questo libro mi fù mandato in dono dal Sig.r Carlo Giuseppe Merlo Ingegn.re Collegiato di Milano il di 10 Gen.o 1724

OPERA
GEOMETRICA
EVANGELISTÆ
TORRICELLII

De Solidis Sphæralibus
De Motu.
De Dimensione Parabolæ
De solido Hyperbolico
Cum Appendicibus de Cycloide, & Cochlea.

DE SPHÆRA
Et Solidis Sphæralibus
LIBRI DVO

In quibus Archimedis Doctrina de Sphæra & cylindro denuo componitur, latiùs promouetur,

Et in omni ſpecie ſolidorum, quæ vel circa, vel intra Sphæram, ex conuerſione poligonorum regularium gigni poſſint, vniuerſalius Propagatur.

AD SERENISSIMVM
FERDINANDVM II.
Magnum Ducem Etruriæ.

AVCTORE
EVANGELISTA TORRICELLIO
eiuſdem Sereniſſimi Magni Ducis Mathematico.

Florentiæ Typis Amatoris Maſſę & Laurentij de Landis 1644
SVPERIORVM PERMISSV.

DE SPHÆRA

Et Solidis Sphæralibus

LIBRI DVO

In quibus Archimedis Doctrina de Sphæra & cylindro denuo componitur, latiùs promouetur,

Et in omni ſpecie ſolidorum, quæ vel circa, vel intra Sphæram, ex conuerſione poligonorum regularium gigni poſſint, vniuerſaliùs Propagatur.

AD SERENISSIMVM

FERDINANDVM II.

Magnum Ducem Etruriæ.

AVCTORE

EVANGELISTA TORRICELLIO

eiuſdem Sereniſsimi Magni Ducis Mathematico.

Florentiæ Typis Amatoris Maſſę & Laurentij de Landis 1644

SVPERIORVM PERMISSV.

Serenissimo Magno Duci Etruriæ

FERDINANDO II.

ERVBESCEREM *profectò, Serenissime Magne Dux, oblaturus libellum hunc Serenissimæ Celsitudini Tuæ, nisi haberem maxima Archimedis, et Galilei nomina, quæ prætendere possim audaciæ meæ: Exigua enim sunt opuscula hæc, & de rebus ætate nostra neglectis, nempe Geometricis. Attamen, nisi fallor, duo maxima Geometriæ opera promouebunt, cum veterem De Sphæra, et Cylindro, nouamque De Motu scientiam exequantur. Sed ego frustra Geometriam excuso apud eum Principem, cui non solum hæreditaria, sed etiam ingenita est Mathematicarum disciplinarum protectio. Serenissimus enim Cosmus II. Pater Tuus stipendijs celeberrimo Galileo oblatis; deinde Ser. C. Tua, beneficijs maximis in huiusmodi scientiæ cultores collocatis, optime demonstrauit intelligere, quanti momenti sint*

Mathematicæ scientiæ, vel in disponendis exercituum aciebus, vel in muniendis, exornandisque vrbibus, vtroque tempore belli, pacisque. Cum enim (vt de Mechanica facultate sileam) totum penè ciuile commercium pondere, numero, & mensura administretur, quis non videat omne hominũ negotium in Mathematicis esse? quæ tria quantitatis genera cum in Scholis nostris quotidie agitentur, illi profectò maximè vtiles Reip. habebuntur, qui in huiusmodi studijs versati, exercitatique erunt. Libellorum itaque non inutilium causa penitus mala non erit quatenùs Geometrici sunt. Vtinam mala non sit eo nomine quòd sunt mei: Propterea humilliter oro, vt illos qualescumq; sint, Tibi tamen debitos, Tuaque munificentia editos, S. C. Tua suscipere dignetur eo vultu, quo me quoque supplicem suscepit, atque ea humanitate, quæ cum tanti Principis maiestate coniuncta, amorem elicit etiam ab ignotis. Faueat Deus omnibus votis Tuis, & S. C. Tuam, imperiumq; diu tueatur, & augeat.

Serenifs. C. Tuæ

Humillimus seruus

Euangelista Torricellius.

PROEMIVM.

INTER omnia opera ad Mathematicas diſciplinas pertinentia, iure optimo Principem ſibi locum vindicare videntur Archimedis inuenta; quæ quidem ipſo ſubtilitatis miraculo terrent animos. Verùm inter omnes libros egregij Authoris longè eminet ille, qui De Sphæra, & cylindro inſcribitur: neque enim poſteritatis tantùm conſenſu, ſed etiam ipſius Scriptoris iudicio primas tenet. Certè hunc ipſe in titulum ſepulcri elegit, dignumq; prę cęteris iudicauit, qui tanti viri tumulum exornaret, oſtenderetque. Hunc tamen ſi quis attentiùs conſiderare, & perpendere velit, magnum quidem inuentum fateatur neceſſe eſt, ſed fortaſſe non abſolutum. Loquor equidem de primo tantùm libro, in quo partem operis Theorematicam, & omnem doctrinæ inuentionem exequitur: quo veluti iacto fundamento, in ſecunda parte poſtea, quaſi coronidis loco, problemata quędam tamquam corollaria ad eam rem ſpectantia ipſe ſubnectit. Titulus libri eſt De Sphæra, & Cylindro; quę quidem verba apud nos idem ſonant, ac ſi dixiſſet De Sphæra, atque vnico ſolido ſphęrali; ſed ſphæralia ſolida, quorum vnum eſt cylindrus, multitudine ſunt infinitã, vt mox patebit. Ergo abſolutior fortaſſe contemplatio videri potuiſſet, ſi eximius Author proportionem, non tantùm eam, quæ eſt inter ſphæram, vnicumque ex ſphęralibus ſolidis perquiſiſſet, verumetiam omnem aliam rationem, quæ inter ſphęram ipſam, & vnumquodq; ex infinitis ſphæralibus ſolidis intercedit, oſtendendam ſibi aſſumpſiſſet. Hoc itaque propoſitum

erit,

& inſtitutum meum in præſenti libello. Doctrinam non ſolum de Sphęra, & cylindro, ſed de ſphæra, & ſphæralibus ſolidis omnibus proſequemur: Mutatiſq; plerumque Archimedæis fundamentis, vniuerſaliori demonſtratione illam complecti conabimur, atque in omni ſpecie ſolidorum, vel intrà, vel circà ſphęram deſcriptorum, propagabimus.

Ex libro Archimedis De Sphæra & Cylindro duo hæc colliguntur ſpectantia ad illa ſolida, quæ nos ſphæralia appellamus: Primum, quòd ſphæra dupla eſt inſcripti ſibi rombi ſolidi æquilateri; quod quidem vnum eſt ex ſolidis ſphæralibus, genitum ex reuolutione quadrati inſcripti, & circa diagonalem conuerſi. Alterum; quòd cylindrus ad inſcriptam ſibi ſphæram eſt ſeſquialter. quod quidem & vnum ex ſolidis ſphæralibus eſt, genitum ex conuerſione quadrati circumſcripti, & circa ipſius catetum reuoluti. Stantibus his, contemplatione dignum mihi videbatur vniuerſalius aliquod problema huiuſmodi.

Dato poligono quocunque regulari ſiuè intrà, ſiuè circà circulum deſcripto, & ſiue circa diagonalem, ſiue circa catetum reuoluto; proportionem dicere, quam factum ex polygono ſolidum habeat, ad factam ex circulo ſphæram.

Penitus autem ex voto ſucceſſit inſtituta contemplatio. Nam inuenta proportione, ſex iſta inferiùs adnotata Theoremata ita ſe habere comperi, quemadmodum hìc ſubijciuntur.

Prima ſolidorum ſphæralium ſpecies.

Si intrà circulum deſcriptum fuerit poligonum regulare habens latera numero parià, & conuertatur figura circa catetum B. Quæritur ratio ſphæræ ad factum ſolidum.

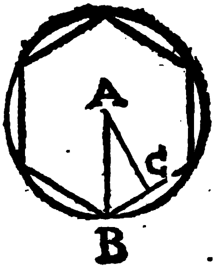
Continuetur ratio radij poligoni ad catetum eiuſdem, nempe A ad B in quatuor terminis A, B, C, D. Erit que ſphæra ad ſolidum inſcriptum, vt diameter ſphæræ, hoc eſt vt dupla ipſius A, ad vtramq; ſimul B, & D.

Theor. 14. lib. ij

Secun

Secunda species.

Si intra circulum descriptum fuerit poligonum regulare habens latera numero paria, & conuertatur figura circà diagonalem. A.B. Quæritur ratio sphęrę ad factum sphærale solidum.



Ostenditur. Sphæram esse ad solidum, vt quadratum A B. ad quadratum cateti A C. Theor. v. lib. ij.

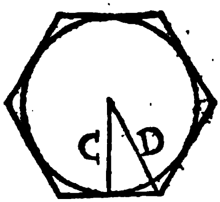
Tertia species.

Si intrà circulum describatur poligonum regulare habens latera numero imparia, & conuertatur figura circa catetum B. Quæritur ratio sphęrę ad factum sphęrale solidum.

Continuetur ratio radij A. ad catetum B. in quatuor terminis A, B, C, D. Eritq; sphæra ad solidum, vt quadrupla ipsius A. ad B. semel, C. bis, & D. semel simulq; sumptas. Theor. xix. lib. ij.

Quarta species.

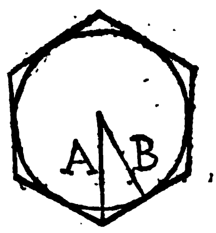
Si circà circulum describatur poligonum regulare, habens latera numero paria, & conuertatur figura circa catetum C. Quæritur ratio solidi ad sphæram.



Ostenditur solidum esse ad inscriptam sibi sphæram, vt duo simul quadrata, quorũ vnum fit ex radio D. alterum ex cateto C, ad duplum quadrati C. Theor. xiij lib. ij.

Quinta Species.

Si circà circulum describatur poligonum regulare habens latera numero paria; & conuertatur figura circa diagonalem A. Quæritur ratio solidi ad sphæram.



Ostenditur solidum ad inscriptã sibi sphæram

ram esse vt radius A ad catetum B. hoc est vt axis solidi ad axem sphærę.

Theor. 6. lib. 2.

Sexta, & vltima Species.

SI circa circulum describatur poligonum regulare habens lateranumero imparia, & conuertatur figura circa B catetum. Quæritur ratio solidi ad Sphæram.

Continuetur ratio radij A ad catetum poligoni B, in tribus terminis A, B, C. Eritque solidum ad sphæram, vt A semel, B bis, & C semel simulque sumptæ, ad quadruplam ipsius C.

Theor. xviij. lib ij.

Solidorum itaq: sphęralium species omninò sex emergunt, & vniuscuiusq; speciei ratio ad suam sphæram innotescit. Possent fortasse videri tres tantum solidorum species, si solida absolutè, ac sine suis sphæris considerentur. Verum si illa ad sphæram referantur, statim relatio variatur, & proportio alia consurgit, prout cognata solidis ipsis sphæra inscripta fuerit, vel circumscripta.

Quibus demonstratis, varia pro Corollarijs Theoremata statim emergebant; cuiusmodi sunt. Datis ex prędictarum sex specierum solidis duobus quibuscunque, alterius ad alterum rationem notam facere.

Conum æquilaterum circa sphæram descriptum, esse ad ipsam sphęram vt 9. ad 4. Nempe duplum sesqui quartum. Propterea si circa eandem sphęram conus, cylindrusq; æquilateri descripti sint, tria solida, nempe conum, cylindrum, & sphęram fore inter se in continua proportione sesquialtera.

Sphęram ad conum ęquilaterum sibi inscriptum esse vt 32. ad 9.

Sphęram ad inscriptum cylindrum ęquilaterum inefabilem rationē habere, nēpę vt diameter quadrati alicuius ad $\frac{3}{4}$ lateris eiusdem.

Rombum solidum æquilaterum sphærę circumscriptum ad eandem sphæram incomensurabilem esse, nempe vt diameter quadrati alicuius ad latus eiusdem.

Sphærale solidum exagonale circa catetum reuolutum esse ad inscriptam sibi sphæram sesquisextum,

Sphęram autem ad exagonale solidum sibi inscriptum, & circà diagonalem reuolutum, esse sesquitertiam.

Et alia huiusmodi, quę quidem altiùs perscrutanti innumera patebunt. Interim satis superque mihi erit aliqua apposuisse, quæ propria claritate vltrò se se offerunt etiam aspernanti. Horum maxima pars Corollaria esse poterant præcedentium sex Theorematum; attamen illa demonstrabimus ex sola etiam Euclidis doctrina, sine ope illorum quę de sphæralibus præmiseramus; Vt videre est ad Propositiones 30. & 9. seqq. in secundo libro. Cæterum huiùs contemplationis occasionem, mox etiã & scriptionis incitamentum præbuit mihi acutissimus librorum Archimedis scrutator Antonius Nardus Aretinus: huic enim refero, atque ipsius eruditis colloquijs, si quid verè Geometricũ in hac scriptura exciderit mihi.

Si verò pleraque mala erunt, & fortasse omnia, hoc vnum culpandus erit ornatissimus vir, & genere, doctrinà, moribusq; conspicuus Andreas Arrighettus Florentinus, qui post magna in me collata beneficia, editionem mali libri non suasit, sed iussit.

DEFINITIONES:

1 Cuiuſcunque poligoni regularis latera habentis numero paria, *Diagonalem* voco lineam, quæ per oppoſitos figuræ angulos ducitur. *Catetum* verò voco lineam, quæ puncta media laterum oppoſitorum connectit: ſiue earumdem ſemiſſes. Cuiuſcunque verò poligoni regularis latera habentis numero imparia, *catetum* voco lineam, quæ ab vno angulo per centrum figuræ extenditur.

2. Si poligonum quodcunque regulare conuertatur, ſiuè circa diagonalem, ſiue circa catetum, donec ad eum locum redeat vnde cæpit moueri, ſolidum illud quod ex reuolutione circumſcribitur, *ſphærale ſolidum* appellare viſum eſt. Parilaterum quidem ſi poligonum habuerit latera numero paria, Imparilaterum verò, quando poligonum latera numero imparia habebit.

Si cylindrus, ſiue conus, vel etiam coni fruſtum plano per axem ducto ſectum ſit: communem ſecantis plani, & curuæ ſuperficiei ſectionem vocabimus latus cylindri, ſiue coni, ſiue fruſti conici.

Suppoſitiones.

Supponimus. cuiuſcunque priſmatis circà cylindrum æquealtum deſcripti, ſuperficiem maiorem eſſe cylindri ipſius ſuperficie. Cylindricam verò ſuperficiem maiorem eſse ſuperficie priſmatis inſcripti, baſim habentis regularem. exceptis ſemper baſibus. Item pyramidis circa conum deſcriptę ſuperficiem maiorem eſſe ipſius coni ſuperficie; Inſcriptæ verò pyramidis & regularem baſim habentis, ſupponimus ſuperficiem minorem eſſe conica ſuperficie.

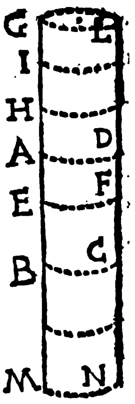
Demonſtrantur hæc apud Archimedem propoſ. 9.10.11.12 lib. 1.de Sph. & Cyl. Si quis verò ea tamquam nota admittere velit, totum libellum noſtrum percurrere poterit.

DE SOLIDIS SPHAERALIBVS LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO PRIMA.

SI Cylindri recti superficies secetur plano oppositis basibus parallelo; erunt segmenta superficiei cylindricæ inter se, vt segmenta axis, siue lateris cylindri, homologe sumpta.

Esto cylindrus rectus ABCD, seceturq; plano E F oppositis basibus parallelo; Dico cylindricam superficiem AEFD, ad cylindricam EBCF, esse vt axis ad axem, siue vt latus AE, ad latus EB.



Producatur vtrimque in infinitum cylindrus, & accipiatur recta E G multiplex ipsius EA, iuxtà quamlibet multiplicitatem, sectaque EG in partes ipsi E A æquales, agantur per puncta diuisionum H, I, G; plana oppositis basibus parallela. Eritque tam multiplex recta GE ipsius EA: quàm multiplex est cylindrica superficies E L, superficiei E D.

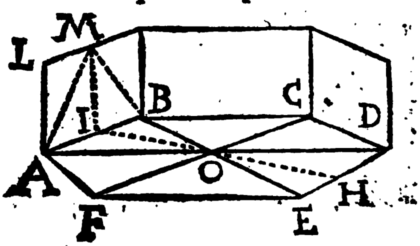
Sumatur etiam recta E M multiplex ipsius EB, iuxta quamlibet multiplicationem; similiq. peracta constructione vt supra; erit tam multiplex recta E M rectæ EB, quàm multiplex est cylindrica superficies EN, superficiei E C,

Manifestum ergo est, quod si recta E G maior fuerit, siue minor, vel æqualis, rectę E M: tunc etiam cylindrica superficies E L, maior erit, siue minor, vel ęqualis superficiei E N: & hoc semper: Propterea erit, vt AE ad E B, ita superficies AEFD, ad superficiem E B C F. Quod erat demonstrandum.

Propositio II.

SI fuerit quodcunque prisma rectum, habens basim poligonam regularem, habensque altitudinem æqualem quartæ parti cateti suę basis; erit perimeter prismatis æqualis poligono suæ basis.

Esto poligonum regulare ABCDEF, super quo concipiatur prisma rectum, habens pro altitudine AL quartam partem cateti IH. Dico perimetrum prismatis, constantem ex figuris rectangulis æqualibus quarũ vna sit L B, æqualem esse poligono suæ basis.



Ducantur enim diagonales AOD, BOE, & erectà perpendiculari I M, iungantur A M, BM;

Cum ergo IH ponatur quadrupla ipsius IM, erit IO dupla ipsius IM; & ideo triangulum AOB duplum trianguli AMB eandem basim habentis; sed etiam rectangulum L B duplum est trianguli AMB; propterea rectangulum LB æquale erit triangulo AOB; & sic de reliquis rectangulis, reliquisque triangulis: Quare totus prismatis perimeter, constans ex figuris rectangulis, æqualis est poligono suæ basis. Quod erat demonstrandũ.

Corollarium.

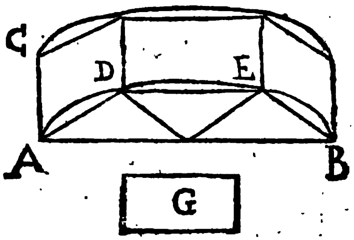
Constat ergo, quod si altitudo prismatis maior, minorue fuerit,

rit, quàm quarta pars cateti suæ basis, erit perimeter prismatis maior, minorue quàm poligonum suæ basis.

Propositio III.

SI fuerit cylindrus rectus, cuius altitudo ęqualis sit quartæ parti diametri suę basis; erit cylindrica superficies ęqualis circulo suæ basis.

Esto cylindrus rectus, cuius basis circulus circa diametrum A B descriptus; altitudo verò A C, ęqualis sit quartę parti diametri A B.



Dico cylindricam superficiem ęqualem esse circulo suæ basis A B.

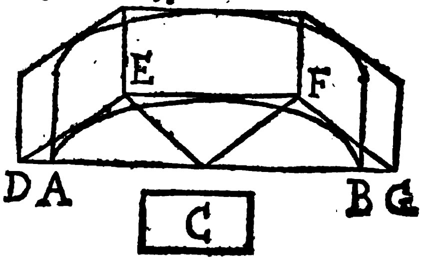
Si enim ęqualis non est; erit circulus vel maior, uel minor cylindricà superficie.

Sit primùm circulus maior quàm cylindri superficies; & supposità differentia G, describatur intrà circulum aliquod poligonum ADEB, quod quidem deficiat à circulo minori defectu, quàm sit spatium G; & ideo erit poligonum inscriptum adhuc maius quàm cylindrica superficies (quomodo fiat hoc constat ex Commentarijs in Archimedem, & ex XII. Euclidis:) Tum supra poligonum ADEB concipiatur prisma rectum eiusdem cum cylindro altitudinis.

Cùm ergò altitudo prismatis eadem sit ac cylindri, nempe quarta pars rectæ A B, erit altitudo prismatis maior quàm quarta pars cateti suę basis poligonæ, & ideo perimeter prismatis maior erit quàm poligonum suę basis, & multo maior, quàm cylindrica superficies (factum enim est poligonum maius cylindrica superficie.) Quod est absurdum; est enim contra pręmissas suppositiones. *ex Corollar. præced.*

Ponatur deinde circulus minor quàm cylinrdica superficies: & supposità differentia G, describatur circa circulum aliquod

poli-



poligonum regulare D E F G, quod excedat circulum spatio minori quàm sit C. (quomodo hoc fiat constat apud Commentarios in Archim. & in XII. Euclidis.) eritq; etiam poligonum minus quàm cylindrica superficies.

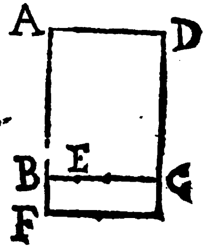
Concipiatur suprà poligonum erigi prisma eiusdem altitudinis cum cylindro; eritque altitudo prismatis quarta pars cateti suæ basis poligonę. (cum prismatis altitudo eadem sit atq; cylindri; cylindri autem altitudo est quarta pars rectæ A B, quę æqualis est cateto poligoni, quod est basis prismatis.)

per ij. huius. Ideo perimeter prismatis æqualis erit poligono suę basis; & propterea minor quàm cylindrica superficies. Quod est contra præmissas suppositiones.

Erit ergò superficies cylindrica æqualis circulo suę basis, Quod erat demonstrandum.

Propositio IV.

CYlindri recti superficies ad circulum suę basis est vt latus cylindri ad quartam partem diametri eiusdem basis.



Esto cylindrus rectus, cuius rectangulum per axem sit ABCD; sumptaq; BE, quæ quarta pars sit ipsius BC; Dico cylindricam superficiem ABCD ad circulum suæ basis esse, vt AB ad BE.

Producatur cylindrus versus F, sectàque B F æquali ipsi B E, erit per præcedentem, cylindrica superficies F C æqualis circulo suæ basis BC.

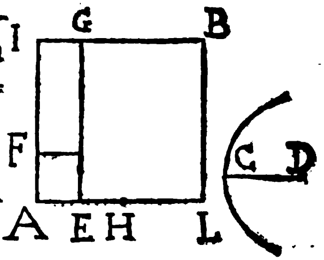
per j. huius. Iam: cylindrica superficies BD, ad cylindricam superficiem

F C est

F C est vt AB ad B F; superficies verò FC ad circulum BC (ob æqualitatem) est vt F B ad B E; Ergo ex æquo erit cylindrica superficies BD ad circulum B C, vt AB ad BE, nempe vt latus cylindri ad * diametri basis eiusdem. Quod erat ostendendum.

Propositio V.

Cylindri recti superficies ad circulum quemlibet, est vt rectangulum per axem cylindri ad quadratum semidiametri ipsius circuli.



Esto cylindrus rectus cuius rectangulum per axem sit AB, & centrum basis H. Ponatur autem circulus quilibet cuius semidiameter CD. Dico cylindricam superficiem ad circulum ex CD, esse vt rectangulum AB ad quadratum CD.

Fiat ex AE (quæ quidem 4. pars sit rectæ AL) quadratum FE, producaturque EG.

Erit ergò cylindrica superficies A B ad circulum suæ basis, vt IA ad AE, hoc est vt IA ad AF, hoc est vt rectangulum I E ad quadratum FE; siue, sumptis quadruplis, vt rectangulum A B ad quadratum ex AH. Circulus verò basis A L ad circulum ex CD, est vt quadratum ex AH ad quadratum ex CD; ergò ex æquo erit cylindrica superficies ad circulum ex CD, vt rectangulum per axem ad quadratum C D. Quod erat demonstrandum.

per præced.

Prim. 6.

2. duodecimi.

Corollarium.

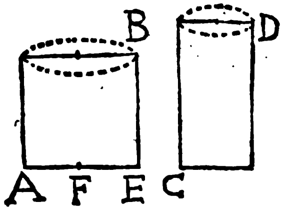
Pro Corollario erit Propositio XIII. lib. 1. Archim. de Sphæra & Cylindro. Constat enim quòd si C D. media fuerit proportionalis inter IA, AL; quadratum ex CD æquale erit rectangulo AB. & propterea, ex demonstratis, cylindricam superficiem AIBL æqualem esse circulo ex CD necesse est.

Prodositio VI.

CYlindrorum superficies inter se sunt vt eorundem rectangula per axem homologè sumpta.

Sint cylindri recti quorum rectangula per axem sint AB, CD. Dico cylindricam superficiem AB, ad cylindrieam CD esse, vt rectangulum AB ad rectangulum CD.

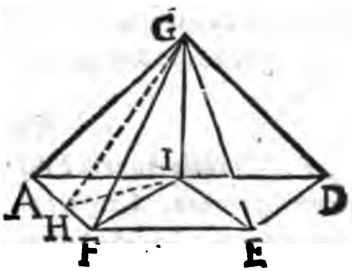
Accipiatur pro circulo quolibet, circulus circa diametrum AE.



per praeced. Erit ergò cylindrica superficies AB ad circulum quemlibet AE, ut rectang. AB ad quadratum AF. Circulus verò ex AF ad cylindricam superficiem CD est vt quadratum ex AF ad rectangulum CD; ergo ex equo cylindrica superficies AB ad cylindricam CD, estvt rectangulum AB ad rectang. CD. Quod erat ostendendum. *per praeced.*

Propositio VII.

SI recta pyramis basim habuerit poligonam regularemque erit basis pyramidis ad reliquam ipsius superficiem, vt semicatetus basis ad catetum superficiei.



Esto pyramis recta, cuius basis poligonum regulare AFED. vertex verò G, & centrum basis sit I. Secto deinde vno latere bifariam in H, iunctisq; GH, IH, erit GH catetus superficiei pyramidis; IH vero semicatetus basis; quandoquidem omnia triangula in superficie sunt æquicruria, & æqualia inter se; quod etiam verum est & in basi.

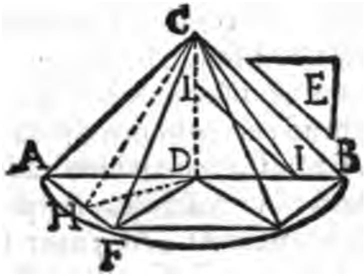
Dico.

Dico basim ad superficiem esse vt I H ad HG.

Triangulum enim A I F, ad triangulum A G F (cum sint in eadem basi) est vt IH, ad H G, ergo etiam ipsorum ęquemultiplicia, nempe basis, & superficies pyramidis, in eadem ratione erunt, nempe vt I H ad HG. Quod erat ostendendum. 15. quinti.

Propositio VIII.

Coni recti basis ad reliquam conicam superficiem, est vt semidiameter basis ad latus coni.



Esto conus rectus, cuius basis AB, vertex verò C, axis CD.

Dico circulum basis, ad reliquam conicam superficiem, esse vt DA, ad AC.

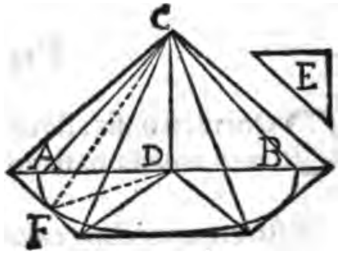
Si enim ita non est; erit circulus AB vel maior, vel min. quā oportet esse, vt ad conicam superficiem sit quemadmodum DA ad AC.

Sit primùm maior; & ponatur tantò maior quantum est spatium E. Inscribatur in circulo poligonum deficiens à circulo, minori defectu quàm spatium E; habebitq; huiusmodi poligonum ad conicam superficiem adhuc maiorem rationem, quàm DA ad AC. Secto deinde vno poligoni latere AF bifariam in H, iungantur DH, CH; & super poligono concipiatur pyramis quæ verticem habeat in C; seceturque DI ęqualis ipsi DH, & ducatur I L paralella ad BC, iungaturq. IC.

Cum itaq. poligonum ad conicam superficiem maiorem habeat rationem quàm DA ad AC; multò maiorem rationem habebit ad superficiem suæ pyramidis, quàm DA ad AC, vel DB ad BC. Sed poligonum ad superficiem pyramidis, per præcedentem, est vt DH ad HC; habebit ergo DH ad HC, siue DI ad IC, multò maiorem rationem quàm DB ad BC, vel quàm DI ad IL. Et propterea IC minor esset quàm IL. absurdum.

C Nam

Nam quadratum I C æquale est duobus quadratis I D, D C; cum quadratum IL æquale sit tantùm duobus ID, DL. Ponatur deinde circulus basis AB minor quàm oportet esse vt ad conicam superficiem sit quemadmodum recta DA ad AC, sitque tantò minor quantum est spatium E. Circumscribatur circulo AB poligonum aliquod excedens circulum minori excessu quàm sit spatium E. Habebitq. poligonum ad conicam superficiē, adhuc minorem rationem quàm DA ad AC; ergò poligonum ad perimetrū suæ pyramidis multò minorem rationem habebit quàm D A ad AC. Sed poligonum ad perimetrum suę pyramidis est vt DF ad FC; propterea DF ad FC, multò minorē rationem habebit quàm DA ad AC; quod est impossibile. Aequales etenim sunt tam DF, DA, inter se, quàm FC, AC, inter se.



per 7. huius.

Erit itaque basis cōni recti àd reliquam superficiem, vt D A ad AC. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc patet quòd curua superficies coni, ęqualis est circulo cuidam, cuius semidiameter med. prop. sit inter C A, AD. nempe, inter latus, & semidiametrum basis coni. Nam sumpta media inter CA, AD. erit circulus qui fit ex media, ad circulum qui fit ex AD. vt CA ad AD. Sed etiam curua coni superficies, ad circulum ex AD. est vt CA ad AD. Ergo æqualis est curua coni superficies, circulo, cuius semidiameter media proportionalis sit inter CA, AD.

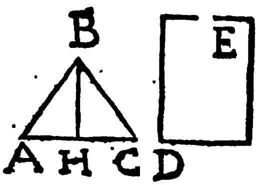
per præced.

Propositio IX.

CViuslibet coni recti superficies, ad superficiem cuiuscunq; cylindri recti dempt's basibus, est vt rectangulum sub latere, & semidiametro basis coni, ad rectangulum per axem cylindri,

Esto

Esto conus ABC, cuius basis AC, axis vero BH; & cylindrus cuius rectangulum per axem sit DE. Dico conicam superficiem ad cylindricam esse, vt rectangulum BAH, ad rectangulum DE.



Nàm conica superficies ad circulum suę basis est vt AB, àd AH, siue vt rectã gulum BAH ad quadratum AH. circulus autem ex AH, ad cylindricam superficiem DE, est vt quadratum AH, ad rectangulum DE. Propterea, ex æquo, erit conica superficies ABC ad cylindricam DE; vt rectangulum BAH ad rectangulum DE. Quod erat ostendendum.

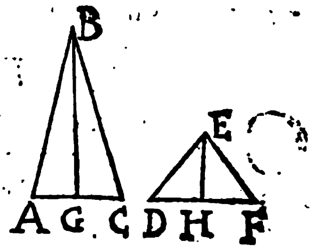
per 8. huius.

per 5. huius.

Propositio X.

Conicæ superficies, demptis basibus, inter se sunt vt rectangula sub lateribus conorum, & sub semidiametris basiũ, comprahensa.

Sint duo coni recti ABC, DEF, quorum axes BG, EH. Dico curuam coni ABC superficiem, ad curuam superficiem coni DEF, esse vt rectangulum BAG, ad rectangulum EDH, quę nimirum sub lateribus conorum, & semidiametris basium compræhenduntur.



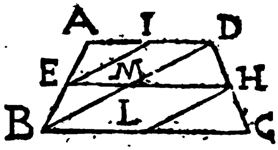
Conica enim superficies ABC, ad circulum AC, est vt recta BA ad AG, siue vt rectangulum BAG; ad quadratum AG. Circulus verò AC ad DF circulum, est vt quadratum AG, ad DH; denique circulus DF ad cònicam superficiem DEF, est vt quadratum DH, ad rectangulum EDH, ergò ex æquo curua coni superficies ABC ad curuam DEF, erit vt rectangulum BAG, ad rectangulum EDH. Quod erat ostendendum.

per 8. huius.

per 8. huius.

Lemma.

Si fuerit ABCD frustum coni recti, abscissum planis ad axem erectis (hoc enim modo semper intelligemus frusta conica) secenturque latera AB, DC bifariam in punctis E, & H. iungaturq; EH. Dico rectam E H componi ex vtràque BL, AI, nempe ex semidiametris basium oppositarum frusti conici.



Iungantur BD, EI, LH; Et quoniam AI, ID. æquales per 2. sexti. *sunt; item AE, EB, æquales: erunt parallelæ EI, BD. & ideo in parallelogrammo æqualia erunt latera ID, EM. Ob eandem causam æqualia sunt BL, MH. Ergo tota EH æqualis erit ipsis ID, BL simul sumptis. Quod erat &c.*

Definitiones.

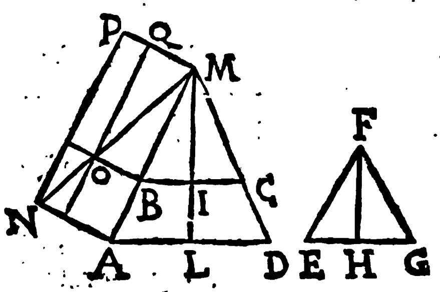
Vocabimus imposterum breuitatis causa lineam EH mediã Aritmeticam frusti conici.

Rectangulum verò sub EH & AB latere frusti conici, dicemus rectangulum proprium frusti conici.

Propositio XI.

CVrua superficies frusti conici, planis ad axem erectis abscissi, ad conicam quamlibet superficiem, est vt rectangulum proprium frusti, ad rectangulum sub latere, & semidiametro basis ipsius coni.

Esto frustum conicũ ABCD abscissum planis ad axem erectis, sitque conus quilibet EFG, cuius axis FH. Dico curuam frusti AC superficiem, ad curuã coni EFG superficiem, esse, vt rectãgulum sub AB, & sub utraque A L, BI contentum, ad rectangulũ FEH,



Com-

Compleatur conus AMD. cuius datum erat frustum, factoque angulo MAN recto, & secta AN æquali ipsi AL. compleatur rectangulum AP. Ducto deinde diametro MN, & facta BO parallela ad AN. erit BO æqualis ipsi BI. compleatur etiam figura BQ.

Iam superficies curua coni AMD ad superficiem curuam coni BMC est vt rectangulum LAM ad rectangulum IBM; nempe vt rectangulum AP ad BQ; & diuidendo, erit curua frusti conici ABCD superficies, ad superficiem coni BMC, vt gnomon AOP, ad rectangulum BQ. hoc est vt rectangulum sub AB, & vtraque AN, BO, siue AL, BI, ad rectangulum IBM. Curua verò superficies coni BMC ad curuam coni EFG, est vt rectangul. IBM ad rect. FEH. ergò ex æquo curua frusti conici ABCD superficies ad curuam coni EFG superficiem est vt rectan. contentum sub AB, & vtraque AL, BI ad rectangulum FEH. per 10. huius.

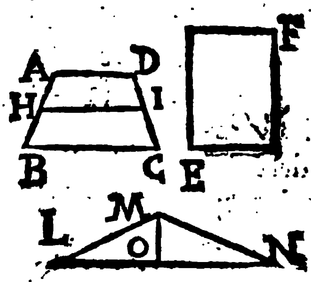
Corollarium.

Patet ergò quod frusti conici ABCD superficies sine basibus ad superficiem coni EFG. est vt rectangulum proprium frusti ad rectangulum FEH. Rectangulum autem proprium frusti comprehenditur sub recta AB, & sub vtraq; AL, BI, siue potiùs sub AB, & media Aritmetica, quam demonstrauimus aqualem vtrisque AL, BI.

Propositio XII.

CViuscunque frusti conici superficies ad superficiem cylindri recti, est vt rectangulum proprium frusti ad rectangulum per axem cylindri.

Esto frustum conicum ABCD, & cylindrus cuius rectangulum per axem sit EF. Secetur AB bifariã in H, & agatur media Aritmetica HI æquidistanter ad BC. Dico conicam frusti superficiem, ad cylindricam EF, esse vt rectangulum sub HI, & AB, ad rectangulum EF.



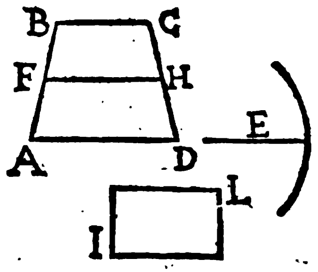
Acci-

Accipiatur conus quilibet LMN, cuius axis MO. Eritq; curua frusti superficies ad conicam curuam LMN, vt rectangulum sub AB, HI, ad rectangulum MLO; sed curua coni LMN ad curuam cylindri EF superficiem, est vt rectangulum MLO, ad rectangulum EF; ergo ex æquo curua frusti conici superficies, ad curuam superficiem cylindri, est vt rectangulum sub AB, & HI, nempe vt rectangulum proprium frusti, ad rectangulum EF per axem cylindri. Quod erat ostendendum.

per præced.

Corollarium.

Curua superficies cuiuscunq; frusti conici ABCD æqualis demonstratur circulo cuidam, cuius quidem circuli semidiameter E media proportionalis sit inter latus AB frusti conici, & inter FH mediā Aritmeticam eiusdem frusti,



Esto quadratum E æquale rectangulo sub BA, FH. sumaturque cylindrus quilibet IL; & erit curua frusti conici superficies ad curuam cylindricam IL, vt rectangulum sub BA, FH ad rectangulum IL; siue vt quadratum E ad rectangulum IL; hoc est vt circulus ex radio E, ad curuam cylindricam IL. Aequales ergò sunt inter se curua superficies frusti conici AC, & circulus ex radio E factus. Quæ quidem Archimedis Propositio est 16. libri primi de Sph. & cyl.

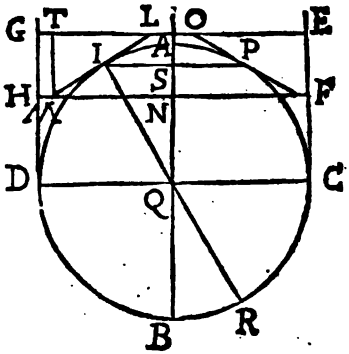
per præced. 5. huius.

Propositio XIII.

Si circulum tetigerit recta quępiam linea æqualitèr vtrimq; producta; & conuertatur circulus circa quemlibet sui axē (dummodo axis tangentem non secet) erit conici frusti superficies, quæ à tangente lineâ describitur, æqualis superficiei cylindri eandem altitudinem cum frusto conico habentis, & circa eandem sphæram describtibilis.

Esto circulus ADBC, quem duæ diametri AB, CD secent ad angu-

angulos rectos. Duas insuper tangentes habeat alteram DG in extremitate diametri CD, alteram verò vbicunque in I, & ęqualitèr producātur hinc inde IL IM; dumodo axem AB productum non secent. Agantur deinde per L, & per M parallelæ ad CD, rectæ LE, MF. tum figura conuertatur circa axem AB. Tangens GH describet cylindricam quandam superficiem cuius rectā gulum per axem erit EFHG: Tangens verò LM designabit frustū conicę superficiei; deniq; circulus ipse sphæram circumscribet.



Dico cylindricam superficiem à linea GH descriptam, & conicam superficiem à linea LM factam æquales esse inter se.

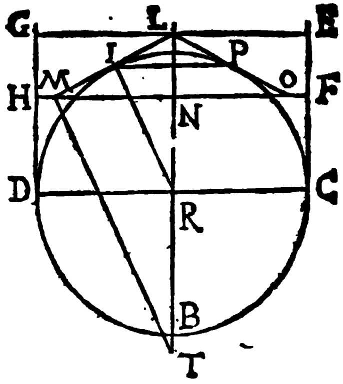
Ducatur IP media Aritmetica conici frusti; & agatur IR per centrum Q: eritq; IR perpendicularis ad LM: Ducatur etiam MT perpendicularis ad EG.

Quoniam duo anguli TMI, TLM vni recto sunt æquales, nempe ipsi LIQ, demptis alternis TLM, LIS, erunt æquales reliqui TML, SIQ. ideoque triangula TML, SIQ, cum rectangula sint, similia erunt; Ergò vt TM ad ML ita SI ad IQ. hoc est (sumptis duplis) PI ad IR: & ideo rectangulum sub TM, IR (quod quidem est rectangulum EFHG.) ęquale erit rectangulo sub ML, IP. quod proprium vocamus frusti conici. Propterea per præcedentem æqualis erit superficies conici frusti, quę à linea ML describitur, superficiei cylindri EFHG, eādem altitudinem cum ipso frusto habentis, & circà eandē sphęram ADBC. describtibilis. Quod &c.

Propositio XIV.

SI circulum tetigerit recta linea æqualitèr vtrinq; producta, & conuertatur circulus circa axem, qui cum tangente conueniat

ueniat in extremitate ipsius tangentis, erit superficies coni, quæ à tangente describitur, æqualis superficiei cylindri, eandem cum cono altitudinem habentis, & circà eandem sphæram describtibilis.



Positis ijsdem vt in præcedentis propositionis constructione; si linea ML incidat in axem BL productũ, sintq; æquales vtrinque IL, IM, tunc describet ipsa ML conicam superficiem, Dico conicam huiusmodi superficiem æqualem esse superficiei cylindri EFHG. eandem altitudinẽ habentis cum ipso cono, & circa eandem sphæram describtibilis.

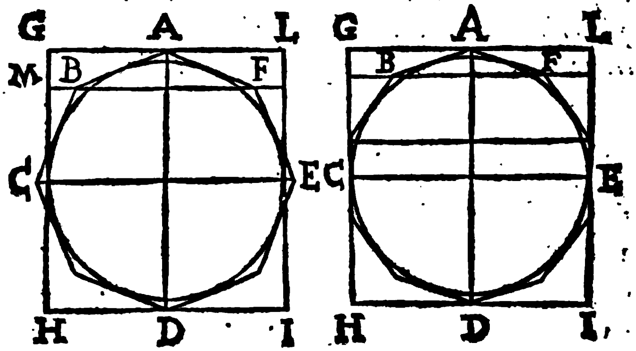
Fiat enim angulus LMT rectus, & cum LM dupla ponatur ipsius LI, erit MT dupla ipsius IR, hoc est æqualis diametro sphæræ, siue ipsi FH. cum autem, per quartã sexti, sit vt ML ad LN, ita TM ad MN. erit rectangulum LMN æquale rectangulo sub TM, LN, hoc est rectangulo sub FH, LN, quod quidem per axem est cylindri EFHG. Aequalis ergo est superficies coni OLM, superficiei cylindri EFHG. Quod &c. 9. huius.

Propositio XV.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero paria, siue à quaternario mensurentur, siue tantum à binario, & conuertatur figura circa diagonalem, erit vniuersa superficies facti sphæralis solidi, æqualis superficiei cylindri circa eandem sphæram describtibilis.

Esto poligonum ABCDEF. parilaterum, siue à quaternario numerus laterum mensuretur, vt in prima figura, siue tantum à binario, vt in secunda; & conuertatur figura circa axem AD, nem-

nempe circa diagonalem poligoni. Dico vniuersã superficiem facti solidi sphæralis ęqualem esse superficiei cilyndri GHIL eandem altitudinem



habentis cum ipso solido, & circa eandem sphæram descriptibilis,

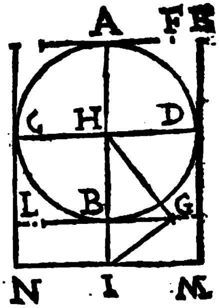
Superficies enim coni BAF, æqualis est superficiei cylindri ML; Superficies autem frusti conici, quæ inter plana BF, CE intercipitur, æqualis est superficiei cylindri inter eadem plana intercepti: & sic de singulis partibus superficierum, quæ solidum sphærale circumsepiunt; Ergò omnes simul superficies ambientes sphærale solidum æquales erunt superficiei cylindri GHIL. Quod erat ostendendum.

per præced.

3. huius.

Lemma.

Si circulum dua diametri AB, CD, ad angulos rectos secuerint, eundemq; circulum dua aquales recta linea AF, BG tetigerint in extremitatibus axis AB. Tum figura circà axem AB conuertatur, describent AF, BG duos circulos aquales, cum ipsa aquales sint. Oportet segmentum cylindri circà eandem sphæram descriptibilis reperire, cuius superficies aqualis sit duobus simul circulis ex AF, BG descriptis.

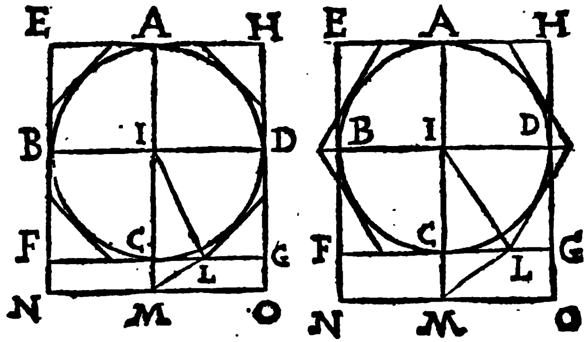


Fiat angulus HGI rectus, eritq; BI altitudo quaesiti cylindri. Nam propter angulum rectum HGI, erit rectangulum HBI aquale qua-

le quadrato BG; & rectangulum ABI hoc est rectangulum LM duplum erit quadrati BG. Propterea superficies cylindri LM dupla erit circuli ex BG descripti, & ideo æqualis ambobus circulis ex BG, AF simul sumptis. Quod &c.

Propositio XVI.

Si circa circulum describatur poligonum habens latera numero paria, siue à quaternario mensurentur, siue tantum à binario, & conuertatur figura circa catetum, erit vniuersa superficies facti sphæralis solidi, æqualis superficiei cylindri circa eandem sphæram descriptibilis, altitudinem verò habentis æqualem lineæ compositæ ex diametro sphæræ, & ex tertia proportionalium, si fiat vt sphæræ semidiameter ad semilatus poligoni, ita semilatus ad aliam.



Esto circulus ABCD, quem secent duæ dia diametri *A* C, BD ad angul. rectos, & circa ipsum sit poligona figura habens latera numero paria, siuè à quaternario mensurentur, vt in prima figura; siue tantùm à binario, vt in secunda: Tum conuertatur figura circa catetum *AC*, hoc est circa lineam connectentem bisectiones laterum oppositorum; Ex reuolutione poligoni solidum sphærale describetur contentum sub circularibus, conicisque superficiebus, & vna cylindrica, vt in prima figura, siue circularibus, & conicis tantùm, vt in secunda. Fiat deinde vt *IC* ad *CL*, ita *CL* ad *CM*, quod facile erit si fiat angulus *ILM* rectus; & per M. agatur planum NO.

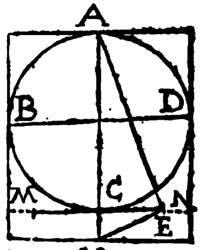
ere-

erectum ad axem. Dico vniuersam superficiem solidi sphæralis æqualem esse superficiei cylindri ENOH.

Hoc autem patet ex præmissis; Nam tota sphæralis solidi superficies, demptis circulis oppositis, æqualis est superficiei cylindricæ inter plana EH, FG comprehensæ. Duo verò circuli oppositi quorum centra A, & C æquales sunt (per præcedens lemma) superficiei cylindricæ inter duo plana FG. NO. contentę. Propterea vniuersa simul sphæralis solidi superficies æqualis erit superficiei cylindri ENOH. circa eandem sphæram descripti, & altitudinem habentis AM, quæ componitur ex diametro sphæræ *AC*, & ex recta C M, quæ quidem tertia proportionalis est ad semidiametrum I*C*, & semilatus, *CL*. Quod &c. *deducitur ex 13. huius.*

Lemma.

Si circulum ABCD duæ diametri AC, BD secent ad angulos rectos; recta autem linea CE eũdem contingat in extremitate axis AC & conuertatur figura circa AC; ipsa CE circulum describet. Oportet segmentum cylindri circa eandem sphæram descripti reperire, cuius superficies æqualis sit circulo ex CE descripto.

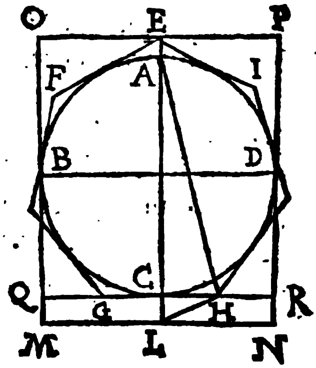


Fiat angulus AEH rectus, ductoque plano per H ad axem erecto. Dico cylindricam superficiem MILN. æquari circulo ex CE. Est enim ob angulum rectum AEH, rectangulum ACH, hoc est rectangulum ML, æquale quadrato CE. Propterea superficies cylindri MILN æqualis erit circulo ex CE. Quod &c. *per 5. huius.*

Propositio XVII.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero imparia, & conuertatur figura circà catetum poligoni: erit vniuersa superficies facti sphæralis solidi æqualis superficiei cylindri circà eandem spheram descriptibilis, altitudine verò habentis æqualem lineæ compositæ ex cateto poligoni, & ex tertia proportionalium, si fiat vt diameter circuli ad semilatus poligoni, ità semilatus ad aliam.

Esto circulus *ABCD*, circa quem sit poligonum EFGHI. habens latera numero imparia; & conuertatur figura circa catetum EC, nempe circa lineā, quæ ab vno angulo E perducitur ad bisectionem lateris oppositi; orieturq; solidum sphærale contentum sub conicis superficiebus, vnicoque circulo.



Facto deinde angulo recto *AHL*, ductoq; per *L* plano MN ad axem erecto. Dico vniuersam solidi superficiem æqualem esse superficiei cylindri OMNP.

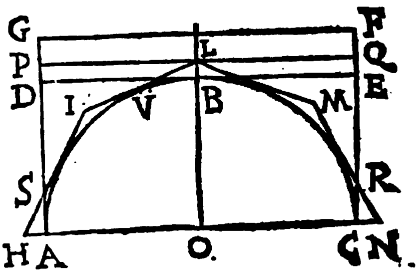
13. huius. Nam superficies solidi sphæralis, dempto circulo ex *C*H. descripto, æquatur superficiei cylindri iuter plana OP, QR contenti: circulus autem ex *C* H factus çqualis est (præcedens lemma) superficiei cylindri inter plana QR, MN contenti: Propterea vniuersa solidi superficies çqualis erit superficiei cylindri OMNP. qui quidem circa eandem spheram cum ipso solido describitur, altitudinem verò habet lineam *EL*, quç componitur ex cateto *EC*, & ex linea *CL*, quæ tertia proportionalis est, si fiat vt *AC* diameter sphæræ, ad *CH* semilatus poligoni, ita *CH* ad aliam. Quod erat &c.

Propositio XVIII.

Hemisphærij superficies çqualis est superficiei curuç cylindri eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Esto hemisphærium *ABC*, & circa ipsum cylindrus eiusdem altitudinis, *ADEC*.

Dico



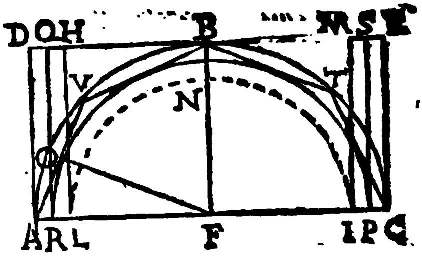
Dico superficiem hemisphe-rij æqualem esse superficiei cylindri *ADEC*.

