitesimi), e la massa totale dello strato è

$$\mu \cdot 2\pi R h dR,$$

avremo

$$\frac{dJ}{dR} = 2\pi\mu h R^2.$$

Ne segue:

$$J = \frac{1}{2} \pi\mu h R^3 + \text{cost.},$$

e siccome per  $R = 0$ , si ha  $J = 0$ , risulterà  $J = \frac{1}{2} \pi\mu h R^3$ .

La massa totale  $m$  del cilindro è  $\mu\pi R^2 h$ , onde si può scrivere

$$J = \frac{1}{2} m R^2,$$

e il raggio di girazione vale  $R/\sqrt{2}$ .

**35. DISCO CIRCOLARE OMOGENEO.** — Dal caso del cilindro si può evidentemente passare a quello del disco, immaginando che l'altezza  $h$  divenga infinitesima. Come al n. 31, si ha, per il disco, una densità superficiale  $\nu$  legata a  $\mu$  dalla relazione

$$\nu = h\mu,$$

mentre  $m$  ed  $R$  conservano i loro significati, sicchè per il momento assiale e per il corrispondente raggio di girazione seguitano a valere le espressioni  $mR^2/2$  ed  $R/\sqrt{2}$ , rispettivamente.

## CAPITOLO XI.

### PRINCIPIO DI REAZIONE. CONDIZIONI NECESSARIE PER L'EQUILIBRIO DI UN CORPO.

#### § 1. — Principio di reazione.

1. I postulati meccanici, ammessi nel Cap. VII, e riassunti nella equazione fondamentale della Dinamica, non riguardano che forze applicate ad un medesimo punto materiale. Poichè qui ci proponiamo di iniziare lo studio della Meccanica dei corpi, ciascuno dei quali va considerato come un *insieme di punti materiali*, siamo condotti necessariamente a tener conto di sistemi di forze applicate a punti materiali diversi, sul cui mutuo comportamento nulla ci dicono i postulati or ora ricordati. È perciò necessario ricorrere ancora una volta alla osservazione diretta dei fatti per trarne, con una conveniente idealizzazione, qualche nuovo principio.

Considerati due punti materiali  $P$  e  $Q$ , supponiamo che in certe determinate circostanze si possa riconoscere che sopra uno dei punti, ad es. su  $P$ , agisca una forza  $F$ , *dovuta all'altro punto  $Q$* , intendendosi con ciò che la forza  $F$  venga a mancare non appena si rimuova il punto  $Q$ , lasciando tutto il resto, per quanto è possibile, inalterato. Così accade generalmente, per citare il caso più ovvio, quando si tratta di azioni esercitate dagli elementi materiali  $P$  e  $Q$  di due corpi a contatto: queste azioni cessano infatti, quasi sempre, al cessare del contatto. Si immagini, ad es., un tallone  $Q$  che poggi e preme sopra un punto  $P$  del pavimento, oppure l'estremità  $Q$  di una fune assicurata ad un gancio  $P$ . La pressione sull'appoggio, la sollecitazione del gancio sono manifestamente dovute all'altro corpo  $Q$  (piede o fune).

In tutti questi casi l'esperienza ci dice che all'azione esercitata da  $Q$  su  $P$  si contrappone una forza direttamente opposta o *reazione*, esplicita da  $P$  su  $Q$ : così negli esempi dianzi indicati siamo condotti a ritenere che il tallone risenta una resistenza pari allo sforzo di pressione, che esso esercita sull'appoggio; l'estremità della fune, attaccata al gancio subisca una tensione esattamente contraria alla trazione, con cui essa sollecita il gancio. Più generalmente, nel caso di un punto materiale vincolato, alla reazione

che esso risente da parte dei vincoli fa riscontro una forza direttamente opposta che cimenta i vincoli stessi (e deve quindi in ogni applicazione concreta mantenersi al di sotto di un certo limite per evitare guasti o rotture).

Queste ovvie osservazioni sperimentali chiariscono nei casi più semplici il contenuto del seguente postulato che fu esplicitamente riconosciuto da LEONARDO, ed enunciato, come *Lex tertia* della meccanica, dal NEWTON, e che si suol chiamare PRINCIPIO DELLA REAZIONE DIRETTAMENTE OPPOSTA ALL'AZIONE (o semplicemente PRINCIPIO DI REAZIONE): *Tutte le volte che un punto materiale P è soggetto, per la presenza di un altro punto materiale Q, all'azione di una certa forza F, a questa fa riscontro, tanto in condizioni di quiete come in condizioni di moto, una forza direttamente opposta — F (reazione) esercitata da P su Q.*

Giova notare che, quando si tratta di azioni fra punti materiali  $P$  e  $Q$  che non si trovino ad immediato contatto, il principio di reazione testè formulato implica che le due forze esercitanti si fra i due punti, in quanto debbono essere direttamente opposte ed applicate rispettivamente in  $P$  e  $Q$ , abbiano come linea di azione comune la congiungente dei due punti.

## § 2. — Condizioni necessarie di equilibrio comuni a tutti i sistemi materiali.

2. FORZE INTERNE ED ESTERNE. — Sia  $S$  un sistema materiale qualsiasi, cioè un sistema costituito da uno o più corpi naturali (solidi, pastosi od anche liquidi o gassosi). Consideriamolo, secondo la veduta fissata una volta per tutte, come un certo insieme di punti materiali e immaginiamolo soggetto alla sollecitazione di un sistema di forze, fra le quali annovereremo anche le reazioni, che rappresentano le azioni di quegli eventuali vincoli, che limitano la libera mobilità dei singoli punti materiali di  $S$ .

Per lo studio meccanico del dato sistema è di importanza fondamentale il premettere una osservazione. Fissato in  $S$  un punto materiale  $P$ , potremo sempre, almeno in via ipotetica, riconoscere, fra le forze (sia attive che vincolari) agenti sul sistema, quelle che risultano applicate a  $P$ , e classificarle in due categorie:

1°) Forze esercitate su  $P$  dagli altri punti dello stesso sistema  $S$ , e in particolare da quelli contigui a  $P$ . Queste diconsi *forze (attive o vincolari) interne.*

2°) Forze di altra origine, cioè dovute ad influenze estranee al sistema, come ad es. il peso, se  $S$  si suppone immerso nell'ordi-

nario campo della gravità, o le *reazioni di appoggio* di  $P$  su corpi non appartenenti ad  $S$ , ecc. Le forze di questa categoria (siano esse attive o vincolari) diconsi *esterne*.

Non è inutile avvertire che di solito, quando si parla, senza ulteriore specificazione, di forze agenti su di un sistema, si intende alludere alle sole forze esterne.

3. Dalla definizione stessa di forze interne e dal principio di reazione discende per esse una notevole proprietà. Poichè ogni forza interna  $f$  agente su di un generico punto  $P$  del sistema proviene da un altro punto  $Q$  del sistema stesso, ad essa fa riscontro, pel principio di reazione, una forza  $-f$  esercitata da  $Q$  su  $P$  e perciò pur essa interna. Di qui risulta che le forze interne, considerate nel loro insieme, sono a due a due direttamente opposte, cosicchè si conclude che *in ogni sistema materiale sollecitato, le forze interne sono, per la loro stessa natura, tali che i vettori applicati, che le rappresentano, costituiscono un sistema equivalente a zero od equilibrato*, cioè avente nulli il risultante e il momento risultante (rispetto ad ogni centro di riduzione).

Giova notare che questo teorema è pur applicabile ad ogni sistema  $S'$ , ottenuto isolando idealmente una parte del sistema dato  $S$ ; occorre soltanto badare alla circostanza evidente che delle forze agenti su  $S'$  risultano esterne ad esso non soltanto quelle che già erano esterne ad  $S$ , ma, in generale, anche talune di quelle che rispetto ad  $S$  erano interne, cioè precisamente le forze esercitate su  $S'$  da punti di  $S$  non appartenenti ad  $S'$ .

4. EQUAZIONI CARDINALI DELL'EQUILIBRIO. — Ciò premesso, supponiamo che un sistema materiale  $S$ , sotto l'azione di certe forze, sia in *equilibrio*, con che si intende dire che, ove  $S$  sia ad un dato istante in quiete, le forze considerate non determinino su di esso alcun fenomeno di moto.

Ora se, come già pocanzi si è supposto, agli eventuali vincoli sussistenti fra i punti di  $S$  si immaginano sostituite le rispettive forze vincolari, il sistema si può considerare come costituito da un insieme di punti materiali liberi, ciascuno dei quali è in equilibrio sotto l'azione delle forze (attive e vincolari) agenti su di esso. Perciò, se le forze agenti su di un generico punto  $P$  del sistema si distinguono in esterne ed interne e si denota con  $F$  la risultante delle prime, con  $f$  quella delle seconde, si avrà per ogni singolo punto di  $S$  (VII, n. 11)

$$F + f = 0 \quad \text{ossia} \quad F = -f.$$

Consideriamo allora da una parte il sistema di tutte le forze esterne  $F$  e dall'altra quello di tutte le forze interne  $f$  agenti in  $S$ . Poichè questo ultimo sistema è vettorialmente equivalente a zero (n. prec.), tale sarà anche il sistema delle  $F$  (I, n. 42), cioè: *se un qualsiasi sistema materiale sollecitato è in equilibrio, il sistema di vettori applicati che rappresentano le forze (attive e vincolari) esterne, agenti sul sistema, è equivalente a zero.*

Se, rispetto ad un qualsiasi centro di riduzione  $O$ , sono  $R$  ed  $M$  il risultante e il momento risultante delle forze esterne, la precedente condizione necessaria di equilibrio si traduce (I, n. 42) nelle due equazioni vettoriali

$$(1) \quad R = 0, \quad M = 0;$$

ed è opportuno ricordare che, se  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) sono i punti del sistema o, quanto meno, quelli cui sono effettivamente applicate forze esterne (attive o vincolari) ed è  $F$ , la risultante di tutte codeste forze agenti su  $P_i$ , si ha (I, n. 33)

$$R = \sum_1^N F_i, \quad M = \sum_1^N (P_i - O) \wedge F_i.$$

Perciò, se si adotta una terna di riferimento che abbia per origine il centro  $O$  di riduzione dei momenti, e, rispetto a questa terna, si denotano con  $x_i, y_i, z_i$  le coordinate di  $P_i$ , con  $X_i, Y_i, Z_i$  le componenti di  $F_i$ , le (1), proiettate sugli assi prescelti, danno luogo alle sei equazioni scalari

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^N X_i = 0, \quad \sum_1^N Y_i = 0, \quad \sum_1^N Z_i = 0; \\ \sum_1^N (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \quad \sum_1^N (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \quad \sum_1^N (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \end{array} \right.$$

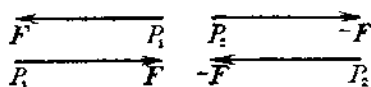
Se poi si tratta di una distribuzione continua di materia (a tre, o due, o una dimensione), le somme suindicate vanno sostituite con integrali di campo (a tre, o due, o una dimensione) estesi a tutti gli elementi materiali di  $S$ , su cui agiscono forze esterne.

Le equazioni (1) od (1'), che, come si è visto, esprimono condizioni necessarie per l'equilibrio di ogni possibile sistema materiale, diconsi *equazioni cardinali od universali dell'equilibrio.*

5. A valutare la grande generalità delle equazioni cardinali giova osservare che, se un sistema materiale  $S$ , sotto una data sollecitazione esterna, è in equilibrio, è pure in equilibrio ogni sua parte  $S'$ , quando la si consideri sollecitata da tutte quelle forze

(esterne o, eventualmente, interne ad  $S$ ) che agiscono su  $S'$  e sono, rispetto ad esso, esterne (n. 3); cosicchè le (1) o le (1') risultano applicabili non soltanto all'intero sistema  $S$ , ma anche ad ogni sua parte  $S'$ , per la quale sia possibile riconoscere le forze sollecitanti esterne, anche solo nel loro comportamento complessivo, rappresentato dal loro risultante e dal loro momento risultante rispetto al centro di riduzione.

Ma al pregio della generalità si contrappone, per le equazioni cardinali, lo svantaggio che esse sono, in generale, necessarie ma *non sufficienti* per l'equilibrio del sistema. Per convincersene, basta considerare il caso più semplice possibile, cioè quello di due punti materiali liberi  $P_1$  e  $P_2$ , sollecitati, lungo la loro congiungente, da



due forze direttamente opposte (repulsive o attrattive)  $F$  e  $-F$ .

Il sistema di codeste due forze soddisfa manifestamente alle con-

dizioni cardinali e, ciò non di meno, i due punti non sono certamente in equilibrio, perchè su ciascuno agisce una forza (totale) non nulla.

Perciò, in generale, le equazioni cardinali, per sè sole, permettono di assodare, per un dato sistema materiale  $S$ , sollecitato da date forze esterne  $F$ , la *possibilità* dell'equilibrio, non di stabilirne la effettiva sussistenza. Più precisamente, per discutere in base alle condizioni cardinali il problema dell'equilibrio del dato sistema  $S$ , si comincerà col ridurre, coi noti procedimenti della teoria dei vettori (I, § 6), il sistema di vettori applicati  $F$  a qualche sistema più semplice, su cui sia facile riconoscere se il risultante e il momento risultante (rispetto ad un qualche centro) siano nulli. Se ciò non si verifica, si è senz'altro certi che il sistema  $S$  non è in equilibrio; mentre invece, se il risultante e il momento risultante sono nulli, l'equilibrio è possibile, ma per decidere se esso effettivamente sussista, occorre in generale un'ulteriore indagine diretta del problema.

Notiamo che, nel caso di un sistema  $S$  pesante, l'insieme dei pesi dei singoli punti di  $S$  è *vettorialmente* equivalente al loro risultante (peso totale di  $S$ ) applicato nel baricentro del sistema.

Ma, ad evitare equivoci, non è inutile rilevare esplicitamente che in ogni caso la considerazione di sistemi di forze *vettorialmente* equivalenti al dato sistema di forze esterne  $F$  ha qui un valore puramente deduttivo, in ordine alla applicazione delle equazioni cardinali; e sarebbe in generale erroneo l'interpretare codesti sistemi di forze, vettorialmente equivalenti, come sostituibili l'uno all'altro, quanto ai loro effetti meccanici.



Ci occuperemo nel prossimo Capitolo di una importante classe di sistemi materiali, pei quali codesta equivalenza vettoriale dei sistemi di forze esterne si traduce in una equivalenza meccanica.

**6. CONDIZIONI NECESSARIE E SUFFICIENTI.** — In quest'ordine di idee, giova enunciare e ritenere fin d'ora un importante criterio statico, detto talora *principio di disgregazione*, che giustificheremo a suo tempo (nella meccanica dei sistemi continui, Vol. II, Cap. X). Si è visto che, per un sistema materiale  $S$  generico, le equazioni cardinali (due vettoriali, o sei scalari) sono necessarie, ma di regola non sufficienti ad assicurare l'equilibrio. Invece *occorre e basta che le suaccennate condizioni cardinali siano verificate* (non soltanto per l'intero sistema  $S$ , ma) *per una qualsiasi porzione  $S'$  di  $S$ .*

### 7. ESEMPLI.

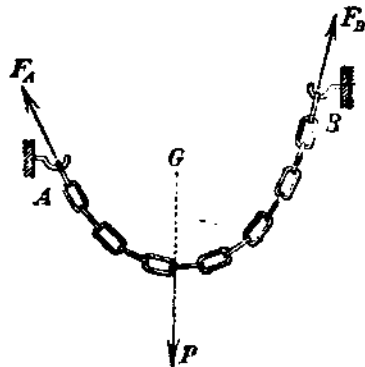
a) Come applicazione semplicissima delle equazioni cardinali dell'equilibrio, consideriamo una catena pesante, appesa agli estremi a due ganci  $A$  e  $B$ , e in equilibrio. Qui le forze esterne sono:

1°) le reazioni  $F_A$ ,  $F_B$  dei due ganci;

2°) i pesi dei singoli anelli, ai quali, finchè si tratta di applicare le equazioni cardinali, possiamo sostituire il peso totale  $P$  della catena applicato sulla verticale del baricentro  $G$  di essa. Per le (1) abbiamo che condizione necessaria per l'equilibrio si è che i tre vettori  $F_A$ ,  $F_B$ ,  $P$  costituiscano un sistema equilibrato; per il che si richiede (I, n. 51) che i tre vettori siano complanari, che le linee di azione di  $F_A$ ,  $F_B$  si incontrino in un punto della linea di azione di  $P$ , cioè della verticale del baricentro  $G$ , e che infine il risultante di  $F_A$  ed  $F_B$  sia direttamente opposto a  $P$ .

Di qui risulta, in particolare, che, quando un pezzo di catena  $AB$ , sostenuto agli estremi, si trova in equilibrio sotto l'azione della gravità, il baricentro deve giacere nel piano verticale, passante per i due punti di sospensione.

b) Consideriamo più generalmente un qualsivoglia sistema pesante  $S$ , appoggiato al suolo in più punti, o comunque con esso collegato. Il principio di reazione costituisce il fondamento logico



dell'ovvia intuizione diretta, secondo cui, facendo variare le modalità degli appoggi o dei collegamenti, non si riesce ad attenuare l'azione *complessiva* risentita dal suolo, cioè il risultante, ovvero il momento risultante delle forze trasmessegli da  $S$ . Basta pensare (riferendosi al caso specifico in cui si tratta di soli pesi) che, in quanto il sistema  $S$  si trova in equilibrio, dovrà annullarsi il risultante di tutte le forze esterne (ad  $S$ ), il quale consta del peso totale  $\mathbf{p}$  delle varie parti di  $S$  e della somma  $\mathbf{R}$  delle reazioni esercitate dal suolo. Per il principio di reazione, il complesso delle forze trasmesse da  $S$  al suolo ha per somma  $-\mathbf{R}$ , ossia  $\mathbf{p}$ , per quanto s'è detto or ora, che è indipendente dalle modalità dell'appoggio, come appunto si è pocanzi affermato. Analogamente per il momento risultante.

## CAPITOLO XII.

### STATICA DEI SOLIDI.

#### § 1. - Postulato caratteristico dei solidi e sue conseguenze.

1. Le condizioni cardinali che, per un sistema materiale qualsiasi, riconoscemmo soltanto *necessarie* per l'equilibrio (n. 4 del Cap. prec.), diventano anche sufficienti nel caso dei *solidi*. Per stabilire questo importante risultato, dobbiamo anzitutto caratterizzare quei sistemi materiali, ai quali in Meccanica si dà codesto nome di *solidi*.

In realtà, tutti i corpi materiali, quando siano sottoposti a pressioni o trazioni abbastanza energiche, si *deformano*; ma quei corpi, che anche volgarmente si chiamano solidi, son dotati di una particolare refrattarietà alle deformazioni, talchè, anche sotto l'azione di pressioni o trazioni, relativamente notevoli, non presentano variazioni sensibili di forma.

Idealizzando codesta proprietà, in Meccanica si chiama *solido* ogni sistema materiale che, di fronte a qualsiasi sollecitazione ed in qualsiasi condizione di moto (o di quiete), si comporti come *assolutamente rigido*, nel senso dato a questa parola in Cinematica (III, § 1), vale a dire come un sistema di punti materiali vincolati in guisa che, presi a due a due in tutti i modi possibili, conservino inalterate le mutue distanze, qualunque sia la sollecitazione e qualunque sia lo stato di moto (o di quiete) del sistema.

Ma qui, per precisare ulteriormente il comportamento dei solidi rispetto alle sollecitazioni esterne, convien ricorrere ancora alla esperienza fisica. Se consideriamo un solido naturale, che già sia in equilibrio sotto l'azione di date forze esterne, e a codesta sollecitazione aggiungiamo, in due punti quali si vogliano  $P$  e  $Q$  del solido, due forze *direttamente opposte*  $F$  e  $-F$ , non soltanto verificiamo, come s'è notato pocanzi, che i due punti  $P$  e  $Q$  conservano inalterata la mutua distanza, ma constatiamo che l'intero sistema si mantiene in equilibrio. Siamo così indotti ad ammettere il seguente principio (*postulato caratteristico dei solidi*, da rite-

nersi praticamente valido entro quei limiti di approssimazione in cui è lecito riguardare i solidi naturali come assolutamente rigidi): *L'equilibrio di un solido non si altera, quando a due suoi punti quali si vogliono si applicano due forze direttamente opposte.*

2. Sappiamo (Cap. prec., n. 4) che, se un sistema materiale  $S$  qualsiasi (cioè anche non solido) è in equilibrio sotto una data sollecitazione e agli eventuali vincoli sussistenti fra i punti di  $S$  si immaginano sostituite le rispettive forze vincolari, il sistema si può riguardare come costituito da un insieme di punti materiali liberi, ciascuno dei quali è in equilibrio sotto l'azione delle forze (attive e vincolari) agenti su di esso. Perciò, in base alle condizioni (necessarie e sufficienti) per l'equilibrio di un punto (VII, n. 11), l'equilibrio di  $S$  non risulta turbato se a due o più forze, applicate ad un medesimo punto del sistema, si sostituisce la rispettiva risultante o, viceversa, se una forza agente su di un punto di  $S$  si decompone comunque in più forze, applicate a quel medesimo punto. Nel caso particolare di un solido  $S$ , tenendo conto insieme di codesta osservazione generale e del postulato caratteristico del n. prec., vediamo che, *senza pregiudizio dell'equilibrio*, si possono eseguire sulle forze agenti su di  $S$  entrambe le operazioni vettoriali, che al n. 43 del Cap. I abbiamo chiamato *elementari* e che permettono di passare da un dato sistema di vettori applicati ad ogni altro sistema equivalente, cioè avente lo stesso risultante e lo stesso momento risultante (rispetto ad un centro di riduzione qualsiasi). Di qui si conclude che: *L'equilibrio di un solido non si altera, quando al sistema delle forze effettivamente agenti su di esso si sostituisca un qualsiasi altro sistema di forze, equivalenti (vettorialmente) al primitivo.*

## § 2. - Condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un solido.

3. Il prec. teor. permette senz'altro di dimostrare che, come si è preannunziato dappprincipio, *nel caso dei solidi le condizioni cardinali dell'equilibrio sono non soltanto necessarie, come avviene per ogni possibile sistema materiale, ma anche sufficienti.*

Supponiamo, infatti, che un solido  $S$  sia sollecitato da certe forze esterne  $F$  soddisfacenti alle condizioni cardinali

$$(1) \quad R = 0, \quad M = 0,$$

cioè costituenti un sistema equivalente a zero.

Se indichiamo genericamente con  $f$  le forze interne, il solido  $S$  si può considerare come un sistema di punti materiali liberi, soggetti all'azione delle  $F$  e delle  $f$ . Poichè equivale (vettorialmente) a zero tanto il sistema delle  $F$  (per ipotesi) quanto quello delle  $f$  (per la loro natura di forze interne, n. 3 del Cap. prec.), anche il sistema complessivo delle  $F$  e delle  $f$  è equivalente ad un sistema di vettori tutti nulli. Ma ove ogni punto di  $S$  fosse soggetto ad una forza nulla (cioè sottratto ad ogni sollecitazione) il sistema sarebbe evidentemente in equilibrio. Perciò, in base al teor. del n. prec., esso sarà pur in equilibrio sotto la sollecitazione effettiva delle  $F$  ed  $f$ , equivalente a quella di sole forze nulle.

Concludiamo, dunque, che pei solidi l'equilibrio è caratterizzato dalle due equazioni vettoriali (1), o dalle sei equazioni scalari equivalenti

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_i X_i = 0, \quad \Sigma_i Y_i = 0, \quad \Sigma_i Z_i = 0; \\ \Sigma_i (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \quad \Sigma_i (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \quad \Sigma_i (x_i Y_i - y_i X_i) = 0 \end{array} \right.$$

dove, come ben sappiamo, le sommatorie vanno estese a tutti e soli i punti del solido cui sono applicate forze esterne (XI, n. 4); e si debbono sostituire con integrali di campo, quando codesti punti costituiscano distribuzioni continue (ad una, o due, o tre dimensioni).

In casi speciali le equazioni (1') possono ridursi a meno di sei, in quanto alcune di esse già risultino identicamente soddisfatte. Per es., se le forze esterne agiscono tutte in un medesimo piano  $\pi$ , giace in  $\pi$  anche la loro risultante  $R$ , mentre il momento risultante  $M$  (rispetto ad un qualsiasi centro preso su  $\pi$ ) è perpendicolare a codesto piano; talchè, quando si scelga  $\pi$  come piano di riferimento  $z = 0$ , le (1') si riducono alle tre equazioni

$$\Sigma_i X_i = 0, \quad \Sigma_i Y_i = 0, \quad \Sigma_i (x_i Y_i - y_i X_i) = 0.$$

Naturalmente nei casi più comuni di sollecitazioni costituite da due o tre forze soltanto oppure da forze parallele (in particolare, pesi), ecc., sono senz'altro utilizzabili i procedimenti di riduzione e i criteri di equivalenza indicati nella teoria dei sistemi di vettori applicati (Cap. I, §§ 6, 7). Così, in particolare, affinchè sia in equilibrio un solido sollecitato da due sole forze esterne, occorre e basta che queste siano direttamente opposte, ecc.

### § 3. — Equilibrio dei solidi vincolati.

4. Un solido  $S$  può essere soggetto, oltre che ai vincoli interni di rigidità, a *vincoli esterni*, realizzati per esempio da contatti con altri solidi o da cerniere o articolazioni, sferiche o cilindriche, che ne fissino un punto o una retta, ecc. In ognuno di questi casi, ove si vogliano applicare al solido  $S$ , supposto sollecitato da un dato sistema di forze, le condizioni cardinali, necessarie e sufficienti per l'equilibrio, bisogna annoverare fra le forze esterne anche le reazioni vincolari provenienti dai vincoli suaccennati; cosicchè le forze esterne, come del resto si è già accennato al n. 2 del Cap. prec., vanno distinte in due categorie:

1°) *forze attive* o, come anche diremo, *direttamente applicate*, che indicheremo genericamente con  $F$ ;

2°) *forze vincolari* o *reattive*, che indicheremo con  $\Phi$ .

Le condizioni di equilibrio (1) o (1') implicano tanto le  $F$ , quanto le  $\Phi$ . Ma in generale i dati direttamente conosciuti sono le forze attive  $F$  e le modalità di realizzazione dei vincoli esterni, non le corrispondenti reazioni  $\Phi$ , le quali compaiono nel problema come *incognite ausiliarie*.

Perciò in ogni caso concreto interessa, in primo luogo, saper riconoscere sui dati se l'equilibrio è possibile, cioè assegnare condizioni di equilibrio espresse per mezzo dei soli elementi cognitivi; in secondo luogo, determinare anche le incognite reazioni  $\Phi$ , o almeno stabilire delle relazioni tra esse e le forze applicate  $F$ . Naturalmente questa indagine concernente le reazioni potrà essere omessa, quando, per il problema che si studia, basti aver riguardo al comportamento delle forze attive.

5. **SOLIDO CON UN PUNTO FISSO.** — Sia  $O$  il punto del solido  $S$  che si suppone fisso. Un esempio concreto è fornito da una *leva* o, più genericamente, da un corpo pesante  $S$ , sospeso ad un gancio, mediante un occhiello  $O$ , rigidamente connesso al corpo. Occhiello e gancio essendo assimilabili a punti, si può dire assicurata l'immobilità di  $O$ , qualunque sia la sollecitazione agente sul corpo, purchè essa non sia tale da strappare il gancio o l'occhiello, o da provocare deformazioni sensibili.

Se al solido  $S$  sono applicate certe date forze  $F$ , per avere tutte le forze esterne agenti su  $S$  dobbiamo aggiungere alle  $F$  la reazione  $\Phi$ , che si suscita in  $O$  per effetto del dispositivo che ne assicura la immobilità; e allora, se si denotano con  $R$  ed  $M$  il risultante e il momento risultante *rispetto ad*  $O$  delle sole forze

attive  $F$ , abbiamo come condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio del solido (in quanto è nullo il momento di  $\Phi$  rispetto ad  $O$ ) le due equazioni

$$(2) \quad \mathbf{R} + \Phi = 0,$$

$$(3) \quad \mathbf{M} = 0.$$

Quest'ultima ci dice che, quando l'equilibrio sussiste, si annulla il momento risultante delle forze attive, rispetto al punto tenuto fisso, o, in altre parole, l'insieme delle forze attive equivale (vettorialmente) ad un'unica forza  $\mathbf{R}$  applicata in  $O$  (I, n. 52).

Reciprocamente è facile riconoscere che la (3) assicura l'equilibrio; e ciò si dimostra in base al teor. del n. 2, secondo cui basta che l'equilibrio sussista per una sollecitazione vettorialmente equivalente a quella effettiva (che, nel caso attuale, consta delle  $F$ , della  $\Phi$  e delle varie forze interne  $f$ ).

Conserviamo la  $\Phi$  e, come sistema equivalente alle  $F$  e alle  $f$  (le quali ultime nel loro insieme sono già equivalenti a zero), assumiamo l'unica forza  $\mathbf{R}$  applicata al punto  $O$ . Con ciò il punto  $O$  si trova sollecitato dalla forza totale  $\mathbf{R} + \Phi$ ; e poichè il punto è, per ipotesi, immobile, risulta verificata la (2) e l'equilibrio del solido è assicurato.

Di solito si dice più brevemente: *Quando è soddisfatta la (3), il sistema delle forze attive equivale ad un'unica forza applicata in  $O$ , e questa rimane necessariamente equilibrata dalla reazione del punto fisso.*

Questo enunciato conciso, la cui completa giustificazione in base ai postulati risiede nei vari passaggi logici, che abbiamo avuto cura di precisare, risponde ad una diretta intuizione fisica e va tenuto presente, perchè si può invocare con vantaggio in altri casi analoghi.

In ultima analisi, la (2) non costituisce alcuna restrizione per le forze attive  $F$ , ma serve semplicemente a individuare la reazione  $\Phi$  del punto fisso  $O$ . Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è la (3), ossia (giova ripeterlo) l'annullarsi del momento risultante di tutte le forze direttamente applicate rispetto al punto tenuto fisso.

**6. SOLIDO CON ASSE FISSO.** — Qui si intenderà che la immobilità dell'asse sia assicurata da speciali dispositivi, che fissino almeno due punti di esso, ed eventualmente più di due o anche infiniti (costituenti uno o più segmenti). Modelli fisici di un solido con un asse fisso sono offerti per il primo caso dal eoperchio di una cassa avente due cerniere, per il secondo da una ruota di mulino, da un volano, ecc. Una porta o un'imposta di finestra non si possono

in generale riguardare come solidi con asse fisso, bensì come solidi *ad asse scorrevole su se stesso* (in un dato verso), in quanto per lo più esse sono costruite in modo che si possano togliere dai cardini, sollevandole nella direzione dell'asse.

Sia dunque  $S$  un solido girevole intorno ad un asse fisso  $a$ , con cui esso sia rigidamente connesso; e, al solito, indichiamo genericamente con  $F$  le forze esterne *attive*, che lo sollecitano. Oltre alle  $F$  agiranno su  $S$  certe reazioni vincolari  $\Phi$ , che saranno tutte applicate in punti dell'asse, onde avranno ciascuna momento nullo rispetto a codesta retta  $a$ . Ma per l'equilibrio è *necessario* che si annulli il momento risultante di tutte le forze esterne rispetto ad un qualsivoglia punto e quindi anche rispetto ad una retta qualsiasi, e in particolare all'asse; cosicchè, indicando con  $M_a$  il momento risultante delle  $F$  rispetto ad  $a$ , concludiamo intanto che *condizione necessaria per l'equilibrio è*

$$(4) \quad M_a = 0.$$

7. Il risultato testè ottenuto si può invertire; cioè si può dimostrare che la condizione (4) è anche sufficiente per l'equilibrio. Ma a tale scopo occorre premettere alcune osservazioni di carattere vettoriale.

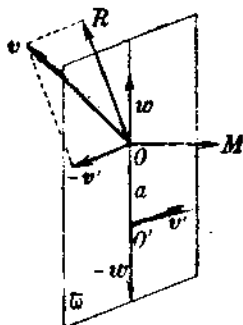
Se i vettori di un sistema  $\Sigma$  sono tutti applicati in punti di una retta  $a$ , ciascuno di essi ha, rispetto alla  $a$ , momento nullo, cosicchè riesce nullo altresì il momento risultante  $M_a$ , rispetto alla  $a$ , dell'intero sistema  $\Sigma$ . In altre parole, ove si prenda come centro di riduzione un punto qualsiasi  $O$  della  $a$ , il momento risultante  $M$  di  $\Sigma$  rispetto ad  $O$  è ortogonale alla  $a$ .

Ora qui importa rilevare che è questa la sola particolarità dei sistemi di vettori applicati in punti di una retta; cioè, se, data una retta  $a$ , si prefissano ad arbitrio due vettori  $R$  ed  $M$ , sotto la sola condizione che il secondo sia ortogonale ad  $a$ , esistono infiniti sistemi (fra loro equivalenti) di vettori applicati in punti della retta, aventi  $R$  ed  $M$  rispettivamente come risultante e come momento risultante rispetto al punto  $O$ .

Cominciamo col dimostrare che esistono sistemi siffatti, costituiti da due soli vettori, rispettivamente applicati in  $O$  ed in un altro punto  $O'$ , scelto ad arbitrio sulla retta data  $a$ . Condotta per  $O$  il piano  $\bar{\omega}$ , perpendicolare ad  $M$ , e perciò contenente la  $a$ , che si è supposta perpendicolare a codesto vettore, si considerino in  $\bar{\omega}$ , i due vettori  $-v'$  e  $v'$ , che risultano univocamente determinati dalle condizioni di essere applicati rispettivamente in  $O$  ed  $O'$  in direzione ortogonale alla  $a$  e di costituire una coppia di momento



$M$  (I, n. 50). Il sistema costituito dai due vettori  $R$  e  $-v'$  applicati in  $O$  e dal vettore  $v'$  applicato in  $O'$ , ha, manifestamente, il risultante  $R$  e, rispetto ad  $O$ , il momento risultante  $M$ ; talchè, se si pone  $v = R - v'$ , il sistema dei due vettori  $v$  e  $v'$ , applicati rispettivamente in  $O$  ed  $O'$ , soddisfa alle condizioni volute.



Il più generale sistema di due soli vettori applicati in  $O, O'$ , che rispetto ad  $O$  abbia il risultante  $R$  e il momento risultante  $M$ , si otterrà aggiungendo a  $v$  e  $v'$  altri due vettori applicati in  $O$  ed  $O'$  e costituenti un sistema equilibrato, vale a dire (I, n. 54)

due vettori direttamente opposti  $w$  e  $-w$ , e aventi, perciò, come linea di azione la  $a$ . Al variare della intensità  $w$  di codesti due vettori aggiuntivi, si otterranno appunto infiniti sistemi di due vettori soddisfacenti al nostro enunciato; ed è manifesto che l'arbitrarietà della scelta di  $w$  corrisponde, in sostanza, alla possibilità di guidare, nella costruzione indicata dapprincipio sul piano  $\bar{\omega}$ , i due vettori costituenti una coppia di momento  $M$ , in una direzione qualsiasi, anzichè ortogonale ad  $a$ .

È infine chiaro che si avrà una arbitrarietà molto maggiore, quando si lasci cadere la condizione che il sistema sia costituito di due soli vettori; giacchè, in tal caso, si potranno aggiungere al sistema dei due vettori  $v$  e  $v'$  quanti si vogliano vettori applicati in punti della retta costituenti un sistema equilibrato.

8. Ciò premesso, torniamo al solido  $S$  con asse fisso  $a$ , per dimostrare che l'annullarsi del momento risultante  $M_a$  delle forze direttamente applicate  $F$  rispetto ad  $a$  è condizione sufficiente per l'equilibrio; e a tale scopo ragioniamo in modo perfettamente analogo a quello del n. 5.

Ammissa la (4), esistono, come risulta dal n. prec., infiniti sistemi  $\Sigma$  di vettori equivalenti al sistema delle forze attive  $F$ , e applicati a quei punti di  $a$  che per ipotesi sono materialmente fissati. Lo stesso può dirsi per il complesso delle reazioni che si destano in tali punti; e sotto una tale sollecitazione (di forze attive e di reazioni equivalenti, se non identiche a quelle che in realtà si esplicano) il corpo rimane manifestamente in equilibrio (si ricordi quanto è stato osservato al n. 5 circa la reazione, che si esercita in un punto fisso e circa il sistema delle forze interne). Esso rimane dunque in equilibrio, anche sotto l'azione delle forze  $F$  effettivamente applicate.

Abbiamo pertanto il teorema:

*Affinchè le forze  $F$  direttamente applicate ad un solido, fissato per un asse, si facciano equilibrio è necessario e basta che esse abbiano momento risultante nullo rispetto a quest'asse.*

9. Nel caso di un solido con un punto fisso  $O$ , la reazione  $\Phi$  suscitata in  $O$  da una data sollecitazione, che mantenga in equilibrio il solido, risulta determinata *univocamente* dalle equazioni cardinali, come direttamente opposta al risultante delle forze attive.

Quando invece si tratta di un solido con asse fisso, le equazioni cardinali dell'equilibrio, per ciò che riguarda le varie reazioni (certamente applicate in punti dell'asse), dicono soltanto che il loro risultante e il loro momento risultante (rispetto ad un dato punto) devono essere direttamente opposti al risultante e all'analogo momento risultante delle forze attive, e lasciano *indeterminata* (subordinatamente a codeste condizioni d'insieme) la distribuzione locale delle reazioni nei singoli punti dell'asse, che son tenuti fissi. Più precisamente, le equazioni cardinali portano a concludere che in condizioni statiche l'azione dei vincoli si può sostituire, *indifferentemente*, con uno *qualsiasi* dei sistemi (fra loro vettorialmente equivalenti) di reazioni, applicate nei punti tenuti fissi, e aventi risultante e momento risultante direttamente opposti a quelli delle forze attive. Ora questa conclusione appare senz'altro insoddisfacente, giacchè, dal punto di vista fisico, è indiscutibile che, in ogni caso di equilibrio, le reazioni sono univocamente determinate. Si ha insomma un nuovo caso di *indeterminazione statica*, che va ravvicinato a quello già incontrato ai nn. 9, 10 del Cap. IX, e proviene dal fatto che nei principi della Statica dei solidi si prescinde dalle deformazioni provocate dalle forze. Ciò è ben lecito in prima approssimazione, perchè le deformazioni sono generalmente lievi, talchè le conseguenze che si traggono da codesta ipotesi schematica rispondono sufficientemente ai risultati dell'esperienza. Ma non si può pretendere di rispecchiare in tutto e per tutto le circostanze di fatto, quando si trascura di proposito qualche elemento essenziali del fenomeno. Non dobbiamo dunque meravigliarci, per quanto in particolare concerne le reazioni  $\Phi$ , se riesciamo soltanto a fissarne delle proprietà d'insieme (vale a dire che hanno risultante e momento risultante, direttamente opposti a quelli delle forze attive  $F$ ), ma non possiamo coglierne la distribuzione punto per punto. A ciò si perviene nella *Teoria dell'elasticità*, dove appunto si tiene conto in modo essenziale delle accennate deformazioni.