Si enim non est æqualis, vel maior erit, vel minor. Ponatur primùm sphęrica superficies maior: fiatque vt cylindri superficies ad superficiem hemispherij, quæ maior ponitur, ita recta AD ad AG: intelligaturq; cylindrus productus vsque ad GF. Secetur deinde arcus AB bifariam, iterumq; portiones eius bifariam, & hoc semper, donec poligoni circà semicirculum A B C descripti semilatus VL minus sit quam recta DG. (quod fieri posse constat ex prima Decimi; semilatera enim poligonorum circulo circumscriptorum ex continua arcuum bisectione semper minuuntur plusquam pro medietate, vt ab alijs ostensum est.) Factum ergò sit; & esto poligonum HILMN, conuersàque figura circa axem LO, fiat ex poligono, semisolidum sphærale sub conicis superficiebus compræhensum. Cum itaque recta DG maior sit quã semilatus LV, multo maior eadem erit quàm LB, & propterea planum PQ productum per L intra puncta D & G cadet.

Iam quia superficies cylindri AE ad superficiem hemisphærij est vt A D ad A G, hoc est vt cylindrica superficies A E ad cylindricam A F, erit cylindrica superficies A F æqualis sphæricæ. Propterea, si sphærica superficies æqualis sit cylindricæ AF. maior erit quam cylindrica A Q, hoc est quam conicæ omnes HILMN, multoq; maior quam omnes ASILMRC, quod est absurdum. Est enim contrà principium ab Archimede præmissum. *6. huius* *ex xv. huius.*

Assumpsimus conicam quæ describitur à linea HS maiorem esse quàm illa superficies, quæ describitur à linea AS. quod patet ex 12. huius. Rectangulum enim proprium conicæ superficiei multò maius est quam rectangulum per axem cylindricę, quando quidem sub maioribus lateribus continetur.

Pona-



Ponatur iam sphærica ABC minor quã cylindrica ADEC. Fiat vt superficies cylindrica ADEC ad sphæricam, quæ ponitur minor; ita recta AF ad FL. Fiatque ex FL semidiametro aliud hemisphærium LNI, priori concentricum; & circà ipsum intelligatur cylindrus LHMI: Inscribatur etiam intra semicirculum ABC. figura laterum æqualium, ita vt latera ipsius non tangant semicirculum LNI. (quod fieri posse constat ex Euclide.) Describaturq; alius semicirculus semidiametro FO, qui contingat singula latera factæ figuræ, & conuertatur vniuersa figura circa FB. ita vt fiat semisolidum sphærale AVBTC conicis superficiebus circumseptum; ex semicirculo autem FO fiat aliud hemisphærium, circà quod concipiatur cylindrus RQSP.

Iam sic; superficies cylindri ADEC ad superficiem hemisphęrij est, per constructionem, vt AF ad FL, hoc est vt AC ad LI, hoc est vt rectangulum AE ad rectangulum LM, hoc est vt
6.huius. cylindrica AE ad cylindricam LM. Quare sphęrica superficies ęqualis erit cylindricæ LM, & propterea minor quàm cylindri-
ob 15.huius. ca RS, hoc est quàm omnes conicę AVBTC, absurdum. sphęrica enim superficies ABC maior est quàm omnes conicę AVBTC.

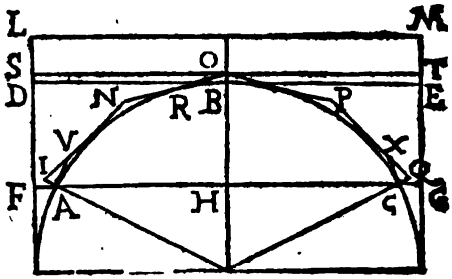
Hemisphęrij ergò superficies ęqualis erit superficiei cylindri eandem ipsi basim, eandemq; altitudinem habentis. Cum demonstratum sit neque maiorem esse, neque minorem. Quod erat &c.

Propositio XIX.

CViuscunque minoris portionis Sphæræ superficies ęqualis est curuæ superficiei cylindri circà integram sphęram descripti.

ſcripti, & eandem altitudinem cum ipſa portione habentis.

Eſto minor ſphærę portio A B C, & portio cylindri FDEG, circa integram ſphęram deſcripti, candẽ tamen altitudinem HB cũ ipſa portione ſphęrica habentis. Dico ſphęricam ſuperficiem A B C æqualem eſſe ſuperficiei cylindri FDEG.



19. quinti.

Si enim non eſt ęqualis, vel maior erit vel minor.

Ponatur primum maior; & ipſi ſphęricę ſuperficiei A B C. conſtruatur ęqualis (vt in pręcedenti) cylindrica FLMG: ſecto deinde arcu AB biſariam, & portiones eius iterum biſariam, & ſic ſemper, circumſcribatur arcui A B C figura multorum laterum I N O P Q, terminata ad diametros, quę ducuntur per puncta A & C. Sitque per prędictam biſectionem arcuum, ſemilatus R O minus quàm recta D L, vt propterea planum S T, ductum per O, cadat intra puncta D, & L. Quemadmodum in pręcedenti &c. Conuertatur deinde figura vniuerſa circà OH, & ex conuerſione figurę I N O P Q naſcetur portio ſolidi ſphęralis ſub conicis ſuperficiebus contenta.

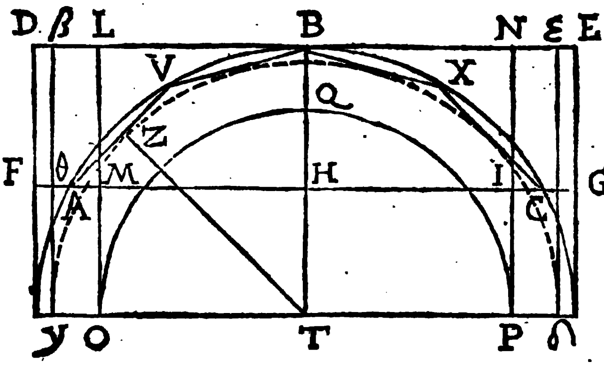
Iam ſic. Quia ſphęrica ſuperficies A B C. ęqualis eſt per cõſtructionem cylindricae F L M G, maior eadem erit quàm cylindrica FSTG, & multò maior quàm omnes conicae INOPQ, multoq; etiam maior quam omnes conicae AVNOPXC. Quod eſt abſurdum, & contrà principia Archimedis.

Aſſumpſimus cylindricam ſuperficiem F S T G maiorem eſſe omnibus conicis INOP Q. Hoc enim patet. Nam ex 13. 14. & 15. huius colligi poteſt, conicas I N O P Q æquales eſſe ſuperficiei cylindricæ contentæ inter planum ST, & planum quod duceretur per puncta I Q.

Aſſumpſimus etiam, ductà tangente A V. conicam ſuperficiem,

ciem, quę fit à linea IV, maiorem esse quàm illa quæ fit linea AV. Quod quidem demonstratur apud Archimedem ad Propositionem 37. de Sphęra & cylindro. Sed & ex nostris deduci potest. Nam rectangulum proprium superficiei, quæ fit à linea IV, maius est quàm rectangulum proprium illius quæ fit à linea AV. Continetur enim sub lineis maioribus.

Ponatur deinde sphærica superficies portionis ABC min. quã cylindrica FDEG.



Fiat vt cylindrica F D E G ad sphæricam superficiem ABC, quæ minor ponitur, ita FH ad HM. & centro T semidiametro autem HM fiat hemisphærium OQP, circa quod intelligatur cylindrus OLNP Intra arcum autem ABC figura inscribatur multorum laterum A V B X C per continuam bisectionem arcuum ita vt latera ipsius non tangant semicirculum OQP, & conuertatur vniuersa figura circa axem BT. Intelligatur autem radio TZ (quæ recta perpendicularis sit ad vnum latus figuræ inscriptæ) describi sphæram, quæ tangat singula figuræ A V B X C latera, & circa huiusmodi sphæram descriptus concipiatur suus cylindrus γβεδ.

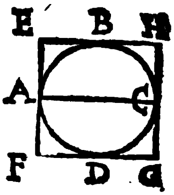
6. huius. Iam sic. cylindrica superficies FDEG per constructionem est ad sphæricam ABC, vt FH ad HM, hoc est vt FG ad MI. hoc *ex 6 huius.* est vt rectangulum FE ad rectangulum MN, hoc est vt eadem cylindrica FE, ad cylindricam MN. Erit ideò sphærica super- *explicatur infra* ficies ABC æqualis cylindricæ M N nempè minor cylindrica θι. hoc est minor omnib. conicis AVBXC; quod est absurdũ.

Assum-

Assumpsimus cylindricam superficiem θε æqualem esse omnib. conicis AVBXC. Quod patet ex demonstratis. Sunt enim tam cylindrus θε, quàm omnes illæ conicæ eiusdem altitudinis HB; & circà eandem sphæram γ δ describuntur. 11. huius.

Constat ergò superficiem ABC ęqualem esse cylindricæ DFGE. cum demonstratum sit neque maiorem esse, neque minorem. Quod &c.

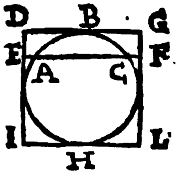
Corollarium I.



Ex prima duarum præmissarum Propositionum patet superficiem integram sphærę, æqualem esse superficiei cylindri sibi circumscripti, & eiusdem cum ipsa sphæra altitudinis.

Cum enim hæmisphærium ABC superficiem habeat æqualem superficiei cylindri AEHC, & item hemisphærium alterum ADC, superficiem habeat æqualem superficiei cylindri AFGC, erit coniunctim tota sphæræ superficies ęqualis superficiei cylindri FEHG; exceptis semper basibus.

Corollarium II.



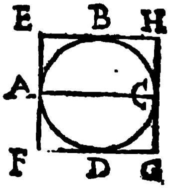
Manifestum etiam est ex vltima propositione, superficiem maioris sphæræ portionis, æqualem esse superficiei cylindri eandem cum portione altitudinem habentis, & circà eandem sphæram describtibilis.

Cum enim integra sphęrę superficies æqualis sit superficiei cylindri IDGL, & demonstratum sit superficiem segmenti minoris ABC ęqualem esse superficiei cylindri EDGF, erit reliqua superficies sphæræ AHC, æqualis reliquæ superficiei EILF. Quod oportebat &c. Corolar. præced.

Propositio XX.

SVperficies sphærę quadrupla est maximi circuli in eadem sphæra descriptibilis.

Sit sphaera ABCD cuius diameter AC; & circà ipsam intelligatur cylindrus eiusdem altitudinis FEHG.



Dico superficiem sphęrae quadruplam esse maximi circuli in ea descriptibilis.

Superficies enim cylindri FEHG sine basibus, est ad circulum suę basis circa FG, siue circa A C descriptum, vt EF ad quar. partem ipsius FG, hoc est vt FG ad quar. partem ipsius FG; hoc est quadrupla. Propterea etiam superficies sphaerae, quae cylindricae est aequalis, quadrûpla erit circuli circa AC descripti, qui in sphaera maximus est. Quod &c.

4. huius.

ex prim. Corolar. praeced.

Aliter.

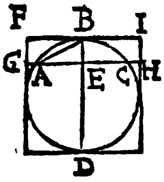
Sphęrica superficies ABCD ęqualis est cylindricę FEHG; cylindrica verò FEHG ad circulum, cuius semidiameter sit AC, est vt rectangulum per axem EG, ad quadratum ex semidiametro AC, nempe ad quadratum EG; & ideò ęqualis: propterea etiam sphęrica superficies ęqualis erit circulo cuius semidiameter sit AC; ergò quadrupla erit circuli cuius diameter sit AC. Quod &c.

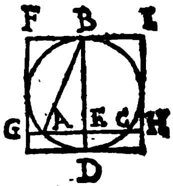
5. huius.

Propositio XXI.

CVIuscunq; portionis sphaerę superficies aequalis est circulo, cuius semidiameter aequalis sit lineae quae ex polo portionis perducitur ad circulum, qui in eiusdem portionis basi est.

Esto sphaerae portio siue minor siue maior ABC. cuius ex polo ducta sit recta AB. Dico superficiem portionis aequalem esse circulo qui fit ex AB tamquam semidiametro.





Cum enim quadratum AB aequale sit rectangulo DBE ob circulum, aequale erit & rectangulo GFIH, quod idem est ac rectangulum DBE. Propterea

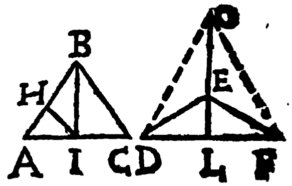
circu-

circulus ex AB aequalis erit superficiei cylindri, cui per axem sit rectang. GFIH, & ideo aequalis etiam superficiei sphaericae portionis ABC. Quod &c. 5. huius

Tria hæc Theoremata, quæ sequuntur, ex Archimede desumpta sunt; quod quidem fecimus ne lector Archimedem adire cogeretur, sed vniuersam hanc doctrinam in hoc libello haberet.

Propositio XXII.

SInt duo coni recti ABC, DEF. Sitq; curuæ coni ABC superficiei ęqualis circulus DF; nempe basis alterius coni DEF; rectæ verò IH, quę ex centro I ducitur perpendiculariter ad latus AB, æqualis sit altitudo EL: Dico conos ABC, DEF, esse ęquales.



Nam altitudo BI ad altitudinem EL est vt BI ad IH (ob ęqualitatem) siue vt BA, ad AI, nempe vt curua superficies ABC ad basim AC; siue vt basis DF ad basim AC. reciprocè. Quare æquales erunt coni ABC, DEF. Quod erat &c. per 4. sexti. 8. huius

Corollarium.

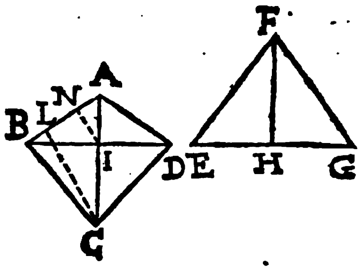
Hinc patet quòd si conus aliquis, puta DOF. basim quidem habeat DF æqualem curuæ superficiei ABC, altitudinem verò OL non ęqualem perpendiculari IH; Ita fore conum ABC ad conũ DOF, vt est IH ad OL. Nam conus DEF ad conum DOF. est vt EL. ad LO. Ergo (sumptis antecedentium æqualibus) conus ABC ad conum DOF, erit vt IH ad OL.

Propositio XXIII.

SI fuerit rombus solidus ABCD, ex duobus conis rectis compositus; Sitq; conus EFG. habens basim EG æqualem superficiei curuæ alterius conorum rombi, puta, BAD; altitudinem verò FH æqualem rectæ CL, quę quidem ex vertice reliqui coni BCD ducitur perpendiculariter in latus AB productũ

 alte-

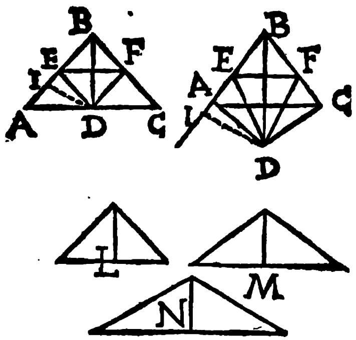
alterius coni BAD. Dico rombū solidum ABCD ęqualem esse cono EFG.



Ducatur IN perpendicularis ad AB. Iam, conus BCD, ad conum BAD, est vt CI ad IA; & cōponendo, rombus ABCD ad conum BAD est vt CA ad AI; siue vt CL, ad IN. Conus verò BAD ad conum EFG est vt IN ad FH: ergo ex æquo rombus ABCD ad conum EFG est vt CL ad FH. Ergo ęqualis. Quod erat, &c.

per Cor. praced.

Propositio XXIV.



SI fuerit conus siue rombus solidus ABCD sectus plano EF ad basim parallelo. Intelligaturque ex integro solido ABCD ablatus rombus solidus EBFD. Dico reliquum solidum excauatū AEDFC quod superest, equale esse cono cuidam M, cuius basis M sit æqualis frusto curuæ superficiei conicæ AEFC inter plana EF, AC, interceptæ, altitudo verò M sit æqualis perpendiculari DI, quæ à vertice ablati rombi D ducitur in latus BA.

Intelligantur tres coni æquealti L, M, N. quorum vnicuique altitudo sit æqualis rectę DI; basis verò coni L sit æqualis curuę superficiei coni EBF. at basis M æqualis sit segmento cónicæ superficiei inter plana EF, AC intercepto: coni tandem N basis æqualis sit vtrisque simul prædictis basibus; siue (quod idem est) integrę superficiei curuę coni ABC.

Manifestum est quod integrum solidum ABCD æquale erit cono N (per alterutram præcedentium duarum Propos.) sed

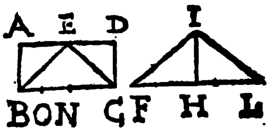
etiam

etiam duo coni *L* & M simul sumpti æquales sunt eidem cono N. ergo integrum solidum ABCD æquale erit duobus conis L & M simul sumptis. Demptis itaque, rombo EB*F*D, & cono L, qui per præcedentem sunt æquales, reliquum solidum excauatum AED*F*C equale erit reliquo cono M. Quod erat &c. *ex 14. Quinti.*

Propositio XXV

SI ex cylindro auferatur conus eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habens, erit reliquum excauatum solidum, quod ex cylindro superest, æquale cono cuidam, cuius basis æqualis sit superficiei curuæ cylindri, altitudo verò æqualis semidiametro basis ipsius cylindri.

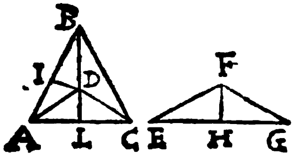
Esto cylindrus, cuius rectangulum per axem sit ABCD. & ex ipso auferatur conus BEC, vt dictum est. Sumatur autem alius conus *F*IL, cuius basis *F* L æqualis sit superficiei curuę cylindri, altitudo æqualis rectę NB. hoc est semidiametro basis cylindri. Dico reliquum ex cylindro solidum, dempto cono BEC, equale esse cono *F*IL.



Secetur BN bifariam in O. Conus ergo *F*IL ad conum BEC, rationem habet compositam ex ratione altitudinum HI ad BA, hoc est NB ad BA, & ex ratione basium, hoc est basis quæ circa *F*L ad basim quæ circa BC, siue quod idem est, superficiei cylindricę ad basim propriam quæ circa BC, hoc est, lineę AB ad BO. Erit ergò conus *F*IL ad conum BEC, vt NB ad BO, nempe duplus: solidum etiam cylindricum excauatum, dempto cono BEC, duplum est eiusdem coni BEC. Propterea solidum cylindricum excauatum æquale erit cono *F*IL, cuius basis æquatur superficiei cylindri, altitudo verò æqualis est semidiametro basis cylindri. Quod &c. *4. huius*

Propositio XXVI.

SI ex cono conus auferatur eandem habens basim altitudinem verò minorem, erit excauatum solidum conicũ, quod relinquitur, æquale cono cuidam, cuius quidem basis æqualis sit curuæ superficiei totius prioris coni, altitudo verò ęqualis perpendiculari, quæ ex vertiçe ablati coni demittitur in latus maioris coni.



Esto conus rectus ABC ex quo auferatur conus ADC, vti dictum est. Ponatur autem conus EFG, habens basin EG, ęqualem curuę superficiei coni ABC; altitudinem verò HF ęqualem rectę DI, quę perpendiculariter à vertice ablati coni cadit in latus AB. Dico solidum conicum excauatum ADCB, dempto cono ADC, ęquale esse cono EFG.

Nam cum triangula BLA, BID, rectangula sint, habeantque angulum communem ABL, similia erunt. Sed conus EFG ad conum ADC rationem habet compositam ex ratione basium, nempe circuli circa EG, siue superficiei curuę coni ABC, ad circulum circa AC; hoc est rectę BA ad AL; siue BD ad DI, & ex ratione altitudinum, nempe HF ad DL, siue DI ad DL. Conus ergo EFG, ad conum ADC erit vt linea BD ad LD. Sed conus ABC ad conum ADC est vt BL ad LD, & diuidendo, etiam solidum excauatum ADCB ad conum ADC est vt linea BD ad DL. Propterea constat solidum excauatum ADCB ęquale esse cono EFG. Quod &c.

8. huius. 4. sexti.

Lemma.

Si ab eadem magnitudine AB duæ magnitudines inæquales auferantur AC, maior, & AD minor fueritq; DC, nempe differẽtia inter ablatas, æqualis differentię siue excessui, quo maius residuum BD superat quandam magnitudinem E. Dico ipsam E mino-

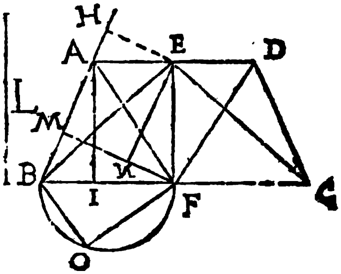
minori residuo CB equalem esse.

Patet hoc. Cum enim maius residuum DB superet magnitudinem E excessu DC; si excessus abijciatur, erit reliqua CB equalis magnitudini E. Propterea magnitudo E equalis est minori residuo. Quod &c.

Propositio XXVII.

SI ex conico frusto conus auferatur, qui pro basi habeat maiorem frusti basim, altitudinem verò eandem cum frusto; Erit reliquum excauatum solidum æquale cono cuidam, qui basim habeat æqualem superficiei curuę frusti, altitudinem verò ęqualem perpendiculari quę ducitur ex vertice ablati coni in latus alterum conici frusti.

Esto conicum frustum ABCD, cuius maior basis sit circulus circa *B*C. Et ex ipso auferatur conus *BEC*, cuius basis sit idem circulus circa *BC*; altitudo verò *F*E eadem cum frusto. Dico reliquũ solidum excauatũ dempto cono *BEC*, ęquale esse cono cuidam, cuius basis aequalis sit curuae superficiei conici frusti *ABCD*. altitudo vero sit linea EH. quae nimirùm ex E vertice ablati coni cadit perpendicularitèr in A*B* latus conici frusti.



Inscribatur alius conus A*F*D habens basim circà AD, & verticem in *F*. Ducaturque AI parallela ad *E* F, eritque tota I*C* aequalis vtrique simul semidiametro basium, nempe ipsi *E*A, ipsiq; *FB*. Fiat deinde circa *FB* semicirculus *F*O*B*, in quo applicetur *B*O aequalis ipsi *F*I, siue ipsi *EA*; eritq; circulus ex semidiametro *F*O differentia inter duos circulos, quorum semidiametri sint, *FB*, *B*O, siue *FB*, & *EA*; nempe differentia in-

ter

ter bases oppositas conici frusti, hoc est inter bases conorum *BEC*, A*F*D, & propterea conus cuius basis si circulus ex *FO* semidiametro, altitudo verò *FE*, differentia erit, siue excessus, quo maior conus *BEC* superat minorem *AFD*.

Ponatur recta quaedam L, cuius quadratum aequale sit rectangulo ex *AB* in I*C*, eritque circulus, qui fit ex L semidiametro, aequalis conicae superficiei frusti *ABCD*. Demittatur denique ex *F* recta *F*M. perpendicularis ad *A*B, & ex *E* recta *E* N parall. ipsi HM, eritque facta figura *E*HMN. parallelogrammum rectangulum.

per Cor. prop. xij. huius.

Iam cum propter parallelas HM, *E* N, sint aequales anguli B*A*D, N*E*D, demptis rectis I*A*D, *FE*D, erunt reliqui B*A*I, N*EF* aequales; & ideò triangula B*A*I, N *EF*, cum rectos habeant angulos ad I & N aequiangula erunt.

5. secundi.

Cum autem rectangulum BIC simul cum quadrato *F*I aequale sit quadrato *F* B, vel quadratis *F* O, OB, demptis aequalibus BO, *F*I. erit reliquum rectangulum B I C quadrato *F* O. aequale.

Concipiatur iam conus *A F D* detrahi ex conico frusto *A* b *C D*, eritq; reliquum excauatum solidum dempto praedicto cono, aequale cono cuidam cuius basis semidiameter sit L, altitudo verò *F*M.

4. huius.

Iam: quoniam ob similitudinem triangulorū, est N*F* ad *FE*, vt BI ad BA, hoc est (sumpta communi altitudine) vt rectangulum BIC ad rectangulum BA in IC, hoc est, sumptis aequalibus, vt quadratum *F*O ad quadratum ex L reciprocè, aequales erunt coni reciproci quorum alter altitudinem habeat FE, & semidiametrum basis FO; alter verò altitudinem habeat F N, & semidiametrum basis L. Sed conus ille qui altitudinem habeat FE, & radium basis F O, est excessus inter ablatas magnitudines, nempe inter conos BEC, AFD; Conus verò ille qui altitudinem habet F*N*, & radium basis L, est excessus quo maius residuum totius magnitudinis (nempe conus cuius altitudo FM, & radius basis L) superat quandam aliam magnitudinem, nempe conum, cuius altitudo *N*M, siue BH, radius autem basis L;

24. huius.

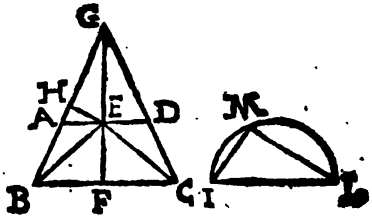
erit

erit itaque hæc magnitudo, per Lemma præmissum, æqualis minori residuo; ergò conus prædictus, cuius altitudo EH, & basis circulus ex L æqualis superficiei conici frusti, æqualis erit minori residuo, hoc est reliquo conici frusti ABCD. dempto cono BEC. Quod erat &c.

Aliter.

Sed conemur idem ostendere minus laboriosa demonstratione; si possibile erit ex difficultate materiæ, & veriùs ex tenuitate ingenij.

Sit conicum frustum ABCD cuius maior basis BC, & ex ipso auferatur conus BEC, altitudinem habens eandem cum frusto, & pro basi, maiorem ipsius frusti basim. Compleatur conus BGC, cuius datum erat frustum, ductaque EH ad angulos rectos ipsi BG,



ponatur IL media proportionalis inter GB, BF, eritq; circulus ex IL semidiametro descriptus, æqualis superficiei coni BGC. fiat circa IL semicirculus IML, in quo aptetur IM media proportionalis inter GA, AE, eritq; circulus ex semidiametro IM factus æqualis superficiei coni AGD; Reliquus circulus ex semidiametro ML factus, æqualis erit superficiei conicæ frusti ABCD. (si enim ab æqualibus æqualia demas reliqua sunt æqualia.) per Cor. 8. huius. per Cor. 8. huius.

Dico reliquum solidum frusti conici ABCD, ablato cono BEC, æquale esse cono cuidam, cuius altitudo sit EH; basis verò æqualis superficiei conicæ ipsius frusti; hoc est circulus ex semidiametro MI. descriptus.

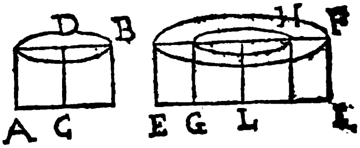
Cum .n. duo circuli ex radijs IM, LM facti æquales sint circulo ex IL descripto, si altitudo vnicuique eadem assumatur EH, erunt duo coni simul (quorum altitudo communis EH, bases verò circuli ex radijs IM, LM) æquales cono, cuius altitudo eadem EH, basis verò circulus ex IL; iste vero conus æqualis est solido conico BECG, dempto cono BEC, ergo duo illi coni æquales erunt solido BECG. Propterea ablatis vtrinque æqualibus conis, nem- 16. huius *pe cono, cuius basis ex IM est, altitudo EH, & cono AGD (sunt enim æquales per 22. huius) remanebunt æqualia, solidum nempe excauatum frusti ABCD, detracto cono BEC, & conus cuius altitudo EH, basis circulus ex LM radio factus, qui quidem æqualis est superficiei conicæ frusti ABCD. Quod &c.*

Definitio.

Si ex cylindro cylindrus auferatur æquealtus, & circa eundẽ axem descriptus, solidum excauatum quod relinquitur, Tubum cylindricum appellabimus.

Propositio XXVIII.

CYlindrus ad tubum cylindricum æquealtum, est vt quadratum semidiametri basis cylindri ad rectangulum basis ipsius tubi cylindrici.



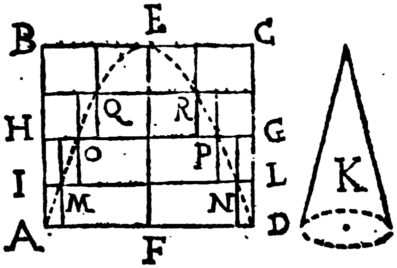
Esto cylindrus AB cuius axis CD. Tubus verò cylindricus EF (dempto nimirum cylindro GH) æquealtus sit cum cylindro AB. Dico cylindrum AB ad tubum EF esse vt quadratum AC semidiametri basis cylindri, ad rectangulum EGI, nempe ad rectangulum basis tubi, hoc est quod fit à differentia EG. & ab aggregato GI semidiametrorum basis ipsius tubi.

Nam cylindrus integer EF ad cylindrum GH, est vt quadratum EL ad LG. quadratum. Et diuidendo, Tubus cylindricus EF ad cylindrum GH est vt rectangulum EGI ad quadratum GL. Sed cylindrus GH ad AB cylindrum est vt quadratum GL ad quadratum BC. Ergo ex æquo erit tubus cylindricus EF ad cylindrum AB vt rectangulum EGI ad quadratum AC. Conuertendo igitur patet quod propositum erat.

Propositio XXIX.

DAtæ figuræ solidæ rotundæ figuram inscribere, alteramque circumscribere ex cylindris æquealtis, ita vt descriptarum differentia minor sit quolibet dato solido.

Esto



Eſto cylindrus ABCD, cuius axis EF: datoq; intra cylindrum ſolido AED circa eundem axẽ EF reuoluto, ſiue hemiſpheriũ, ſiue conus, vel conoides ſit, oportet ipſi ſolido AED duas figuras ex cylindris æquealtis cõpoſitas, alteram quidem inſcribere, alteram verò circumſcribere ita vt circumſcripta ſuperet inſcriptam minori exceſſu quã ſit quodlibet datum ſolidum K.

Secetur biſariam cylindrus AC plano HG ad axem EF erecto; iterumq; cylindrus HD biſariam ſecetur plano IL; & hoc fiat ſemper donec cylindrus aliquis puta AL minor remaneat quàm ſolidum K. Tunc diuiſo toto cylindro AC in cylindros æquealtos ac ipſe AL, oriantur in ſolido AED ſectiones MN, OP. QR. Concipiamus ſuper vnoquoq; circulorum MN, OP, QR, duos cylindros, alterum quidem verſus E, alterum autem verſus partes F conuerſum. Eruntq; omnes ſimul cylindri qui verticem habent verſus F, æquales omnibus ſimul cylindris verticem verſus E habentibus (cum ſinguli ſingulis ęquales ſint) Ergo ſi omnibus cylindris qui verticem habent verſus E, addas cylindrum AL, ſuperabit iam figura circa ſolidum AED deſcripta, figuram eidem inſcriptam, differentià AL; Nempe minori exceſſu quàm ſit ſolidum K. Quod erat &c.

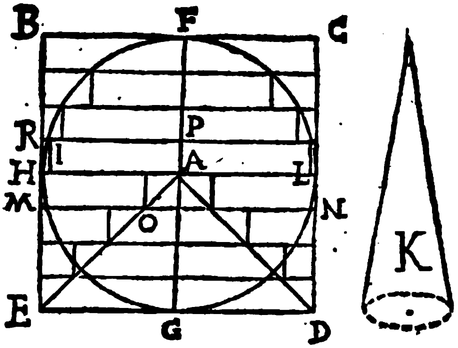
Corollarium.

Hinc patet quòd data figura ſolida, ſiue hemiſpherium ſit, ſiue conus, ſiue conoides &c ipſi duę figurę ſolidę ex cylindris æquealtis compoſitæ altera inſcribi poteſt, altera vero circumſcribi; ità vt differentia inter datam ſolidam figuram, & deſcriptarũ alterutram, minor ſit quolibet dato ſolido K,

Differentia enim inter figuram datam & alteram deſcriptarum minor vtiq; erit quam differentia inter deſcriptas (eſt enim *pars eiusdem) ergo multò minor quàm solidum K.*

Propositio XXX.

SPhæra quadrupla est coni cuiusdam, qui quidem conus basim habeat ęqualem maximo sphæræ circulo, altitudinem vero eiusdem sphærę semidiametro æqualem.



Esto circulus cuius centrum A; quadratum ipsi circumscriptum sit BCDE; iunctisque EA, AD. conuertatur figura circa axem FG ita vt à quadrato fiat cylindrus, à sphæra circulus; à triangulo EAD, conus EAD.

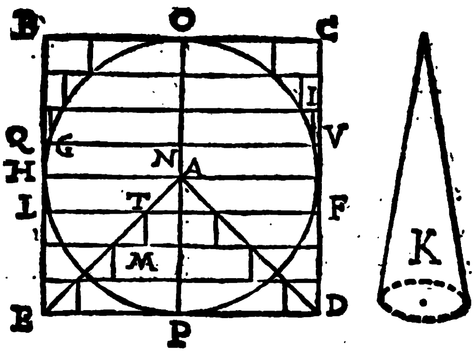
Dico sphæram quadruplam esse coni EAD. Nisi enim quadrupla sit, non erit hæmisphærium ęquale solido, quod describitur à triangulo EHA. circa axem FG. conuerso (cum hoc solidum duplum sit coni EAD.) Erit itaq; hemisphærium vel maius, vel minus solido trianguli EHA.

per 29. huius Esto primùm maius, si potest esse; sitque excessus æqualis solido k. Inscribatur in hemisphærio figura ex cylindris æquealtis constans ita vt ab hemisphærio deficiat minori defectu quā sit solidum K. Et erit figura inscripta adhuc maior quàm solidum trianguli EHA. Secetur etiam axis AG in tot partes æquales in quot sectus erit AF. Ductisq; per puncta sectionum planis ad axem erectis, intelligatur in solido trianguli EHA. inscripta figura ex tubis cylindricis æquealtis constans, quorum vnus sit, cuius sectio est rectangulum HO.

Iam cylindrus IL ad tubum cylindricum HO, est vt quadra-

tum

tum IP ad rectangulum MON. Sed quadratum I P æquale est per 28
rectangulo FPG, nempe ipsi MON (nam F P æqualis est rectæ buius.
BR, siuè ME, siue MO, & reliqua PG reliquę ON) ergo cylindrus IL æqualis est tubo cylindrico HO. Hoc modo procedendo ostenduntur omnes cylindri in hæmispherio æquales omnibus tubis in solido trianguli EHA. Quare figura in hemisphęrio inscripta ex cylindris constans, æqualis erit figuræ in solido trianguli EHA descriptæ ex tubis cylindricis compositę. Sed figura in hemisphærio descripta maior erat integro solido trianguli EHA. Ergò necesse est quod figura inscripta in solido E HA eodem solido maior sit. pars suo toto. Quod esse non potest.



Esto deinde, si fieri potest., hemisphæriũ minus solido trianguli E H A; sitq; defectus æqualis solido k

Circumscribatur ipsi hemisphærio figura solida ex cylindris æquealtis constans, ita vt excessus figuræ super hemisphærium minus sit solido K. Tunc enim circumscripta figura adhuc minor erit solido trianguli EHA. Concipiamus deinde solido trianguli EHA aliquam figuram esse circumscriptam cõstantem ex tubis cylindricis æquealtis ac cylindri ex quibus cõstat figura hæmisphęrio circumscripta. per 29. buius.

Iam primus cylindrus HV figuræ circa hemisphęrium descriptæ, æqualis est primo tubo cylindrico figuræ circumscriptæ solido trianguli EHA; nam & iste tubus, cylindrus est HF.

Secundus cylindrus G I ad secundum tubum LM, est vt quadratum GN ad rectangulum LTF, nempe æqualis (quadratum enim GN, æquale est rectangulo ONP, siue LT F, nam recta O per 18. buius.

N re-

N rectæ BQ, siue L E, siue LT, æqualis est, & reliqua NP reliquæ T F.)

Ergo omnes simul cylindri figuræ circa hemisphærium descriptæ, hoc est eadem figura, æqualis erit omnibus simul tubis cylindricis circa solidum trianguli EHA descriptis, cum singuli singulis æquales sint. Sed figura circa hemisphærium descripta minor erat solido trianguli EHA. Necesse igitur est quòd solidum trianguli EHA maius sit, quam figura sibi circumscripta. pars suo toto. Quod esse non potest.

Hemisphærium igitur neque maius, neque minus erit solido trianguli EHA, sed ipsi æquale, solidum verò trianguli EHA duplum est coni EAD, ergò hemisphæriũ duplum erit coni EAD, Sphæra verò eiusdem quadrupla erit, Quod erat propositum.

Corollarium.

Hinc patet sphæram subsesquialteram esse cylindri, cuius basis æqualis sit maximo sphæræ circulo, altitudo verò diametro sphæræ æqualis.

Nam sph. ostẽditur esse ad conum EAD vt 4, ad vnũ, conus verò EAD ad cylindrũ EBCD est vt vnũ ad 6. ergo ex æquo sphæra ad cylindrum EBCD erit vt 4. ad 6. Nempe subsesquialtera.

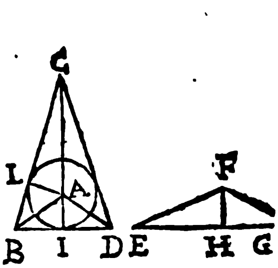
DE SOLIDIS SPHAERALIBVS

LIBER SECVNDVS.

Propositio Prima.

CONVS quilibet circa ſphæram deſcriptus, æqualis eſt cono cuidam, qui baſim habeat æqualem vniuerſæ ſuperficiei circumſcripti coni accepta etiam baſi, altitudinem verò æqualem radio ſphæræ;

Eſto circa ſphæram, cuius centrum A, deſcriptus conus BCD, (qui videlicet ſphæram tangat & lateribus, & baſi) Ponaturq; alius conus EFG, qui baſim habeat EG æqualem tum curuæ ſuperficiei, tum etiam baſi coni BCD, altitudinem verò HF habeat æqualem radio ſphęræ AL.



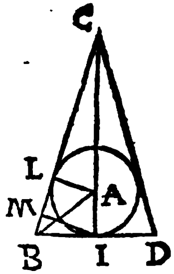
Dico

Dico conos BCD, EFG æquales esse.

Solidum enim conicum excauatum quod fit ex reuolutione trianguli CBA circa axem IC, æquale est cono cuidam, qui basim habeat æqualem curuæ superficiei conicæ BCD, altitudinē verò æqualem perpendiculari AL, nempe radio sphæræ: Talis ergò conus vnà cum cono BAD (cum habeant eandem altitudinem) æquales erunt cono EFG; Quandoquidem conus EFG basim habet vtriq; simul basi æqualem, altitudinem verò alterutræ æqualem. Propterea & conus BCD, qui duobus prædictis conis æquatur, æqualis erit cono EFG. Quod &c.

26. p. partis.

Aliter.



Ducatur IM æquidistans ipsi AL. & quoniam angulus CBI diuiditur bifariam à linea BA, erit vt CB ad BI, ita CA ad AI.

per 3. sexti.

Superficies ergò coni BCD sine basi, ad circulum suæ basis est vt CB ad BI, nempe vt CA ad AI, & componendo, & per conuersionem rationis, erit vniuersa superficies coni BCD cum basi, ad superficiem eiusdem coni sine basi, vt IC ad CA, hoc est vt IM ad AL.

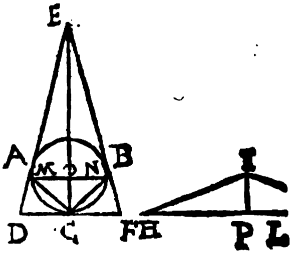
8. primi partis.

Propterea si reciprocè adhibeantur bases, & altitudines, erit conus cuius altitudo AL, basis verò æqualis vniuersę superficiei coni BCD cum basi, æqualis cono cuius altitudo sit IM, basis verò curua tantum superficies conica BCD, hoc est cono BCD (æquales enim sunt, conus cuius altitudo IM, basis verò conica superficies BCD; & conus BCD. per 22. huius.)

Propositio II.

Conus quilibet circa sphęram descriptus, est ad sphæram, vt coni ipsius vniuersa superficies accepta etiam basi, ad superficiem sphęrę.

Esto circa sphæram ABC descriptus conus DEF; Dico huiusmoiusmodi conum esse ad sphæram, vt coni superficies vna cum basi, ad superficiem sphęrę.



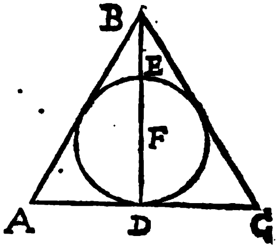
Ponatur conus HIL vt in præcedenti, cuius basis ęqualis sit integro perimetro coni DEF vna cum basi, altitudo verò PI ęqualis radio sphęrę OC, eritq; conus HIL ęqualis cono DEF. per præced.

Agatur per centrum O planum MN ad axem erectum, & in hemisphęrio MCN concipiatur conus MCN.

Iam conus DEF ad conum HIL (ob ęqualitatem) est vt totus perimeter coni DEFD ad basim HL, conus autem HIL ad conum MCN, (cum eandem habeant altitudinē) est vt basis HL ad basim MN, conus denique MCN ad sphęrā, est vt basis MN ad superficiem sphęrę (nempe in ratione sub quadrupla) quare ex ęquo erit conus DEF ad sphęram, vt vniuersus perimeter coni DEF ad superficiem sphęrę. Quod &c. 20. et 30 p. partis

Propositio III.

Conus quilibet circa sphęram descriptus, est ad sphęram, vt rectangulum contentum sub latere & semibasi coni tamquàm vna linea, & sub semibasi, ad quadratū diametri sphęrę.



Esto circa sphęram, cuius diameter DE, descriptus conus quilibet ABC. Dico conum ad sphęram esse vt rectangulum sub BAD tamquàm vnà linea, & sub AD compraehensum, ad quadra. DE.

Curua enim superficies coni ABC ad circulum suae basis est vt BA ad AD, & componendo erit totus coni perimeter ad eundem circulum basis vt BA, AD simul ad AD; hoc 8. p. parti

G est vt

est vt rectangulum sub linea BAD, & sub AD ad quadratum AD; circulus verò basis coni, ad circulum circa DE, est vt quadratum AD ad quadratum DF, circulus denique circa DE ad sphaerae superficiem, est vt quadratum DF ad quadratum DE, ergò ex aequo vniuersus coni ABCA perimeter ad superficiem sphaerae (hoc est conus ipse ad sphaeram per praecedentem) erit vt rectangulum sub recta linea BAD, & sub AD, ad quadratum DE. Quod &c.

Corollarium.

Pro Corollario potest ostendi conum æquilaterum ad inscriptā sphæram, esse vt 9. ad 4. Posito enim latere AC. 6. erit rectangulum sub latere cum semibasi, & semibasi 27. quadratum verò BD 27. & quadratum DE 12. ergo conus ad sphæram erit vt 27 ad 12. siue vt 9. ad 4.

Scholium.

Possent hic Theoremata non pauca proponi circa solidorum circumscriptionem, & inscriptionem: qualia sunt.

Si circa sphęram prisma concipiatur, quod singulis suis parallelogrammis sphæram contingat; sitque eiusdem altitudinis, Erit prisma ad sphæram, vt perimeter basis prismatis ad duas tertias periphærię maximi circuli sphæræ.

Si verò non eiusdem sit altitudinis; ratio prismatis ad sphęram componetur ex prædicta, & ex ratione altitudinum; altitudo autem sphęræ diameter est.

Si cylindro circumscribatur prisma, quod singulis suis parallelogrammis superficiem cylindri contingat; sintq; eiusdem altitudinis. Erit prisma ad cylindrum, vt basis ad basim: nempe, vt perimeter basis prismatis, ad periphæriam basis cylindri: idem verum est de cono, & pyramidibus circumscriptis.

Si verò prisma, & cylindrus non eiusdem altitudinis fuerint; ratio componetur ex ratione perimetrì ad periphęriam, & altitudinis ad altitudinem.

Si intra cylindrum inscribatur prisma eiusdem altitudinis, habens basim poligonam, regularem, & parilateram; Erit cylindrus ad prisma, vt periphęria basis cylindri ad perimetrum poli-

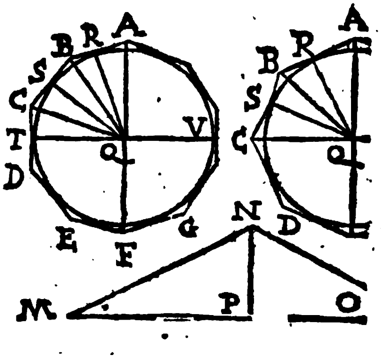
goni

goni regularis in eodem circulo descripti, quod habeat latera multitudine subdupla poligoni basis prismatis. Quae uera sunt etiam de cono, & pyramidibus inscriptis.

Quando uerò basis prismatis imparilatera fuerit, siue regularis, siue irregularis: Erit cylindrus ad inscriptum prisma, ut peripheria basis cylindri ad omnes sinus arcuum à lateribus basis prismatis subtensorum. Dummodo nullus arcus semicirculo maior sit. Quando uerò arcus aliquis semicirculo maior sit; & quando figurarum altitudo non sit eadem, & alia huiusmodi, omnia demonstrari possunt facili quidem negotio; sed institutum nostrum est non omnem solidorum inscriptionem, & circumscriptionem prosequi; sed illam, tantum, quę circa sphęram est, uel intra ipsam; Propterea ad inceptum reuertamur.

Propositio IV.

SI circà circulum describatur poligonum habens latera numero paria, siuę à quaternario, siue à binario mensurata, & reuoluatur figura circa diagonalem, erit factum sphaerale solidum aequale cono cuidam qui basim habeat aequalem superficiei solidi, altitudinem verò semidiametro sphaerae aequalē.



Hoc autem quandò numerus laterum mensuratur à quaternario demonstratum fuit ab Archimede Prop. 29. siue mauis 25. lib. p. de sph. & cylin. Quando verò laterū numerus etiam à binario tantum mensuratur, ostendemus sic, eritque demonstratio (exceptis qua de vltimo solido cylindrico dicentur) eadem cum ea quam affert Archimedes.

Esto poligonum ABCDEFG habens latera à binario tantum mensurata, vt in prima figura. Ergò semipoligonum AB

CDEF habebit latera numero imparia, latusque vnum tanget circulum in puncto T, atq; ideo cylindricam superficiem in cõuersione describet. Intelligatur conus MNO, cuius basis sit circulus MO æqualis vniuersæ superficiei solidi sphæralis, altitudo verò PN, æqualis sit radio sphæræ. Dico sphærale solidum æquale esse cono MNO.

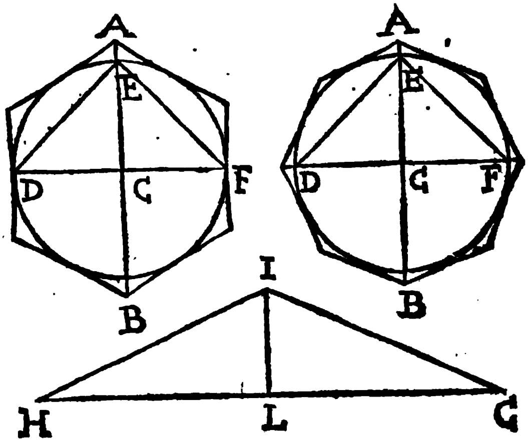
Rombus enim solidus factus in conuersione figuræ à triangu
23.p.partis. lo ABQ, æqualis est cono cuidam cuius basis æqualis sit conicæ superficiei descriptæ à linea AB, altitudo verò sit radius QR. Solidum autem excauatum factum in conuersione à triangulo
24.p.partis. BCQ, æquatur cono cuidam cuius basis æqualis sit conicæ superficiei descriptæ à linea BC altitudo verò æqualis radio sphæræ QS. & sic semper procedatur. Vltimum denique solidum
25.p.partis. cylindricum excauatum descriptum à triangulo CTQ, æquale est cono cuidam, cuius basis æqualis sit superficiei cylindricæ à linea CT factæ, altitudo verò æqualis sit semidiametro cylindri, QT; Et sic de solidis circa alterum hemisphærium TFV descriptis. Ergo vniuersum sphærale solidum, æquale erit omnibus prædictis conis simul sumptis: iisdem autem omnibus prædictis conis æqualis est conus MNO (cum basim habeat omnibus simul illorum basibus æqualem, nempe superficiei solidi sphæralis, altitudinem verò vnicuique illorum æqualem, nempe radio sphæræ.) Propterea prædictum solidum sphærale æquale erit cono MNO. Quod &c.

Propositio V.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa diagonalem: habebit factum sphærale solidum ad sphæram suam eam rationem, quam vniuersa solidi sphaeralis superficies habet ad superficiem sphaerae.

Manente praecedentis Propositionis constructione; Esto sphaerale solidum cuius diagonalis, atque axis sit AB, centrum autem sphaerae sit C. Dico sphaerale solidum ad inscriptam

sibi



sibi sphaeram esse, vt superficies solidi ad superficiem sphaerae.

Inscribatur .n. in hemisphaerio conus DEF,& ponatur conus GIH cuius basis G H aequalis sit vniuersae superficiei solidi sphaeralis vt in praecedenti altitudo verò L I aequalis radio sphaerae,& erit per praecedentem sphaerale solidum aequale cono G I H.

Propter aequalitatem ergò, erit sphaerale solidum ad conũ GIH vt superficies vniuersa sphaeralis solidi ad basim coni G I H; conus autem GIH ad conum DEF (ob aequalem altitudinẽ) est vt basis circa GH ad basim circa DF; conus denique D E F ad sphaeram, est vt basis circa DF ad superficiem sphaerae (nẽpe in ratione subquadrupla.) Propterea erit ex aequo sphaerale solidum ad inscriptam sibi sphaeram vt vniuersa sphaeralis solidi superficies ad superficiem sphaerae. Quod &c.

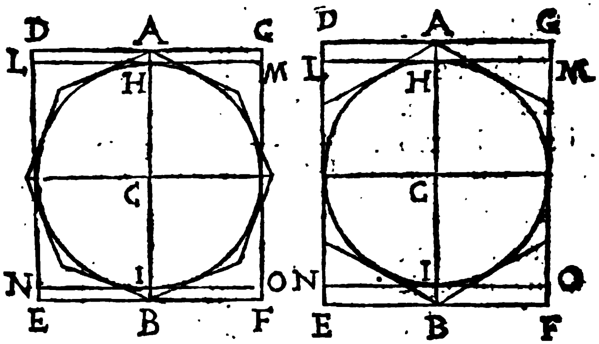
Propositio VI.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa diagonalem, erit factum sphaerale solidum ad inscriptam sibi sphaeram vt axis solidi ad axem sphaerae.

Manente praecedentium constructione; esto sphaerale solidum, cuius diagonalis, atque axis sit AB, centrum verò sphaerae sit C, & diameter HI.

Dico

Dico sphę rale solidũ ad inscriptã sibi sphęram esse vt AB ad HI. Circumscribatur n: circa sphæram cylindrus NLMO. aganturque per extremitates axis A, B, plana ad axem erecta DG, EF. per extremitates verò diametri HI. plana LM, NO.



Erit, per præcedentem, sphærale solidum ad sphæram vt superficies sphæralis solidi ad superficiem sphæræ; hoc est, (sumptis æqualibus) vt superficies cylindri DEFG, ad superficiem cylindri LNOM, hoc est vt AB ad HI. Quare sphærale solidum ad sphæram est vt axis solidi ad diametrum sphæræ. Quod &c.

per 15. p. partis. 18. p. partis. prima p. partis.

Propositio VII.

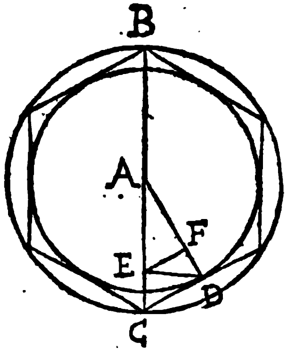
SI intra circulum describatur poligonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa diagonalem, erit sphæra ad inscriptum sibi sphærale solidum, vt quadratum diametri sphæræ, ad quadratum cateti poligoni.

Sit.n circ. cuius cent. A, & diamet. BC poligonum regulare, cuius diagonalis sit linea BC, & conuertatur figura circa BC. Dico sphæram circumscriptam ad inclusum sphærale solidum, esse vt quadratum AC, ad quadratum cateti poligoni AD. Ducatur enim DE ex D. perpendicularis ad BC, & EF perpendicularis ad AD, eruntq; in continua proportione quatuor rectę AC, AD, AE, AF. Concipiatur etiam radio AD aliam sphæram descri-

4. sexti.

bi,

bi, quæ singulas conicas superficies solidi sphæralis continget; necnon cylindricam, si quam huiusmodi sphærale solidum habebit.



Erit itaque sphæra maior ad sphærã minorem, vt CA ad AF; minor verò sphæra ad sphęrale solidum, quod sibi circumscribitur (per præcedentem) est vt DA ad AC, hoc est, vt AF ad AE; Propterea ex æquo erit circumscripta sphæra maior, ad inscriptum solidum sphærale, vt CA ad AE; nempe vt quadratum CA ad quadratum AD. Quod erat &c. *vltima duodecimi.*

Propositio VIII.

SI circa sphærale solidum, natum ex reuolutione poligoni circà diagonalem reuoluti, sphæra circumscribatur, & altera inscribatur. Habebit circumscripta sphæra ad solidum, duplicatam rationem illius, quam habet solidum ad inscriptam sphæram.

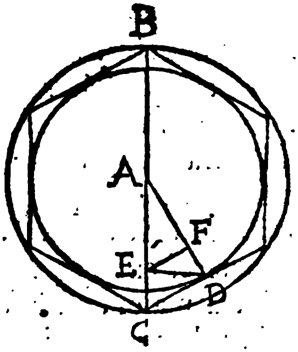
Repetita figura Propositionis præcedentis; cum sit circumscripta sphęra ad solidum vt quadratum CA ad quadratum AD; solidum verò ad inscriptam sibi minorem sphæram, vt CA ad AD; patet rationem circumscriptæ sphæræ ad solidum sphærale duplicatam esse illius quam solidum habet ad inscriptam sphæram. Quod &c. *6. huius.*

Propositio IX.

SI circa sphærale solidum, natum ex reuolutione poligoni circà diagonalem reuoluti, sphęra circumscribatur, & altera inscribatur: Erit superficies solidi sphęralis media proportionalis inter superficies duarum sphaerarum.

Manan-

Manente figura, & constructione praecedentium propositionum. Dico tres superficies, nempe maioris sphaerae, solidi sphaeralis, minorisq; inscriptae sphaerae, esse inter se in continua proportione.

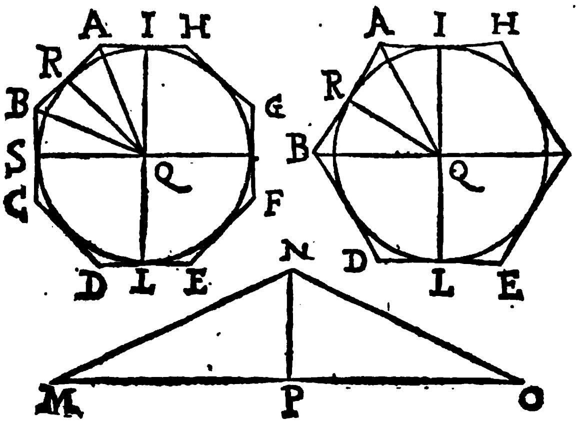


Superficies enim circumscriptae sphę rae est ad superficiem inscriptae, vt quadratum CA ad quadratum AD; superficies autem solidi ad superficiem eiusdē inscriptae sphaerae, est vt recta CA ad rectam AD: Ergò tres superficies praedictae sunt in continua proportione; & quidem perimeter sphaeralis solidi medius proportionalis est inter superficies duarum sphaerarum. Quod &c.

Ostenditur in 6. huius.

Propositio X.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero paria, siue à quaternario, siue tantum à binario mensurata; & cōuertatur figura circa catetum; Erit factum sphaerale solidum aequale cono cuidam, cuius quidem basis aequalis sit vniuersae superficiei solidi sphaeralis, altitudo verò aequalis radio sphęrae.



Esto circa circulum figura poligona aequilatera ABCDEH. habens la

tera

tera numero paria, & conuertatur figura circa catetum IL, orieturq; solidum contentum sub conicis, circularibus, & vna cylindrica superficie, quando numerus laterum à quaternario mẽsuratur; quandò verò à binario tantum, tunc erit solidum sphærale sub conicis, & circularibus tantum superficiebus compræhensum. Dico vtrumq; sphærale solidum æquale esse cono cuidam MNO, qui basim habeat æqualem vniuersæ solidi sphæralis superficiei, altitudinem verò PN æqualem radio sphæræ.

Hoc ostendetur similiter vt propositione 4. factum est. Nam conus qui fit à triangulo IAQ in conuersione circa axem IL, æquatur cono qui basim habeat ęqualem circulo qui fit ex radio IA, altitudinem verò aequalem radio sphæræ QI, quia idem prorsus est. Solidum autem excauatum, quod fit à triangulo ABQ, æquale probatur cono cuidam, cuius basis æqualis sit conicæ superficiei factæ à linea AB, altitudo verò sit QR. radius sphæræ. Vltimum denique cylindricum solidum excauatum, factum à triangulo BQS (quando poligoni latera à quaternario mensurantur, aliàs cylindricum solidum nullum est) æquatur cono cuius basis ęqualis sit cylindricę superficiei factæ à linea BS. altitudo verò sit QS; & sic de altero hemisphęrio. Propterea vniuersum sphærale solidum ęquale erit omnibus praedictis conis simul sumptis; & ideo aequale erit etiam cono MNO, qui omnibus illis simul sumptis aequiualet; (quandoquidem basim habet omnibus simul illorum basibus aequalem ex suppositione; altitudinem verò vnicuique illorum aequalem, nempe radium sphaerae.) Quod &c.

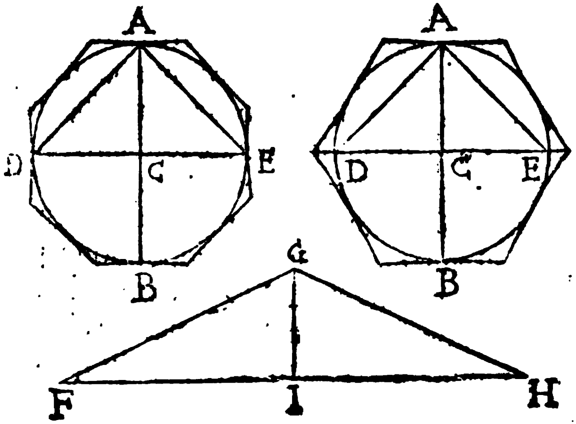
24. p. pri tis.

25. p. pri tis.

Propositio XI.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa catetum, habebit factum sphaerale solidum ad inscriptam sibi sphaeram eam rationem, quam vniuersa solidi sphaeralis superficies habet ad superficiem sphaerae.

Manente praecedentis propositionis cõstructione, esto sphaerale solidũ cuius catetus, & axis sit AB; centrum autem sphaerae sit C. Dico sphaerale solidum ad inscriptam sibi sphaeram esse vt vniuersa ipsius solidi superficies ad superficiem sphaerae.



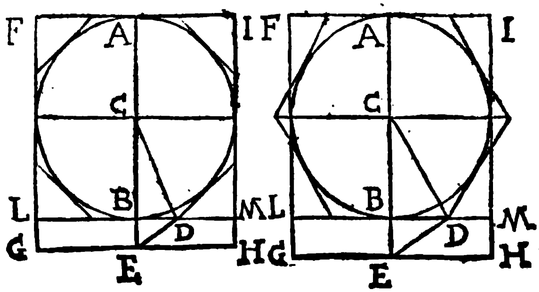
Concipiatur enim in hemisphaerio conus DAE, & intelligatur alius conus FGH, cuius basis FH aequalis sit vniuersae superficiei solidi sphaeralis, altitudo verò IG equalis radio sphaerae; & erit per praecedentem sphaerale solidum aequale cono FGH.

Propter aequalitatem ergo, erit sphaerale solidum ad conũ FGH, vt superficies vniuersa sphæralis solidi, ad basim coni FGH, conus autem FGH, ad conum DAE (ob æqualem altitudinem) est vt basis circa FH, ad basim circa DE; denique conus DAE, ad sphæram, est vt basis circa DE ad superficiem sphærae (nẽpe in ratione subquadrupla:) Propterea erit ex ęquo sphærale solidum ad inscriptam sibi sphæram, vt vniuersa sphæralis solidi superficies ad superficiem sphæræ. Quod &c.

Propositio XII.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa catetum; Habebit factum sphærale solidum ad inscriptam sibi sphæram, eam rationem, quam habet composita recta linea ex diametro sphæræ, & ex tertia proportionali (si fiat vt semidiameter sphæræ ad semi-

semilatus poligoni, ita semilatus ad aliam,) ad diametrum sphęræ.



Manente præcedentium propositionum cōstructione, esto sphęrale solidū cuius catetus, & axis sit AB; centrum autem sphærę sit C. Fiat angulus CDE rectus, eritq; BE tertia proportionalis ad semidiametrum CB, & semilatus poligoni BD. Dico sphærale solidum ad inscriptā sibi sphærā esse vt EA ad AB; nempe vt composita ex diametro sphæræ AB, & tertia proportionali BE, ad diametrum sphæræ AB. Concipiatur circa sphæram descriptus cylindrus FLMI, & per puncta A; B; E. producantur plana FI, LM, GH, ad axem erecta.

Erit ergo, per præcedentem, sphærale solidum ad inscriptā sibi sphæram, vt superficies solidi ad superficiem sphæræ; hoc est, sumptis æqualibus, vt superficies cylindri FGHL ad superficiem cylindri FLMI; hoc est vt linea AE ad AB. Quod &c. 16. pri. partis. 18. p. partis.

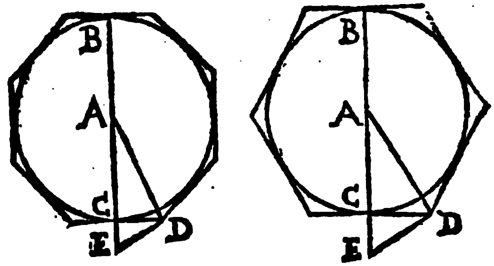
Propositio XIII.

SI circà circulum describatur poligonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa catetum; erit factū sphęrale solidum ad suam sphæram, vt duo quadrata, nempe vt quadratum diagonalis, & quadratum cateti simul, ad duplum quadrati eiusdem cateti.

Esto circa circulum, cuius centrum A, descriptum poligonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa catetum BC: factoq; angulo recto ADE, erit (per præcedentem)

 soli-

solidum sphærale ad suam sphæram vt EB ad BC. Dico insuper solidũ sphærale ad suam sphæram esse, vt quadratum ex AD, simul cum quadrato ex AC, ad duplum quadrati ex AC.



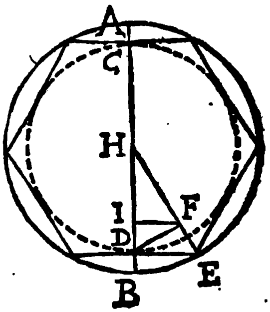
Nam EA ad AC est vt quadratum DA ad quadratum AC; & componendo, erunt EA, & AC simul, hoc est tota EB, ad AC, vt duo quadrata DA, AC simul ad quadratum AC; sumptisque consequentium duplis, erit EB ad BC (hoc est solidum sphærale ad sphæram) vt duo quadrata DA, AC simul, ad duplum quadrati ex AC. Quod &c.

per præced.

Propositio XIV.

SI intrà circulum describatur poligonum habens latera numero paria, & connertatur figura circà catetum; erit sphæra ad inscriptum sibi solidum, vt integra diameter sphęrę, ad secundam simul, & quartam proportionalium, in ratione semidiametri sphaerae ad semicatetum poligoni.

Sit in circulo cuius diameter AB poligonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa catetũ CD: Ducanturque perpendiculares DF ad rectã HE, & FI ad HD; & erunt quatuor lineae EH, HD, HF, HI, in continua ratione semidiametri HE ad semicatetum HD. Dico sphaerã ad inscriptum solidum esse, vt dupla HE ad vtramq;



tramq; simul DH, HI. Vel vt integra diameter sphæræ ad CI.

Intelligatur alia sphæra intra solidum inscripta. Erit ergo exterior sphæra ad interiorem, vt EH ad HI, siue vt dupla EH ad duplam HI; interior verò sphæra ad solidum sphærale est, vt duo quadrata ex HD, ad duo quadrata HD, HE, hoc est vt duo quadrata ex HI, ad duo quadrata ex HI, HF, hoc est (vt infrà ostendemus) vt dupla HI ad HI, HD; Propterea erit ex æquo sphæra exterior ad inscriptum sibi sphærale solidum, vt dupla HE, hoc est integra diameter sphæræ, ad HI, & HD simul; quæ quidem sunt secunda, & quarta in ratione semidiam. sphæræ ad semicatetum poligoni. Quod &c. *Vltima duodecimi.* *per præc.*

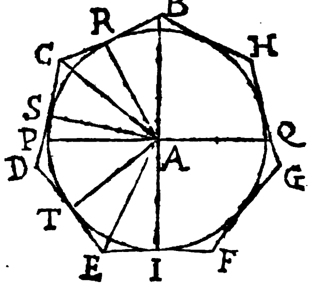
Quod autem assumptum est ostendemus. Dico vt duo quadrata ex HI ad duo quadrata simul HI, HF. ita esse duplam HI ad HI, HD.

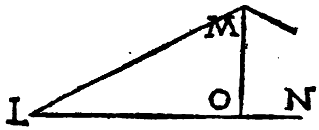
Nam ob angulum rectum HFD, erit vt quadratum FH ad quadratum HI, ita recta DH ad HI, & componendo, sumptisque consequentium duplis, erit vt quadrata FH, HI, ad duo quadrata ex HI, ita duæ rectæ DH, HI, ad duplam HI. Conuertendo ergò, erunt duo quadrata ex HI, ad duo quadrata HI, HF. vt dupla HI, ad HI, HD simul. Quod erat &c.

Propositio XV.

SI circà circulum describatur poligonum habens latera numero imparia, & conuertatur figura circa catetum poligoni, erit factum sphærale solidum æquale cono cuidam, cuius basis æqualis sit vniuersæ superficiei solidi, altitudo verò radio sphæræ sit æqualis.

Esto circuli centrum A, polig. verò perimeter BCDEFGH. Et sint latera eius numero imparia; conuertaturque figura circa catetum BI, vt oriatur solidum sphærale contentum sub conicis superficiebus vnicoque circulo circa diametrum EF descripto. Ponatur iam conus LMN, qui basim habeat æqualem vniuersæ superficiei sphæralis solidi, altitudinem verò OM æqualem radio





radio sphæræ AI. Dico solidum sphærale æquale esse cono LMN.

Agatur per centrum sphæræ planum PQ ad axem erectum, quod transuersè, secabit aliquod latus poligoni, puta CD.

Erit iam rombus solidus, factus à conuersione triang. BCA, æqualis cono, qui basim habeat æqualem conicæ superficiei factæ à linea BC; altitudinem autem æqualem radio sphæræ AR. Solidum verò conicũ excauatum quod fit ex gyro trianguli CPA, æquale erit cono, qui basim habeat æqualem superficiei, quæ fit à linea CP, altitudinem verò æqualem radio sphæræ AS. Solidum quoque excauatum, factum ex reuolutione trianguli PDA, æquatur cono, qui basim habeat æqualem superficiei conicæ quæ fit à motu lineæ PD, altitudinem autem æqualem radio sphæræ AS. Eadem prorsum eodem modo dicuntur de solido conico excauato, facto à triangulo DAE; & de vltimo cono facto à reuolutione trianguli EIA. Propterea totum sphærale solidum æquale erit omnibus prędictis conis simul sumptis, vel cono LMN, qui omnibus illis predictis æquiualet: (habet enim basim omnibus simul illorum basibus æqualem, altitudinem verò æqualem vnicuiq; illorum.) Quod &c.

23.p.partis.

24.p.partis.

27.p.partis.

Scholium.

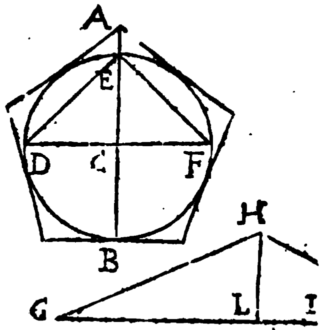
Attulimus in hac Propositione Theor. 23. 24. & 27. p. partis; Nam ex gyro trianguli BCA oritur rombus solidus vt in 23. p. partis. Ex gyro trianguli CPA oritur solidum quoddam excauatũ, quale relinquitur si ex cono auferatur rombus solidus: vt in 24. p. partis. Denique ex conuersione trianguli DPA oritur solidum quoddam excauatum habens basim circularem PQ: quale relinquitur si ex frusto conico conus auferatur habens basim eandem

cum

cum maiore basi frusti conici, altitudinem quoque eandem vt in Prop. 27. p. partis.

Propositio XVII.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero imparia, & conuertatur figura circa catetum; habebit factum sphęrale solidum ad inscriptam sibi sphęram, eam rationem quam vniuersa sphęralis solidi superficies habet, ad superficiem sphęrę.



Manente pręcedentis propositionis constructione, sit sphęrale solidum cuius catetus, siue axis sit AB, centrum verò sphaerae sit C. Dico sphaerale solidum ad inscriptā sibi sphaeram esse, vt ipsius solidi integra superficies ad superficiem sphaerae.

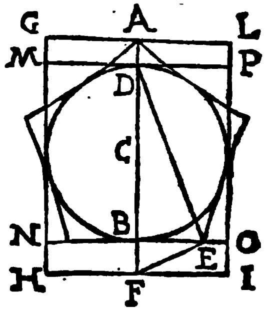
Concipiatur in hemisphaerio conus DEF; & intelligatur conus GHI cuius basis GI ęqualis sit vniuersae superficiei solidi sphaeralis, altitudo verò LH aequalis sit radio sphaerae, & erit per praecedentem, sphaerale solidū aequale cono GHI.

Propter aequalitatem ergò, erit sphaerale solidum ad conū GHI, vt superficies vniuersa sphaeralis solidi, ad basim coni GHI; conus autem GHI ad conum DEF (ob aequalem altitudinem) est vt basis circa GI, ad basim circa DF. conus denique DEF, ad sphaeram est, vt basis circa DF ad superficiem sphaerae (nempe in ratione subquadrupla.) Propterea erit ex aequo, sphaerale solidum ad inscriptam sibi sphaerā, vt vniuersa sphaeralis solidi superficies ad superficiem sphaerae. Quod &c.

Pro-

Propositio XVII.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero imparia, & couertatur figura circa catetum poligoni, habebit factum sphaerale solidum ad inscriptam sibi sphaeram eam rationem, quam habet linea composita ex cateto poligoni & tertia proportionalium (si fiat, vt diameter sphaerae ad semilatus poligoni, ita semilatus ad aliam,) ad diametrum sphaerae.



Manente praecedentium constructione, sit sphaerale solidum cuius catetus, atque axis sit AB, centrum verò sphaerae C, & diameter DB. Fiat angulus rectus DEF, eritq; BF tertia proportionalium, posita diametro DB pro prima, & semilatere poligoni BE pro secunda. Dico sphaerale solidum ad inscriptã sibi sphaeram esse vt tota AF ad DB.

Concipiatur circa sphaeram cylindrus MNOP, & per puncta A, D, B, F, plana agantur ad axem erecta.

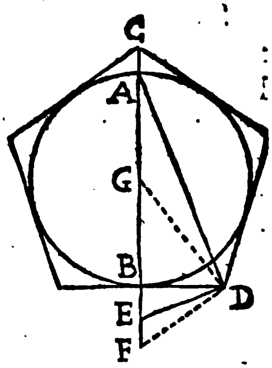
Erit ergo, per praecedentem, sphaerale solidum ad inscriptã sibi sphaeram, vt superficies sphaeralis solidi ad superficiem sphaerae; hoc est, sumptis aequalibus, vt superficies cylindri GHIL ad superficiem cylindri MNOP; hoc est vt recta AF ad BD per primam p. partis. Quod &c.

per 27 et & 18. p. partis.

Propositio XVIII.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero imparia, & conuertatur figura circa catetum poligoni; habebit factum sphaerale solidum ad sphaeram eam rationem quam habent quatuor simul termini nempe, maximus, minimusq; cum duobus medijs; ad quatuor minimos; (quandò ratio

tio rectae GB ad GD continuata fuerit in tribus terminis.



Esto circulus cuius diameter AB, centrum verò G, ipsiq; circumscribatur poligonum habens latera numero imparia, cuius catetus sit CB, & conuertatur figura circa CB; Factoque angulo GDF. recto, erit ratio rectae GB ad GD continuata in tribus terminis GB, GD, GF; vti propositum est. Dico solidum ad sphaeram esse, vt GF, GB, simul cum GD bis sumpta, ad ipsam GB quater sumptam.

Fiat alius angulus ADE rectus; eritq; solidum ad sphaeram per praecedentem, vt CE ad diametrum sphaerae AB, hoc est vt EG, GD simul, ad diametrum sphaerae (sunt enim aequales G C, G D) hoc est vt dupla EG, & dupla G D. ad duas diametros, hoc est vt F G, G B cum dupla G D, ad quatuor semidiametros G B. Quod erat demon. &c. *ostenditur infra*

Quod autem assumptum fuit, ostendemus sic. Dico ipsam EG bis sumptam, aequalem esse duabus FG, GB.

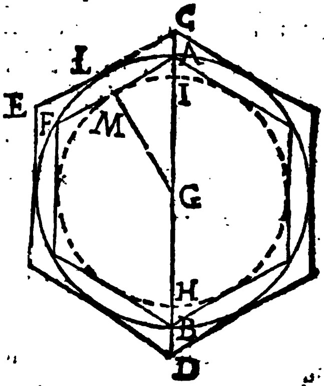
Quoniam ob angulum rectum, rectangula ABE, G B F, aequalia sunt eidem quadrato BD, aequalia erunt & inter se; ideoque latera eorum reciproca, nempe vt AB ad BG subduplam, ita erit FB ad BE subduplam; aequales ergo sunt FE, EB. & tres rectae GF, GE, GB. sunt in proportione Aritmetica; ideo E G bis sumpta aequalis erit duabus FG, GB. Quod &c.

Propositio XIX.

SI intra circulum describatur poligonum habens latera numero imparia, & conuertatur figura circa catetum poligoni, erit sphaera inscriptum sibi sphaerale solidum, vt sunt quatuor simul maximi termini, ad maiorem reliquorum semel, & medium bis, & minorem semel sumptum (quando proportio CD

Propositio XXII.

SI eidem sphæræ duo solida parilatera, & similia, circaque diagonalem reuoluta, alterum circumscribatur, alterum verò inscribatur; superficies sphæræ media proportionalis erit inter superficies duorum solidorum.



Sit circulus, cuius diameter AB atque ipsi duo poligona, alterum circumscribatur, alterum verò inscribatur, habeatq; vtrumq; latera numero paria, & sit numerus laterum vnius æqualis numero laterũ alterius, vt sphæralia solida similia euadant. Tum conuertatur figura circa diagonalem CD.

Dico superficiem factæ sphæræ mediam proportionalem esse inter superficies factorum solidorũ. Ducatur ex centro G recta GL ad contactus M & L, & radio GM fiat sphæra IMH.

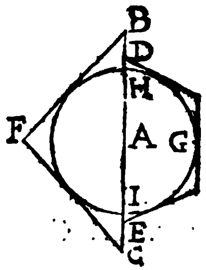
Iam superficies solidi AF ad superficiem sphæræ IM intra ipsum inscriptæ est vt solidum AF ad sphæram IM, per 5. huius, nempe vt axis AG ad GM, per 6. huius, hoc est vt rectangulum AGM ad quadratum GM; Superficies verò sphæræ IM ad superficiem sphæræ ALF est vt quadratum GM ad quadratum GA. Ergò ex æquo superficies solidi AF ad superficiem sphæræ AL erit vt rectangulum AGM ad quadratum GA, nempe vt recta MG ad GA. vel vt recta LG ad GC. Sed superficies sphæræ ALF ad superficiem solidi GE est vt LG ad GC. (quod probatur eodem modo vt factum fuit supra) ergo in continua proportione sunt superficies vniuersá solidi AMF, superficies sphæræ AL F. & superficies solidi CE. Quod erat &c.

Corollarium.

Hinc patet etiam quod si eidem solido sphærali parilatero circa diagonalem reuoluto duæ sphæræ, altera circumscribatur, altera verò inscribatur, tres superficies in continua proportione erunt inter se.

Propositio XXIII.

Sphæralia solida parilatera circa diagonalem reuoluta, & eidem sphæræ, vel æqualibus sphæris circumscripta, inter se sunt vt axes.



Sint circa circulum cuius centrum A duo poligona dissimlia, quorum latera numero paria sint, & conuertantur circa diagonalem. Sitq; alterius factorum solidorum BFC, axis BC; alterius verò nempe DGE, esto axis DE; Dico solidum BFC, ad solidum DGE esse vt BC ad DE.

Hoc autem patet. Quoniam solidum BFC ad sphæram est vt BC ad diametrum HI; sphæra vero ad alterum solidum DGE est vt diameter HI ad axem DE, erit ex æquo, solidum BFC. ad solidum DGE, vt BC ad DE. Quod erat &c. *6 huius. ex eod.*

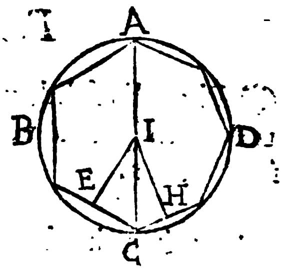
Hinc facile ostendi potest excessum, quo solidum BFC superat sphæram, ad excessum quo solidum DGE superat eandem sphæram, esse vt BH, ad HD.

Cum enim solidum BFC ad sphæram sit vt BA ad AH, erit diuidendo excessus BFC ad sphæram, vt BH ad HA. Eadem ratione sphæra ad excessum DGE erit, vt HA ad HD; ergo ex æquo, excessus BFC ad excessum DCE, supra sphæram erit vt BH, ad HD. Quod &c. *6 huius.*

Pro-

Propositio XXIV.

Solida sphæralia parilatera, eidem, vel æqualibus sphæris inscripta, & circa diagonalem reuoluta, sunt inter se in duplicata ratione catetorum.



Inscribantur in circulo cuius diameter AC duo semipoligona ABC, ADC, & conuertantur figura circa diagonalem AC, vt describantur duo solida sphæralia vt imperatum est.

Dico solidum sphærale factum ex poligono ABC, ad solidum sphærale factum ex poligono ADC, esse vt quadratum cateti I E, ad quadratum cateti IH.

7. huius. Solidum enim ex ABC ad sphæram, est vt quadratum I E ad *per eandem.* quadratum IC; sphæra autem ad solidum ADC, est vt quadratum IC ad quadratum IH; ergo ex æquo solidum ABC ad solidum ADC erit, vt quadratum IE ad quadratum IH. Qqod erat &c.

Propositio XXV.

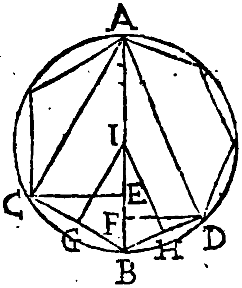
Si intra æquales, vel eandem sphæram, cuius diameter AB, descripta fuerint duo solida sphæralia parilatera, quorum duo latera sint B C, BD; demittanturque ex punctis C, D, perpendiculares CE, DF ad diametrum; erit solidum cuius latus BC, ad solidum cuius latus BD, vt AB ad AF.

Ducantur enim ex centro I ad latera BC, BD perpendiculares IG, IH.

Recta EA ad rectam AB, est vt quadratum AC ad quadratum AB (ob angulum in semicirculo rectum ACB) recta autem BA ad AF, est vt quadratum AB, ad quadratum AD, ergo ex

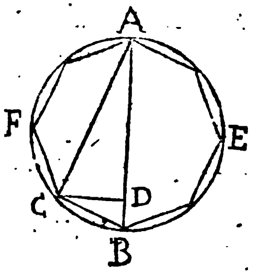
æquo

æquo recta EA ad rectam AF, est vt quadratum AC ad quadratum AD, hoc est vt quadratum IG ad quadratum IH, hoc est vt solidum cuius latus est BC ad solidum cuius latus est BD. Quod erat &c. *per præced.*



Propositio XXVI.

SI intra sphæram cuius diameter AB descriptum sit solidum sphærale parilaterum, & circa diagonalem reuolutum; demittaturque ab extremitate lateris BC quod diametrum contingit, recta CD perpendicularis ad diametrum circuli AB, erit conus cuius basis circulus AFCBE altitudo verò sit AD, subduplus solidi sphæralis; conus verò, cuius eadem sit basis, & altitudo DB, erit subduplus differentiæ, quæ inter sphæram, & solidum sphærale est.



Sphæra enim ad inscriptum solidum est vt quadratum diametri ad quadratum cateti AC (est enim AC ob angulum rectum ACB, æqualis cateto poligoni,) hoc est vt BA recta ad rectam AD. *7. huius.*

Iam quia conus, cuius basis AFCBE altitudo verò sit AB; æqualis est hæmisphærio in eadem basi constituto; erit dictus conus, hoc est hemisphærium, ad conum cuius basis eadem AFCBE, altitudo verò AD, vt AB ad AD. Sed hemisphærium etiam ad semisolidum est vt AB ad AD; vt ostendimus supra. Propterea conus cuius basis circulus AFCBE, altitudo autem AD, erit æqualis semisolido sphærali, siue subduplus solidi sphæralis. Quod &c. *ex 30. p. partis.*

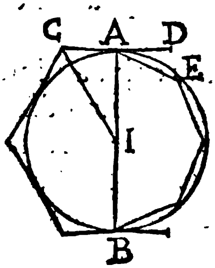
Similiter inferetur, conum cuius basis eadem AFCBE, altitudo verò DB, subduplum esse excessus illius, quo sphæra solidum superat.

Scholium.

Demonstramus etiam singula illa solida rotunda annularia, quæ describuntur in reuolutione figuræ à bilineis mixtis, quale vnum est FC, & solidum sphærale circumdant; æqualia esse singulis sphæroidibus, quarum vniuscuiusq; maximus circulus sit circa diametrum FC. Axis verò æqualis sit portioni rectæ ex AB. quæ intercipitur inter duas perpendiculares ad ipsam AB ductas ex punctis F & C. & sic de reliquis. Sed hoc alibi.

Propositio XXVII.

SI eidem circulo duo poligona parilatera alterum circumscribatur, alterum verò inscribatur; & conuertatur circumscriptum quidem circa catetum, inscriptum verò circa diagonalem; erit differentia inter circumscriptum & sphæram, ad differentiam inter sphæram & inscriptum, vt quadratum lateris circumscripti ad duplum quadrati lateris inscripti.



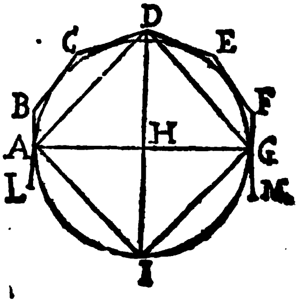
Esto circuli diameter AB, latus verò poligoni circumscripti CD. & inscripti AE. Dico excessum, quo maius solidum sphæram superat, ad excessum, quo sphæra superat minus esse vt quadratum CD ad duo quadrata ex AE.

23. huius. Solidum enim circumscriptum est ad sphæram vt duo quadrata CI, IA ad duplum quadrati ex IA; ergo diuidendo, erit excessus solidi
20. huius supra sphæram, ad ipsam spheram, vt quadratum CA ad duplum quadrati ex IA, siue vt quadr. CD, ad duplũ quadr. ex AB Sphæra autem ad excessum, quo ipsa superat minus solidum, est vt quadratũ AB ad quadratum AE, vel vt duo quadrata ex AB ad duo quadrata ex AE. Propterea ex æquo excessus solidi maioris supra spheram, ad excessum spheræ supra minus solidum, erit

erit vt quadratum ex CD ad duo quadrata ex AB. Quod &c.

Propositio XXVIII.

QVodlibet sphærale solidum circa diagonalẽ reuolutum (cuius latera numero quidem paria sint, sed nullo modo à quaternario mensurentur, vt sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c.) inscripti sibi rombi solidi duplum est.



Sit solidum quale dictum est ABCDEFG. circa axẽ siue diagonalem DI reuolutum. Manifestũ est quod duo latera opposita BL.FM. contingent sphæram in extremitatibus A, G, diametri AG, quæ quidem perpendicularis sit ad DI. ;quãdoquidẽ laterum numerus à binario tantum mensuratur, non autem à quaternario.

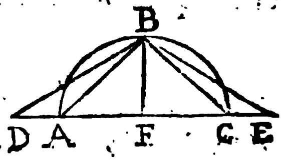
Inscribantur iam duo coni; nempe ADG in semisolido, habens altitudinem HD.; conus verò AIG in hemisphærio. Erit igitur semisolidum ABCDEFG ad hemisphærium vt axis ad axem, nempe vt DH ad HI, hoc est vt conus ADG ad conum AIG (cum sint in eadem basi;) & permutando semisolidum ad suum conum ADG, erit vt hemisphærium ad suum conum AIG; quare duplum erit. Propterea omne solidum, quale dictum est duplum erit inscripti sibi rombi solidi, Quod &c. 6. huius.

Lemma.

Si hemisphærium ABC, & conus quicumque rectus DBE eandem altitudinem habuerint FB; erit hemisphærium ad prædictum conum vt duplum basis hemisphęrij ad basim eiusdem coni.

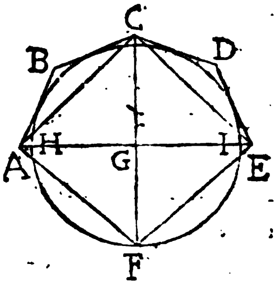
Sit vt ponitur: Et inscribatur in hemisphærio conus ABC. Erit ergo conus ABC ad conum DBE vt basis AC ad basim DE;

sumptisq; antecedentium duplis, erit hemisphærium ABC ad conum DBE vt duplum basis AC ipsius hemisphærij, ad DE basim coni. Quod erat &c.



Propositio XXIX.

Quodlibet sphærale solidum circa diagonalem reuolutum, cuius latera à quaternario mensurentur, ad inscriptum sibi rombum solidum, est vt superficies inscriptæ sibi sphæræ, ad semisuperficiem circumscriptæ.



Sit solidum quale dictum est ABCDE. cui inscribatur semirombus, hoc est conus ACE; ad altitudinem verò hemisphærij sit conus AFE, in basi AE.

6. huius. Erit ergo semisolidum ad hemisphærium vt axis ad axem, hoc est vt CG ad GF, siue vt conus ACE, ad conum AFE (sunt enim in eadem basi) & permutando erit semisolidum ad suum conum ACE, vt hemisphærium ad alterum conum AFE, hoc est per lemma præmissum, vt duo circuli ex HI, ad circulum ex AE, vel sumptis duplis, vt quatuor circuli ex HI, ad duos circulos ex AE; hoc est vt superficies inscriptæ intra solidum sphæræ, ad semisuperficiem circumscriptæ. Propterea etiam dupla eandem rationem habebunt, hoc est totum sphærale solidum ad inscriptum sibi rombum solidum erit vt dictum est. Quod &c.

Poterat etiam concludi; solidum sphærale prædictum esse ad inscriptum sibi rombum, vt inscriptus in poligono circulus ad semicirculum circumscriptum; vel vt quadratum cateti GH ad semiquadratum diagonalis GA eiusdem poligoni.

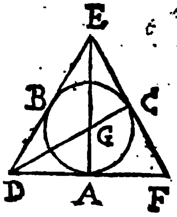
Lemma.

Si in triangulo æquilatero inscriptus fuerit circulus. Erit

circu-

circulus alter cuius diameter sit latus trianguli, triplus inscripti circuli.

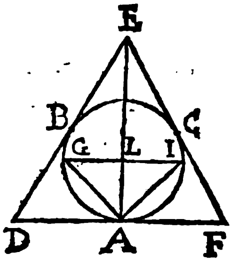
Inscribatur circulus ABC in triang. aequilatero DEF. Sitque G punctum, centrum & circuli, & trianguli; propterea DG dupla ipsius GC, hoc est ipsius GA. Ergo quadr. DG quadruplũ est quadrati ex GA. & quadratum DA triplum erit eiusdem GA; Quare etiam circulus cuius semidiameter sit DA triplus erit circuli cuius semidiameter sit CA. Quod erat &c.



Propositio XXX.

SI circa circulum descriptum fuerit triangulum aequilaterum & reuoluatur figura, erit factus conus aequilaterus ad inscriptam sibi sphaeram vt 9. ad 4.

Esto circa circulum ABC triangulum aequilaterum DEF, & conuertatur figura. Dico factum conum ęquilaterum esse ad inscriptam sphaeram in proportione dupla sesquiquarta, nempe vt 9. ad 4.



Concipiatur in hemisphęrio GAI conus GAI. Erit iam per lemma praecedens circulus cuius diameter DF triplus circuli cuius diameter GI; sed conus DEF ad conum GAI rationem habet compositam ex ratione altitudinum EA ad AL; quae tripla est: Et ex ratione basium, nempe circuli DF ad circulum GI quae similiter tripla est: quare conus DEF ad conum GAI erit vt 9. ad vnum, sumptisq; consequentium quadruplis, erit conus DEF ad sphaeram sibi inscriptam, vt 9. ad 4. Quod erat &c.

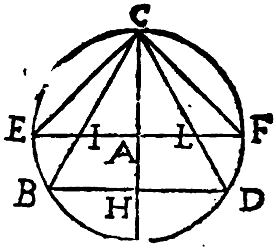
Propositio XXXI.

SI circa eandem sphæram descripti sint conus, & cylindrus, ambo æquilateri; erunt tria solida, nempe conus, cylindrus, & sphæra in continua proportione sesquialtera.

Hoc autem patet. Posita enim sphæra vt 4. erit (per Corollarium Prop. 30. p. partis) cylindrus vt 6; conus autem ostensus est in præcedenti esse vt 9. Quare tria solida erunt inter se in continua proportione sesquialtera. Quod &c.

Propositio XXXII.

SPHæra ad inscriptum sibi conum æquilaterum est in ratione numeri 32. ad 9.



Sit in circulo cuius centrum A inscriptum triangulum æquilaterum C B D. & cõuertatur figura circa CH. Dico sphæram esse ad factum conũ æquilaterum sibi inscriptum vt 32. ad 9.

Ducatur diameter EF ad angulos rectos ipsi CH, & concipiatur in hemisphærio conus ECF: Punctum A erit centrum tum circuli, tum etiam trianguli æquilateri BCD, propterea C H sesquialtera erit ipsius CA.

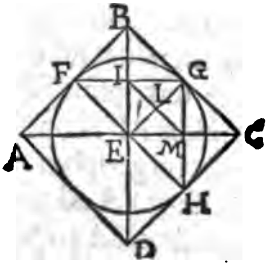
Sed cum etiam ICL sit triangulum æquilaterum, erit CA potentià tripla ipsius AI, ergò & circulus ex CA, siue ex AE triplus erit circuli ex AI; ideoq; conus ECF, triplus coni ICL. videlicet vt 24. ad 8. Conus autem I C L ad conum BCD ob similitudinem, est vt cubus A C ad cubum CH, nimirum vt 8. ad 27. Quare ex æquo erit conus ECF ad conum B C D vt 24. ad 27. Reductaque ratione ad minimos terminos, erit conus ECF ad conum BCD vt 8. ad 9. Sumptis igitur antecedentium

quadru-

quadruplis sphera ad inscriptum sibi conum æquilaterum erit vt 32. ad 9. Quod erat &c.

Propositio XXXIII.

ROmbus solidus æquilaterus circa sphæram descriptus est ad ipsam sphæram vt diameter quadrati ad latus eiusdem.



Esto quadratum ABCD circa circulum cuius centrum E; & voluatur figura circa diagonalem BD; Dico rombũ solidum æquilaterum factum ex reuolutione, esse ad sphæram vt diameter quadrati ad latus eiusdem.

Intelligatur in hemisphærio conus FGH, cuius basis FH, altitudo EG, & ducatur IM.

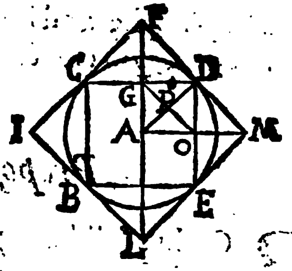
Erit iam conus ABC cuius basis AC, similis cono FGH, vterque enim rectus & rectangulus est. Ergo conus ABC ad conũ FGH erit vt cubus BE. ad cubum EG, nempe vt recta BE ad EL. (sunt enim EB, EG, EI, EL in continua ratione) sumptis autem consequentium duplis, erit conus ABC ad hemisphæriũ, vt BE ad EG, & propterea totus rombus solidus ad totam spheram sibi inscriptam erit vt BE ad EG, hoc est vt diameter alicuius quadrati ad latus eiusdem. Quod &c.

Propositio XXXIV.

SPhæra ad inscriptum sibi cylindrum æquilaterum est vt diameter quadrati ad 3. quart. lateris eiusdem.

Describatur intra circulum cuius centrum A quadratum BCDE, & voluatur figura circa catetum AG, Dico spheram ad cylindrum BCDE, esse vt diameter alicuius quadrati ad 3. quart. lateris eiusdem.

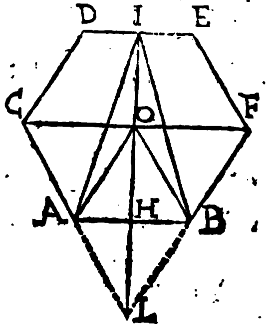
Intel-



Intelligatur circa sphæram alter cylindrus æquilaterus FILM. & producta AM iungantur AD, GO. Erunt ob similitudinem triangulorum, in continua ratione FA, AD, AG, AP. Et quia cylindri sunt similes, nempe æquilateri, erit cylindrus IFML ad cylindrum BCDE vt cubus FM ad cubum CD, hoc est vt cubus FD ad cubum DG, siue vt cubus FA ad AD, hoc est vt recta FA ad quartam AP. Sumptisque antecedentium subsequialteris, erit sphæra ad cylindrū BCDE vt duę tert. ipsius FA ad AP; hoc est vt tota FA ad sesquialteram ipsius AP; siue (quod idem est) vt FA ad 3. quar. rectæ AD. Constat ergo sphæram ad inscriptum sibi cylindrum æquilaterum esse vt FA ad 3. quar. ipsius AD; hoc est vt diameter alicuius quadrati ad 3. quar. lateris eiusdem. Quod &c.

Propositio XXXV.

Solidum exagonale; hoc est sphærale solidum genitum ab exagono circa catetum reuoluto, septuplum est coni eandem sibi basim, & altitudinem habentis.



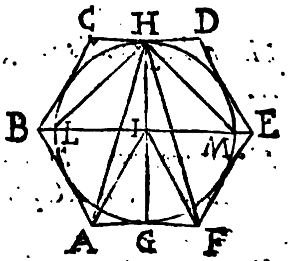
Esto exagonum æquilaterum, & ęquiangulum ACDEFB & conuertatur circa catetum HI; inscribaturq; conus AIB. Dico exagonale solidum factum ex reuolutione, septuplum esse coni AIB.

Producantur CA, FB donec concurrant in aliquo puncto L, eruntque ob exagonum, quatuor triangula æquilatera OCA, OAB, OBF, ABL, æqualia inter se. Concipiatur ergo conus CLF perfectus; eritque conus AIB duplus coni ALB, quandoquidem eandē habet basim AB, sed altitutitudinem habet HI duplam ipsius HL.

Iam conus CLF. ad conum ALB, erit ob similitudinem, vt cubus CL ad cubum LA, nempe vt 8. ad 1: & diuidendo semisolidum CABF erit ad conum ALB, vt septem ad vnum. Propterea etiam dupla eandem rationem habebunt, hoc est solidũ exagonale integrum septuplum erit coni AIB. Quod erat &c.

Propositio XXXVI.

SI circa circulum describatur exagonum, & reuoluatur figura circa catetum; erit sphæra sextupla coni, qui eandem basim, & eandem altitudinem cum solido habeat.



Esto circa circulum cuius centrũ I exagonum ABCDEF. & conuertatur circa catetum GH; inscribatur que in facto solido exagonali conus AHF, qui basim habeat circulum circa AF, altitudinem verò GH eandem cum solido. Dico sphæram sextuplam esse coni AHF.

Concipiantur duo alij coni; nempe LHM in hemisphærio, & AIF super basi AF constitutus ad centrum I.

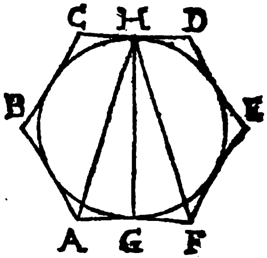
Erit ergò propter exagonum, triangulum AIF æquilaterum, & ideo ipsa IG tripla erit potentià ipsius GA. Constat igitur quod circulus cuius diameter LM (dupla scilicet ipsius IG) triplus erit circuli cuius diameter AF, & propterea conus LHM triplus erit coni AIF. Sphæra autem duodecupla erit coni AIF, & ideo sextupla coni AHF. Quod erat &c.

Propositio XXXVII.

SI circa circulum describatur exagonum, & voluatur figura circa catetum; erit factum solidum ad factam sphæram sesquisextum.

Esto

Esto circa circulum cuius centrum I exagonum ABCDEF. & conuertatur figura circa catetum GH. Dico solidum sphærale factum, esse ad sphęram vt 7. ad 6.



Concipiatur enim in solido conus AHF, vt in duabus pręcedentibus propositionibus.

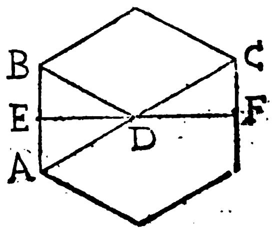
Erit ergo (per 35. huius) solidum exagonale ad conum AHF vt 7. ad vnum, conus autem AHF ad sphærã est vt 1. ad 6.; quare ex æquo erit solidum ad sphæram vt 7. ad 6. Quod &c.

per præced.

Lemma.

Linea diagonalis exagoni potentià sesquitertia est cateti eiusdem.

Sit exagonum ABC cuius centrum D. Dico diagonalem AC potentià esse sesquitertiam cateti EF.

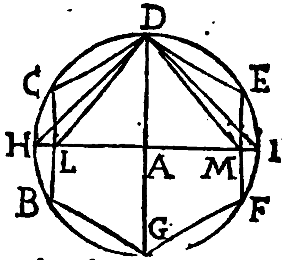


Hoc autem patet. Nam ducta DB. erit ABD triangulum æquilaterum, ob exagonum; & AD latus erit potentià sesquitertium perpendicularis DE; ergò sumptis lineis duplis, etiam AC sesquitertia erit potentià ipsius EF. Quod &c.

Propositio XXXVIII.

SPhæra inscripti sibi solidi exagonalis circa diagonalem reuoluti, sesquitertia est.

Sit in circulo cuius centrum A descriptum exagonum BCDEFG; iunctisq; DH, DL, DM, DI, conuertatur figura circa diagonalem DG. Dico sphæram inscripti solidi exagonalis sesquitertertiam esse. Circulus enim, cuius diameter HI, sesquitertius est circuli cuius diameter LM (per lemma præcedens) ergo conus HDI sesquitertius est coni LDM, sumptisque quadruplis, erit sphæra sesquitertia solidi exagonalis. Quod erat &c.

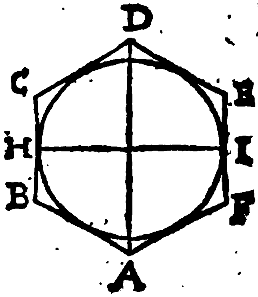


Assumptum fuit solidum exagonale quadruplum esse coni LDM. hoc enim patet ex propositione 28. huius.

Propositio XXXIX.

SI idem exagonum dupliciter reuoluatur, nempe circa catetum, & circa diagonalem; Erit solidum circa catetum reuolutum, ad solidum circa diagonalem, in subduplicata ratione numerorum 49. ad 48. Nempe vt radix q. num. 49. ad radicem q. num. 48.

Esto exagonum æquiangulum, & æquilaterum ABCDEF, quod vtroq; modo concipiatur reuolutum, nempe circa catetum HI & circa diagonalem DA; vt inde fiant duo solida sphæralia inter se diuersa specie; & intra vtrũq; intelligatur sphæra inscripta. Manifestum iam est (per lemma Propositionis præcedentis) diagonalem AD potentià sesquitertiam esse cateti HI. Si ergo ponatur HI rationalis 6. erit AD radix quadrata numeri 48.



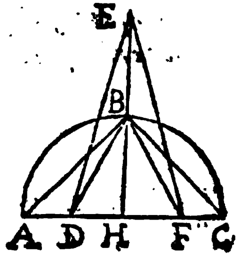
Manentibus his. Solidum circa catetum reuolutum, ad inscriptam sphær. est vt 7. ad 6; Sphæra autem ad solidum reuolutum circa diagonalẽ est vt HI, ad AD, nempe vt 6. ad rad. q. num. 48. Quare ex æquo erit, solidum circa catetum, ad solidum circa diagonalem vt 7. ad radicem quadratam numeri 48. 31 huius 6 huius.

Nempe in subduplicata ratione numerorum 49. 48. Quod erat &c.

Lemma.

Si hemisphærium altitudinem habuerit subduplam alicuius coni: erit hemisphærium ad conum prædictum, vt basis ad basim.

Habeat hemisphærium ABC altitudinem HB subduplam altitudinis HE coni DEF. Dico hemisphærium ad conum DEF, esse vt circulus AC ad circulum DF.

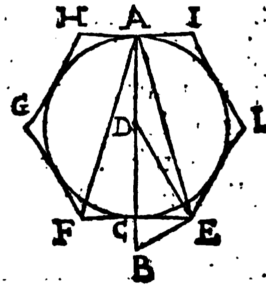


Concipiantur enim duo alij coni ABC in hemisphærio, & DBF super basi DF. Erit ergò conus ABC ad conum DBF, vt basis AC ad basim DF; sumptisq; duplis, erit hemisphærium ad conum DEF vt basis AC ad basim DF. Quod erat &c.

Propositio XL.

SOlidum parilaterum circa catetum reuolutum ad inscriptum sibi conum, rationem habet quam AB ad BC; facto scilicet angulo DEB recto.

Esto poligonum FGHILE habens latera numero paria, descriptum circa circulum cuius centrum D. & conuertatur figura circa catetum CA, fiatq; angulus DEB rectus. Dico solidum ad inscriptū sibi conum FAE, esse vt AB ad BC.



32 huius Erit enim solidum ad sphæram vt BA ad AC, sumptisq; consequentium dimidijs, erit solidum ad hemisphærium vt BA ad DC; sed (per lemma præcedens) hemisphærium est ad conum FAE, vt circulus ex DC ad circulum ex CE; siue vt recta DC ad CB; ergò ex æquo erit sphærale sole solidum ad inscriptum sibi conum FAE, vt AB ad BC. Quod erat &c.

Propositio XLI.

Conus inscriptus in solido circa catetum reuoluto, æqualis est excessui quo solidum inscriptam sibi sphæram superat.

Manente figura & constructione præcedentis. Dico si sphæra auferatur à solido FGHILE, quòd residuum, quod superest, ablata sphæra, æquale erit cono FAE.