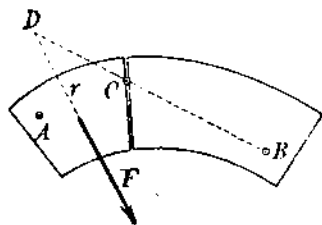
10. Convien considerare a parte il caso in cui i punti dell'asse  $a$ , effettivamente fissati, sono soltanto due,  $O$  ed  $O'$  (p. es. i due cardini di una porta, quando siano proprio fissi; cfr. l'osservazione del n. 6). Le reazioni cui realmente sottostà l'asse  $a$ , sono allora, per necessità di cose, due sole: una  $\Phi$  applicata in  $O$ , l'altra  $\Phi'$  in  $O'$ . Dacchè, il solido essendo in equilibrio, si conosce il risultante di queste forze e il loro momento risultante (eguali ed opposti agli analoghi elementi di  $F$ ), concludiamo in base al n. 7, che la indeterminazione di  $\Phi$ ,  $\Phi'$  si riduce in questo caso a due componenti assiali, direttamente opposti. Se si sapesse, per es., che  $\Phi$  è normale all'asse fisso, entrambe le reazioni rimarrebbero completamente determinate.

In pratica si presenta sensibilmente questo caso, quando si tratta di un asse fissato alla sola estremità  $O'$  mentre l'altro perno di estremità  $O$  è semplicemente inserito nel relativo supporto (*cuscinetto*).

In teoria, data l'invariabilità della distanza  $OO'$ , anche il punto  $O$  risulta con ciò fissato. Effettivamente, data la non perfetta rigidità dell'asse e la conseguente possibilità di (piccole) deformazioni elastiche e soprattutto termiche, l'accennato dispositivo lascia libero il punto  $O$  di secondare le eventuali dilatazioni o contrazioni longitudinali, e permette di evitare sforzi pericolosi, quali potrebbero talora prodursi, quando si volesse mantenere rigorosamente invariata la distanza  $OO'$ .

Per rendersi conto poi che, in queste condizioni, la reazione  $\Phi$  in  $O'$  va ritenuta normale all'asse, basta assimilare  $O'$  ad un punto materiale costretto a restare sopra un segmento di retta (l'asse del foro del cuscinetto), e osservare che, perno e cuscinetto essendo in generale ben lubrificati, si può sensibilmente prescindere dall'attrito (IX, n. 15).

11. ESEMPIO DI CRITERIO ADDIZIONALE ATTO A TOGLIERE L'INDETERMINAZIONE STATICA (ARCO A TRE CERNIERE). — Nel Cap. seguente studieremo in generale l'equilibrio dei sistemi articolati (aste rigide, o più generalmente corpi solidi, collegati fra loro a cerniera); ma è istruttivo e interessante per la pratica indicare fin d'ora un caso particolare, in cui il sistema risulta per se stesso indeformabile. Si tratta del cosiddetto arco a tre cerniere, che è il sistema costituito da due solidi  $\alpha$  e  $\beta$ , girevoli a cerniera il primo intorno ad un punto fisso  $A$ , il secondo intorno ad un punto  $B$ .



pur esso fisso, e ulteriormente collegati fra loro in un punto  $C$ , non allineato con  $A$  e  $B$ , mediante una cerniera cilindrica ad asse perpendicolare al piano  $ABC$ . Questo piano si dirà *piano di sollecitazione*, in quanto ci limiteremo a considerare forze attive giacenti in esso; e il complesso delle forze esterne, rispetto al sistema  $(\alpha, \beta)$ , comprenderà, oltre codeste forze attive, le due reazioni  $\Phi_A$ ,  $\Phi_B$ , a priori incognite, che si destano nei punti fissi  $A$  e  $B$ .

Ora, qualunque sia questa sollecitazione esterna, è manifesto che il sistema sta in equilibrio, in quanto la sua immobilità è assicurata dalla fissità dei punti  $A, B$  e dall'indeformabilità del triangolo  $ABC$ , sicchè valgono le equazioni cardinali dell'equilibrio; ma, come già nel caso di un solido girevole intorno ad un asse fisso (nn. 9, 10), codeste equazioni non bastano per la univoca determinazione delle reazioni  $\Phi_A, \Phi_B$ , giacchè, comportandosi il sistema  $(\alpha, \beta)$  come un unico solido, è sempre lecito, senza turbamento dell'equilibrio, aggiungere due forze direttamente opposte lungo la retta  $AB$ .

Tuttavia, in questo caso dell'arco a tre cerniere, basta tener conto ulteriormente della sua particolare struttura per togliere questa indeterminazione statica e ottenere in pari tempo anche la reazione, che in  $C$  esercitano l'una sull'altra le due parti  $\alpha$  e  $\beta$ .

Infatti le condizioni cardinali debbono in ogni caso risultare soddisfatte per qualsiasi sistema materiale in equilibrio e, quindi, anche per qualsiasi parte di un tale sistema; e nel caso che ci interessa conviene applicare quest'osservazione separatamente ad  $\alpha$  e a  $\beta$ . Indichiamo, a tale scopo, con  $\Phi$  l'azione che  $\beta$  esercita su  $\alpha$  attraverso la cerniera  $C$ , e che, per ipotesi è l'unica forza che  $\alpha$  risente per il suo collegamento con  $\beta$ . Naturalmente, per il principio di reazione, sarà  $-\Phi$  l'analoga azione che esercita invece  $\alpha$  su  $\beta$ . Con ciò, oltre alle forze direttamente applicate, che sono dati della questione, abbiamo, come ulteriori forze esterne, per la parte  $\alpha$  le reazioni  $\Phi_A$  e  $\Phi$ , per la parte  $\beta$  le reazioni  $\Phi_B$  e  $-\Phi$ . Tenendo presente che siamo in un problema piano, abbiamo complessivamente sei incognite, cioè le componenti di  $\Phi_A, \Phi_B, \Phi$ ; e fra queste sei incognite sussistono altrettante equazioni statiche, cioè (n. 3) le tre, che caratterizzano l'equilibrio di  $\alpha$  e le altre tre, che analogamente caratterizzano l'equilibrio di  $\beta$ .

Del resto, per la determinazione effettiva dei vettori  $\Phi_A, \Phi_B, \Phi$ , non è necessario ricorrere alle formule, giacchè essi si possono costruire per via grafica, procedendo come segue <sup>(1)</sup>. Supponiamo

<sup>(1)</sup> Cfr., ad es., K. H. GROSSMANN, *Elemente der elementaren Mechanik*, I Teil, Zürich, 1934, pp. 46-48.

dapprima che una sola delle due parti del sistema, per esempio  $\alpha$ , sia sollecitata, sempre nel piano  $ABC$ , da forze equivalenti ad un'unica forza  $F$ , di cui sia  $r$  la linea d'azione; e applichiamo le equazioni cardinali separatamente ad  $\alpha$  e  $\beta$ . La parte  $\beta$  non essendo direttamente sollecitata, risente soltanto le reazioni in  $B$  e  $C$ , le quali, per l'equilibrio, sono direttamente opposte ed hanno per conseguenza come linea d'azione comune la retta  $BC$ . Resta, dopo ciò, da esprimere che anche  $\alpha$  sta in equilibrio sotto l'azione della forza attiva ( $r, F$ ) e delle due reazioni in  $A$  e in  $C$ , di cui quest'ultima, per quanto si è or ora visto, agisce secondo la retta  $BC$ . Perciò, detto  $D$  il punto d'incontro della  $BC$  con la  $r$ , basta decomporre il vettore  $F$  nei suoi due componenti secondo la  $DA$  e la  $DB$ , per avere in questi due componenti, invertiti di senso, le reazioni che si destano, rispettivamente, in  $A$  e  $C$  (e quindi anche in  $B$ ). Se poi è sollecitata anche la parte  $\beta$ , basta riprendere l'analogo procedimento, prescindendo dalla sollecitazione esterna di  $\alpha$ , e poi comporre i risultati ottenuti separatamente per  $\alpha$  e per  $\beta$ ; e si perviene così alla univoca determinazione di tutte le reazioni in base ai soli principi della Statica dei solidi.

L'elegante artificio, con cui si è ottenuta la soluzione del problema proposto, trova la sua giustificazione nel verificarsi simultaneo delle due circostanze seguenti: 1°) carattere *lineare* delle condizioni di equilibrio, il quale consente di applicare, come si è sostanzialmente fatto, il principio di sovrapposizione (supponendo una prima volta nulla la sollecitazione di  $\beta$ , poi quella di  $\alpha$  e infine componendo i risultati parziali così ottenuti); 2°) *unicità* della soluzione del predetto sistema lineare delle condizioni di equilibrio.

#### § 4. - Equilibrio di solidi appoggiati.

12. Se un solido si appoggia ad altri corpi per uno o più punti  $P$ , avremo in questi punti delle reazioni  $\Phi$ ; e, applicando sempre il criterio generale del n. 4, le condizioni di equilibrio si ricaveranno, esprimendo che è equivalente a zero il sistema costituito dalle forze attive  $F$  e dalle  $\Phi$ .

Ad ognuna di queste si trasportano, per postulato ovviamente suggerito dalla natura delle cose, e del resto confermato dall'esperienza quotidiana, i caratteri che abbiamo riconosciuto nel caso di un semplice punto materiale (cfr. Cap. IX, n. 7). E precisamente, fissato un generico appoggio  $P$ , lo si dovrà ritenere atto a favorire l'equilibrio, offrendo una reazione  $\Phi$ , *a priori* indeterminata (ed eventualmente nulla), la cui intensità dipende dalla

sollecitazione, ma può essere qualunque, mentre la direzione rimane in ogni caso circoscritta alla falda esterna del cono d'attrito, e coincide con la normale esterna (al corpo su cui ha luogo l'appoggio), quando l'appoggio è, o si riguarda, privo d'attrito. In base a questo comportamento delle  $\Phi$ , vanno ricavate, caso per caso, le condizioni quantitative dell'equilibrio, vale a dire quelle cui rimangono subordinatamente sottoposte le  $F$ , per poter costituire, assieme alle  $\Phi$ , un sistema equivalente a zero.

Insomma, condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un solido appoggiato è che le forze attive si possano equilibrare per mezzo di reazioni  $\Phi$  quali gli appoggi  $P$  sono atti ad offrire (cioè contenute nei rispettivi coni di attrito).

E finchè si resta nelle generalità, nulla si può aggiungere di più preciso; sicchè giova porsi senz'altro nelle circostanze concrete, che hanno maggior interesse per la pratica.

13. Soltanto converrà tener presente la massima, altrettanto semplice quanto importante, che, *nelle questioni statiche, prescindendo dall'attrito, si agisce in favore della sicurezza.*

Si vuol dire con ciò che le conclusioni ricavate, considerando uno o più appoggi come privi d'attrito, sono a fortiori atte ad assicurare l'equilibrio, anche quando siavi attrito, e riescono quindi perfettamente applicabili alla realtà (dove, in maggiore o minore misura, l'attrito si presenta sempre).

La giustificazione dell'asserto è immediata. Basta pensare che, se le  $F$  rimangono equilibrate da reazioni normali, lo sono perciò stesso da reazioni appartenenti alle dovute falde dei coni d'attrito (qualunque sia l'angolo di apertura di questi coni).

Come si vede, quando si prescinde dall'attrito si vengono ad imporre alle forze attive condizioni esuberanti, e si garantisce, per dir così, la stabilità, essendo lecito presumere che, se anche quelle condizioni non saranno rigorosamente soddisfatte, ma si tratterà di sollecitazioni  $\Sigma'$ , le quali non siano troppo discoste da una  $\Sigma$ , che le verifica, l'equilibrio seguirà a sussistere. Questo perchè si potrà, in generale, equilibrare  $\Sigma'$  con reazioni applicate negli appoggi e abbastanza prossime a quelle (normali), che equilibrano  $\Sigma$ , cioè appunto contenute, come è necessario e sufficiente, nelle falde esterne dei coni d'attrito.

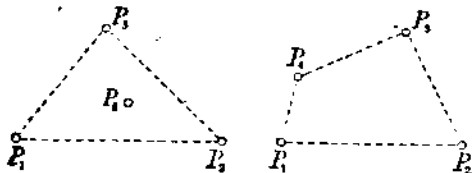
Tuttavia importa rilevare che possono darsi casi di equilibrio, non soltanto favoriti, ma traenti addirittura dall'attrito la possibilità di sussistere. Tale, ad es., il caso di una scala a pioli appoggiata al suolo e ad un muro verticale (caso che discuteremo con ogni dettaglio ai nn. 18-19). Se mancasse affatto l'attrito, l'equi-

librio non potrebbe mai sussistere, per quanto poco fosse inclinata la scala sulla verticale: gli appoggi non le impedirebbero di seguire la sollecitazione della gravità, scivolando lungo il suolo e lungo il muro.

Bisogna dunque (pur fissando il principio che si abbonda in precauzione quando si tengono come regole pratiche di equilibrio quelle che corrispondono ad un attrito nullo) aver essenziale riguardo all'attrito, quando si riconosce che il non farlo allontanerebbe soverchiamente dalla realtà, imponendo restrizioni artificiali o sopprimendo addirittura stati di equilibrio praticamente interessanti.

Ciò posto, rivolgiamoci ad un'importante categoria di questioni, in cui si può prescindere dall'attrito senza inconvenienti, rendendo con ciò la discussione assai semplice e spedita.

14. CORPO PESANTE SU SOSTEGNO ORIZZONTALE. — Sia  $S$  un solido appoggiato per più punti  $P$  ad un suolo orizzontale. Se i punti d'appoggio  $P$  sono in numero finito, diremo *perimetro d'appoggio* quello d'un poligono convesso, avente tutti i suoi vertici in punti  $P$ , e tale che nessun appoggio resti al di fuori di esso (mentre ve ne possono essere di interni). Naturalmente, anche prefissato il numero di punti di appoggio, possono darsi vari casi quanto al numero dei lati del perimetro, a seconda della configurazione del sistema dei punti  $P$ . È ciò che apparisce già nel caso semplice di quattro appoggi, anche escludendo che tre siano allineati.



La nozione di perimetro d'appoggio si estende facilmente al caso generale in cui si abbiano infiniti appoggi, alcuni dei quali eventualmente costituenti pezzi di linee, o addirittura porzioni di piano. Solo bisognerà intendere che, in tal caso, il perimetro d'appoggio possa anche essere *mistilineo* (cioè formato in parte da segmenti rettilinei, in parte da archi di curva); ma si dovrà pur sempre soddisfare la condizione che ogni eventuale vertice sia un appoggio.

Comunque siasi determinato un perimetro d'appoggio, in ogni punto  $P$  si avrà una certa reazione  $\Phi$ ; e se adottiamo l'ipotesi ideale dell'assenza di attrito, tutte codeste reazioni risultano perpendicolari al piano di appoggio, vale a dire verticali verso l'alto, talchè costituiscono nel loro insieme un sistema di forze parallele

e concordi. Qualunque sia l'intensità delle singole reazioni, il loro sistema è (vettorialmente) equivalente al loro risultante (I, n. 58) applicato in un certo punto  $Q$  (centro delle reazioni), il quale è interno, o almeno non esterno ad ogni linea chiusa e convessa che racchiude tutti i punti  $P$  (X, n. 11) e quindi, in particolare, al perimetro di appoggio.

Ora, se il solido è in equilibrio, codesto risultante delle reazioni deve essere equilibrato dal sistema delle forze attive, che qui si riducono ai pesi dei singoli punti materiali di  $S$ , il cui sistema è equivalente al peso totale  $p$  applicato nel baricentro  $G$ . Precisamente il risultante delle reazioni, in condizioni statiche, deve riuscire direttamente opposto al peso  $p$  applicato in  $G$ , onde si conclude che la verticale del baricentro (linea d'azione di  $p$ ) deve passare pel centro  $Q$  delle reazioni, cioè: *Per l'equilibrio di un solido pesante su sostegno piano orizzontale è necessario che la proiezione del baricentro su codesto piano sia interna, o almeno non esterna, al perimetro di appoggio o, come si suol dire in forma concisamente espressiva, che il baricentro sia sostenuto.*

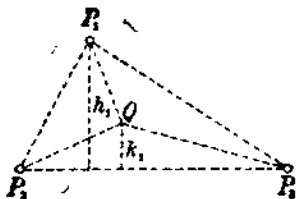
15. *La condizione or ora dimostrata necessaria per l'equilibrio è pur sufficiente.*

Per provarlo, consideriamo dapprima il caso di tre soli punti di appoggio  $P_1, P_2, P_3$ , e, per fissare le idee, supponiamoli non allineati, per quanto il ragionamento valga, senza modificazioni essenziali, anche nel caso così escluso.

Supponiamo, dunque, che la proiezione  $Q$  del baricentro  $G$  del solido sul piano di appoggio sia interna, o almeno non esterna, al triangolo  $P_1P_2P_3$ . Per dimostrare che, in tal caso, il solido è in equilibrio, faremo vedere che si possono determinare (ed anzi in modo unico) tre reazioni, verticali verso l'alto,  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , che applicate rispettivamente in  $P_1, P_2, P_3$ , sono atte ad equilibrare il peso  $p$  del solido, applicato in  $G$ , o ciò che è lo stesso, in  $Q$ .

Per giungere a tale determinazione, esprimiamo anzitutto che è nullo il momento risultante del peso  $p$  e delle tre reazioni  $\Phi_i$  rispetto ad ogni singolo lato del triangolo, p. es. rispetto a  $P_2P_3$ . Poichè le  $\Phi_2, \Phi_3$  non recano a codesto momento risultante nessun contributo, e la  $\Phi_1$  è parallela e di senso contrario a  $p$ , basterà esprimere che sono eguali in valore assoluto i momenti rispetto a  $P_2P_3$  di queste due ultime forze, cioè

$$\Phi_1 h_1 = p k_1,$$





ove si designano con  $h_1$ ,  $k_1$ , le distanze, rispettivamente di  $P_1$  e  $Q$  da  $P_2P_3$ , e con  $\Phi_1$  l'intensità della reazione  $\Phi_1$ . Se si rappresenta con  $\Delta$  l'area del triangolo  $P_1P_2P_3$ , e con  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  quelle dei triangoli parziali  $QP_2P_3$ ,  $QP_3P_1$ ,  $QP_1P_2$ , determinati dal punto  $Q$ , si ha

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{k_1}{h_1},$$

ciò che dà, per la reazione  $\Phi_1$ , l'intensità

$$\Phi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} p,$$

la quale si annulla se  $\Delta_1 = 0$ , cioè se  $Q$  appartiene al lato  $P_2P_3$ .

Analogamente risulta

$$\Phi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} p, \quad \Phi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} p,$$

con evidente significato di  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ .

E queste tre reazioni equilibrano effettivamente il peso  $p$  del corpo, giacchè anzitutto il loro risultante è direttamente opposto a  $p$  (essendo  $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \Delta$ ); e, d'altra parte, basta assumere come centro di riduzione uno dei vertici del triangolo, p. es.  $P_1$ , per constatare che anche il momento risultante di  $p$  e delle  $\Phi_i$  è nullo (in quanto sono nulle tre sue componenti non complanari, secondo i due lati  $P_1P_2$ ,  $P_1P_3$  e secondo la verticale).

16. Se poi gli appoggi sono più di tre, l'ipotesi che il baricentro sia sostenuto assicura pur sempre l'equilibrio, come si vede, p. es., supponendo nulle tutte le reazioni, ad eccezione di tre, e riportandosi al caso precedente: per il che basta scegliere, come è sempre possibile, i tre appoggi corrispondenti, in modo che la proiezione del baricentro non sia esterna al triangolo da essi costituito.

Ma è chiaro che (in questo caso di più che tre punti di appoggio) la distribuzione delle reazioni non risulta individuata; bensì rimane (in base alle pure condizioni statiche dei corpi indeformabili) una indeterminazione tanto maggiore, quanto più grande è il numero degli appoggi. Anche qui, come già nel caso di più di due punti fissi allineati (n. 9), per togliere l'indeterminazione, bisogna fare appello a nuovi dati sperimentali, che completino quelli desunti dall'ipotesi limite di una perfetta rigidità.

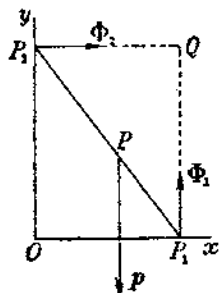
17. UNICITÀ DEL PERIMETRO DI APPOGGIO. — Nei nn. prec. ci siamo riferiti ad un perimetro di appoggio comunque determinato

caso per caso, senza preoccuparci di indagare se per un medesimo sistema di appoggi possano esistere perimetri di appoggio diversi. Ora le proprietà riconosciute al perimetro di appoggio consentono di stabilire che esso è in ogni caso necessariamente unico. Basta a tale scopo tener conto che per l'equilibrio di un solido pesante, appoggiato su di un piano orizzontale, basta che il rispettivo baricentro sia sostenuto. Perciò, se per uno stesso sistema di appoggi si potessero assegnare due distinti perimetri di appoggio, esisterebbe qualche punto  $Q$  appartenente all'uno e non all'altro; ed, ove il sovrastante corpo pesante avesse proprio il baricentro sulla verticale di  $Q$ , si perverrebbe alla conclusione assurda che il corpo dovrebbe, nello stesso tempo, essere e non essere in equilibrio <sup>(1)</sup>.

**18. STATO DI EQUILIBRIO DOVUTO ESCLUSIVAMENTE ALL'ATTRITO DEGLI APPOGGI.** — Come già si preannunziò al n. 13, mostriamo su di un facile problema concreto come talvolta l'equilibrio di un solido appoggiato sia assicurato esclusivamente dall'attrito degli appoggi, talchè sono fisicamente possibili condizioni statiche che l'ipotesi ideale dell'assenza di attrito condurrebbe ad escludere.

Consideriamo una scala a pioli, appoggiata obliquamente al pavimento e ad una parete verticale.

Gli appoggi, corrispondenti alle estremità dei due montanti della scala, sono quattro; ma, data la simmetria geometrica e materiale della figura rispetto al piano verticale equidistante dai due montanti, possiamo schematizzare il problema, rappresentandoci



la scala come un'asta rigida pesante, in un piano verticale e appoggiata in due punti  $P_1$  e  $P_2$ , rispettivamente ad una retta orizzontale  $Ox$  e ad una retta verticale  $Oy$ . Anche ammesso che un uomo sia salito su di un certo piolo della scala, il peso della scala e dell'uomo sono equivalenti al loro risultante  $p$ , che potremo immaginare applicato nel baricentro del sistema scala-uomo o, trasportandolo lungo la sua linea di azione, nel punto  $P$  in cui la verticale del baricentro interseca la  $P_1P_2$  (n. 2).

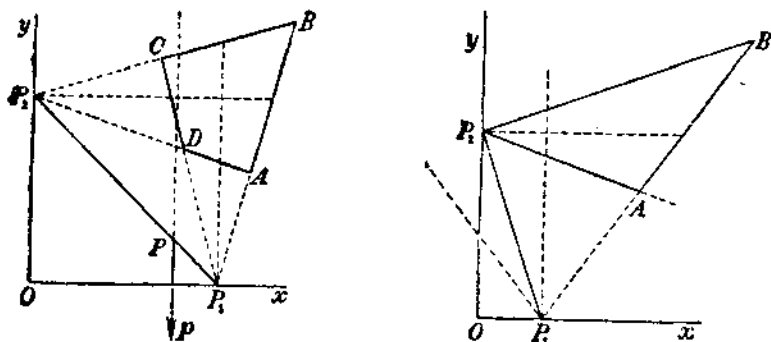
Sarà questo evidentemente un punto interno al segmento  $P_1P_2$ .

<sup>(1)</sup> Questa osservazione ci è stata comunicata dal Prof. E. LAURA della R. Università di Padova.

Per l'equilibrio è necessario e sufficiente che codesta forza  $P$  e le due reazioni  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  in  $P_1$  e  $P_2$  costituiscano un sistema equilibrato, ossia (I, n. 54) che le linee di azione delle tre forze siano concorrenti (essendo esclusa dalla figura stessa la possibilità del parallelismo) e che di più la risultante di  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  sia direttamente opposta al peso totale  $P$ .

Ora se ammettiamo che gli appoggi in  $P_1$  e  $P_2$  siano senza attrito, le due reazioni  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  sono dirette secondo le perpendicolari, nel piano di figura, alle  $Ox$ ,  $Oy$  rispettivamente, e si incontrano, nel punto  $Q$ , pel quale è impossibile che passi la linea d'azione del peso totale in quanto questa è parallela alla  $QP_1$  e interseca il segmento  $P_1P_2$  nel punto  $P$  interno; cosicchè l'ipotesi dell'assenza di attrito ci conduce alla conclusione paradossale che è impossibile che una scala a piuoli appoggiata al pavimento e al muro stia mai in equilibrio.

Il paradosso dipende dal fatto che è appunto l'attrito degli appoggi che assicura la possibilità di quegli stati di equilibrio, che ciascuno di noi ha tante volte constatato direttamente. Per for-



mulare le corrispondenti condizioni di equilibrio, prendiamo in considerazione gli attriti in  $P_1$ ,  $P_2$  e le falde esterne dei conici di attrito, ciascuna delle quali sarà segata dal piano di figura secondo due generatrici, simmetricamente poste rispetto alla relativa normale. Si ottengono così nel piano due angoli di attrito, i quali hanno comune un certo quadrangolo  $ABCD$  (o un triangolo, se la scala forma con la verticale un angolo minore dell'angolo di attrito del suolo, oppure con la orizzontale un angolo minore dell'angolo di attrito della parete). Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio si è che il peso totale possa essere equilibrato da due reazioni concorrenti in un punto della sua linea di azione (verticale del baricentro) e interne ciascuna al rispettivo angolo di attrito; in

altre parole: *Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio della scala si è che la verticale del baricentro abbia almeno un punto comune col quadrangolo (o triangolo) comune ai due angoli di attrito.*

Se, nel caso del quadrangolo, codesta verticale passa per il vertice  $C$  più vicino alla  $y$ , le due reazioni risultano determinate univocamente, in quanto debbono avere le linee di azione  $P_1C$  e  $P_2C$ , e la loro risultante deve essere direttamente opposta al peso totale.

In tutti gli altri casi di equilibrio, la verticale del baricentro ha comune col quadrangolo (o col triangolo) tutto un segmento, e su questo si può scegliere ad arbitrio il punto di concorso delle linee di azione delle due reazioni, *le quali perciò non risultano univocamente determinate* (cfr. n. prec.).

19. In pratica interessa vedere sotto quali condizioni la scala rimanga in equilibrio, qualunque sia la posizione dell'uomo su di essa.

Supposto, per semplicità, che il suolo e la parete abbiano il medesimo coefficiente di attrito, è facile riconoscere che la circostanza richiesta si verifica certamente quando la scala forma colla verticale un angolo  $\alpha$  minore dell'angolo  $\varphi$  di attrito ( $f = \operatorname{tg} \varphi$ ). Invero in tal caso la regione piana comune ai due angoli di attrito è (vedasi la seconda fig. della pag. prec.) un triangolo  $P_2AB$  tale che la verticale di ogni punto di  $P_1P_2$  ha comune con essa un intero segmento (o, almeno, un punto, se si tratta della verticale di  $P_2$ ).

Se poi l'angolo  $\alpha$  della scala colla verticale è maggiore di  $\varphi$  (vedi la prima fig. del n. prec.), il punto più vicino alla parete della regione comune ai due angoli di attrito è manifestamente l'intersezione  $C$  del lato superiore dell'angolo d'attrito della parete col lato sinistro dell'angolo d'attrito del suolo, talchè per l'equilibrio si richiede e basta che la verticale del baricentro non cada fra  $U$  e la parete. Ora, se adottiamo come semiassi (positivi) le  $Ox$ ,  $Oy$  e indichiamo con  $l$  ed  $m$  la lunghezza e la massa della scala e con  $m_1$  ed  $x_1$  la massa e l'ascissa dell'uomo, avremo

$$OP_1 = l \sin \alpha, \quad OP_2 = l \cos \alpha;$$

onde l'ascissa del baricentro del sistema scala-uomo sarà data da

$$\frac{\frac{1}{2} ml \sin \alpha + m_1 x_1}{m + m_1},$$

mentre il punto  $C$ , come intersezione delle due rette  $P_2B$ ,  $P_1D$

di equazioni, rispettivamente

$$y - l \cos \alpha = fx, \quad y = -\frac{x - l \sin \alpha}{f},$$

ha l'ascissa

$$l \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{1 + f^2} = l \cos \varphi \sin (\alpha - \varphi).$$

Perciò la condizione di equilibrio è espressa da

$$\frac{\frac{1}{2} ml \sin \alpha + m_1 x_1}{m + m_1} > l \cos \varphi \sin (\alpha - \varphi).$$

Se si vuole che l'equilibrio sussista, qualunque sia la posizione dell'uomo sulla scala, bisognerà far in modo che la relazione precedente sia soddisfatta per  $x_1 = 0$ , con che varrà a maggior ragione per ogni altro valore (positivo) di  $x_1$ ; cioè dovrà essere

$$\frac{m \sin \alpha}{2(m + m_1)} > \cos \varphi \sin (\alpha - \varphi),$$

ossia

$$m_1 < \left( \frac{\sin \alpha}{2 \cos \varphi \sin (\alpha - \varphi)} - 1 \right) m.$$

Di qui si conclude che, nell'ipotesi di una inclinazione (rispetto alla verticale) maggiore dell'angolo di attrito, non si può senza pericolo aumentare il peso dell'uomo al di là di un certo limite.

## § 5. - Osservazioni sulla realizzazione dei vincoli.

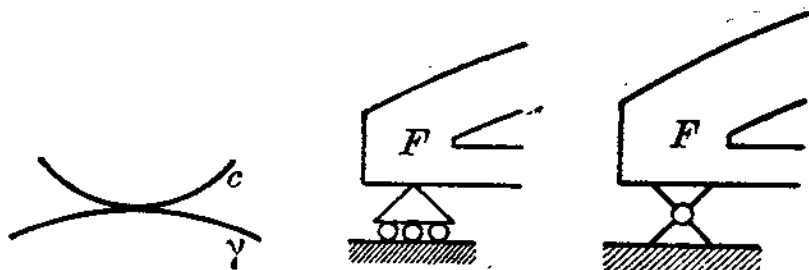
### Schemi grafici di uso corrente nella Tecnica.

20. Nei §§ prec. abbiamo ripetutamente considerato *punti fissi* e *appoggi*, senza precisare le modalità di realizzazione di tali vincoli. Vogliamo ora aggiungere qualche rapido complemento, riferendoci ai sistemi a due dimensioni, cui spesso si può ricondursi nella pratica.

Si tratta allora, come già in Cinematica (Cap. V), di una figura rigida piana  $F$ , la quale si suppone sollecitata esclusivamente da forze situate nel suo piano  $\pi$ ; e i vincoli, cui essa, caso per caso, può essere assoggettata sono riducibili ai seguenti tre tipi elementari:

a) *Appoggio*, materialmente realizzato da un profilo  $\gamma$  (ad es. orlo saliente) del piano  $\pi$ , lungo il quale può *strisciare* (o *roto-*

lare o anche *strisciare e rotolare*) un altro profilo  $c$  (pur esso, ad es., costituito da un orlo saliente) solidale con la figura  $F$ . I Tecnici



generalmente rappresentano questi tipo di vincolo, figurando un carrello schematico, collegato a  $c$  e scorrevole lungo una rotaia tangente a  $\gamma$ .

*b) Punto fisso*, intorno a cui la figura risulta liberamente girevole nel suo piano. I Tecnici chiamano un tal vincolo *cerniera*, in quanto è questo il dispositivo, che di regola, con modalità svariate, lo realizza. Il suo schema figurativo è un semplice cerchietto, intorno al punto idealmente fissato.

*c) Incastro*, che si ha quando non solo è fissato un punto, ma è addirittura impedita alla figura  $F$  ogni rotazione intorno ad esso.

Un vincolo del primo tipo dà luogo, quando si prescinda dall'attrito, ad una reazione (d'intensità a priori indeterminata) diretta normalmente alla tangente comune ai due profili  $c$  e  $\gamma$ . Invece ad un vincolo di tipo *b)* corrisponde una reazione, di cui risulta a priori indeterminata non soltanto l'intensità, bensì anche la direzione (beninteso nel piano del sistema). Infine un incastro  $O$  implica un sistema (piano) generale di azioni reattive, equivalenti nel loro complesso ad una forza qualsiasi applicata in  $O$  e ad una coppia, avente un momento (pur esso d'intensità a priori indeterminata) normale al piano del sistema.

## § 6. - Nozione statica di stabilità dell'equilibrio.

### Esempl.

21. Vi sono dei casi di equilibrio, in cui è possibile assegnare una certa misura numerica della loro *stabilità*. Un esempio semplice ed interessante è fornito dall'equilibrio di un punto materiale appoggiato ad una superficie (scabra).

Le condizioni di equilibrio sono in tal caso (IX, n. 3)

$$(5) \quad F_n > 0, \quad T < fF_n,$$

dove  $f$  denota il coefficiente d'attrito della superficie di appoggio,  $F_n$  la componente della forza attiva secondo la normale interna di codesta superficie e  $T$  il valore assoluto della componente tangenziale.

In base alla seconda delle (5), la differenza  $fF_n - T$ , giammai negativa in condizioni statiche e nulla soltanto negli stati di equilibrio limite, dà in ogni caso la massima intensità che, senza pregiudizio dell'equilibrio, potrebbe essere raggiunta da una sollecitazione tangenziale, aggiunta alla primitiva forza  $F$ . Allora il rapporto

$$\frac{fF_n - T}{F_n},$$

che per le (5) non è mai negativo, determina il margine di sollecitazione tangenziale (per unità di sollecitazione normale) compatibile con l'equilibrio. Esso perciò si assume come misura della *stabilità* dello stato di equilibrio considerato e, manifestamente, permette di confrontare anche casi di equilibrio corrispondenti a valori differenti di  $F_n$  e di  $f$ .

22. Per problemi statici diversi da quello or ora considerato (punto appoggiato su superficie scabra) non sussiste in generale, o almeno non è stata sinora definita, una analoga nozione *quantitativa* di stabilità; tuttavia è possibile in ogni caso un apprezzamento *qualitativo*, che permette di distinguere i diversi stati di equilibrio in *stabili* ed *instabili*.

Il criterio è suggerito dalla intuizione. Per un punto materiale (come, più in generale, per un qualsiasi sistema di punti) appare consentaneo alla nostra intuizione fisica il ritenere *stabile* uno stato di equilibrio se, quando lo si perturbi alcun poco (spostando il punto o il sistema dalla posizione di equilibrio verso un'altra vicinissima, pur essa compatibile coi vincoli), le forze tendono a riportare il punto (o il sistema) alla sua posizione di equilibrio.

Tutto si riduce a dare un senso preciso a codesta tendenza delle forze.

Per il caso elementare di un unico punto, la tendenza della forza ad esso applicata si riconosce manifestamente nella specie dell'angolo, acuto od ottuso, che essa forma collo spostamento di ritorno verso la posizione di equilibrio. Ora questa discriminazione geometrica equivale (Cap. VIII, n. 2) a quella offerta dal

corrispondente lavoro, la quale si estende senz'altro al caso generale, rendendo perfettamente naturale di ammettere che un lavoro sia complessivamente compiuto secondando le forze o in contrasto con esse secondo che esso è motore (cioè positivo) o resistente (cioè negativo). Così, per distinguere se certe date forze hanno o no tendenza generalmente favorevole ad un dato spostamento, basta badare al segno del lavoro totale, che sarebbe compiuto da quelle forze per quel dato spostamento.

Di qui scaturisce la seguente definizione precisa di *stabilità dell'equilibrio* (in senso statico).

Sia  $P$  un punto materiale (od uno dei punti materiali che costituiscono un assegnato sistema) e sia  $F$  la forza che sollecita  $P$  in una sua data posizione di equilibrio  $M$ . Considerato un qualsiasi spostamento compatibile coi vincoli, che faccia passare il punto  $P$  (o il sistema) dalla posizione (o configurazione) di equilibrio  $M$  ad una posizione (o configurazione)  $M'$  vicinissima, sia  $L$  il lavoro totale delle forze agenti su  $P$  (o sui punti del sistema) per lo spostamento da  $M'$  ad  $M$ . Se in un intorno sufficientemente piccolo della posizione (o configurazione) di equilibrio, il lavoro  $L$ , per qualsiasi spostamento compatibile coi vincoli, risulta positivo, l'equilibrio si dice *stabile*. Se esiste anche un solo spostamento per cui risulti  $L < 0$ , l'equilibrio si dice *instabile*, mentre se è sempre  $L = 0$ , l'equilibrio si dice *indifferente*. Se poi è  $L > 0$ , l'equilibrio si suole spesso chiamare ancora stabile; ma parrebbe più proprio dirlo soltanto *non instabile*.

Queste definizioni presuppongono la conoscenza d'ogni forza  $F$ , non solo in corrispondenza alla data posizione di equilibrio  $M$ , ma anche in ogni altra posizione  $M'$ , abbastanza vicina e compatibile coi vincoli.

Come agisca la  $F$ , fuori dello stato di equilibrio che si considera, è implicito nella definizione della forza, allorchè si tratta di forze posizionali; in caso diverso, bisognerà rendersene conto preventivamente a norma delle speciali circostanze di fatto.

23. Lasciamo ormai le generalità, e applichiamo la regola a qualche esempio concreto, in cui si tratterà sempre di forze posizionali, anzi addirittura *conservative*, e quindi tali che, per valutare il lavoro da una generica posizione  $M'$  fino alla posizione di equilibrio  $M$ , non è necessario specificare il cammino.

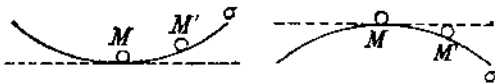
a) *Punto pesante sostenuto da una superficie priva di attrito.* Nella posizione di equilibrio  $M$ , la reazione della superficie o dev'essere eguale ed opposta al peso, quindi diretta verticalmente. Dacchè poi si esclude l'attrito, la reazione stessa è tutta



diretta secondo la normale alla superficie, cioè perpendicolare al piano tangente a  $\sigma$  in  $M$ .