Est enim sphęrale solidum ad sphæram vt BA ad AC; & per conuersionem rationis, solidum ad illud residuum erit vt AB ad BC. Sed (per præcedentem) solidum ad inscriptum sibi conũ est vt AB ad BC. Aequalis est ergò conus FAE, in solido sphęrali inscriptus, omnibus simul solidulis annularibus quæ circa sphæram sunt; siue differentię, quæ est inter solidum inscriptamque in solido sphæram. Quod erat &c. 11 *huius*

Propositio LXII.

Hemisphærium ad excessum quo sua sphæra superatur à solido sphærali circa catetum reuoluto, duplicatam rationem habet diametri sphæræ ad latus poligoni, ex cuius reuolutione solidum genitum fuerat.

Manente præcedentium figura, & constructione. Dico hemisphęrium, ad differentiam inter solidum, & inclusam sphæram, esse vt quadratum AC, ad quadratum FE.

Est enim sphæra ad solidum circumscriptum vt CA ad AB; & diuidendo, sphæra ad differentiam inter sphæram & solidũ, erit vt AC ad CB; sumptisque antecedentium dimidijs, erit hemisphærium ad prædictam differentiam, vt DC ad CB, hoc est vt quadratum DC ad quadratum CB; vel vt quadratum AC ad quadratum FE. Quod erat &c. 12 *huius*

Aliter.

13 huius *Sphęra ad solidum est vt duo quadrata ex CD ad duo simul quadrata CD, DE. Ergo diuidendo erit sphæra ad differentiam inter ipsam & solidum vt duo quadrata ex CD ad quadratum CE sumptisq; antecedentium dimidijs, erit hemisphærium ad differentiam inter sphæram & solidum, vt quadratum DC ad quadr. CE, siue vt quadratum AC ad quadratum FE. Quod &c.*

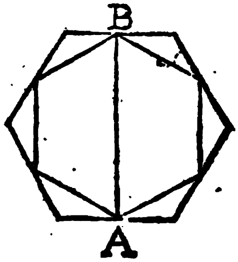
Corollarium.

Constat etiam hemisphærium ad conum FAE inscriptum in sphærali solido, esse in duplicata ratione AC ad FE, nempe axis coni ad diametrum basis eiusdem. Quandoquidem conus FAE demonstratus est æqualis differentiæ inter solidum sphærale inscriptamq; sibi sphęram.

Propositio XLIII.

SI exagono regulari simile exagonum inscribatur, ita vt inscripti anguli puncta media circumscriptorum laterum cõtingant, & conuertatur figura circà catetum maioris exagoni, erit solidum exagonale circumscriptum ad inscriptũ vt 14. ad 9.

Sit vt ponitur: Conuertaturque figura circà AB; circaq; AB diametrum cõcipiatur sphæra, quæ quidem maiori poligono inscripta erit, minori verò circũscripta.

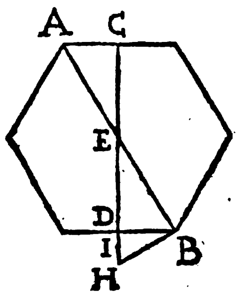


per 37. huius. 38 huius Erit itaq; solidum maius ad sphęram vt 7 ad 6. nempe vt 14. ad 12; sphæra verò ad minus solidum erit vt 12. ad 9. Ergò ex æquo solidum maius ad minus erit vt 14. ad 9. Quod erat &c.

Propo-

Propositio XLIV.

Solidum sphærale factum ex reuolutione alicuius poligoni circa diagonalem, ad solidum ex reuolutione eiusdem poligoni circà catetum; est vt rectangulum sub diagonali, & cateto, bis sumptum, ad duo simul quadrata, quorum alterum ex diagonali fit, alterum autem ex cateto.



Esto poligonum regulare quodcumque, habens latera nnmero paria, cuius diagonalis sit AB, catetus verò CD. Et concipiatur poligonum conuerti duplici axe; nempe primùm circà diagonalem AB; & iterum circa catetum CD. Dico solidum ex diagonali ad solidum ex cateto esse, vt rectangulum BED bis sumptum, ad quadrata ex BE, & ex ED: siue vt eorum quadrupla.

Fiat angulus EBH rectus, seceturq; bifariam DH in I; eritq. EI media Aritmetica inter ED, EH: Iam solidum ex diagonali ad inscriptam sibi sphæram est, vt AB, ad CD; sphæra verò ad solidum ex cateto, est vt CD, ad CH; ergò ex æquo solidum ex diagon. ad solidum ex cateto, erit ut AB ad CH, siue utEB ad EI, (sunt enim semisses rectarum AB, CH.) Cum autem BE media Geometrica sit inter HE, ED; ipsa uerò EI media Aritmetica sit inter easd. erit solidum ex diagonali ad solidum ex cateto ut media Geomet. ad mediam Aritmet. inter rectas HE, ED. Sed ratio rectæ HE ad ED, ead. est ac quadr. BE ad quadr. ED; propterea erit solidum ex diagonali ad solidum ex cateto, ut spatium medium proportionale Geometricum ad spatium medium Aritmeticum inter quadrata BE, ED. Spatium autem mediũ Geometricum inter quadrata BE, ED. est rectangulum BED; medium verò Aritmeticum est quadratũ ED, cum semisse quadrati DB. Ergo solidum ex diagonali ad solidum ex cateto erit

6. huius
11 huius

vt re-vt rectangulum BED; ad quadratum ED cum semisse quadrati DB; Vel (sumptis duplis) vt rectangulum BED, bis sumptum, ad quadratum ED bis, cum integro quadrato DB. Siue vt rectangulum BED bis sumptum, ad quadrata BE, ED. Quod erat &c.

Assumpsimus rectangulum BED, medium proportionale esse inter quadrata BE, ED. Hoc enim patet in propositis quibuscunque rectis duabus lineis.

Assumpsimus etiam quadratum ED cum semisse quadrati DB, esse medium Aritmeticum inter quadrata BE, ED. Quod patet quadratum enim BE superat quadratum ED quadrato BD.

Corollarium.

Hic pro Corollario demonstrari potest, solidum ex diagonali factum semper minus esse solido, quod fit ex cateto; quando idem poligonum conuertatur circa diagonalem, & circa catetum. Demonstratur hoc modo.

Quoniam rectangulum BED bis sumptum, minus est duobus quadratis BE, ED (sunt enim in continua ratione quadratum EB, rectangulum DEB, & quadratum ED, ideoq; dupla media, minor est duabus extremis magnitudinibus.) Et est vt rectangulum BED bis sumptum ad quadr. BE, ED simul, ità solidum ex diagonali ad solidum ex cateto; Erit solidum ex diagonali minus quam solidum ex cateto. Quod erat &c.

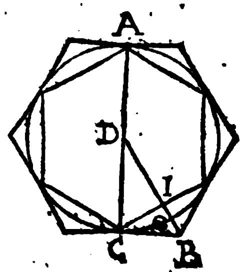
Si quis autem quærat, quo excessu solidum ex cateto superet solidum ex diagonali. Hoc modo illum proportione notum habebit.

Faciat vt duo quadrata BE, ED simul, ad quadratum quod fit ex differentia rectarum BE, ED, ità maius solidum ad aliud: Et habebit excessum quo maius solidum superat minus.

Propo-

Propositio XLV.

SI intra poligonum regulare parilaterum inscribatur simile poligonum, ità vt anguli inscripti bisectiones laterum circumscripti contingant; conuertaturq; figura circa catetum maioris poligoni: Erit maius solidum sphęrale ad minus, vt sunt duo simul quadrata duarum diagonalium, ad duo quadrata minoris cateti.



Esto poligonum parilaterum ABC&c. intra quod inscribatur simile poligonum AIC &c. vti dictum est. Conuertaturq; figura circa AC catetum maioris poligoni. Dico solidum sphęrale ABC, ad solidum AIC esse vt duo quadrata simul duarum diagonalium, nempe BD, DC. ad duo quadrata minoris cateti DI. Circumscribatur solido AIC sua sphęra, quę alteri solido inscripta erit.

Iam solidum ABC ad inscriptam sphæram, est vt duo quadrata simul BD, DC ad duplum quadrati DC (per 13. huius.) Sphæra verò ad inscriptum solidum est, vt duplum quadrati DC ad duplum quadrati DI (per 7. huius) Ergo ex æquo maius solidum sphærale ad minus erit vt duo simul quadrata BD, DC ad duplum quadrati DI. Quod erat &c.

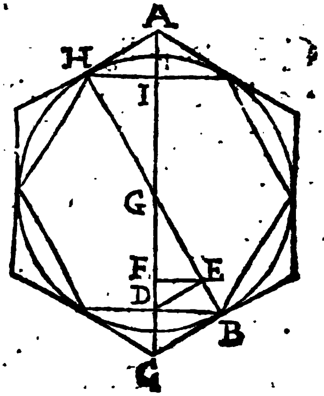
Propositio XLVI.

IIsdem positis: si conuertatur figura circa diagonalem maioris poligoni GC. Erit maius solidum ad minus, vt integer axis AC maioris solidi, ad vtramque simul, nempè semicatetum DG minoris, & quartam proportionalium GF: si fiat vt semidiagonalis minoris ad semicatetum; ita semicatetus ad tertiam, & tertia ad quartam.

Esto solidum quale positum est ABCH. cui inscriptum sit solidum

lidum IBD. vti dictum est. Ducatur, DE perpendicularis ad GB, & EF ad GC; eruntq; in continua proportione CG, GB, GD, GE GF. ob angulos rectos.

Iam solidum maius ad sphæram est vt AC ad HB (per 6. huius) sphæra autem ad solidum minus est vt HB ad vtramque simul DG. GF (per 14. huius) Quare ex æquo solidum maius ad minus erit vt AC ad vtramque simul DG. GF. nempe quod propositum fuerat.



Corollarium.

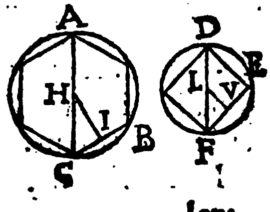
Quando solida prædicta ab exagono genita fuerint: demonstratur quod posita recta AC 32. DG. & GF notæ sunt. nempe DG. 12. & GF. 9. Ergo in hoc casu solidum maius ad minus esset vt 32. ad 21.

Superest nunc vt solida sphæralia absolutè considerata inter se conferamus, & hoc quot modis fieri poterit: quemadmodum in proœmio operis nos esse facturos promiseramus.

Propositio XLVII.

Solida sphæralia parilatera circa diagonalem reuoluta, inter se sunt vt parallelepipeda basi quadr. cateti, altitudine vero diagonali eorumdem.

Sint duo solida sphæralia parilatera circa diagonales AC, DF reuoluta. Sintq; HI, LV perpẽdiculares ad latera CB, FE, Dico solidum sphærale ABC ad solidum DEF. esse vt parallelepipedum basi quadrato HI altitudine uerò HC, ad paralle-



lep:

ep. basi quadrato LV, altitudine LF.

Intelligatur vtrique circumscripta sphæra sua. Tunc enim solidum ABC ad sphæram suam erit vt quadratum IH ad quadratum HC, siue (sumpta communi altitudine CH) vt parallelepipedum basi quadrato IH, altitudine HC, ad cubum HC. Sphæra autem ABC ad sphæram DEF, est vt cubus HC ad cubum LF. At sphæra DEF, (vt nuper in altera ostendebamus) ad solidum suum DEF est vt cubus LF, ad parallelepipedum basi quadrato LV, altitudine LF: ergo ex æquo erit solidum ABC, ad solidum sphærale DEF, vt parallelepipedum basi quadrato HI, altitudine HC; ad parallelepipedum basi quadrato LV, altitudine LF. Quod erat &c. 7. huius.

Scholium.

Idem concludentur etiam si concipiantur sphæræ iuxta 6. huius intra data solida inscriptæ; siue altera tantum inscripta, altera verò circumscripta iuxta 6. & 7 huius sicut experienti patebit.

Propositio XLVIII.

Solida sphæralia parilatera circa catetum reuoluta inter se sunt, vt parallelepipeda basi quadrato diagonalis, altitudine verò quæ sit æqualis cateto, & quartæ proportionalium, si fiat vt diagonalis ad catetum, ita catetus ad tertiam, & ita tertia ad quartam.

Sint duo solida sphæralia circa catetos B, & D reuoluta. Continueturque ratio A ad B in quatuor terminis A, B, E, F. Itē ratio diagonalis C ad catetum D continuetur in quatuor terminis C, D, H, I. Dico, primum solidum ad secundum esse vt parallelepipedum basi quadrato A, altitudine verò B & F; ad parallelepipedum basi quadrato C. altitudine verò D & I.

Nam primum solidum ad sphęram suam est vt B & F simul ad 14 huius

M A bis

A bis sumptam: acceptaq; communi basi quadrato A; erit solidum primum ad sphæram suam, vt parallelepipedum basi quadrato A, altitudine verò B & F simul, ad duos cubos A. Sphæra autem prima ad secundam sphærã est vt duo cubi A ad duos cubos C. Sphæra tandem secunda ad solidum suum, est vt duo cubi C, ad parallelepipedum basi quadrato C altitudine verò D, & I simul (quod ostenditur vt nuper factum est in prima sphęra) ergo ex æquo primum solidum sphærale ad secundum, erit vt parallelepipedum basi quadrato A, altitudine B & F simul, ad parallelepipedum basi quadrato C altitudine verò D & I simul. Quod erat &c.

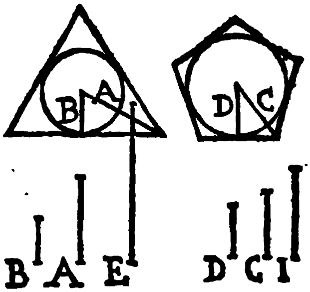
Scholium.

Idem concludi potest si sphæræ concipiantur intra ipsa solida inscripta iuxta Propositionem 13. huius; siue altera inscripta, altera verò circumscripta iuxta 13. & 14. huius. Quando verò termini proportionis alij euadant à propositis, vt in hac, & in sequentibus, scias proportionem semper eandem esse, in quibuscunque tandem terminis eueniat.

Propositio IL.

SOlida sphæralia imparilatera sunt inter se vt parallelepipeda, basi quadrato perpendicularis, quæ ex centro poligoni ducitur in latus eiusdem, altitudine verò æquali prædictæ perpendiculari, vna cum dupla eius, quæ ex centro ad angulum poligoni ducitur, & cum tertia proportionalium ad duas prædictas.

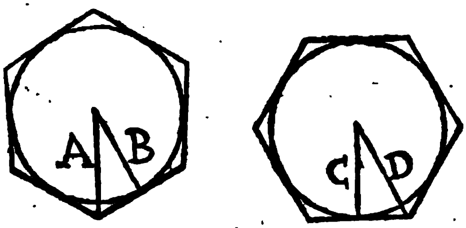
Sint solida sphæralia imparilatera, circa catetos B, & D. reuoluta. Continuetur ratio perpendicularis B ad radium poligoni A in tribus terminis B, A, E. Item ratio D. ad C in tribus terminis D, C, I, continuata sit. Dico solidum primum ad secundum esse vt parallelepipedum basi quadrato B, altitudine verò æquali B semel, A bis, & E semel, simulq; sumptis, ad parallelepipelepipedum basi quadr. D. altitudine verò æquali D. semel, C. bis, & I semel simulq; sumptis.



Concipiatur in vtroq; solido sphęrali sua sphęra inscripta, eritq; solidum primum ad sphæram suam vt B & E simul cum dupla ipsius A ad quadruplam B. sumptaque communi basi quadrato B. erit solidum primum ad sphæram suam vt parallelepipedũ basi quadrato B. altitudine verò B & E cum dupla A. ad quatuor cubos B. Sphæra autem prima ad secundam est, vt quatuor cubi B ad quatuor cubos D; Sphæra tandem secunda ad solidum suum est, vt quatuor cubi D. ad parallelepipedum basi quadrato D. altitudine D & I cum dupla ipsius C (quod ostenditur vt nuper factum est) ergo ex æquo patet quod propositum fuerat. &c. 18 huius

Propositio L.

Solidum sphærale parilaterum circa diagonalem reuolutũ, ad solidum sphęrale parilaterum circa catetum reuolutum, est vt parallelepipedum basi quadrato cateti, altitudine diagonali bis sumptum, ad parallelepipedum basi quadrato cateti simul diagonalisque, altitudine verò cateti.



Sint duo solida sphæralia, quorũ alterum circa diagonalem A sit reuolutum, alterum verò circa catetum C. Dico solidum primũ circa diagonalem, ad solidũ secundum circa catetum, esse vt parallelepipedũ basi quadr. B altitudine A bis sumptum, ad parallelepipedum basi æquali quadratis C,D, altitudine verò C.

6. huius. Intelligatur in vtroque solido inscripta sua sphæra. Et erit solidum primum ad sphæram suam, vt recta A ad B; sumptaq; eadem basi quadrato B; erit solidum primum ad sphæram suam, vt parallelepipedum basi quadrato B altitudine verò A, ad cu-

1 bum B; siue vt duplum dicti parallelepipedi ad duos cubos B. Sphæra verò prima ad secundam est, vt duo cubi B, ad duos cu-

13 huius bós C. Sphæra tandem secunda ad solidum suum est, vt duo quadrata ex C, ad duo quadrata C, & D; sumptaque communi altitudine C, est, vt duo cubi C, ad parallelepipedum basi æquali quadratis C & D. altitudine verò C. Propterea ex æquo patet quod propositum erat.

Propositio LI.

SOlidum sphęrale parilaterum circa diagonalem reuolutum, ad solidum sphærale imparilaterum est, vt parallelepipedum basi quadrato cateti, altitudine diagonali quater sumptum; ad parallelepipedum basi quadrato rectæ illius quæ ex centro poligoni imparilateri perpendiculariter ducitur in latus eiusdē, altitudine verò æquali prædictæ perpendiculari, vna cum dupla illius quę ex centro ad angulum ducitur, & cum tertia proportionali ad duas prædictas.

Sint duo solida sphæralia, nempe primum parilaterum circa diagonalē A conuersum, alterum verò imparilaterum circa catetum C reuolutum. Cōtinuetur ratio C ad D in trib. terminis C,D,E. Dico primum solidum ad secundum esse, vt parallelepipedum basi quadrato B, altitudine A quater sumptum, ad parallelepipedum basi quadrato C, altitudine verò æquali rectis C, & E cum dupla D. simul

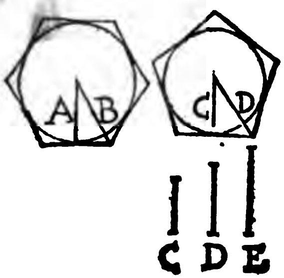
simul sumptis.

Nam solidum primum ad sphæram suam est, vt recta A ad B; siue sumpta communi basi quadrato B; vt parallelepipedum basi quadrato B altitudine A, ad cubum B; Vel ut parallelepipedum prædictum quater sumptum, ad cubum B quater sumptum sphæra uerò prima ad secundam est ut quatuor cubi B ad quatuor cubos C, Sphæra denique secunda ad solidum suum (ut ostensum est in 40. huius) est ut quatuor cubi C, ad parallelepipedum basi quadrato C, altitudine uerò æquali rectis C & E cum dupla D. simul sumptis. Propterea ex æquo patet quod propositum erat.

Propositio L II.

Solidum sphærale parilaterum circa catetum reuolutum, ad solidum sph. imparilaterum, est ut parallelepipedum basi æquali quadratis diagonalis & cateti altitudine cateti bis sumptum, ad parallelepipedum basi quadrato lineæ quę ex centro ducitur perpendiculariter in latus poligoni imparilateri, altitudine uerò æquali prędictæ lineæ, una cum illa quę ex centro ad unum angulum perducitur, & cum tertia proportionalium ad duas prædictas.

Sint duo solida sphæralia; alterum parilaterum circa caterum A reuolutum; alterum imparilaterum circa C conuersum. Et ratio C ad D, continuetur in tribus terminis C, D, E. Dico primum solidum ad secundum esse, vt parallelepipedum basi æquali quadratis B & A, altitudine verò A, bis sumptum; ad parallelepipedum basi quadrato C, altitudine verò æquali C, & E, cum dupla ipsius D.



Nam solidum primum ad sphæram suam est, vt duo quadrata B 13 huius ta B & A, ad duplum quadrati A. siue sumpta commnni altitudine A. vt parallelepipedum basi æquali quadratis B & A, altitudine A ad duos cubos A. Vel vt dictum parallelepipedum bis sumptum, ad quatuor cubos A. Sphæra autem prima ad secundam, est vt quatuor cubi A ad quatuor cubos C. Sphæra denique secunda ad solidum suum est vt quatuor cubi C, ad parallelepipedum basi quadrato C altitudine æquali C & E, cum dupla D. (ut ostensum fuit in Propos. 49. huius.) Ergo ex æquo patet quod propositum fuerat.

FINIS.

DE MOTV GRAVIUM

Naturaliter deſcendentium, Et Proiectorum

LIBRI DVO.

In quibus ingenium naturæ circa parabolicam lineam Ludentis per motum oſtenditur,

Et vniuerſa Proiectorum doctrina vnius deſcriptione ſemicirculi, abſoluitur.

DE MOTV GRAVIVM Naturaliter deſcendentium.

LIBER PRIMVS.

SCIENTIAM de motu G.& Pr. à pluribus quidem tractatã, ab vnico (quod ego ſciam) Galileo Geometricè demonſtratam, aggredi libet. Fateor, quòd ille totam hanc ſegetem tamquã falce demeſſuit, nec aliud ſupereſt nobis, niſi vt tam ſeduli meſſoris veſtigia ſubſequentes, ſpicas colligamus, ſi quę ab ipſo vel relictæ fuerint, vel abiectæ: ſin minus, Liguſtra ſaltem, & humi naſcentes violas decerpamus; ſed fortaſſe & ex floribus coronam contexemus non contemnendam.

Principio quædam de momentis grauium proponemus, vt aliqua ſuppleamus, quæ quodammodo opportuna videbantur ad ſcientiam. Deinde quædam de parabola, quæ nobis ad propagationem huius doctrinæ vtilia videbuntur, Reliquum libri primi propoſitiones erunt de motu accelerato; illarumque ordo quo ad fieri poterit in tam diuerſis rerum materijs, neglectus penitus non erit. Libellus alter de Motu proiectorum tractabit, ampliata Galilei doctrina, & demonſtrationibus plerumq; mutatis. Tabulas certè, quas ipſe ſtudio, ac labore compoſuit, omnes ex tabula ſinuum à nobis ſolius tranſcriptionis moleſtia, decerptas exponemus nam hypotheſis noſtra, iuxtà quam proiectiones ſurſum factas contemplamur, apertè indicauit nobis tabulas à Galileo elaboratas in ipſis ſinuum, ac tangentium tabulis expreſsè incluſas, & inſertas esse debere. Postremo normæ cuiusdam militaris constructionem subijcemus, quæ cum diuersa sit à vulgari norma, cuius ope vniuersa res tormentaria administratur, certè, & scientificè phylosophos docebit quantum axis cuiusq; machinæ proicientis eleuari debeat, vt illius iactus propositæ, ac determinatæ mensuræ euadat. Quin etiam omnia problemata iucunda scitu, vsu non inutilia, quæ circa hanc materiam proponi possunt, soluta vnico intuitu in aspectum dabit: vt ibi fusius explicabimus. Definitiones omisimus, & genere scriptionis contracto, laconicoq; vsi sumus, quia dum vniuersam Galilei doctrinam pro suppositione præmittimus lectori erudito scribere profitemur.

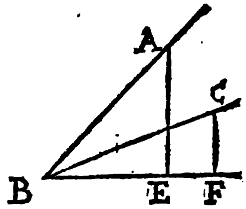
Acturus de Motu naturalitèr accelerato Galileus principium supponit, quod & ipse non admodum euidens putat, dum illud parum exacto penduli experimento nititur comprobare. hoc est.

Suppo-sit. Galilai. Gradus velocitatis eiusdem mobilis super diuersas planorū inclinationes aquisitos, tunc esse æquales, cum eorumdē planorū eleuationes æquales sint. *Ex hac petitione dependet quasi vniuersa illius doctrina de motu tùm accelerato, tum proiectorum. Si quis de principio dubitet de ijs quę inde cōsequuntur certam omninò scientiam non habebit. Scio Galileum vltimis vitæ suæ annis suppositionem illam demonstrare conatum, sed quia ipsius argumentatio cum lib. de Motu edita non est pauca hæc de momentis grauium libellò nostro præfigenda duximus; vt appareat quòd Galilei suppositio demonstrari potest, & quidem immediatè ex illo Theoremate quod pro demonstrato ex Mechanicis ipse desumit in secunda parte sextæ Propositionis de motu accelerato, videlicet. Momenta grauium æqualium super planis inęqualiter inclinatis, eße inter se vt sunt perpendicula partium æqualium eorumdem planorum. Verbi gratia.*

Sint plana a b. c b. *inæqualiter inclinata, & sumptis æqualibus* a b, c b. *ducantur perpendicula* a e, c f: *ad horizontem* b f. *Supponit Galileus pro demonstrato, momentum in plano* a b. *ad momentum in plano* c b. *ita eße vt est* a e. *ad* c f. *Nos quia in huiusmodi Theorema non incidimus, hoc primum aliqua*

demon-

demonſtratione confirmabimus: protinus ad oſtendendum id quod Galileo principium ſiue petitio eſt, accedemus.



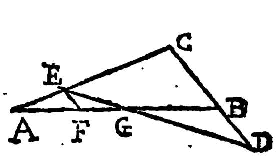
Præmittimus.

Duo grauia ſimul coniuncta ex ſe moueri non poſſe, niſi centrum commune grauitatis ipſorum deſcendat.

Quando enim duo grauia ita inter ſe coniunctà fuerint, vt ad motum vnius motus etiam alterius conſequatur, erunt duo illa grauia tamquam graue vnum ex duobus compoſitum, ſiue id libra fiat, ſiue trochleà, ſiue qualibet alia Mechanica ratione. graue autem huiuſmodi non mouebitur vnquam, niſi centrum grauitatis ipſius deſcendat. Quando verò ita conſtitutum fuerit vt nullo modo commune ipſius centrum grauitatis deſcendere poſſit, graue penitus in ſua poſitione quieſcet: alias enim fruſtra moueretur; horizontali, ſcilicet latione, quæ nequaquam deorſum tendit.

PROPOSITIO I.

SI in planis inæqualiter inclinatis, eandem tamen eleuationem habentibus, duo grauia conſtituantur, quæ inter ſe eandem homologè rationem habeant quam habent longitudines planorum, grauia æquale momentum habebunt.



Sit *ab*. horizon, & plana inæqualiter inclinata *ca*, *cb*. Fiat vt *ac* ad *cb*, ita graue aliquod *a*. ad graue *b*. Et grauia hæc in homologis planis collocentur, in punctis *a*, & *b*. eiuſdem horizontalis lineæ. Connectantur etiam aliquo imaginario funiculo per *a c b*. ducto, adeo vt ad motum vnius motus alterius conſequatur.

Dico grauia ſic diſpoſita æquale momentum habere: hoc eſt in ea in qua sunt positione æquilibrata conquiescere; neq; sursum aut deorsum moueri. Ostendemus enim centrum commune grauitatis eorum descendere non posse, sed in eadem semper horizontali linea (quantumlibet grauia moueantur) reperiri.

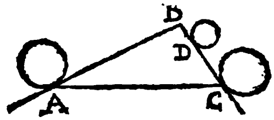
Non habeant si possibile est æquale momentum, sed altero preponderante moueantur, & ascendat graue *a* versus *c*, descendatq; graue *b*. Assumpto iam quolibet puncto *e*, cum graue *a* fuerit in *e*, & *b* in *d*, erunt lineæ *ae*, *bd*. æquales, quia idem funiculus est, tam *acb*, quam *ecd*. Demptoq; communi *ecb* remanent æquales *ae*, *bd*. Ducatur *ef* parallela ipsi *cb*, & connectantur puncta *e d*. Est igitur graue *a*. ad graue *b*. vt *ac* ad *cb*, hoc est vt *ae* ad *ef*, hoc est *bd*. ad *ef*, hoc est *dg* ad *ge* reciprocè. Est ergo punctum *g* centrum grauitatis commune grauium connexorum, & est in eadem linea horizontali in qua fuerat antequàm grauia mouerentur. Duo ergo grauia simul colligata mota sunt, & eorum commune centrum grauitatis non descendit. Quod est contra præmissam æquilibrij legem.

4. *sexti exemplũ Archim. æquipon dum.*

PROPOSITIO II.

Momenta grauium æqualium super planis inæqualiter inclinatis, eandem tamen eleuationem habentibus, sunt in reciproca ratione cum longitudinibus planorum.

Sint plana *ab*, *bc* inæqualiter inclinata, & ad idem punctum *b*. eleuata. Sintq; in eisdem planis æqualia grauia *a* & *c*. Dico momentum grauis *c* ad momentum grauis *a*, esse reciprocè, vt *ab*, ad *bc*. Fiat vt *ab*, ad *bc*, ita graue *a* ad graue aliud *d*, & ponatur *d*. in plano *bc*. Ergò per præcedentem erunt ipsorum *a*, & *d*. momenta æqualia.



Momentum autem *c*. ad momentum *d*. est vt moles ad molem (quia sunt in eodem plano) hoc est vt moles *a*, ad molem

d: hoc

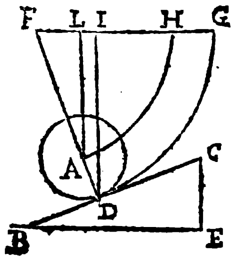
d: hoc est vt *a b*, ad *b c*. Est ergo momentum *c*. ad *d*, vel ad momentum *a*. ipsi momento *d*. æquale; vt *a b*, ad *b c*. Quod erat &c.

Aliter.

Idem quod hic demonstrauimus ex Prima Propositione, quæ sumpto principio deducebat ad impossibile, ostendetur etiam absolutè, & affirmatiuè ex ipsis Mechanicæ principijs.

Lemma.

Momentum totale grauis ad momentum quod habet in plano inclinato, est vt longitudo ipsius plani inclinati ad perpendiculum.



Sit circa centrum a. *sphæra grauis in plano eleuato* b c. *& sit plani perpendiculum* c e. *dico momentum totale grauis* a *ad momentum peculiare quod habet in plano* b c, *esse vt* b c. *ad* c e.

Producatur recta d a. *per contactum* d, *& per centrum* a. *quæ ideo perpendicularis erit ad planum* b c. *& quolibet centro* f. *fiant quadrantis portiones* d g, a h. *& ducatur* f g. *horizontalis, &* d i, a l. *vtraq; ad horinzontem perpendicularis.*

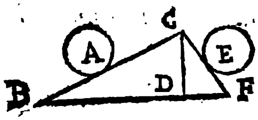
Iam Angulus f d c. *rectus est; & anguli* b, c. *simul æquales sunt recto, ergò ablatis* i d c, d c e, *alternis parallelarum, remanent æquales* f d i, *&* b. *Sunt ideo similia duo triangula rectangula* f d i, b c e. *Iam sic.*

Sed quando graue circumfertur à semidiametro f h, *siue* f a, *manente puncto* f *tunc momentum totale eius, hoc est, momentum quod habet in situ* h, *ad momentum quod habet in situ* a, *est vt* h f. *ad* f l, *siue* a f. *ad* f l, *hoc est* d f. *ad* f i, *vel* b c. *ad* c e. *ob similitudinem triangulorum. Quod erat &c.*

Quod autem idem momentum sit grauis constituti, siue in puncto a *quadrantis* a h, *siue in puncto* d. *quadrantis* d g, *siue in* *ne in puncto* d. *plani tangentis, dubitandum non videtur; quandoquidem angulus contingentiæ inclinationem non minuit, neque auget.*

Hinc Propositio secunda iterum.

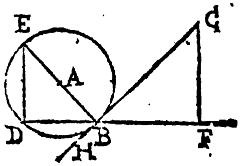
Momenta grauium æqualium super planis inæqualiter inclinatis sunt in reciproca ratione cum longitudinibus planorum.



Momentum in a. *ad totale momentum, per præcedens lemma, est vt* c d. *ad* c b; *totale autem momentū ad momentum in* e. *est vt* f c. *ad* c d; *ergo per perturbatam rationem, momentum* a *ad momentum* e. *est reciprocè, vt* c f. *ad* c b *&c. Quod erat &c.*

Corollarium.

Hinc colligitur momentū sphæræ grauis super diuersas planorum eleuationes semper esse vt linea illa horizontalis quæ à contactu in ipsa sphæra ducitur.



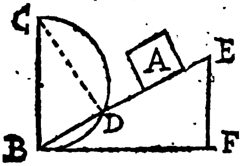
Sit sphæra grauis circa centrum a. *in plano* b c *vtcunque inclinato; & ducatur* b d. *horizontalis à contactu: ostendemus momentum sphæræ in situ in quo est, esse lineam* b d, (*posita semper diametro pro momento maximo, siue totali.*)

Producatur horizon d b f, *demittatur que perpendiculum* c f. *à quolibet puncto; & iungatur* e d.

Angulus e *æqualis est angulo* d b h. *per 32. tertij; eidem* d b h. *est æqualis* c b f. *ad verticem, ergo æquales sunt inter se anguli* e, *&* c b f, *sunt insuper triangula* e d b. b c f *rectangula, ergo similia sunt inter se. Sed iam ostendimus momentum totale sphæræ ad momentū quod habet in eleuato plano esse vt* b c *ad* c f, *nempe vt ipsa diameter* e b. *ad horizontalem* b d, *quæ intra sphæram à contactu ducitur.*

Si vero graue non sit sphæra, sed quodcunq; solidum a. *habebimus*

bimus nihilominus singula eius momenta in singulis planorum eleuationibus facilime. Soluemus etiam Problema Pappi lib. 8. Propos. 9. famosum apud Guidobaldum, & Cabeum &c.



Sit graue a. *in plano* a b, *& quaeratur in hoc situ momentum eius; siue potentia, à qua in hoc plano* a b. *sustinetur.*

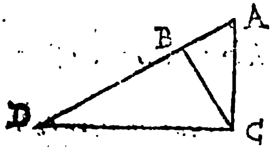
Ponatur momentum totale grauis; vel, potentiam quae sustinet pondus a. *in plano perpendiculari esse* b c, *& circa* b c *erectam ad horizontem fiat semicirculus* c d b. *qui secet* a b. *in* d.

Dico momentum grauis a, *siue potentiam qua illud sustinet in plano* a b. *esse* b d. *Ducatur perpendicularis* e f. *à quolibet puncto* e. *& erunt triangula* c b d, b e f. *similia; quia cum sint vtraq; rectangula, anguli etiam* c b d. *&* e *sunt alterni. Iam quia momentum totale grauis ad momentum quod habet in plano* e b. *est vt* e b. *ad* e f, *erit etiam vt* c b, *ad* b d. *ob similitudinem triangulorum, Est igitur momentum grauis in plano* a b. *vt linea intercepta* b d. *(posita semper diametro pro totali momento.)*

Quo ad propositionem Pappi. manifestum est, si potentia b c *aequatur totali momento* b c. *potentiam* b d. *aequari momento in plano* b d. *Quare potentia* b d. *sustinebit pondus* a. *in proposito plano* b e *&c.*

Scholium:

Iam demonstrari primum potest Propositio sexta Galilei de motu accelerato. Sit enim angulus a b c *rectus, &* ac. *perpendicularis ad horizontem* c d. *& producatur* a b d. *Erunt* d a, a c, a b, *continuè proportionales; at per 2. huius, momentū in* a c. *ad momentā in* a d. *est reciprocè vt* a d *ad* a c. *hoc est vt* a c, *ad* a b, *Ergo est homologe, momentum in* a c, *ad momentum in*



a b,

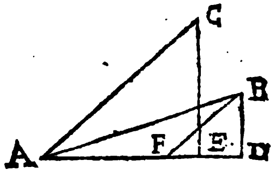
a b, *vt spatium* a c, *ad spatium* a b; *quare eodem tempore peragentur ipsa spatia* a c *&* a b; *Supponimus hic cum ipso Galileo, velocitates in diuersis planorum inclinationibus, ita esse vt sunt momenta quando eadem fuerit moles. Sed cum angulus* a b c. *ponatur rectus, erunt* b c . a b *in circulo cuius sublime punctum est* a, *& diameter* a c. *Quod &c.*

PROPOSITIO III.

Assumitur à Galil. in 6. de Motu accel.

Momenta grauium ęqualium super planis inæqualiter inclinatis, sunt in homologa ratione cum perpendiculis partium ęqualium eorumdem planorum.

Sint partes æquales *a b*, *a c*. planorum inęqualiter inclinatorum, & eorumdem perpendicula sint *b d*. *c e*. Dico momentum grauis in plano *b a*, ad momentum eiusdem in plano *c a*, esse vt *b d*, ad *c e*.



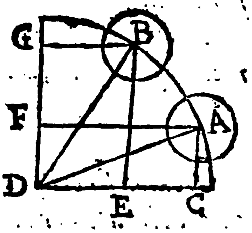
Ducatur *b f*. ipsi *c a*. ęquidistans. Eritque per secundam huius momentum in *b a*. ad momentum in *b f*, hoc est in *a c*. (sunt enim plana *b f*, *a c* parallela) vt *f b*, ad *b a*. hoc est vt *f b*, ad *c a* (cum sint ęquales partes *b a*, *c a*) vel vt *b d*, ad *c e*. (sunt enim ęquiangula triangula *f b d*, *a c e*. ob lineas parallelas.) Ergo momentum in *b a*, ad momentum in *c a*, est vt *b d*, ad *c e*. Quod erat &c.

Corollarium.

Hinc manifestum est momenta grauium super planis inequaliter inclinatis esse vt sunt sinus recti angulorum eleuationis.

Quando verò sphęra non moueatur in aliquo plano libera, sed alligata ad extremum semidiametri, manente alio extremo, ipsa per quadrantem circumferatur, erunt momēta eius vt sunt sinus complementi, angulorum eleuationis. Nam momentum a, *ad momen-*

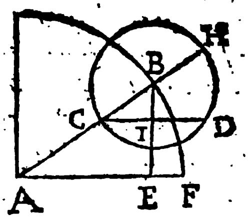
momentum b. *est vt* cd. *ad* de, *hoc est* af. *ad* bg, *nempe vt sinus cõplementi angulorum eleuationis.*



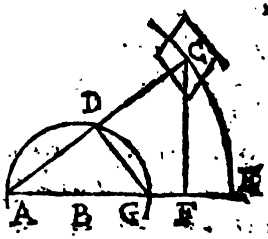
Aliter habebimus mensuram momentorum sphęrę à semidiametro circumductę, in vnoquoq; quadrantis puncto. Ostendemus enim.

Momenta sphærę per quadrantem circum ductę esse vt sunt lineæ horizontales, quæ à puncto connexionis sphęrę cum diametro, intra sphæram ducuntur.

Sit quadrantis centrum a, *sphæra grauis circa* b, *& à puncto connexionis* c. *ducatur horizontalis* cd. *Dico momentum sphęrę esse* cd. (*posita semper diametro sphęræ pro maximo siue totali momento.*) *Demittatur perpendiculum* be. *Momentum totum sphæra ad momentum quod habet in* b. *est vt* af, *ad* ae, *vel vt* ba *ad* ae, *hoc est* bc. *ad* ci, *& sumptis duplis, vt* hc. *diameter ad* cd *horizontalem in sphæra, quæ ducitur à puncto connexionis. Quod erat &c.*



Si verò graue circumductum non sit sphæra dabuntur nihilominus singula eius momenta hoc modo. Sumpto in horizontali linea quolibet interuallo ab. *fiat circulus* adg. *Dico circulum hunc singula singularum eleuationum momenta metiri: Et momentum grauis in* c. *esse lineam interceptam* ad. (*posita semper diametro* ag. *pro totali momento*) *Est enim momentum totale ad momentum in* c. *vt* ea. *ad* af, *hoc est vt* ca *ad* af, *vel vt* ga *ad* ad *nempe diameter ad lineam interceptam.*



Eadem ad. *erit potentia quę sustinet graue in situ* c, *si supponatur* *ponamus potentiam quæ illud sustinet in* e. *esse* ag.

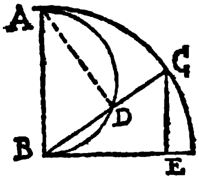
Assumpsimus triangula acf, adg. *esse similia, quia cum rectangula sint, habent angulum communem ad* a.

Scholium.

Demonstrari secundum potest Propositio sexta Galilei de Motu accelerato per tertiam huius, præmisso hoc Lemmate.

Lemma,

Si circa eandem rectam lineam ab. *fuerit semicirculus, & quadrans, & in quadrante ducatur qualibet semidiameter* bc. *Erit* bd, *intercepta in semicirculo æqualis ipsi* ce. *perpendiculari in quadrante. Ducatur enim* ad. *tunc triangula* adb, bce. *erunt vtraq; rectangula, & anguli* abd, bce, *sunt alterni, ergo sunt æquiangula; bases autem* ab, bc. *sunt æquales, quare etiam* bd, ce. *latera æqualia sunt. Quod erat probandum.*

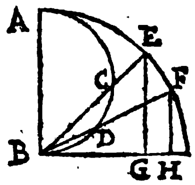


Propositio Galilei Sexta.

Cum ipso Galileo Mechanicè demonstrata.

S*It circulus ad horizontem erectus* acd b. *Dico tempora lationum per* cb. db. *esse æqualia.*

Sunt enim super planis cb, db. *per tertiam huius, momenta vt* eg, fh, *hoc est vt* cb. *ad* db. *per lemma præcedens. Ergo cum sint momenta vt longitudines planorum, eodem tempore percurrentur ipsa plana* cb db; *quod erat propositum demonstrare &c.*



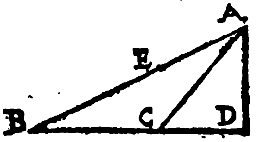
PROPOSITIO IV.

Galilei 3 & eius Corol.

TEmpora lationum ex quiete per plana eandem eleuationem habentia, sunt homologè vt longitudines planorũ.

Sint

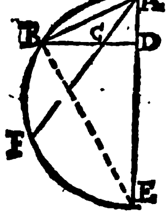
Sint plana *ab*, *ac*, eandem eleuationem *ad* habentia. Dico tempus lationis per *ac* ad tempus per *ab* esse vt *ac* ad *ab*.



Sit ipsarum *ab*, *ac* tertia proportionalis *ae*. Momentum ergò in plano *ac* ad momentum in plano *ab*, est vt *ab*, ad *ac*. (per secundam huius,) hoc est vt *ac*. ad *ae*. Quare lationes per *ac*, *ae* temporibus æqualibus absoluentur: quandoquidem ita sunt momenta vt longitudines spatiorum. Ponamus iam tempus per *ae*, esse mediam proportionalem *ac*. Erit tempus per *ab*. ipsa *ab*; tempus ergo per *ae*, siue per *ac*. (nã æqualia tempora sunt) est *ae*, & per *ab* est ipsa *ab* &c. Quod erat &c.

Aliter.

Precedens Theorema poterat demonstrari sine vlla suppositione. Demonstrat enim Galileus in Prop. 6. de motu accelerato, tempora lationum per chordas omnes in circulo æqualia esse. Idq; tribus modis probat. in primo, & tertio subest principium suum non satis euidens; in secundo verò nihil supponitur, preter iàm dictum Theorema Mechanicum; quod si, ipso teste, demonstratum antea fuerat, ex ipso immediatè, tamquam Corollarium, necessaria illatio suæ tertiæ Propositionis, immo & suæ petitionis, deriuari poterat. Sed quia ipse tertiam suam Propositionem, quæ nobis quarta est, mediante sua petitione probat, nos illam absolutè ostendamus ex propositionibus ipsius Galilei, quæ nullum postulatum includunt.



Sint duo plana ab, ac. *quorum eadem eleuatio sit* ad. *Dico tempus lationis per* ac. *ad tempus per* ab, *esse vt* ac. *ad* ab. *facto enim angulo* abe. *recto, agatur circulus circa diametrum* ae, *qui transibit per* b, *& producatur* acf. *Erit* ab. *media proportionalis inter* fa, ac, *& erunt tempora per* ab, af. *æqualia, vt o-*

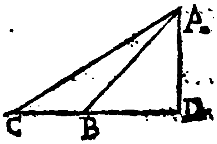
stendit Galileus simpliciter ex illo Theoremate Mechanico sine sua suppositione.

Si ergo ponamus tempus lationis per a c, *esse ipsam* a c *erit media proportionalis* a b, *tempus per* a f *hoc est per se ipsam* a b. *&c. Quare tempora lationum ex quiete per plana eandem eleuationem habentia sunt homologè vt longitudines planorum, & hoc demonstrauimus sine illa petitione, cuius veritatem sequenti Theoremate ostendemus.*

PROPOSITIO VI.

Galilei suppositio. GRadus velocitatis eiusdem mobilis super diuersas planorum inclinationes acquisiti, tunc æquales sunt cum eorumdem planorum eleuationes æquales sint.

Sint duo plana *a b*. *a c*. inæqualiter inclinata, quorum eleuationes sint æquales, vel sit eadem *a d*. Dico gradus velocitatis acquisitos in *b*. per descensum *a b*, & in *c*. per descensum *a c*. æquales inter se esse.



Quicunq; enim sit gradus velocitatis aquisitus in *b*, accepto eius subduplo, graue motu æquabili, & tẽpore casus currit idem spatium casus *b a*. Iterum; quicunq; sit gradus velocitatis aquisitus in *c*, accepto eius subduplo, graue motu æquabili, & tempore casus currit idem spatium casus *c a*.

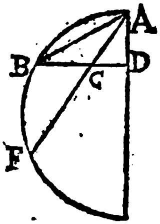
Tempora igitur, & spatia sunt proportionalia nempe. Tempore *b a* curritur spatium *b a* motu æquabili: tempore autem *c a* curritur spatium *c a* motu æquabili, ergo gradus velocitatis sunt æquales. Quare etiam illorum dupli æquales erunt; & ideo gradus velocitatis in *b*, & in *c*. sunt æquales. Quod erat &c. *per 6. de motu æquabili Gal.*

Aliter per circulum sextæ Propositionis Galilei facilè demonstrabitur eadem conclusio hoc modo.

Ex Theoremate Mechanico deduxerat Galileus tempora per a b, a f. *æqualia esse. Dico ergo, Impetus in punctis* b, *&c. gra-*

uium

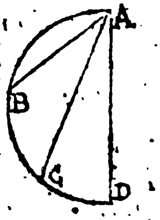
nimirum ab eadem altitudine, & ex quiete in a *descendentium, aequales esse.*



Quia enim a b, *&* a f. *aequali tempore peraguntur, erunt impetus in* b, *&* f. *punctis, ut sunt spatia peracta* a b, a f. *(Acceptis enim eorum subduplis aequali tempore, & motu aequabili curruntur spatia* b a. f a, *quare subdupli illi impetus sunt ut spatia, & propterea etiam illorum dupli ut eadem spatia erunt.) Impetus ergo* b. *ad impetum* f. *est ut* a b, *ad* a f, *impetus vero in* f. *ad impetum in* c. *est ut* f a. *ad* a b. *(nempe ut tempora, quia* a b, *media proportionalis est inter* f a. a c.) *Ergo ex aequali, impetus in* b. *ad impetum in* c. *est ut* a b, *ad ipsammet* a b. *Quare impetus in* b, *&* c. *sunt aequales. &c. Vel sic.* *per prim. Gal. de m. acc.*

Gradus impetus in c, *ad gradum in* f, *est ut* c a. *ad* a b, *vel* b a, *ad* a f, *cum tres* c a, a b, a f. *sint in continua proportione. Sed gradus etiam impetus in* b. *ad gradum in* f, *est ut* b a *ad* a f *(ut supra demonstrauimus.) Quare uterque gradus* c, *&* b. *ad eundem* f. *eandem rationē habet; & ideo aequales sunt. Quod &c.*

Corollarium.



Hinc pro Corollario extrahaemus id quod in ipso progressu demonstrationis ostensum est, nempe. Impetus grauium in fine chordarum circuli, quae ex puncto sublimi descēdant, ita esse ut sunt ipsamet chordae: hoc est impetus in punctis b, c, d, *ita esse ut sunt* a b, a c, a d. *&c.*

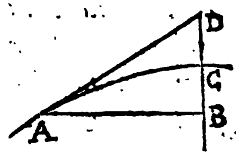
Scholium.

Cum deinceps futurus sit sermo de lineis quas parabolas vocant, non erit inconueniens, antequam illarum passiones in ordine ad motum consideremus, pauca quaedam necessaria nobis praemonstrare. Sic enim fiet ut paratiores accedere possimus ad *contemplandam lineam pro motibus non solum proiectarum, sed etiam (quod non scripsit Galileus) naturaliter cadentium, à natura vnicè factam. Premittimus semper tanquam suppositum vniuersam Galilei doctrinam de motu: illius enim vestigia sequimur, & paucula quadam Theoremata ab ipso neglecta colligimus. Hic pracipuè supponuntur dua Propositiones de Parabola, quas ipse operi suo de Motu Proiectorum, prefigit, alteram Apollonij quidem sed Marte proprio demonstratam à Galileo; alteram verò penitus ex Apollonij lib. 1. prop. 33. desumptam, & demonstratam:*

Prima est huiusmodi.

Lineæ, quæ intra parabolam basi parallelæ ducuntur, sunt in subdupla ratione portionum diametri ad verticem parabolę interceptarum.

Secunda verò est hec.



SI in parabola aliquod punctum *a* sumatur ex quo linea ducatur basi parallela *ab*, & portioni diametri *bc*. ad verticem interceptę, æqualis recta linea *c*d. ponatur in directum. Recta linea *da*, quæ ab extremo positæ lineæ termino *d*: ad punctum *a* in parabola sumptum, ducitur, parabolam continget, *quod & à nobis aliquo modo ostēdetur post Prop. 12.*

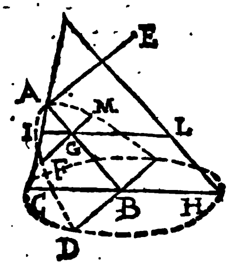
Hac ipse. His premissis reliqua nobis oportuna demonstrabimus: Et primò animaduertendum est, quod vnaquaq; parabola quandam rectam lineam peculiarem habet, cuius proprietas pracipua hac est. Ducta intra parabolam quacunq; linea basi parallela, quadratum ducta aquale est rectangulo, quod sub illa peculiari linea, & portione diametri ad verticem parabolę abscissa, continetur. Exempl. g. Quadratum recta ab *equale est rectangulo sub* bc *& illa peculiari linea contento; & hoc semper vbicumq; fuerit ducta* ab

Vocatur autem peculiaris illa linea Latus Rectum.

Qua verò ducuntur aquidistantes basi, Ordinatim applicata dicuntur.

PROPOSITIO VI.

Parabolæ latus rectum demonstrare.



MAnente figura, & constructione eadem quam ponit Galileus in prima iam dictarum propositionum de Parabola.

Fiat vt *ab*, ad *bc*. ita *bb*. ad *ae*. Dico *ae*. esse latus rectum.

Sumatur enim quodlibet punctum in parabola quod sit *f*, & ducatur *fg*. parallela ipsi *db*, item per *g*. agatur *igl*. parallela ad *ch*. eritq; *bglh* parallelogramum. Et quia factum est vt *ab*, ad *bc* ita *bb* ad *ae* erit *ag* ad *gi*, vt *ab* ad *bc*. hoc est vt *bb* ad *ae* siue vt *gl*, ad *ae*. Rectangulum ergo *gae*. æquale erit rectangulo *igl*, hoc est quadrato *fg*, Est ergo *ea*. latus rectum.