Supposto che si tratti di una superficie convessa, la  $\sigma$ , nelle vicinanze di  $M$ , giacerà tutta al di sopra o tutta al di sotto del detto piano tangente.

Gli spostamenti da considerarsi sono manifestamente quelli per cui è rispettato il legame di appoggio, per cui, cioè,  $P$  passa dalla posizione di equilibrio  $M$  ad un'altra posizione  $M'$ , rimanendo sempre su  $\sigma$ . In tali condizioni la reazione della superficie non eseguisce mai alcun lavoro, perchè si trova sempre diretta perpendicolarmente allo spostamento. Basta dunque occuparsi del peso. Ora, nel primo caso, accade che ogni punto  $M'$  di  $\sigma$  abbastanza vicino ad  $M$ , sta al di sopra di  $M$ . Ne viene che in ogni spostamento  $M'M$  compatibile coi legami, la forza attiva (peso di  $P$ ) fa lavoro essenzialmente positivo. Si ha quindi uno stato di equilibrio stabile.



Nel secondo caso, l'analogo lavoro risulta negativo; e l'equilibrio è per conseguenza instabile.

Qualora la superficie d'appoggio  $\sigma$  sia precisamente un piano orizzontale, il lavoro del peso è nullo per ogni spostamento  $M'M$ ; si ha allora un equilibrio indifferente.

b) Punto materiale attratto verso le facce di un cubo da forze perpendicolari alle facce e crescenti colla distanza.

AmMESSO che, per ogni coppia di facce opposte, la legge di attrazione sia la stessa, il centro  $M$  del cubo è evidentemente una posizione d'equilibrio.

È poi facile riconoscere che si tratta di un equilibrio stabile. Consideriamo infatti una generica posizione  $M'$  interna al cubo. Dacchè le attrazioni crescono colla distanza, delle forze che provengono da una generica coppia di facce opposte, prepondera sempre quella che si riferisce alla faccia più lontana. Ne consegue che quando si torna da  $M'$  verso  $M$  si seconda l'attrazione preponderante, e si effettua lavoro positivo. Tale riesce pertanto il lavoro complessivo delle sei forze, nel passaggio da una generica posizione a quella di equilibrio.

c) Punto libero sollecitato da forze conservative quali si vogliono.

Sia  $U(x, y, z)$  il relativo potenziale;  $M$  una posizione di equilibrio;  $M'$  un'altra posizione qualsiasi vicina ad  $M$ , e si designino con  $U_M, U_{M'}$  i valori rispettivamente assunti dalla funzione  $U$  in  $M$  ed in  $M'$ . Affinchè l'equilibrio in  $M$  sia stabile, si richiede, a norma

della nostra definizione, che il lavoro effettuato dalla forza tra ogni  $M'$  (abbastanza vicina ad  $M$ ) ed  $M$ , riesca positivo; si richiede quindi che sia:

$$U_M - U_{M'} > 0,$$

per ogni  $M'$  appartenente ad un certo intorno di  $M$  (e non coincidente con  $M$ ).

Questo val quanto dire che il *potenziale  $U$  deve ammettere un massimo nella posizione  $M$* .

Si vede subito che, reciprocamente, se  $U$  ha in  $M$  un effettivo massimo, a questa posizione corrisponde uno stato di equilibrio stabile. Anzitutto si ha equilibrio, perchè l'esistenza di un massimo implica, come si sa dal Calcolo, l'annullarsi delle derivate prime  $\partial U/\partial x$ ,  $\partial U/\partial y$ ,  $\partial U/\partial z$ , cioè delle componenti della forza. L'equilibrio è poi stabile, in virtù della stessa disuguaglianza  $U_M - U_{M'} > 0$ , che caratterizza il massimo.

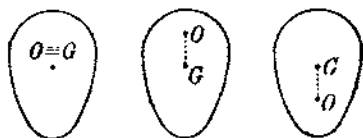
d) *Solido pesante con punto fisso*. Quando il solido è in equilibrio, il momento risultante delle forze attive, rispetto al punto fisso  $O$ , deve annullarsi. Ora notiamo in primo luogo che le forze interne e le reazioni in  $O$  non compiono alcun lavoro in uno spostamento che rispetti la fissità di  $O$ . Ciò è evidente per la reazione, giacchè non si sposta il punto d'applicazione; quanto alle forze interne, esse equivalgono a zero (nel senso della teoria dei vettori) e, come dimostreremo nella Dinamica dei sistemi (Parte II, Cap. IV, n. 3), *questa equivalenza a zero di un sistema di forze basta nel caso dei solidi (non per altro in generale per sistemi quali si vogliano) perchè sia nullo il lavoro da esse compiuto*.

Qui ammettiamolo, ed osserviamo che, se per il nostro solido fissato in  $O$  le forze attive si riducono al peso, dovrà la sua linea d'azione passare per  $O$ , cioè nella posizione di equilibrio, il baricentro  $G$  dovrà trovarsi sulla verticale del punto fisso  $O$ . Ma bi-

sogna distinguere tre casi, secondo che  $G$  coincide con  $O$  o sta al di sotto ovvero al di sopra di  $O$ .

Nel primo caso, in ogni spostamento del solido compatibile coi legami (che cioè lasci fermo il pun-

to), anche il baricentro  $G$  rimane fisso, e quindi il peso fa lavoro nullo (1). Si tratta, in conseguenza, di un equilibrio *indifferente*.



(1) A dir vero, il peso è distribuito nei singoli elementi del corpo, ed è soltanto equivalente (nel senso della teoria dei vettori) ad una forza unica

Nel secondo caso, comunque si muova il corpo attorno ad  $O$ , il baricentro  $G$  si eleva, perchè deve conservarsi alla stessa distanza da  $O$ , e quindi muoversi sopra una sfera, il cui punto più basso è proprio la posizione di partenza, verticalmente sottostante ad  $O$ . Ne consegue che, a partire da una generica posizione fino a quella di equilibrio, il peso del corpo fa un lavoro positivo. L'equilibrio è dunque *stabile*. In modo analogo si constata che, nel terzo caso, si ha un equilibrio essenzialmente *instabile*.

e) *Emisfero omogeneo su piano orizzontale privo di attrito*. Supponiamo che un emisfero omogeneo pesante di centro  $\Theta$  si trovi in equilibrio poggiando, per il suo polo  $P$ , sopra un piano orizzontale in una posizione generica  $Q$  del piano stesso. In queste condizioni l'asse  $PO$  dell'emisfero è verticale, e siccome, per l'omogeneità del solido, il baricentro  $G$  appartiene alla  $PO$ , peso e reazione risultano, come è necessario, direttamente opposti. Uno spostamento qualunque dell'emisfero, compatibile coll'appoggio sul piano, si può conseguire combinando due spostamenti dei seguenti tipi:

1°) Si fa strisciare l'emisfero sul piano, in modo che il contatto avvenga sempre in  $P$  e quindi la  $PO$  si conservi verticale;

2°) si mantiene l'appoggio in  $Q$ , inclinando l'asse, stabilendo cioè il contatto con un punto della superficie dell'emisfero diverso dal polo  $P$ .

È chiaro che in ognuno di questi spostamenti, la reazione del piano d'appoggio (sempre normale ad esso) fa lavoro nullo, sicchè basta occuparsi del peso.

Anch'esso fa lavoro nullo nel primo caso. Nel secondo il baricentro  $G$  viene a trovarsi ad una altezza (sul piano d'appoggio) superiore alla

$GP$  che gli competeva nella posizione di equilibrio. Infatti (cfr. la fig. di destra), proiettando  $G$  sulla verticale  $OQ$  in  $G'$ , si ha necessariamente  $OG' < OG$  e quindi

$$G'Q = OQ - OG' > OQ - OG$$

che è la primitiva altezza del baricentro.

Concludendo: in uno spostamento del primo tipo il lavoro complessivo è nullo, mentre, per passare da una posizione generica,

---

applicata al baricentro. Ma ciò basta, come abbiamo or ora avvertito, per poter riportare a tale forza unica il computo del lavoro.

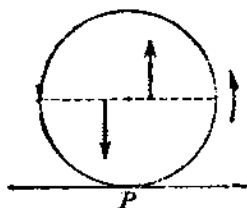
in cui l'asse è inclinato, a quella di equilibrio, in cui è verticale, il lavoro è positivo.

Si tratta pertanto di uno stato di equilibrio (impropriamente) stabile.

### § 7. - Nozioni sull'attrito volvente.

24. Sinora nella impostazione dei problemi di equilibrio di un solido appoggiato abbiamo ammesso che l'effetto di ogni singolo punto di appoggio fosse schematicamente rappresentabile come un'unica forza applicata nel punto e soggetta alle leggi caratteristiche della reazione offerta da un sostegno ad un punto materiale isolato. E questa ipotesi ci ha permesso di dare, per varie categorie, per così dire tipiche, di problemi statici, una trattazione teorica rispondente alle circostanze di fatto. Ma basta allargare un poco il campo delle nostre osservazioni sperimentali per riconoscere come, in casi ancora abbastanza ovvi, la suindicata ipotesi sia insufficiente, a render ragione del reale andamento del fenomeno.

Consideriamo, ad esempio, una sfera solida omogenea di raggio  $R$ , appoggiata in un punto  $P$  su di un suolo rigido, piano ed orizzontale. Sotto l'azione esclusiva del peso la sfera è in equilibrio; e, se la assoggettiamo alla sollecitazione di una coppia, agente per esempio in un piano verticale per  $P$ , e, quindi avente un momento  $M$  orizzontale, constatiamo sperimentalmente che, ove l'intensità  $M$  del momento sia abbastanza piccola, l'equilibrio non si altera; la sfera comincia a rotolare (intorno all'asse per  $P$ , perpendicolare al piano della coppia sollecitante) soltanto quando  $M$  abbia



superato una certa intensità critica  $\Gamma_0$ . Similmente, se sulla sfera si fa agire una coppia agente in piano orizzontale, e quindi avente un momento  $M$  verticale, la sfera si mantiene in equilibrio sino a quando  $M$  abbia superato un'altra intensità critica  $\Gamma'_0$ , notevolmente inferiore a  $\Gamma_0$ ; al di là di questo momento  $\Gamma'_0$ , la sfera comincia a

girare (intorno all'asse per  $P$  normale al piano d'appoggio e, quindi, verticale).

Ora è facile assodare che le ipotesi sin qui ammesse sulle reazioni di appoggio non danno in alcun modo ragione di codesto comportamento della sfera, ed anzi condurrebbero a negare la possibilità dell'equilibrio, comunque piccolo sia, nell'uno e nell'altro caso, il momento  $M$ .

Infatti, cominciamo col richiamare in termini precisi le due ipotesi ammesse sinora nella impostazione dei problemi di equilibrio dei solidi:

a) *I solidi sono assolutamente indeformabili.*

b) *In ogni punto di appoggio si desta come reazione un'unica forza, che segue le leggi dell'attrito radente (Cap. IX).*

Nel caso della sfera dianzi considerata, l'ipotesi a) porta ad ammettere che la sfera appoggi sul piano esclusivamente nel punto  $P$ ; e, per la ipotesi b), la reazione offerta dal suolo, riducendosi ad un'unica forza applicata in  $P$ , ha momento nullo rispetto a  $P$ . D'altra parte, delle forze attive agenti sulla sfera, soddisfa a questa stessa condizione il peso, la cui linea d'azione passa per il centro  $e$ , quindi, per  $P$ , mentre la coppia sollecitante, sia essa in piano verticale o in piano orizzontale, ha in ogni caso, rispetto a  $P$ , un momento diverso da zero. Così, non annullandosi il momento risultante di tutte le forze esterne rispetto a  $P$ , si sarebbe condotti ad escludere la possibilità dell'equilibrio, per quanto piccola sia l'intensità del momento della coppia sollecitante.

25. Per eliminare codesta contraddizione fra i dati sperimentali e le deduzioni teoriche fondate sulle due ipotesi a) e b) bisogna modificare almeno una di esse.

Ora, abbiamo già ripetutamente notato che la assoluta indeformabilità dei solidi è, dal punto di vista fisico, inammissibile. E qui si riconosce agevolmente che, rinunciando all'ipotesi a) della perfetta rigidità, si può conservare l'ipotesi b) senza inceppare in contraddizioni. Posto infatti che nella sfera (o nel suolo o in entrambi) intervenga una qualche deformazione, sì che il contatto abbia luogo non in un punto isolato  $P$ , ma in tutta un'areola circostante a  $P$ , non è più vero che si annulli necessariamente il momento delle reazioni rispetto a  $P$  (per quanto sia piccolo il loro braccio di leva); anzi esse possono benissimo esplicarsi (colle solite leggi dell'attrito radente) in modo da equilibrare il peso e una trazione abbastanza piccola.

Ma l'abbandono della ipotesi ideale della assoluta rigidità, che ci fu suggerita nel modo più spontaneo da un apprezzamento in prima approssimazione dei dati di fatto, implicherebbe una completa e radicale revisione di quei principi generali della Statica dei solidi (si pensi, per es., alla dimostrazione di sufficienza delle condizioni cardinali) che ci ha permesso una rappresentazione semplice e rispondente alla realtà dei più ovvi fenomeni di equilibrio dei solidi. D'altra parte, nella interpretazione teorica dei fatti

fisici a scopo applicativo, importa soprattutto di cogliere i caratteri di insieme, conservando fintantochè è possibile gli schemi rappresentativi più semplici e più naturali ed evitando l'analisi di quei caratteri particolari che non interessano direttamente la pratica.

Perciò appare opportuno tener ferma l'ipotesi a) e modificar piuttosto la b), che ha un'origine del tutto empirica, ammettendo che negli appoggi, accanto alle solite forze reattive contemplate dalle leggi del COULOMB, si desti una ulteriore azione globale, come se gli appoggi, anzichè trovarsi rigorosamente concentrati nel punto geometrico  $P$ , fossero disseminati in una piccola area  $\alpha$  circostante a  $P$ ; e va subito notato che questa schematizzazione del fenomeno fa senz'altro prevedere che il momento risultante, rispetto a  $P$ , di codeste varie reazioni di appoggio riuscirà necessariamente piccolo, in quanto i rispettivi bracci di leva saranno ciascuno dell'ordine delle dimensioni dell'areola  $\alpha$ .

Per caratterizzare in generale l'effetto reattivo addizionale, cui si dà così luogo, prenderemo norma dall'esempio suscennato della sfera e cercheremo di trarne un criterio applicabile a tutti i possibili casi di rotolamento o di giro incipiente.

26. Occupiamoci anzitutto del rotolamento. Si vede subito che nel caso della sfera soggetta ad una coppia in piano verticale e, quindi, di momento  $M$  orizzontale, si ristabilisce l'accordo fra teoria e realtà fisica, se si ammette che per effetto dell'appoggio in  $P$ , le reazioni destinate nei punti dell'areola  $\alpha$  circostante diano luogo ad un momento risultante  $\Gamma$ , giacente nel piano di appoggio e perpendicolare al piano di sollecitazione, la cui intensità, in condizioni di equilibrio, possa raggiungere, ma non superare, una certa intensità massima  $\Gamma_0$ . Alla corrispondente coppia reattiva, avente un momento d'intensità  $\Gamma$  non superiore a  $\Gamma_0$ , si dà il nome di attrito di rotolamento e  $\Gamma_0$  si dice momento limite di rotolamento.

Ora, secondo il COULOMB, che per primo ha istituito esperienze anche su questo ordine di fenomeni, il momento limite di rotolamento, quando sia fissato il materiale delle due superficie a contatto, è a ritenersi direttamente proporzionale al peso  $p$  della sfera,

$$\Gamma_0 = hp.$$

Il fattore di proporzionalità  $h$  dipende dalla natura materiale delle superficie a contatto, ma non dal raggio della sfera. Esso si suol chiamare coefficiente  $o$ , meglio, parametro di attrito di rotolamento; e, a differenza del coefficiente  $f$  d'attrito radente, non è un puro numero, ma una lunghezza (in quanto è il rapporto fra un

momento e una forza). È quindi necessario, quando se ne dà il valore numerico, indicare l'unità in cui lo si intende misurato. Nel caso di una sfera metallica levigata, sopra un tavolo di metallo o di legno parimenti levigato,  $h$  è circa di un mezzo millimetro. Immaginando, per fissare le idee, che la coppia sollecitante in piano verticale sia realizzata mediante due forze opposte, aventi entrambe intensità eguale al peso della sfera, l'equilibrio persiste soltanto a patto che il braccio della coppia non superi  $h$  (cioè, nel caso concreto dianzi considerato, mezzo millimetro). Un tal braccio è, come si vede, assai piccolo per coppie d'intensità comparabile al peso.

Per ruote di vettura su strada ordinaria si hanno valori di  $h$  compresi tra 10 e 75 mm., secondo il tipo e lo stato di manutenzione della strada. Sulle strade con massicciata si va da 10 fino a 40, ove siano molto fangose e deperite; su quelle senza massicciata da 20 a 50, e anche più (fino a 75) quando sono ricoperte di ghiaia.

27. Passiamo ai fenomeni di *giro incipiente*, quali ci furono rivelati, nel caso della sfera, dall'attitudine del punto di appoggio a reagire, contro una piccola coppia in piano orizzontale, mediante un momento verticale  $\Gamma'$ , che in condizioni di equilibrio, può raggiungere, in valore assoluto, ma non superare un certo massimo  $\Gamma'_0$ . Alla coppia reattiva di momento scalare  $\Gamma' < \Gamma'_0$  si dà il nome di *attrito di giro* o di *imperiamento*, e  $\Gamma'_0$  si dice il corrispondente *momento limite*.

Come già nel caso del rotolamento, il momento limite  $\Gamma'_0$  di giro è *direttamente proporzionale al peso*, cioè

$$\Gamma'_0 = h'p,$$

dove il fattore di proporzionalità  $h'$  è, come  $h$ , una lunghezza, e risulta, in generale, minore di esso. Ad esempio, per una sfera metallica, nelle stesse condizioni del n. 26, si ha  $h' = 0,07$  mm., cioè circa  $1/7$  di  $h$ .

28. Se sulla sfera si fa agire una coppia in piano qualsiasi, il corrispondente momento  $M$  si può sempre immaginare decomposto nei suoi due componenti  $M_t$  ed  $M_n$ , rispettivamente tangenziale e normale al piano di appoggio; dopo di che risulta ovvio presumere (e l'esperienza conferma tale presunzione) che, nei riguardi dell'equilibrio, tutto vada come se le due coppie componenti agissero separatamente. Per conseguenza si desterà nell'appoggio una coppia reattiva detta *attrito rotolante*, il cui mo-

mento  $\Gamma$  è somma di due componenti  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , che seguiranno le leggi dianzi constatate, rispettivamente, per l'attrito di rotolamento e per quello di giro.

29. Nel campo di validità dei fatti sperimentali, da cui abbiamo preso norma, i parametri  $h$  ed  $h'$  dipendono dalla natura materiale delle superficie a contatto e sono invece indipendenti dalla lunghezza  $R$ , che interviene, nell'esempio in questione, a caratterizzare la forma geometrica del corpo.

D'altra parte le  $h$ ,  $h'$  sono lunghezze, cosicchè si tratterebbe di lunghezze (sul tipo ad es. della media distanza molecolare) dipendenti esclusivamente dalla struttura del corpo (o meglio dei due corpi a contatto) e non dalla configurazione geometrica. In via grossolanamente intuitiva, codeste lunghezze  $h$ ,  $h'$  si possono mettere in relazione colla dimensione media delle rugosità delle due superficie, da cui dipende il reciproco attrito.

Certo la conclusione non appare tale da costituire una base soddisfacente ad una teoria definitiva dell'attrito volvente. Tuttavia i principi dianzi stabiliti rispondono abbastanza bene ai fatti osservati e conducono a formulare leggi generali sull'attrito volvente, che bastano per i bisogni della tecnica.

30. I risultati sperimentali finora riferiti a proposito di una sfera pesante suggeriscono induzioni e generalizzazioni analoghe a quelle che si sono riconosciute attendibili nel caso dell'attrito radente. E precisamente si è tratti a presumere che:

1°) *Se sulla sfera, oltre il peso (o invece del peso), agiscono altre forze quali si vogliono, varranno le stesse leggi, salvo a sostituire al peso la intensità della pressione normale, esercitata dalla sfera sul piano d'appoggio, o (ciò ch'è lo stesso) la intensità  $N$  della reazione normale offerta dal piano.*

S'intende che la pressione deve supporre rivolta verso l'interno del suolo d'appoggio (e quindi la reazione verso l'esterno), altrimenti non si destano nè forze, nè momenti d'attrito.

2°) *Se, più generalmente, anzichè d'una sfera a contatto con un piano, si tratta d'un solido qualsiasi  $S$ , che si appoggia in un punto  $P$  ad una superficie materiale  $\sigma$ , il momento d'attrito è legato alla reazione normale  $N$  da relazioni della stessa forma di quelle che convengono al caso sfera-piano.*

Così, in conclusione, quale sintesi di dirette constatazioni sperimentali e di induzioni successive, possiamo enunciare la seguente legge generale dell'attrito volvente:

*Se un solido  $S$  si appoggia per uno o più punti sopra altri corpi,*



ogni appoggio  $P$  è atto a reagire (favorendo l'equilibrio) non solo con una forza  $\Phi$ , contenuta nella falda esterna del cono d'attrito, ma ancora con un momento  $\Gamma$ , che può a priori esplicarsi in qualsiasi direzione, ma non superare certi limiti di intensità dipendenti dalla sollecitazione esterna e dalla natura materiale delle due superficie a contatto.

Più precisamente, ove si designino con  $N$  il valore assoluto della componente della forza reattiva  $\Phi$  secondo la normale  $n$  alla superficie d'appoggio in  $P$ ; con  $\Gamma_t$  e  $\Gamma_n$  i valori assoluti delle componenti tangenziale (attrito di rotolamento) e normale (attrito di giro) del momento  $\Gamma$ , si ha in ogni caso:

$$\Gamma_t < hN, \quad \Gamma_n < h'N,$$

dove i coefficienti  $h$  ed  $h'$  designano due lunghezze sensibilmente indipendenti dalla sollecitazione esterna (e quindi da  $N$ ), nonché dalla configurazione geometrica della superficie di contatto.

31. Non occorre insistere, a proposito dell'attrito volvente, sulla circostanza rilevata al n. 13, a proposito dell'attrito radente, cioè che il prescindere, nelle questioni statiche, dà maggior garanzia per l'equilibrio. Con ciò infatti si vengono a trascurare delle azioni, che possono destarsi soltanto in senso favorevole all'equilibrio e sarebbero capaci di assicurarlo anche se la sollecitazione effettiva, senza soddisfare esattamente alle condizioni di equilibrio in assenza d'attrito, se ne discostasse abbastanza poco.

Per molti casi di equilibrio interessanti in pratica, non è essenziale tener conto dell'attrito, nè radente, nè volvente: ivi è comodo (e prudente) il prescindere (cfr. il § 4). In altri casi (cfr. il n. 18) è essenziale l'attrito radente, ma non il volvente, e per la stessa ragione conviene prescindere da quest'ultimo, tanto più che, quando ci si pone in condizioni di compatibilità, si riscontra (cfr., ad es., il n. seg.) che gli effetti dell'attrito volvente sono di un ordine di grandezza assai piccolo, rispetto a quelli dovuti all'attrito radente.

Finalmente vi sono anche casi (quali gli esempi analizzati nel presente §), che pure hanno importanza per le applicazioni, in cui è indispensabile tener conto dell'attrito volvente per rispecchiare i tratti salienti del fenomeno reale. La regola generale enunciata permette appunto d'impostare e di discutere siffatte questioni.

32. Come ulteriore illustrazione delle precedenti considerazioni, confrontiamo, in un caso tipico, i due diversi sforzi iniziali, che si richiedono al fine di smuovere un carico, su suolo orizzontale, per strisciamento ovvero per rotolamento.

Se  $p$  è il peso del carico ed  $f$  il coefficiente di attrito radente, la trazione limite, che va superata, anche di pochissimo, perchè si avvii lo strisciamento è sempre data da  $fp$  (IX, n. 2).

Quanto al rotolamento, consideriamo il caso di una ruota di raggio  $R$ , cui sia applicata, all'altezza del centro, una trazione orizzontale  $\tau$ . Il momento di questa trazione rispetto al punto  $P$  di appoggio è  $R\tau$ ; e, perchè vi sia moto incipiente per rotolamento, si richiede, in base al n. 25, che si abbia

$$R\tau > \Gamma_0 = kp \quad \text{cioè} \quad \tau > \frac{k}{R} p.$$

Per fare un apprezzamento numerico, supponiamo che  $R$  sia di 50 cm. e che, trattandosi di una strada in mediocri condizioni di manutenzione, e di una ruota a cerchione metallico, sia  $f = 1/4$  ed  $h = 20$  mm. Le trazioni limiti, nel caso dello strisciamento e in quello del rotolamento, risultano eguali, rispettivamente, ad  $1/4$  e ad  $1/25$  del peso della ruota.

### § 8. - Moto incipiente di una locomotiva.

#### Massimo sforzo di trazione.

33. Come applicazione riassuntiva delle nozioni sull'attrito, consideriamo una locomotiva di peso totale  $P$ , installata su  $n$  paia di ruote, la quale debba trainare un treno; e immaginiamo che essa, sotto l'azione del vapore, sia sul punto di mettersi in moto in quel modo che si richiede in condizioni di regolare funzionamento, cioè per *puro rotolamento* (senza strisciamento) delle ruote sul binario.

Le forze in giuoco saranno in istato di equilibrio limite *rispetto al rotolamento*, talchè ogni appoggio offrirà il massimo momento di rotolamento di cui è capace; mentre, in quanto escludiamo che stiano per avvenire degli strisciamenti, non è detto che le reazioni di attrito radente siano le più grandi possibili. Comunque, considerando il sistema materiale locomotiva (telaio e ruote), dovremo ritenere tuttora soddisfatte le equazioni cardinali dell'equilibrio. E qui, per le deduzioni che abbiamo in vista, basterà tener conto dell'annullarsi del risultante di tutte le *forze esterne*, le quali, astrazione fatta dalla resistenza dell'aria (e dagli attriti di rotolamento, che, come si è visto al § prec., sono schematizzabili con coppie e perciò hanno risultante nullo), si riducono alle seguenti:

- 1°) il peso  $P$  della locomotiva;
- 2°) le  $2n$  reazioni offerte dalle rotaie alle singole ruote;
- 3°) la reazione d'attacco del treno, eguale ed opposta allo

sforzo di trazione  $\tau$ , imposto alla locomotiva perchè smuova il treno stesso.

Supposta la linea orizzontale, le forze verticali si riducono al peso  $P$  e alle reazioni normali  $N_1, N_2, \dots, N_{2n}$  dei singoli appoggi (tutte necessariamente dirette verso l'alto), onde si dovrà avere in primo luogo

$$(6) \quad \sum_1^{2n} N_i = P,$$

ed anzi si potrà senz'altro supporre che il peso si scarichi uniformemente sui  $2n$  appoggi.

Ma devono pur farsi equilibrio le forze orizzontali, cioè la reazione d'attacco e gli attriti negli appoggi, il che si traduce nella relazione vettoriale:

Sforzo di trazione  $\tau$  = Risultante degli attriti provenienti dagli appoggi.

Ciò mette intanto in evidenza una circostanza importante (e a prima vista paradossale). La risultante degli attriti, essendo diretta appunto come lo sforzo di trazione, cioè nel senso del moto, sembra assumere, di fronte all'aspetto complessivo del fenomeno, il carattere di forza motrice. Ma in realtà l'attrito radente degli appoggi non va considerato qui nè come motore nè come resistente, giacchè, in quanto le ruote non strisciano, il punto di contatto di ciascuna di esse, come appartenente al rispettivo asse di moto, ha velocità nulla. La vera resistenza passiva è, nel sistema qui considerato, *l'attrito volante*, che deve essere vinto dal momento motore, trasmesso dalla pressione del vapore, per mezzo degli stantuffi, delle bielle, ecc., agli assi delle ruote.

In secondo luogo dalla condizione di equilibrio suddetta si deduce, in quanto il valore assoluto del risultante non supera la somma dei valori assoluti dei componenti, la relazione

$$\tau \leq \text{Somma dei valori assoluti degli attriti.}$$

Poichè l'attrito in ogni singolo appoggio, in cui sia  $N_i$  la intensità nella rispettiva reazione normale ed  $f_i$  il corrispondente coefficiente di attrito, non può superare  $f_i N_i$ , avremo

$$\tau \leq \sum_1^{2n} f_i N_i,$$

ossia, indicando con  $f$  il massimo degli  $f_i$  (e in pratica si può ritenere  $f_i = f$  per tutte le  $2n$  ruote) e tenendo conto della (6),

$$\tau \leq fP,$$

cosicchè si perviene all'importante risultato che:

*La prestazione di una locomotiva* (cioè lo sforzo di traino di cui essa è capace) *non può superare una certa frazione  $f$  del suo peso*, o, più precisamente, il massimo attrito radente che può destarsi tra ruote motrici e rotaie.

Questa frazione che dicesi *coefficiente di aderenza*, oscilla fra  $1/3$  ed  $1/12$ , secondo lo stato delle superficie a contatto; e mediante getti d'acqua o di sabbia sulle rotaie può essere artificialmente mantenuta alta (fin quasi ad  $1/3$ ). Ma in pratica, con una locomotiva in servizio normale, si utilizza circa  $1/7 P$ .

Restando nelle generalità, la precedente diseuguaglianza rende ragione del peso sempre crescente delle locomotive moderne. Non basta aumentare la potenza; perchè questa possa utilmente esplicarsi, occorre un peso sufficiente. Come notizia, possiamo aggiungere che, nel caso di locomotive per treni rapidi, per raggiungere la prestazione di 20 tonnellate si è dovuto oltrepassare il peso di 120 tonnellate.

34. Ciò è tanto più necessario, quando si tratta di linee in pendenza.

Se  $\alpha$  è l'inclinazione sull'orizzonte, l'aderenza (cioè la reazione normale del binario) è ridotta a  $P \cos \alpha$ , mentre nella ascesa aumenta lo sforzo di trazione, dovendosi sostituire al  $\tau$ , che a parità di altre condizioni si avrebbe su linea orizzontale, la somma  $\tau + q \sin \alpha$ , ove con  $q$  si denoti il peso totale dell'intero treno, compresa la locomotiva.

Ciò si vede in modo analogo a quello indicato nei nn. precedenti: basta qui ancora proiettare la prima condizione cardinale dell'equilibrio (risultante = 0) sulla normale al piano stradale e su questo piano, avvertendo soltanto che normale e piano non sono più rispettivamente verticale e orizzontale.

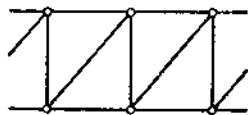
Possiamo rilevare che la trazione elettrica, oltre ad assicurare maggior velocità nelle salite, offre anche il vantaggio di non richiedere, per il moto incipiente, così rilevanti pesi morti.

## CAPITOLO XIII.

### STATICA DEI SISTEMI ARTICOLATI E DEI FILI

#### § 1. - Sistemi articolati. - Sforzi. - Sollecitazioni nodali.

1. Chiamasi *sistema articolato* ogni sistema di aste rigide, assimilabili a segmenti materiali rettilinei, collegate fra loro agli estremi mediante cerniere (sferiche), assimilabili alla lor volta a punti materiali. Questi punti cerniera diconsi *nod*i del sistema. Un tipo importante di sistemi articolati si ha nelle cosiddette *travature articolari*, la cui struttura può essere svariaticissima: un esempio dei



più semplici è rappresentato schematicamente nell'annessa figura.

Senza pregiudizio della generalità possiamo limitarci a considerare sistemi articolati *connessi*, cioè possiamo escludere i sistemi costituiti da due o più sistemi parziali non aventi fra loro alcun collegamento. Quando la configurazione geometrica del sistema è data da una poligonale semplice aperta, per modo che non si può sopprimere alcuna asta (intermedia) senza togliere al sistema la connessione, il sistema dicesi *semplicemente connesso*. Dicesi, invece, *moltepiamente connesso* quando è possibile, almeno in un modo, sopprimere un'asta (non terminale) senza che il sistema perda la connessione: tale è quindi, in particolare, ogni sistema la cui configurazione sia data da un poligono semplice (chiuso, piano o sghembo).

2. Ci proponiamo di studiare le condizioni di equilibrio di un sistema articolato.

Per quel che riguarda la ricerca di condizioni sufficienti, non è evidentemente lecito limitarsi alle equazioni cardinali, giacchè qui non si tratta di sistemi rigidi, bensì di sistemi deformabili, costituiti da parti rigide (aste a cerniera) fra loro collegate. Ma a quella stessa guisa che l'equilibrio di un sistema materiale qualsiasi è assicurato, quando ogni suo singolo punto (od elemento)

materiale sia in equilibrio sotto la sollecitazione di tutte le forze (esterne rispetto all'elemento stesso, ma non eventualmente rispetto ad altri elementi del sistema) che agiscono su di esso (XI, n. 6), così nel caso di un sistema articolato si avrà certamente equilibrio, quando ogni sua *parte elementare*, cioè ogni asta ed ogni cerniera, sia di per sé in equilibrio sotto la sollecitazione delle eventuali forze esterne agenti su di essa e delle reazioni che essa subisce per effetto del suo collegamento colle altre parti del sistema.

Di qui, per la definizione stessa del sistema articolato, si ha una semplificazione notevole: le singole cerniere sono assimilabili a punti materiali, talchè, in conclusione, ogni sistema articolato va semplicemente considerato come un sistema di aste rigide e di punti materiali o *nodi*. Questi nodi conservano nel sistema la loro individualità: e, a caratterizzarne l'ufficio di cerniere, noi ammetteremo che ogni asta sia collegata, a ciascun suo estremo, col nodo corrispondente, ma non direttamente colle altre aste che vi concorrono. Insomma, come norma di rappresentazione schematica, giova immaginare in ogni nodo, in cui concorrono  $m$  aste,  $m+1$  elementi materiali, cioè il nodo stesso e gli  $m$  estremi delle aste concorrenti, i quali ultimi sono collegati ciascuno col nodo, ma non direttamente fra loro.

Da tutto ciò risulta che per l'equilibrio di un sistema articolato saranno necessarie e sufficienti due classi di condizioni:

a) le condizioni che esprimono che ogni asta  $AB$  si trova in equilibrio sotto la sollecitazione esterna delle forze direttamente applicate ad essa e delle due reazioni  $\Phi_A$  e  $\Phi_B$ , provenienti dal collegamento coi nodi  $A$ ,  $B$ : queste due reazioni diconsi gli sforzi esercitati dai due nodi sull'asta;

b) le condizioni che esprimono che per ogni nodo  $A$  è nulla la risultante delle forze direttamente applicate ad esso e delle azioni  $\Psi_{BA}$ ,  $\Psi_{CA}$ , ..., che il nodo  $A$  risente dalle varie aste  $BA$ ,  $CA$ , ..., che vi concorrono. Naturalmente, per lo sforzo  $\Phi_A$  che una generica asta  $AB$  subisce dal nodo  $A$  e l'azione  $\Psi_{BA}$  che l'asta stessa esercita sul nodo (forze interne al sistema) vale il principio di reazione, talchè avremo

$$\Psi_{BA} = -\Phi_A.$$

3. Fra le possibili sollecitazioni esterne di un sistema articolato hanno un particolare interesse quelle, in cui le forze attive sono esclusivamente applicate ai nodi.

In tal caso ogni singola asta  $AB$  del sistema è esclusivamente

soggetta all'azione dei due sforzi  $\Phi_A$ ,  $\Phi_B$  che essa subisce agli estremi dai nodi  $A$  e  $B$ ; e le condizioni di equilibrio  $a$ ) esprimono semplicemente che, per ogni asta, i due sforzi, dovendosi equilibrare (Cap. prec., n. 3), sono direttamente opposti. Se sono diretti entrambi verso l'interno dell'asta, i due sforzi diconsi *pressioni* e l'asta, che deve resistere ad una compressione, chiamasi *puntone*; mentre, invece, se i due sforzi sono diretti verso l'esterno, si chiamano *tensioni* e l'asta, che deve resistere ad una trazione, si dice *tirante*.

4. L'importanza delle *sollecitazioni puramente nodali* dipende da una duplice ragione. Anzitutto in molte applicazioni concrete la sollecitazione di un sistema articolato si può ritenere puramente nodale non proprio in via assoluta, giacchè, nell'ordinario campo terrestre, ogni asta è certamente soggetta all'azione della gravità, ma almeno in via di approssimazione, in quanto il peso proprio di ciascuna asta risulta spesso trascurabile rispetto alle forze direttamente applicate ai nodi.

D'altra parte sussiste l'importante teorema: *Per ogni qualsiasi sollecitazione  $\Sigma$  di un sistema articolato, si può definire una sollecitazione puramente nodale  $\Sigma^*$ , staticamente equivalente alla data, cioè tale che la configurazione di equilibrio del sistema sotto la sollecitazione  $\Sigma^*$  non differisca da quella che, per lo stesso sistema, si avrebbe di fronte alla data sollecitazione  $\Sigma$ .*

Rinunciamo, per non dilungarci troppo, a dimostrare questo teorema che, per altro, nel seguito considereremo come acquisito; talchè nello studio dei problemi di equilibrio saremo in ogni caso condotti a tener conto esclusivamente di condizioni della specie  $b$ ) del n. 2.

## § 2. — Sistemi articolati semplicemente connessi.

5. EQUAZIONI DELL'EQUILIBRIO. — Lasciando le generalità, occupiamoci dei sistemi semplicemente connessi. La configurazione di equilibrio, necessariamente poligonale, assunta da ogni siffatto sistema articolato, sotto una data sollecitazione, dicesi *poligono funicolare* (in vista di una interessante interpretazione che indicheremo più tardi).

Nello studio dei poligoni funicolari possibili per un dato sistema articolato, possiamo limitarci, in base al n. prec., a considerare esclusivamente sollecitazioni nodali.

Detti  $P_1, P_2, \dots, P_n$  i nodi del sistema (dei quali, per l'ipo-

tesi della connessione semplice,  $P_1$  è distinto da  $P_n$ ) indichiamo con  $F_1, F_2, \dots, F_n$  le forze esterne ad essi rispettivamente applicate. Quanto agli sforzi (incogniti) è perfettamente inutile, come tosto vedremo, conservare la doppia designazione  $\Psi$  e  $\Phi$  usata ai nn. prec. per quelli relativi ai nodi e quelli relativi alle aste. Se infatti consideriamo un'asta generica  $P_i P_{i+1}$  e conveniamo di denotare con  $\Phi_{i+1,i}$  e  $\Phi_{i,i+1}$  gli sforzi che essa risente negli estremi  $P_i$  e  $P_{i+1}$ , rispettivamente, avremo, trattandosi di una sollecitazione puramente nodale (n. 3),

$$(4) \quad \Phi_{i,i+1} = -\Phi_{i+1,i}.$$

D'altra parte, per principio di reazione, il nodo  $P_i$  subisce per effetto del collegamento coll'asta  $P_i P_{i+1}$  uno sforzo che è direttamente opposto a  $\Phi_{i+1,i}$  e che perciò, in base alla (4), si identifica con  $\Phi_{i,i+1}$ .

Prima di proceder oltre, conviene fissare l'attenzione sulla notazione così introdotta per gli sforzi. In ogni simbolo  $\Phi_{i,i+1}$  o  $\Phi_{i+1,i}$  i due indici designano l'asta cui si riferisce lo sforzo, sia che si tratti degli sforzi da essa subiti o di quelli da essa esercitati sui nodi, cui è collegata. Più precisamente se l'asta si considera come passiva, è il *secondo indice* che, secondo le convenzioni pocanzi adottate, denota l'estremo dell'asta a cui lo sforzo è applicato; se invece si fissa l'attenzione su di un *nodo*, p. es.  $P_i$ , con che le aste ad esso collegate sono  $P_{i-1}P_i$  e  $P_i P_{i+1}$ , gli sforzi da esse esercitati su  $P_i$  sono rispettivamente  $\Phi_{i,i-1}$  e  $\Phi_{i,i+1}$ , talchè è il *primo indice* che individua il nodo cui lo sforzo è applicato.

Importa ancora osservare che, quando uno sforzo  $\Phi_{i,i+1}$  (o  $\Phi_{i+1,i}$ ) ha carattere di tensione, l'ordine  $i, i+1$  (o rispettivamente  $i+1, i$ ) degli indici è conforme al verso  $P_i P_{i+1}$  (o  $P_{i+1} P_i$ ) in cui si esercita lo sforzo (sia sull'estremo  $P_{i+1}$  dell'asta  $P_i P_{i+1}$  che sul nodo  $P_i$ ).

Giova infine avvertire che, nelle considerazioni statiche che seguono, per ridurre gli elementi ausiliari al loro numero minimo, si può limitarsi, in base alle (4), a far intervenire soltanto i vettori del tipo  $\Phi_{i,i+1}$ , cioè, per ogni singola asta  $P_i P_{i+1}$ , lo sforzo che essa subisce nel suo secondo estremo.

Ciò premesso, esprimiamo le condizioni di equilibrio, che, come si è visto al n. prec., saranno esclusivamente della classe b) del n. 2. Poichè su ciascun nodo intermedio  $P_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ) agiscono tre forze, cioè la  $F_i$  e le due forze provenienti dalle due aste  $P_{i-1}P_i$  e  $P_i P_{i+1}$ , che come si è visto or ora sono date da

$$\Phi_{i,i-1} = -\Phi_{i-1,i} \quad \text{e} \quad \Phi_{i,i+1},$$



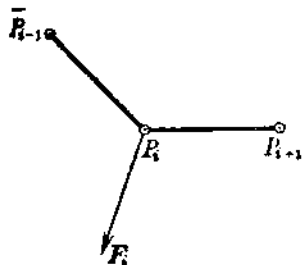
dovremo porre

$$(5) \quad F_i - \Phi_{i-1,i} + \Phi_{i,i+1} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n-1).$$

Invece, in ciascuno dei nodi estremi  $P_1$  e  $P_n$  la forza direttamente applicata deve risultare equilibrata da un'unica reazione e si dovrà avere

$$(6) \quad F_1 + \Phi_{1,2} = 0, \quad F_n - \Phi_{n-1,n} = 0.$$

Nel loro complesso le (5), (6), come quelle che assicurano l'equilibrio delle singole parti rigide del sistema, danno le *condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio del sistema articolato* (semplicemente connesso).



Le (5) diconsi *equazioni indefinite dell'equilibrio*; le (6), relative ai nodi estremi, *equazioni ai limiti*.

Se si nota che gli sforzi  $\Phi$  hanno per linee d'azione i lati del poligono funicolare, si vede come l'equilibrio importi delle relazioni fra le forze esterne, la configurazione geometrica e le intensità degli sforzi.

Nella maggior parte dei casi pratici, gli sforzi non figurano fra i dati della questione, ed è richiesto di valutarli, supponendosi assegnato il poligono funicolare; oppure l'incognita principale è la configurazione di equilibrio, e si cerca di desumerla dai dati della questione, eliminando, o almeno trattando come incognite ausiliarie, le intensità degli sforzi.

6. Naturalmente perchè l'equilibrio del sistema articolato sia possibile devono essere soddisfatte, anche in questo caso come in ogni altro possibile, le *equazioni cardinali*; cioè il sistema di vettori applicati che rappresentano le forze esterne  $F_i$  deve essere equivalente allo zero. Di qui si arguisce a priori che quest'ultima condizione deve essere implicita nelle equazioni vettoriali (5), (6) le quali sono insieme necessarie e sufficienti; ma è pur facile verificarlo a posteriori.

Si rifletta, invero, che ciascuna delle equazioni (5) e (6), in quanto riguarda due o tre forze *le cui linee d'azione concorrono in un medesimo punto*, e quindi aventi tutte momento nullo rispetto al punto, si può interpretare, non soltanto come una equipollenza, ma come una relazione di equivalenza tra sistemi di vettori applicati (I, n. 41). Tale, quindi, risulta l'equazione che si ottiene sommando membro a membro le (5), (6), cioè

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = 0;$$

essa dice appunto che il sistema dei vettori applicati  $F_i$  è equivalente allo zero.

Questa equivalenza è dunque una conseguenza delle equazioni vettoriali (5) e (6), le quali, per altro, in quanto sono, non soltanto necessarie, ma anche *sufficienti* per l'equilibrio del sistema articolato, implicano in generale condizioni ulteriori.

Queste ulteriori condizioni risultano precisate dal teorema che dimostreremo al n. seg. e che fornisce, per le condizioni di equilibrio di un sistema articolato semplicemente connesso, una forma meccanicamente espressiva e comoda per talune applicazioni.

*7. Perché un sistema articolato semplicemente connesso, soggetto ad una data sollecitazione esterna, sia in equilibrio, è necessario e sufficiente che il sistema delle forze esterne sia vettorialmente equivalente a zero e che inoltre sia nullo, per ogni singolo nodo, il momento risultante delle forze esterne applicate ai nodi precedenti (o seguenti).*

Per dimostrare in primo luogo che le enunciate condizioni sono necessarie per l'equilibrio, ricordiamo anzitutto che in condizioni statiche, cioè quando son verificate le equazioni (5), (6), il sistema delle forze esterne  $F_i$  è vettorialmente equivalente a zero. Inoltre, se si sommano membro a membro la prima delle (6) e le prime  $i-1$  delle (5), considerate tutte come relazioni di equivalenza tra sistemi di vettori applicati, otteniamo, tenendo conto delle (4), la

$$(7) \quad F_1 + F_2 + \dots + F_i + \Phi_{i,i+1} = 0;$$

la quale dice che il sistema di forze esterne  $F_1, F_2, \dots, F_i$  è vettorialmente equivalente all'unico sforzo  $-\Phi_{i,i+1} = \Phi_{i+1,i}$  applicato in  $P_{i+1}$  e passante per  $P_i$ , ed ha perciò momento risultante nullo rispetto a codesto nodo  $P_i$ .

Viceversa, se si suppongono soddisfatte le condizioni dell'enunciato, abbiamo anzitutto la relazione di equivalenza

$$(8) \quad F_1 + F_2 + \dots + F_n = 0;$$

ed inoltre il sistema di forze esterne  $F_1, F_2, \dots, F_i$  (per  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), avendo momento risultante nullo rispetto al nodo  $P_i$ , è vettorialmente equivalente (I, n. 52) ad un unico vettore applicato in  $P_i$ , che potremo denotare con  $-\Phi_{i,i+1}$ , talchè varranno le (7) per  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , tutte come relazioni di equivalenza. Sottraendo membro a membro dalla (8) la (7) per  $i=n-1$  e da ciascuna delle (7) quella di indice immediatamente inferiore, otteniamo successivamente le

$$F_n - \Phi_{n-1,n} = 0, \quad F_i - \Phi_{i-1,i} - \Phi_{i,i+1} = 0 \quad (i = n-1, n-2, \dots, 2)$$

le quali associate all'ultima delle (7), cioè a

$$F_1 + \Phi_{1,2} = 0,$$

hanno precisamente la forma delle equazioni di equilibrio (indefinite e ai limiti) del sistema articolato (n. 5). Risulterà provato che l'equilibrio sussiste, non appena avremo riconosciuto che i vettori  $\Phi_{i,i+1}$ , applicati nei punti di  $P_i$ , che noi abbiamo definito formalmente mediante le (7), hanno il carattere di sforzi, cioè, precisamente, hanno ciascuno per linea d'azione la retta dell'asta corrispondente  $P_i P_{i+1}$ .

A tale scopo si consideri la relazione di equivalenza

$$F_i - \Phi_{i-1,i} + \Phi_{i,i+1} = 0,$$

e si noti che (come si rilevò or ora a proposito di  $\Phi_{i,i+1}$ ) l'ausiliaria  $\Phi_{i-1,i}$ , per la definizione risultante dalle (7), designa un qualche vettore applicato in  $P_i$ , al pari di  $F_i$ . Perciò è nullo, rispetto a  $P_i$ , il momento risultante di  $\Phi_{i-1,i} - F_i$ , e quindi anche del vettore equivalente  $\Phi_{i,i+1}$ , il quale, essendo applicato in  $P_{i+1}$ , ha appunto come linea d'azione la  $P_i P_{i+1}$ .

**8. POLIGONO DELLE FORZE O DEL VARIGNON.** — La condizione (necessaria per l'equilibrio di un sistema articolato semplicemente connesso  $P_1 P_2 \dots P_n$ ) che la risultante delle forze esterne  $F_i$  sia nulla, si traduce nel fatto che, se a partire da un qualsiasi punto  $Q_1$ , si prendono  $n$  vettori applicati consecutivi ed ordinatamente equipollenti ad  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , si ottiene un poligono chiuso; in altre parole, se precisato  $Q_1$ , si prendono gli  $n-1$  punti  $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$  definiti successivamente dalle equipollenze

$$(9) \quad Q_2 - Q_1 = F_1, \quad Q_3 - Q_2 = F_2, \quad \dots, \quad Q_n - Q_{n-1} = F_{n-1},$$

risulta di conseguenza

$$(9') \quad Q_1 - Q_n = F_n.$$

Il poligono (chiuso)  $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ , che si vien così ad associare ad ogni poligono funicolare  $P_1 P_2 \dots P_n$ , dicesi *poligono delle forze* o del VARIGNON. Esso gode di una proprietà caratteristica, che qui ci proponiamo di stabilire e che permette di ridurre a condizioni grafiche i problemi di equilibrio dei sistemi articolati semplicemente connessi.

9. Nel poligono delle forze  $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ , associato ad un poligono funicolare  $P_1 P_2 \dots P_n$ , i lati e le diagonali  $Q_2 Q_1, Q_3 Q_1, \dots, Q_n Q_1$ ,

orientati verso  $Q_1$ , sono ordinatamente equipollenti agli sforzi  $\Phi_{1,2}$ ,  $\Phi_{2,3}$ , ...,  $\Phi_{n-1,n}$ .

Cominciando, infatti, da  $Q_2Q_1$ , basta ricordare che, per la

costruzione del poligono delle forze,  $Q_2Q_1 = -Q_1Q_2$  è equipollente a  $-F_1$  e che, per la prima delle (6), questo vettore è equipollente a  $\Phi_{1,2}$ .

Quanto a  $Q_3Q_2$ , si riprenda la (5) per  $i=2$ , cioè la

$$F_2 - \Phi_{1,2} + \Phi_{2,3} = 0$$

e si isoli  $\Phi_{2,3}$ , scrivendo

$$\Phi_{2,3} = -F_2 + \Phi_{1,2}$$

e avendo riguardo al triangolo  $Q_1Q_2Q_3$ . Se si esprime che il lato  $Q_3Q_1$  è equipollente alla somma degli altri due, si ricava

$$\Phi_{2,3} = Q_1 - Q_3.$$

In generale, dopo aver riconosciuto che

$$\Phi_{i-1,i} = Q_1 - Q_i,$$

si continua, considerando il triangolo  $Q_1Q_iQ_{i+1}$ , il quale, in base alla  $i$ -esima equazione statica, che giova scrivere sotto la forma

$$\Phi_{i,i+1} = -F_i + \Phi_{i-1,i},$$

dà

$$\Phi_{i,i+1} = Q_1 - Q_{i+1}.$$

E così si continua fino al vettore applicato  $Q_nQ_1$ , che essendo equipollente ad  $F_n$ , risulta pur equipollente, per la seconda delle (6), allo sforzo  $\Phi_{n-1,n}$ .

**Viceversa**, se ad una qualsiasi poligonale  $P_1P_2\dots P_n$  si può associare un poligono chiuso  $Q_1Q_2\dots Q_n$ , tale che le rette  $Q_2Q_1$ ,  $Q_3Q_2$ , ...,  $Q_nQ_1$  dei lati e delle diagonali concorrenti in  $Q_1$  risultino ordinatamente parallele a  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ , ...,  $P_{n-1}P_n$ , la  $P_1P_2\dots P_n$  costituisce un poligono funicolare, di cui  $Q_1Q_2\dots Q_n$  è il poligono delle forze.

Infatti, se il sistema articolato  $P_1P_2\dots P_n$  si immagina sottoposto nei nodi  $P_1$ ,  $P_2$ , ...,  $P_n$  a forze ordinatamente equipollenti a  $Q_1Q_2$ ,  $Q_2Q_3$ , ...,  $Q_nQ_1$ , e si assumono per gli sforzi  $\Phi_{1,2}$ ,  $\Phi_{2,3}$ , ...,  $\Phi_{n-1,n}$  i valori assoluti, le direzioni e i versi di  $Q_2Q_1$ ,  $Q_3Q_2$ , ...,  $Q_nQ_1$  rispettivamente, risultano senz'altro verificate, per le ipotesi am-

nesse sui due poligoni, le condizioni (5) e (6), necessarie e sufficienti per l'equilibrio del sistema articolato.

10. La proprietà caratteristica così dimostrata pel poligono delle forze permette, come già accennammo, di risolvere con costruzioni geometriche dirette i problemi concernenti l'equilibrio dei sistemi articolati semplicemente connessi.

Per dare un esempio tipico delle applicazioni di codesto metodo, consideriamo un sistema articolato  $P_1P_2\dots P_n$ , attaccato a cerniera all'estremo  $P_1$  in un punto fisso e avente liberi l'altro estremo e i nodi intermedi (salvi, beninteso, i vincoli provenienti dal collegamento colle aste). Immaginando applicate agli  $n - 1$  nodi  $P_2, P_3, \dots, P_n$  certe date forze  $F_2, F_3, \dots, F_n$ , proponiamoci di determinare il poligono funicolare (o configurazione di equilibrio del sistema) e la reazione di attacco nell'estremo  $P_1$ .

Anzitutto il poligono delle forze si può costruire immediatamente conducendo, a partire da un qualsiasi punto  $Q_2$  i vettori applicati  $Q_2Q_3, Q_3Q_4, \dots, Q_nQ_1$ , ordinatamente equipollenti ad  $F_2, F_3, \dots, F_n$ ; dopo di che il vettore di chiusura  $Q_1Q_2$  rappresenta, in intensità, direzione e verso, la reazione di attacco  $F_1$ .

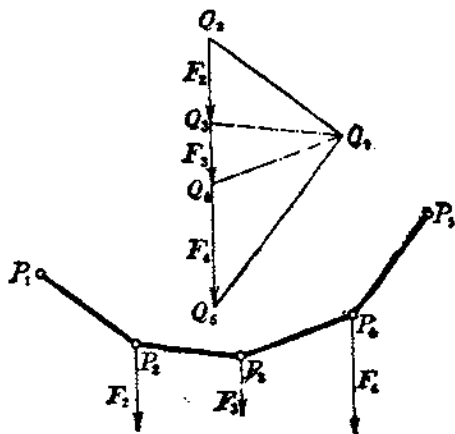
Quanto poi al poligono funicolare, si ricordi che i suoi lati debbono risultare paralleli rispettivamente a  $Q_2Q_3, Q_3Q_4, \dots, Q_nQ_1$ . Perciò, a partire dal punto fisso  $P_1$ , si dovrà dirigere la prima asta  $P_1P_2$  parallelamente a  $Q_2Q_3$ , nell'uno o nell'altro dei due versi possibili; e resta questa ambiguità di verso finchè non si sappia a priori se lo sforzo  $\Phi_{1,2}$  debba essere una tensione o una pressione. Fissato  $P_2$ , si ottiene la posizione di  $P_3$ , orientando l'asta  $P_2P_3$  parallelamente a  $Q_3Q_4$ , nell'uno o nell'altro verso, secondo quanto s'è detto or ora; e così via, finchè dirigendo la  $P_{n-1}P_n$  parallelamente a  $Q_nQ_1$  (nello stesso verso o nell'opposto) si ottiene la posizione di equilibrio dell'estremo libero  $P_n$ .

11. FORZE PARALLELE. — Meno semplice che nel caso precedente riesce la costruzione geometrica del poligono funicolare, quando il sistema articolato è attaccato (per mezzo di cerniere) a punti fissi in entrambi gli estremi  $P_1, P_n$ , e son date le forze applicate agli  $n - 2$  nodi intermedi. Noi qui ci limiteremo a discutere questo problema di equilibrio nel caso in cui codeste  $n - 2$  forze  $F_2, F_3, \dots, F_{n-1}$  sono parallele e di verso concorde; e notiamo subito che questa speciale ipotesi merita di essere presa in considerazione, come quella che si trova realizzata, quando le forze esterne agenti sul sistema sono altrettanti pesi.

Anzitutto è facile persuadersi che, anche indipendentemente

dalla circostanza che gli estremi siano fissati, *quando, in una sollecitazione nodale atta a mantener l'equilibrio, le forze direttamente*

*applicate ai nodi intermedi sono parallele (e di verso qualsiasi) il poligono funicolare è piano.*



Infatti in tal caso i lati  $Q_1Q_2, Q_2Q_3, \dots, Q_{n-1}Q_n$  del poligono delle forze risultano per diritto, cosicchè, qualunque sia per essere la posizione del residuo vertice  $Q_1$ , i vettori applicati  $Q_2Q_1, Q_3Q_1, \dots, Q_nQ_1$ , che rappresentano gli sforzi, risultano complanari, e tali saranno altresì i lati  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$  del

poligono funicolare, in quanto debbono essere rispettivamente paralleli a quelli.

12. Ciò premesso, riprendiamo l'ipotesi che siano fissate le posizioni dei due estremi  $P_1, P_n$  e, interpretando, come è lecito, le  $n - 2$  forze parallele  $F_2, F_3, \dots, F_{n-1}$  come pesi, indichiamone le intensità rispettivamente con  $p_2, p_3, \dots, p_{n-1}$ .

Per determinare il poligono funicolare, procediamo per via analitica. Nel piano verticale per  $P_1$  e  $P_n$ , in cui necessariamente si dispone il poligono funicolare (n. prec.), assumiamo un sistema cartesiano ortogonale  $Oxy$  coll'asse  $y$  orientato verso l'alto, e denotiamo con  $x_1, y_1$  e  $x_n, y_n$  le coordinate di  $P_1, P_n$  e con  $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$  le lunghezze, pur esse conosciute per dato, delle aste  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$ .

Come incognite principali del problema, assumiamo gli angoli  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  che codeste aste (orientate ciascuna nel verso di percorrenza della funicolare da  $P_1$  a  $P_n$ ) formano coll'asse orientato delle  $x$ ; e notiamo subito che per determinarle dovremo ricorrere alle equazioni (5), (6) dell'equilibrio. Anzi basterà tener conto delle equazioni indefinite

$$(5) \quad F_i - \Phi_{i-1,i} + \Phi_{i,i+1} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

poichè le (6) contengono, si può dire, soltanto la definizione di due ulteriori incognite (le azioni  $F_1$  ed  $F_n$ , subite dai nodi d'attacco  $P_1$  e  $P_n$ ) e non interessano la configurazione del poligono. Ora

le (5) (che sono  $n - 2$  equazioni vettoriali nel piano) si traducono in  $2(n - 2)$  equazioni scalari tra le componenti orizzontali e verticali. Siccome le componenti orizzontali delle  $F_i$  sono nulle, così, proiettando sull'asse  $x$ , riconosciamo anzitutto che: *I vari sforzi  $\Phi_{1,2}, \Phi_{2,3}, \dots, \Phi_{n-1,n}$  hanno tutti la stessa componente orizzontale.*

E qui possiamo limitarci a considerare il caso in cui codesta componente orizzontale costante, che designeremo con  $\varphi$ , è diversa da zero. Infatti, in primo luogo, se qualcuno degli sforzi si annulla, si può immaginare tolta la connessione nel nodo corrispondente senza turbare l'equilibrio, e il problema è, per così dire, riducibile a due o più problemi distinti, concernenti poligoni con un numero minore di aste. Escluso, come è naturale, questo caso, nessuno sforzo dovrà ritenersi nullo; e allora l'ipotesi  $\varphi = 0$  implicherà che gli sforzi, e con essi i lati del poligono funicolare, siano *tutti* verticali. Se si prescinde dal caso privo di interesse che  $P_1$  e  $P_n$  si trovino sulla medesima verticale, rimane senz'altro esclusa la detta eventualità, onde si deve ritenere  $\varphi \neq 0$ .

Ora assumendo la  $\varphi$  come incognita ausiliaria, siamo anzitutto in grado di esprimere per mezzo di  $\varphi$  e delle incognite principali  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  le componenti verticali degli sforzi. Basta osservare che, avendo essi ordinatamente per linee d'azione  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$ , i rapporti (certamente finiti per l'ipotesi  $\varphi \neq 0$ ) fra le componenti verticali e le orizzontali sono espressi (qualunque sia il verso dei singoli sforzi) dalle tangenti degli angoli d'inclinazione  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ , cosicchè le componenti verticali valgono ordinatamente

$$\varphi \operatorname{tg} \alpha_1, \quad \varphi \operatorname{tg} \alpha_2, \quad \dots, \quad \varphi \operatorname{tg} \alpha_{n-1}.$$

La proiezione delle (5) sull'asse  $y$  (verticale e diretto verso l'alto) dà perciò luogo alle equazioni

$$(10) \quad -p_i + \varphi \operatorname{tg} \alpha_{i-1} - \varphi \operatorname{tg} \alpha_i = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

cui bisogna associare quelle che legano  $x_n, y_n$  alle  $x_1, y_1$ , alle  $l$  e alle  $\alpha$ . Queste due equazioni si ottengono nel modo più semplice proiettando il poligono funicolare  $P_1P_2 \dots P_{n-1}P_n$  sui due assi coordinati ed esprimendo che queste proiezioni altro non sono che  $x_n - x_1, y_n - y_1$ .

Otteniamo così

$$(11) \quad \begin{cases} x_n = x_1 + \sum_1^{n-1} l_i \cos \alpha_i, \\ y_n = y_1 + \sum_1^{n-1} l_i \sin \alpha_i. \end{cases}$$

Le (10), (11) costituiscono complessivamente  $n$  equazioni fra altrettante incognite  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \varphi$ . Per risolverle, giova porre

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\psi}{\varphi},$$

il che è certamente lecito, perchè, per l'osservazione fatta,  $\varphi$  si è potuto supporre non nulla. Con ciò si ha dalle (10), sommando dall'indice 2 fino ad un indice generico  $i$  e sopprimendo i termini  $\varphi \operatorname{tg} \alpha_2, \varphi \operatorname{tg} \alpha_3, \dots, \varphi \operatorname{tg} \alpha_{i-1}$ , comuni ai due membri,

$$(10') \quad \operatorname{tg} \alpha_i = \frac{\psi - \sum_2^i p_i}{\varphi} \quad (i = 2, \dots, n-1).$$

La tangente di ogni  $\alpha_i$ , per mezzo della posizione  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \psi/\varphi$  e delle (10'), si trova espressa per  $\psi$  e  $\varphi$ . Se ne ricavano ovviamente  $\cos \alpha_i$  e  $\sin \alpha_i$ , e portando i loro valori nelle (11), si hanno infine due equazioni algebriche fra  $\varphi$  e  $\psi$ , atte a determinarle. Tuttavia si deve avvertire che la effettiva determinazione risulta in generale piuttosto complicata; per  $n = 3$ , la posizione di  $P_3$  rimane senz'altro individuata, essendo date le lunghezze  $P_1P_2, P_2P_3$ ; ma già per  $n = 4$ , le equazioni in  $\varphi$  e  $\psi$ , liberate dai radicali, presentano un grado discretamente elevato.

### § 3. - Fili flessibili ed inestendibili.

13. DEFINIZIONE E POSTULATO CARATTERISTICO. — Considerazioni analoghe a quelle applicate nel § prec. ai sistemi articolati semplicemente connessi permettono di trattare i problemi di equilibrio dei fili flessibili ed inestendibili, ove con siffatte qualifiche si intenda caratterizzare ogni sistema materiale ad una dimensione (X, n. 5) tale che:

a) sia possibile, esercitando convenienti forze, atteggiare il filo secondo una linea geometrica qualsiasi;

b) presi comunque sul filo due punti, l'arco fra essi compreso conservi, in ogni possibile configurazione, la medesima lunghezza.

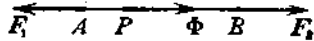
Come postulato caratteristico dei fili, ammetteremo il seguente principio statico, che ha carattere di immediata evidenza fisica: *Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un tratto AB di filo flessibile e inestendibile, sollecitato esclusivamente da due forze  $F_1, F_2$  applicate agli estremi, si è che le due forze siano direttamente opposte, e dirette verso l'esterno di AB.*

Per brevità, nel seguito di questo Cap., parlando di fili, sottin-



tenderemo sempre che essi siano flessibili e inestendibili, cioè dotati delle proprietà *a*), *b*) pocanzi indicate.

**14. TENSIONE.** — Dal postulato del n. prec. segue subito un'importante conseguenza. Fissato un punto qualsiasi *P* del filo fra *A* e *B*, applichiamo ad uno dei due tratti di filo, p. es. ad *AP*, le condizioni cardinali di equilibrio. Poichè le forze esterne (rispetto ad *AP*) si riducono a due: la  $F_1$  applicata in *A* e l'incognita azione  $\Phi$  che *P* subisce da parte dei contigui elementi del tratto *PB*, riconosciamo che  $\Phi$  deve essere direttamente opposta ad  $F_1$ , cioè eguale ad  $F_2$ . Come si vede, essa è sempre diretta verso l'esterno del tratto di filo *AP*, che viene ipoteticamente isolato, ed è quindi opportunamente designata col nome di tensione. È poi sempre la stessa per tutti i punti *P* del filo.



Facendo in particolare coincidere *P* con *A*, riconosciamo che *A* subisce da parte del filo una tensione eguale alla forza  $F_2$ , direttamente applicata all'altro estremo. L'azione si trasmette dunque inalterata lungo un filo, finchè questo è rettilineo, in equilibrio e non sollecitato da forze.

Di queste trasmissioni di forze mediante fili abbiamo già usufruito in più esempi concreti (e in circostanze meno semplici), anticipando alcune leggi, almeno in via di approssimazione (VII, n. 13; IX, n. 2).

Come precisamente stiano le cose indagheremo al n. 33. Intanto è bene aver fissato le restrizioni, sotto cui è lecito asserire che si ha trasmissione perfetta in grandezza e direzione.

**15. CONDIZIONI DI EQUILIBRIO.** — Consideriamo ora un tratto di filo che sia sollecitato, non solo agli estremi, ma anche in un numero (finito) qualsiasi di punti intermedi.

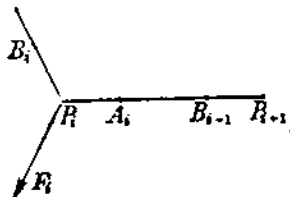
Diciamo  $P_1$  e  $P_n$  i due estremi,  $P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$  i punti intermedi, cui sono applicate forze, e designamo al solito con  $F_i$  la forza applicata in  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Per riconoscere se e sotto quali condizioni il filo può trovarsi in equilibrio, notiamo, anzitutto, che, per l'ammesso postulato, i singoli tratti  $P_i P_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) dovranno essere rettilinei.

Inoltre, fissati a piacimento due punti  $A_i$  e  $B_{i+1}$  fra  $P_i$  e  $P_{i+1}$  (nell'ordine scritto), il tratto di filo  $A_i B_{i+1}$  dovrà trovarsi in equilibrio sotto l'azione delle tensioni agli estremi. Diremo  $\Phi_{i+1}$  quella che si esercita in  $B_{i+1}$ , e che, in condizioni di equilibrio, deve essere, come abbiám visto, diretta nel senso  $P_i P_{i+1}$  e avere

intensità indipendente dalla posizione di  $B_{i+1}$ . In modo analogo diremo  $\Phi_{i+1}$  la tensione che si esercita in  $A_i$ , la quale deve essere diretta nel verso  $P_{i+1}P_i$ , avere intensità indipendente da  $A_i$  e fare equilibrio all'altra, il che si compendia nell'equazione

$$(4) \quad \Phi_{i+1} = -\Phi_{i+1-i},$$



dove l'indice  $i$  può naturalmente assumere i valori  $1, 2, \dots, n-1$ . Queste relazioni vettoriali fra le tensioni sono identiche nella forma alle (4) del n. 5,

che intercedono fra gli sforzi nel caso dell'equilibrio di un sistema di aste rigide, articolate a cerniera. Ed anche le altre condizioni di equilibrio conservano identica forma.

Esprimiamo infatti che è in equilibrio un elemento di filo  $B_i P_i A_i$  comprendente il punto  $P_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ). Immaginando  $B_i$  ed  $A_i$  infinitamente vicini a  $P_i$ , potremo trattare l'elemento come un semplice punto materiale, sollecitato da tre forze: la  $F_i$  direttamente applicata e le tensioni del filo in  $B_i$  ed  $A_i$ , ordinatamente eguali a  $\Phi_{i-1} = -\Phi_{i-1-i}$ ,  $\Phi_{i+1}$ . Egualgiandone a zero la risultante, otteniamo precisamente le (5) del n. 5. Analogamente, considerando due elementi estremi di filo,  $P_1 A_1$ ,  $B_n P_n$ , e trattandoli come punti materiali, abbiamo le equazioni ai limiti (6).



Così è assodata la necessità delle (4), (5), (6). Ma queste sono anche sufficienti per l'equilibrio inquantochè (col significato di tensione attribuito alle  $\Phi$ ) lo assicurano per tutte le possibili parti di filo, siano esse tratti rettilinei [contemplati dalle (4)] o elementi prossimi ai punti  $P$  [contemplati dalle (5) e (6)].

Abbiamo in conclusione il risultato: *Un filo flessibile, e inestendibile (sollecitato da forze in punti discreti) si comporta, quanto all'equilibrio, come un sistema articolato di aste rigide, coll'unica restrizione in più che gli sforzi non possono essere indifferentemente pressioni o tensioni, ma esclusivamente tensioni.*

Così le questioni statiche concernenti i fili si trattano nella maniera precedentemente esposta per i sistemi articolati; v'è soltanto da aver riguardo ad una ulteriore condizione qualitativa, circa il senso degli sforzi.

Se, per una certa configurazione, si constatasse che tutte le condizioni quantitative sono soddisfatte, ma che qualche sforzo ha carattere di pressione, si dovrebbe concludere che non è possibile l'equilibrio del filo in quella configurazione. Per assicurare

l'equilibrio, bisognerebbe, per es., sostituire qualche tratto di filo (i tratti premuti) con aste rigide.

La configurazione di equilibrio di un filo, come già quella di un sistema articolato, si chiama poligono funicolare; ed anzi è questo caso dei fili (praticamente funi o catene) che ha dato origine al nome.

**16. FILO SOGGETTO AD UNA SOLLECITAZIONE CONTINUA.** — Consideriamo un filo pesante  $AB$ , in equilibrio sotto l'azione di due forze  $F_A$  ed  $F_B$ , applicate agli estremi, e della gravità. La gravità sollecita ogni tratto del filo, anche piccolissimo; talchè, se per fissare le idee supponiamo il filo omogeneo e di densità (lineare)  $l$  (X, n. 6), siamo condotti a rappresentarci ciascun elemento materiale  $ds$  del filo come sollecitato da una forza  $gds$  (infinitesima dello stesso ordine del  $ds$ ) dove  $g$  denota al solito l'accelerazione (vettoriale) della gravità.

Ma anche all'infuori (o in più) della gravità possiamo immaginare che il filo, per effetto di dispositivi sperimentali opportuni e di speciali condizioni fisiche dello spazio ambiente, sia soggetto, oltre che alle forze (finite)  $F_A$ ,  $F_B$ , applicate agli estremi, ad una *sollecitazione continua*, cioè ad una sollecitazione, di natura qualsiasi, che si manifesti su *ogni* tratto, per quanto piccolo, del filo considerato. In accordo coll'osservazione fatta nel caso della gravità, considereremo una siffatta sollecitazione come dovuta alla azione simultanea di infinite forze infinitesime, applicate ai singoli elementi materiali  $ds$  del filo e rappresentabili ciascuna sotto la forma  $Fds$ , dove  $F$  designa un certo vettore determinato e finito (in generale variabile con continuità da elemento ad elemento). Al vettore  $F$  si dà il nome di *forza unitaria*, per quanto il suo modulo (come rapporto di una forza propriamente detta ad una lunghezza) non abbia le dimensioni fisiche di una forza. Quanto poi alla qualifica di « unitaria », la ragione ne risulta ovvia quando si rifletta che, se  $F$  si mantiene costante lungo un tratto di filo, essa si può definire come il rapporto della risultante delle forze agenti su quel tratto alla lunghezza del tratto stesso o, in altre parole, come la forza totale agente su di un tratto di filo di lunghezza 1. E nel caso generale il vettore  $F$  è il limite del rapporto ora definito al tendere allo zero del tratto sollecitato.

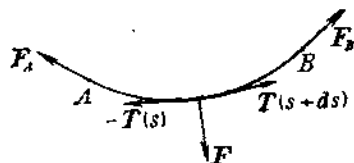
Osserviamo ancora che ogni sollecitazione continua si può riguardare come limite di una sollecitazione dovuta ad un numero finito di forze applicate in un insieme discreto di punti, quando codesto numero tende all'infinito e, corrispondentemente, tende in modo opportuno allo zero ciascuna forza applicata. Di qui si

arguisce che la configurazione di equilibrio del filo, nel caso di una sollecitazione continua, sarà una curva (limite di un poligono funicolare variabile), la quale si dirà *curva funicolare*. Noi qui ci proponiamo di sostituire a questa veduta intuitiva di limite una serie di passaggi logici rigorosi, in guisa da pervenire alle equazioni differenziali che caratterizzano le curve funicolari.

**17. TENSIONE.** — Date le forze  $F_A$  ed  $F_B$  applicate agli estremi di un filo  $AB$  e la forza unitaria  $F$ , che caratterizza una certa sollecitazione continua, osserviamo anzitutto che, in condizioni statiche, ogni tratto di filo  $AP$ , compreso fra  $A$  e un generico punto  $P$  della funicolare, risente in  $P$ , per effetto del suo collegamento col residuo tratto  $PB$ , una certa azione  $T$ , analoga agli sforzi  $\Phi$  delle singole aste del poligono funicolare; onde, per estensione a questo caso limite delle norme di comportamento degli sforzi nelle sollecitazioni discrete, si è condotti ad ammettere che la  $T$  sia diretta verso il punto infinitamente vicino a  $P$  sulla funicolare, cioè lungo la tangente in  $P$ , ed abbia carattere di tensione. Essa dicesi appunto *tensione* della funicolare nel punto  $P$ . Perciò, se si conviene di designare con  $s$  l'arco  $AP$  di funicolare misurato positivamente da  $A$  verso  $B$ , la tensione, per ogni determinata funicolare, è un vettore funzione dell'arco, tangente alla funicolare e *sempre diretto nel verso delle  $s$  crescenti*.

Naturalmente, se si considera l'azione che nel punto  $P$  è risentita dal tratto di filo  $PB$ , per effetto del suo collegamento con  $AP$ , essa è data, per il principio di reazione, da  $-T(s)$ .

**18. EQUAZIONI DI EQUILIBRIO.** — Ciò premesso, per ottenere le equazioni dell'equilibrio, sarà necessario e sufficiente (XI, n. 6) di assicurarsi che sono soddisfatte le condizioni cardinali per ogni porzione di filo. Occupiamoci intanto di un generico elemento, compreso fra i punti di ascisse curvilinee  $s$  e  $s + ds$ . Su di esso agiscono tre forze (esterne all'elemento stesso): la forza attiva



$Fds$ , la tensione nell'estremo  $s + ds$ , la quale è data da  $T(s + ds)$ , ossia, a meno di infinitesimi di ordine superiore, da  $T(s) + dT$  e, infine, la tensione nell'estremo inferiore  $s$ , la quale è data, per quanto si è detto alla fine del n. prec., da

$-T(s)$ . L'annullarsi della risultante di codeste tre forze, dà l'equazione vettoriale

$$Fds + dT = 0,$$

ossia

$$(12) \quad \frac{dT}{ds} + F = 0,$$

che deve essere soddisfatta in ogni punto  $P$  interno all'arco  $AB$ . Quanto alla seconda equazione cardinale, concernente il momento risultante, si riconosce subito che essa rimane automaticamente soddisfatta, data l'ipotesi di  $T$  tangenziale. Infatti, prendiamo ad es. per polo il punto  $P$  e indichiamo con  $P + dP$  il secondo estremo  $P(s + ds)$  dell'elemento considerato. Le forze distribuite lungo l'arco  $ds$  sono, al pari della loro somma  $Fds$ , dell'ordine dell'elemento  $ds$ . Esse danno quindi, come contributi al momento risultante rispetto a  $P$ , solo infinitesimi d'ordine superiore al primo, perchè sono infinitesime così ciascuna di queste forze come il rispettivo braccio di leva. Rimane la tensione  $T + dT$  applicata in  $P + dP$ , il cui momento è espresso da

$$dP \wedge (T + dT).$$

Il secondo termine  $dP \wedge dT$  è ancora infinitesimo d'ordine superiore al primo, e quindi, come sopra, a priori trascurabile. Resterebbe  $dP \wedge T$ , il quale si annulla appunto perchè  $T$ , in quanto diretto secondo la tangente, è parallelo a  $dP$ .