Corollarium.

Hinc manifestum est, si linea fg *. ordinatim applicata producatur vsq; ad vlteriorem semiparabolam in* m; *ipsam* gm *æqualem fore ipsi* fg. *eodem enim modo ostenditur quadratum* gm, *atq; quadratum* gf *. æquari rectangulo* igl *etc.*

PROPOSITIO VII.

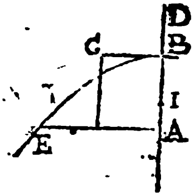
SVblimitas parabolæ apud Galileum, quarta pars est lateris recti eiusdem parabolæ.

Maneat constructio Propositionis V. de Motu proiectorũ Galilei, qua ipse reperit sublimitatem parabolæ.

Factum ibi fuit vt *ab*. altitudo, ad *bc* (æqualem nempe dimidio basis *ae*,) ita *bc*. ad aliam, quæ sit *bd*, & hæc erat sublimitas apud Galileum, probabimusq; ipsam esse quartam lateris recti partem.

Qua-

Quadratum *ea*. quadruplum est quadrati *bc*. hoc est rectanguli *abd*; (per constructionem) ergo etiam rectangulum sub *ab*, & latere recto quadruplum erit eiusdem *abd*; sed communis est *ab* altitudo rectangulorum, ergo bases, hoc est latus rectum, quadruplum erit sublimitatis *bd*. Quod &c.



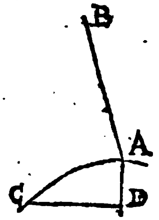
Definitio.

Quando, vt in praecedenti figura, sumitur in axe parabolę ex vertice linea b i. *quę aequalis sit quartae parti lateris recti, tunc punctum* i *vocatur focus parabolę. Manifestum ergo est; punctum sublime* d, *et focum* i, *aequaliter distare à vertice parabolae; nempe tantum vtrinq; quanta est quarta pars lateris recti.*

PROPOSITIO VIII.

Recta linea quae ex foco parabolae ordinatim applicatur, dupla est portionis axis ad verticem interceptae, Vel. aequalis est semissi lateris Recti.

Sit latus rectum *ab*, & focus *d*. Rectangulum *bad*. quadruplum est quadrati *ad*. (quia cum habeant communem altitudinem *ad*, basis *ba*. quadrupla est basis *ad*.) ergo etiã quadratum *cd*. quadruplum est eiusdem quadrati *ad*. Est igitur *cd* dupla ipsius *da*; siue aequalis semissi lateris recti. Quod erat &c.



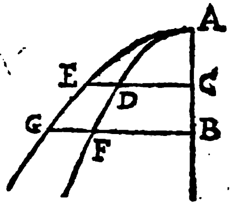
PROPOSITIO IX.

Si Parabolae quotcunq; circa eandem diametrum sint, lineę quae in illis ordinatim ducuntur, proportionales erunt.

Sit diameter communis *ab*. ordinatim autem ductae sint *cd ee*, & *bf*. *bg*. Dico esse vt *ee* ad *gb*, ita *dc*. ad *fb*.

Sunt

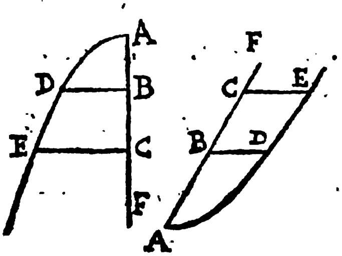
Sunt enim quadrata, *ec*, ad *gb*, vt recta *ac*. ad *ab*. Quadrata etiam *dc* ad *fb* sunt vt *ac*, ad *ab*. Ergo in eadem ratione sunt quadrata inter se; quare vt recta *ec* ad *gb*, ita est *dc* ad *fb*. Quod erat &c.



PROPOSITIO X.

TEmpora lationum, quæ ex quiete fiunt per plana quæcunque sunt inter se vt lineæ in parabola applicatæ ad spatia per quæ grauia descenderunt.

Sint spatia quælibet *ab*, *ac*, siue perpendicularia siue inclinata, & circa diametrum *ac* fiat parabola quælibet *ade*. atq; ordinatim ducantur *bd*. *ce*. Dico tempus per *ab* ad tempus per *ac*. esse vt *bd*, ad *ce*. Sunt enim tempora in subdupla ratione spatiorum ex Galileo, sed lineæ *db*, *ec*. sunt in subdupla ratione spatiorum (quia quadrata earũ sunt vt *ab*, ad *ac*.) ergo eadem ratio est & temporũ, & linearũ ordinatim ad spatia applicatarũ. Quod erat. &c.



Aliter.

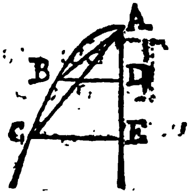
Si ponamus tempus lationis per latus rectum af *esse ipsummet latus rectum, erit tempus per* ab *. media proportionalis inter* fa, ab, *nempe ipsa* bd. *& tempus per* ac *media proportionalis* ce *&c. & sic de singulis. Quare &c.*

Corollarium.

Hinc manifestum est impetus grauium in fine portionum diametri parabolæ, esse inter se vt lineæ, quæ ordinatim applicantur ad extrema ipsarum portionum puncta. Sunt enim ex Galileo impetus vt ipsa tempora, sed ordinatim ducta sunt vt ipsa tempora, ergo impetus sunt vt ordinatim ducta &c.

PROPOSITIO XI.

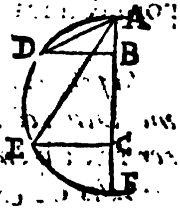
SI Lineæ à vertice parabolæ vsq; ad sectionem ducantur, erunt impetus in fine linearum, vt sunt ordinatim ex ipsarum terminis applicatæ.



Sit parabola cuius vertex *a*. & ducantur ex vertice *ab*, *ac*. Dico impetus in *b*, & *c*. esse vt *bd* ad *ce*. Manifestum est; Quia impetus in *b*, & *c*. sunt ijdem ac in *d*. & *e*. In *d*. autem & in *e*. sunt vt *bd*. ad *ce*. (per Corollarium præcedens) ergo etiam in *b*, & *c*. sunt vt *bd*, ad *ce*. Quod &c.

PROPOSITIO XII.

TEmpora lationum, quæ in circulo fiunt per portiones diametri ex puncto sublimi, sunt inter se vt chordæ quæ ex eodem puncto sublimi ducuntur, ad puncta peripheriæ in quæ incidunt ordinatim ductæ ex terminis dictarum portionum.



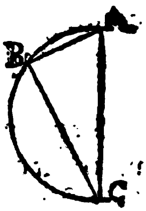
Sumantur vtcunq; *ab*, *ac*. & ducantur ordinatim *bd*, *ce*. iunganturq; *ad*, *ae*. Dico tempora lationum per *ab*, *ac* portiones diametri ita esse inter se vt sunt *ad*, *ae*.

Si enim ponatur tempus per *af* esse *af* erit tempus per *ab* ipsa *ad* cum sit media proportionalis. Et cum tempus per *af*. sit *af*, erit tẽpus per *ac*. ipsa *ae* media proportionalis. Quare &c.

Lemma.

Tempora lationum ex quiete per vnumquodq; latus trianguli rectanguli, cuius basis ad horizontem erecta sit, æqualia sunt inter se.

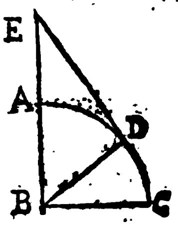
Hoc est tanquam Corollarium sextæ propositionis Galilei de motu accelerato. Sit enim semicirculus abc, *cuius punctum sublime sit* a. *& chordæ* ab, bc. *in semicirculo ad idem punctum* b, *coaptatæ. Dico tempora per* ab, *rectam ex quiete in* a, *& per* bc *ex quiete in* b. *esse æqualia. Vtrumq; enim tempus per* ab, *& per* bc. *æquale est tempori per diametrum* ac *ex Galileo ergò sunt æqualia inter se tempora per tres lineas* ac, ab, bc, *Quod &c.*



PROPOSITIO XIII.

Tempora lationum per semidiametros quadrantis erecti æqualia sunt temporibus tum secantium, tum etiam tangentium angulorum complementi eleuationis, qua fuerint eleuatæ dictæ semidiametri.

Sit quadrans erectus *abc.* semidiameter, quæcunq; *bd.* & tangens *de.* quæ angulum *bde.* rectum efficiet. Dico tempus per *db,* æquale esse tempori per secantem *eb,* siue per tangentem *ed.* quarum vtraq;, nempe *eb* est secans, *ed* tangens anguli *abd,* nempe complementi eleuationis semidiametri *db.*

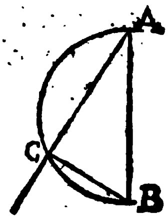


Propositum autem manifestum est per lemma præcedens cũ triangulum *.bde.* sit rectangulum, & ideo tempora per vnum quodq; latus æqualia sint.

PROPOSITIO XIV.

SI ab aliquo puncto plana diuersimode inclinata digrediantur, & ab illo eodem puncto dimittantur grauia eodem tempore simul; ostendit Galileus ex Corollario Propos. 6. de motu accelerato, grauia huiusmodi semper in peripheria alicuius circuli in immensum crescentis reperiri. Stante hoc dicimus.

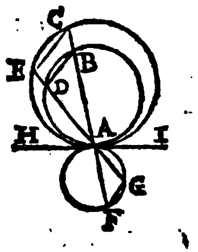
Si graue, quod perpendiculariter descendit, centrum terræ contingere posset, reliqua grauia eodem simul tempore singula in suis planis conquiescerent.



Sit planum perpendiculare *ab*. in quo omninò erit centrum terræ. Sit ergo terræ centrū *b*, & fiat circulus *acb*. qui transeat per centrū terræ *b*, & per punctum *a*. à quo grauia digrediuntur. Posito deinde quolibet plano *ac*, ducatur *bc*. Ostendit Galileus grauia eodem tēpore ad *b*, & *c*. peruenire. Igitur eodem tempore conquiescunt omnia; quia cum sit terræ centrum *b*, & linea *bc* perpendicularis ad planum *ac*, erit *c*. punctum infimum plani *ac*; ergo si aliquod graue vlterius procederet, ascenderet. Quod est impossibile. Ergo &c. Supponimus quod graue illud pertinens ad centrum terræ statim quiescat, quod ambiguum est &c.

Lemma.

Si circulum in eodem puncto duo circuli interius, & exterius contingant, & per contactum duæ rectæ lineæ agantur, erunt interceptę inter duas peripherias in eadem ratione cum interceptis in reliquo circulo.



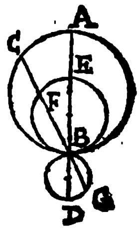
Sit vt ponitur; & contactus sit *a*. Dico esse vt *bc*. ad *de*, ita *af* ad *ag*. Ducatur *hi*. tangens, quæ tres circulos contingat in *a* & iungantur *ec*. *db*. *gf*.

Erit angulus qui ad *f*. (in alterno segmento) æqualis angulo *iag*. hoc est ipsi *had* hoc est vtrique ipsorum ad *b*, & *c*. Sunt ergo *ec*, *db*, *gf* parallelæ. Quare vt *cb* ad *ed* interceptæ inter duas peripherias, ita *ba* ad *da*, hoc est *af*. ad *ag*. interceptæ in reliquo circulo. Quod &c.

PRO-

PROPOSITIO XV.

SI Plana diuersimodè inclinata ad vnum punctum concurrant, & grauia dimittantur eodem simul tempore ex aliqua circuli peripheria, cuius infimum punctum sit concursus planorum, ipsa grauia semper in aliquo circulo simul disposita commeabunt.

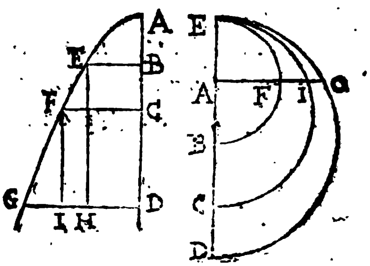


Sint plana *a b* perpendiculum, & *c b*. vtcunque inclinatum, quæ concurrant in *b*, & per concursum *b* transeat quælibet peripheria *b c a*. ita vt *b*. sit infimum punctum ipsius. Dico grauia ex *a*, & *c*. eodem tempore demissa semper in aliqua circuli peripheria commeare, quæ transeat per *b*.

Si enim ponamus graue *a* descendisse vsq; in *e*. producatur *b d*. æqualis ipsi *a e*, & per *e*. & per *d* agantur duo circuli qui priorem ciculum contingant in puncto *b*. Erit per Lem. præcedens vt *a e*, ad *c f*. ita *b d*. ad *b g*. ergo *c f*, & *b g*. sunt æquales. Sed *b d*, *b g*. ex quiete in *b*. eodem tempore peraguntur, ergo etiam *a e*, *c f*. eodem tempore peragentur (sunt enim æquales longitudine, & inclinatione ipsis *b d*, *b g*.) Quare grauia *a*, *c*, & infinita alia demissa simul ex peripheria *b c a*, semper in aliqua peripheria simul disposita reperientur. Quod &c.

PROPOSITIO XVI.

DAtis quotcunq; spatiis. deinceps in directum continuatis, vnicuiq; suæ lationis tempus adscribere.



Sint spatia quotcunq; deinceps, siue æqualia siue inæqualia *a b*, *b c*, *c d*. vt apparet in prima figura & circa diametrum *a d* fiat parabola *a g*. ducanturq; ordinatim *b e*, *c f*, *d g*. & sint parallelæ diametro *e h*. *f i*. Dico *d h*, *h i*, *i g*, tempora esse

spa-

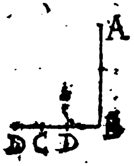
spatiorum respectiuè *ab*, *bc*, *cd*. Hoc enim patet. Nam *be*, siue *dh*. tempus est ipsius *ab*. & *cf*. vel *dk*. tempus est ipsius *ac*. quare *hk* tempus est spatij *bc*. &c. & sic de reliquis.

Potest etiam sine parabola idem perfici hoc modo. ut in sequenda figura. Ponatur a e *æqualis ipsi* a b. *primo spatiorum; & ducatur* a o *perpendicularis ad* a d. *fiãt deinde semicirculi circa diametros* e b, e c, e d. *&c. qui secent rectam* a o, *in punctis* f, i. o. *Dico* a f, f i, i o. *esse respectiuè tempora quæsita spatiorum* a b, b c, c d. *&c. Nam si ponamus tempus per* a b, *esse* a b, *hoc est* a f, *erit tempus per* a c. *media proportionalis, quæ est* a i, *ergo tempus differentiæ* b c. *erit* f i; *eodem modo ostendetur tempus per* c d, *esse* i o. *Quare patet &c.*

Propositum sit nobis; punctum sublime parabolarum (quod optimè, & ingeniosè reperit Galileus) diuerso modo considerare. Fiet enim ut nobis plus lucis afferat, ad impetus in singulis parabolæ punctis determinandos, & clarius mente concipiendos. Placuit has propositiones sub titulo De motu accelerato ponere, licet sapiant aliquid de proiectione, quia sunt circa parabola de genere earum, quæ initium habent ex vertice, & ab ipso motu naturaliter accelerato deriuare concipiuntur, sine ulla instrumentorum impellentium ope.

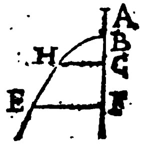
Lemma,

Si mobile aliquod ex a *puncto demissum, eodem tempore peragat duo spatia* a b, b c. *Dico ipsum omnino transire per punctum* c; *quamcunq; lineã describserit præcedenti ratione. Transeat enim si possibile est per* d. *ergo quia discessit ab* a. *eodem tempore confecit spatia* a b, *&* b d, *quod est contra suppositum. Quo enim tempore conficit* a b, *non absoluit* b d, *sed ipsam* b c. *Quare constat &c.*



PROPOSITIO XVII.

PRoposita qualibet parabola cuius vertex sit *b*. oportet punctum aliquod sublime reperire, ex quo si graue cadat vsq; in *b*, in b, & ex puncto b. cum impetu iam concepto, horrizontaliter conuertatur, ipsam propositam parobolam describat.



Sit quælibet parabola bhe. Ponantur ab, & bc: vtraq; æqualis quartæ parti lateris recti propositæ parabolę. Sumatur iam in parabola quantumuis producta aliquod punctum e. Dico graue post casum per ab, horizontaliter conuersum in b. cum impetu iam concepto, per ipsum e punctum transire. Debet autem post horizontalem conuersionem in puncto b factam, grauitas suam descensus operationem inchoare. Ducantur ordinatim ch, ef. Ponamusq; tempus casus per bc. esse cb. Ergo graue horizontaliter conuersum in c, decurret motu æquabili tẽpore casus duplum ipsius casus spatium. hoc est tempore cb. ipsam ch, vel tempore fe (eadem velocitate) ipsam fe. Graue igitur impetu per bc, siue per ab acquisito, conficit horizontalem fe. tempore fe. 8 huius.

Sed eodem tempore fe decurrit etiam perpendicularem bf (quando grauitas incipit operari in b vt in casu nostro) ergo eodẽ tẽpore conficit bf, & fe. Quare graue omnino transibit per e. Transit ergo graue post casum ab per singula propositæ parabolæ puncta. 20. huius. per lem. praced.

PROPOSITIO. XVIII.

IN Quolibet puncto parabolę duo simul impetus insunt. Alter horizontalis, qui semper idem est, & equalis sibi ipsi. Alter perpendicularis, qui nunquam idem est, sed semper augetur.

Dico horizontalem semper esse tanquam linea, quę ex foco ordinatim ducitur: perpendicularem vero esse velinea quæ ordinatim ducitur ex eo puncto, quod examinatur.

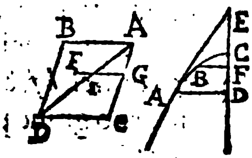
In figura præcedentis Propositionis.

Sit parabola cuius vertex b. & ponantur ba, bc. æquales vtraq; quartæ parti lateris recti. Quia impetus sunt vt tẽpora, erit impetus cadẽtis ex a in b, siue ex b in c, vt ipsa cb. per Propositionem Ex diff. & ita Gal.

nem X. huius, & eius Corollarium. Vbicunq; ergo sumatur punctum in parabola, impetus horizontalis in eo erit vt *c b*. Quandoquidem impetus horizontalis est indelebiliter æquabilis. Examinetur iam punctum quodlibet *e*. Impetus perpendicularis qui est in *e*, est idem ac impetus naturaliter cadentis per *bf*: ex quiete in *b*. Vterq; enim descensus venit ab altitudine *b*, vbi habent initium accelerationis. Impetus autem cadentis ex *b*. in *f*. est *fe*. ergo impetus perpendicularis in puncto *e* parabolæ erit *fe*. Quare in eodem puncto parabolæ sunt duo impetus, alter vt *c b*. quę est ex foco, alter vt *fe* quæ ex puncto examinato applicatur. Quod &c.

Scholium.

Hinc posset ostendi demonstratione directa proprietas tangentis parabolę, siue Theorema mauis, siue Problema posito prius hoc principio.



Si mobile aliquod *a* in prima figura ex angulo parallelogrāmi alicuius, vel ex quolibet puncto diametri feratur æquabiliter duplici simul latione, nempe progressiua secundum lineam *a c*, & laterali secundum *ab* vtcunq; inclinatā. sitq; proportio duarum velocitatum eadem ac proportio laterum *ac* ad *ab* homologè. Dico mobile iturum esse secundū diametrum *ad* hoc est per ipsam diametrum.

Si enim possibile est feratur mobile extra diametrum per aliquod punctum *e*, ducaturq; *eg* parallela ad *ab*. Ergo quam proportionem habent spatia peracta à mobili, eam habebunt & impetus: nempe vt spatium progressiuum peractum *ag* ad laterale peractum *ge*, ita impetus progressiuus ad impetum lateralem, ideoq; vt *ag* ad *ge* ita *ac* ad *ab* ob suppositionem, siue *ac* ad *cd*, siue *ag* ad *gi*, essent ergo æquales *ge* & *gi*. totum & pars.

Esto iam in secunda figura quodlibet punctum *a* in curua parabolica *abc*, & applicata *ad*, factisq; æqualibus *dc*, *ce*, ducatur *ae*, quam dico tangentem esse. Esto focus *f*, & applicata ex foco recta *fb*. Erunt iam in *a* duo impetus alter progressiuus deorsum secundum directionem lineæ *cd*, alter lateralis secundum *da*, estq; progressiui impetus ad lateralem ratio vt *ad* ad *bf*, per præcedentem Proposit. siue vt *ed* ad *da* (cum æquale sit rectangulum sub *ed* & semisse lateris recti *fb*, quadrato *da*) Ergo mobile dum est in puncto *a* feretur secundum diametralem *ae*; sed fertur etiam iuxtà parabolicam lineam quã percurrens describit, ergo recta *ae*, & parabolica nõ se intersecant in puncto *a*, sed tangunt: &c. Hæc demonstratio peculiaris est pro parabola; sed & vniuersalem habemus pro qualibet sectione Conica, consideratis æqualibus velocitatibus vnius puncti, quod æqualiter mouetur in vtraq; linea quæ ex focis procedit.

Eadem ratione demonstratur Propositio 18. de lineis spiralibus Archimedis vnica breuiq; demonstratione, non solum quando tangens consideratur ad extremum primæ reuolutionis punctum; sed vbicunq; punctum sit in curua spirali semper ostenditur peripharia, quæ per punctũ contactus ducitur æqualis cuidam rectæ lineæ &c. Quæ Propositiuncula cum olim inter amicos à me vulgata fuisset, Clar. Virum Galileum meruit habere laudatorem. vt extant ipsius epistolæ apud me.

Immò & hac ratione ostenduntur etiam vnico Theoremate tangentes quarumdam curuarum, inter quas, omnium linearũ Cycloidalium, vt breuiter attingemus ad finem libri de Quadratura Parabolæ, omittentes demonstrationem tam tangentium, quàm etiam solidorum, & centrorum grauitatis ipsius Cycloidis ad euitandam molem. Satis sit interea lectorem hic admonuisse quòd si Cycloidis spatium circa basim conuertatur, erit solidum ad cylindrum circumscriptum vt 5. ad 8. si uerò circa tangentem basi parallelam ut 7. ad 8. Centrum Cycloidis axem secat ita ut partes sint ut 7. ad 5. Demonstratur etiam ratio solidi circa axem ad cylindrum circumscriptum; item in qua

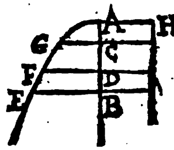
Q linea

linea axi parallela sit centrum semicycloidis. Clar. Vir Antonius Nardius ostendit quòd si Cyclois circa tangentem axi parallelam conuertatur solidum ad suum cylindrum erit subsesquitertium; quæ omnia fortasse aliquando edentur, interea ad opus reuertamur.

Lemma.

Si in diametro parabolæ æquales sint *ac* ex vertice, & *db*. non ex vertice, Erit quadratum *be*. æquale quadratis *df*. *cg*.

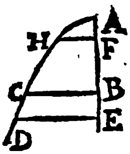
Sit ah. *latus rectum, & compleantur rectangula* cb, dh. *Quia* ac. db. *ponuntur æquales, erit rectangulum* bh. *æquale duobus rectangulis* dh, ch, *seu (quod idem est) quadratum* eb. *duobus quadratis* df. cg. *æquale erit. Quod &c.*



PROPOSITIO XIX.

Impetus in punctis parabolæ sunt inter se vt lineæ ordinatim applicatæ non ad ipsamet puncta, sed tanto longius à vertice quanta est quarta pars lateris recti.

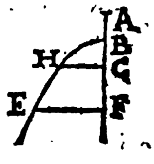
Sit parabola cuius vertex *a*. focus *f*. Sumptoque in ea quolibet puncto *c*, Dico impetum in *c* esse vt *de*, quæ applicata sit tanto longius à vertice, quàm ipsa *cb*, quanta est *af*. nempe quarta pars lateris recti.



per 2. Galil. de motu accel. Impetus enim qui simul sunt in *c*. sunt *cb*, *bf*, ergo momentum impetus ex ipsis compositum debet esse potentia ipsis æquale. Sed & recta *de*. æquatur potentia ipsis *cb*, *bf*. per lemma præcedens, ergo momentum *de*. est momentum siue impetus cōpositus ex duobus illis qui sunt in puncto *c*. Quod &c.

PROPOSITIO XX.

IMpetus in quolibet parabolæ puncto idem est ac impetus grauis naturalitèr cadentis ex sublimitate simul, & altitudine eiusdem parabolę. *Gal. de motu &c.*

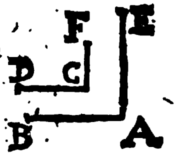


Sit parabola cuius altitudo *cb*, sublimitas *ab*. Dico impetum in puncto *h* eundem esse ac naturalitèr cadentis ex *a*. in *c*.

Sumatur *cf*. æqualis quartę parti lateris recti, hoc est ipsi *ab*. Erit impetus in puncto *h*: ut linea *ef*. per Præcedentem. At impetus etiam cadentis naturalitèr per *bf*, siue per *ac*, est eadem linea *ef*, ergo idem impetus est in puncto *h* parabolæ, ac in puncto *c*. grauis delapsi ex sublimitate simul & altitudine *ab*, *bc*. Quod erat.

PROPOSITIO XXI.

TEmpora lationum per datas lineas horizontales post casus è perpendiculo, æqualia erunt, quando altitudines perpendiculorum duplicatam rationem habuerint illius, quam horizontales lineæ habent.

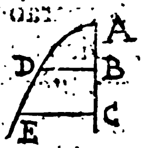


Sint horizontales lineæ datæ *ab*, *cd*. & altitudines perpendiculares sint *ea*, *fc*. Sitq; *ea*. ad *fc*. in duplicata ratione illius quam *ab* habet ad *cd*. Dico post casus *ea*, *fc*, eodem tempore peragi *ab*, & *cd*.

Hoc autem patet. quia cum sint *ab*, *cd*. in subdupla ratione ipsarum *ea*, *fc*, erunt etiam vt tempora casuum, & ideo vt velocitates, siue vt impetus qui sunt in *a*, & *c*. Propterea cum sint velocitates in *c*, & *a*, vt ipsa spatia *cd*, *ab* homologè, eodem tempore ipsa spatia peragentur. Quod &c,

PROPOSITIO XXII.

Lineæ ordinatim ductæ in parabola eodem tempore omnes percurruntur à mobili, quod per eas conuertatur impetu prius aquisito per casum diametri ex quiete in vertice.

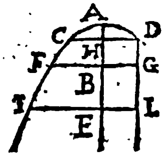


Sit *ab*. diameter parabolæ, & *bd*, *ce*. ordinatim ductæ. Dico mobile post casum *ab*, ipsā *bd*, & post casum *ac*. ipsam *ce*, æqualibus temporibus pertransire.

Sunt enim altitudines perpendiculares *ab*, *ac*. in duplicata ratione spatiorum horizontalium *bd*, *ce*. ob parabolam. Quare per præcedentem eodem tempore peragentur ipsa spatia horizontalia, hoc est ipsæ ordinatim applicatæ, post casus *ab*, *ac*. Quod &c.

PROPOSITIO XXIII.

Tempora lationum quæ fiunt ex vertice per diametri portiones simul, & suas ordinatim ductas, sunt vt ipsæ ordinatim ductæ; addita tamen singulis medietate lateris recti.



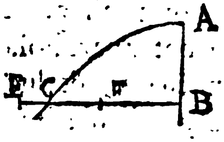
Sit parabola cuius vertex *a*, focus *b*, ordinatim ex foco ducta sit *chd*, quæ æqualis erit lateri recto. Demonstrata enim fuit ipsa *ch*, siue *hd* dupla ipsius *ha*, & ideo subdupla lateris recti. Ducatur per *d* parallela diametro *dl*. Dico tempus lationis per *abf*. esse *gf*, & per *aei*, esse *li*, & sic de singulis.

Tempus casus per *ab* est *hc*. sed cum dupla sit *hc*. ipsius *ah*. tempus per *hc*. idem erit, ac per *ab*, nempe *hc*. Ideo *hc*. tempus est omnium *bf*. *ei*. &c. (cum eodem tempore omnes peragantur per Præcedentem) Tempora autem casuum per *ab*, *ae*, sunt ipsæ *bf*. *ei*. Propterea tempus per *abf*. erit *fb*, & *cb*.

&c eh; simul, vel fg. Tempus item per aei. erit ie; simul cum eh, siue il. Quod erat &c.

Aliter idem ostendemus.

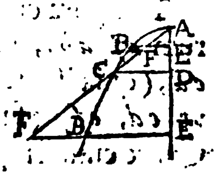
Sumatur in parabola quodlibet punctum b. *& ducatur ordinatim* b c. *ponaturq;* b e. *dupla altitudinis* b a. *Dico iterum, tempus lationis per* a b c *esse* b c. *cum semisse lateris recti. & sic de singulis. Tempus enim per* a b. *est* b c. *& per* b e. *duplam altitudinis post casum* a b. *tempus erit eadem* b c. *Cum itaq; tempus per* e b. *sit* c b. *tempus per* c b. *tanto minus erit quanto spatium minus est, cum idem impetus retineatur. Sumatur ergo ipsarum* e b, c b. *tertia proportionalis* f b. *& erit* f b, *tempus ipsius* c b. *post casum* a b.



Caeterum lineam f b *esse semissem lateris recti sic notum facimus. Rectangulum sub latere recto, &* a b. *aequale est rectangulo* e b f. *(vtrumq; enim aequatur quadrato* b c.) *quare reciproce habebunt latera; Nempe erit vt* e b *ad* b a. *subduplam; ita latus rectum ad* b f, *quae illius subdupla erit. Est itaq; tempus per* a b c. *ipsa* b c. *cum* b f. *semisse lateris recti. Quod erat &c.*

Lemma.

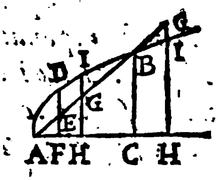
Sit parabola a b c, *ex vertice inclinetur* a c. *& ordinatim ducantur* c d. *ex puncto* c. *&* b e *vtcunq; secans* a c. *in* f.



Dico b e. *mediam proportionalem esse inter* c d, *&* f e. *Est enim* d a *ad* a e, *vel* c d. *ad* f e. *in duplicata ratione ipsius* c d. *ad* b e. *ob parabolam. Quare media proportionalis est* b e. *inter ipsas* c d, f e. *Quod erat &c.*

PROPOSITIO XXIV.

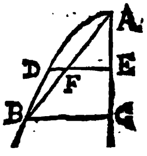
TEmpora lationum perpendicularium ex punctis lineae ad horizontem inclinatae, sunt vt lineae quae per eadem puncta orcta ordinatim ducuntur in parabola, cuius diameter sit Horizon, vertex autem punctum inclinationis.



Sit linea ad horizontem inclinata *ab*, & sit horizon *ac*., & circa diametrum *ac* describatur parabola quæ secet *ab*. in quolibet puncto *b*, & ducatur *bc*. ad horizontem perpendicularis; sumanturq; puncta quælibet *e*. & *g*; ac ducantur ordinatim *igh*, *def*. Dico tempora casuum per *gh*, & per *ef*. esse *ih*, & *df*. Si enim ponamus tempus per *bc*. esse *bc*, erit tempus per *gh*. media proportionalis *ih*; & per *ef*. media proportionalis *df*. Vti demonstratum est in lemmate præcedenti. Quare &c.

PROPOSITIO XXV.

SI in parabola linea *ab* ex vertice inclinetur, & ordinatim ducatur *de*, quæ inclinatam secet in *f*. Erit ipsa *ef*. tempus per *af*. & reliqua *fd*. tempus per reliquam *fb*. Quando motus veniant ex quiete semper in *a*.



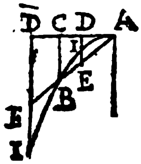
Tempora enim per *af*. *ab*. sunt in subdupla ratione spatiorum *af*, *ab*., siue linearum *ae*, *ac*. Sunt ideo tempora vt *cb*, *ed*, (quia istę sunt in illa subdupla ratione) vel vt *ed*, *ef*, (sunt enim continuę *cb*, *ed*, *ef*) Quare cum tempus per *af*. sit *ef*. & per *ab*. sit *ed*, erit *fd*. nempe reliquum tempus, tempus per *fb*. reliquum spatium post quietem in *a*. Quod erat &c.

Lemma,

Inclinetur ex vertice parabolę recta ab, *& parabolam tangat in vertice recta* ac. *Ducatur quæuis alia* di. *quæ occurrat parabolæ in* i, *& inclinata in* e. *Dico* de. *mediam proportionalem esse inter* cb, di.

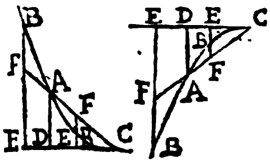
Est

Est enim bc. *ad* di *longitudine ut* ca. *ad* ad, *vel* bc *ad* de. *potentiâ. Quare in continua proportione sunt* bc. de. di *&c. &* de. *media est, Quod oportebat ostendere.*



PROPOSITIO XXVI.

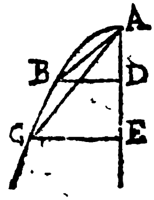
SI Horizontalis linea parabolam contingat, tempora casuam ex punctis parabolę vsq; ad horizontē; siue ex punctis horizontis, vt in secunda figura, vsq; ad parabolam; erunt ut lineæ parallelę inter horizontem, & quamlibet aliam ex contactu inclinatam interceptę.



Sit parabola *bac.* cuius uertex *c* & eam in *c.* tangat horizon *cd.* & ex contactu *c.* inclinetur utcunq; *ca* ducaturq; ex puncto *a. ad.* horizonti perpendicularis. Ducta iam quali bet perpendiculari *ef.* Dico tempus casus per *eb.* esse *fe.* &c. & sic de singulis. Ponamus tempus per *ad.* esse *ad*, erit tempus per *be.* ipsa *fe.* media proportionalis uti demonstratum est. Quare &c.

PROPOSITIO XXVII.

TEmpora lationum per chordas ex uertice parabolę inclinatas, compositam rationem habent, ex ratione longitudinum chordarum, & ex ratione ordinatim applicatarum, cōtrariè tamen sumptarum.

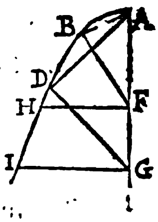


Sint chordæ ex uertice *ab*, *ac.* & ordinatim ducantur *bd*, *ce.* Dico tempus per *ab.* ad tempus per *ac.* habere rationem compositam ex ratione *ab* ad *ac*, & ex ratione *ce* ad *bd.* Si enim concipiamus lationes illas accelleratas æquabiles fieri, & grauia per spatia *b a*, *c a* recurrere cum gradu subduplo impetus quem habebant in *b*, & *c*, erunt tempora recursuum eadem ac tempora casuum. Tempora autem lationum æquabilium compositam rationem habent ex ratione longitudinum spatiorum *ab*, ad *ac*; & ex ratione velocitatum contrariè sumptarum *ce* ad *bd*. (sunt enim velocitates in *b*, & *c* eædem ac in *d*, & *e*, & velocitates in *d*, & *e* sunt vt tempora *b d*. *c e*.) Ergo etiam tempora casuum naturaliter acceleratorum per *a b*; *a c*. compositam rationem habebunt ex iisdem rationibus *ab*. ad *ac*. & *c e*. ad *bd*. Quod erat &c.

1. Gal. de motu. a c. per Galil: de motu æqua.

PROPOSITIO XXVIII.

Tempora lationum per chordas ex uertice parabolę, sunt vt lineæ quæ ordinatim applicantur non ex terminis chordarum, sed ex punctis diametri in quæ cadunt lineæ rectos angulos continentes cum ipsis chordis.



Sit parabolæ diameter *ag*. & chordæ ex vertice sint *a b*. *a d*. fiantq: anguli *abf*, *adg*. recti, & ordinatim ad puncta *f*. *g*. applicentur *fh*, *gi*. Dico tempora lationum per *ab*, *ad*. esse ipsas ordinatim applicatas *fh*, *gi*.

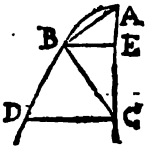
Tempus enim per *a b*. æquale est tempori per *af*. existente angulo *abf*. recto. Item tempus per *ad*. ob eandem causam æquatur tempori per *ag*. Tempora autem per *af*. *ag*. sunt ipsæ *hf*. *ig*. Ergo tempora lationum per chordas *a b*. *a d*. sunt *hf*, & *gi*. Quod erat &c.

Proponetur etiam hoc modo.

Tempora lationum per chordas ex vertice parabolę sunt vt lineæ quę applicantur non ex terminis chordarum, sed tanto longius à vertice quanta est lateris recti longitudo.

Osten-

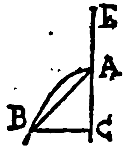
Ostensum enim est in precedenti, tẽpus per ab. *(facto angulo* abc *recto) esse lineam* cd. *Dico nunc lineam* dc *tanto longius à vertice applicatam esse, quam ipsa* be, *quanta est lateris recti longitudo. Hoc est ipsam* ec *latus rectum esse.*



Hoc patet. Est enim rectangulum cea. *æquale quadrato* eb. *ob angulum rectum ad* b. *propterea* ce. *latus rectum est. Quod erat &c.*

Corollarium.

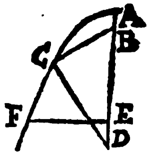
Hinc manifestum, est eodem tempore peragi quamlibet inclinatam ex vertice; puta ab, *ac portionem axis sibi respondentem* ac. *cui tamen additum fuerit in directum latus rectum* ae, *ita vt lationes fiant per* ab *ex quiete in* a, *& per* ec *ex quiete in* e.



PROPOSITIO XXIX.

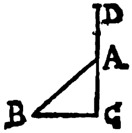
TEmpora lationum per lineas quæ ex foco parabolæ inclinantur, sunt vt lineæ ordinatim applicatæ non ad puncta in quæ cadunt inclinatarum perpendiculares, sed tantò superius versus verticem, quanta est quarta pars lateris recti.

Sit parabola cuius vertex *a*. focus *b*. & ex foco inclinetur *bc*. fiatq; angulus *bcd*. rectus. & à puncto *d*. sumatur versus verticem parabolæ linea *de*. æqualis quartæ parti lateris recti. Dico tempus per *bc*. esse lineam *ef*. Tempus enim per *bc*. æquatur tempori per *bd*. ob angulum *bcd*. rectum, hoc est per *ae*. (sunt enim æquales *bd*, *ae*) sed tempus per *ae*, est ipsa *ef*. ergo tempus per *bd*, vel *bc*. erit eadem *ef*. Quod erat &c.



PROPOSITIO XXX.

DAto plano inclinato perpendiculum erigere, quod eodem tempore ac ipsum planum inclinatum conficiatur.



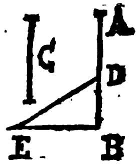
Sit inclinatum planum *ab*. cuius eleuatio *ac*. fiat vt *ac*. ad *ab*. ita *ab*, ad aliam, quæ sit *cd*. Dico planum *ab*. ex quiete in *a*, & perpendiculum *dc*. ex quiete in *d*. eodem tempore confici.

Tempus enim per *ab*. ad tempus per *ac*, est vt *ab* ad *ac*: tempus etiam per *dc*. ad tempus per *ac*. est vt *ab*. media proportionalis ad *ac*; quare tempora per *ab*, & *dc* æqualia erunt. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXI.

AD datum perpendiculum planum inflectere datæ longitudinis, ita vt perpendiculum ipsum, & inflexum planũ eodem tempore absoluantur.

Debet autem longitudo dati plani minor esse ipso perpendiculo.



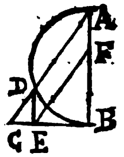
Sit datum perpendiculum *ab*, & data plani longitudo sit *c*, minor perpendiculo. Fiat vt *ab*. ad *c*. ita *c* ad aliam quæ sit *db*. & ex puncto *d* aptetur *de*. æqualis ipsi *c*. Dico tempora lationum per *de*, & per *ab* esse æqualia. Huius demonstratio congruit cum præcedenti, quandoquidem in continua proportione sunt *ab*, *de*, *db*. Quod &c.

PROPOSITIO XXXII.

AD datum perpendiculum *ab*, planum inflectere ita vt cum perpendiculo quemlibet datum angulum acutum con-

contineat, puta æqualem ipsi *bac*, & eodem tempore ac ipsum perpendiculum absoluatur.

Fiat circa diametrum *ab*. circulus qui secet *ac* in *d*. Demissàq; perpendiculari *de*. compleatur parallelogrammum. *adef*.



Manifestum est planum *fe*. quæsito nostro satisfacere. Cum enim *fe*. ęqualis sit ipsi *ad*. & æqualiter inclinata ob parallelogrammum, eodem tempore absoluentur *fe*, *ad* vel *ab*. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXIII.

AD datum perpendiculum *dc*, in figura Propositionis XXX. & ex dato in eo puncto *a*. planum inflectere, quod eodem tempore ac ipsum perpendiculum conficiatur ex quiete.

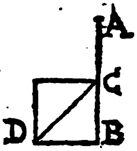
Reperiatur inter *dc*, *ca* media proportionalis *ab*, & habebimus longitudinem plani alicuius. Applicetur hęc longitudo ex *a*, sitq; illa iam applicata *ab*: Manifestum est ex præcedentibus Propositionibus ipsam *ab*. & perpendiculum *dc* eodem tempore absolui. cum sint in continua proportione *dc* *ab* *ac*. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXIV.

SI ad perpendiculum aliquod *ab*, planum *cd* inflexum sit ad angulũ semirectum. Erit tempus per *cd*. æquale tempori perpendiculi, quod ipsius *cb*. duplum sit. Proponetur etiã hoc modo. Tempus per diametrum quadrati erecti, æquale est tempori per duplum lateris erecti.

Sit cd. *planum vt supponitur. vel sit diameter quadrati cuius latus* cb. *erectum sit. ponaturq;* ab. *dupla ipsius* cb. *Di-*

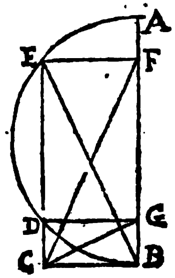
eo tempora per c d, a b, *esse æqualia. Quia* d c. *ad* c b *potentia est vt* a b *ad eandem* c b. *longitudine, nempe in ratione dupla, erunt continuæ proportionales* a b, c d, c b. *Quare per præcedentes Propositiones eodem tempore absoluentur perpendiculum* a b, *& planum inclinatum* c d. *Quod erat &c.*



PROPOSITIO XXXV.

AD datum perpendiculum *ab*, planum, vel plana inclinare ad datum in horizonte punctum *c*, ita vt inclinata plana & perpendiculum ipsum eodem tempore absoluantur.

Debet autem punctum *c*. Distare à puncto *b*. nõ amplius quàm sit semissis ipsius *ab*.



Fiat circa *ab*. circulus *aedb*, & erigatur *ce*. quæ omninò incidet in circulum. (aliàs problema insolubile esset) incidat in *d*. & *e*. Ductisq; *ef*. *dg*. parallelis horizonti *bc*. Dico plana *fc*, *gc*. ad punctum *c* inclinata, eodem tempore absolui.

Cum enim *eb*. *fc*. sint diametri figuræ rectangulę erectę, & ideo æquales, & ęqualiter inclinatę, eodem tempore peragentur. Ergo tempus per *ab*, per *eb*, vel per *fc*. vnum atq; idem est.

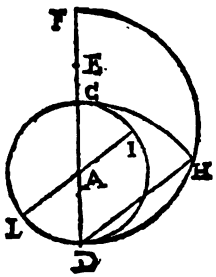
Eodem modo infertur tempus per *gc* ęquale esse tempori per *ab*. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXVI.

IN dato circulo cuius centrum est *a*. Diametrum aptare ita vt tempus per aptatam diametrum ęquale sit cuilibet dato tempori.

Debet autem datum tempus maius esse tempore casus per dia-

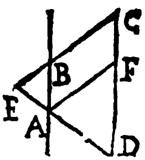
diametrum perpendicularem.



Ponamus tempus per diametrum perpendicularem *cd*. esse *cd*. & tempus datum sit *ed*. Reperiatur ipsarum *cd*, *ed* tertia proportionalis quę sit *fd*. & circa *fd* fiat circulus *fbd*. in quo ex puncto *d*. aptetur *dh*. ęqualis ipsi *cd*. Postremo ipsi *bd*. agatur per *a*. parallela *il*. Dico diametrum *il*. dato tempore *ed*. absolui.

Cum enim tempus per *cd*, sit *cd*, erit *ed*, (quia media proportionalis est) tempus per *fd*, hoc est per *bd*. (per sextam Galilei de motu accelerato) hoc est per *il*. quę ęqualis & parallela est ipsi *bd*. Tempus igitur per diametrum *il*. est *ed*. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXVII.



SI fuerint *ab*. *dc*. ad horizontem perpendiculares, & sumatur vbicunq; punctum *e*, siue intra, siue extra parallelas, fiatque ad *e*. angulus *dec* rectus. Dico per interceptas *ad*, *bc*. semper esse tempora lationum ex quiete ęqualia. Ducatur enim per *a* *af*. parallela ipsi *bc*. erit angulus *fad*. ęqualis angulo *e*; & ideo rectus. Quare tempora per *fa*. *ad*. latera trianguli rectanguli, cuius basis erecta est, æqualia erunt inter se. & ideo etiam per *bc*. *ad*. (sunt enim *af*. *bc*. latera opposita parallelogrammi, quæ semper eodem tempore peraguntur.) Quod erat &c. *per lem. 13 huius*

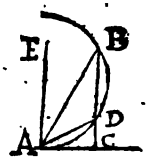
PROPOSITIO XXXVIII.

SI ab eodem horizontis puncto *a*. ad idem planum perpendiculare *bc*. duo plana inclinentur *ab*. *ad* ęqualiter ab inclinatione semirecta distantia, tempora lationum per ipsa plana inclinata, ęqualia erunt inter se.

Erigatur ex *a* perpendiculum *ae*. Fiatq; circulus circa triangulum *abd*.

Quia

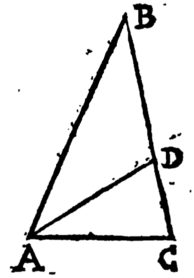
Quia lineæ *ab.ad.* per hypot. æqualiter distant ab illa quæ angulum rectum *eac.* bifariam secat, æqualiter distabunt etiam ab ipsis *ea, ac,* & anguli *dac, bae.* æquales erunt, sed *bae,* & *abd.* sunt alterni, ergo æquales erunt *dac,* & *abd;* quare triangula rectangula *acb, adc.* æquiangula erunt, & vt *bc.* ad *ca,* ita erit *ca.* ad *cd;* & ideo per vltimam terti Eucl. recta *ca.* circulum continget. Sed *ca* est horizontalis, ergo punctum *a.* est punctum infimũ circuli, & ideo tempora lationum per *ba, da* æqualia erunt. Quod erat &c.



Alitèr.

Hoc idem ostendemus sine circulo, curiosa quadam inuersione. Sint eadem plana ab, ad *quamuis* bc *non sit perpendiculum, dummodo inclinata plana faciant angulos cum horizonte* ac, *& cum plano* bc *permutatim æquales, hoc est* cab *æqualem ipsi* adc, *&* cad *ipsi* abc.

Iam positum est triangula abc, adc. *esse similia. Imaginemur iam conuerti figuram ita vt* bc *sit horizon, &* ac *facta sit perpendiculum. Habebunt in illo situ plana* ab, ad. *easdem inclinationes quas ante inuersionem habebant, permutatim tamen. nam* ab *minus decliue erit, &* ad. *magis; habebuntque plana in eo situ eandem communem eleuationem. Ergo per 2. huius, erit in eo situ inuerso Momentum inclinationis maioris* ad, *ad momentum inclinationis minoris* ab, *vt* ab. *ad* ad. *Restituamus nunc figuram in pristinam, & habebimus (permutatis planis) easdem inclinationes. Dicamus igitur iterum. Momentum inclinationis maioris* ab. *ad momentũ inclinationis minoris* ad. *est vt* ab. *ad* ad. *Quare cum sint momenta vt spatia, eodem tempore absoluentur* ab. ad. *Quod erat &c.*



Poterat etiam proponi sic. Si ab eodem horizontis puncto

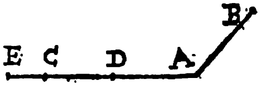
a duo

a duo plana ad aliquod planum *bc* inflectantur, ita vt *ab* ad *ad* sit vt *bc* ad *ca*. erunt tempora lationum per vtrumq; inclinatum planum æqualia.

PROPOSITIO XXXIX.

SI fuerit quodcunq; planum eleuatum *ab*, & quodcunque horizontale spatium *ac*. sectum bifariam in *d*. Dico si ponatur tempus per *ab*, esse *ab*. tempus per *ac* post casum *ba* esse semissem ipsius *ac*, nempe *ad*.

Ponatur enim *ae*. dupla ipsius *ab*. Iam si supponamus tempus per *ab*. esse *ab*. erit tempus per *ae* eadem *ab*. Sed si spatij *ae* est tempus *ab*, erit spatij *ac* tempus *ad*. (est enim vt spatium *ae*, ad spatiũ *ac*, ita tempus *ab*, ad *ad*.) Quare cum tempus per planũ eleuatum *ab*. sit ipsa *ab*. erit post casum *ba*, tempus per *ac*. dimidia *ac*. Quod oportebat &c.



ex Gal.

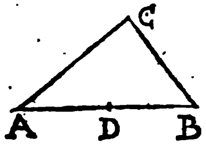
Hæc Propositio re ipsa congruit cum propos. 25. Galilei de Motu accellerato. Nos illam diuerso modo proposuimus consulentes opportunitati eorum quæ hinc sequuntur, vt infra apparebit.

PROPOSITIO XL.

SI ex terminis *a* & *b*. alicuius lineæ horizontalis duo plana inæqualia ad idem punctum *c*. composita fuerint, *ca* maius, *cb* minus. & differentia longitudinis planorum æqualis sit semissi horizontalis *ab*. Erit tempus lationis directæ ex *c* vsq; in *a*. æquale tempori lationis inflexæ ex *c* per *b*. vsq; in eundem terminum *a* horizontalis spatij.

Diuidatur *ab*. bifariam in *d*. erunt ergo *cb*, *bd*. æquales ipsi *ca*. Ponamus tempus per *cb*. esse *cb*. hoc supposito erit tem-

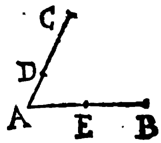
tempus *ca* ipsa *ca*; & per duas *cb*, *ba*, tempus, per Praecedentem, erit *cbd*; nempe equale ipsi tempori *ca*. Quod erat &c.



Problema.

Hinc manifesta est solutio problematis; dato plano inclinato a c, *& horizonte* a b. *oportet minus aliquod planum, inuenire* c d. *ita vt si ex terminis* a, *&* b. *ad vnum punctum duo illa plana componantur, tempus lationis per maius aequale sit tempori lationis per minus, & horizontem simul.*

Dematur ex plano a c. *pars* c d *aequalis ipsi* a e *semissi horizontalis spatij. reliquum* a d. *erit planum quaesitum.*



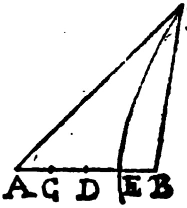
Si verò facta detractione ex c a *nihil reliquum sit, vel fieri nullo modo possit, problema insolubile erit. Demonstratio patet ex Praecedenti.*

Dato vero minori plano a d, *& spatio horizontali* a b *in eadem figura, si ipsi* a d. *addatur* d c. *quae aequalis sit* a e, *semissi horizontis, maius planum quaesitum erit* a c. *Debent autem vtraq; plana* a d; a c. *simul, maiora esse spatio* a b, *alias insolubile esset problema; nam duo latera trianguli reliquo debent esse maiora.*

Quando data fuerint ipsa duo plana inequalia a d, a c, *& quaeratur quantum sit spatium horizontale, ex cuius extremis punctis erigi data plana possint, & ad vnum punctum componi, ita vt tempus lationis per maius planum, aequale sit tempori lationis per minus & per horizontem simul; Accipietur differentia planorum* d c, *quę duplicata spatium horizontale quęsitum* a b *exibebit. Debent autem tres lineae* a b, a c, a d *tales esse vt triang. possint cōponere; alias probl. esset insolubile. Horum omnium demonstratio cum illa praecedentis Propositionis congruit; ideo rem indicasse satis duximus. Libet hic obiter recensere quasdam propositiunculas, quamquam ex 3. Conicorum dependeat ipsarum demonstratio: apparebit enim ex ijs naturam etiam* *circa hyperbolen quasdam nugas meditatam fuisse ad motum spe ctantes. Si cui conica non placent, digressione hac prætermissa, pauca hac euitare poterit, & ad Propositionem 44. se conferre. Materia præcedentium hanc continuationem nimis expostulabat.*

PROPOSITIO XLI.

SI recta linea *ab*. in quatuor æqales partes *ac*, *cd*, *de*, *eb*. diuisa fuerit, & ex punctis *c*, *e*, excitentur duæ hyperbolæ, quæ sectiones oppositæ dicuntur, quarum foci sint *a*, & *b*. Sumpto in altera earum quolibet puncto *f*. erit tempus per *fa*, æquale tempori per *fb*, *ba*.



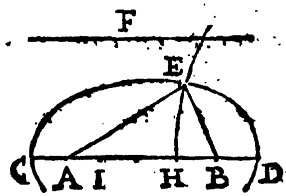
Hoc enim patet ex præcedentibus. Nam propter hyperbolam linea *fa*, æqualis est ipsis *fb*, *ce*. per 51. tertij Conicorum. Sed *ce*. semissis est spatij horizontalis *ab*. per hypotesim, ergo æqualia sunt tempora lationum tam per *fa*, quam per *fb*, *ba*. Quod erat &c.

PROPOSITIO XLII.

SI datum sit horizontale spatium *ab* terminatum, & longitudo alicuius plani *f*. data sit maior quam *ab*. Secare oportet planum *f*. in duas partes inæquales ea lege, vt si ex terminis *a*, *b*, facta plana ad idem punctum componantur, tempus lationis per maius planum, æquale sit tempori lationis per minus planum & per horizontalem simul.

Hoc duplici modo absoluemus. Primum contemplatiuè, siue per resolutionem, deinde practicè.

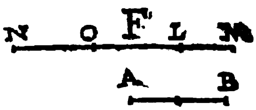
Resolutiuè hoc modo. factum iam sit quod faciendum est. & sint duo plana *ea*, *eb*, vt imperatum est, nempe æqualia simul



mul ipsi *f*, & eiusmodi vt tempus per *ea*, æquale sit tempori per *eb*, *ba*. Producatur *ab*, vtrinq; in *c*, & *d*. ita vt tota *cd*. æqualis sit ipsi
ex 3. l. Conicor. *f*, & *ca*, *bd*. æquales sint inter se. Certum est quia *ae*, *eb*, simul æquales sunt ipsi *cd*, punctum *e* esse in ellipsi, cuius axis maior est *cd*, & foci sunt *a*, *b*, puncta. Certum etiam est, quia tempus per *ea* æquale est tempori per *eb*, *ba*, idem punctum *e* esse in hyperbola cuius foci sint *a*, *b*, & vertex *h*. (diuisà nempe *ab*, in quatuor partes æquales, quarum vna sit *hb*.) hoc autem demonstratum est in præcedenti. Erit ergo punctum *e*. in communi concursu duarum sectionũ, sed duæ sectiones datæ sunt; quandoquidem dantur foci communes vtriusq; *a*, & *b*, & *cd*. data est axis maior ellipsis; daturq; *ih*. diameter hyperbolæ, nempe semissis ipsius *ab*; quare etiam punctum *e*. datum erit.

Componetur hoc modo. Factis igitur duabus sectionibus hyperbola, & ellipsi, quæ concurrant in *e*, si à puncto *e* ducantur *ea*, *eb*, erunt *ea*, *eb*, simul æquales ipsi *f*, & erit tempus per *ea*, æquale tempori per *eb*, *ba*, simul, ob hyperbolam. Quod oportebat &c.

Facilius tamen hoc modo practicè in figura sequenti.

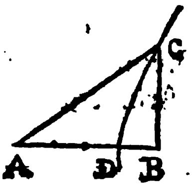


Secetur ab ipsa linea F. pars *lm*, quæ æqualis sit semissi spatij horizontalis *ab*. & reliqua *ln*. diuidatur bifariam in *o*. Dico *no*, *om* esse plana quæsita, quæ si à punctis *ab* inclinentur ad vnũ punctum, æqualia facient tempora lationum, tam per maius planum *om*, quàm per minus *no* simul cum horizontali *ba*. Hoc autem perspicuum est ex Propositione 41. cum differentia longitudinis planorum *lm*, sit per constructionem æqualis semissi spatij horizontalis *ab*. Quod erat &c.

PRO-

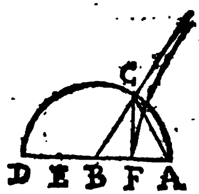
PROPOSITIO XLIII.

DAto horizontali ſpatio *ab*, datoq; angulo *bac*, qui minor ſit angulo trianguli æquilateri, (alias enim problema inſolubile eſſet) oportet triangulum conſtituere quod habeat baſim *ab*, & angulum *bac*. & tempus per latus *ca*, æquale ſit tempori per *cb*, *ba*.



Diuidatur *ab*. in quatuor æquales partes quarum vna ſit *db* & ex vertice *d*, focis *a*, *b*, fiat *dc* hyperbola quæ ſecet rectam *ac*, in *c*. (ſecabit enim omnino, vt infra demonſtrabimus.) Dico *c* eſſe tertium quæſiti trianguli punctum. Ducta enim *cb*. patet differentiam inter *ac*, *cb*. eſſe ſemiſſem ipſius *ab*, propter hyperbolam, & propter diuiſionem lineæ *ab* in quatuor æquales partes. Quare tempus per *ca*, æquale erit tempori per *cb*, *ba*: Quod erat &c.

Quod autem in præcedenti figura (ſuppoſita angulo b a c. *minore quam ſit angulus trianguli æquilateri) linea* a c *cum hyperbola conueniat, ſic demonſtrabimus in ſequenti figura.*

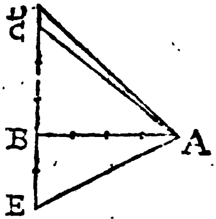


Sit aſymptotos b c. *Ergo rectangulum* e a f *æquale eſt quartæ parti figuræ per 45. tertij Conicorum. Quadratum etiam* f c. *æquale eſt eidem quartæ parti figuræ, per primam ſecundi Conicorum: erunt ergo æqualia inter ſe rectangulum* e a f, *& quadratum* f c. *Quare vt* a f. *ad* f c. *ita* f c. *ad* a e, *hoc eſt ad* f d. *Sunt igitur puncta* d c a *in ſemicirculo cuius diameter eſt* d a, *& centrũ* b. *Sed cũ ſint æquales* b f. a f. *per conſtructionẽ in propoſitione præcedenti; & anguli ad* f. *recti ſint, eſt* b a *axis, &* f c *ad axem applicata. erunt æquales* c b, c a. *& triangulum* a b c, *æquilaterum erit. Qualibet ergo linea quæ* *ad punctum* d. *angulum contineat cum* da. *minorem angulo* abc, *trianguli æquilateri, conueniet omnino cum* bc; *Quare in figura præcedentis propositionis linea* ac *conueniet cum asymptoto, & ideo etiam cum hyperbola.*

PROPOSITIO XLIV.

EX infinitis speciebus triangulorum rectangulorum, vna tantum est quę habeat hanc prerogatiuam, quod scilicet tempus per hypotenusam ęquale sit tempori per reliqua duo latera.

Et hęc species illa est quæ prima omnium, hoc est, quæ in minimis numeris habet tria latera comensurabilia; Nempe in Aritmetica proportione numerorum 3. 4. & 5.



Exponatur triangulum *abc*; cuius latus *ab* horizontale sit 4. & *bc*. erectum sit 3. hypotenusa autem *ac*. sit 5. Perspicuum est angulum *cba*. rectum esse; cum quadratum *ac*. 25. æquale sit duobus quadratis *cb*, *ba*. 9. & 16. Manifestum etiam est tempus per *ca*. ęquari tempori per *cb*, *ba*. cum differentia inter *ac*. *cb*. sit 2. semissis spatij horizontalis *ab*. quod est 4.

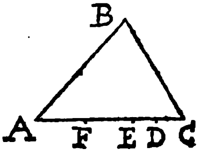
Dico prӕterea nullam aliam speciem triangulorum rectangulorum habere illam proprietatem. Nam si possibile est, habeat. & sit triangulum illius speciei ipsum *adb*.

Quia tempus per *da*. æquale est tempori per *dba*. erit differentia inter *ad*. *db*. æqualis semissi horizontalis *ab*. Ponatur in directum ipsi *db*. linea *be*, quę ęqualis sit semissi horizontalis; erunt iam *ad*, *de*. ęquales inter se; & *ac*, *ce*, ob eãdem causã æquales inter se; quod impossibile est. Iunctà enim *ae*. esset vterq; angulus *dae*, *cae*, ęqualis angulo *e*. quod est absurdum. Nulla ergo species triangulorũ rectangulorum reperitur, præter iam dictam quę habeat superiùs enarratam proprietatem.

Pos-

Possemus etiam demonstrare ex infinitis speciebus triangulorum obliquangulorum, quæ vnum angulum datum habeant, puta 40. graduum, vnam tantum speciem esse quæ prædictam proprietatem habeat. Quinetiam ostenderetur ex infinitis hyperbolarum speciebus, vnam tantum speciem esse quæ illam habeat prærogatiuam. Sed non est tanti omnia hæc minuta enucleatim percensere, vt lectoris patientia, beneuolentiaq; vlterius abutamur.

PROPOSITIO XLV.

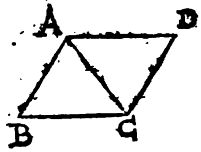


SI Fuerit quodcunq; triangulum *abc*, habens latera *ab*, *bc* inæqualia, puta *ab* maius, *bc* minus & basim horizontalem. Dico eodem tempore fieri lationem per *ba*. solam, & per *bc*, simul cum tanto horizontali spatio quanta est bis differentia inter ipsa latera.
Sit enim differentia inter latera *cd*, cuius dupla ponatur *ce*. Perspicuum est *bc*, *cd*, simul æquari ipsi *ba*. Iam si supponamus tempus per *ba*, esse *ba*, erit tempus per *bc*. ipsa *bc*, & post casum *bc*, tempus per *ce*. erit dimidia ipsius *ce*, hoc est *cd*. Aequale est igitur tempus per *ba* tempori per *bc*, *ce* simul. Quod erat &c.

Ijsdem positis: quando *ce* (in eadem figura) minor fuerit quam basis trianguli. Dico duo grauia eodem temporis momento demissa ex *b* per latera *ba*, *bc* post conuersionem horizontalem factam in *a*, & *c*. conuenire in pũcto basis *f*. quod quidem bifariam secet ipsam *ae*. Ostensum enim est eodem tempore peruenire duo grauia ad puncta *a*. & *e*. ergo etiam reliqua spatia *af*, *ef*, æquali tempore peragentur, cum sint æqualia per hypothesim, & gradus velocitatis æquales sint. per V. huius.

PRO-

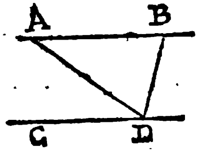
PROPOSITIO XLVI.



POsito quolibet triangulo *abc*, cuius basis *cb* horizonti parallela sit. Si graue ex quiete in vertice *a* per alterum latus *ac* cadat, & inde per basim *cb* cum impetu concepto conuertatur, basiq; peracta cum eodem impetu per alterum latus *ba* ascendat, impetus ille perducet graue per ascensum *ba*. vsque ad idem punctum *a*. ex quo discesserat.

Compleatur parallelogrāmum *abcd*. eritq; *ad*, horizontalis, & quia impetus aquisitus per descensum *ac*, perducit graue per planum *cd*, vsq; ad *d*. per Scholium Prop. 23. Galilei de Motu Accelerato, idem impetus (post transmissam basim motu æquabili) perducet mobile ex *b* vsq; in *a*, sunt enim *ba*, *cd* æquales, & æqualiter inclinatæ. Quare &c.

Lemma.

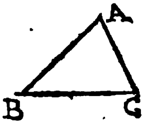


Si inter parallelas horizontales ab, cd. *duæ lineæ fuerint* bd, da. *erit tempus casus per vnam* bd, *ad tempus ascensus per alteram* da, *vt est ipsa* bd *ad* da. *Est enim tempus casus per quamcumq; lineam ex Galileo, æquale tempori ascensus per eandem, quando fiat ascensus cum impetu per descensum aquisito. Sed tempora casuum per* bd, *&* ad *sunt vt* bd *ad* ad, *ergo etiam tempus casus per* bd. *ad tempus ascensus per* da, *erit vt* bd: *ad* da. *Quod &c.*

PROPOSITIO XLVII.

POsito quolibet triangulo *abc*. cuius basis *bc* horizontalis sit, si fiant lationes ex quiete in vertice *a*. vtrinq; per tria latera,

latera, erit tempus lationum per *ac, cb, ba*, æquale tempori lationum per *ab, bc, ca*.

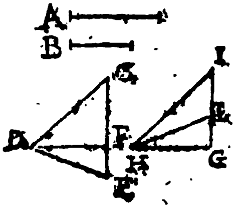


Ponamus enim tempus casus per *ab*. esse ipsã *ab*, erit tempus per *bc*. semissis ipsius *bc*. per Proposit. 40. huius, cum *bc* sit horizontalis: transmissa vero basi motu æquabili, tempus ascensus per *ca* erit ipsa *ca* per lem. præced. Eodem modo: cum sit tẽpus casus per *ab* ipsa *ab*, erit tẽpus casus per *ac* ipsa *ac*, & per horizontalem *cb* erit semissis ipsius *cb*, inde per ascensum *ba* erit *ba*. per lemma præcedens. Est ergò tẽpus per vtramq; viã tamquam duo latera trianguli simul cum dimidia basi. Quare tempora per vtramq; viam, siue *abca*, siue *acba*, æqualia inter se erunt. Quod &c.

Possent similia demonstrari de figuris poligonis, & irregularibus: Sed cum hęc omnia solita breuitate exequi non possint, existimaui eorum demonstrationem apud eruditos plus molestiæ allaturam, quam doctrinæ.

PROPOSITIO XLVIII.

AD aliquod perpendiculum data duo plana diuersæ longitudinis ab eodem horizontis puncto inflectere, ita vt tempora per inflexa plana ęqualia sint. Vel.



Proponit aliquis geminos asseres *a*, & *b*. diuersę longitudinis, ea lege vt ab vno eodemq; puncto in pauimento inflecti debeant ad parietem, & grauia ex fastigijs eorũ eodem tempore demissa, simul eodemq; tempore ferantur in terram.

Componantur *a*, & *b*. ad angulũ rectum: sintq; *cd*, *de*, & productà *ce*, ipsi perpendicularis sit *df*. Accipiatur iam in pauimento distantia *gh* à pariete *gi*, quæ æqualis sit ipsi *fd*; Tum à puncto *h*. inflectantur ad parietem *hi*, *hk*, ęquales ipsis *a*, *b*, vel ipsis *cd*, *de*.

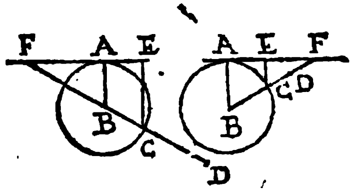
Dico.

Dico tempora per *ih*, & per *lh*. æqualia esse.

Concipiamus basim *ce*. trianguli *cde*, esse ad horizontem erectam. Manifestum est tempora lationum per *cd*, *de*. ęqualia esse. per lemma Propos. 13. Sed cum duo latera *cd*, *df*. duobus lateribus *ih*. *hg*. æqualia sint vtrumq; vtrique, & anguli *cfd*, *igh*. recti, si ex quadratis ęqualibus *dc*. *hi*. demantur quadrata æqualia *df*. *hg*. remanebunt æqualia quadrata *fc*, *gi*, & ideo *fc*. *gi*. lineæ ęquales erunt; & propterea integra triangula *cdf*. *ihg*. æqualia, & similia erunt. & tempus per *ih*. æquale tempori per *cd*.

Eodem modo ostendetur tempus per *lh*. æquale tempori per *de*. Quare cum æqualia sint tempora per *cd*. *de*. æqualia erunt etiam per *ih*. *hl*. Quod erat &c.

PROPOSITIO IL.



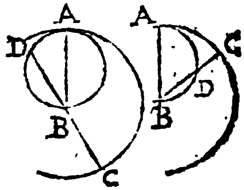
SI ex *a* puncto sublimiori circuli ad horizontem erecti graue cadat vsque in centrum *b*, & inde per quodcumq; planum siue eleuatum, siue decliue, conuertatur cum impetu iam concepto; graue huiusmodi tempore casus *ab* absoluet spatium *bd*; quod nempe æquale sit vtrisq. tum semidiametro *bc*, tum etiã ipsius perpendiculo *ce*.

Secta sit *cd* ęqualis ipsi *ce*. Dico tempus per *ab*, ex quiete in *a*, ęquale esse tempori per *bd*. post casum *ab*. Est .n. ob ęqualitatem vt *dc* ad *cb*, ita *ce* ad *ba*, hoc est *cf* ad *fb*, & permutando vt *cd* ad *cf*. ita *cb* ad *bf*. in vtraq. figura.

Sed in prima tantùm erit componendo vt *df* ad *cf*, ita *cf* ad *bf*. In secunda verò erit. Conuertendo, per conuersionẽ rationis, & iterum conuertendo, vt *df* ad *cf*, ita *cf* ad *bf*. Quare in vtroq. casu tres lineę *df*, *cf*, *bf*. sunt in continuà proportione.

Iam si tempus per *ab* ponatur esse *ab*, erit tempus per *fb* ipsa *fb*, sa *fb*, & per *fd* tempus erit media proportionalis *fc*. Quare tempus per reliquum lineæ, nempe per *bd*, erit reliquum temporis, nempe *bc*. Idem ergo tempus est lationis per *ab* ex quiete in *a*, & per *bd* post casum *ab*.

In hac propositione re ipsa demonstrantur duo Theoremata Galilei, De Motu accelerato: sed quia valde ad rem nostram faciunt, eadem diuersa iterum ratione contemplabimur, vt lucem sequenti Corollario præferant.



Si graue naturaliter cadat ex a *in* b. *& ex* b *cum impetu concepto, per quodlibet planum* bc *conuertatur. Quæritur quantum spatij per planum* bc *absoluat mobile tempore casus* ab.

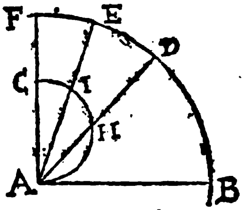
Fiat circa diametrum ab. *circulus* adb, *centroq;* b, *& interuallo* ba *circulus* ac. *Dico graue delapsum per* ab, *si ex puncto* b *cum impetu concepto conuertatur per planum inclinatum* bc, *tempore æquali tempori casus, percurrere spatium æquale vtrisq; simul* bc, cd.

Si enim post casum ab *graue conuerteretur per planum quodcunq;* bc, *motuq; æquabili procederet, graue huiusmodi per planum* bc *tempore æquali tempori casus spatium perageret duplũ ipsius* ba, *ergo percurreret spatium duplum ipsius* bc. *tempore casus, si post casum æquabili motu procederet, Sed superueniẽte operatione grauitatis, mobile non procedet motu æquabili super plano* bc; *Quin immò tempore casus* ab, *grauitas promouebit mobile super plano* bc *tantùm spatium quanta est inclusa in circulo linea* db *(quo enim tempore grauitas trahit mobile ex* a *in* b. *eodem tempore trahit etiam ex* d *in* b *per 6. Galilei de Motu Accelerato.) Ergo duplæ* bc *in prima figura addenda erit* db, *conspirant enim deorsum tam motus æquabilis, quam motus grauitatis; In secunda vero figura à dupla* bc *detrahenda erit* db *(quia motus grauitatis contrarius est motui æquabili) & sic* *ex Gal.*

concludemus mobile post conuersionem, tempore aequali tempori casus ab, *percurrere spatia* bc, cd. *in vtraq; figura.*

Corollarium.

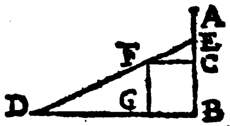
Pro Corollario animaduertimus quod si graue aliquod ex puncto a *impellatur motu velocissimo per horizontalem* ab, *peragatq; certo aliquo tempore spatium* ab; *atque eodem tempore quo fit latio* ab *grauitas motu naturali deorsum trahat per tantum spatij quãtũ est* ac. *si centro* a *interuallo* ab *fiat circulus* bdef, *& circa diametrum* ac *alius circulus* ahic, *mobile impulsum ab eodem semper impetu per plana* ad, ae, af, *eodem tempore peraget singulas interceptas* cf, ie, hd, ab. *&c. etiam infra horizontem.*



PROPOSITIO L.

SI duo grauia demittantur eodem temporis momento ex diuersis plani eleuati punctis, & post casum per eandem horizontalem lineam conuertantur; grauia in quodam puncto simul conuenient, quod in horizontali tantum distat à plano eleuato quanta est dupla mediæ proportionalis inter altitudines casuum.

Sit planum eleuatum *ab*. in quo sumantur duo qualibet puncta *a*, *c*. ex quibus duo grauia demittantur eodem simul tempore. Sit autem *be* media inter *ab*, *bc*. & ipsius *be*. dupla sit horizontalis *bd*. Dico grauia eod. tẽporis puncto demissa ex *a*. & *c*. in puncto *d*. conuenire.



Iungatur enim *ed*. & compleatur parallelogrammum *befg*. Cumq; sit *bd*. dupla ipsius *be*, erit *fe*. hoc est *gb*. dupla *ce*. Iam sic. Mobile post casum *cb*. suo impetu currit horizontaliter tempore casus *cb* duplam *cb*. ergo tempore *ce*. curret eodem impetu duplam *ec*. hoc est ipsam *bg*. Tempore igitur inte-

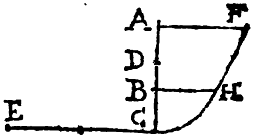
integro *e b* fiunt lationes per *e b*, & *b g*, & eodem tempore fit casus per *a b*, quare eodẽ tẽporis momento erunt grauia alterũ quidem in *g*; alterum autem in *b*. Sed reliqua etiam spatia *b d*, *g d*. ęqualibus temporibus peraguntur. (Velocitates enim sunt vt tempora casuum, hoc est vt *e b*. ad *f g*. sed spatia *b d*, *g d* ob similitudinem triangulorum sunt vt velocitates, quare vti dictum est ęqualibus temporibus peragentur.)

Sunt ergo coniunctim tempora per *a b*, *b d*. ęqualia temporibus coniunctim per *c b*, *b d*. Quare duo grauia &c. conuenient in puncto *d*. Quod erat &c.

Idem aliter demonstrabimus.

Sumptis vtcunq; altitudinibus a c b c. *Demittantur duo grauia eodem tempore ex* a, *&* b. *Sitq;* d c. *media inter casus, cuius dupla ponatur horizontalis* c e.

Dico tempora lationum a c e. b c e. *aequalia esse.*



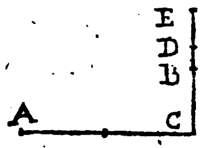
Fiat circa diametrum c a *parabola quęcunque, quæ verticem habeat in* c. *ducanturq; ordinatim* a f. b h. *Notum est in parabola ita esse* a f. *ad* b h. *vt est* a c *ad* c d, *vel vt* c d, *ad* c b.

Iam. Tempus per a c. *est* a f, *& per* c e. *post casum* a c. *est* b h. (*si enim tempore* f a. *graue currit duplam* a c, *tempore* b h, *curret duplam* d c *hoc est ipsam* c e *cum sint proportionales* f a *ad* a c, *vt* h b, *ad* d c.) *Eodem modo. Tempus per* b c. *est* b h, *& per* c e. *post casum* b c. *est* a f. (*si .n. tempore* b h. *currit duplam* b c, *tempore* a f. *curret duplam* d c. *hoc est ipsam* c e. *quia sunt proportionales vt* b h. *ad* b c. *ita* a f *ad* d c.) *Ergo tempora lationum* a c e. *sunt lineæ* a f. b h. *Tempora autem lationum* b c e. *sunt lineæ* b h, a f. *Quare coniunctim tempora per* a c, c e. *aequalia sunt temporibus per* b c. c e. *coniunctim. Quod erat &c.*

Corollarium Primum.

Hinc manifestum est dato quolibet spatio horizontali *a e*.

cuius subdupla ponatur *c d*. Si circa mediã *c d*, duæ in continua proportione sumantur *c e*, *c b*. Tempora per ipsas *e c*, *c a*, æqualia esse temporibus per *b c*, *c a*.



Corollarium II.

Manifestum etiam est tempora perpendicularium, & tempora horizontalium lationum reciprocè æqualia esse.

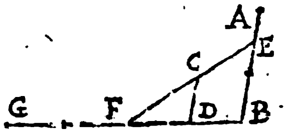
Nam in figura vltimę demonstrationis, tempus perpendiculi *a c*. est *a f*, eademq; *a f*. est tempus horizontis *c e*. post alium casum *b c*.

Tempus autem *b h*. est tempus casus *b c*. idem vero tempus est horizontalis lationis post alium casum *a c*.

PROPOSITIO LI.

SI fuerint duo plana ęqualiter inclinata, *a b*. maius, *c d*. minus, & *b d*. sit horizon. Sumaturq; *b e*. media proportionalis inter longitudines planorum; & ducta *e c f*. ponatur *f g*. dupla ipsius *b e*. Dico grauia eodem tempore demissa ex *a*, & *c*. post casus *a b*, *c d*. in puncto *g*. conuenire.

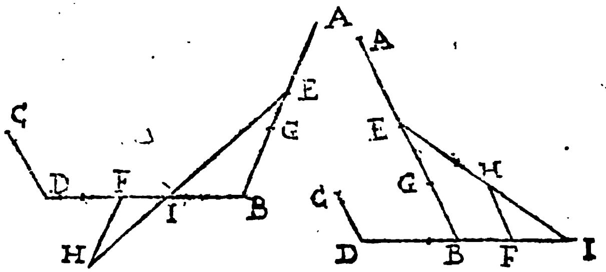
Sunt enim per præcedentem tempora lationum per *a b*, *f g*. simul ęqualia temporibus per *c d*. & *f g*. simul. Sed etiam tempus per *b f*. post casum *a b* æquatur tempori per *d f*. post casum *c d*. (cum sint spatia *b f*. *d f*. vt velocitates *e b*, *c d*.) ergo coniungendo tempus per omnes *a b*, *b f*. *f g*. æquale erit tempori per omnes *c d*, *d f*, *f g*, & ideo grauia conuenient in *g*. Quod erat &c.



PROPOSITIO LII.

SI Fuerint duo plana *a b*. maius, *c d*. minus, æqualiter, inclinata, ita vt lationes horizontales, post casus

ſus in prima figura contrarię inuicem ſint;in ſecunda verò ad eaſdem partes. Sumaturq; media proportionalis inter longitudines planorum *be*, & ſit *df* dupla *ge*, hoc eſt differentię inter mediam *be*, & minus planum;ducta deinde *fh*, æquali ipſi *cd*, & parallela ad *ab*, iungatur *eh*. quæ ſecet horizontem in *i*



Dico grauia ex *a*.& *c*.eodem tẽpore demiſſa, ſi verſus *i* conuertantur in pũcto *i* conuenire.

Ponamus tempus per *cd*.eſſe *cd*. vel *bg*. ſibi æqualem. Ergo in horizonte graue *c*.tempore *bg*. curret duplam *bg*, & tempore *ge*.curret duplam *ge*, nempe *df*. Eſt itaq; tota *eb*.tempus per *cdf*. Eadem quoq; *eb*. tempus eſt per *ab*. Quare eodem tempore peragentur *cdf*.& *ab*. Reliquæ autem *fi*.*bi*. eodem tempore peraguntur (cum propter ſimilitudinem triangulorum ſpatia *fi*, *bi*, ſint vt velocitates *hf*, *eb*.) ergo coniunctim idem tempus erit tam per *cdi*, quam per *abi*. Quare grauia conuenient in *i*. Quod erat &c.

In ſecunda figura non debent lationes horizontales eſſe contrariæ, nam grauia nunquam conuenirent: ſed ambę verſus partes i.

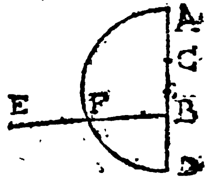
PROPOSITIO LIII.

Datis duobus perpendiculis *ab*, *cb*, inuenire ſpatium horizontale quod cum alterutro datorum perpendiculorũ eodem tempore conficiatur.

Ponatur *bd*. æqualis ipſi *bc*, & circa *ad*. fiat ſemicirculus: ponaturq; horizontalis *be*. dupla ipſius *bf*. Dico lationes *a*

be,

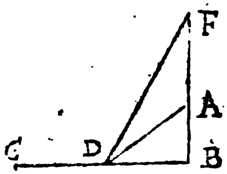
bc, cbe. eodem tempore absolui.



Hoc enim patet per Corollarium primũ Propositionis 51. Nam altitudines perpendiculares ab, bc. sunt continuæ proportionales circa bf. semissem spatij horizontalis. Quare factum est quod &c.

PROPOSITIO LIV.

Dato quolibet perpendiculo, & quolibet spatio horizontali; aliud perpendiculum reperire, quod cum dato spatio horizontali eodem tempore conficiatur ac primum perpendiculum cum dato horizonte.

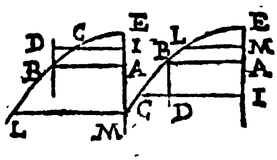


Sit perpendiculum datum ab. & horizon bc. cuius semissis sit bd. Iungatur ad. fiatq; angulus bdf. ad horizontẽ æqualis angulo bad, qui est ad perpendiculum. Dico tempora lationum per fb. bc simul, & per ab, bc. simul, æqualia esse. Triangula enim rectangula fbd, dab. facta sunt æquiangula. Quare vt fb. ad bd. ita bd. ad ba. Et cum bd. semissis horizontalis spatij media sit proportionalis inter perpendicula fb. ab. erunt tempora per fbc, & per abc. æqualia. Quod erat &c.

PROPOSITIO LV.

Gal. 19. de motu Accel.

Si fuerit horizontalis ab. dupla perpendiculi ae, Dico ipsas eab. post casum ea breuiori tempore percurri, quã aliud quodcunq; perpendiculum cum eodem spatio horizontali ab.

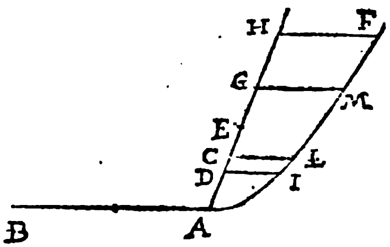


Erigatur bd. perpendicularis ad ab, & per e, b. puncta, circa diametrum ea agatur parabola, ecb. cuius focus erit a. (po-

a. (posita enim est ab. dupla ipsius ae.) Sumatur iam quodlibet aliud perpendiculum ei, & ducatur horizontalis id.

Tempus per ea. est ab. tempus autem per ab. est idem ac tempus casus, ergo tempus per eab. est ipsa ab bis sumpta. Sed tempus per ei. est ic. tempus autem per id. quantum sit, sic venabimur. Velocitate ab. tempore ab. curritur ab. Sed velocitate ci. tempore ab. non curretur eadem ab. Fiat igitur vt velocitas ci. ad velocitatem ab, ita tempus ab. ad aliud ml. Et erit ml. tempus ipsius di. post casum ci. Patet ergo ml. ci. primam & tertiam proportionalium, maiores esse quam dupla mediæ, hoc est quam ab. bis sumpta. Quare &c.

PROPOSITIO LVI.



SI ab. horizontalis dupla fuerit eleuatę ae, Dico, quò longius à puncto e. demittatur graue, eo tardius lationem suam vsq; in b absoluere.

Demittãtur ex punctis c, & d. Duo grauia; ostendendum est maiori tempore fieri lationem per dab. quam per cab. Fiat circa diametrum ae, parabola amf. & ipsis ea. ae. sit tertia proportionalis ag. Ipsis autem da, ae. tertia sit ah, & ducantur ordinatim lineæ ex punctis d, c, g, h.

Quia quadrato eidem ae, æquale est vtrumq; rectangulum dah, cag. erunt hęc eadem rectangula æqualia inter se; propterea latera reciprocè proportionalia habebunt, nempe vt ha ad ag. ita ca, ad ad. Sed in hac eadem proportione ob parabolam, sunt quadrata, hf. ad gm, & cl ad di, ergo proportionalia sunt etiam latera, nempe vt hf. ad gm. ita cl ad di. extremæ autem hf, di maiores sunt quam mediæ gm, cl; & extremæ simul sunt tempus lationis dab, at mediæ sunt tempus lationis cab. Quare tardius absoluetur latio per dab, quam per cab. Quod erat &c. vide 2. demõstrationem Prop. 10.

Idem

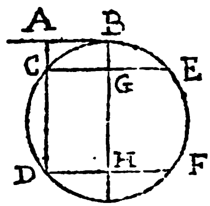
Idem infertur etiam de punctis *g*, & *h*, supra ipsum *e*: sumptis. Sunt enim tempora eorum, æqualia temporibus punctorum *c*. & *d*. vtrumque vtriq; &c.

vide eandem.

PROPOSITIO LVII.

SI ab aliquo puncto lineæ circulum tangentis in puncto sublimi, grauia cadant in periphæriam & inde per chordas horizontales conuertantur. erunt tempora lationum per vtramque chordam & eius perpendiculum, æqualia.

Tangat linea *ab*, circulum erectum, in puncto sublimi *b*. Et sic tangens horizontalis omnino erit. Sumpto deinde quolibet puncto *a*. grauia demittantur perpendiculariter in periphæriam, & conuertantur siue in *e*, siue in *d*. Dico tempus per *ace*. & per *adf*. idem esse.



Sunt enim horizontales *ce*, *df*. æquales, cum *cb*. sit parallelogrammum rectangulum, & *ce*, *df*. sectæ sint bifariam in *g* & *h*. punctis.

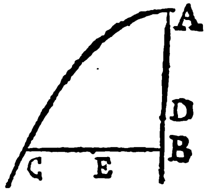
Quia ergo *ab*. semissis spatij horizontalis media proportionalis est inter altitudines perpendiculares *ac*, *ad*. (linea enim *ab*. tangit, & *ad*. circulum secat) erunt per Corollarium primum Propositionis 50. huius, tempora lationum *ace*, *adf*. æqualia. Quod erat &c.

Et per secundum eiusdem Propositionis Corollarium eadem tempora reciprocè æqualia sunt &c.

PROPOSITIO LVIII.

TEmpus per axem parabolæ, & eius ordinatim applicatam simul, æquale est tempori per quartam lateris recti partem, & eandem ordinatim applicatam.

Sit,



Sit axis parabolæ, *ab*, eius ordinatim applicata *be*. Et secetur *bd*. æqualis quartæ parti lateris recti. Dico tempora per *abc*. & per *dbc*. æqualia esse inter se. Diuidatur *bc*. bifariam in *e*.

Erunt tum quadratum *eb*, tum rectangulum *abd*, subquadrupla quadrati *cb*, Sunt ideo æqualia inter se, & ipsa *eb*. media proportionalis est inter *ab*, *bd*. Quare per Corollarium primum Propositionis 50. huius, tempora per *abc*. & per *dbc* æqualia sunt &c.

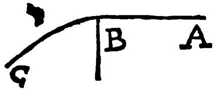
Sunt etiam per secundum eiusdem Propositionis Corollarium, reciprocè æqualia. Quod satis sit ostendisse circa motum grauium naturaliter descendentium.

Finis Primi Libri.

DE MOTV Proiectorum.

LIBER SECVNDVS.

PROIECTA nunc, bellorumq; minas, atque arcium tormenta dicemus: Supremus hic laborum Galilei fructus, suprema etiam gloria.



Ostendit Galileus in libro de Motu Proiectorum, quod si mobile aliquod à plano horizontali ab decidat, impetu priùs horizontalitèr concepto, parabolam aliquam, vt bc. casu suo designabit. Verum est; dummodo linea ab quæ est directio proiectionis ad horizontem fuerit parallela, & quando parabolæ initium b, factum fuerit ex vertice supremo ipsius parabolæ, siue (quod idem est) ab extremo axis parabolici puncto b. Quando vero linea proiectionis ab non horizontalis, sed sursum fuerit, vel deorsum inclinata, erit quidem linea proiecti quædam curua, & sese contingent inuicem tum linea recta directionis iuxtà quam facta fuerit proiectio, tum curua quæ erit semita proiecti; & punctum contactus erit idem ac punctum separationis ipsius proiecti ab instrumento impellente. Sed hanc lineam curuam & esse parabolam, & eandem prorsus parabolam esse, quæ ab eodem mobili horizontaliter prius concitato ex ipsius parabolæ vertice describeretur, hactenus desideratur magis, quàm probatur. Est profectò eadem parabola, velut ipse Galileus affirmat in Corollario Propos. 7. de motu Proiectorũ, neq; verisimile erat adeo oculatum ingenium non bene priùs circumspecta posuisse. Attamen, veritas illius Corollarij manifesta penitus non erit illis, quibus obliquitates parabolarum ignota sint.

te sint, & vltra duas à Galileo præmissas propositiones Apollonius familiaris non fuerit. Cum itaq; proiectiones vt plurimum fiant per lineas ad horizontem inclinatas, ex quibus oriuntur parabolæ obliqua, non habentes initium ex vertice, quales frequentissime occurrunt in omnibus ferè iactibus machinarum, immò etiam neq; verticem, neq; axem habentes, quales sunt proiectiones inclinatæ deorsum, lucem Corollario Galilei afferre conabimur, & cuiusmodi sit linea curua proiectorum vniuersalius determinabimus.

Definitio.

Directio proiectionis dicitur linea recta quę tangit lineam curuam proiecti in primo puncto eiusdem lineæ curuæ. quæ quidem directio in tormentis bellicis est eadem ac ipsius machinæ axis.

PROPOSITIO PRIMA.

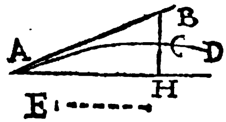
SI graue sursum proiectum ex *a*. ascendat motu naturalitèr Deficiente vsq; ad sublimius punctum suæ lationis *b*. idem verò mobile æquali tempore, & eadem velocitate quam in puncto *a* habebat, sed motu æquabili ascendat vsq; in *c*. Dico *a c*. duplam esse ipsius *ab*.

Si enim non est dupla, ponamus aliquam *ad* duplam esse ipsius *ab*.

Concipiamus iam cadere naturalitèr mobile ex *b* in *a*. Gradus ille impetus acquisiti post casum ex *b* in *a*. est ille prorsus qui vehit mobile ad eandem altitudinem *b*. eodem tempore, & motu naturaliter deficiẽte. *Galil. in scholio prop. 23.* Idem vero gradus impetus eodem tempore, sed motu æquabili perducit mobile ad altitudinem *ad* duplam casus *ba*. *Galil. ibi.* Sed ille idem impetus qui per suppositionem perducit mobile ex *a* in *b* motu naturaliter deficiente, illud perducebat etiam motu ęquabili eodemq; tempore ex *a* in *c*. Vnus ergò idemq;gradus impetus eodem tempore; motuq; æquabili perducit mobile per duo ſpatia inæqualia *ae*, *ad*. Quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO II.

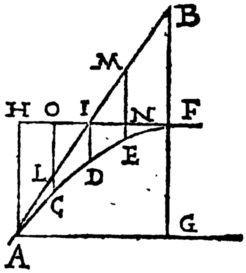
SEmita proiectorum, quęcunq; illa ſit, ſublimiori ſui puncto biſariam ſecat perpendiculum quod inter horizontem, & lineam directionis intercipitur.



Proiciatur mobile ex *a* iuxtà directionē vtcumq; eleuatam *ab*. Patet quod ſine tractione grauitatis procederet mobile motu recto, & æquabili per lineam directionis *ab*. Sed grauitate intus operante ab ipſa directione ſtatim declinare incipiet, creſcente ſemper deuiationis menſura; & deſcribet aliquam lineam curuam *acd*. quæcunq; ſit. Hæc linea punctum aliquod ſublimius cæteris habet; illud nempe quod eſt aſcenſionis extremum, & primum deſcenſionis. Sit huiuſmodi punctum *c*, & per *c* ducatur perpendiculum *bch*. Dico *hb*. duplam eſſe ipſius *hc*. Abſtrahamus motum horizontalem; hic enim motus, quo ad lationem perpendicularem de qua agemus eſt tamquam non eſſet; cum illam neq; iuuet, neq; impediat. Concipiamus etiam mobile habere ſemper ſecum ſuum perpendiculum *hb*. horizontali quadam latione vna cum ipſo translatum ex *a* verſus *h*; in quo perpendiculo aſcendit graue, motu quodam continuo, ſed ſemper magis ac magis deficiente, à puncto *h* vſq; ad punctum *c*. Conficit ergo mobile in ſuo perpendiculo tempore Exempli gratia *e*. ſpatium *hc*. ſed ſi motu æquabili aſcendiſſet cum impetu & tempore eodem, reperiretur in *b* (deberet enim ob motum æquabilem eſſe ſemper in communi ſectione linearum *ab*, *hb*.) Quare per præcedentem, ſpatium *hb*. ipſius *hc* duplum eſt. Quod erat &c.

PROPOSITIO III.

Linea curua, quæ deſcribitur à mobili ſecundum quamlibet eleuationem proiecto, parabola eſt, & prorſus eadem, quam deſcriberet mobile ſi cum horizontali impetu proiceretur à vertice eiuſdem lineæ curuæ.

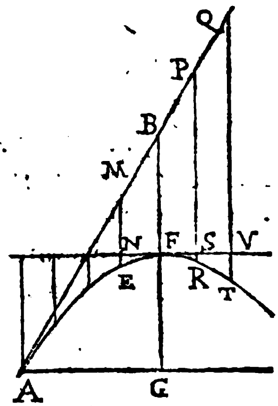


Sit linea proiectionis directiua *ab*. vtcumq; eleuata, & linea curua *acde*, cuius ſublimius punctum ſit *f*. Ducatur perpendiculum *bfg*. & erunt per præcedentia æquales *bf*. *fg*. Ducatur horizontalis *fh*, & perpendicularis *ah*. erunt iterũ æquales *fi*. *ih*, & *ai*, *ib*. Diuidatur *ab*. in quotcunq; partes ęquales *al*, *li*, *im* *mb*. & agantur perpendiculares per puncta *l*, *i*, *m*. Manifeſtum eſt quod ſpatia æqualia *al*, *li*, *im*, *mb*, percurrerentur à mobili temporibus æqualibus, ſi motu æquabili, & ſine acceſſu noui motus deorſum, ab interna grauitate procedentis, moueretur. Sed quia ei ſtatim atq; à proiciente dimittitur in *a*. ſuperaduenit attractio grauitatis, incipiet cõtinuo à linea directionis deorſum deuiare, & deuiationes tales erunt vt linea *lc*. deſcenſus vnius temporis ſit vt vnum: linea verò *id*. deſcenſus duorum temporum ſit vt quatuor, & *me*. trium temporum vt nouem, *bf*. quatuor temporum vt 16., & ſic deinceps ea lege vt ſemper deſcenſuum ſpatia ſint vt temporum quadrata. Quia verò *al*, *li*, *im*, *mb*, ſunt æquales, erunt *ho*. *oi*, *in*, *nf*. (quòd inter eaſdem parallelas ſint) æquales: & cum ſit *bf*, 16, erit *mn*. 8. ergo reliqua *ne* eſt vnum. (quandoquidem tota *me* erat 9.) Ipſa verò *id*. poſita fuerat vt 4. nec immutatur. *ol* autem ęqualis ipſi *mn*. eſt 8. & addita *lc*, quæ poſita fuerat vnum, erit tota *oc* vt 9. At *ha*. ęqualis ipſi *bf* erit 16. Ergò cum ſpatia *fn*, *ni*, *io*, *oh*. ſint æqualia; & *ne*, *id*, *oc*, *ha*. ſint vt 1, 4, 9. 16. & ſic deinceps vt reliqui ſemper numeri quadrati, erit linea procedens ex *f*. per puncta *e*. *d*. *c*. *a*. parabola ex Gal.

rabola

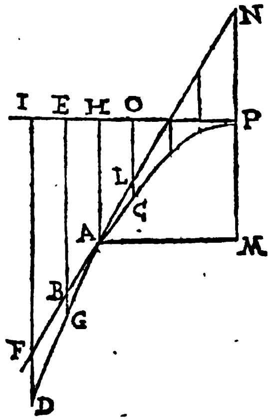
rabola recta cuius vertex *f*. & de qua agit Galileus. Sed hęc eadem linea est tractus proiectionis obliquę ex *a*. factę per suppositionem nostram. Ergò linea curua, quę describitur à mobili secundum quamlibet eleuationem proiecto, eadem parabola est quam designaret si cum impetu horizontali opportuno ex vertice ipsius proiectum fuisset.

Manente eadem constructione, & figura, dico etiam post culmen, siue verticem *f*. mobile ex *a* proiectum, in eadem parabola continuare motum suum.



Sumantur *bp*. *pq*. ipsi *bm* ęquales; erit descensus *pr*. quinq; temporum vt 25. & *qt*. sex temporum vt 36. Sed cum *bf*. sit 16, ipsa *pf*. est 24. & *qu* 32. Reliquę ergo *fr*, *ut*, sunt vt unum & 4. &c. Quare puncta *f*, *r*, *t*. per quę incedit mobile sunt in eadem continuata parabola in qua sunt *e*, & *f*.

Linea etiam curuà, quę describitur à mobili secundum quamlibet directionem deorsum proiecto, parabola est, & eadem prorsus quam describeret mobile si horizontaliter concitatum à uertice ipsius proiceretur.



Manente eadem figura propositionis tertię. Sit linea proiectionis deorsum factæ *af*., & sit impetus idem qui fuerat in proiectione *al*. sursum. Manifestum est quod mobile si motu ęquabili moueretur percurreret lineam rectam *af*. Sumantur iam *ab*, *bf*. ęquales tum inter se, tum etiam ipsi *al*. patet etiam quod ipsę *ab*. *bf*. motu ęquabili, temporibus ęqualibus absoluerentur cum ęquales sint. Sed quia grauitas statim incipit deorsum

orſum trahere, mobile à linea recta *af* deuiabit, & erit deſcenſus *bg*. unius temporis ut unum, eritq; ęqualis ipſi *lc* qui fuerat deſcenſus unius eorumdem temporum. Deſcenſus autem *fd*. duorum temporum erit ut 4. & ſic ſemper deinceps. Quia uero *ha*. eſt 16., erit *eb*. 24. & addita *bg*, tota *eg* erit 25. Eodem modo; *if* eſt 32, & *fd*. 4. ergo tota *id*. eſt 36.

Cum itaq. ſint ęquales *oh*, *he*, *ei*. & *oc*. *ha*, *eg*, *id* ſint (cõtinuato ordine numerorum quadratorum,) ut 9. 16. 25. 36. erit linea *cagd*. portio eiuſdem continuatæ parabolę: ergò linea curua quę deſcribitur à mobili deorſum proiecto parabola eſt, & prorſus eadem quam deſcripſiſſet ſi à uertice ipſius, cum horizontali impetu oportuno proiectum fuiſſet.

Diximus cum horizontali impetu opportuno, quia ſi mobile cum eodem impetu proiceretur ex p *horizontaliter deorſum, & ex* a *ſecundum* a l *ſurſum, nequaquam eandem parabolam deſcriberet utraq; latione. Requiritur enim maior impetus in proiectione ex* a *ſurſum facta ad hoc vt eandem parabolam deſcribat quam deſignauiſſet ſi ex* p *horizontaliter proiectum fuiſſet. Ratio verò unius impetus ad alium vt eadem parab. euadat, erit hac.*

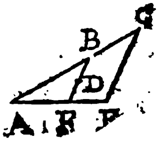
Si mobile horizontaliter proiectum ex p. *quolibet impetu deſcripſit parabolam* p c a, *ad hoc vt ex* a *proiectum deſcribat eandem, debet impetus ex* a *ad impetum ex* p. *eſſe vt* a n *ad* a m.

Tunc enim ſi mobile iuxtà tangentem a n *proiciatur cum impetu dicto eandem parabolam* a c p. *percurret.*

Si quis autem, propter numerorum applicationem, ea qua attulimus non demonſtrationem putet, ſed computum, vel exemplum, habeat hic demonſtrationem puram, premiſſo hoc lemmate.

Lemma.

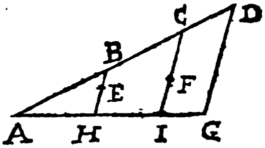
Si fuerit vt a c *ad* a b. *potentia, ita* c e *ad* b d. *longitudine, & ſint parallela* c e, b d. *Dico (coniunctà* a e*) ipſam* b f. *mediam proportionalem eſſe inter duas* c e, b d.



Eſt enim c e *ad* b d. *longitudine vt* c a *ad* a b,

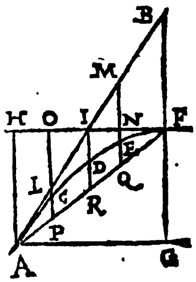
hoc

hoc est ce; *ad* bf. *potentià*. *Quare* bf. *media est inter* cc, bd, *&c*.



Si verò, vt sunt ab, ac, ad. *potentià, ità fuerint parallela* be, cf, dg. *longitudine, sintq;* ah, ig. *aquales, Dico etiam* he, if, *aquales esse*. *Est enim* ga *ad* ai *vt* gd *ad* ic, *vel per pracedens, vt* ic *ad* cf. *ergo diuidendo erit vt* gi *ad* ia, *ita* if *ad* fc. *eodem modo ostendemus esse vt* gh *ad* ha, *ita* he *ad* eb. *His demonstratis*. *Est* fc *ad* be. *longitudine, vt* ca *ad* ab, *vel* ia *ad* ah, *vel* gh *ad* ha, *vel* he *ad* eb. *potentià*. *Ergò* he *media est inter* fc. be. *Iterum*. *Est* fc *ad* be *longitudine vt* ca *ad* ab, *vel* ia *ad* ah, *vel* ai *ad* ig, *vel* cf *ad* fi *potentià*. *ergo* fi *media est inter* cf, be. *Inter easdem verò media erat etiam* eh, *ergo* fi, eh. *aquales sunt*. *Quod erat pramittendum*.