La (12), assicurando l'equilibrio di ogni elemento materiale (e quindi di ogni tratto finito) del filo, riassume in sè tutte le condizioni indefinite, cioè relative a porzioni qualsivogliono interne al nostro filo. Del resto indicheremo tra un momento come se ne fa la verifica per un tratto generico  $s''-s'$ . Occupiamoci intanto delle condizioni ai limiti (sostanzialmente identiche alle (6) del n. 5) le quali si ottengono esprimendo che gli estremi  $A, B$  sono ciascuno in equilibrio sotto l'azione della rispettiva forza  $F_A$  od  $F_B$ , e della tensione esercitata su di esso dal filo; onde assumono la forma

$$(13) \quad F_A = -T(0), \quad F_B = T(l)$$

dove  $l$  designa la lunghezza del filo.

Le (12), (13) danno nel loro complesso le volute condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio. Vale la pena di osservare che, riferendoci ad un elemento generico di filo, noi abbiamo poco fa verificato che la seconda equazione cardinale rimane automaticamente soddisfatta, in virtù dell'ipotesi che la tensione  $T$  è diretta tangenzialmente al filo. Viceversa si potrebbe evitare di introdurre preventivamente questa specificazione geometrica (che ci è apparsa evidente per passaggio al limite del caso dei poligoni

funicolari), ricavandola invece a posteriori quale conseguenza della seconda equazione cardinale.

19. Anche qui, come nel caso dei poligoni funicolari (n. 6), si può arguire che le (12), (13), in quanto caratterizzano gli stati di equilibrio, debbono implicare le equazioni cardinali per l'intero filo, ed anche per ogni sua parte finita. Per verificarlo direttamente basta notare che anche in questo caso ciascuna delle (12), (13), in quanto esprime l'annullarsi di tre (o due) forze agenti su di uno stesso elemento materiale, assimilabile ad un punto, si può interpretare come una relazione di equivalenza tra sistemi di vettori applicati; cosicchè la medesima interpretazione vale per l'equazione che si ottiene integrando la (12) lungo il filo, fra due punti  $P'$ ,  $P''$  di ascisse curvilinee  $s'$ ,  $s''$ , cioè l'equazione

$$T(s'') - T(s') + \int_{s'}^{s''} \mathbf{F} ds = 0,$$

la quale esprime appunto che il sistema di tutte le forze esterne agenti sul tratto generico  $P'PP''$  di filo è vettorialmente equivalente a zero.

20. Per scindere l'equazione vettoriale (12) nelle sue componenti secondo gli assi, ricordiamo che la tensione  $\mathbf{T}$  è un vettore tangenziale alla funicolare, diretto nel verso delle  $s$  crescenti, cosicchè può essere rappresentato con  $T(s)\mathbf{t}$  dove  $\mathbf{t}$  è il solito vettore unitario tangenziale e  $T(s)$  è essenzialmente positiva. Le componenti del vettore  $\mathbf{T}$  valgono pertanto  $Tdx/ds$ ,  $Tdy/ds$ ,  $Tdz/ds$ . Ciò posto, se  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  sono le componenti della forza unitaria secondo gli assi, otteniamo dalla (12) le tre equazioni scalari

$$(12') \quad \begin{cases} \frac{d}{ds} \left( T \frac{dx}{ds} \right) + X = 0, \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) + Y = 0, \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{ds} \right) + Z = 0, \end{cases}$$

Quanto ad  $s$ , non è un parametro arbitrario, bensì l'arco di funicolare, cosicchè deve essere legato alle  $x$ ,  $y$ ,  $z$  dall'equazione differenziale caratteristica

$$(14) \quad \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = 1.$$

Da quanto precede risulta che il problema di determinare la curva funicolare di un filo, sotto una data sollecitazione continua, richiede la integrazione di un sistema di equazioni differenziali. Precisamente, se la forza unitaria è, o si può riguardare, posizionale, cosicchè le  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  siano funzioni conosciute di  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , le incognite del problema, se pel momento si prescinde dalle condizioni ai limiti, sono le quattro funzioni  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$  e  $T(s)$ , delle quali le prime tre definiranno la curva funicolare, la quarta darà la tensione e, come sappiamo, dovrà risultare essenzialmente positiva. Per determinare codeste quattro incognite, abbiamo le quattro equazioni (12'), (14), di cui le prime tre sono del secondo ordine (nelle  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) e la quarta è del primo; ed è facile fare il computo delle costanti arbitrarie, da cui dipende l'integrale generale.

A tale scopo notiamo che derivando la (14) si ottiene

$$(14') \quad \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} = 0;$$

onde, eseguendo nelle (12') la derivazione rispetto ad  $s$  e sommandole membro a membro, dopo averle moltiplicate per

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

rispettivamente, si ottiene

$$(14'') \quad \frac{dT}{ds} = - \left( X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) = - F \times t.$$

Ciò posto, basta eliminare dalle (12')  $dT/ds$  mediante quest'ultima equazione per renderle atte a definire le

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2},$$

cosicchè, in base al criterio ricordato al n. 18 del Cap. II (nota a pie' di p. 73), si riconosce che il sistema costituito dalle (12') e (14'') ammette un integrale dipendente da *sette costanti arbitrarie*. Ma codesto sistema, come si verifica col calcolo inverso a quello ora indicato, implica la (14'), talchè ammette l'integrale

$$\left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = \text{cost.};$$

e noi dobbiamo disporre di una delle sette costanti arbitrarie per rendere uguale ad 1 il secondo membro. Così si conclude che *l'integrale generale del sistema (12'), (14) dipende da sei costanti arbitrarie*, di cui potremo valerci per soddisfare ad altrettante condizioni indi-

pendenti, p. es., se sono prefissate le forze  $F_A$ ,  $F_B$  applicate agli estremi, alle condizioni ai limiti (13), che, proiettate sugli assi, danno appunto sei equazioni scalari. Ma di solito, nei problemi concreti, non compaiono fra i dati le sollecitazioni agli estremi; bensì è prestabilito che codesti estremi del filo (di data lunghezza  $l$ ) siano attaccati a due dati punti fissi  $A$  e  $B$ . In tal caso le sei costanti arbitrarie vanno determinate in modo che le funzioni  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$  per  $s = 0$  ed  $s = l$  risultino eguali alle date coordinate di  $A$  e, rispettivamente, di  $B$ ; e le (13) servono allora a determinare  $F_B$  ed  $F_A$ , cioè le reazioni agli attacchi.

21. Se un filo, oltre che da forze continue, è sollecitato da forze finite, applicate in uno o più punti interni, converrà scinderlo nei vari tratti in cui risulta diviso da codesti punti. Per ogni tratto seguitano naturalmente a valere le considerazioni precedenti; soltanto si avrà una maggior complicazione nella determinazione delle costanti (sei per ciascun tratto). Le condizioni, che devono essere soddisfatte nei punti di divisione, sono pure sei per ciascuno: tre esprimono semplicemente che due tratti hanno un punto comune; le altre tre caratterizzano l'equilibrio di questo punto, il quale si comporta nel riguardo come un nodo di un generico poligono funicolare.

22. FORZE PARALLELE. — Abbiamo visto al n. 11 che un poligono funicolare, sollecitato nei nodi intermedi da forze parallele, giace in un piano, contenente la comune direzione delle forze. Se ne arguisce, passando al caso limite di una sollecitazione continua secondo una direzione costante, che la funicolare è necessariamente una curva piana.

Questa conclusione è naturalmente contenuta nelle equazioni differenziali (12') e si ritrova immediatamente, supponendo uno degli assi, p. es. quello delle  $y$ , parallelo alle forze. Si ha allora  $X = Z = 0$ , e dalla prima e terza delle (12'), integrando rispetto ad  $s$ , si deduce

$$T \frac{dx}{ds} = \varphi,$$

$$T \frac{dz}{ds} = C,$$

dove  $\varphi$  e  $C$  designano due costanti arbitrarie, dopo di che, moltiplicando la prima di queste equazioni per  $dz/ds$ , la seconda per  $dx/ds$ , e sottraendo membro a membro, si ottiene

$$C \frac{dx}{ds} - \varphi \frac{dz}{ds} = 0,$$



onde, integrando ancora una volta, si deduce

$$Cx - \varphi z = \text{cost.} :$$

e questa equazione, lineare fra le coordinate  $x, z$  di un punto qualsiasi della funicolare, esprime appunto che essa giace in un piano, parallelo all'asse delle  $y$ , cioè alla comune direzione delle forze attive. L'equazione si ridurrebbe ad una identità nel caso particolare in cui fossero zero sia  $C$  che  $\varphi$ . Ma si può prescindere da questa eventualità, notando che essa implicherebbe: o  $T = 0$  e quindi, per la (12), l'annullarsi della sollecitazione  $F$ ; ovvero  $dx/ds = dz/ds = 0$ , vale a dire una funicolare rettilinea, avente la stessa direzione della  $F$ ; casi banali che intenderemo entrambi esclusi. In tutti gli altri è dunque ben determinato il piano che contiene la funicolare, e conviene ricondursi senz'altro ad un problema in due dimensioni scegliendo codesto piano come piano coordinato  $xy$ . La equazione

$$T \frac{dz}{ds} = C$$

si riduce con ciò ad una identità (la costante  $C$  assumendo il particolare valore zero) e rimangono, per definire la curva e la tensione, le due equazioni (la prima di primo e la seconda di secondo ordine)

$$(15) \quad \begin{cases} T \frac{dx}{ds} = \varphi, \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) = -Y, \end{cases}$$

cui va naturalmente associata la definizione del parametro  $s$  come arco di funicolare

$$(16) \quad \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 = 1.$$

La  $\varphi$ , che compare nella prima delle (15), è una costante a priori arbitraria, di cui si può soltanto asserire, ragionando come pocanzi, che è diversa da zero.

L'interpretazione meccanica di questa costante  $\varphi \neq 0$  risulta immediatamente dalla prima delle (15): essa è la componente secondo l'asse delle  $x$  della tensione  $T$ , onde si conclude che *lungo la funicolare è costante per la tensione la componente normale alla direzione fissa della sollecitazione* (e quindi la componente orizzontale quando la sollecitazione è dovuta alla gravità).

In questo enunciato si riconosce il caso limite della proprietà trovata al n. 12 per i poligoni funicolari; e precisamente la lettera  $\varphi$  ha nei due casi il medesimo significato.

Notiamo infine che l'integrazione del sistema (16), (17) introduce, oltre la  $\varphi$ , altre tre costanti arbitrarie, come si riconosce agevolmente in base al solito criterio (II, n. 18; e n. 20 del presente Cap.).

Per la determinazione delle quattro costanti arbitrarie, valgono gli stessi criteri indicati ai nn. 20, 21, adattati, beninteso, al caso di un problema piano.

**23. PONTI SOSPESI.** — Come esempio semplice, consideriamo le gomene sostentatrici dei ponti sospesi, e cerchiamone la configurazione normale, che deve naturalmente corrispondere ad uno stato di equilibrio.

Queste gomene sostentatrici sono fissate agli estremi e, di solito, reggono il ponte sottostante per mezzo di robusti tiranti verticali e ad egual distanza l'uno dall'altro.

Inoltre esse sono, per lo più, appaiate in modo che tutto risulti simmetrico (geometricamente e materialmente) rispetto al piano verticale lungo la mediana dell'impiantito del ponte: cosicchè, intanto, è ragionevole ritenere che il peso di questo si scarichi in parti eguali sulle due gomene, e si può quindi limitarsi a considerarne una sola.

Supposto poi che il ponte sia orizzontale e che la sua struttura materiale sia uniforme per tutta la sua lunghezza, avremo che i vari tiranti (sotto l'ipotesi già accennata che essi siano equidistanti) risulteranno tutti caricati nello stesso modo. Insomma, se si prescinde dal peso proprio delle gomene e dei tiranti, ogni gomena è assimilabile ad un filo, fissato agli estremi e sollecitato da pesi eguali in un certo numero di punti intermedi, aventi l'uno dall'altro la stessa distanza orizzontale.

Il problema, posto in questo modo, si può discutere col metodo indicato ai nn. 11, 12 e 15; ma la discussione si rende assai più agevole, sostituendo alla ipotesi della sollecitazione discreta una opportuna ipotesi semplificatrice.

Se il numero dei tiranti è grande, si può praticamente considerare la sollecitazione come continua, ed ammettere che ciascun elemento di gomena sopporti metà del peso della porzione di ponte immediatamente sottostante, l'altra metà gravando sulla gomena gemella.

Noi qui ci proponiamo appunto di discutere il problema nell'ipotesi di una tale sollecitazione continua.

Le forze essendo tutte verticali, la funicolare sarà piana e potremo prendere le mosse dalle equazioni (15) e (16) del n. 22, purchè si assuma come piano  $xy$  quello verticale, passante per gli

estremi (prefissati)  $A$ ,  $B$  della gomena che si considera, e l'asse  $y$  si supponga diretto verticalmente (per es. verso l'alto), lasciando, pel momento, arbitraria la posizione dell'origine.

Con ciò, ove si designi con  $2p$  il peso per unità di lunghezza del ponte, ogni elemento  $ds$  di gomena si troverà sottoposto ad una forza verticale di intensità eguale al prodotto di  $p$  per la proiezione orizzontale di  $ds$  (peso di metà della porzione di ponte immediatamente sottostante).

Ora osserviamo che, in virtù della prima delle (15), in cui, come sappiamo,  $\varphi$  è una costante (diversa da zero),  $dx/ds$  non può mai annullarsi. Se dunque si suppone di scegliere la direzione positiva dell'asse (orizzontale) delle  $x$  nel senso da  $A$  verso  $B$ ,  $dx/ds$  sarà sempre positivo, perchè, non annullandosi, non può neppure cambiare segno; e se fosse sempre negativo, la  $x$  dovrebbe decrescere, quando  $s$  passa dal valore zero (punto  $A$ ) al valore  $l$  (punto  $B$ ), mentre, per il modo in cui abbiamo scelto la direzione positiva dell'asse delle  $x$ , l'ascissa di  $B$  è necessariamente maggiore di quella di  $A$ .

Con tale convenzione il  $dx$  (incremento che subisce  $x$  per l'incremento positivo  $ds$  dell'arco) è essenzialmente positivo e dà quindi (in valore e segno) la misura della proiezione orizzontale dell'elemento. La forza che lo sollecita è dunque  $p dx$ , verticale verso il basso; cosicchè la forza unitaria è data da  $p dx/ds$  e la componente  $Y$  (secondo l'asse delle  $y$ , verticale verso l'alto) da

$$Y = -p \frac{dx}{ds}.$$

Portando questo valore nelle (15), si ottiene

$$(17) \quad \begin{cases} T \frac{dx}{ds} = \varphi, \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) = p \frac{dx}{ds}, \end{cases}$$

dove la costante  $\varphi$  è a ritenersi positiva, tale dovendo essere  $T$  per sua natura, e, nel caso presente, anche  $dx/ds$ .

24. Trovate così le equazioni indefinite dell'equilibrio, procediamo all'integrazione.

Dalla seconda delle (17) deduciamo con una quadratura,

$$T \frac{dy}{ds} = px + \text{cost.};$$

e, poichè sinora si son fissate le direzioni degli assi, non la posi-

zione dell'origine, possiamo, con una traslazione degli assi parallela all'asse  $x$ , portare l'asse  $y$  a passar pel punto, in cui la tangente è orizzontale, vale a dire pel punto in cui è  $dy/ds = 0$  (e vedremo ben presto che si tratta di un punto di minimo).

Avremo così

$$(18) \quad T \frac{dy}{ds} = px,$$

dopo di che basta dividere membro a membro per la prima delle (17) ed eliminare  $T$  ed  $s$ , per ottenere l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\varphi} x,$$

che si integra a vista e dà

$$y = \frac{p}{2\varphi} x^2 + \text{cost.},$$

dove la costante di integrazione si riduce a zero portando l'origine, con una traslazione degli assi parallela all'asse  $y$ , nel punto in cui questo incontra la curva. Con ciò l'ottenuta equazione della funicolare assume la forma

$$(19) \quad y = \frac{p}{2\varphi} x^2,$$

e di qui si rileva che codesta curva è una parabola di vertice nell'origine, avente per asse di simmetria l'asse delle  $y$  e volgente la concavità verso l'alto.

Quanto poi alla tensione  $T$ , basta quadrare e sommare la prima delle (17) e la (18) e tener conto della (16) per concludere

$$(20) \quad T^2 = p^2 x^2 + \varphi^4.$$

Naturalmente, essa risulta minima, ed eguale alla sua componente orizzontale costante  $\varphi$ , nel punto più basso della funicolare ( $x = 0$ ).

25. Comunque siano prefissate le condizioni ai limiti, atte ad individuare la configurazione di equilibrio, questa è data, per un opportuno valore della costante meccanica  $\varphi$ , da un arco di parabola di equazione (19). Nei casi concreti sono per lo più prestabiliti, per ciascuna gomema, gli estremi  $A$  e  $B$ , allo stesso livello, e la loro distanza  $a$  (lunghezza del ponte o *portata* delle gomene sosteniatrici). I due punti  $A$ ,  $B$  risultano manifestamente simmetrici rispetto all'asse  $y$  della parabola funicolare, talchè le loro ascisse sono  $\pm a/2$  rispettivamente. Perciò, in base alle equazioni

ai limiti (13) e alla (20), si conclude che entrambe le reazioni di attacco  $F_A$ ,  $F_B$  sono eguali, in valore assoluto, a

$$\sqrt{\frac{1}{4} a^2 p^2 + \varphi^2}.$$

Il dislivello fra gli estremi della gomina e il suo punto più basso dicesi *freccia di inflessione*; denotandola con  $f$  e osservando che essa non è altro che l'ordinata comune di  $A$  e  $B$  si trova, ponendo  $x = \pm a/2$  nella (19),

$$(19') \quad f = \frac{pa^2}{8\varphi};$$

ed è questa una formula notevole per il suo interesse tecnico.

Per completare questi cenni, resta da determinare la relazione che lega la costante meccanica  $\varphi$  coi dati diretti della questione, cioè con  $p$  ed  $a$  e colla lunghezza  $l$  della gomina.

Evidentemente la  $l$  è data dalla lunghezza dell'arco di parabola (19), compreso tra  $A$  e  $B$ , cioè, ove si introduca, in base alla (16), l'elemento  $ds$  di funicolare, da

$$l = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

dove il radicale va preso in senso aritmetico e, beninteso,  $dy/dx$  va calcolato mediante la (19). Si ottiene così

$$l = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 + \frac{p^2}{\varphi^2} x^2} dx,$$

ossia, ponendo  $\lambda = px/\varphi$ ,

$$(21) \quad l = \frac{2\varphi}{p} \int_0^{\frac{pa}{2\varphi}} \sqrt{1 + \lambda^2} d\lambda;$$

e di qui, ricordando la formula elementare di integrazione

$$2 \int \sqrt{1 + \lambda^2} d\lambda = \log(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}) + \lambda \sqrt{1 + \lambda^2},$$

dove il simbolo  $\log$  denota il logaritmo naturale (o di base  $e$ ), si conclude

$$l = \frac{\varphi}{p} \log \left\{ \frac{pa}{2\varphi} + \sqrt{1 + \frac{p^2 a^2}{4\varphi^2}} \right\} + \frac{a}{2} \sqrt{1 + \frac{p^2 a^2}{4\varphi^2}}.$$

Da questa formula o, più semplicemente, dalla (21) si può trarre una espressione approssimata di  $l$ , valida ogni qualvolta  $pa/\varphi$  (rapporto fra il carico totale sopportato dal filo e la componente orizzontale  $\varphi$  della tensione, che non è se non la componente orizzontale della forza che lo tende agli estremi) sia abbastanza piccolo; tale per es. che se ne possa sensibilmente trascurare la quarta potenza, come avviene, in generale, nei problemi tecnici.

In tale ipotesi, poichè la variabile corrente di integrazione  $\lambda$  si mantiene sempre inferiore a  $pa/2\varphi$ , saranno a maggior ragione trascurabili le potenze di  $\lambda$ , dalla quarta in avanti. Perciò, ove si applichi lo sviluppo del TAYLOR a  $\sqrt{1 + \lambda^2} = (1 + \lambda^2)^{1/2}$  si potrà arrestarsi dopo il secondo termine, trascurando il resto, che contiene  $\lambda^2$  a fattore.

Sostituendo  $1 + \lambda^2/2$  in luogo di  $\sqrt{1 + \lambda^2}$  si ottiene

$$l = \frac{2\varphi}{p} \int_0^{\frac{pa}{2\varphi}} \left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\right) d\lambda,$$

donde l'espressione approssimata

$$(22) \quad l = a \left(1 + \frac{p^2 a^2}{24\varphi^2}\right).$$

**26. CATENARIA OMOGENEA.** — Al problema studiato ai nn. prec. va ravvicinato quello di determinare la configurazione di equilibrio di un filo materiale omogeneo, sospeso agli estremi in due dati punti  $A$  e  $B$  (non situati sulla stessa verticale) e soggetto alla sola sollecitazione della gravità.

Anche qui le forze esterne sono tutte verticali, talchè (n. 22) la funicolare giacerà nel piano verticale di  $A$  e  $B$ , nel quale, come al n. 23, sceglieremo l'asse  $y$  verticale e orientato verso l'alto, l'asse  $x$  (orizzontale) orientato in modo che l'ascissa di  $B$  risulti (algebricamente) maggiore di quella di  $A$ , e lasceremo, dapprima, arbitraria la posizione dell'origine.

La forza unitaria della sollecitazione continua è il peso (costante, trattandosi di un filo omogeneo) di un tratto di filo di lunghezza 1. Indicatane con  $p$  l'intensità, avremo  $X=0$ ,  $Y=-p$ ; onde le equazioni indefinite dell'equilibrio saranno, per le (15) del n. 22,

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} T \frac{dx}{ds} = \varphi, > \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) = p, \end{array} \right.$$

in cui come si è visto in generale al n. 22, la costante  $\varphi$  è a ritenersi diversa da zero ed anzi essenzialmente positiva, dato il modo in cui sono orientati gli assi.

Eliminando  $T$  dalla seconda equazione per mezzo della prima, si ottiene

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{p}{\varphi},$$

dove, naturalmente,  $dy/dx$  significa il rapporto fra gli incrementi delle coordinate lungo la funicolare, corrispondenti ad un incremento  $ds$  dell'arco. Trattando l'ascissa  $x$  come variabile indipendente, e l'ordinata  $y$  come funzione, si può dare alla relazione testè ricavata la forma di un'equazione differenziale fra le sole coordinate  $x, y$  dei punti della funicolare.

Più precisamente, se si scrive per brevità  $y'$  al posto di  $dy/dx$ , e si nota che il  $ds$  può essere sostituito con  $\sqrt{1 + y'^2} dx$ , si ottiene, moltiplicando da ultimo per  $dx$ ,

$$(24) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} dy' = \frac{p}{\varphi} dx.$$

Ove la  $y'$  si consideri come una incognita ausiliaria, la (24) è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separate, che si integra immediatamente e dà

$$\log(\sqrt{1 + y'^2} + y') = \frac{p}{\varphi} x + \text{cost.},$$

nella quale, profittando della libertà di scelta dell'origine degli assi (di cui si sono fissate soltanto le direzioni), possiamo ridurre a zero la costante di integrazione, portando l'asse  $y$ , con una traslazione parallela all'asse  $x$ , a passare per un punto in cui la tangente alla funicolare è orizzontale, vale a dire è  $y' = 0$  (e vedremo che vi è un unico punto di minimo).

Otteniamo così

$$\log(\sqrt{1 + y'^2} + y') = \frac{p}{\varphi} x,$$

ossia, passando dai logaritmi ai numeri,

$$(25) \quad \sqrt{1 + y'^2} + y' = e^{\frac{p}{\varphi} x}.$$

Di qui, tenendo conto della identità

$$(\sqrt{1 + y'^2} + y')(\sqrt{1 + y'^2} - y') = 1,$$

si deduce

$$\sqrt{1 + y'^2} - y' = e^{-\frac{p}{\varphi} x}$$

e questa equazione combinata per sottrazione e per somma con la (25), dà le

$$(26) \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{p}{\varphi} x} - e^{-\frac{p}{\varphi} x} \right), \\ \sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{p}{\varphi} x} + e^{-\frac{p}{\varphi} x} \right). \end{cases}$$

Dalla prima, con una quadratura, si perviene alla

$$y = \frac{\varphi}{2p} \left( e^{\frac{p}{\varphi} x} + e^{-\frac{p}{\varphi} x} \right) + \text{cost.},$$

e basta eseguire una traslazione degli assi parallela all'asse  $y$  (cioè assumere come nuova  $y$  la  $y - \text{cost.}$ ) per ridurre a zero la costante di integrazione; con che si ottiene per la funicolare (rispetto ad assi che da quanto precede risultano ormai determinati univocamente) l'equazione

$$(27) \quad y = \frac{\varphi}{2p} \left( e^{\frac{p}{\varphi} x} + e^{-\frac{p}{\varphi} x} \right).$$

D'altra parte, ricordando che  $\sqrt{1 + y'^2} dx = ds$  e convenendo di misurare gli archi  $s$  di funicolare a partire dal punto della curva di ascissa  $x = 0$  nel verso delle  $x$  crescenti, si deduce dalla seconda delle (26), con una quadratura,

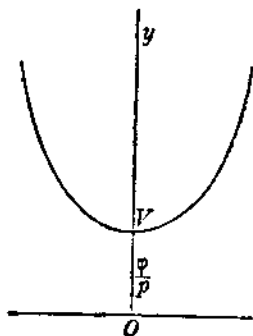
$$(28) \quad s = \frac{\varphi}{2p} \left( e^{\frac{p}{\varphi} x} - e^{-\frac{p}{\varphi} x} \right).$$

27. La curva (27) dallo HUYGENS che la scoperse fu chiamata *catenaria*, e solitamente si caratterizza colla qualifica di *omogenea*, estendendo il nome generico di *catenaria* a tutte le curve di equilibrio di fili o catene pesanti (anche non omogenei).

Per renderci conto della forma della *catenaria omogenea*, osserviamo anzitutto che la  $dy'/dx = d^2y/dx^2$ , in base alla (24), è sempre positiva, cosicchè la  $y'$  è costantemente crescente; e poichè la  $y'$ , come risulta dalla prima delle (26), si annulla per  $x = 0$ , si riconosce che essa è sempre negativa per  $x < 0$ , sempre positiva per  $x > 0$ . Di qui e dalla (27) risulta che l'ordinata  $y$  della *catenaria*, costantemente positiva, e tendente all'infinito per  $x \rightarrow \pm \infty$ , va



sempre decrescendo, mentre  $x$  varia da  $x = -\infty$  ad  $x = 0$ ; raggiunge per  $x = 0$  il minimo (positivo)  $\varphi/p$  (punto più basso o *vertice*  $V$  della catenaria) e cresce poi costantemente al crescere della  $x$  da 0 a  $+\infty$ . Inoltre, poichè la  $y$ , data dalla (27), è funzione pari dell'ascissa (cioè riprende lo stesso valore per valori opposti di  $x$ ), la catenaria è simmetrica rispetto all'asse  $y$ , cioè rispetto alla verticale passante per il punto più basso  $V$ . Segue di qui e dall'unicità del minimo che, se un arco di catenaria ha per estremi due punti  $A, B$ , posti al medesimo livello, esso giace tutto al disotto della orizzontale  $AB$  ed è simmetrico rispetto alla verticale mediana, il che era ben prevedibile data l'interpretazione statica.



L'asse (orizzontale) delle  $x$ , cui è riferita la (27), dicesi *base* della catenaria e l'ordinata, essenzialmente positiva,  $\varphi/p$  del punto più basso chiamasi *parametro*.

28. Resta da calcolare la tensione. A tale scopo, riprendiamo la prima delle equazioni indefinite (23) scrivendola sotto la forma

$$T = \varphi \frac{ds}{dx} = \varphi \sqrt{1 + y'^2};$$

e dal confronto della seconda delle (26) e della (27) deduciamo

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{p}{\varphi} y;$$

cosicchè concludiamo

$$(29) \quad T = py,$$

cioè la tensione in un punto generico di una catenaria omogenea uguaglia il peso di un tratto di filo di lunghezza eguale alla distanza del punto dalla base.

In particolare, dalla (29) risulta confermata la circostanza, prevedibile a priori, che la tensione è minima nel punto più basso  $V$  della funicolare ed assume ivi il valore  $\varphi$  (componente tangenziale costante della tensione); e se si considera un arco di catenaria i cui estremi  $A$  e  $B$  siano ad eguale altezza sulla base (e quindi, per n. prec., simmetrici rispetto alla verticale di  $V$ ) la tensione raggiunge in essi il suo valore massimo, dato da  $py_0$ , se  $y_0$  è la loro ordinata comune. Ove si indichi con  $\tau$  codesta tensione

massima, con  $f$  la freccia di inflessione  $y_0 - \varphi/p$  dell'arco di catenaria (n. 25), si ottiene la formula, notevole dal punto di vista applicativo,

$$(30) \quad \tau = \varphi + pf.$$

29. CASO DI FORTI TENSIONI. — Un caso particolare, che merita di essere rilevato, è quello di un filo fortemente teso agli estremi, con che si intende che  $\varphi$  (tensione orizzontale costante, e quindi riferibile, se si vuole, agli estremi) sia rilevante rispetto al peso totale  $pl$  del filo.

Più precisamente supporremo che il rapporto  $pa/\varphi$  (dove  $a$  designa la portata, cioè la proiezione orizzontale della funicolare che si considera) sia abbastanza piccolo, perchè la sua quarta potenza riesca trascurabile di fronte all'unità. È appena necessario osservare che, essendo in ogni caso  $a < l$ , l'accennata condizione è senz'altro verificata, ove si ritenga trascurabile  $(pl/\varphi)^4$ . Comunque, ci proponiamo di mostrare come basti poter trascurare  $(pa/\varphi)^4$ , perchè la funicolare divenga assimilabile ad un arco di parabola.

Ammesso infatti che gli estremi  $A, B$  siano da banda opposta rispetto al punto più basso del filo (ciò che accade certamente quando essi si trovano al medesimo livello), l'ascissa  $x$  di un punto generico della funicolare resta, in valore assoluto, necessariamente al disotto della portata  $a$ , anzi non può superare  $a/2$  allorquando  $A$  e  $B$  si trovano sulla stessa orizzontale.

Ad ogni modo  $px/\varphi$  rimane, in valore assoluto, inferiore a  $pa/\varphi$ ; cosicchè a  $e^{\frac{px}{\varphi}}$  si possono sostituire i primi quattro termini dello sviluppo in serie, trascurando il resto che contiene  $(px/\varphi)^4$  a fattore. Analogamente per  $e^{-\frac{px}{\varphi}}$ .

Avendosi così

$$e^{\frac{px}{\varphi}} = 1 + \frac{px}{\varphi} + \frac{1}{2} \left( \frac{px}{\varphi} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{px}{\varphi} \right)^3,$$

$$e^{-\frac{px}{\varphi}} = 1 - \frac{px}{\varphi} + \frac{1}{2} \left( \frac{px}{\varphi} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left( \frac{px}{\varphi} \right)^3,$$

l'equazione (27) della catenaria si riduce a

$$(27') \quad y = \frac{\varphi}{p} + \frac{p}{2\varphi} x^2,$$

che rappresenta manifestamente una parabola ad asse verticale,

di parametro  $\varphi/p$ ; talchè basta trasportare l'origine nel vertice, con una opportuna traslazione degli assi, per ridurre l'equazione (27') alla forma  $y = px^2/2\varphi$ .

Salvo il diverso significato di  $p$ , ritroviamo la stessa parabola (19) che al n. 24 abbiamo ottenuto come configurazione di equilibrio delle gomene dei ponti sospesi, nell'ipotesi della sollecitazione continua. Se quindi si considera in particolare il caso di due estremi  $A, B$  allo stesso livello, la lunghezza  $l$  del filo rimane approssimativamente espressa dalla formula (22) del n. 25, alla quale, naturalmente, si perverrebbe anche qui in modo diretto, sostituendo nella (28) del n. 26 agli esponenziali gli sviluppi testè indicati.

Quanto alla tensione, si deduce dalla (29), tenendo conto della (27'), l'espressione approssimata

$$T = \varphi + \frac{p^2}{2\varphi} x^2,$$

che, applicata ad un estremo ( $x = \pm a/2$ ), porge la tensione massima

$$(31) \quad \tau = \varphi + \frac{p^2 a^2}{8\varphi}.$$

Riassumendo, nel caso di forti tensioni ( $pa$  piccolo di fronte a  $\varphi$ ) la catenaria è assimilabile alla parabola

$$y = \frac{p}{2\varphi} x^2,$$

ove si supponga l'origine degli assi nel punto più basso; e, se gli attacchi sono ad egual livello, la freccia  $f$ , la lunghezza  $l$  del filo e la massima tensione  $\tau$  sono definite (in termini del peso unitario  $p$ , della portata  $a$  e della tensione orizzontale agli estremi  $\varphi$ ) dalle formule (19') e (22) del n. 25 e dalla (31):

$$f = \frac{pa^2}{8\varphi}, \quad l = a \left( 1 + \frac{p^2 a^2}{24\varphi^2} \right), \quad \tau = \varphi + \frac{p^2 a^2}{8\varphi}.$$

Combinando la prima e la terza si ritrova manifestamente la (30) del n. 28.

30. Fra il caso di un carico proporzionale a ciascun elemento (catenaria omogenea) e quello di un carico proporzionale alla proiezione orizzontale dell'elemento (ponti sospesi), non sussiste, per ciò che riguarda le rispettive equazioni differenziali (23) e (17), se non un'unica differenza: la  $p$  del primo caso è sostituita nel secondo da  $p dx/ds$ . Se si indica con  $\theta$  l'inclinazione (sull'orizzonte)

della tangente alla funicolare in un punto generico,  $dx/ds$  non è altro che  $\cos \theta$ , sicchè il divario fra le due sollecitazioni è misurato da  $p(1 - \cos \theta)$ . Se poi il filo è così teso che siano trascurabili i termini di secondo ordine in  $\theta$ , riesce appunto trascurabile la differenza  $1 - \cos \theta$ , e quindi i due casi si confondono.

Perciò il fatto qualitativo della sostituibilità, in date circostanze, di un arco di parabola ad un arco di catenaria può essere previsto senza calcoli, per semplice confronto delle equazioni differenziali. Ma è necessaria la loro preventiva integrazione, se si vuol dare alle condizioni di sostituibilità (come si è fatto al n. prec.) una forma immediatamente desumibile dai dati pratici della questione.

#### § 4. - Equazioni intrinseche dell'equilibrio dei fili ed applicazioni.

31. Torniamo al caso generale di una sollecitazione continua (nn. 16-21) e riprendiamo l'equazione vettoriale

$$(12) \quad \frac{dT}{ds} + F = 0,$$

che riassume in sè le condizioni indefinite dell'equilibrio. Ponendo in essa  $T = Tt$  (dove  $t$  denota il solito vettore unitario tangenziale alla funicolare, orientato nel verso delle  $s$  crescenti) e tenendo conto della formula vettoriale (I, n. 77)

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{r}n,$$

otteniamo

$$\frac{dT}{ds}t + \frac{T}{r}n + F = 0,$$

dove  $r$  indica il raggio di curvatura della funicolare ed  $n$  il vettore unitario diretto secondo la normale principale ed orientato dal punto generico della curva verso il corrispondente centro di curvatura.

Se proiettiamo la precedente equazione vettoriale sui tre spigoli del triedro principale (tangente, normale principale e binormale, orientate secondo le convenzioni fissate al Cap. I, n. 80) e se denotiamo con  $F_t$ ,  $F_n$ ,  $F_b$  le rispettive componenti della forza unitaria, perveniamo alle tre equazioni scalari

$$(32) \quad \frac{dT}{ds} + F_t = 0, \quad \frac{T}{r} + F_n = 0, \quad F_b = 0,$$

le quali prendono il nome di *equazioni intrinseche dell'equilibrio* dei fili flessibili ed inestendibili. Dalla terza risulta senz'altro che in *condizioni statiche, la forza unitaria, in ogni punto della funicolare, è contenuta nel rispettivo piano osculatore.*

**32. FILO TESO SU DI UNA SUPERFICIE LEVIGATA.** — Applichiamo le equazioni intrinseche (32) allo studio della configurazione di equilibrio di un filo adagiato su di una superficie sotto l'azione di forze che lo tendano (abbastanza fortemente) agli estremi. Qui la sollecitazione continua lungo il filo si riduce alla reazione di appoggio se, come noi supporremo, si può prescindere dal peso, cioè se il peso (complessivo) si può ritenere trascurabile rispetto alle tensioni esercitate agli estremi.

Considerando per ora il caso ideale delle superficie prive di attrito, avremo che la corrispondente reazione è tutta normale; d'altra parte, lungo la funicolare, essa, come si è visto al n. prec., deve pur appartenere al piano osculatore, cosicchè si ha intanto che *in ogni punto della funicolare il piano osculatore è normale alla superficie di appoggio.*

Ora convien ricordare che su di una superficie le curve aventi la proprietà che in ogni loro punto il piano osculatore è normale alla superficie, diconsi *geodetiche* <sup>(1)</sup>. E giova tener presente che le curve così definite sono altresì caratterizzate dalla proprietà di segnare sulla superficie, fra due loro punti generici (non troppo lontani), il più breve cammino sulla superficie. Per es. sulla sfera le geodetiche sono date dai cerchi massimi, di cui, come è ben noto, ogni arco, minore di una semicirconferenza, segna il minimo cammino sulla sfera fra i rispettivi estremi. Più in generale sulle superficie di rotazione ogni meridiano è una geodetica (non beninteso, viceversa): invero su di una superficie siffatta la normale in un punto qualsiasi giace nel corrispondente piano meridiano, il quale, alla sua volta, è il piano osculatore della curva meridiana per quel punto. Così, ancora, per i cilindri le geodetiche non sono altro che le rispettive elicke (e in particolare le generatrici e le sezioni piane normali alle generatrici).

Tornando dopo questa breve digressione, al nostro problema, possiamo enunciare il risultato pocanzi ottenuto, dicendo che:

*Un filo teso sopra una superficie priva d'attrito e soggetto a forze attive soltanto agli estremi, si dispone secondo una geodetica della su-*

(1) Cfr. per es. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Terza ediz., 1922 (Bologna, Zanichelli), Vol. I, Cap. VI.

perficie. Essa segna così sulla superficie il più breve cammino dall'uno all'altro estremo (purchè questi estremi non siano troppo lontani, nel senso pocanzi chiarito).

Inoltre, poichè in condizioni statiche la reazione è in ogni punto normale alla superficie, si ha identicamente  $F_t = 0$ , e dalla prima delle (32) risulta

$$T = \text{cost.},$$

cioè la tensione si trasmette inalterata da un capo all'altro del filo; il che implica, in particolare, agli estremi del filo ( $s = 0$  ed  $s = l$ )

$$T(0) = T(l),$$

precisamente come se il filo, libero e in assenza di ogni altra forza, fosse teso da due forze applicate agli estremi.