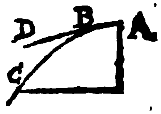
Resumpta iam figura propositionis 3. *huius, fiat vt antea expositum est proiectio per lineam* acdef. *ducaturq; recta* af. *& accipiantur aquales* ap. fq. *Erunt ob descensionem naturaliter acceleratam spatia* lc. me, bf. *in duplicata ratione temporum* al, am, ab. *& ideo per pracedens lemma aquales erunt* cp, eq, *& propterea remanent aquales* lc, ne *(nam tota* lp, *toti* nq. *aqualis est, producta enim* idr. *erunt aquales* ar, rf; *& ipsa* ir *eandem rationem habebit ad* lp, *& ad* nq, *nempe quam habet* ra *ad* ap. *vel* rf *ad* fq.) *Ergo omnes linea qua ex* f *versus* id *successiuè descendunt à linea* fh. *sunt aquales omnibus & singulis illis respectiuè, qua ex* a *versus lineam* id. *successiuè descendunt à linea* ab, *singula singulis (quod enim ostensum est de sola* ne. *ostendi potest de omnibus*.) *Sed omnes ista, quarum series ex* a *incipit per suppositionē sunt inter se longitudine vt sunt* al, am, ab. *potentià, ergo etiam omnes illa quarum ordo incipit ex* f. *erunt longitudine vt omnes* fn, fo, fh. *potentià*. *Quare linea curua*



acef.

acef. *&c. quæ describitur à mobili secundum quamlibet eleuationem proiecto; eadem parabola est, quam designaret si ex vertice* f *cum impetu horizontali oportuno proiectum fuisset.*

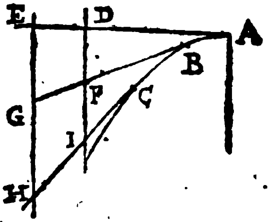
Lemma.



Si mobile proiectum, dum parabolam abc *percurrit, in aliquo ipsius puncto* b. *omni grauitate spoliaretur, tunc proculdubio per lineam rectam* bd. *tangentem parabolæ lationem suam cõtinuaret motu semper æquabili. Quandoquidem dempta ei esset omnis causa quæ motum aut inflectere posset, aut accelerare, vel retardare. Manifestum etiam est, impetum ipsius mobilis in qualibet portione tangentis* bd, *eundem semper futurum fore qui fuerat in puncto* b.

PROPOSITIO IV.

IMpetus in punctis parabolæ vt sunt portiones tangentiũ, inter duas parallelas diametro interceptæ.



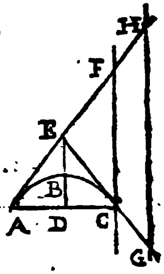
Proposita parabola *abc.* ducantur tangentes *ae*, *bg*, *ch*. à quibuscunque punctis *a*. *b*. *c*. tum duæ lineæ parallelę diametro vbicunque sint *di*, *eh*. Dico lineas interceptas *de*. *fg*, *ih*. ipsos impetus qui sunt in punctis *a*. *b*. *c*. proportione representare.

Vnaquæq. enim ipsarum *de*, *fg*, *ih*. eodem tempore absolueretur à mobili, quandoquidẽ progressio horizontalis quæ inter duas parallelas *di*, *eh*. est, eodem semper tempore debeat absolui, vbicunq. reperiatur mobile, & per quamcunq; inclinationem procedat. Sed motus in ipsis lineis interceptis sunt æquabiles, ergo impetus erunt vt spatia. Quare impetus ipsius *de*, vel puncti *a*. erit vt linea *de*. Ipsius autem *fg*, vel puncti *b*. erit vt *fg*. & sic deinceps. Quod erat &c. Lem. præced.

X PRO-

PROPOSITIO V.

IMpetus in punctis parabolæ æqualitèr vtrimq; à vertice distantibus, æquales sunt inter se, licet alter ascendat, alter vero descendat.



Sumatur in parabola proiectionis factæ versus *b* & *c*, puncta quæuis *a*, *c*, quæ æqualitèr distent à vertice *b*, hoc est, quæ sint in eadem horizontali linea *a c*. Dico impetus in *a* & *c* æquales esse. Accipiatur *b e* æqualis ipsi *b d*, & ducantur *a e*, *c e*, quarum vtraq; tangens erit. Ducantur etiã lineæ *c f*, *g h*. diametro parallelę ubicunq; uisum fuerit; & producantur tangentes *a h*, *e g*. Erit ergò per præcedentem impetus in *a* ut *f h*. & in *c* ut *c g*, quæ si ęquales fuerint, æquales erunt impetus in punctis *a* & *c*.

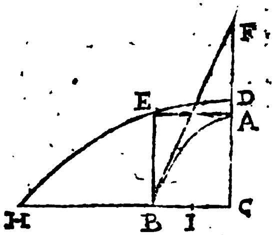
Latera *a d*, *d c*. sunt æqualia, & *d e* commune; anguli autẽ ad *d* recti, ergo anguli *a e d*, *d e c* sunt ęquales. Angulo autem *a e d* ęqualis ęst *e h g*. ob parallelas, & ipsi *d e g*. ęqualis est *c g h*, item ob parallelas; est ergo triangulum *c h g* ęquicrure, & linea *f c*. basi parallela, quare *f h*, *c g* ęquales sunt. Quod erat &c.

Corollarium.

Hinc colligere possumus facta proiectione ab a, *quod si mobile ex puncto* c *reflectatur retrorsum per eandem suam viam cum impetu eodem, eademq; directione quam habet in puncto* c, *per eandem parabolam recurrere debere; Habet enim in* c, *vt ostendimus, eundem impetum, & eandem directionem quam habebat in* a, *quare eandem parabolam designare debet quam designauit ex* a.

PROPOSITIO VI.

SIT parabola *a b* cuius altitudo *a c*, & sublimitas *a d*; ostendendum est alitèr ac in primo libro, eundem esse impetum parabolæ in *b*, ac grauis cadentis naturaliter ex puncto sublimitatis *d*, usq. in *c*.



Ducantur tangentes *ae*, *bf*, & sit *be* parallela ipsi *ac*. Notum ergo est per 4. huius impetum parabolę in *b*. ad impetum parabolę in *a*, esse ut *bf* ad *ae*, cum sint *bf*, & *ae* inter easdem ad diametrum parallelas interceptę. Agatur per *d* & *e* alia parabola *deh*. & impetus casus per *da*, ad impetum casus per *dc*. erit ut applicata *ae* ad applicatam *ch*. Si ergo fuerint ęquales tangens *bf* & appplicata *ch*, erit ex ęquo, impetus in *b* ad impetum in *c* ut *bf* ad *ch*. nempe æqualis. Ostendo *bf* *ch*. ęquales esse, sic. Secetur *cb* bifariam in *i*, & erit per demonstrata in pręcedenti libro, *ci* media proportionalis inter *ca*, & *ad*. Iam sic. Quadratum *ca* ad rectangulum *cad* sub eadem altitudine, est ut *ca* ad *ad*, ergo quadratum *ca*, ad quadratum *ci* est ut *ca* ad *ad*. Sumptis autem quadratorum quadruplis erit quadratum *fc* ad quadratum *cb* ut *ca* ad *ad*. & componendo quadrata *fc*, *cb*, uel quadratum *fb* ad quadratum *cb* erit ut *cd* ad *da*, hoc est ut quadratum *ch* ad quadratum *ae*: sed quadrata *cb* & *ae*. ęqualia sunt, ergo etiam quadrata *fb*, *ch*. Quare æquales sunt lineę *fb*, *ch*. Quod erat &c.

PROPOSITIO VII.

SI ab eodem puncto, cum eodem impetu, & eadem directione fiant proiectiones utrinque, sursum nempe, & deorsum: mobile utrinque per portiones unius eiusdemq. continuatæ parabolę percurret.

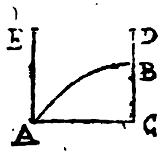
Fiat ex puncto *a* cum directione *ab*. proiectio sursum *ac*. & ab eodem puncto directione *ba* fiat proiectio deorsum *ad*.

Dico *cad* vnam, & eandem continuatam parabolam esse. Si enim continua non est, demittatur mobile ex vertice *c* versus *a*. per parabolam *ca*. Tunc mobile cum *cad*. non sit continua parabola, non per ipsam *ad*, sed per aliã lineam meabit, quæ sit *ae*. Verùm mobile in puncto *a* eundem habet impetum siue ante ascensum *ac*, siue post descensum *ca*. Mobile ergo ex punctò *a*. quando venit ex *c* meat per *cae*, quando verò proicitur ex *a* cum eodem impetu, & directione currit per *ad*. Quod est absurdum. Cum enim in vtroque casu discedat ab *a* cum eodem impetu, eademq; directione, debet etiam in vtroq; casu per eandem lineam *ad* ambulare. Quod &c.

PROPOSITIO VIII.

Data qualibet parabola à mobili sursum proiecto descripta, proiectio perpendicularis sursum eiusdem mobilis facta cum eodem impetu, tantum ascendet, quantum est aggregatum altitudinis, & sublimitatis simul datæ parabolę.

Sit parabola *ab*, cuius altitudo *cb*, & sublimitas *bd*. ponaturq; *ae* æqualis & parallela ipsi *cd*. Facta autem sit parabola à proiectione ex *a* versus *b*. Dico si fiat proiectio cum eodẽ impetu per lineam *ae* sursum, mobile vsq; ad punctum *e* peruenturum esse. Impetus enim parabolę in *a*, siue fiat proiectio ex *a*, in *b*, siue ex *b* in *a*. idem est (vt ostendimus.) at ex Galileo idem est ac naturalitèr cadentis ex *d* in *c*, sed impetus naturaliter cadentis ex *d* in *c* ille est qui reuehit mobile ex *c* in *d*, ergò etiam ex *a* in *e*. Quod &c.



8. Prop. ius.

Definitio.

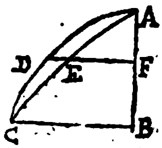
Inposterum quando datum impetum nominabimus, illum in spatijs determinabimus, vt Galileo visum est; alia enim ratione

sub

sub certam & vniuersalem mensura regulam cadere nō potest. Exempli gratia. Quando dicimus sit impetus datus ab. *tunc sensus noster est. Sit impetus datus tantus quantus requiritur ad proiciendum mobile ex* a *vsq; ad summum punctum perpendiculi* b. *Siue, quod idem est, quantus est impetus naturaliter cadentis ex* b *vsq; in* a.

Lemma.

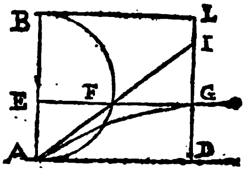
Circa diametrum ab. *per verticem* a, *& quoduis punctum* c. *alia, atq; alia parabola non constituetur. Si enim possibile est, sint circa diametrum* ab *per puncta* a *&* c. *duæ parabolæ, & ex* c *ducatur ordinatim* cb. *tum alia qualibet ordinetur* df. *Quadratum ergò* cb, *ad duo illa quadrata inæqualia* fd, fe *eandem rationem habet, nempè quam habet* ba, *ad* af. *Quod est absurdum. Ergo circa diametrum &c.*



PROPOSITIO IX.

DAto impetu *ba* (hoc est quantus est naturalitèr cadentis ex *b* in *a* iuxtà definitionem) dataq. directione *ai*, iuxtà quam facienda proiectio cum impetu dato. Oportet amplitudinem, altitudinem, totamq; futuram parabolam huius proiectionis reperire.

Ducantur per *a* & *b* horizontales lineę *ad*. *bl*. & fiat semicirculus *afb* circa diametrum *ab*, qui lineam *ac* omninò secabit, cum ipsa *ad* tangens sit. Secet in *f*, & ducatur *fe* horizontalis, & producatur *fg* ęqualis ipsi *fe*. demum agatur per *g* perpendiculum *lgd*. Fiat iam circa diametrum *gd* per puncta *g* & *a*. parabola *ag*, quæ vnica erit per lemma precędens. neq; alia parabola circa diametrū *gd* per puncta *g*, & *a* fieri poterit. Dico hanc esse parabolam quæsitam.

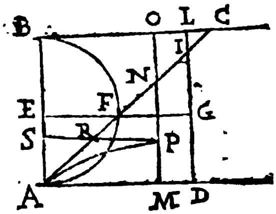


tam. Huius enim parabolę linea directionis est ai. cum ipsa tangat parabolam in a. Est enim eg uel ad ipsius fg dupla per constructionem, & ideo ęquales sunt ag, gi; quare ai tangens est.

Insuper. Dico hanc parabolam ab impetu dato describi. Sunt enim ae, af, ab, siue tres ipsis aequales ag altitudo, gf semibasis, & gl, in continua proportione: quare gl sublimitas est (per 5. propos. & eius Corollarium Galilei.)

Iam sic. Impetus parabolę ag in puncto a tantus est quantus naturaliter cadentis ex l in d. per 10. Galilei. hoc est ex b in a. siue proiecti ascendentis ex a in b. Habet ergo parabola in puncto a etiam impetum datum. Quare factum est quod &c.

Sed quia hac propositio magni erit momenti pro sequentibus, illam ostendamus etiam alio modo,



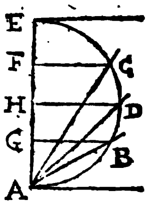
Sit impetus datus idem ab. & eadem directio afc. Quæritur parabola quę fiet a b hac proiectione. Fiat ut ante circa diametrum ab semicirculus, qui secabit lineam ac, cum ad, sit tangens. Secet in f, ductaq. horizontali efg ita ut ęquales sint ef, fg, describatur, siue tamquam descripta concipiatur parabola per puncta a, g, circa diametrum gd. Dico hanc esse parabolam proiecti, si à puncto a iaciatur, iuxta directionem ac, cum impetu ab. Nisi enim currat mobile per hanc iam dictam parabolam, curret omnino per aliam, quæ sit ap. Reperiatur uertex, siue punctum altius cęteris huius parabolę ad, & illud sit p.

Patet primò quòd punctum p esse non potest in linea ld, quia cum linea ac tangat utramq. parabolam, secaretur id axis cōmunis bifariam in duobus punctis à uerticibus parabolarum, absurdum. Neque potest esse in linea eg. Quia ducta per uerticem

cem diametro, putà, *m n*. bifariam secaretur *m n* à linea *e g*. absurdum: sola enim *i d*. secatur bifariam ex omnibus sibi parallelis in angulo *c a d*.

Sit iam punctum *p*. vbicunq; ducaturq; *p r f*. horizontalis. Quia *p n*, *p m*. sunt æquales per secundam huius, erunt *n r*, *r a*. & *p r*, *r f*. æquales; & quia parabola *a p* impetum habet *b a*. hoc est *o m*, erit *o* punctum suæ sublimitatis, & ideo lineæ *o p*, *p r*, *p m*. in continua proportione erunt; & rectangulum *o p m*. quadrato *p r* æquale, commutatisq; lineis cum sibi æqualibus, rectangulum *b f a* æquale erit quadrato *f r*. Punctum ergo *r* est in semicirculi peripheria. Quod est absurdum, recta enim linea *a f* in duobus tantum punctis periphæriæ occurrit. Quare &c.

Corollaria.



Hinc manifestum est, dato impetu alicuius machina qui sit verbi gratia e a. *Si describatur circa* e a *semicirculus* a d e, *dari altitudines, & amplitudines omnium proiectionum, qua ab eadem machina fieri possunt. Exempli gratia. Manente semper eodem impetu* e a. *fiant proiectiones per lineas diuersimodè eleuatas* a c, a d, a b. *Proiectio facta secundum directionem* a c *ascendet vsq; ad horizontalem* f c *productam; iactus autem factus iuxta directionem* a d *apicem habebit in linea* h d *producta. Proiectionis autem secundum lineam* a b *facta, maxima altitudo erit in horizontali* g b *producta.*

In libro Galilei de motu naturaliter accelerato ostéditur, proiecta ab eodem impetu e a. *si à planis diuersimodè inclinatis fulciantur, semper ad vnum idemq; planum horizontale peruenire. Hic verò apparet singulas proiectorum ascensiones variari, quando per aerem purum sine vllo subiecto fulcro proiciuntur iuxtà diuersas eleuationes: Minus enim ascendit mobile quod per lineam* a b, *minus eleuatam emittitur, quàm illud quod per lineam* a d *magis eleuatam proiectum fuerit.*

Patet etiam nullam altitudinem adeò ascendere posse, vt ad

ipsam

ipsam parallelam horizontalem, quæ ducitur per summum proiectionis perpendicularis punctum e peruenire possit.

Manifestum etiam est amplitudines omnes semper augeri ab illa protectione quæ dicitur tiro di punto in bianco *usq; ad proiectionem factam ad angulum semirectum.*

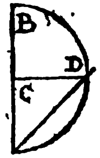
A semirecta vero usque ad perpendicularem, semper minui, donec penitus euanescant; quod accidit in proiectione perpendiculari, quæ nullam habet amplitudinem.

Denique obseruare licet amplitudines parabolarum ab eodem impetu factarum, quarum eleuationes æqualiter ab angulo semirecto distent, inter se æquales esse.

Cum enim lineæ ab, ac *æqualiter distent ab eleuatione semirecta, erunt arcus* db, dc *æquales. quibus insistunt æquales anguli; & ideo arcus* ba, ce *reliqui ex quadrantibus æquales erunt, ergo etiam sinus eorum* bg, cf *æquales erunt, & propterea amplitudines integræ parabolarum, quæ quidem quadruplæ sunt sinuum* bg, cf *erunt æquales.*

Patet etiam proiectionum æqualiter a semirecta distantium altitudines, & sublimitates reciprocè inter se æquales esse, hoc est altitudinem vnius, sublimitati alterius æquari.

Corollarium ergò erit quod Galileo Theorema satis arduum fuerat, nempe proiectionem semirectam omnium maximam esse ab eodem impetu factarum. Si enim ponatur angulus c ad *semirectus erit* cd *semidiameter, hoc est maximus omnium sinuum qui in semicirculo dari possint.*



Patet etiam integram amplitudinem parabolæ semirectæ duplam esse lineæ sublimitatis, siue impetus ab *quia demonstrata est quadrupla rectæ* cd, *hoc est dupla ipsius* ab.

PROPOSITIO X.

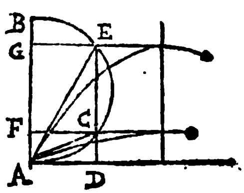
DAto impetu & altitudine inuenienda sit directio iuxta quã facta fuit proiectio: inuenienda etiam sit amplitudo proiectionis. Sit in præcedenti figura, impetus datus *ab*, & data altitu-

altitudo fit *ac*. fiat circa *ab* semicirculus *adb*, & ducantur *cd*. horizontalis, *ad* autem ad punctum *d*. Manifestum est ex precedentibus, directionem quæsitam esse *ad*, amplitudinem verò integram esse *cd*. quater sumptam. Nulla enim parabola preter illam quæ fit iuxtà directionem *ad*. cum habeat impetum *ab*, habebit altitudinem *ac*.

PROPOSITIO XI.

DAto impetu, & amplitudine inuenienda fit directio iuxta quam facta fuit parabola; inuenienda etiam fit altitudo.

Sit datus impetus *ab*, & sit *ad* quarta pars datæ amplitudinis. Fiat circa *ab* semicirculus *acb*, & erigatur *dce* (quæ si in semicirculum non incidit problema impossibile est,) seceto; semicirculum in punctis *c*. & *e*. Dico vtramq; directionem siue *ac*, siue *ae*, si datus impetus *ab*, adhibeatur, parabolam designare, cuius amplitudo quadrupla erit lineæ *ad*. Hoc enim ex precedentibus liquet. Nam proiectiones factæ cum impetu *ab* iuxta directiones *ac* vel *ae* amplitudinem habent quadruplam ipsius *ge*, vel *fc*. vel *ad*. quæ inter se æquales sunt. Altitudo verò esse potest tùm linea *af*, tum etiam *ag*. Vt apparet &c.

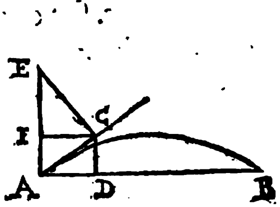


PROPOSITIO XII.

DAta amplitudine *ab*, & directione *ac*. inueniendus sit impetus, & altitudo parabolę.

Datis ijsdem, inuenienda sit mensura lineę perpendicularis ad cuius apicem ascenderet mobile si cum eodem impetu sursum perpendiculariter proiceretur.

Sumatur *ad*, quarta pars ipsius *ab*, & erigantur perpendiculares *dc*. *ae*. fiatq; angulus *ace* rectus. Dico *ae*. esse impetum proiectionis, & *dc*. altitudinem. Semicirculus enim circa diametrum *ae*. transit per angulum rectum *ace*. Ergo parabolæ, cuius amplitudo sit *ab*,& directio *ac*, impetus est *ea*.



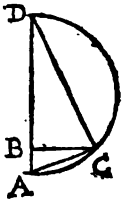
Patet etiam altitudinem parabolę esse lineam *dc*. vel *ai*.

Cum autem impetus sit *ae* manifestum est proiectionem perpendicularem sursum ex *a* factam ascensuram esse vsque ad *e* punctum, si proiciatur mobile cum eodem impetu à quo facta fuit parabola *ab*.

Ex hac propositione colligere possumus quantũ spatij ascendat ferreus globus, si quando ab æneo quolibet tormento sursum perpendiculariter iaciatur: cuius quidem spatij mensura tanta erit, vt ex nulla perpendiculari altitudine siue arte, siue natura facta deprehendi possit; aut aliter experimento subiacere.

PROPOSITIO XIII.

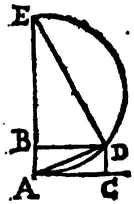
DAta altitudine *ab*, & directione *ac*. reliqua reperire.



Ducatur per punctum *b*. horizontalis *bc* quę incidat in ipsam *ac* in puncto *c*. Fiatq; angulus *acd* rectus: & circa triangulum rectangulum *acd*. transibit semicirculus propositionis 9. huius. Amplitudo ergo quadrupla erit ipsius *bc*. & impetus erit *ad*. Quod &c.

PROPOSITIO XIV.

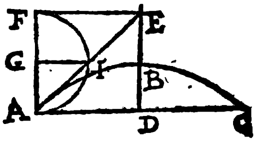
DAta altitudine *ab*, & basi (cuius tamen quarta pars sit *ac*) Reliqua reperire.



Compleatur rectangulum *bacd*. & diameter *ad* directionem indicabit. Facto deinde angulo *ade* recto, erit *ae* impetus, vt facile ex præcedentibus colligitur &c.

PROPOSITIO XV.

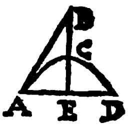
PRoiectio perpendicularis sursum æqualis est dimidiæ basi proiectionis semirectæ, si fuerit ab eodem impetu facta vtraq; tam perpendicularis, quam semirecta proiectio.



Sit parabola semirecta *abc*, & super *ad* media amplitudine fiat quadratum *adef*, erit *ae* diameter ipsa directio semirecta. Factoq; circa *af* semicirculo, transibit semicirculus per *i* centrum quadrati, & erit *af* impetus; quare proiectio perpendicularis sursum vsq; ad *f* punctum ascendet. Patet ego propositum.

PROPOSITIO XVI.

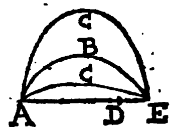
SI facta fuerit proiectio ad eleuationem anguli semirecti, amplitudo integræ proiectionis erit latus rectum descriptæ parabolæ.



Sit eleuatio semirecta iuxtà lineam *ab*, factaque sit à proiecto quęlibet parabola *acd*. Dico *ad*. esse latus rectum huius parabolæ. Cum enim angulus *eab* semirectus sit, *aeb* rectus, erunt ęqualia latera *ae*, *eb*. ergo *ae*. dupla erit ipsius *ec*. Sed cum *ae* media proportionalis sit inter latus rectum & *ec*. erit latus rectum duplum ipsius *ae*, nempe æquale ipsi *ad*. Quod erat &c.

PROPOSITIO XVII.

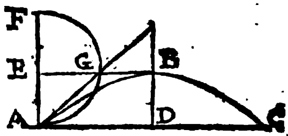
AD proiectiones æquales faciendas, minor impetus requiritur in ea, quæ ad eleuationem semirectam fieri debeat,



Demonstratum iam est, si ab eodem impetu factæ sint proiectiones, longius procedere eam quæ ad angulum semirectum fuerit explosa. Sint proiectiones *ab*. semirecta, & *c.c.* non semirecta. Dico impetum ipsius *c.c.* non semirectæ maiorem fuisse quam ipsius *b*. semirectæ. Si enim fuisset æqualis, tunc amplitudo iactus *ac* ex demonstratis fuisset minor quam *ae*. vt verbi gratia *ad*; sed cum æqualis ponatur amplitudo, maior omnino impetus fuit per *ac*. quam per *ab*; vel minor impetus requiritur in semirecta quam in alia. Quod erat &c.

PROPOSITIO XVIII.

TEmpus, siue durationem vniuscuiusque proiectionis definire.



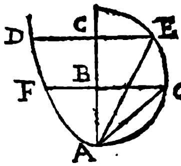
Constructà solita præcedentium figura, sit proiectio *abc*. oportet tempus, siue durationem eius reperire; hoc est quanto tẽpore fiat latio per parabolam *abc*. Scimus iam ex Galileo idem tempus esse lationis *abc*., & cadentis ex *b* in *d*. bis. Ponamus ergo tempus cadentis naturaliter ex *f* in *a*, esse *fa*; eritq; tempus per *ea* media proportionalis *ag*. & hoc semper. ergo linea *ag* metitur tempus lationis per *ea*, siue per *bd*, siue per semiparabolam *bc*, vel per integram etiã parabolam *abc*, Eandem enim rationem inter se habebunt durationes parabolarum, quam habent semiparabolarũ: & nos loquimur de proportionibus, non de mensuris.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

DVrationes proiectionum sunt vt lineę ordinatim applicatę in aliqua parabola ad suam vniuscuiusq; altitudinem.

Sint altitudines duarum parabolarum *ab*, *ac*. (à quocunq; impetu siue eodem, siue nõ, factæ sint, & quascunq; bases habeant, siue ęquales, siue inęquales.) Fiat circa *ca*. parabola inuersa *afd*, & semicirculus. *age*. Eruntque tempora parabolarum vt sunt tempora cadentium per *ca*, *ba*; hoc est vt *cd*, *bf* per X precedentis libri. Quod erat &c.

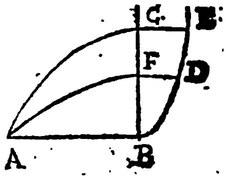


Sunt insuper *ea*, *ga*. in eadem ratione ac *cd*, *bf*, quare etiam *ea*, *ga*. chordæ in semicirculo erunt vt tempora parabolarum &c.

PROPOSITIO XX.

PArabolarum æqualem basim habentium impetus in puncto sublimiori sunt in contraria ratione temporum, siue durationum earumdem.

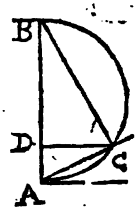
Sint duæ parabolę *ac*. *af*. quæ eandem habeant basim, & eundem axem *bc*. fiatq; circa *bc*. parabola inuersa *bde*. Dico impetum in *c* ad impetum in *f* esse ut *fd*, ad *ce*. Impetus enim in punctis *c*; & *f* sunt puri illi impetus horizontales, secundum quos conficitur latio horizontalis *ab*.



Cum itaq; eadem latio horizontalis *ab* absoluatur temporibus *ce*, *fd*, erunt impetus horizontales reciprocè ut *fd*, ad *ce*. per 3. Propos. Gal. De Motu naturaliter accelerato. *per prec.*

PROPOSITIO XXI.

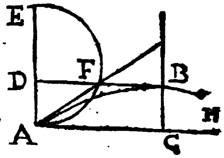
IMpetum purum horizontalem, qui inuariabilis est semper idem in unoquoq; parabolę puncto definire.



Item etiam & perpendicularem uariabilem. Repetita præcedentium propositionum figura, supponimus, ut semper, impetum totalem, siue compositum proiectionis, quem habet mobile in puncto *a*, esse tamquam naturaliter cadentis ex *b* in *a*. & hunc ponimus esse ut linea *ba*.

Sit *ad* altitudo, & *bd* sublimitas parabolę Ergò impetus cadentis per *bd* sublimitatem parabolę, erit ut linea *bc*, media proportionalis inter *ab*, *bd*.

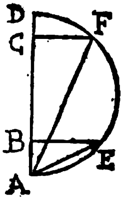
At iste impetus cadentis ex *b* in *d* est ille purus horizontalis qui lationi inest in quolibet puncto parabolę, & est inuariabilis. Quare in vnoquoq; puncto parabolę impetus horizontalis erit ut linea *bc*.



Perpendicularis uerò impetus qui est in primo lationis puncto sic determinabitur. Manente semper unica suppositione, impetum scilicet casus per *ea*. esse ipsam *ea*. Impetus perpendicularis in fine parabolæ *b*, est tamquam naturaliter cadentis ex *b* in *c*, uel ex *d* in *a*. Est ergo ut media proportionalis *af*. Quod &c.

Sed ostendamus etiam pro Corollario, quomodo varietur impetus respectiuè ad horizontem, eiusdem globi ferrei ab eodem tormento proiecti; crescit enim impetus perpendicularis non quẽadmodum crescunt eleuationes tormenti, aut altitudines parabolæ, sed ea ratione qua crescit in semicirculo chorda af. *Hinc animaduertere licet futurum fore vt idem globus ferreus eodem tormento explosus dum ad horizontem redit aliquãdo tecta fornicesq; domorum traiciat, quandoq; verò neque glaciem alicuius lacunæ lędere possit.*

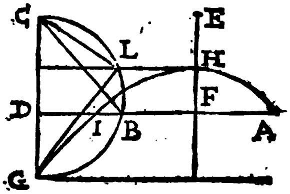
Nota-



Notabimus etiam vim in percutiendo, grauium per se naturaliter cadentium per spatia b a, c a. *esse (facto semicirculo quolibet* a e d *per punctum* a) *vt sunt* a e, a f. *Sunt enim* a e, a f. *tempora casuũ cum sint in subdupla ratione spatiorum; ergò sunt etiam mensuræ, siue indices momentorum velocitatis, aggregatorum per spatia* b a, c a.

PROPOSITIO XXII.

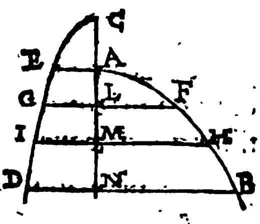
IMpetum compositum, siue absolutum, quantus sit in quolibet puncto parabolę demonstrare.



In solita præcedentium propositionũ figura, sumatur quodlibet punctum *a* in parabola *g h a*. & ducatur horizontalis *a b i d*. Ducaturq; *c b*. Dico (facta semper eadem suppositione impetum silicet per *c g* esse *c g*) quod impetus compositus in *a*, siue in *i*, est recta *c b*. Cum enim impetus in puncto parabolę *a* sit vt naturaliter cadentis ex puncto sublimitatis *e* vsq; in *f*, vel ex *c* vsq. in *d*. erit ille impetus vt *c b* media proportionalis inter *g c*, *c d*. Quod erat &c.

Idem etiam hoc alio modo considerabimus.

Si ex puncto sublimi alicuius datæ parabolę alia parabola circa eandem diametrum describatur, lineę ordinatim ductæ in descripta, determinabunt impetus absolutos in singulis punctis parabolę datę.

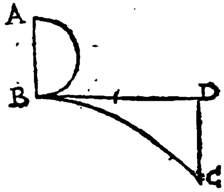


Sit data parabola a b, *cuius punctum sublime sit* c. *Circa communem diametrum fiat per* c *parabola quælibet* c d, *Ductisque ordinatim quotcunq; lineis* a e, f g. h i, b d. *Dico impetus in punctis* a, f, h, b, *esse vt sunt lineę* a e, l g. m i, & n d. *Hoc .n. patet. Quia impetus in* a. f. h. b. *punctis sunt*

vt im-

vt impetus cadentium per c a, c l, c m, c n, *nempe vt lineę* a e, l g, m i, n d. *Quod erat &c.*

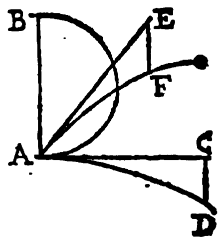
Lemma.



Linea a b. *quam in praecedentibus pro mensura impetus ponebamus, & circa quam semicirculum describebamus, quarta pars est lateris recti parabola* b c, *facta ab horizontali proiectione. Patet hoc ex primo libro, cum* a b *sit impetus, hoc est sublimitas parabola* b c *secundum Galileum. attamen demonstretur aliter.*

Cadat mobile ex a *in* b, *& inde horizontaliter conuersum describat parabolam* b c. *Sumatur* b d. *dupla ipsius* b a. *Ergo mobile tempore casus percurret horizontale spatium* b d, *eritq; omninò post tempus casus in perpendiculo* d c. *Sed est etiam semper in parabola* b c, *ergo in* c *communi concursu erit. Cum ergo facta sit descensio* d c *tempore casus, erit* d c *aqualis* b a. *Patet autem quadratum* b d *aequari rectangulo sub* c d, *et quadrupla* b a (*cum vtraq;* c d, b a *semissis sit ipsius* b d.) *Est ergo* b a *quarta pars lateris recti parabolę horizontalis* b c. *Quod &c.*

PROPOSITIO XXIII.



OMnes parabolæ ab eodem impetu *ab* factę idem habent latus rectum. (dummodo intelligatur punctum *a*, ex quo fiunt proiectiones esse vertex omniũ obliquarũ. parabolarum Sit horizontalis parabola *ad*, & non horizontalis *af*: sumantur in tangentibus ipsarũ æquales *ac*, *ae*.

Quia idem impetus est per *ae*, & per *ae*, ipsæ *ac*, *ae*, abstracta grauitatis operatione, eodem tempore absoluerentur; essentq. grauia eodem tē-

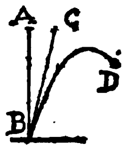
pore

pore in e. & e: sed cum grauitas operetur, & idem sit tempus, æquales erunt descensus ef, ed. Quadratum autem ac. æquatur rectangulo sub ed & quadrupla ab, cum demonstratum sit in Lem. præced. rectam ab esse quartam partem lateris recti parabolę ad, quare etiam quadratum ae æquale erit rectangulo sub ef, & quadrupla ab. Est igitur eadem ab quarta pars lateris recti omnium parabolarum ab eodem impetu factarum. Quod erat &c.

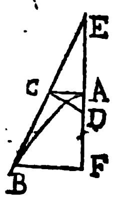
Corollarium.

Hinc manifestum est semper sublimitatem parabolarum ascendentium, siue lineam impetus, quartam partem esse lateris recti illius portionis parabolæ obliquæ, quæ verticem habeat in puncto separationis proiecti ab instrumento impellente,

Verbi gratia. Si mobile post casum ab *ex quiete in* a, *conuertatur non horizontaliter, sed per quamlibet inclinatam* bc, *parabolamq; describat* bd. *Patet lineam impetus, siue sublimitatem* ab *esse quartam partem lateris recti parabolæ* bd. *considerata tamen parabola obliqua* bd *ita vt eius vertex sit punctum* b, *& applicatarum regula sit tangens* bc.



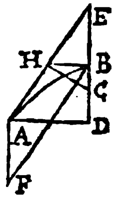
Quod autem hęc conueniant cum doctrina Conicorum, sic demonstrabimus. Si parabola ab *duas tangentes habuerit* ac *per verticem, &* bc *non per verticem: sumptaq; fuerit* ad *quarta pars lateris recti, Dico iunctam* dc *angulos rectos facere cum* bc.



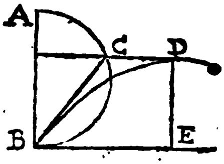
Agatur bf *ordinatim. Cum sint æquales* fa, ae. *erit quadratum* bf. *quadruplum quadrati* ca. *sed idem quadratum* bf *quadruplum est rectanguli* fad, *hoc est rectanguli* ead. *æqualia ergo sunt quadratum* ca, *& rectangulum* ead; *angulusq;* ecd. *rectus.*

Hic, nisi penitus abs re nostra esset, facillimè eliceremus demonstrationem foci. Si enim produceretur bd. *essent per quartam primi elementorum æquales anguli* dec, dbc. *sed ad rem nostram.*

His demonstratis, data parabola ab *cuius axis* bd, *& focus sit* c. *si sumatur quodlibet punctum* a *in sectione, & ordinatim ducatur* ad. *Dico latus rectum parabolæ obliquæ verticem habentis in* a, *esse quadruplum linearum simul* db, bc; *siue linea* ce, *siue linea* ca *si producatur. Ducatur tangens* ae, *& ex* b, *agatur* bf *parallela tangenti* ae; *&* af *ducatur parallela axi* bd. *Erit per iam demonstrata quadratum* he. *æquale rectangulo* bec; *quadrupla etiam æqualia erunt; hoc est quadratum* ae, *vel* fb, *æquale erit rectangulo sub* be, *& quadrupla* ec, *vel sub* fa, *& quadrupla eiusdem* ec. *Quare ipsa* ec, *vel* db, bc *simul sunt quarta pars lateris recti parabolæ obliquæ cuius vertex sit* a. *& diameter* af.



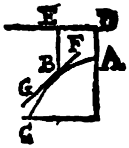
Nos autem dicebamus in præcedenti Corollario, lineam ab, *quæ metitur impetum proiectionum, siue quæ sublimitas est parabolæ obliquæ* bd *verticem habentis in* b, *esse quartam partem lateris recti eiusdem parabolæ* bd. *Quod esse verum confirmauimus etiã ex doctrina Apollonij, cum linea* ab *constet ex* de, *& ex sublimitate, vel quarta parte lateris recti parabolæ rectæ quæ verticem habet* d.



PROPOSITIO XXIV.

QVælibet parabola infinitas habet sublimitates.

Si enim per punctum sublime *d*. quod reperit Galileus, linea horizontalis *de* producatur; quælibet linea perpendicularis quæ ex hac demittatur in parabolam sublimitas eiusdem parabolæ erit, dummodo impetus à mobili per descensum aquisitus connectatur non per lineam horizontalem, sed tangentem.

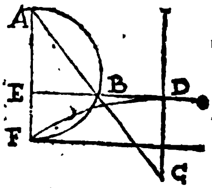


Pro-

Proposita sit parabola *abc*. cuius sublimitas *ad*. & per *d* agatur horizonti æquidistans *de*. Demittatur iam quælibet *eb*. parallela ipsi *da*. Dico *eb* sublimitatem esse parabolæ *abc*, dummodo mobile in puncto *b*. conuenienti modo conuertatur, hoc est per tangentem in puncto *b*. Vel. Dico graue post casum *eb* per tangentem *bf*. siue *bg*. conuersum, propositam parabolam percurrere. Est enim idem impetus cadentis ex *e* in *b*, ac venientis ex *d* per *a* in *b*. Cum ergo in vtroque casu reperiatur in *b* idem impetus, eademq; directio, siue venerit mobile ex *e* in *b*, siue ex *d* per *a*. in *b*. continuabit mobile per eandem lineam *bc* cursum suum. Eadem dicemus de conuersione per *ba* post eundem casum *eb*. Quare *eb* sublimitas est parabolæ *abc*. Quod &c.

PROPOSITIO XXV.

DAtis binis quibuscunq;, siue impetu & directione, siue impetu & amplitudine, siue amplitudine, & directione; focum parabolæ reperire.



Iuxtà duo data construatur figura propositionum præcedentium, & producatur *abc* donec concurrat cum axe parabolæ *dc*. Dico *c* focum esse parabolæ. Cum enim per constructionem æquales sint *eb*, *bd*, æquales erunt etiam *ab*, *bc* inter easdem parallelas, & *ea*. *dc*. Sed *ea* sublimitas est parabolæ *fd*, ergo *dc* quarta pars est lateris recti, & propterea *c*. focus erit. Quod &c.

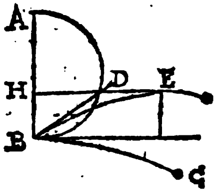
Corollarium.

Hinc patet parabolas, quæ semirectæ sint habere focum in horizontali linea; Minores vero portiones quam semirectæ focum habere sub horizonte, & maiores supra horizontem.

PROPOSITIO XXVI.

PArabola proiectionis horizontalis maxima omnium est, quæ fieri possint ab eodem impetu.

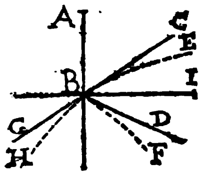
Sit impetus *ab*. fiatq; circulus *adb*. Sit etiam parabola iactus horizontalis *bc*, & alia parabola *be*. Dico maiorem esse parabolam *bc*. quàm *be*, Est enim *ba* recta sub limitas parabolę *bc*, & *ha* recta sublimitas parabolę *be*. Quare *bc* omnium maxima erit; cum maiorem habeat sublimitatem, ideoq. maius latus rectum. Quod erat &c.



PROPOSITIO XXVII.

PArabolę ab eodem impetu factæ, quarū directiones æqualiter ab horizonte vtrimq; distant sursum, & deorsum eiusdem parabolę portiones sunt,

Sit impetus *ab* & fiant proiectiones iuxtà directiones *bc*, *bd*, ęqualibus angulis ab horizonte *bi* vtrimq; distantes, Dico parabolam *be* & parabolam *bf*. portiones eiusdem parabolæ esse. Producatur enim *cbg*. Demonstratúm est Propositione 7. huius, quòd si fiat proiectio cum eodē impetu iuxtà directionem *bc*, siue *bg*, parabolæ harum proiectionum vnam eandemq; continuatam parabolam efficient. Erit ergo *bh* eadem parabola ac *be*; quare eriam *bf* eadem parabola erit ac *be*; quandoquidem æqualitèr inclinantur directiónes *bg*, *bd*, idemq; est impetus.

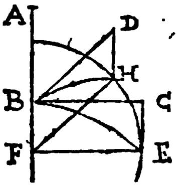


PROPOSITIO XXVIII.

SI ab eodem puncto *b*, cum eodem impetu *ab*, eodem tēporis momento simul proiciantur grauia per diuersas incli-

inclinationes sursum vel deorsum, erunt omnia grauia semper in periphęria alicuius circuli cuius centrum erit in perpendiculo *ab*.

Sit facta proiectio horizontalis *be*, & non horizontalis quælibet alia *bh* iuxta directionem *bd*. Sumptoq; in horizontali parabola quouis puncto *e*, ducatur perpendiculum *ec*, & horizontalis recta *ef*. Seceturq; *bd* ęqualis *bc*, & demittatur perpendiculum *dh* æquale ipsi *ce*, vel *bf*. Dico grauia eodem simul tempore esse in *e* & in *h*. Cum enim æquales sint *bc*. *bd*. eodem simul tempore grauia essent in *c* & in *d* si ęquabili motu procederent. Sed cum grauitas operetur, erunt grauium descensus eiusdem temporis, ęquales. at per suppositionē descensus vnius est *ce*, ergo descensus alterius erit *dh*. Quare grauia simul erunt in *e* & in *h*. & propterea in periphęria circuli, cuius centrum est *f*, nam *fe*, *fh* ęquales sunt, cum sint latera parallelogrammorum opposita lateribus *bc*, *bd*. ęqualibus.



Verum ergo est, non solum grauia cadentia ab eodem puncto per diuersas planorum inclinationes, sed etiam proiecta semper esse in eiusdem circuli peripheria. Exempli gratia; si quis ex aliquo puncto grauia proiiceret cum eodem impetu per diuersas inclinationes, aliudq; graue emitteret eodem temporis instanti ex quiete, & ab eodem puncto; videret grauia proiecta semper in aliquo circulo disposita commeare, & huiusmodi circulus semper haberet centrum in graui illo, quod naturalitèr descendit emissum ex quiete. vt dictum est.

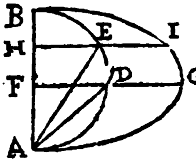
PROPOSITIO XXIX.

SI ab eodem puncto, & cum eodem semper impetu fiant proiectiones; vertices parabolarum, siue quod idem est, extrema ascensionum puncta erunt in sphæroidis superficie cu-

ius

ius quidem maior diameter horizontalis sit, & dupla minoris.

Sit impetus *ab*, & circa *ab*. Fiat semicirculus *adb*. tum fiant proiectiones iuxtà tangentes *ad*, *ae*, Dico vertices parabolarũ esse in supeificie sphæroidis; quæ habeat axem *ab*, & diametrum horizontalem duplam axis *ab*. Demonstratum enim est Propositione 9. huius, quod productis horizontalibus *fg* per punctum *d*, & *hi* per punctum *e*, quæ duplæ sint linearum *fd*, *he*, demonstratum inquam est puncta *g* & *i* esse vertices parabolarum. Sed puncta *g* & *i* sunt in sphæroidis superficie, de qua diximus (est enim vt *gf* ad *fd*, ita *ih* ad *he*; ergo patet propositum.

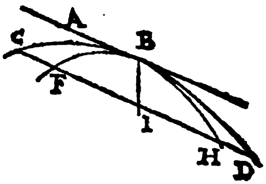


Sphęra ergo actiuitatis ascendentis proiectorum est in superficie sphęroidis illius speciei quę diametrum habeat duplam axis.

Lemma I.

Si recta linea duas parabolas contingat in eodem puncto, sint que parabolarum diametri parallelę, ipsę parabolę se mutuo contingent in illo eodem puncto.

Sit recta linea ab *qua in puncto* b *duas parabolas* cbd, fbh. *contingat, & habeant parabolæ parallelas diametros, Dico huiusmodi parabolas se mutuo contingere. Si enim non contingunt, secent; & intelligatur alteram parabolarum esse* cbh. *alteram verò* fbd. *Aga*[tur] bi *parallela diametris, &* cd. *parallela tangenti. Erunt ergo æquales* ci, ih; *item ęquales* fi, id. *Quod est impossibile, quare &c.*

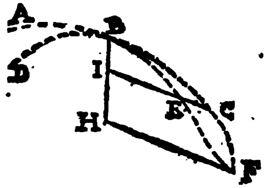


Lemma II.

Si duę parabolæ abc, dbe. *se mutuò contingant in* b, *& habeant diametros parallelas; Dico has parabolas numquam amplius conuenire.*

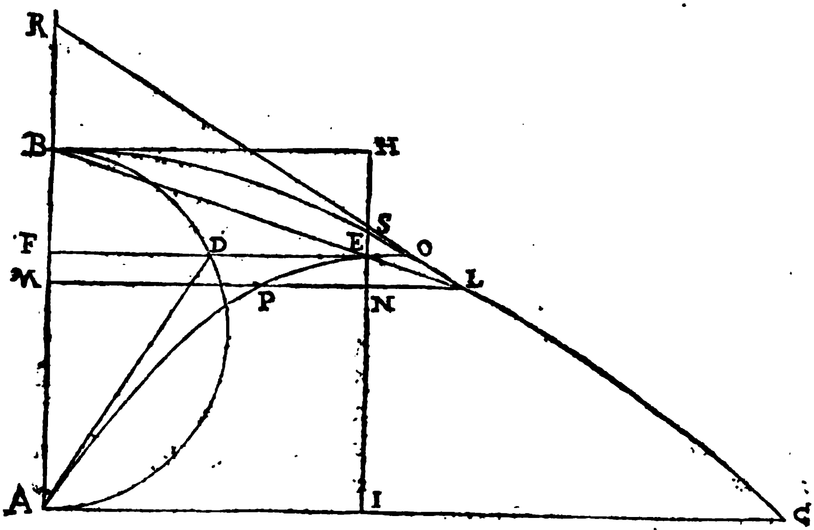
Si enim possibile est conueniant in f. *& ducatur* bh *parallela dia-*

la diametris, & fh ordinatim; tum alia quauis ci ordinatim producatur. Habebit ergo quadratum fh eandem rationem ad duo quadrata ci, ei, nempe quā habet hb, ad bi. Quod est impossibile ergo &c.



PROPOSITIO XXX.

SI ab eodem puncto cum eodem semper impetu proiectiones fiant, parabolę omnes contingent superficiem conoidis parabolici, cuius latus rectum quadruplum sit proiectionis sursum perpendiculariter factæ.



Sit impetus *ab*. & circa *ab* fiat circulus *adb*. circaq; axem *ab* fiat ex vertice *b* parabola *blc*, cuius focus sit *a*. Fiat iam proiectio iuxtà quamlibet eleuationem *ad*, sumaturq; *de* æqualis ipsi *df*. & demisso perpendiculo *hei*. fiat sua parabola circa diametrum *ei* ex puncto *a*, eritq; hęc parabola semita proiecti ab impetu *ba* iuxtà lineam directiuam *ad*, & erit *he* sublip.Conic. sublimitas huius parabolę. Ducatur *be*, quæ conueniet cum parabola *blc*. Conueniat in *l*. Dico parabolam *ape* continuatam contingere parabolam *blc* in *l*. Ducantur ordinatim *lm*, & *fe* vsq; in *o*.

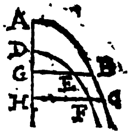
Sunt per Lemma Propos. 24. præcedentis libri in continua ratione *lm*, *of*, *ef*; Quadratum *of*. quadruplum est rectanguli *abf* ob parabolam cuius focus est *a*. & quadratum *ef* cum sit per constructionem quadruplum quadrati *df*, quadruplum etiam erit rectanguli *afb*. His demonstratis sic procedemus. Recta *mb* ad rectam *bf* per 4. sexti est vt *ml* ad *fe*, siue vt quadratum *fo* ad quadratum *fe* (sumptisq; eorum subquadruplis) vt rectangulum *abf* ad rectangulum *afb*, hoc est (omissa communi altitudine) vt recta *ba* ad *af*; Quare diuidendo erit vt *mf* ad *fb*, ita *bf* ad *fa*, & propterea in continua ratione sunt *mf*, *bf*, *fa*; siue *ne*, *he*, *ei*.

Transeat iam parabola *ae*. per punctũ *p*. erit quadratũ *ai* ad quadr. *pn*, vt *ie*, ad *en*, hoc est vt quadr. *eh* ad quadr. *en* hoc est vt quadratum *bh*. ad quadratum *nl*; & permutando, quadratum *ai* ad quadratum *bh*, erit vt quadratum *pn* ad quadratum *nl*. Quare *pn*, *nl*. ęquales sunt. & ideo parabola *ape*. cum transeat per *p*. transit etiam per *l*. Sumatur tandem *br* æqualis ipsi *bm*. & iungatur *rl*. Manifestum est *rl* vtramque parabolam contingere, cum sint æquales tam *mb*, *br*, inter se, quam *ne*, *ef* inter se. Ergo parabolæ *ape*, & *blc* se mutuò contingunt in puncto *l* per primum lemma; neq; amplius conueniunt per secundum lemma. Quod erat &c.

Sphæra ergo totalis actiuitatis proiectorum est in superficie conoidis parabolici, cuius focus est punctum ex quo fiunt proiectiones; & latus rectum conoidis quadruplum est proiectionis perpendicularis sursum. Demonstratum enim fuit singulas singularum proiectionum parabolas huiusmodi conoidis superficiem attingere, numquam excedere. Proiecta igitur, eodem tempore sunt in sphęra superficie, in fine ascensionis sunt in sphęroidis superficie; suprema illorum actiuitas est in conoidis parabolici superficie.

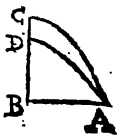
Lem-

Lemma.



Parabolę æquales abc, def, *& circa eandem diametrum* ah *descripta asymptoti sunt; hoc est cum semper magis accedant inuicem, nunquam tamen conueniunt.*

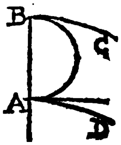
Rectangulum sub ad *& latere recto differentia est inter quadrata* bg, ge, *item etiam inter quadrata* ch, hf. *Ergo rectangula etiam sub* eb, *&* bg *tanquam vna linea, & sub* fc, chf *tamquam vna linea, æqualia erunt inter se, cum sint differentiæ quadratorum; reciproca ergo habebunt latera, nempe vt* eb *ad* fc *ita erit* chf *linea ad* bge *lineam. est autem* chf *linea maior quam* bge, *& ideo* eb *maior erit quam* fc. *Parabolæ ergo semper magis accedunt. Quod nunquam conueniant patet.*



Nam si possibile est, conueniant in a. *& ducatur ordinatim* ab. *Cum parabolę sint ęquales habebunt idem latus rectum, eritq; quadratum* ab. *æquale vtriq; rectangulo quod continetur sub latere recto, & alterutra ipsarum* cb, db. *Quod est impossibile.*

PROPOSITIO XXXI.