33. I risultati del n. prec. permettono di discutere il funzionamento di quelle trasmissioni di forze, mediante fili, carrucole e pesi, cui ci siamo più volte riferiti (VII, n. 13; IX, n. 2) ammettendo in ogni caso che, in prima approssimazione, la tensione del filo nell'estremo di attacco si potesse ritenere misurata dal peso applicato all'altro estremo. Ora possiamo dire che ciò sarebbe rigorosamente esatto nel caso ideale di un filo *non sollecitato da altre forze attive* e libero, oppure appoggiato sopra superficie *priva di attrito*.

In via approssimata, la conclusione rimarrà attendibile purchè:

1°) le forze (unitarie) agenti sugli elementi del filo (in particolare il peso dell'unità di lunghezza) siano sensibilmente trascurabili (di fronte alle forze che si esercitano negli estremi);

2°) siano nel medesimo senso trascurabili le forze provenienti dall'attrito degli appoggi.

Ma importa rilevare come generalmente l'influenza dell'attrito sia tutt'altro che trascurabile e come anzi, per molti dispositivi pratici, essa diventi addirittura essenziale, come mostreremo su di un esempio concreto ai nn. 35, 36.

34. Restando pel momento nelle generalità, notiamo ancora una conseguenza immediata delle equazioni intrinseche (32), relativa al caso di forze unitarie conservative. Se  $U(x, y, z)$  è il potenziale della  $F$ , si ha, per qualsiasi spostamento elementare  $dP$ ,

$$dU = F \times dP$$

e quindi, in particolare, per uno spostamento lungo la funicolare  $dP = tds$ ,

$$dU = F \times tds = F_t ds.$$

Perciò la prima delle (32) si può scrivere, in questo caso,

$$\frac{d(T + U)}{ds} = 0,$$

onde risulta

$$(33) \quad T + U = \text{cost.},$$

cioè, se le forze sono conservative, la tensione differisce solo per una costante dal potenziale cambiato di segno. Essa è quindi determinata in funzione della posizione, indipendentemente dalla conoscenza della funicolare. In particolare, se sono noti gli estremi del filo e il valore della tensione in uno di essi (ciò che fissa la costante del secondo membro), rimane senz'altro individuato anche il valore della tensione all'altro estremo.

Così, p. es., nel caso della catenaria omogenea (nn. 26-29) il peso unitario  $p$ , rispetto agli assi da noi adottati, deriva dal potenziale  $-py$ , talchè, in base alla (33), si ha senz'altro per la tensione l'espressione

$$T = py + \text{cost.},$$

e basta notare che nel punto più basso è  $T = \varphi$ ,  $y = \varphi/p$ , per concludere che la costante è nulla e per ritrovare l'equazione

$$(29) \quad T = py,$$

che abbiamo già ottenuto direttamente al n. 28.

**35. ATTRITO NELL'APPOGGIO DI FILI SU SUPERFICIE SCABRE.** — Si è visto al n. 32 che se un filo, teso agli estremi  $A$  e  $B$  da due forze  $F_A$  ed  $F_B$ , si appoggia ad una superficie priva di attrito e non è soggetto ad alcun'altra sollecitazione esterna, la tensione (scalare)  $T$  è, in condizioni statiche, costante lungo il filo, talchè per l'equilibrio si richiede che le due forze  $F_A$ ,  $F_B$  abbiano intensità eguali; e basta che si aumenti anche di pochissimo l'intensità di una di esse, perchè l'equilibrio sia senz'altro turbato.

Questo risultato teorico rende ben conto, come si è visto al n. 33, del funzionamento di noti dispositivi sperimentali di laboratorio; ma la pratica offre altresì innumerevoli esempi di sistemi materiali assimilabili a fili (funi, gomene, catene, ecc.) appoggiati o avvolti ad altri corpi e mantenuti in equilibrio da forze applicate agli estremi, che sono ben lungi dall'aver intensità eguali. Sulla riva di un fiume basta la forza muscolare di un uomo in capo ad una gomena, avvolta un numero sufficiente di volte intorno

ad un pilastrino, per impedire ad un grosso barcone di seguire la corrente.

In questi casi l'equilibrio, che, nell'ipotesi ideale della assenza di attrito, risulterebbe teoricamente impossibile, va riconnesso appunto, come a circostanza essenziale, all'attrito offerto al filo dalla superficie di appoggio o di avvolgimento: si presentano cioè circostanze analoghe a quelle che abbiamo illustrato al n. 18 del Cap. prec. con l'esempio della scala a pioli.

Per discutere siffatte circostanze riprendiamo le equazioni intrinseche

$$(32) \quad F_t + \frac{dT}{ds} = 0, \quad F_n + \frac{T}{r} = 0, \quad F_b = 0,$$

dove, nella supposizione di una sollecitazione attiva esclusivamente terminale, la  $F$  rappresenta l'incognita reazione unitaria, offerta dalla superficie di appoggio  $\sigma$  al filo; e abbandoniamo l'ipotesi dell'assenza di attrito. In questo caso, poichè la reazione  $F$  non è necessariamente normale a  $\sigma$ , la componente tangenziale  $F_t$ , potrà essere ed anzi, in generale, sarà diversa dallo zero; talchè, in base alla prima delle (32), lo stesso accadrà di  $dT/ds$  e la tensione varierà generalmente lungo il filo. Noi ci proponiamo precisamente di valutare, in condizioni statiche, l'eventuale differenza fra le tensioni  $T_A$  e  $T_B$  agli estremi  $o$ , ciò che è lo stesso, la differenza compatibile coll'equilibrio fra le intensità  $F_A$  ed  $F_B$  delle forze terminali.

A tale scopo è necessario caratterizzare il comportamento della reazione unitaria  $F$ . Per semplicità noi ci limiteremo a considerare il caso particolare (e, come vedremo, particolarmente interessante) in cui il tratto di filo, nello stato di equilibrio considerato, sia adagiato sulla superficie  $\sigma$  lungo una geodetica, vale a dire lungo una di quelle curve che danno le possibili configurazioni di equilibrio in assenza di attrito.

Allora il vettore unitario  $n$ , avente per linea d'azione la normale principale della funicolare, è pur normale alla superficie (n. 32), cosicchè  $F_n$  si identifica colla reazione normale. Inoltre, essendo  $F_b = 0$ , la componente di  $F$  secondo il piano tangente, cioè l'attrito statico unitario, risulta diretto secondo la tangente alla funicolare e perciò coincide con  $F_t$ .

Assimilando ogni elemento  $ds$  di filo appoggiato su  $\sigma$  ad un punto materiale in equilibrio su codesta superficie scabra, ricordiamo che questa è atta ad esercitare sul  $ds$  soltanto una reazione diretta verso l'esterno del corpo da essa limitato e non esterna alla corrispondente falda del cono di attrito.



Ora, secondo le (32), si desume che, perchè la  $T$  risulti positiva, dev'essere  $F_n < 0$ ; il che, in quanto la  $F$ , come si è visto, non può agire se non verso l'esterno del corpo di appoggio, implica che la normale principale della funicolare (orientata verso il centro di curvatura) sia diretta verso l'interno del corpo, o in altre parole che la funicolare volga in ogni suo punto la concavità al corpo limitato da  $\sigma$ .

L'altra condizione pocanzi rilevata per la reazione si traduce nella relazione

$$|F_t| < f |F_n|,$$

dove  $f$  designa il coefficiente di attrito. Di qui, tenuto conto delle equazioni intrinseche, si conclude che, in condizioni statiche, deve sussistere fra la tensione e il suo differenziale la relazione

$$(34) \quad |dT| < f \frac{T}{r} |ds|.$$

Non è inutile osservare che, nelle circostanze supposte, le equazioni indefinite dell'equilibrio si riducono sostanzialmente a quest'ultima condizione (34). Basta infatti che essa sia soddisfatta perchè esista una possibile reazione offerta dalla superficie  $\sigma$  [la  $F$ , definita dalle (32)], atta ad assicurare l'equilibrio di ciascun elemento  $ds$  del filo.

Dalla (34) si ritrova che l'ipotesi  $f = 0$  implica  $dT/ds = 0$ , ossia  $T = \text{cost.}$ ; per  $f$  qualsiasi, codesta condizione di equilibrio esprime che la tensione, pur potendo variare, deve variare abbastanza poco, e, a parità di altre condizioni, tanto meno quanto più piccolo è  $f$ .

**36.** Ciò premesso, cerchiamo di determinare, come si è preannunziato, la massima differenza fra i valori  $T_A$ ,  $T_B$  della tensione, sotto cui l'equilibrio è ancora possibile.

A tale scopo conveniamo anzitutto di contar l'arco  $s$  positivamente da  $A$  verso  $B$ ; e in secondo luogo osserviamo che, se si ha una somma di un numero finito di addendi  $\sum_1^n a_i$ , fra loro indipendenti e tali che ciascun  $a_i$  possa assumere il segno  $+$  o  $-$ , ma non mai superare in valore assoluto un certo massimo  $m_i$ , la somma considerata risulta, in valore assoluto, massima sempre e solo quando gli addendi siano o tutti positivi o tutti negativi e raggiungano ciascuno il rispettivo massimo valore assoluto. Questa osservazione si applica al nostro caso con un ovvio passaggio al limite, notando che la differenza  $T_B - T_A$  è in ogni caso la

somma dei  $dT$  elementari da  $A$  a  $B$ . Pertanto in condizioni di massimo divario avremo per la (34)

$$dT = \pm f \frac{T}{r} ds,$$

valendo sempre o il segno  $+$  o il segno  $-$  lungo tutto l'arco di funicolare. Possiamo supporre che valga il segno superiore (cioè che la tensione vada crescendo da  $A$  a  $B$ ), giacchè in caso contrario basta invertire il verso positivo sulla funicolare. In tale ipotesi, dividendo per  $T$  e integrando da  $A$  a  $B$ , avremo

$$(35) \quad \log \frac{T_A}{T_B} = \int_{AB} f \frac{ds}{r},$$

mentre, nel caso in cui valga il segno  $-$ , sussisterà l'analoga formula che si ottiene dalla precedente, scambiando al primo membro  $T_A$  con  $T_B$ .

È questa la relazione che deve intercedere fra  $T_A$  e  $T_B$  in condizioni di massimo divario (compatibile coll'equilibrio). Se si riguarda assegnata la tensione ad uno degli estremi, p. es.  $T_A$ , ne rimane univocamente determinata  $T_B$ , e di conseguenza anche il valore numerico del massimo divario suddetto.

Particolarmente interessante è il caso delle corde avvolte, secondo archi di circolo, su cilindri circolari (carrucole, colonne, tamburi). Il raggio di curvatura  $r$  coincide allora col raggio del cilindro e, se si designa con  $\theta$  l'angolo al centro compreso fra  $A$  e  $B$  (contato positivamente da  $A$  verso  $B$ ),  $ds$  non è altro che  $r d\theta$ . Per conseguenza, supponendo  $f$  costante, la (35) dà

$$(36) \quad \log \frac{T_A}{T_B} = f\theta,$$

ovvero

$$(36') \quad \frac{T_A}{T_B} = e^{f\theta}.$$

Si vede di qui che il massimo rapporto ammissibile senza pregiudizio dell'equilibrio dipende dall'ampiezza angolare  $\theta$  dell'avvolgimento, ma non dal raggio del cilindro.

Siccome l'esponente  $e^{f\theta}$  cresce molto rapidamente al crescere di  $\theta$ , basta far fare alla corda un numero di giri relativamente piccolo perchè l'equilibrio possa sussistere con valori enormemente diversi dalle tensioni.

Per es., sia  $f = 1/3$ , e si richieda di avvolgere una corda sopra un cilindro orizzontale (per es. un tronco di albero) in modo da

poter equilibrare con 1 kg, applicato ad una estremità, il peso di una tonnellata assicurata all'altra estremità. Bisognerà a norma della (36) che  $f\theta$  sia almeno eguale a  $\log 1000$ ; ossia, in quanto il rapporto fra il logaritmo volgare (che designeremo con  $\text{Log}$ ) e il logaritmo naturale di uno stesso numero è  $0,434\dots$ , basterà prendere

$$\theta \geq 3 \frac{\text{Log } 1000}{0,434} = 20,7 .$$

Siccome ogni avvolgimento importa  $2\pi$ , così il numero degli avvolgimenti necessari sarà  $\geq 20,7/2\pi$ ; con quattro giri lo scopo è esuberantemente raggiunto.

## CAPITOLO XIV.

### PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI E STATICA GENERALE.

#### § 1. - Principio dei lavori virtuali.

1. Per stabilire le condizioni di equilibrio di un sistema  $S$  di punti materiali, quando si conoscano i vincoli e le forze attive cui esso è soggetto, basta, in via teorica, immaginar sostituita ad ogni vincolo la corrispondente reazione e considerare il sistema come formato da punti liberi, sottoposti ciascuno all'azione simultanea delle forze attive e reattive ad esso applicate; le condizioni di equilibrio si ottengono ponendo eguale a zero, per ciascun punto di  $S$ , la risultante di codeste due specie di forze. Ma le equazioni caratteristiche degli stati di equilibrio, alle quali così si perviene, implicano le reazioni vincolari, che generalmente sono incognite, in quanto fra i dati del problema compaiono per lo più le modalità di realizzazione dei vincoli, non le reazioni corrispondenti. Di qui consegue che, se vogliamo esprimere le condizioni dell'equilibrio per mezzo dei dati diretti del problema, dobbiamo eliminare fra le equazioni dianzi indicate le reazioni (cfr. p. es. Cap. XII, § 3); e nei casi concreti, come si intuisce a priori, codesto procedimento di eliminazione si presenta generalmente laboriosissimo, se non addirittura praticamente impossibile.

Veramente si può pensare di semplificarlo, almeno in taluni casi, con l'artificio seguente, suggerito da quanto si è fatto per i sistemi articolati (Cap. prec.). Poichè già ci siamo procurati direttamente le condizioni di equilibrio per vari tipi particolari di sistemi materiali (corpi rigidi, sistemi articolati, fili, ...), si può immaginar decomposto, in quanto sia possibile, il dato sistema  $S$  in sistemi parziali, appartenenti ciascuno ad uno di codesti tipi e, introducendo soltanto le reazioni corrispondenti al mutuo collegamento di codeste varie *parti elementari*, esprimere che ognuna di esse è individualmente in equilibrio sotto l'azione delle forze attive e delle reazioni di collegamento, che agiscono su di essa. Ma restano pur sempre da eliminare codeste reazioni; e giova

notare che, a parità di condizioni, è tanto più grande il numero di reazioni da eliminare (e quindi tanto più laborioso il processo di eliminazione) quanto maggiore è il numero dei vincoli, cioè (usando una locuzione che è ben precisa nel caso dei sistemi olonomi) quanto minore è la libertà del sistema.

Tutto ciò mette in luce come sia desiderabile di stabilire qualche procedimento che permetta in ogni caso di eliminare, per così dire automaticamente, le reazioni, comunque siano svariati e complessi i dispositivi pratici che realizzano i vincoli. Un tale procedimento è fornito, nel caso di vincoli privi di attrito, dal cosiddetto *principio dei lavori virtuali*, che enunceremo e chiariremo nella sua forma più generale al n. seg., riserbandoci di darne subito dopo una giustificazione induttiva.

2. Il *principio dei lavori virtuali*, nella sua forma più generale, applicabile tanto ai problemi statici quanto a quelli dinamici, si può enunciare nei termini seguenti: *Le reazioni provenienti da legami privi di attrito sono tali che il lavoro complessivo da esse effettuato è nullo per ogni spostamento virtuale reversibile, positivo o nullo per ogni spostamento virtuale irreversibile* (cfr. Cap. VI, §§ 2, 3).

Giova avvertire esplicitamente che, nella valutazione di codesto lavoro complessivo delle reazioni, il lavoro di ciascuna di esse va calcolato per lo spostamento virtuale del *punto materiale* cui essa risulta applicata nel sistema considerato. Così, se si tratta di un sistema di punti materiali  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) ed è  $R_i$  la reazione applicata a  $P_i$ , il lavoro complessivo  $\delta A$  delle reazioni per uno spostamento virtuale  $\delta P_i$  del sistema è dato da

$$\delta A = \sum_i R_i \times \delta P_i.$$

Ciò posto, osserviamo che al principio dianzi enunciato si può dare una forma più concisa, e del resto equivalente dicendo, che *il lavoro virtuale complessivo  $\delta A$  delle reazioni non può essere negativo*.

Infatti, per gli spostamenti irreversibili, è questo precisamente che viene asserito nel principio enunciato; per i reversibili consideriamone insieme uno generico ed il suo opposto; la disuguaglianza caratteristica implica allora simultaneamente

$$\delta A > 0 \quad \text{e} \quad \delta A < 0,$$

e queste due condizioni sono compatibili solo a patto che sia  $\delta A = 0$ .

Lasciando da parte i sistemi a legami unilaterali (il che si fa abbastanza spesso anche senza esplicita menzione), non si hanno

a considerare che spostamenti reversibili, e il principio dei lavori virtuali richiede che si annulli il lavoro delle reazioni per ogni spostamento conciliabile coi legami, e perciò si traduce nell'equazione

$$\delta A = 0.$$

Notiamo infine che il comportamento delle reazioni, quale è caratterizzato dal principio dei lavori virtuali, è indipendente dal modo di realizzazione dei vincoli. Tali risulteranno altresì le condizioni generali di equilibrio che per un sistema materiale qualsiasi trarremo al prossimo § da codesto principio. Sarà così giustificata quella veduta di indipendenza delle condizioni di equilibrio dalle modalità di attuazione dei vincoli, che, già studiando la Statica elementare del punto (IX, n. 11), accettammo anticipatamente, almeno come norma direttiva e sotto opportune riserve, anche nei casi in cui debbasi tener conto degli attriti e delle resistenze passive (in quanto queste ultime siano schematizzabili come attriti dei dispositivi vincolari).

3. Dal punto di vista fisico, il principio dei lavori virtuali si legittima facendo vedere che esso si trova verificato (appare cioè conforme all'esperienza) in tanti casi particolari che, per naturale e quasi necessaria induzione, si è tratti a ritenerlo valido in generale.

a) Nel caso di un punto costretto a restare sopra una superficie o sopra una curva (priva d'attrito) si ha una reazione normale rispettivamente alla superficie ovvero alla curva, mentre ogni spostamento virtuale è (a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo) situato sul piano, o rispettivamente sulla retta tangente.

Il lavoro (loro prodotto scalare) è dunque nullo.

b) Poniamoci nel caso di un vincolo unilaterale. Per es., supponiamo che il punto non possa oltrepassare una certa superficie, pur non essendo impedito di staccarsene dalla banda opposta. Una configurazione ordinaria non dà luogo a reazione, e perciò il lavoro  $R \times \delta P$  è nullo.

Nel caso delle configurazioni di confine, la reazione è per sua natura diretta verso l'interno (cioè dalla banda consentita dai vincoli), e normale alla superficie. E questi caratteri suggeriti dall'osservazione sperimentale equivalgono al principio dei lavori virtuali.

Infatti per ogni spostamento irreversibile, il quale cioè sia diretto verso l'interno, la reazione e lo spostamento formano un angolo acuto e il lavoro è positivo; per ogni spostamento reversibile, codesto angolo è retto e il lavoro è nullo.

c) Nel caso dei *sistemi rigidi*, basta aver riguardo alla circostanza che le reazioni vincolari (quelle di rigidità, beninteso; non quelle provenienti da legami eventuali con altri corpi estranei al sistema) sono forze interne e quindi a due a due eguali e direttamente opposte.

Il lavoro complessivo si può perciò considerare come somma dei lavori effettuati da ciascuna di queste coppie, e risulterà dimostrato l'asserto se si proverà nullo il lavoro corrispondente ad una coppia generica.

A tale scopo siano  $P, P'$  due punti quali si vogliono del sistema,  $\delta P$  e  $\delta P'$  gli spostamenti rispettivamente subiti dai due punti in un generico spostamento virtuale del sistema,  $R$  la forza esercitata da  $P'$  su  $P$  ed  $R' = -R$  quella che  $P$  esercita su  $P'$ . Ora in ogni moto rigido (III, n. 2) le velocità di due punti generici hanno eguali componenti secondo la retta che li congiunge. La stessa proprietà compete quindi agli spostamenti infinitesimi subiti dai punti (in un effettivo movimento del sistema) durante un intervallo elementare di tempo  $dt$ .

Siccome, quando si tratta di sistemi a legami indipendenti dal tempo, ogni spostamento virtuale è anche possibile (VI, n. 9), così noi possiamo ritenere che  $\delta P$  e  $\delta P'$  hanno eguali componenti secondo la  $PP'$ .

Designheremo con  $\Delta$  il valore comune di queste componenti, immaginando, per fissare le idee, di prendere come direzione positiva su  $PP'$  quella della forza  $R$ .

Ciò posto il lavoro virtuale  $R \times \delta P$  della forza  $R$  si riduce ad  $R\Delta$  (per la definizione di prodotto scalare) e quello  $R' \times \delta P'$  della  $R'$  a  $-R\Delta$ .

Ne consegue

$$R \times \delta P + R' \times \delta P' = 0.$$

d) Se un solido è ulteriormente vincolato, presentando un punto fisso, o una retta fissa o appoggi (privi di attrito) su altri corpi, si riconosce subito che il lavoro virtuale delle reazioni provenienti da questi vincoli è nullo nei primi due casi, positivo o nullo nel terzo.

e) Il principio dei lavori virtuali si può confermare direttamente in moltissimi casi, sia analizzando diverse specie di legami e combinandoli fra loro, sia (anche per i sistemi non olonomi) in base a postulati più semplici e considerazioni proprie del caso singolo.

Si può anzi asserire che, per tutti i sistemi offerti dalla natura, vien fatto di stabilirlo direttamente; la quale indagine molto con-

ferisce alla piena intelligenza della Meccanica e dei molteplici suoi adattamenti a forme disparate d'intuizione sperimentale.

Non possiamo percorrere sì lungo cammino, ma ammetteremo oramai il principio dei lavori virtuali quale postulato universale, considerandolo come sintesi del substrato sperimentale di tutta la Meccanica dei sistemi privi d'attrito. Dal punto di vista astratto esso costituisce quanto si può desiderare di più perfetto, perchè si traduce in una formula generale, applicabile a sistemi comunque complessi <sup>(1)</sup>.

## § 2. - Condizione generale d'equilibrio. Relazione simbolica della Statica.

4. Come già nei casi discussi nei prec. Cap., anche nella Statica generale si è per lo più condotti a considerare sistemi soggetti a vincoli, la cui legge, pur comunque complicata, è *invariabile nel tempo*; e, del resto, ciò risponde alla natura stessa dei problemi statici, nei quali si tratta di caratterizzare le sollecitazioni atte a conservare la quiete. Sia in vista di ciò, sia per uniformarci alla tradizione storica, per cui la Statica si è venuta svolgendo sotto l'accennata restrizione, noi qui esporremo le applicazioni del principio dei lavori virtuali alla Statica generale, riferendoci a sistemi materiali, *i cui vincoli siano indipendenti dal tempo*; ma avvertiamo fin d'ora che le conclusioni, alle quali così perverremo, restano valide in tutti i casi, purchè, beninteso, si tratti di sistemi a vincoli privi di attrito.

---

<sup>(1)</sup> In linea storica va notato che un primo germe del principio dei lavori virtuali si può già riscontrare in ARISTOTILE. Una elaborazione secolare, svoltasi sui più significativi problemi concreti della Statica per opera di sommi ingegni, quali lo STEVIN, GALILEO, CARTESIO, GIOVANNI BERNOULLI, culminò nella sintesi del LAGRANGE, il quale pervenne a dominare tutta la Statica dei sistemi privi di attrito mediante il celebre suo *principio delle velocità virtuali*, che esprime in sostanza, pel solo caso dell'equilibrio, la proprietà delle reazioni enunciata nel testo, e coincide, anche nella forma, colla così detta *relazione simbolica*, di cui ci occuperemo al § 2. L'ammettere, come nel testo, che siffatto comportamento delle reazioni valga in ogni caso (e non soltanto in condizioni statiche) risulta giustificato dagli altri postulati della meccanica, come vedremo al Cap. V della II Parte. Chi desideri approfondire la genesi storica, quanto mai istruttiva, del principio dei lavori virtuali può ricorrere alle interessantissime lezioni di G. COLONNETTI su *I fondamenti della Statica*, Torino U. T. E. T., 1927.



L'ipotesi della indipendenza dei vincoli dal tempo rende più rapida la trattazione, in quanto essa implica, come agevolmente dimostreremo, le due seguenti circostanze di fatto:

a) *Se un sistema materiale qualsiasi, a vincoli indipendenti dal tempo, si trova comunque in moto, lo spostamento effettivo che esso subisce in ogni generico tempuscolo di si può sempre considerare come uno spostamento virtuale del sistema.*

b) *Il lavoro complessivo delle reazioni per ogni spostamento (infinitesimo) effettivo del sistema è nullo.*

L'enunciato a) è già stato riconosciuto valido in Cinematica (cfr. Cap. VI, n. 9); cosicchè resta soltanto da giustificare l'enunciato b). Ora, se lo spostamento effettivo di cui si tratta (considerato, in base ad a), come virtuale) è reversibile, l'asserto b) rientra nel principio dei lavori virtuali.

Se poi lo spostamento effettivo, sempre considerato come virtuale, è irreversibile, l'enunciato b) si giustifica induttivamente, ricorrendo come al n. 3 all'analisi diretta dei casi tipici e ammettendo la continuità delle reazioni, il che, quando si suppongano continue, come avviene nella maggior parte dei casi, le forze direttamente applicate, equivale ad ammettere, in base all'equazione fondamentale  $ma = F + R$ , la continuità delle accelerazioni dei punti del sistema mobile (cfr. Cap. II, n. 5).

Infatti, riferiamoci al caso di un punto materiale  $P$ , vincolato a restare su di una superficie  $\sigma$  (invariabile nel tempo) o da una parte di essa. Uno spostamento effettivo sarà da ritenersi (come virtuale) irreversibile sempre e solo quando stacchi il punto da  $\sigma$  verso la regione consentita dal vincolo. Se  $t_0$  è l'istante in cui  $P$  abbandona  $\sigma$ , negli istanti  $t$  immediatamente consecutivi la reazione, in quanto è venuto meno il vincolo, è manifestamente nulla; e poichè ciò accade per qualsiasi  $t > t_0$ , comunque prossimo a  $t_0$ , si conclude, per l'ammessa continuità di  $R$ , che essa è nulla anche all'inizio  $t_0$  dello spostamento, talchè il lavoro della reazione pel considerato spostamento è veramente eguale a zero.

Ad analoga conclusione si perviene ovviamente nel caso di due punti materiali  $P, P'$  collegati da un filo flessibile e inestendibile, pei quali sarà da considerarsi irreversibile ogni spostamento effettivo che porti la coppia di punti da una configurazione a filo teso ad un'altra, infinitamente vicina, a filo lento. E un processo di analisi e di sintesi induttiva, esercitata sui disparati tipi di sistemi vincolati, che si possono presentare in natura, guida ad accettare, come già il principio dei lavori virtuali, l'enunciato b).

5. Ciò premesso, consideriamo un generico sistema di punti materiali  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) soggetti a vincoli privi di attrito e indipendenti dal tempo, e cerchiamone le condizioni di equilibrio, vale a dire le condizioni necessarie e sufficienti, affinché le forze  $F_i$ , direttamente applicate ai singoli punti  $P_i$ , siano atte a mantenerli in quiete. Quando ai vincoli siasi sostituito, per ogni  $P_i$ , la corrispondente reazione  $R_i$ , i singoli punti saranno assimilabili ad altrettanti punti liberi, soggetti ciascuno alla forza totale  $F_i + R_i$ , talchè ogniqualvolta il sistema sia in equilibrio, dovrà aversi (VII, n. 11)

$$F_i = -R_i \quad (i = 1, 2, \dots, N);$$

e il lavoro complessivo  $\delta L = \sum_1^N F_i \times \delta P_i$ , delle forze attive  $F_i$ , per un qualsiasi spostamento virtuale  $\delta P_i$  del sistema sarà dato da

$$\delta L = - \sum_1^N R_i \times \delta P_i = - \delta \Lambda,$$

ove si denoti con  $\delta \Lambda$ , come al n. 2, l'analogo lavoro complessivo delle reazioni.

Di qui, tenendo conto del principio dei lavori virtuali, si conclude intanto che per l'equilibrio del sistema è necessario che le forze attive rendano soddisfatta, per tutti gli spostamenti virtuali, la relazione

$$(1) \quad \delta L < 0,$$

dove per gli spostamenti reversibili devesi assumere il segno di eguaglianza, mentre per gli irreversibili può valere l'uno o l'altro segno.

6. Diciamo che, inversamente, *la condizione (1) è anche sufficiente per l'equilibrio del sistema*: cioè, se sussiste, per ogni spostamento virtuale, la (1), e il sistema ad un dato istante è in quiete, vi si mantiene finchè la (1) è soddisfatta.

Per dimostrarlo basterà manifestamente far vedere che se il sistema, pur supposto inizialmente in quiete, si mettesse in moto sotto una data sollecitazione, se cioè *non fosse* in ogni generico istante  $t$ ,  $a_i = 0$ , esisterebbe pel sistema almeno uno spostamento virtuale, pel quale, contrariamente alla (1), il lavoro complessivo  $\delta L$  delle forze attive risulterebbe positivo. E, più precisamente, poichè, per l'osservazione *a*) del n. 4, ogni spostamento effettivo del sistema si può riguardare come virtuale, basterà provare che il lavoro complessivo delle forze attive sarebbe positivo per lo

spostamento effettivo che il sistema, nel mettersi in moto a partire dalla quiete, subisse nel primo tempuscolo.

A tale scopo, ricordiamo anzitutto che, ove si introducano le reazioni vincolari  $R_i$ , i punti  $P_i$  del sistema si comportano come altrettanti punti materiali liberi, sollecitati ciascuno dalla corrispondente forza totale  $F_i + R_i$ . Perciò ogni punto  $P_i$ , che a partire dalla quiete si metta effettivamente in moto (e per l'ipotesi ve ne sarà almeno uno) subirà nel primo tempuscolo  $dt$  uno spostamento  $\delta P_i$ , che, per la legge del moto incipiente (VII, n. 12) avrà la direzione e il verso della corrispondente forza totale  $F_i + R_i$ ; talchè il lavoro da questa compiuto  $(F_i + R_i) \times \delta P_i$  risulterà essenzialmente positivo <sup>(1)</sup>. Sommando gli analoghi lavori parziali relativi ai vari punti  $P_i$  che effettivamente si muovono e denotando al solito con  $\delta L$  e  $\delta A$  i lavori complessivi delle forze attive e, rispettivamente, di quelle reattive, avremo

$$\delta L + \delta A > 0.$$

Di qui, poichè, in base alla osservazione *b*) del n. 4, si ha già  $\delta A = 0$ , si concluderebbe, secondo il primitivo nostro asserto

$$\delta L > 0;$$

e resta dimostrato che un sistema materiale, che sia inizialmente in quiete e venga assoggettato ad una sollecitazione attiva soddi-

<sup>(1)</sup> Gioverà aggiungere un qualche chiarimento circa gli spostamenti infinitesimi  $\delta P_i$ , di cui si fa uso nel testo. Sfruttando la circostanza che si tratta di sistemi a vincoli indipendenti dal tempo, abbiamo assunto come spostamento virtuale  $\delta P_i$  lo spostamento elementare effettivo che ha luogo in un primo tempuscolo  $dt$  successivo a un generico istante iniziale  $t$ ; abbiamo cioè posto  $\delta P_i = P_i(t + dt) - P_i(t) = \frac{1}{2} a_i dt^2 +$  infinitesimi d'ordine superiore, il terzo membro risultando dalle considerazioni dei nn. 66 e 67 del Cap. I, ove si applichi lo sviluppo di Taylor al punto  $P_i(t + dt)$  e si tenga conto che  $dP_i/dt = v_i = 0$ . Di qui apparisce che i vari  $\delta P_i$  risultano dell'ordine di  $dt^2$ . Se quindi si riguardasse  $dt$  come infinitesimo principale, ogni  $\delta P_i$  sarebbe trascurabile quale infinitesimo d'ordine superiore al primo, e la dimostrazione diverrebbe illusoria. Ma nulla vieta di assumere proprio  $dt^2$  come infinitesimo principale; oppure, mantenendo  $dt$  per infinitesimo principale, di prendere come spostamenti virtuali  $\delta P_i$ , non proprio gli effettivi  $P_i(t + dt) - P_i(t)$ , ma i loro rapporti a  $dt$ . In entrambi i casi i  $\delta P_i$  non nulli riescono tutti infinitesimi dello stesso ordine minimo (ragionandosi qui nell'ipotesi, che si vuole escludere, che non tutti gli  $a_i$  siano zero).

sfacente, per ogni spostamento virtuale del sistema, alla condizione (1), non può mettersi in moto.

7. Raccogliendo in un unico enunciato le due proposizioni, l'una inversa dell'altra, stabilite nei due ultimi nn., perveniamo al seguente teorema fondamentale: *Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema materiale a vincoli privi di attrito (e indipendenti dal tempo) si è che le forze attive compiano un lavoro totale nullo per ogni spostamento virtuale reversibile, negativo o nullo per ogni spostamento virtuale irreversibile.*

### 8. La condizione

$$(1) \quad \delta L < 0$$

è stata da noi dimostrata caratteristica per l'equilibrio, limitatamente al caso dei sistemi a vincoli, oltrechè privi di attrito, indipendenti dal tempo. Ma, come già accennammo dappprincipio, ripetiamo qui, pur senza entrare nella minuta analisi a ciò necessaria, che essa si può dimostrar valida anche per sistemi a vincoli, pur sempre privi di attrito, *ma comunque variabili nel tempo.*

La (1), presa in questo suo significato generale, si suol designare sotto il nome di *relazione simbolica della statica.*

Se il sistema non ammette spostamenti virtuali irreversibili, il che accade se non vi sono vincoli unilaterali, essa si riduce alla

$$(1') \quad \delta L = 0$$

e si chiama *l'equazione simbolica della Statica.*

### 9. Dalla (1) possiamo dedurre due corollari:

1°) Se ad un sistema  $\Sigma$  di forze attive, atte a mantenere in equilibrio un dato sistema materiale  $S$ , si aggiunge una seconda sollecitazione  $\Sigma'$ , pure atta a mantenere  $S$  in equilibrio, la sollecitazione risultante  $\Sigma + \Sigma'$  (costituita cioè dalle forze di  $\Sigma$  e da quelle di  $\Sigma'$ ) verifica anch'essa le condizioni di equilibrio.

2°) Se un sistema materiale  $S_1$  differisce da un sistema  $S$  per l'aggiunta di alcuni legami, e se una certa sollecitazione  $\Sigma$  mantiene  $S$  in equilibrio, a più forte ragione manterrà in equilibrio  $S_1$ . Infatti gli spostamenti virtuali di  $S_1$  sono tutti compresi fra quelli di  $S$ ; dunque se la (1) è soddisfatta per tutti gli spostamenti virtuali di  $S$ , lo sarà a più forte ragione per tutti quelli di  $S_1$  (non viceversa).

Quando poi tutti i vincoli sono bilaterali (o più generalmente, quando non si tratta di una configurazione di confine) si rileva

dalla equazione (1'): Se un sistema di forze attive applicate ad un sistema materiale è in equilibrio, lo è pure il sistema costituito dalle stesse forze prese in verso opposto.

### § 3. - Osservazioni sui postulati particolari già ammessi nella Statica dei solidi e dei fili.

10. Già ci occupammo diffusamente della Statica dei solidi (Cap. XII).

La nostra trattazione poggiava, oltreché sui principi fondamentali della meccanica, sopra un unico postulato specifico (XII, n. 1): *L'equilibrio di un solido non si altera, quando a due generici suoi punti si applicano due forze direttamente opposte.*

Vogliamo far vedere come questo postulato, anteriormente introdotto di per sé solo, per manifesta ragione di opportunità (cioè per discutere con mezzi elementari e diretti tutta la Statica dei corpi solidi), si presenta concettualmente quale conseguenza particolarissima del principio dei lavori virtuali.

La verifica è immediata. Basta da un lato osservare che i solidi naturali, cui si riferisce il postulato caratteristico anzidetto, devono considerarsi (sensibilmente) indeformabili, cioè, idealizzando, dal punto di vista dei legami cinematici, come sistemi rigidi. D'altro lato poi si ricordi (n. 3) che coppie di forze, eguali e direttamente opposte, fanno lavoro nullo per ogni spostamento (infinitesimo), che non alteri la distanza dei rispettivi punti di applicazione; il che è quanto dire per ogni spostamento virtuale del solido.

Ciò posto, è chiaro che, se un solido (comunque vincolato) si trova in equilibrio, ed è quindi  $\leq 0$  il lavoro virtuale  $\delta L$  delle varie forze attive, lo stesso avviene dopo aggiunte due forze eguali e direttamente opposte, in quanto esse recano al  $\delta L$  un contributo nullo.

11. Poiché il postulato caratteristico della Statica dei solidi rientra nel principio dei lavori virtuali, devono necessariamente rientrarvi anche le sue conseguenze, in particolare le definitive condizioni di equilibrio, per i vari casi considerati nel Cap. XII.

Accenniamo qui rapidamente come esse si possano ritrovare, in base alla relazione simbolica della Statica.

Consideriamo dapprima un solido libero, cioè un sistema di punti sottoposti esclusivamente a vincoli di rigidità nonchè, beninteso, a date forze attive; e ricordiamo anzitutto, che, scelto come centro di riduzione, un qualsiasi punto  $O$  solidale col corpo, il più

generale spostamento virtuale di un qualsiasi punto  $P_i$  del sistema è dato (VI, n. 11) da

$$\delta P_i = \delta O + \chi \wedge (P_i - O),$$

dove  $\delta O$  e  $\chi$  denotano due vettori infinitesimi arbitrari (spostamento virtuale del polo  $O$  e rotazione virtuale intorno ad  $O$ ).

Perciò, se  $F_i$  è la forza totale direttamente applicata a  $P_i$ , il lavoro virtuale delle forze attive è fornito da,

$$\delta L = \sum_i F_i \times [\delta O + \chi \wedge (P_i - O)],$$

ed, ove si scioglano le parentesi e si tenga conto delle identità vettoriali (I, n. 25),

$$F_i \times [\chi \wedge (P_i - O)] = \chi \times [(P_i - O) \wedge F_i],$$

si può scrivere

$$\delta L = \delta O \times \sum_i F_i + \chi \times \sum_i (P_i - O) \wedge F_i.$$

Compaiono qui il risultante delle forze attive e il loro momento risultante rispetto ad  $O$  (XI, n. 4). Denotandoli rispettivamente con  $R$  ed  $M$ , si ha

$$\delta L = \delta O \times R + \chi \times M;$$

e poichè qui, trattandosi di vincoli (di rigidità) che non consentono spostamenti virtuali irreversibili, va applicata la equazione simbolica della Statica, si conlude che per l'equilibrio occorre e basta che sussista l'equazione

$$\delta O \times R + \chi \times M = 0$$

per qualsiasi scelta di  $\delta O$  e  $\chi$ ; il che equivale alle due condizioni

$$R = 0, \quad M = 0,$$

le quali concordano precisamente con quelle, che già trovammo caratteristiche per l'equilibrio di un solido libero al n. 3 del Cap. XII, giacchè, nel caso qui considerato, le forze attive sono tutte esterne e viceversa.

Nel caso di un solido fissato in un suo punto, basta scegliere in questo punto il polo, fessò il più generale spostamento virtuale del punto  $P_i$  sia dato (VI, n. 12) da

$$\delta P_i = \chi \wedge (P_i - O)$$

e conseguentemente si abbia

$$\delta L = \chi \wedge M.$$

Poichè il vettore infinitesimo  $\chi$  è completamente arbitrario l'annullamento di questo  $\delta L$  equivale appunto alla condizione  $M = 0$ , già riconosciuta, per via diretta, necessaria e sufficiente per l'equilibrio al n. 5 del Cap. XII.

Analogamente si ritrova la condizione di equilibrio per un solido con asse fisso (cfr. Cap. XII, n. 6), mentre nel caso di un solido pesante appoggiato ad altri corpi (cfr. Cap. XII, § 4), data la presenza di vincoli unilaterali, si perviene alle condizioni di equilibrio, applicando, in luogo della equazione, la relazione simbolica della Statica.

12. Vogliamo infine accennare, pur senza giustificazione e a semplice titolo di notizia, che anche la Statica dei fili flessibili ed inestendibili, da noi stabilita (Cap. XIII) come caso limite di quella dei sistemi articolati in base ad un ovvio postulato specifico (§ 3 del cit. Cap.), si può dedurre direttamente dal principio dei lavori virtuali, tostochè ci si procuri un'adeguata rappresentazione analitica di tutti gli spostamenti di un filo, che sono compatibili coll'inestendibilità dei suoi elementi. Ciò induce, come ha mostrato il LAGRANGE <sup>(1)</sup>, a introdurre (provvisoriamente, quale

---

(<sup>1</sup>) GIUSEPPE LUIGI LAGRANGE, n. a Torino nel 1736, m. a Parigi nel 1813, si designa per antonomasia come l'Autore della Meccanica analitica. Egli diede infatti assetto sistematico a tale scienza, mostrando come tutte le teorie particolari già note e altre da lui stesso create possano farsi discendere dal principio generale detto della velocità, o meglio, dei lavori virtuali. La *Mécanique analytique* fu stampata per la prima volta a Parigi nel 1788.

Oltre al calcolo delle variazioni, che fu tra le prime scoperte del LAGRANGE, vanno segnalate ricerche, divenute classiche quasi nella stessa forma originaria, sui più svariati soggetti di teoria dei numeri e delle equazioni algebriche, di equazioni differenziali e alle derivate parziali, di meccanica celeste (in particolare sul problema dei tre corpi e sulla teoria delle perturbazioni), e di idrodinamica. Il LAGRANGE è unanimemente considerato il più grande matematico dei tempi moderni dopo NEWTON.

A 19 anni fu nominato professore di matematica alla Scuola d'Artiglieria di Torino; e fu poco dopo tra i soci fondatori di quella Accademia delle Scienze. Nel 1766 si trasferì a Berlino, dove succedette ad EULERO nella direzione della Sezione matematica di quella Accademia delle Scienze. Di là passò nel 1787 a Parigi. Anche durante la rivoluzione e nel successivo periodo napoleonico fu onorato e consultato dal governo francese; divenne senatore, ecc. Ebbe insegnamenti alla Scuola Normale e alla Scuola Politecnica, da cui scrisero opere didattiche sulla teoria delle funzioni e sulle matematiche elementari.

La collezione delle sue opere complete consta di 14 volumi.

elemento ausiliario di calcolo) una funzione  $T$  dei punti del filo, che si interpreta poi come tensione, e porta alla fine alle stesse relazioni vettoriali già trovate e discusse nel ricordato Cap. [l'equazione indefinita (12) e le condizioni ai limiti (13)].

#### § 4. - Statica dei sistemi pesanti. Principio del Torricelli <sup>(1)</sup>.

13. Consideriamo un sistema materiale  $S$ , comunque costituito, per cui le forze attive si riducano ai pesi dei singoli elementi.

Ove si supponga l'asse delle  $z$  verticale e diretto verso il basso, e sia  $m_i$  la massa di un generico elemento  $P_i$ , la forza  $F_i$  applicata in  $P_i$  avrà per componenti

$$0, 0, m_i g.$$

In un generico spostamento virtuale del sistema siano  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$ ,  $\delta z_i$  le componenti dello spostamento  $\delta P_i$  subito da  $P_i$ .

Il lavoro virtuale delle forze attive si riduce manifestamente a

$$\delta L = \sum_i F_i \times \delta P_i = g \sum_i m_i \delta z_i,$$

la somma essendo estesa a tutti i punti  $P_i$  che costituiscono il sistema.

Ciò posto, facciamo intervenire il baricentro  $G$  del sistema, la cui coordinata verticale  $z_0$  è (X, n. 8)

$$z_0 = \frac{\sum_i m_i z_i}{m},$$

essendo  $m$  la massa totale del sistema.

<sup>(1)</sup> EVANGELISTA TORRICELLI, n. a Faenza nel 1608, m. a Firenze nel 1647. Dopo aver fatto in Romagna studi umanistici e scientifici, si recò a Roma per perfezionarsi sotto la guida del P. CASTELLI, dotto di grande rinomanza, discepolo e amico di GALILEO. Dal CASTELLI fu nel 1641 inviato in Arcetri presso il Maestro, già vecchio, cieco e sofferente, onde aiutarlo a redigere per la stampa le opere non ancora pubblicate. Dopo soli tre mesi il GALILEI venne a morte, e il TORRICELLI gli successe come matematico del Gran Duca di Toscana. Fu grande geometra, ma l'ammirazione dei posteri gli è tributata sopra tutto per le sue scoperte di Meccanica tra cui: il principio menzionato nel testo; il riconoscimento della pressione atmosferica e l'invenzione del barometro; la formula dell'effluo di un liquido pesante da un orifizio (cfr. Parte II; Cap. XII, n. 14). Quest'ultima è contenuta in una celebre memoria « De motu gravium naturaliter descendentium », anteriore ai suoi contatti personali con GALILEO.



Quando le  $z_i$  si incrementano di  $\delta z_i$ , la  $z_0$  subisce un incremento (spostamento verticale del baricentro) definito da

$$\delta z_0 = \frac{\sum_i m_i \delta z_i}{m}.$$

L'espressione del lavoro virtuale può così essere scritta

$$\delta L = mg \delta z_0,$$

e la condizione d'equilibrio  $\delta L < 0$  assume di conseguenza l'aspetto

$$\delta z_0 < 0,$$

valendo l'uguaglianza per gli spostamenti reversibili.

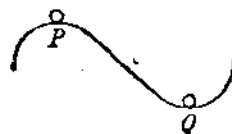
Si richiede dunque per l'equilibrio che i legami consentano al baricentro solo spostamenti per cui risulti  $\delta z_0 < 0$ , o, ciò che è lo stesso, per cui non risulti mai  $\delta z_0 > 0$ . Questo è quanto dire (*principio del TORRICELLI*): *Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema pesante è che il suo baricentro non sia suscettibile di abbassamento (non si presentino cioè incrementi positivi della coordinata  $z_0$ ) per effetto di alcuno spostamento virtuale del sistema.*

14. Giova fissare l'attenzione sulla circostanza che l'enunciato concerne soltanto gli spostamenti virtuali *infinitesimi*. Non è perciò lecito inferirne che nella posizione d'equilibrio l'altezza del baricentro debba proprio essere minima (cioè massima la coordinata  $z_0$ ) compatibilmente coi vincoli. Rendiamocene conto in modo preciso, considerando, per fissar le idee, il caso di legami tutti reversibili. La nostra condizione è allora  $\delta z_0 = 0$ .

D'altra parte, come è ben noto dal Calcolo, perchè una funzione abbia un massimo od un minimo, si richiede non soltanto che si annulli il suo differenziale primo (per il sistema di valori, cui il massimo o minimo si riferisce), ma che inoltre sia soddisfatta una condizione supplementare concernente il differenziale secondo. Nel caso dell'equilibrio di un sistema pesante, si trova bensì soddisfatta per la funzione  $z_0$  la condizione di annullamento del differenziale primo ( $\delta z_0 = 0$ ), ma nulla si sa del differenziale secondo.

Può dunque sussistere l'equilibrio anche senza che l'altezza del baricentro sia effettivamente minima, in particolare quando essa è massima.

Ciò si rende, per es., manifesto nell'appoggio di un punto pesante sopra una superficie priva di attrito: delle due posizioni di equi-



librio  $P, Q$ , segnate in figura, la prima corrisponde evidentemente ad un massimo, la seconda ad un minimo dell'altezza del baricentro.

15. Notiamo che la condizione più restrittiva che la  $z_0$  abbia un effettivo minimo, che cioè il baricentro si trovi nella posizione più bassa consentitagli dai legami, assicura insieme il sussistere dell'equilibrio e la stabilità del medesimo. In tal caso si può infatti asserire che, per ogni spostamento abbastanza piccolo del sistema, compatibile coi vincoli, il baricentro si innalza. Ne consegue che, nel tornare alla posizione di equilibrio, le forze attive (che qui si riducono al peso dei singoli elementi) fanno complessivamente lavoro positivo.

È dunque verificata la *condizione di stabilità* nel senso statico definito al § 5 del Cap. XII.

### § 5. — Statica dei sistemi a legami completi. Macchine semplici.

16. Sappiamo che dicesi *a legami completi* ogni sistema olonomo con un solo grado di libertà (cioè avente una sola coordinata lagrangiana) e a vincoli indipendenti dal tempo (VI, n. 3). Tale è, p. es., un punto vincolato a restare su di una data curva, un solido girevole attorno ad un asse, una vite nella rispettiva madre-vite, ecc.

Gli spostamenti  $\delta P_i$  dei singoli punti del sistema, e in particolare le loro proiezioni  $\delta l_i$  sulle linee d'azione delle forze  $F_i$ , sono individuati (a partire da una configurazione generica) dall'incremento  $\delta q$  dell'unico parametro lagrangiano. D'altra parte la condizione d'equilibrio (non essendovi spostamenti irreversibili) sarà l'equazione simbolica (1'), che nel caso attuale può essere scritta

$$(2) \quad \delta L = \sum_i F_i \delta l_i = 0.$$

Essa equivale manifestamente ad un'unica condizione effettiva che si ottiene eguagliando a zero il coefficiente dell'arbitraria  $\delta q$ .

17. **MACCHINE SEMPLICI.** — Fra i sistemi a legami completi meritano speciale menzione le così dette *macchine semplici* (leve, piano inclinato, cuneo, vite, ecc.) e le *balance*. Le loro condizioni di equilibrio si possono discutere per via diretta, analizzando, se occorre, il comportamento delle varie parti (per lo più corpi rigidi) ed introducendo come ausiliarie le mutue reazioni di queste parti. Si può tuttavia (semprechè si prescinda dagli attriti) raggiungere

più rapidamente l'intento, ricorrendo al principio dei lavori virtuali. Esso fornisce la condizione di equilibrio nella sua forma definitiva, evitando quell'introduzione e successiva eliminazione di ausiliarie, che è richiesta dal procedimento elementare e che può divenir laboriosa, quando il sistema consta di molti pezzi.

Di solito, sia nelle macchine semplici che nelle bilance, le forze attive si riducono a due,  $F_1$  ed  $F_2$ , chiamate rispettivamente *potenza* e *resistenza*. Conformemente alla regola espressa dall'equazione (2), basta immaginare impresso al sistema l'unico spostamento infinitesimo, che gli è consentito dai legami. La condizione d'equilibrio è

$$(3) \quad F_1 \delta l_1 + F_2 \delta l_2 = 0,$$

che assume senz'altro forma finita ove si pensi che, al limite, il rapporto  $\delta l_2 / \delta l_1$  dipende soltanto (dalla natura del sistema e) dalla considerata configurazione d'equilibrio.

Se si osserva che  $\delta l_1$  e  $\delta l_2$ , presi in valore assoluto, misurano i cammini dei punti di applicazione delle due forze  $F_1$  ed  $F_2$  nel senso delle rispettive linee d'azione, si ricava dalla (3) (o meglio dalla proporzione

$$F_1 : F_2 = | \delta l_2 | : | \delta l_1 |,$$

che ne è necessaria conseguenza) la così detta *regola d'oro*: « Quel che si guadagna in forza si perde in cammino ».

**18. TOECHIO A VITE.** — La vite, in quanto si supponga inserita nella rispettiva madrevite, costituisce effettivamente un sistema a legami completi. Consideriamone un generico spostamento infinitesimo, che è senz'altro uno spostamento virtuale, poichè si tratta di vincoli indipendenti dal tempo. Lo spostamento, che viene a subire un qualsiasi punto  $P$  della vite, potrà evidentemente riguardarsi risultante di due altri: una traslazione elementare nel senso dell'asse (della vite), e una rotazione, pure elementare, attorno all'asse.

Detta  $\delta s_0$  l'ampiezza della prima,  $\delta \omega$  quella della seconda e  $p$  il passo della vite, è facile riconoscere che

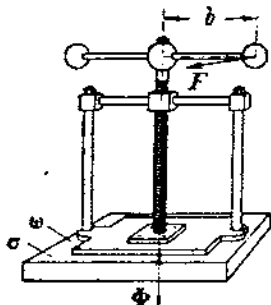
$$\delta \omega : \delta s_0 = 2\pi : p.$$

Infatti, quando la vite fa un giro completo, essa procede di  $p$  nel senso dell'asse; d'altra parte il legame implica appunto che il corpo ruoti e proceda nel senso dell'asse con rapporto costante (sia che si tratti di uno spostamento infinitesimo, sia che si tratti di un giro completo).

Ne consegue la proporzione già scritta, ossia

$$(4) \quad \delta\omega = \frac{2\pi}{p} \delta s_0.$$

19. Ciò premesso, supponiamo che, come avviene schematicamente nel torchio, una vite si trovi in equilibrio, premendo mediante una piastra terminale  $\omega$  un pezzo di superficie piana  $\sigma$ , normale all'asse, ed essendo sollecitata a trasmettere questa pressione da una forza  $F$ , applicata all'estremità di un braccio normale all'asse e rigidamente connesso colla vite. Supponiamo ancora



per prendere in considerazione il caso più comune, che la forza  $F$  agisca normalmente al piano determinato dal braccio e dall'asse, e che sia trascurabile (di fronte ad  $F$ ) il peso proprio del sistema. Avremo così quali forze attive: 1°) la potenza  $F$ ; 2°) la resistenza, costituita dall'insieme delle pressioni, che la piastra terminale  $\omega$  della vite subisce, per reazione, da parte della superficie premuta  $\sigma$ . La risultante di queste

varie pressioni reattive sarà naturalmente eguale ed opposta alla pressione complessiva esercitata su  $\sigma$ : ne designeremo il valore assoluto con  $\Phi$ .

Immaginiamo impresso al sistema uno spostamento virtuale in uno dei due sensi; in quello, per esempio, secondo cui la forza  $F$  tende a far rotare la vite. Lo spostamento d'ogni punto si può scindere in due: traslatorio e rotatorio. Valutiamo i corrispondenti contributi al lavoro virtuale delle varie forze. Per effetto della traslazione, la  $F$  che è per ipotesi perpendicolare all'asse, fa lavoro nullo; le pressioni sulla piastra terminale (che tenderebbero a far rotare la vite in senso opposto) fanno tutte lavoro negativo, complessivamente espresso da  $-\Phi\delta s_0$ .

Per effetto dello spostamento rotatorio (attorno all'asse della vite) le pressioni fanno manifestamente lavoro nullo; quanto ad  $F$ , siccome lo spostamento rotatorio del suo punto di applicazione segue proprio nella direzione della forza, il lavoro sarà positivo e misurato dal prodotto di  $F$  per l'ampiezza dello spostamento rotatorio suddetto. Avremo così  $Fb\delta\omega$ , chiamando  $b$  la lunghezza del braccio. Sostituendo a  $\delta\omega$  il suo valore (4), il lavoro virtuale complessivo assume l'aspetto

$$Fb \frac{2\pi}{p} \delta s_0 - \Phi \delta s_0;$$

cosicchè la condizione d'equilibrio è data da

$$(5) \quad \Phi = \frac{2\pi}{p} Fb .$$

Come si vede, essa non dipende dalla grossezza della vite (raggio del cilindro su cui è riportato il filetto elicoidale), ma soltanto dal passo  $p$ . Per esercitare grandi pressioni con sforzi moderati converrà manifestamente diminuire quando è possibile  $p$  ed aumentare il braccio di leva.

20. Se oltre ad  $F$  agisce sulla testa della vite un'altra forza analoga  $F'$  (normale anch'essa e cospirante con  $F$ , quanto al senso, in cui tende a far rotare la vite), ed è  $b'$  il corrispondente braccio, si trova immediatamente in luogo della (5) l'equazione

$$\Phi = \frac{2\pi}{p} [Fb + F'b'] .$$

La quantità in parentesi può interpretarsi come il momento risultante delle due forze  $F$  ed  $F'$  rispetto all'asse; od anche, essendo nullo il momento delle pressioni, come il momento risultante di tutte le forze attive. D'altra parte il primo membro può riguardarsi come risultante, nel senso dell'asse, di tutte le forze attive (poichè  $F$  ed  $F'$  non recano alcun contributo).

Chiamando al solito  $R$  ed  $M$  la risultante ed il momento risultante (rispetto ad un punto dell'asse) di tutte le forze attive, ed  $r$  la direzione dell'asse (in uno dei due versi, scelto a piacere), la trovata condizione d'equilibrio può essere scritta:

$$R_r = \frac{2\pi}{p} M_r .$$

Sarebbe assai facile riconoscere, valendosi dell'espressione del lavoro virtuale indicata al n. 11, che, sotto questa forma, essa rimane valida in generale, cioè qualunque sia, per numero, intensità e direzione, il sistema di forze attive applicate alla vite.

## § 6. - Reazioni.

21. Come si è notato dappprincipio (n. 1) e come si è direttamente riscontrato nel caso dei sistemi a vincoli completi (§ prec.), uno dei principali vantaggi del principio dei lavori virtuali nella Statica consiste nella circostanza che esso permette la eliminazione sistematica delle reazioni, facendo intervenire soltanto le

forze attive. Ma vi sono dei casi in cui l'interesse maggiore della questione è rivolto precisamente alla determinazione delle reazioni o, quanto meno, di una parte di esse; e qui ci proponiamo d'indicare una regola che risponde a queste particolari esigenze.

Supponiamo, per esempio, che si tratti delle reazioni  $\Phi_i$ , che, in date condizioni di sollecitazione, si destano nei vari punti  $P_i$  di un dato sistema materiale  $S$ , per effetto di un ben determinato vincolo bilaterale, espresso da un'equazione  $f = 0$  fra le coordinate dei punti di  $S$ ; e indichiamo con  $S^*$  il sistema che si ottiene dal dato, sopprimendo il vincolo  $f = 0$  e aggiungendo alle forze direttamente applicate ad  $S$  le reazioni  $\Phi_i$  provenienti dal vincolo soppresso. Per questo nuovo sistema sono manifestamente compatibili coi vincoli tutti gli spostamenti virtuali del sistema  $S$ ; ma ve n'ha di ulteriori, in quanto non è più necessario che sia rispettata la condizione  $f = 0$ . Sia  $\delta^*P_i$  il generico spostamento virtuale di questa nuova specie.

Ora è evidente che, se è in equilibrio il sistema  $S$  sotto l'azione di ben determinate forze attive  $F_i$ , lo è del pari il sistema  $S^*$  sotto l'azione delle stesse  $F_i$  e delle  $\Phi_i$ . Considerando, per fissare le idee, il caso, in cui tutti i vincoli di  $S$ , e quindi di  $S^*$ , siano bilaterali, talchè tutti gli spostamenti virtuali di  $S^*$  siano reversibili, dovrà, in condizioni di equilibrio annullarsi il lavoro virtuale delle forze direttamente applicate. Perciò, riferendoci specificamente ad  $S^*$ , avremo che dovrà esser nullo il lavoro virtuale compiuto complessivamente, per ogni spostamento  $\delta^*P_i$ , dalle  $F_i$  e dalle  $\Phi_i$ . Si è così condotti, indicando con  $\delta^*L$  il lavoro eseguito dalle  $F_i$ , all'equazione

$$\delta^*L + \sum_i \Phi_i \times \delta^*P_i = 0,$$

che torna particolarmente utile nei casi concreti per la effettiva determinazione delle reazioni  $\Phi_i$ .

Vale dunque la regola seguente: *Per determinare, in date condizioni di sollecitazione, le reazioni provenienti da un dato vincolo, basta considerare il sistema che si ottiene sopprimendo codesto vincolo e aggiungendo alla sollecitazione attiva le reazioni ad esso corrispondenti, e poi applicare l'equazione simbolica della Statica per un qualsiasi spostamento virtuale del nuovo sistema, che sia incompatibile col vincolo soppresso.*

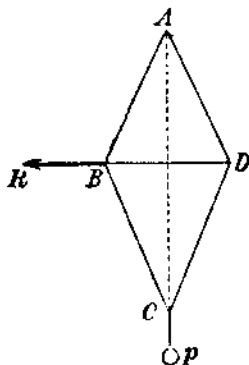
22. Applichiamo la regola precedente ad un esempio semplicissimo.

Si abbiano quattro asticelle rigide eguali, connesse a cerniera a due a due, in guisa da formare un rombo  $ABCD$ ; e questo sia

mantenuto in una data configurazione da una quinta asticella rigida collegante  $B$  con  $D$ , per modo che sia  $\theta$  l'angolo  $B\hat{A}C$ . Il sistema, quando sia appeso ad un uncino in  $A$  e caricato di un peso  $p$  in  $C$ , si disporrà in modo che la  $AC$  risulti verticale.

Ci proponiamo di calcolare la pressione subita dall'asta  $BD$ , quando si riguardi come trascurabile il peso delle cinque aste.

Questa pressione incognita, considerata in  $B$ , è, per il principio di reazione, direttamente opposta alla reazione che ivi proviene dall'asta di collegamento  $BD$ ; e analogamente può dirsi in  $D$ , cosicchè tutto si riduce a calcolare l'intensità comune  $R$  delle due reazioni in  $B$  e  $D$ .



A tale scopo basta, in accordo con la regola del n. prec., considerare il rombo articolato  $ABCD$ , che dal dato sistema si ottiene sopprimendo l'asta  $BD$ , e, dopo avere aggiunto alla sollecitazione del peso  $p$  quella delle due reazioni in  $B$  e  $D$ , applicare l'equazione simbolica della Statica ad uno spostamento virtuale del rombo, che avvicini o allontani i due vertici  $B$  e  $D$ . Un tale spostamento è individuato dalla corrispondente variazione di  $\theta$ ; e poichè, indicando con  $l$  la lunghezza comune delle quattro aste del rombo, si ha

$$BD = 2l \sin \theta, \quad AC = 2l \cos \theta,$$

si perviene alla condizione di equilibrio

$$R\delta(2l \sin \theta) + p\delta(2l \cos \theta) = 0,$$

la quale dà per l'intensità  $R$  delle reazioni in  $B$  e  $D$  (e delle corrispondenti pressioni subite dall'asta  $BD$ ) il valore

$$R = p \operatorname{tg} \theta.$$

### § 7. - Statica dei sistemi olonomi a quanti si vogliono gradi di libertà.

#### Condizioni di equilibrio in coordinate lagrangiane.

23. Si consideri un sistema olonomo costituito da  $N$  punti  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) e dotato di  $n$  gradi di libertà, e, riferendolo ad un generico sistema di coordinate lagrangiane (indipendenti)  $q_h$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ), si abbia

$$(6) \quad P_i = P_i(q_1, q_2, \dots, q_n | t) \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Poichè qui ogni spostamento virtuale

$$(7) \quad \delta P_i = \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h$$

(dove le  $\delta q_h$  sono arbitrarie e indipendenti) risulta reversibile (VI, n. 10), le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema sotto una data sollecitazione  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) sia in equilibrio saranno fornite dall'equazione simbolica della Statica

$$(8) \quad \delta L = \sum_1^N F_i \times \delta P_i = 0,$$

la quale, ove si tenga conto delle (7), assume la forma

$$\sum_1^N \sum_1^n F_i \times \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h = 0,$$

ossia

$$(8') \quad \sum_1^n Q_h \delta q_h = 0,$$

quando si ponga

$$(9) \quad Q_h = \sum_1^N F_i \times \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

La (8') deve sussistere per qualsiasi spostamento virtuale del sistema, cioè per ogni possibile scelta delle arbitrarie  $\delta q_h$  (in particolare quando esse si pongano tutte eguali a zero, tranne una); onde consegue che in condizioni statiche debbono valere, simultaneamente, le  $n$  equazioni

$$(10) \quad Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_n = 0;$$

e, viceversa, è chiaro che, se sono soddisfatte queste equazioni, risulta pur soddisfatta la (8') e quindi la (8) per qualsiasi scelta delle  $\delta q_h$ , cioè per ogni spostamento virtuale del sistema, e l'equilibrio è assicurato.

Insomma le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio del sistema olonomo considerato sono date dalle  $n$  equazioni (10).

24. Fissiamo l'attenzione sulle  $n$  quantità scalari  $Q_h$  definite dalle (9). Da queste equazioni si desume anzitutto che le  $Q_h$  risultano nulle tutte le volte che si annullano le forze direttamente applicate  $F_i$ ; e, in secondo luogo, quando il sistema olonomo si riduce ad  $N$  punti liberi, talchè a coordinate indipendenti sia lecito



assumere le coordinate cartesiane  $x_i, y_i, z_i$  degli  $N$  punti  $P_i$ , le  $Q_\lambda$  assumono la forma

$$F_i \times \frac{\partial P_i}{\partial x_i}, \quad F_i \times \frac{\partial P_i}{\partial y_i}, \quad F_i \times \frac{\partial P_i}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

cioè si riducono alle componenti  $X_i, Y_i, Z_i$  delle forze attive  $F_i$ , secondo gli assi cartesiani.

Per queste analogie (e per altre che tosto indicheremo) fra le  $X_i, Y_i, Z_i$  e le  $Q_\lambda$ , queste ultime quantità scalari si sogliono chiamare le *componenti della sollecitazione del dato sistema secondo le coordinate lagrangiane  $q_\lambda$* .

25. Per indicare altre notevoli analogie fra le componenti lagrangiane  $Q_\lambda$  della sollecitazione e le componenti cartesiane  $X_i, Y_i, Z_i$ , precisiamo anzitutto in qual senso debbano intendersi date, dal punto di vista matematico, le forze attive  $F_i$  che sollecitano il sistema.

In accordo con quanto si è convenuto nel caso di un punto libero (VII, § 8), la sollecitazione  $F_i$  si considererà matematicamente nota, quando ogni singola  $F_i$  (forza totale agente sul generico punto  $P_i$  del sistema) è data, istante per istante, in funzione della configurazione del sistema e delle velocità dei singoli suoi punti. Se si tien conto delle (6) e delle espressioni che ne conseguono per le velocità dei vari punti  $P_i$ ,

$$\dot{P}_i = \sum_{\lambda} \frac{\partial P_i}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda + \frac{\partial P_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

si riconosce che la sollecitazione va riguardata nota quando ciascuno dei vettori  $F_i$  è dato in funzione delle  $q_\lambda$ , delle  $\dot{q}_\lambda$  (che si chiamano *velocità* del sistema secondo le coordinate lagrangiane  $q_\lambda$ ) ed, eventualmente, del tempo.

In particolare, la sollecitazione si dirà puramente *posizionale* quando le  $F_i$  dipendono esclusivamente dalla configurazione del sistema, cioè, dalle sole  $q_\lambda$ . In tal caso, come risulta dalle (9), dipenderanno dalle sole  $q_\lambda$  anche le componenti lagrangiane  $Q_\lambda$ ; e le condizioni d'equilibrio (10) forniscono  $n$  equazioni fra le  $n$  coordinate di posizione  $q_\lambda$ , le quali caratterizzano le configurazioni di equilibrio del sistema analogamente a quanto accade, nel caso di un punto libero sollecitato da una forza posizionale, per le equazioni che si ottengono eguagliando a zero le tre componenti della forza attiva.

26. Proseguendo nella enunciazione delle analogie fra le  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  e le  $Q_\lambda$ , premettiamo che una sollecitazione  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) di un sistema di  $N$  punti si dice *conservativa*, quando il lavoro complessivo delle forze  $F_i$  per uno spostamento *qualsivoglia*  $dP$ , del sistema è identico al differenziale totale di una funzione  $U$  delle  $3N$  coordinate cartesiane  $x_i, y_i, z_i$  dei punti del sistema; cioè quando si ha identicamente

$$(11) \quad \sum_1^N F_i \times dP_i = dU.$$

Poichè questa equazione si può scrivere esplicitamente sotto la forma

$$\sum_1^N (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = \sum_1^N \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} dz_i \right),$$

si conclude, identificando i coefficienti dei differenziali (arbitrari e indipendenti)  $dx_i, dy_i, dz_i$ , che essa è equivalente alle  $3N$  identità

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

La funzione  $U$ , determinata a meno di una costante additiva arbitraria, dicesi, come nel caso di un'unica forza conservativa, *potenziale* della sollecitazione.

Ciò premesso, applichiamo, nell'ipotesi di una sollecitazione conservativa, la identità (11) al caso di uno spostamento virtuale. Avremo

$$\sum_1^N F_i \times \delta P_i = \delta U,$$

ossia, tenuto conto delle (7) e (9),

$$\sum_1^n Q_\lambda \delta q_\lambda = \delta U;$$

talchè, immaginando la  $U$  espressa, per mezzo delle (6), in funzione delle  $q_\lambda$  e identificando i coefficienti delle  $\delta q_\lambda$ , si conclude

$$(12) \quad Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad \dots, \quad Q_n = \frac{\partial U}{\partial q_n}.$$

Possiamo perciò dire che anche le componenti lagrangiane derivano da un potenziale.

Giova rilevare esplicitamente che la precedente osservazione

non è invertibile, in quanto può darsi benissimo che il lavoro virtuale

$$\sum_1^n Q_n \delta q_n$$

sia identicamente eguale a un differenziale esatto senza che tale sia il lavoro elementare per uno spostamento del tutto arbitrario

$$\sum_1^N \mathbf{F}_i \times dP_i.$$

Ad ogni modo, tutte le volte che le componenti lagrangiane  $Q_n$  ammettono un potenziale, si desume dalle condizioni di equilibrio (10) e dalle identità (12) che ad ogni massimo o minimo del potenziale corrisponde pel sistema olonomo una configurazione di equilibrio.

Se poi si estende all'equilibrio dei sistemi olonomi il criterio qualitativo di stabilità che si è accennato al n. 22, c) del Cap. XII, si riconosce che anche per codesti sistemi sono configurazioni di equilibrio stabile quelle, cui corrisponde pel potenziale un valore massimo.

## CAPITOLO XV.

### EQUILIBRIO RELATIVO

#### § 1. - Nozione di equilibrio relativo.

##### Regola di applicazione generale.

1. Nei capitoli precedenti abbiamo studiato le condizioni di equilibrio di varie specie di sistemi materiali, riferendoci ad una terna di assi galileiani (VII, n. 20) o, in via approssimata, terrestri.

Consideriamo più generalmente un sistema di assi  $Oxyz$ , animati, rispetto alla terna galileiana (o, eventualmente, terrestre) di riferimento meccanico, da un moto comunque assegnato, e proponiamoci di trovare le condizioni cui debbono sottostare le forze direttamente applicate ad un sistema materiale, affinché esso, malgrado la sollecitazione, serbi posizione invariata, rispetto alla terna  $Oxyz$ . È questo il così detto *equilibrio relativo*, attribuendosi, quando si possa temere ambiguità, la qualifica di *equilibrio assoluto* a quello di cui ci siamo occupati finora.

2. Cominciamo, come nello studio dell'equilibrio assoluto, dal caso semplice in cui si tratta di un punto materiale  $P$ . In quanto si vuole che esso serbi posizione invariata rispetto agli assi  $Oxyz$ , la sua *velocità relativa* (cioè rispetto a codesti assi mobili)  $v_r$ , e di conseguenza l'analoga *accelerazione relativa*  $a_r$ , debbono annullarsi.

Ciò posto, sia  $F$  la risultante di tutte le forze che sollecitano  $P$  (compresa eventualmente la reazione, se vi sono dei vincoli). Si tratta di stabilire a quale condizione deve soddisfare  $F$  affinché il punto  $P$  stia in equilibrio relativo.

Ci basterà all'uopo combinare l'equazione fondamentale della dinamica

$$ma_a = F$$

(dove, per maggior chiarezza, si designa con  $a_a$  l'accelerazione assoluta) col teorema del CORIOLIS, espresso (cfr. Cap. IV, n. 3) dalla equazione

$$a_a = a_r + a_c + 2a_c.$$

Se in un certo intervallo di tempo il punto  $P$  si mantiene in equilibrio relativo, si avrà, per quanto si è or ora detto, che in tutto quell'intervallo risulterà  $\mathbf{a}_r = 0$ ,  $\mathbf{a}_c = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r = 0$  e quindi  $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r$ , sicchè la legge fondamentale del moto (assoluto) si potrà scrivere  $m\mathbf{a}_r = \mathbf{F}$ , ossia

$$(1) \quad \mathbf{F} - m\mathbf{a}_r = 0.$$

È questa la condizione cui deve necessariamente soddisfare la forza  $\mathbf{F}$ , finchè il punto  $P$  rimane in equilibrio relativo.

Ma essa è pur condizione sufficiente; cioè, se per una determinata posizione di  $P$  e per tutti gli istanti di un certo intervallo di tempo è verificata la (1), in tutto quell'intervallo il punto  $P$  risulta in equilibrio relativo. Per dimostrarlo bisogna far vedere che se, sotto l'ammessa ipotesi, in un particolare istante  $t_0$  il punto  $P$  si trova in quiete relativa ( $\mathbf{v}_r = 0$  per  $t = t_0$ ), consegue dalla (1)  $\mathbf{v}_r = 0$  in qualsiasi istante  $t$  dell'intervallo considerato. A tal fine si osservi che l'ipotesi (1) equivale alla  $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r$ , od anche, sostituendo ad  $\mathbf{a}_a$  la sua espressione fornita dal teorema del CORIOLIS, alla

$$\mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r = 0.$$

Poichè il vettore  $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$ , ove non sia nullo, risulta perpendicolare a  $\mathbf{v}_r$ , la relazione precedente, moltiplicata scalarmente per  $\mathbf{v}_r$ , porge

$$\mathbf{v}_r \times \mathbf{a}_r = 0,$$

ossia

$$\mathbf{v}_r \times \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_r) = \frac{1}{2} \frac{dv_r^2}{dt} = 0;$$

onde si conclude  $v_r = \text{cost.}$ ; e poichè per ipotesi  $\mathbf{v}_r$  si annulla nell'istante  $t_0$ , si manterrà costantemente eguale a zero.

La (1) è dunque condizione necessaria e sufficiente perchè il punto  $P$  sia in equilibrio relativo rispetto alla terna  $Oxyz$ .

3. Tale risultato si può interpretare in modo espressivo, ravvicinandolo all'analoga condizione di equilibrio assoluto, che, come ben sappiamo, è data dall'annullarsi della risultante di tutte le forze applicate al punto (VII, n. 11). Si può cioè rappresentarsi la (1) come condizione di equilibrio assoluto per un punto materiale sollecitato, oltre che dalla forza  $\mathbf{F}$  (effettivamente applicata) anche da una forza addizionale  $\boldsymbol{\chi} = -m\mathbf{a}_r$ . Questa forza fittizia, che, in ordine all'equilibrio relativo del punto, rappresenta l'influenza del moto degli assi e si riduce a zero, non soltanto quando

questi son fissi, ma anche ogni qualvolta sia  $\alpha_i = 0$ , si suol chiamare *forza di trascinamento*.

Introducendō sistematicamente siffatta forza, possiamo enunciare la regola seguente: *Tutte le questioni di equilibrio relativo del punto si discutono come se si trattasse di equilibrio assoluto, avendo però cura di annoverare ciascuna volta fra le forze esterne direttamente applicate anche una forza di trascinamento.*

Questa, per la sua stessa definizione, dipende dal moto degli assi; e al prossimo § indagheremo il suo comportamento nei casi più semplici e più interessanti per le applicazioni.

4. La regola di Statica relativa, or ora stabilita nel caso del punto, si estende a sistemi materiali di natura qualsiasi e risulta senz'altro applicabile a tutti quei casi (solidi liberi o vincolati, sistemi articolati, fili, ecc.) pei quali già si conoscono le condizioni di equilibrio assoluto.

Per giustificare questa asserzione basta, se si tratta di vincoli privi di attrito, invocare il principio dei lavori virtuali, cioè (Cap. prec., n. 2) la relazione  $\delta A = \sum_i \mathbf{R}_i \times \delta P_i \geq 0$ , e notare che, nel caso dell'equilibrio relativo, ogni reazione  $\mathbf{R}_i$  è precisamente eguale a  $-$  (forza attiva + forza di trascinamento). Si arriva quindi allo stesso enunciato (Cap. prec., n. 5) della condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio assoluto, colla sola avvertenza che, nel caso dell'equilibrio relativo, vanno annoverate fra le forze attive anche quelle di trascinamento. Si ha così una conclusione generale ed espressiva.

Per altro non è inutile di rendersene conto anche in altro modo, riportandosi ai criteri più elementari e particolari (sebbene per qualche rispetto più pratici, perchè non escludono a priori gli attriti) che abbiamo seguito nei Cap. IX, XII e XIII per stabilire le condizioni di equilibrio assoluto spettanti ad ognuna delle categorie di sistemi ivi considerati. Abbiamo allora proceduto come segue:

a) si è espresso che ciascuna porzione del sistema si trova in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne direttamente applicate e di forze interne di collegamento, nonchè di reazioni vincolari, soddisfacenti a determinate caratteristiche sperimentali;

b) si sono combinate opportunamente le conseguenze di codeste condizioni elementari di equilibrio, in modo da mettervi in evidenza le forze direttamente applicate e da eliminare, per quanto è possibile, gli elementi ausiliari.

Ora questo stesso procedimento è manifestamente applicabile anche alla deduzione delle condizioni dell'equilibrio relativo; ed anzi

se, come accade in molti casi, è lecito ritenere che anche durante il moto le forze di collegamento e le reazioni vincolari conservino quegli stessi caratteri sperimentali che furono loro riconosciuti in istato di quiete, le condizioni elementari *a*) per l'equilibrio relativo non differiranno dalle analoghe condizioni per l'equilibrio assoluto se non per l'aggiunta, in ciascun punto, della corrispondente forza di trascinamento, con carattere di forza esterna. Conseguentemente nulla vi sarà da modificare nella eliminazione *b*) degli elementi ausiliari, e quindi nelle rispettive conclusioni finali, salva, beninteso, la norma generale di aggiungere alle forze esterne effettive le forze di trascinamento dei singoli punti del sistema.

Così la regola del n. prec. risulta estesa a sistemi materiali quali si vogliono, a condizione che le forze interne e le reazioni vincolari conservino durante il moto lo stesso comportamento, che le caratterizza in istato di quiete.

Giova tuttavia notare che non sempre ciò si verifica, e daremo in proposito un esempio tipico al § 3. In siffatti casi si potrà pur sempre applicare il procedimento suaccennato, ma nel far ciò bisognerà tener conto della influenza che lo stato di moto ha sul comportamento delle forze interne e reattive.

Vale del resto per ogni punto *P* la regola del n. prec., e, anche nelle conclusioni finali, il divario dall'equilibrio assoluto al relativo sarà questo soltanto che, accanto alle forze esterne effettivamente applicate, bisognerà far intervenire (per ciascuna particella elementare del sistema di cui si tratta) la forza di trascinamento  $\chi$ .

## § 2. - Casi particolari notevoli ed esempi illustrativi.

5. TRASLAZIONI. — Gli assi mobili di riferimento di *Oxyz* siano animati da un *moto traslatorio* (qualsiasi). L'accelerazione di trascinamento  $\alpha$ , è, ad un dato istante, la stessa per qualsivoglia punto *P* (III, n. 4) e può quindi identificarsi coll'accelerazione  $\alpha_0$  dell'origine *O*. Lo stesso carattere di indipendenza locale presenta così la forza di trascinamento  $\chi = -m\alpha_0$ .

Un esempio illustrativo assai semplice è fornito dall'equilibrio relativo rispetto ad un corpo liberamente cadente, supposto che sia lanciato o abbandonato in modo da assumere un moto puramente traslatorio <sup>(1)</sup>.

(1) L'intuizione ci dice che ciò è effettivamente possibile, e i principi della Dinamica ne porgono, come si vedrà, la conferma (cfr. Parte II, Cap. V, n. 12).

Detta  $g$  l'accelerazione di gravità (in grandezza e direzione), sarà naturalmente  $a_0 = g$ , cosicchè la forza di trascinamento  $\chi = -mg$  equilibra il peso.

Così in particolare per un solido qualsiasi su cui, oltre al peso, non siano direttamente applicate altre forze, le condizioni di equilibrio relativo si trovano senz'altro soddisfatte.

Supponendo, per es., che una persona porti sulle spalle un carico, e spicchi un salto all'ingiù, nel periodo di caduta lo sforzo muscolare di sostentamento del carico è ridotto a zero. E lo stesso può dirsi anche pel periodo d'ascesa, se il salto è spiccato all'insù. L'apparenza contraria va attribuita allo sforzo preliminare necessario per spiccare un tale salto all'insù.

Se poi il moto degli assi  $Oxyz$ , oltre ad essere *traslatorio*, è anche uniforme, l'accelerazione di trascinamento è nulla, e con essa la forza  $\chi$ .

*Una traslazione uniforme non ha pertanto alcuna influenza sulle condizioni statiche: esse sono identiche a quelle valide per l'equilibrio assoluto.*

**6. ROTAZIONI E ROTOTRASLAZIONI UNIFORMI. - FORZA CENTRIFUGA.** — Gli assi di riferimento siano invece animati da un *moto rotatorio uniforme*.

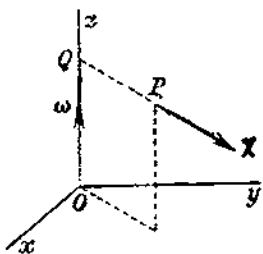
Detta  $\omega$  la velocità angolare, e  $Q$  la proiezione sull'asse di rotazione del generico punto  $P$  che si considera, sappiamo (III, n. 8) che

$$a_r = -\omega^2(P - Q);$$

si ha quindi

$$(2) \quad \chi = m\omega^2(P - Q).$$

A questa forza di trascinamento, derivante da una rotazione uniforme, si dà il nome particolare di *forza centrifuga*.



Essa dipende, come si vede, dalla posizione del punto  $P$  rispetto all'asse di rotazione: è diretta radialmente verso l'esterno (cioè secondo il prolungamento della  $QP$ ), ed ha intensità proporzionale alla massa del punto, alla sua distanza dall'asse e al quadrato della velocità angolare.

Ove si assuma l'asse di rotazione per asse delle  $z$  e si designino con  $x, y, z$  le coordinate di  $P$ , le componenti del vettore  $\chi$  sono, a norma della (2),

$$\chi_x = m\omega^2 x, \quad \chi_y = m\omega^2 y, \quad \chi_z = 0,$$



cioè coincidono colle derivate (rispetto alle coordinate  $x, y, z$  di  $P$ ) della funzione

$$m \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = m \frac{1}{2} \omega^2 P Q^2.$$

La forza centrifuga ha pertanto carattere di forza conservativa; il suo potenziale unitario (cioè riferito all'unità di massa) vale

$$\frac{1}{2} \omega^2 P Q^2$$

ed è quindi proporzionale al quadrato della distanza dall'asse di rotazione e al quadrato della velocità angolare.

7. Consideriamo, per es., un punto pesante  $P$ , costretto a restare sopra una superficie  $\sigma$ , rotante uniformemente attorno ad un asse verticale, e cerchiamo sotto quali condizioni il punto possa stare in equilibrio sulla superficie, supposta priva d'attrito.

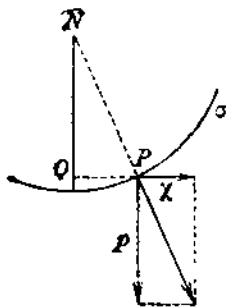
Secondo la regola generale del n. 3 dovremo riguardare come forza direttamente applicata a  $P$ , accanto al suo peso  $p$ , anche la forza centrifuga  $\chi$ ; e saremo ricondotti (IX, n. 7) ad esprimere che la risultante  $p + \chi$  è diretta secondo la normale alla superficie  $\sigma$ . Se si tratta di un punto, non obbligato a stare sopra  $\sigma$ , ma soggetto soltanto ad un vincolo unilaterale (per es., appoggiato a  $\sigma$ ), bisogna aggiungere la restrizione qualitativa che la forza  $p + \chi$  risulti rivolta verso la regione non consentita dal vincolo (cioè verso l'interno del corpo, la cui superficie offre l'appoggio).

Sono dunque posizioni di equilibrio tutte e sole quelle, in cui la normale a  $\sigma$  è parallela a  $p + \chi$ , con in più la suddetta condizione pel verso, se il vincolo non è bilaterale.

Ciò posto, osserviamo anzitutto che nei punti dell'asse di rotazione è  $\chi = 0$ , talchè le cose vanno come per l'equilibrio assoluto; se dunque la  $\sigma$  taglia l'asse (per ipotesi, verticale) in qualche punto, l'equilibrio potrà ivi sussistere solo a patto che il rispettivo piano tangente sia orizzontale.

Escluse queste eventuali posizioni di equilibrio in punti dell'asse, la forza centrifuga  $\chi = m\omega^2(P - Q)$  sarà rappresentata da un vettore orizzontale non nullo.

D'altra parte le due forze  $p$  e  $\chi$ , e quindi anche la  $p + \chi$ , sono contenute in un medesimo piano verticale, determinato dal-



l'asse di rotazione e dalla posizione d'equilibrio  $P$ , che si tratta di caratterizzare, cosicchè la linea d'azione di  $p + \chi$ , cioè la normale alla superficie  $\sigma$  in  $P$  deve incontrare l'asse di rotazione in un certo punto  $N$ , necessariamente situato al disopra di  $P$  (per essere  $\chi$  diretta radialmente verso l'esterno).

La condizione che la normale incontri l'asse è di per sè verificata, quando si tratta di superficie rotonde (aventi per asse l'asse di rotazione). In ogni caso, poi, detta  $\theta$  l'inclinazione della normale sulla verticale, dovrà averi ulteriormente

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\chi}{p} = \frac{\omega^2 PQ}{g};$$

e di qui, se si bada al triangolo rettangolo  $PQN$  e si tien conto che (essendosi escluse le eventuali posizioni di equilibrio sull'asse)  $\operatorname{tg} \theta$  è certamente diversa da zero, si ricava

$$(3') \quad QN = \frac{g}{\omega^2}.$$

Risulta da questa condizione che le posizioni di equilibrio relativo dipendono dalla forma geometrica della superficie e dalla velocità angolare, non dalla massa del punto.

Trattandosi di superficie di rotazione, il segmento  $QN$  rappresenta manifestamente la *sunnormale* della curva meridiana (relativa al punto  $P$ ); cosicchè la discussione delle posizioni di equilibrio (non situate sull'asse) porta allora a ricercare quei punti del meridiano, per cui la sunnormale assume lo speciale valore  $g/\omega^2$ .

8. Nel caso della sfera la sunnormale  $QN$ , ove  $R$  designi il raggio, è data da  $R \cos \theta$ , talchè la (3') diventa

$$(4) \quad \cos \theta = \frac{g}{\omega^2 R}.$$

Questa equazione in  $\theta$  ammette soluzioni effettive (cioè reali) e definisce univocamente un angolo (acuto)  $\theta$ , sotto la condizione  $g/(\omega^2 R) < 1$ , o, ciò che è lo stesso,

$$\omega^2 > \frac{g}{R}.$$

Bisogna dunque che la velocità angolare, con cui la sfera ruota, superi un certo limite, perchè un punto pesante possa trovarsi su di essa in equilibrio relativo in posizioni diverse dai due poli. Superato questo limite, il luogo delle possibili posizioni di equi-

librio è un parallelo orizzontale dell'emisfero inferiore, la cui colatitudine è determinata dalla (4).

Quanto più rapidamente gira la sfera, cioè quanto più grande è  $\omega$ , tanto più piccolo risulta  $\cos \theta$ ; perciò il parallelo orizzontale d'equilibrio va spostandosi dal polo inferiore verso l'equatore e vi tende asintoticamente al crescere indefinito di  $\omega$ .

9. Esaminiamo da ultimo anche il caso di un *moto rototraslatorio uniforme* del triedro *Oxyz* (III, nn. 12-14). Osservando che in un atto di moto composto da due o più altri, l'accelerazione è la somma di quelle spettanti ai moti componenti, risulta in generale che una traslazione uniforme (sovrapposta ad un altro moto rigido) non ne altera l'accelerazione di trascinamento. *Così per un moto rototraslatorio uniforme, le cose vanno come nel caso di una semplice rotazione uniforme, e si è quindi ancora ricondotti alla forza centrifuga.*

### § 3. — Rotazione di regime d'un albero orizzontale. Eccentricità dell'appoggio sui cuscinetti.

10. Consideriamo un albero (cilindrico) orizzontale, poggiato alle estremità su due cuscinetti, ciascuno dei quali costituisca come un alveo cilindrico di diametro leggermente superiore a quello dell'albero, e supponiamo che l'albero ruoti uniformemente attorno al proprio asse.

Ci proponiamo di far vedere che nelle condizioni di sollecitazione, che intervengono più frequentemente in pratica (e che saranno qui appresso specificate), l'appoggio dell'albero sui cuscinetti, ove si tenga conto del rispettivo attrito, non ha luogo nei punti più bassi dei cuscinetti stessi, come a prima vista potrebbe ritenersi, e come manifestamente avviene nel caso statico.

Discutiamo dapprima un caso fittizio, considerando il fenomeno in sezione piana verticale. Avremo in questo piano un cerchio solido (disco circolare) di raggio  $r$ , che ruota uniformemente attorno al proprio centro  $O$ , appoggiando per un punto  $P$  (cfr. la fig. alla pag. 415) sopra un orlo fisso (traccia del cuscinetto). Supponiamo che le forze esterne effettivamente applicate (tutte situate nel detto piano) si possano raggruppare come segue:

- 1°) una coppia *motrice*, cioè una coppia di momento  $\Gamma_1$  parallelo all'asse di rotazione (ossia perpendicolare al piano del cerchio) il cui verso di rotazione coincida con quello dell'albero;
- 2°) una coppia *resistente*, cioè una coppia di momento  $\Gamma_2$  sempre parallelo all'asse di rotazione e diretto nel verso opposto:

3°) il peso  $p$  (verticale verso il basso);

4°) la reazione  $R$  del punto di appoggio  $P$  dell'albero sul cuscinetto.

Supponiamo ancora che l'albero, e per conseguenza il disco schematico che ora consideriamo, siano omogenei. Il baricentro coincide allora col centro  $O$  del disco.

Cerchiamo, in queste condizioni, come possa l'albero trovarsi in rotazione di regime (uniforme) attorno al proprio asse. Basterà manifestamente esprimere che, rispetto ad un sistema di assi solidali coll'albero e quindi uniformemente rotanti, ha luogo l'equilibrio relativo dell'albero stesso, sotto l'azione delle forze testè specificate.

Trattandosi di solido, è necessario e sufficiente, come ben sappiamo, aver riguardo alle equazioni cardinali; si intende che, secondo la regola precedentemente esposta, bisogna tener conto anche delle forze centrifughe dei singoli punti del corpo. Nel caso presente tuttavia, data l'omogeneità dell'albero, alla forza centrifuga che si desta in un generico elemento  $A$  fa riscontro una forza centrifuga eguale e direttamente opposta, spettante all'elemento  $A'$ , simmetrico di  $A$  rispetto ad  $O$ . Ne viene che il complesso delle forze centrifughe non reca contributo alle equazioni cardinali, e si può quindi prescindere.

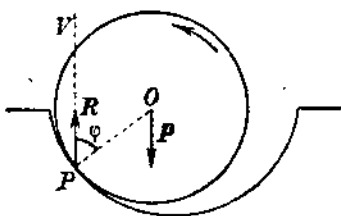
Ciò posto, cominciamo coll'esprimere che si annulla la risultante delle forze esterne. Dacchè le due coppie (motrice e resistente) hanno risultante nulla, dovrà pure esser zero la somma geometrica del peso e della reazione  $R$ , il che vale a dire che il peso e la reazione debbono costituire una terza coppia (od in particolare essere direttamente opposte).

Per proceder oltre occorre qui tener conto della circostanza che la reazione  $R$  è precisamente una di quelle forze sul cui comportamento influisce lo stato di moto, talchè non valgono più per la  $R$ , in condizioni di moto, le norme desunte dall'esperienza per l'attrito statico (Cap. IX). Anticipando un risultato sperimentale che verrà meglio chiarito e precisato in Dinamica, qui ci limiteremo ad affermare che durante il moto si può ritenere che la reazione  $R$  agisca secondo una generatrice della falda esterna di un certo cono di attrito (dinamico) di vertice nel punto di appoggio e avente per asse la normale, e precisamente secondo quella generatrice che si proietta ortogonalmente sulla tangente alla traiettoria in senso opposto a quello del moto.

Risulta appunto di qui che, escluso il caso ideale d'un attrito nullo, l'appoggio deve essere eccentrico, non può cioè seguire nel punto più basso. Infatti, in tal caso, essendo verticale la normale,

non potrebbe esserlo una generatrice del cono d'attrito e sarebbe quindi impossibile che peso e reazione avessero risultante nulla.

Dobbiamo quindi supporre il punto di contatto  $P$  alquanto spostato dalla posizione più bassa. Si vede subito che l'entità dello spostamento è misurata dall'angolo di apertura del cono d'attrito o *angolo d'attrito dinamico*  $\varphi$ . Infatti la verticale  $PV$  condotta per  $P$  deve essere generatrice del cono d'attrito, il che implica che l'angolo  $OPV$  sia eguale a  $\varphi$ . Siccome poi la forza d'attrito si esplica ostacolando il moto di  $P$ , la coppia peso-reazione non può essere che resistente, sicchè il punto di contatto dovrà in definitiva ritenersi spostato di  $\varphi$  in senso contrario alla rotazione.



Esprimiamo ora che è nullo il momento risultante rispetto ad  $O$ . Questa relazione vettoriale si riduce ad una relazione algebrica, avendo tutti i momenti come linea d'azione l'asse dell'albero, sicchè basta che si annulli il momento risultante rispetto a tale asse.

Abbiamo chiamato  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  i momenti rispetto ad  $O$  delle due prime coppie; quello della coppia peso-reazione è in valore assoluto (poichè la linea d'azione del peso passa per  $O$ , e quella della reazione è la verticale di  $P$ )

$$\gamma = rp \sin \varphi = rp \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = rp \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}},$$

e può assimilarsi ad  $rp f$  ( $f$  coefficiente d'attrito dinamico), se  $\varphi$  è abbastanza piccolo.

D'altra parte esso ha, per quanto si è detto pocanzi, lo stesso senso di  $\Gamma_2$ . Dovrà dunque, in valore assoluto, il momento  $\Gamma_1$  della coppia motrice eguagliare la somma dei momenti delle altre due coppie; e ciò dà

$$(5) \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 + \gamma,$$

dove si può ritenere  $\gamma = rp f$ .

La (5), unita al fatto geometrico che l'eccentricità dell'appoggio è misurata dall'angolo d'attrito  $\varphi$ , costituisce la cercata condizione di equilibrio relativo.

11. Nel caso reale in cui l'appoggio ha luogo su due cuscinetti, possiamo immaginare il peso  $P$  dell'albero decomposto in due

forze, egualmente verticali,  $p_1, p_2$  applicate agli estremi  $O_1, O_2$  dell'albero.

Supposto poi che le altre forze esterne si riducano qui ancora a due coppie (motrice e resistente) di momenti  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , aventi entrambi l'asse dell'albero per linea d'azione, basterà evidentemente per l'equilibrio relativo:

1°) che  $p_1$  e la reazione  $R_1$  dell'appoggio  $P_1$  costituiscano una coppia;

2°) che, analogamente, costituiscano una coppia  $p_2$  e la reazione  $R_2$  di  $P_2$ ;

3°) che si annulli il momento risultante delle quattro coppie (motrice; resistente;  $p_1, R_1$ ;  $p_2, R_2$ ) rispetto all'asse di rotazione.

Alle prime due condizioni, ammesso che l'angolo d'attrito  $\varphi$  sia lo stesso per entrambi i cuscinetti, si soddisfa con una eguale eccentricità dei due appoggi  $P_1$  e  $P_2$ .

La terza condizione, detti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  i momenti (rispetto all'asse di rotazione) delle due coppie (resistenti entrambe)  $p_1, R_1$  e  $p_2, R_2$ , si traduce nell'eguaglianza aritmetica

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_2.$$

Come al n. prec. si ha sensibilmente

$$\gamma_1 = r/p_1, \quad \gamma_2 = r/p_2,$$

essendo  $r$  il raggio del nostro albero cilindrico. Ne viene

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 + r/p,$$

dove  $p$  è il peso totale dell'albero.

Si ritrova così, anche per il caso pratico, la stessa condizione del n. prec.

#### § 4. - Peso e attrazione terrestre.

##### Variazione di $g$ colla latitudine - Deviazione della verticale.

12. Fissiamo la nostra attenzione su di un corpo qualsiasi, o meglio, per semplificare, su di un punto materiale  $P$ , in prossimità della superficie terrestre, e supponiamo che  $P$  non si trovi a contatto con altri corpi, nè sia comunque sollecitato da speciali dispositivi. Rimane allora notoriamente sensibile una forza tipica, il « peso » di  $P$ , che può riguardarsi come la forza che occorre vincere, per impedire la caduta di  $P$ , o, in forma più precisa, per mantenerlo in equilibrio (relativo) rispetto alla Terra.

Ravviciniamo questa constatazione sperimentale alla legge newtoniana di gravitazione universale <sup>(1)</sup>. Secondo tale legge, il punto materiale  $P$  (che, come si è detto, si suppone sottratto ad ogni forza, per dir così, artificialmente provocata) è da ritenersi soggetto alle attrazioni degli altri corpi, e a queste soltanto. Siccome poi, per l'enorme distanza, quelle dei vari corpi celesti riescono affatto trascurabili in confronto dell'attrazione terrestre  $G$ , così quest'ultima è sensibilmente la sola forza agente su  $P$ . Sarebbe quindi necessario e sufficiente elidere  $G$  per mantenerlo in equilibrio assoluto. Se si vuole invece aver riguardo all'equilibrio relativo rispetto ad assi solidali col nostro globo, si sarà condotti (§ 1) ad associare a  $G$  la forza di trascinamento  $\chi$ , proveniente dal moto di questi assi (rispetto alle stelle fisse).

In ultima analisi la concezione newtoniana porta ad identificare il peso (forza da vincere per l'equilibrio relativo del generico  $P$ ) colla somma  $G + \chi$  della attrazione terrestre e della forza di trascinamento.

Così procedendo, riconosceremo anzitutto, con un semplice apprezzamento qualitativo, che il comportamento di  $G + \chi$  risponde in realtà a quello osservato pel peso. Passando poi dal qualitativo al quantitativo, potremo (anche accontentandoci di una prima approssimazione nel calcolo di  $G$ ) render conto del modo di variare dell'accelerazione della gravità alla superficie terrestre (cfr. Cap. II, n. 27). Avremo così una manifesta conferma della perfetta attendibilità della legge newtoniana. Certo, assai più larghe, e più squisite conferme ha ricevuto questa legge dall'Astronomia nell'ambito dei fenomeni dinamici (moto dei corpi celesti); tuttavia anche il presente controllo statico ed espressivo (che, a differenza della esperienza del CAVENDISH <sup>(2)</sup>, non richiede finzze sperimentali) merita un considerevole interesse.

Convieni poi aggiungere che la relazione

$$\text{peso} = G + \chi$$

costituisce il fondamento meccanico della *Geodesia*, in quanto,

<sup>(1)</sup> Cfr. le nostre *Lezioni di meccanica razionale* (Bologna, Zanichelli, 1930), Vol. I, Cap. XI, n. 2.

<sup>(2)</sup> CAVENDISH HENRY, n. a Nizza nel 1731, m. a Londra nel 1810. Ricchissimo Lord, coltivò la Scienza in un suo laboratorio privato; fu membro della Società Reale di Londra e dell'Istituto di Francia. La relazione sulle sue famose esperienze per la determinazione diretta dell'attrazione fra corpi fu pubblicata sotto il titolo *Experiments to determine the density of the Earth* (Philosophical Transactions, 1798).

bene inteso, non si schematizzi, come ora per semplicità ci accingiamo a fare, la valutazione di  $G$ , ma si passi ad approssimazioni ulteriori.

13. SPECIFICAZIONE DI  $G$ . — Trattiamo la Terra come una sfera a strati omogenei concentrici. Per quel che riguarda la forma geometrica, date le dimensioni della Terra, siamo certo prossimi alle circostanze di fatto, giacchè le deviazioni (dovute, per es., allo schiacciamento polare, alle montagne, ecc.) sono di un ordine di grandezza che non va al di là (anzi resta quasi sempre molto al di sotto) del cinque per mille. Quanto alla ipotesi della stratificazione concentrica essa è perfettamente ragionevole a titolo d'assaggio, visto che non si ha conoscenza diretta della interna costituzione della Terra, e che d'altra parte, vi figura ancora una indeterminata (la legge, con cui varia la densità in funzione della distanza dal centro), mediante la quale si può sempre pensare attribuito alla densità media di un generico strato proprio il valore che gli compete in natura.

Ammesse queste ipotesi, ne consegue che l'attrazione della Terra nei punti esterni (e in particolare, nell'immediata prossimità della superficie), si esercita <sup>(1)</sup> come se l'intera massa  $M$  fosse raccolta nel centro  $O$ . Il vettore  $G$  sarà pertanto diretto verso  $O$ , e la sua intensità, relativa all'unità di massa del punto potenziato  $P$ , avrà il valore  $fM/\rho^2$ , essendo  $f$  la così detta costante di attrazione <sup>(2)</sup>, e  $\rho$  la distanza di  $P$  dal centro.

È appena necessario rilevare che, se si considera un campo di pochi chilometri nell'intorno di un punto qualsiasi della superficie, il vettore  $G$ , sarà, entro questo campo, sensibilmente costante, in grandezza e direzione.

Infatti, essendo il raggio  $R$  della sfera terrestre circa 6300 km, uno spostamento radiale o laterale di qualche chilometro altera di ben poco così la intensità come la direzione. Dell'entità delle alterazioni possiamo renderci conto come segue:

1°) (quanto alla direzione). Per uno spostamento, sopra una sfera di raggio  $R$ , di un arco (di circolo massimo)  $\Delta s$ , la deviazione angolare (in parti di raggio) vale  $\Delta s/R$ , talchè  $360\Delta s/2\pi R$  rappre-

(1) Cfr. loco citato alla pag. prec., n. 22.

(2) La determinazione diretta del CAVENDISH e quelle successivamente compiute con mezzi sempre più raffinati concordano nell'assegnare a questa costante  $f$ , in cifra tonda, un valore numerico di  $6,7 \times 10^{-8}$  unità C. G. S., cioè 67 bilionesimi di dine, pari a  $6,7 \times 10^{-8} / 980$  gr, ossia circa  $6,7 \times 10^{-11}$  grammi.



senta la deviazione in gradi. Supposto, per es., che  $\Delta s$  non superi 1 km, la deviazione rimane inferiore a mezzo minuto primo.

2°) (quanto all'intensità). Per uno spostamento, lungo il raggio, di  $\Delta R$  a partire da  $\rho = R$ , l'incremento che subisce  $G = fM/\rho^2$  è

$$\frac{fM}{(R + \Delta R)^2} - \frac{fM}{R^2} = \frac{fM}{R^2} \left\{ \left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right)^{-2} - 1 \right\}.$$

Siccome  $\Delta R$  è piccolo di fronte ad  $R$ , sviluppando  $(1 + \Delta R/R)^{-2}$  colla formula del binomio ed arrendoci al primo termine, avremo, come ordine di grandezza della variazione di  $G$ ,

$$-\frac{fM}{R^3} \cdot \frac{2\Delta R}{R};$$

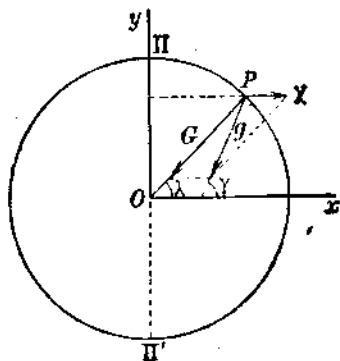
quindi, in valore assoluto, la variazione relativa (riferita cioè all'intensità superficiale) è rappresentata da  $2\Delta R/R$ , il che è meno di 1/1000 per altezze  $\Delta R$  che non superino i 3 km.

14. Volendo caratterizzare il modo di variare di  $G$  lungo un generico meridiano, converrà, riferirci ad un sistema di assi  $Oxy$  situati nel piano del meridiano, aventi la direzione positiva dell'asse  $Oy$  verso il polo boreale, e quella dell'asse  $Ox$  verso il meridiano (semicircolo massimo) di cui si tratta.

Detta  $\lambda$  la latitudine di un generico punto  $P$  del meridiano suddetto, saranno manifestamente  $\cos \lambda$  e  $\sin \lambda$  i coseni direttori del raggio vettore  $P-O$ , e avremo per  $G$  le componenti

$$(6) \quad \begin{cases} G_x = -G \cos \lambda, \\ G_y = -G \sin \lambda, \end{cases}$$

il valore di  $G$  essendo  $fM/R^2$ , e quindi indipendente da  $\lambda$ , anzi addirittura una costante su tutta la superficie terrestre.



15. SPECIFICAZIONE DI  $\chi$ . — Il movimento della Terra si intenderà composto, nel noto modo, di una rotazione uniforme intorno all'asse polare  $III'$  (rotazione diurna), e di una traslazione di insieme, per cui (conformemente alle leggi di KEPLERO) la Terra descrive, in un anno, un'ellisse attorno al Sole, come fuoco. La forza di trascinamento  $\chi$  risulterà di conseguenza dalla somma di

due addendi: l'uno  $\chi_1$  dovuto alla rotazione, l'altro  $\chi_2$  dovuto alla traslazione. Se si pensa che, in quest'ultimo movimento, si richiede un intero anno a compiere un giro, e che quindi (per intervalli di tempo piccoli di fronte al periodo) il moto può sensibilmente considerarsi come rettilineo uniforme, si è tratti (n. 5) a trascurare senz'altro  $\chi_2$  <sup>(1)</sup>.

Rimane così soltanto il primo addendo  $\chi_1$ , cioè la forza centrifuga dovuta alla rotazione diurna. La corrispondente velocità angolare  $\omega$  (arco descritto nell'unità di tempo, cioè in un secondo di tempo solare medio) è data, come sappiamo (Cap. VII, n. 18), da

$$\omega = \frac{2\pi}{86164},$$

e la forza centrifuga, agente sull'unità di massa, alla distanza  $\delta$  dall'asse polare risulta eguale ad  $\omega^2\delta$ . Per un punto  $P$  della superficie, alla latitudine  $\lambda$ , sarà manifestamente  $\delta = R \cos \lambda$ , la forza agendo nel piano meridiano, perpendicolarmente all'asse polare; onde, rispetto agli assi già adottati al n. 14, avremo

$$(7) \quad \chi_x = \omega^2 R \cdot \cos \lambda, \quad \chi_y = 0.$$

Il valore numerico di  $\omega^2 R$  (che è un'accelerazione) risulta all'incirca  $3,5 \text{ cm/sec}^2$ .

**16. CONFRONTO COL PESO. PRIMA APPROSSIMAZIONE.** — Dacchè l'intensità massima di  $\chi$  (che si riscontra naturalmente per  $\lambda=0$ , cioè all'equatore) è di soli  $3,4 \text{ cm/sec}^2$ , quasi si può trascurarne la influenza su  $g$ , identificando addirittura il peso coll'attrazione terrestre. Colla schematizzazione adottata per quest'ultima ne consegue che il peso non varia da un luogo all'altro della superficie terrestre, e che la direzione del raggio coincide in ogni punto colla

(1) A questo proposito è bene ricordare che, nella rivoluzione terrestre attorno al Sole, l'accelerazione di trascinamento (che, trattandosi di moto traslatorio, è la stessa per tutti i punti della Terra) è alquanto minore di un centimetro per secondo: *circa la millesima parte di g* (Cap. VII, n. 18). Siccome  $\chi_2$ , per un punto di massa 1, non è altro che questa accelerazione, presa nel verso opposto, così potremo effettivamente trascurarla nel computo del peso, cioè di  $g$ , dato l'ordine di approssimazione, di cui qui ci accontentiamo. A dire il vero, anche quando si richieda ben maggiore esattezza, si finisce col poter prescindere da  $\chi_2$ . Ma ciò, non perchè  $\chi_2$  sia per se stessa trascurabile, sibbene perchè tale forza, *sempre diretta nel verso opposto al Sole*, trova compenso nell'attrazione solare, che pure abbiamo qui trascurato (n. 12) di fronte alla attrazione terrestre.

direzione del filo a piombo. L'una e l'altra cosa sono evidentemente conformi ai dati della esperienza volgare.

17. SECONDA APPROSSIMAZIONE. — Quando si tien conto di  $\chi$  si ha l'equazione vettoriale

$$(8) \quad \mathbf{g} = \mathbf{G} + \boldsymbol{\chi},$$

la quale spiega a prima vista il fatto qualitativo (rivelato dall'osservazione) che l'accelerazione di gravità  $\mathbf{g}$  va aumentando dall'equatore verso i poli. Basta pensare che la forza centrifuga  $\boldsymbol{\chi}$  è nulla ai poli (sicchè  $\mathbf{g}$  si riduce ivi a  $\mathbf{G}$ ) ed ha intensità massima all'equatore, dove ha senso direttamente opposto all'attrazione terrestre  $\mathbf{G}$ , e perciò attenua l'intensità di  $\mathbf{g}$ . Fra l'equatore e il polo, attraverso i paralleli intermedi, la variazione di  $\mathbf{g}$  segue sempre nello stesso senso. Si può constatarlo per via geometrica, ma è anche più semplice desumerlo dalla espressione esplicita di  $\mathbf{g}$  in termini di  $\lambda$ , che ricaveremo al prossimo n., precisando le conseguenze della (8).

Qui intanto, notiamo come dalla (8) risulti che  $\mathbf{g}$ , al pari di  $\mathbf{G}$  e di  $\boldsymbol{\chi}$ , appartiene al piano meridiano del generico punto  $P$  che si considera. Se (cfr. la figura) rappresentiamo, ciascuna col suo vettore, l'attrazione  $\mathbf{G}$  (diretta da  $P$  verso il centro  $O$ ) e la forza centrifuga (diretta perpendicolarmente all'asse polare verso l'esterno), la diagonale del parallelogrammo costruito su di esse rappresenterà  $\mathbf{g}$ . Detto  $\gamma$  l'angolo acuto, che la direzione di tale diagonale (filo a piombo) forma col piano equatoriale, sarà manifestamente  $\gamma$  (alquanto) maggiore di  $\lambda$ . La differenza  $\gamma - \lambda$  si chiama *deviazione della verticale dovuta alla rotazione terrestre*.

18. Proiettando la (8) sugli assi  $x, y$ , definiti al n. 14, e cambiando segno ai due membri, ove si noti che le componenti di  $\mathbf{g}$  sono  $-g \cos \gamma$ ,  $-g \sin \gamma$  e si abbia riguardo alle (6) e (7), si ottiene

$$g \cos \gamma = (G - \omega^2 R) \cos \lambda, \quad g \sin \gamma = G \sin \lambda.$$

Detta  $g_0$  la gravità all'equatore (dove  $\lambda = \gamma = 0$ ), si ha dalla prima delle formule scritte

$$g_0 = G - \omega^2 R,$$

come sostanzialmente già s'era notato al n. precedente. Ove si ponga

$$\frac{\omega^2 R}{g_0} = \epsilon,$$

con che (n. 15)  $\varepsilon$  è un puro numero che ha il valore di pochi millesimi, avremo  $G = g_0 + \omega^2 R = g_0(1 + \varepsilon)$  e potremo quindi esprimere le componenti di  $g$  sotto la forma

$$(8') \quad g \cos \gamma = g_0 \cos \lambda, \quad g \sin \gamma = g_0(1 + \varepsilon) \sin \lambda;$$

onde quadrando e sommando, si ricava

$$= g_0^2 [\cos^2 \lambda + (1 + \varepsilon)^2 \sin^2 \lambda] = g_0^2 \left\{ 1 + 2\varepsilon \left( 1 + \frac{1}{2}\varepsilon \right) \sin^2 \lambda \right\}.$$

Rimane così in primo luogo giustificato l'asserto che  $g$  va costantemente crescendo con  $\lambda$ ; se poi si elevano i due membri alla potenza  $\frac{1}{2}$  e si sviluppa  $\left\{ 1 + 2\varepsilon \left( 1 + \frac{1}{2}\varepsilon \right) \sin^2 \lambda \right\}^{1/2}$  colla formula

binomiale, trascurando (come è ben naturale data la piccolezza di  $\varepsilon$ ) i termini di secondo ordine in  $\varepsilon$ , si ha immediatamente

$$(9) \quad g = g_0(1 + \varepsilon \sin^2 \lambda).$$

Questa formula rappresenta bene l'andamento generale della gravità lungo un meridiano.

È stato poi constatato, passando ad una più accurata approssimazione, che la stessa formula (9) risponde anche *quantitativamente* (entro il millimetro, di sicuro) alle effettive variazioni di  $g$ , purchè si attribuisca ad  $\varepsilon$ , non il valore ipotetico  $\omega^2 R/g_0$ , ma un opportuno valore numerico, cioè  $\varepsilon = 0,005302$  e si ponga col-  
L'HELMERT (1)  $g_0 = 978,030 \text{ cm/sec}^2$ .

19. Dalle (8') si ha ancora, moltiplicando la prima per  $\sin \gamma$ , la seconda per  $\cos \gamma$  e sottraendo,

$$g_0 \cos \lambda \sin \gamma - g_0 \sin \lambda \cos \gamma - g_0 \varepsilon \sin \lambda \cos \gamma = 0,$$

che può essere scritta

$$\sin(\gamma - \lambda) = \varepsilon \sin \lambda \cos \gamma = \varepsilon \sin \lambda \cos[\lambda + (\gamma - \lambda)].$$

Ne risulta anzitutto che  $\sin(\gamma - \lambda)$  contiene  $\varepsilon$  a fattore, talchè, trascurando ancora  $\varepsilon^2$ ,  $\cos(\gamma - \lambda) = \sqrt{1 - \sin^2(\gamma - \lambda)}$  può assimilarsi all'unità, ed  $\varepsilon \sin(\gamma - \lambda)$  allo zero.

Con ciò

$$\varepsilon \cos[\lambda + (\gamma - \lambda)] = \varepsilon \cos \lambda \cos(\gamma - \lambda) - \varepsilon \sin \lambda \sin(\gamma - \lambda)$$

(1) Cfr. PIZZETTI, *Trattato di Geodesia teoretica* (Bologna, Zanichelli, 1905), pag. 15.

si riduce sensibilmente ad  $\epsilon \cos \lambda$ , talchè rimane

$$\sin(\gamma - \lambda) = \epsilon \sin \lambda \cos \lambda = \frac{1}{2} \epsilon \sin 2\lambda,$$

dove (colla stessa approssimazione) è lecito ancora sostituire l'arco al seno, ottenendo da ultimo

$$\gamma - \lambda = \frac{1}{2} \epsilon \sin 2\lambda.$$

Questa formula ci mostra che la *massima deviazione della verticale si ha alla latitudine di 45°* ( $\sin 2\lambda = 1$ ). Essa ammonta (in parti di raggio) a  $\frac{1}{2}\epsilon$ , cioè in gradi a  $\frac{1}{2}\epsilon \frac{360}{2\pi}$ . Col valore di  $\epsilon$  indicato al n. prec. si trova un po' meno di 10'.