Parabola proiectionis horizontalis nunquam conuenit cũ superficie conoidis præcedentis propositionis, etiam si semper magis ac magis ad illud accedat.



Sit in figura præcedentis propositionis impetus *ab*; parabola genitrix conoidis sit *bc*, parabola autem horizonralis proiectionis sit *ad*. Dico has parabolas semper quidem accedere, nunquam tamen conuenire. Sunt enim circa eandem diametrum *ab*; & sunt æquales, quandoquidem recta *ab* est quarta pars lateris recti parabolæ *bc*, per constructionem, & parabolæ *ad*, quia est ipsius sublimitas. Ergo per lemma præcedens asymptoti erunt. Quod erat &c.

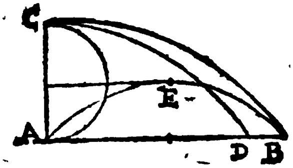
 Coro-

Corollarium.

Hinc manifestum est parabolas factas iuxtà directiones deorsum inclinatas numquam contingere superficiem conoidis; Attamen si continuatę intelligantur illud contingent ad partes oppositas superiores. Demonstrauimus enim Propos. 7. & 27. Parabolas directionum deorsum vergentium easdem esse ac directionum sursum vergentium, dummodo lineę directionum ęqualiter ab horizonte distent vtrimq;

PROPOSITIO XXXII.

DAto impetu siue sublimitate *ac*, cuius proiectio semirecta sit parabola *aeb*, Dico, si proiectio fiat cum eodem impetu horizontalitèr ex puncto sublimitatis *c*, iactum, siue parabolam cadere in *b*.



Cadat enim, si possibile est, iactus horizontaliter factus ex puncto *c* in pūctum *d*. Et quia parabolæ *cd* impetus, siue sublimitas ponitur recta *ac*, erit *ac*. quarta pars lateris recti parabolæ *cd*; ergo *ad* applicata ex foco dupla erit ipsius *ac*. Sed etiam *ab* dupla erat ipsius *ac*; cum supponatur *ab* amplitudo facta à proiectione semirecta, ergo æquales essent *ad*, *ab*, impossibile. Patet ergo propositum.

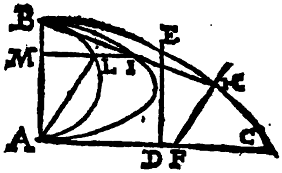
Patet etiam quod iactus *cb* describit parabolam genitricem illius Conoidis, cuius superficiem tangunt omnes proiectiones factæ ex puncto *a* cum eodem impetu.

PROPOSITIO XXXIII.

DAto impetu, & quocunque plano siue erecto, siue ad horizontem inclinato, reperire in dato plano remotissimū, siue altissimum punctum ad quod cum dato impetu fieri possit iactus.

Item reperire directionem quæ altissimum, siue remotissimū illum iactum faciat.

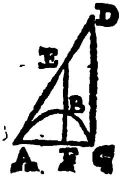
Sit



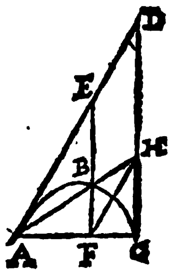
Sit impetus *ab* & parabola conoidis sit *bc*. Iam dato plano ad horizontem erecto *de*. erit punctum *e* altissimum omnium illorum, ad quæ potest ex *a* cum impetu *ab*. iactus peruenire. Si verò inclinatum sit planum vt *fb*, erit punctũ *b* altissimum omnium illorum ad quæ cũ dato impetu ex puncto *a* potest iactus peruenire. Directionem verò quæ facit parabolam pertinentem ad punctum *b* sic inueniemus. Fiant circa axem *ab* circulus, & ellipsis propositionis 29. iunctàq. *bb*, secetur ellipsis in *i*, & ducatur *im*. horizontalis quæ secet circulum in *l*: erit *al* directio quæ parabolam emittit tangentem conoides in puncto *b*. Hoc enim demonstratur in Propositio- 30. huius.

Propositio Archimedis est sequens lemma in libro de Sphæroidibus & Conoidibus, quam tamen expeditius demonstrabimus.

Lemma.



Si fuerit parabola abc, *cuius basis* ac, *tangens* ad, *parallela diametro* cd; *ducaturq. alia parallela diametro*, ef; *Dico esse vt* cf *ad* fa, *ita* fb *ad* be. *Est enim* cd *ad* be *longitudine vt* da *ad* ae *potentia, vel vt* cd *ad* fe *potentia. Sunt ergo continuæ* cd, fe, be. *Iterum est, vt* ca *ad* af *ita* cd *ad* fe, *vel* fe *ad* be; *& diuidendo vt* cf *ad* fa, *ita* fb *ad* be. *Quod erat &c.*



Manente eadem figura & demonstratione, dico si producatur recta ab *vsq; in* h, *& iungatur* fh, *quod* fh, *&* ad *parallela erunt.*

Demonstratum enim est vt cf *ad* fa *ita esse* fb *ad* be, *hoc est* ch, *ad* hd. *Quare* fb. *parallela erit ipsi* ad.

PROPOSITIO XXXIV.

DAta eleuatione & amplitudine parabolæ in plano horizontali, quæritur amplitudo in plano inclinato.

Sit in præcedenti figura data eleuatio *ad*, amplitudo autem *ac*, planumq; datum sit *ab* quæritur transitus parabolæ *b*. Ducantur *cd* parallela diametro; *hf* verò parallela tangenti, & *fb*. parallela diametro; Dico *b* esse transitum parabolæ. Hoc autem patet ex demonstratis.

Data in eadem figura eleuatione *ad* & basi *ac*, planoque *fe* ad horizontem erecto, quæritur punctum *b*. in eodem plano *fe*. Ducatur *cd* erecta ad horizontem, *fh* parallela tangenti *ad*, & iungatur *ha*, secans *ef* in *b*. Patet iterum transitum parabolæ esse punctum *b*.

PROPOSITIO XXXV.

DAta basi parabolæ, vnicoq; puncto per quod ipsa transit; Vel datis tribus punctis in parabola, eleuationem proiectionis demonstrare.

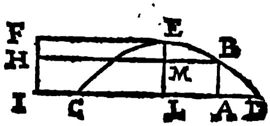
Sit in eadem figura data amplitudo *ac*, datumque punctum *b*. Vel dentur tria puncta vtcumq; *a*, *b*. *c*.

Iungantur *ab*, *ac*, & per *c*, *b* puncta sint parallelæ diametro *cd*, & *fbe*. & dabuntur puncta *h* & *f*. Producatur ergo *hf*. quæ parallela tangenti erit. angulus ergo *hec* erit angulus eleuationis.

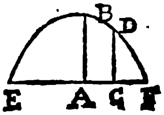
Manente eadem figura. Dato angulo eleuationis *hec* datisq; punctis *c* & *b*. inuenire punctum ex quo facta fuerit proiectio. Agantur per puncta *c*, & *b*, horizonti perpendiculares *ef*, *dc*, quæ dabunt puncta *h*, *f*. in linea *hf* data. Ducantur iam *cf*, *hb*, quæ concurrant Verbi gratia in *a*. Et ex puncto *a* facta erit proiectio nisi concurrant impossibile datum erit.

Lemma.

Si in parabola cuius basis cd, *parallela diametro fuerit* ab, *erit rectangulum sub* ab *& latere recto æquale rectãgulo* cad.



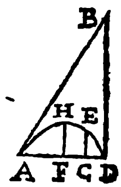
Ponatur enim e f *latus rectũ, & comple-tur rectangulum* e i. *Quia* c d *secta est bifariam & non bifariam, erit quadratũ* l d, *hoc est rectangulum* e i *æquale rectã-gulo* c a d *& quadrato* l a. *Demptis æqualibus (nempe hinc quadrato* l a, *siue* m b, *& inde rectangulo* e h) *reliqua æqualia erunt, hoc est rectangula* m i, *&* c a d. *Quod &c.*



Iam si rectæ a b, c d. *fuerint parallelæ diametro, erit rectangulum* e a f *ad rectangulum* e c f *vt* a b, *ad* c d.

Sunt enim illa rectangula æqualia rectangulis sub a b *& latere recto, & sub* c d *ac latere recto respectiue, ista vero cum habeant æqualem altitudinem, erunt vt bases* a b, c d. *Quare etiam rectangula* e a f, e c f. *erunt vt* a b, *ad* c d.

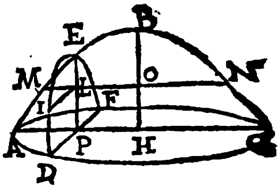
PROPOSITIO XXXVI.



DAta directione *ab*, & basi *ad*. data est altitudo parabolæ supra quoduis punctum *c*. Diuidatur bifariam *ad* in *f*, & erigatur *fb*. Quoniam datur angulus *bad* directionis, & basis *ad*, dabitur in triangulo rectangulo latus *bd*, & ideo *fb*, quæ quidem est quarta pars ipsius *bd* ob parabolam. Fiat ergo vt rectangulum *afd*, siue quadratum semibasis *af* ad rectangulum *acd*, ita altitudo *fb*. ad aliam. & quarta reperta erit altitudo quæsita *ce*. Quod erat &c.

Lemma.

Si conoides parabolicum *abc* secetur plano *def* æquidistantèr axi, sectio parabola erit, & æqualis semper ei quæ conoides generauit, hoc est æquale latus rectum habẽs. Sumpto enim quolibet puncto *i* in sectione *die*, applicetur *il*, ducaturq.



caturq; *mln* parallela ad *ac*. Iam: cum æquale sit quadratum. *dp* rectangulo *apc*, erit quad. *dp* ad quad. *ah*, vt recta *pe* ad *hb* ob parabolã *abc*, sed quad. *ah* ad quad. *mo* est vt recta *hb* ad *bo*, & quad. *mo* ad rectangulum *mln*, siue ad quad. *il* est vt recta *ob* ad *le*; ergo ex æquo, quad. *dp* ad *il*, est vt recta *pe* ad *el*. Propterea sectio *die* parabola erit.

Amplius. Quoniam verò rectangulum sub diametro *pe*, & latere recto parabolę *def* æquale est quadrato applicatæ *dp* siue rectangulo *apc*, cui rectangulo *apc* æquale est rectangulum sub recta *pe*, & latere recto parabolæ *abc*. (per lemma Propos. præced.) æqualia erunt inter se illã prędicta rectangula; sed altitudo *pe* eadem est vtriq;, ergo bases æquales erunt, nempe latus rectum parabolæ *die*, æquale erit lateri recto parabolæ *abc*. Quod &c.

PROPOSITIO XXXVII.

SI ab eodem puncto, cum eodem semper impetu, proiectiones fiant per omnes lineas horizontales, omnesq; iactus excipiantur in aliqua superficie plana ad horizontem erecta, Dico omnes illos iactus in quandam lineam parabolicam cadere ęqualem semper parabolæ proiectionis.

Hoc autem patet ex lemmate præmisso. Nam omnes illi iactus horizontales superficiem quandam describunt conoidis parabolici, quam superficiem secat planũ illud erectum in quo feriunt iactus, ergo sectio in quam cadunt iactus, erit parabola æqualis parabolæ genitrici conoidis; Propterea patet propositum.

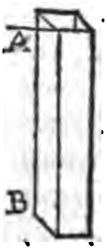
Si verò iactus omnes terminentur in horizonte, sectio circulus erit; quando verò in planis inclinatis, sectiones erunt ellipses, quod facile colligi potest ex demonstrationibus antiquorum, qui Demonstrauerunt obliquam sectionem conoidis ellipsim esse.

DE MOTV AQVARVM.

Iam verò & de aquis aliquam huic libello contemplationem inserere non erit inconueniens: aquis enim pręceteris corporibus sublunaribus adeò peculiaris, & cognatus videtur motus, vt ferè nunquam quiescant. Omitto magnum illum nutantis maris motum; Prętereo etiam omnem fluminum, aquarumq; currentiū tum mensuram, tum vsum, quarum omnis doctrina reperta primum fuit ab Abbate Benedicto Castellio praeceptore meo. Scripsit ille scientiam suam, & illam non solum demonstratione, verū etiam opere confirmauit, maxima cum Principum & populorum vtilitate, maiore cum admiratione phylosophorum. Extat illius liber, vere aureus. Nos minuta quadam, & plerumq; inutilia, non tamen penitus incuriosa circa hanc materiam prosequemur.

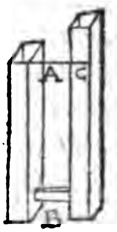
Supponimus.

Aquas violentèr erumpentes in ipso eruptionis puncto eundē impetum habere, quem haberet graue aliquod, siue ipsius aqua gutta vna, si ex suprema eiusdem aqua superficie vsq; ad orificium eruptionis naturalitèr cecidisset.



Exempli gratia. Si tubus ab *conuenientis capacitatis, hoc est magna laxitatis, intelligatur semper aqua plenus vsq; ad libellam* a, *et perforetur angusto orificio in* b. *Supponimus aquam ex* b *erumpentem eundem impetum habere, quem haberet graue aliquod si naturalitèr ex* a *in* b *cecidisset.*

Hoc ratione quodammodo confirmari posse videtur nam si ad osculum b *alius tubus inseratur, et exquisitè coaptetur, aqua ex* b *influens in tubum* b c, *tantam vim habet vt se ipsam euehat vsq; ad eādem libellam horizontalem* c a *ductam per orificium* a.

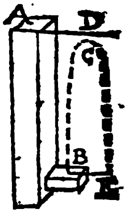


Quare verisimile videtur etiam quando ipsa ex b *libera erumpit, habere vim redeūdi vsq; ad horizōtalem lineam quę per* a *ducitur; vel quod idem est habere tantum impetum quantus est grauis alicuius,*

siue

siue vnius guttæ liberè cadentis ex a *in* b.

Experimentum etiam aliquo modo principium nostrum probat, quamquam aliqua ex parte reprobare videatur. Nam si osculum b *sursum dirigatur, & sit aptè rotundum, & leuigatum, sitq; reliqua totius tubi latitudo multo capacior quàm orificiū* b, *videbimus aquā salientē per lineā* b c, *quasi ad libellam suam* a d *ascēdere. Defectionis autē* c d *causam adscribere possumus partim impedimento aeris qui cōtra quodcunq; corpus mobile luctatur; partim etiā ipsimet aquæ, quæ dum ex fastigio* c *reditum affectat deorsum, se ipsam venientem impedit, & retardat, neque sinit subeuntes guttas ad illud ipsum signum ad quod suo impetu peruenirent, ascendere posse. Hoc manifestè patebit, quando opposita manu foramen* b *penitus occludatur; deinde retracta quam citissimè manu repente aperiatur: videbuntur enim primæ, & praeuntes guttæ altius peruenire, quàm sit deinde culmen aquæ* c. *postquam aqua deorsum fluere cœperit. illæ enim priores guttæ præcedentem aquam non habent, quæ contra ipsas refluens motum ipsarum in fine ascensionis impediat suppono enim ductum* b c *perpendicularem.*



Adde etiam quod si quis obseruet aerem ipsi aquæ b c *circū fusum, reperiet ipsum agitari, & sursum moueri, quæ quidem latio non fit sine vi, & propterea cum impedimento motus aquæ ascendentis. Vnde est, quod si quis velit de hoc principio experimentum facere, sumendum esset argentum viuum, quod ob intimam grauitatem magis aptum est, & ad conseruandum diu cōceptum impetum, & adsuperandam aeris resistentiam. Aqua autem ob leuitatem multum aberrare videbitur, & præcipuè si tubus magnæ fuerit altitudinis: tunc enim ob maximum impetum spargitur in guttulas minutissimas tamquam roris, neq; dimidiam, & fortaße tertiam, quartamue partem ascendit illius interualli quod re ipsa, theoricè loquendo, & remotis impedimētis omnibus concepto impetu totum exæquare deberet. Cæterum si quis prædictis rationibus non acquiescat, videat an inter sequentes Propositiones vllam probet; quod si ita erit, facile per re-*

solu-

lutionem ex approbata propositione primam suppositionem demõstrabimus; sin minus totam hanc appendicem de motu aquarum vel saltu prætermittat, vel funditus è libello euellat, quod equidem libentissimè concedo, etsi factum experimentum omni diligentia magnam partem sequentium propositionum exactissimè confirmauit.

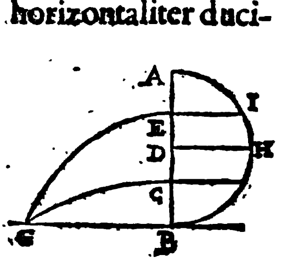
His expositis consideremus aquam recidiuam in e, nempe in plano horizontali ducto per libellam orificij b. Ex Galileo habemus impetum aquę cadentis ex c in e tantum esse quantus vehere potest eandem aquam ex e in c. Ergo impetus in e idem est ac in b, sed in e impetus est tamquam grauis cadentis ex c in e. vel ex a in b (diximus enim quod punctum c reipsa deberet esse in libella a d abstractis impedimentis quæ aquam retardant) ergo impetus in b est tamquam grauis cadentis naturaliter ex a in b.

His suppositis quædam demonstrabimus de aquis erumpentibus, quæ mirè cum doctrina proiectorum conuenire videntur.

PRimùm manifestum est omnes aquas erumpentes ex foraminibus tubi alicuius perforati, parabolas describere. Primę enim guttæ scaturientes e tubo sunt de natura proiectorum quandoquidem ipsæ, quamquam liquidæ attamen sunt sphęrulæ graues & coherentes, & ideo parabolam certè designabunt. Omnes autem subsequentes, quæ cum eodem impetu emittuntur (supponimus enim tubos semper aqua plenos) semitam pręcedentium percurrent; quare continuus ille aquæ fluentis tractus parabola erit.

Obijcet fortasse aliquis hoc non videri, pręsertim quando tubi orificium valde angustum erit, & impetus vehemens. Tunc enim (vt videre est in linea illa aquea, quę ex fontium fistulis violentiùs erumpit) prior pars orbitæ illius ascendentis magis tensa apparet, et ad parabolam veriùs conformata; posterior verò, hoc est ea quam aqua descendens percurrit, magis prona, et vt ita dicam, languida atq; curua conspicitur. Obiectioni respondetur; non solùm pręcedentem propositiunculam, sed etiam *maiorem partem sequentium huic instantię subiacere. Causa est impedimentum medij, quod ad momentum corporis mobilis valdè sensibilem habet rationem, multoq; maiorem quàm in proiectionibus quę fiunt à machinis bellicis. Siquidem illic materia proiectionis sunt globi plumbei, ferrei, vel saltem marmorei; hic verò linea est, & quidem aquea. Nulli igitur mirum sit, quòd cum fundamentum huius doctrinę ęquè verũ sit Thoricè loquẽdo, ac in proiectis Galilei, practicè tamen multum ab ipsis contemplationibus aberrent experimenta, quæ ad hoc vt exactiora euaderent, vel fieri deberent in medio non obstante, vel saltem grauissima materia esset adhibenda. Quamquam si quis modica altitudine, solertiq; diligentia experiri hęc omnia velit, minimum quoddam, & plerumq; insensibile deesse comperiet. Experimentum, quod nobis confirmauit has penè omnes speculatiunculas, factũ fuit tubo quodam, imò capsula parallelepipeda, cuius altitudo passum Geometricum excedebat, cuius basis vno palmo quadrato non erat minor. Foramina verò erant rotunda, circuloque humana pupillę maiora, non perperàm facta, sed solertissimè excauata in lamellis cupreis, tenuibus, & ad horizontem erectis. Aqua enim violenter erumpens semper directione exit perpendiculari ad illud planum ex quo erumpit, ideoq; fiebat vt emissiones nostri tubi horizontales essent.*

DAto tubo *a b* semper pleno, & aptè perforato foraminibus *c d e*. hoc est quæ sint figuræ circularis, sitq; illorũ ductus horizontalis, hoc est in tenui lamella plana pendiculari. Datoq; horizonte quolibet *b g*, inuenire amplitudinẽ vniuscuiusq; parabolæ. Fiat circa *a b* diametrũ semicirculus *a h b*. Eritq; parabolæ fluẽtis, ex *e* amplitudo dupla lineæ *e i* quæ horizontaliter ducitur in semicirculo. Et amplitudo parabolæ erumpentis ex *d* erit dupla lineæ *d h*. Et hoc probatur, quia cum aqua sit velut proiectum quoddam, sitq; (per suppositum) ipsius punctũ sublime *a*, erunt per Propositionem 5. Galilei, semisses amplitudinum medio loco proportiona-



les inter sublimitatem, & altitudinem; quare semisses amplitudinum æquales erunt lineis *ei*, *dh*.

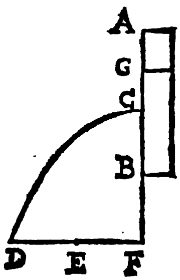
Corollaria.

Hinc manifestum est quod si tubus ab *perforetur in* d *puncto medio altitudinis, tunc emissionem ex* d *factam longiùs quã qualibet alia cadere.*

Foramina verò quæ æqualitèr à puncto medio d. *distant, patet æquales amplitudines facere.*

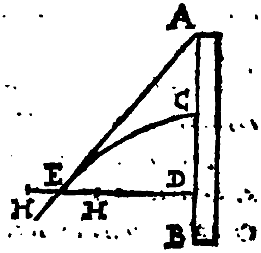
Manifestum etiam est inferiores parabolas semper superioribus maiores esse, cum habeant maiorem sublimitatem, hoc est maius latus rectum, est enim sublimitas quarta pars lateris recti, vt ostensum est.

DAto dolio, siue tubo *ab* quod aptè perforatum sit in *c*, & emissionem faciat *cd*. Inuenienda sit aquę in tubo latentis libella horizontalis, siue superficies suprema.



Sit horizon *df*, & producatur *cb* in *f*, & secetur bifariam *fd* in *e*, fiatq; vt *cf* altitudo, ad *fe*. semibasim, ita *fe*, ad aliam, quæ erit sublimitas *cg*. Patebit ergo libellam aquæ in tubo latentis esse per punctum *g*.

SI tubus *ab* aptè perforetur vbicunq; in *c*, emissio fluentis aquæ coni rectanguli superficiem continget, cuius axis sit ipse tubus, vertex verò sit in aquæ libella.

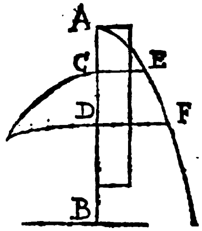


Sit angulus coni *bac*. semirectus, & *ab* tubus, hoc est linea ea in quà sunt foramina, ponatur axis coni. Sumatur æqualis *cd* ipsi *ca*. Ducaturq; horizontalis *de*. Dico parabolam transire per *e*. Si enim potest, transeat per *h*. & cum aquæ sublimitas sit *ca*. erit semissis lineę *bd* media proportionalis inter duas æquales *dc*, *ea*. & propterea tota *db*. æqualis erit ipsi *da*, vel *de*. quod est absurdum. Si ergo parabola transit per punctum *e*. ipsa *ea* tangens est, cum æquales sint *ac*, *cd*.

Hinc manifestum est quòd si tubus in omnibus suis punctis aptè perforatus fuerit, omnes emissiones quodammodo conspirare videbuntur ad formandam coni rectanguli speciem. Si verò non tubus, sed sphærula in vertice ipsius posita, aptè perforata sit in omnibus suis punctis, emissiones omnes cuiusdam conoidis parabolici imaginem conformabunt, ex Propos. 30. huius.

AQuarum ex tubo *ab* perforato erumpentium velocitates sunt vt lineæ in parabola applicatę ad suam vniuscuiusq; sublimitatem.

Sit tubus *ab* semper aqua plenus, & ex foraminibus *c*, *d* erumpant fluentes lineæ: descriptaq; parabola *aef* circa axem *ab* ducantur ordinatim *ce*, *df*. Erit ergo velocitas in *c* ad velocitatem in *d*, vt impetus grauis cadentis ex *a* in *c*. ad impetum grauis cadentis ex *a* in *d*, nempe vt *ce*, ad *df*. ex demonstratis in primo libro de motu.



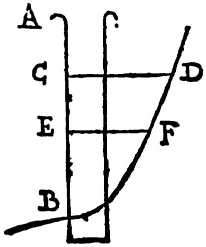
Corollarium.

Hinc sequitur ex doctrina Abbatis Castellij quantitatē aquæ exeuntis per ostium c. *ad quantitatē aquę exeuntis per* d *(quādo foramina fuerint ęqualia) esse vt* ce, *ad* df. *Hoc est aquas erūpentes ex foraminibus æqualibus esse in subdupla ratione sublimitatum, siue altitudinum suarum. Veritatem huius Corollarij primus omnium experimento indagauit eruditiss. vir, æquè literis, scientijsq; omnibus ornatus*, Raphael Magiottus, *& veritatem nostram exitus felicitate confirmauit.*

Quando verò foramina inæqualia erunt, quantitates aquæ exeuntis compositam rationem habebunt ex ratione velocitatū, & ex ratione ostiorum.

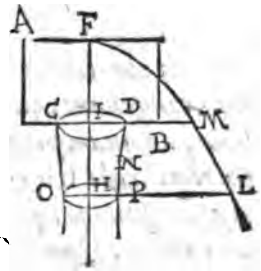
Si tu-

SI tubus *ab* cylindricus, siue prismaticus perforatus in fundo *b* fluat, neque alius humor superinfundatur, velocitates supremæ superficiei humoris latentis decrescent cum eadem ratione, qua decrescunt etiam lineæ ordinatim applicatæ in parabola *bd*, quæ axem habeat *ba* verticem verò *b*. Hoc manifestum est. Nam quando aquæ summa superficies erit *c*, velocitas erit *cd* & quando summa superficies erit *e*, velocitas erit *ef*. ex iam demonstratis; & hoc modo semper.



CViusmodi sit solidum ab aquis cadentibus conformatum inuestigare.

Sit vas aqua semper plenum *ab* amplissimum, cuius foramen in fundo circulare sit *cd*, solidum autem aquæ ex eo fluentis sit *copd*, & solidi axis sit *fh*. Dico lineam *dnp* solidi huius genitricem talem esse, vt numerus biquadratus diametri *cd*, ad biquadratum diametri *op*. sit reciprocè vt altitudo *fh* ad altitudinem *fi*.



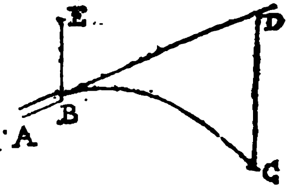
Ostendit Abbas Castellius sectionem *cd* ad sectionem *op*, esse reciprocè vt velocitas in *op*, ad velocitatem in *cd*. nempe vt *bl* ad *im* in parabola *fml*. His præmissis. Quadratus numerus diametri *cd* ad quadratum *op* est vt circulus *cd*, ad circulum *op*. nempe vt *hl* ad *im*. Numerus autem quadratus ex *bl* ad quadratum ex *im* est vt *hf* ad *fi*. ergo biquadratus numerus diametri *cd*. ad biquadratum *op* est reciprocè vt altitudo *fh*, ad altitudinem *fi*. Quod &c.

Data sit eadem figura altitudo *fi* 100. *fh* 160. dataq; sit diameter foraminis *cd* 50. Quæritur quãta futura sit solidi diameter *op*. Fiat vt *fh* ad *fi*, nempe vt 160. ad 100. ita numerus biquadratus diametri *cd*, nempe 6250000. ad alium, qui erit 3906250; idcircoq. erit numerus biquadratus diametri *op*. fier-

go ab

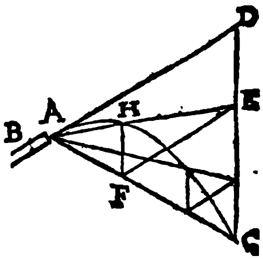
go ab eo extrahatur radix biquadrata, prouenict 44. cum 5. vndecimis proximè. tantam ergo pronunciabimus esse diametrum *op*.

DAta *bd* directione fistulæ *ab*. & puncto *c* in quod incidit aqua fluens, inuenire summam latentis aquę libellam, siue superficiem. Producatur *abd*, & ex *c* erigatur perpendiculum *cd*. Deinde fiat vt *cd*, ad *db*, ita *db* ad aliam, cuius quarta pars sit *be*. Dico per *e* transire libellam aquæ latentis supremam. Est enim *bd* tangens parabolæ, & *cd* parallela diametro; ergo quadratum *bd* æquale erit rectangulo sub *cd*, & latere recto, quare reperta illa linea (cuius quartam partem posuimus *be*) latus rectum erit, & *be* sublimitas. Quod &c.



Monemus iterum ad hoc vt experimenta cum demonstrationibus congruant, quòd foramen b *debet esse in lamella tenui, & plana, ad quam perpendicularis sit recta* bd. *Reliquum verò interioris tubi* ba *&c. vsq; ad initium aquęductus, debet esse capacissimum; quò enim laxius erit, eò exactius experimentum euadet. Quotiescunq; autem aqua per tubum latentem decurrens per angustias transire debuerit, falsa omnia reperientur; Quemadmodum accidet etiam, si præ nimio impetu, aqua statim atq; emissa est, in tenuissimum rorem dispergatur.*

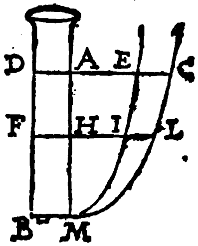
DAta directione *ad*, tubi, siue fistulę *ba*, & puncto *c* in quod incidat aquæ emissio, totam parabolam aquę fluentis describere.



Producatur *bad*, & erigatur perpendiculum *cd*. Deinde connectatur *ac*. Ducantur iam tres lineę *ae*, *ef*, *fh*, quarum prima sit ex angulo *a* vtcunque, secunda parallela tangenti, tertia parallela diametro. & punctū *h* erit transitus parabolę, vt constat ex demonstratis, & sic de singulis punctis parabolæ quęsitæ.

Posi-

Posito vase *ab* siue cylindrico, siue prismatico quod in fundo perforatum sit foramine *b*. Velocitas aquæ exeuntis ex *b* velocitati libellæ, siue supremæ superficiei descendentis in vase, semper eadem ratione respondebit.



Quandò libella aquæ in vase est *ad*, sit velocitas *ae* aquæ exeuntis per *b*. Tum fiat, vt sectio *ad* vasis, ad sectionem orificij *b*, ita *ac* ad *ae*. Eritq; per doctrinam Castellij, ipsa *ae*. velocitas libellæ *da* in descedendo. Iam circa *am* diametrum fiant per *c*, & *e*, duæ parabolæ *mc*, *me*.

Consideretur deinde alia libella *fh*. Quando *fh*. libella erit, tunc per demonstrata erit velocitas in *b* vt linea *bl*. Sed velocitas in *b* ad velocitatem libellæ *fh* erit per doctrinã Castellij vt sectio *fh* ad sectionem *b*, nempe vt *ca* ad *ae* & sic semper. Quare velocitas aquæ exeuntis ad velocitatem libellę descendentis in quocunq; loco consideretur, semper erit vt linea applicata in maiori parab. ad applicatam in minori; hoc est in eadem semper ratione.

Aliter etiam ostendetur idem hoc modo. Intelligatur in vase ab *qualibet sectio* fh, *quæ non sit summa superficies; sit autem summa superficies* da. *Iam; cum eadem quantitas aquæ transeat per sectionem* b *& per* fh, *erit velocitas in* b *ad velocitatem in* fh *reciprocè vt sectio* fh *ad sectionem* b; *sed sumpta sectio* fh *æquèuelox est ac suprema superficies* da (*cum vas ponatur cylindrus, siue prisma*) *ergo velocitas in* b *ad velocitatem supremæ superficiei* da *descendentis in vase semper eadem ratione respondebit; nimirum semper erit vt sectio vasis ad sectionem foraminis* b.

Corollarium.

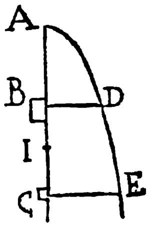
Ergo quando altitudines in vase erunt am, hm, *erit velocitas aquæ exeuntis ex* b *posita altitudine* am, *ad velocitatẽ exeuntis ex* b *posita altitudine* hm, *vt est velocitas summæ superfi-*

perficiei d a *ad velocitatem summæ superficiei* f h. *hoc enim patet. Nam sumpta superiori conclusione permutando tantum deducitur hoc Corollarium.*

QVantitates aquarum ab eodem, siue ab æqualibus foraminibus erumpentium eodem tempore, sunt inter se in sub duplicata ratione altitudinum.

Sit vas *ab* præcedentis figuræ perforatum in *b*. & aliquando maneat semper plenum vsque ad signum *da*; aliquando verò vsque ad *fh*. Dico quantitatem aquæ exeuntis quando altit. est *am*, ad quantitatem aquę exeuntis quando altit. est *hm* (intellige semper eodem tempore) esse in subduplicata ratione altitudinum *am* ad *hm*. Nempe vt recta *ac* ad *hl*. Nam quando altitudines sunt *am*, & *hm*, Velocitates in *b* sunt ex Coroll. præced. vt velocitas summę superficiei *da*, ad velocitatem summæ superficiei *fh*; siue vt applicata *ae* ad *hi*. Ergo quantitates aquarum erumpentiũ ex eodem foramine *b* erunt vt *ae* ad *hi*, nempe in subduplicata ratione altitudinum *am*. ad *hm*.

Hæc speculatio conuenit exactissimè cum experimẽto à nobis summa cum diligentia facto.



QVoddam vas cuius summitas *a* perforatum est foramine *b* ita vt superinfluẽte quodam aquę ductu in *a* semper plenum permaneat. Quæritur, quo foramine perforari debeat in *c* vt eadem superinfluẽte aqua plenum pręcisè sicut antea permaneat. Sumatur inter *ab*, *ac* media *ai*. Fiatq; vt altitudo *ca* ad mediam *ai* ita osculum *b* ad osculum *c*. Erit ergo osculum *b*. ad osculum *c*, vt applicata *ce*, ad applicatam *bd*; hoc est vt velocitas foraminis *c* ad velocitatem *b* reciprocè. Propterà eadem quantitas aquę effluet per vtrumq; osculum *b* & *c*; propositumq; vas semper plenum manebit.

Quoddam verò vas a b *cum perforatum sit in fundo foramine* b, *superinfluente quodam dato aqua ductu* d, *plenum permanet*

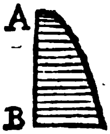
manet usq; ad signum c. *Quæritur quantitas aquæ in idem vas ingerenda ad hoc ut repleatur usq; ad signum* a. *Sumatur inter* a b, b c. *media* b e: *fiatq; ut* e b *ad* b a, *ita quantitas aquæ data* d *ad aliam quantitatem; quæ ingesta omninò vas replebit usq; ad signum* a, *neq; illud excedet. Quod cum multis alijs huius generis facilè demonstratur ex præcedentibus.*

AQuarum fluentium (quę tamen aliquo vase excipi possint) proportionem dicere, sine ulla temporis, velocitatis, sectionisq; mensura.

Sumatur ut in præcedenti figura, quodcunque uas *a b*, cuiuscunq; figuræ sit, ita tamen perforatum in fundo, ut minor ex datis aquis fluentibus ingesta non effluat statim tota, sed increscat, & aliquam altitudinem faciat in uase, puta altitudinem *b c* & deinde non crescat amplius; sed tantum aquæ prorsus uas emittat, quantum recipit. Maior uerò aquæ quantitas altitudinem faciat *a b*. Patet ex præcedentibus aquam maiorem ad minorem esse in subduplicata ratione rectæ *a b* àd *b c*. Nam cum utraque aqua transeat per eandem sectionem *b*, & altera earum altitudinem habeat *a b* altera uero *c b*, erunt uelocitates aquarum per dictam sectionem exeuntium in subduplicata ratione *a b* ad *c b*. Ergo & quantitates aquarum fluentium erunt in subduplicata ratione factarum altitudinum *a b*, *b c*.

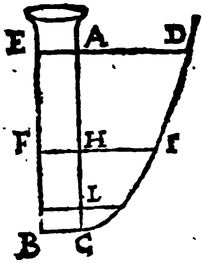
Lemma.

Sit diameter alicuius parabolæ a b, *& mobile aliquod moueatur per* a b *ea lege, ut in quocunq; puncto lineę* a b *consideretur semper impetus eius sit ut linea ordinatim ex illo puncto intra aliquam parabolam applicata. Dico hunc motum eundem esse ac grauium naturaliter cadentium. Intelligatur enim aliquod graue moueri ex* a *in* b *motu naturaliter accelerato, & concipiatur eius momentum eiusmodi ut tam graue quam etiam mobile simul dimissa ex* a. *eodem tempore perueniant ad punctum* b



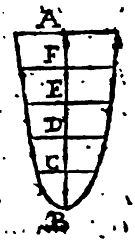
patet amborum mobilium unum atq; eundem futurum esse motum, Nam in quocunq; puncto lineæ a b *consideretur alterutrum dictorum siue mobile, siue graue, eundem impetum habebit ac alterum, quare pariter etiam transibunt spatium* a b, *partesque ipsius. & hoc uerum etiam erit si mobile moueatur ex* b *in* a, *non crescente, sed decrescente impetu.*

Vasa cylindrica siue Prismatica in fundo perforata ea lege exhauriuntur, ut diuiso toto tempore in partes æquales, emissio ultimi temporis sit ut unum, emissio autem penultimi tẽporis sit ut 3. antepenultimi temporis ut 5. & sic deinceps ut numeri impares ab unitate.



Sit uas ut positum est; perforatum in fundo, ipsiq; adscribatur parabola *c d*. Iam demonstrauimus fluente ex fundo aqua, libellam *a e* ita descendere ut semper uelocitas ipsius sit ut linea sibi respondens in parabola, nempe impetus in *e a*, sit ut *a d*, in *f h* sit ut *h i*, & sic semper; erit ergo motus libellæ *e a* tamquam motus deficiens grauium sursum reflexorum, siue proiectorum; & diuiso toto tempore emissionis in partes æquales, erit spatium *i c* decursum à libella ultimo tempore, ut unum; spatium autem *h i* ut tres, & *h a* ut quinque. Nam, ex lemmate premisso, motus libellæ *a e* est tamquam motus grauium non cadentium, sed sursum perpendiculariter proiectorum (quod idem est) ergo motus libellæ *a e* eadem spatia transibit temporibus equalibus, atq; graue aliquod sursum proiectum, nempe ultimo tempore unum, penultimo tria; & sic deinceps.

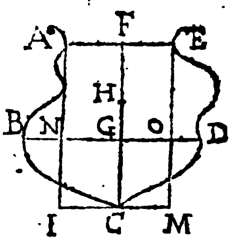
ex lem. praced.



Si fiat uas conoidale parabolicum cuius axis sit a b, *& perforatum sit in fundo* b *uideri poterit emissio eius eiusmodi ut motus supremæ superficiei descẽdentis, æquabilis sit: hoc est ut æqualibus temporibus æquales altitudine moles exhauriantur; quod tamen falsum est. Sunt enim conoidea parabolica*

inter

inter se ut quadrata axium, siue altitudinum. Si ergo diuidamus totam ab *in partes aequales, erit conoides* cb *ut unum, &* db *ut quatuor; ipsumq;* eb *ut 9. & sic deinceps semper ut numeri quadrati. Erunt ergo conoides* cb *ut unum; differentia autem* cd *ut tria,* de *ut 5.* ef, *ut 7. & sic de inceps differentiae erunt ut numeri ab unitate impares. Quare uidebitur alicui quod singulae huiusmodi differentię aequalibus temporibus exauriri debeant per iã demonstrata in praecedenti; sed quoniam in huiusmodi uacuatione plurimi refert cuius figura sit ipsum uas, absolutè falsum hoc esse pronuntiamus; demonstrationemq. unusquisq. colligere poterit ex his quae sequuntur.*



ESto uas irregulare *a b c d e* perforatum in fundo foramine *c*; & considerentur duae ipsius sectiones *a e*, *b d*. Dico uelocitatem summae superficiei aquae descendentis, quando erit *a e*, ad velocitatem superficiei, quando erit *b d*, rationem habere compositam ex ratione subduplicata altitudinũ *fc* ad *c g*, & reciproca sectionum, nempe sectionis *b d* ad *a e*. Concipiatur enim super basi sectionis *a e* quęcunq. illa sit, uas prismaticum *a i m e* cuius altitudo sit *fc*. Iam velocitas sectionis prismaticae *a e* ad *n o* erit ut recta *fc* ad *c h* mediam intęr altitudines. Velocitas uerò sectionis *n o* ad uelocitatem sectionis *b d*, cum eandem altitudinem habeant, est reciprocè ut sectio *b d* ad *n o*. Ergo patet quòd ratio uelocitatis sectionis *a e* ad uelocitatem sectionis *b d* componitur ex ratione rectae *fc* ad *c h*, & ex ratione sectionis *b d* ad *n o*, siue *b d* ad *a e*.

Hinc manifestum est quod nuper de Conoide parabolico dicebamus, nempe motum supremae superficiei descendentis non esse aequabilem; sed subinde acceleratum. Qua uerò ratione acceleretur; & qua ratione uarientur uelocitates supremae superficiei aquę descendentis in sphęra perforata, sphaeroide, atq. alijs uasibus regularibus, facilè ex contẽplatione pręcedenti patebit.

DE TABVLIS.

SEquuntur Tabulæ non quidem doctis calculi vigilijs elaboratæ, vt à Galileo factum est, sed ex ipsa Tabula sinuū ac Tangentium facili breuiq; negotio transcriptæ. Quocunq; tamen modo collectæ fuerint, non minus augent Galilei gloriam, quàm laborem nostrum comminuerint. Cuius enim industriæ tanta solertia est, vt per innumeras multiplicationum, diuisionum, & radicum ambages, adeosdem pene numeros appellere potuerit, quos ex Tabula desumere nobis concessum fuit? Prædictum hoc volo, nos supponere voluisse eandem maximam amplitudinem semiparabolarum cum Galileo partium 10000. item maximam altitudinem partium 10000. vt eędem omnino Tabulæ euaderent, & aliqua interdum differentia inter illius numeros & nostros appareret. Ideo in solum laborem bissectionum incidimus. Si verò suppositionem variare, hoc est numerum hunc duplum 20000. supponere voluissemus, tunc integræ Tabulæ diuersę quidem euasissent à Galilei Tabulis, sed numeri poterant sine vlla bissectione ex sinibus, & Tangentibus prout ibi leguntur mutuari.

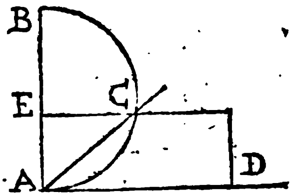
Tabula continens Amplitudines. Semiparabolarum ab eodem impetu factarum. Supposita maxima amplitudine partium 10000. Sunt autem numeri Tabulæ sinus recti arcuum eleuationis duplorum.

GRAD. Eleuat.	Amplitudo semipar.	GRAD. Eleuat.
0	0000	90
1	349	89
2	698	88
3	1045	87
4	1392	86
5	1736	85
6	2079	84
7	2419	83
8	2756	82
9	3090	81
10	3420	80
11	3746	79
12	4067	78
13	4384	77
14	4695	76
15	5000	75
16	5299	74
17	5592	73
18	5870	72
19	6157	71
20	6428	70
21	6691	69
22	6947	68

GRAD Eleuat.	Amplitudo Semipar.	GRAD. Eleuat.
23	7193	67
24	7431	66
25	7660	65
26	7880	64
27	8090	63
28	8290	62
29	8480	61
30	8660	60
31	8829	59
32	8988	58
33	9135	57
34	9272	56
35	9397	55
36	9511	54
37	9613	53
38	9703	52
39	9781	51
40	9848	50
41	9903	49
42	9945	48
43	9976	47
44	9994	46
45	10000	45

Explanatio praecedentis Tabulæ.

POnimus maximam altitudinem omnium proiectionum ab eodem impetu factarum esse partium, 10000. Ponimus ergo in subiecta figura lineam *ab* esse 10000, partium. Dato deinde angulo *dac* eleuationis gr. 40. queritur quanta sit altitudo *ae* respectu ipsius *ab* quæ est 10000.

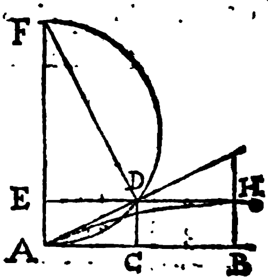


Datur quidem *ae* 8264. ex Tabula sinuum, cum sit sinus versus arcus *ac* gr. 80. qui arcus duplus est anguli eleuationis *dac*. Sed datus numerus rectæ *ae* 8264. erit respectu semidiametri, quę sit partium 10000. Cum verò nos ponamus totam diametrum *ab* esse partium 10000. tunc *ae* erit 4132. hoc est tantummodo semissis illius numeri ex Tabula sinuum versorum excerpti.

Praxis.

Duplicetur data eleuatio; illiusq. sinus versi semissis accipiatur; & sic habebis numeros Tabulæ præcedentis, qui altitudines parabolarum, siue proiectionum metiuntur.

Declaratio Sequentis Tabulæ.



POnimus *ab* amplitudinem omniũ semiparabolarũ esse partiũ 10000 Data iam eleuatione *cad* gr. 30. iuxtã quam dirigendum est tormentum. Quæritur parabolæ *ab* Altitudo, & sublimitas.

Secetur *ab* bifariam in *c*, erigatur que ad angulos rectos *cd*. Fiatq. angulus *adf* rectus. Manifestum est circa diametrum *af* describi semicirculum qui transeat per *d* cum rectus sit angulus ad *d* donec concurrat cum directione *ad*. Cum ergo fiat proiectio cum impetu *fa*, & directione *ad*, erit amplitudo semiparabolæ linea dupla ipsius *ed*, nempe ipsa *ab*; altitudo verò *bh*, vel *ae*, sublimitas *ef*. Quæritur ergo quantitas linearum *ae*, *ef*.

Cum *ab* sit partium 10000. erit *ed* nempe semissis ipsius, partium 2500. semper, quæcunque sit eleuatio. Si ergo *ed* sit sinus totus, erit altitudo *ea* 5774. tangens anguli eleuationis *cad*, hoc est *eda*. Sublimitas verò *ef* erit 17320. tangens complementi eiusdem anguli. Hæc autem vera sunt quãdo *ed* sit 10000. sed quia in casu nostro *ed* est tantummodo partium 2500, nempe semissis sinus totius, erunt *ea*, *ef* semisses dictarum tangentium; hoc est altitudo *ae* 2887. ipsa verò sublimitas *ef* 8660. propterea tormentum illud, quod eleuabitur gr. 30. ad hoc vt faciat amplitudinem semiparabolę partium 10000. debebit habere sublimitatem, siue impetũ 8660. Quod quidem idem est, ac si diceremus quòd impetus proiectionis tantus esse debet, quantus est grauis alicuius naturalitèr cadentis ab altitudine 8660, earumdem partium. Altitudo verò talis parabolę erit 2887.

Praxis.

Pro altitudine, sume semissem tangentis anguli eleuationis.

Pro sublimitate, sume semissem tangentis complementi anguli eleuationis.

Tabula continens Altitudines, & sublimitates Semiparabolarum quarum amplitudines æquales sint. Partium silicet semper 10000. *Sunt*

GRAD. Eleuat.	ALTITVDO	SVBLIMITAS	GRAD. Eleuat.	ALTITVDO	SVBLIMITAS
0	00	infinita	23	2122	11779
1	87	286450	24	2226	11230
2	175	143186	25	2332	10723
3	262	95406	26	2439	10252
4	350	71503	27	2548	9813
5	437	57150	28	2659	9404
6	525	47572	29	2772	9020
7	614	40722	30	2887	8660
8	703	35577	31	3004	8321
9	792	31569	32	3124	8002
10	882	28356	33	3247	7699
11	972	25723	34	3373	7413
12	1063	23523	35	3501	7141
13	1154	21657	36	3633	6882
14	1247	20054	37	3768	6635
15	1340	18660	38	3906	6400
16	1434	17437	39	4049	6173
17	1529	16354	40	4196	5959
18	1625	15388	41	4346	5752
19	1722	14521	42	4502	5553
20	1820	13737	43	4663	5362
21	1919	13025	44	4828	5178
22	2020	12375	45	5000	5000

autem, Altitudines semisses tangentium angulorum elevationis At Sublimitates sunt semisses Tangentium complementorum elevationis.

GRAD. Eleuat.	ALTITVDO.	SVBLIMIT.
46	5178	4828
47	5362	4663
48	5553	4502
49	5752	4346
50	5959	4196
51	6175	4049
52	6400	3906
53	6635	3768
54	6882	3633
55	7141	3501
56	7413	3373
57	7699	3247
58	8002	3124
59	8321	3004
60	8660	2887
61	9021	2772
62	9404	2659
63	9813	2548
64	10252	2439
65	10723	2332
66	11230	2226
67	11779	2122
68	12375	2020

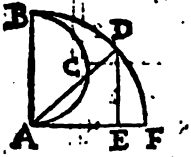
GRAD. Eleuat.	ALTITVDO.	SVBLIMIT.
69	13025	1919
70	13737	1820
71	14521	1722
72	15388	1625
73	16354	1529
74	17437	1434
75	18660	1340
76	20054	1247
77	21657	1154
78	23523	1063
79	25723	972
80	28356	882
81	31569	792
82	35577	703
83	40722	614
84	47572	525
85	57150	437
86	71503	350
87	95406	262
88	143186	175
89	286450	87
90	Infinita.	00

Tabula continens durationes, siue impetus ad horizontem comparatos proiectionum ab eodem impetu factarum. Supponitur maxima duratio, siue impetus maximus esse 10000. Sunt autem numeri Tabulæ sinus recti eleuationum.

GRAD Eleuat.	Duratio siue Imp.	GRAD Eleuat.	Duratio siue Imp.	GRAD Eleuat.	Duratio vel Imp.
1	175	31	5150	61	8746
2	349	32	5299	62	8892
3	523	33	5446	63	8910
4	698	34	55[illegible]	64	8988
5	872	35	5736	65	9063
6	1045	36	5878	66	9135
7	1219	37	6018	67	9205
8	1392	38	6157	68	9272
9	1564	39	6293	69	9336
10	1736	40	6428	70	9397
11	1908	41	6561	71	9455
12	2079	42	6691	72	9510
13	2250	43	6820	73	9563
14	2419	44	6947	74	9613
15	2588	45	7071	75	9659
16	2756	46	7193	76	9703
17	2924	47	7314	77	9744
18	2090	48	7431	78	9781
19	3256	49	7547	79	9816
20	3420	50	7660	80	9848
21	3584	51	7771	81	9878
22	3746	52	7880	82	9903
23	3907	53	7986	83	9925
24	4067	54	8090	84	9945
25	4226	55	8192	85	9962
26	4384	56	8290	86	9976
27	4540	57	8387	87	9986
28	4695	58	8480	88	9994
29	4848	59	8572	89	9998
30	5000	60	8660	90	10000

Expositio præcedentis Tabulæ.

IVxta ea, quæ demonstrata sunt in propositionibus 18. & 21. Proiectorum, quando *ab* fuerit maxima duratio, siue maximus impetus ad horizontem comparatus, erit *ac* intercepta in semicirculo, duratio, siue impetus eleuationis *ac.* ad horizontem comparatus.



Supponimus *ab* esse partium 10000. nempe sinum totum. & dato angulo eleuationis *eac* gr. 30. quærimus *ac*.

Manifestum est, facto quadrante *bdf*, quando *ab* fuerit sinus totus, tunc *ca* esse sinum rectum eleuationis, hoc est anguli *eac*, quandoquidem *ca* equalis est ipsi *de*. Vt ostendimus in præcedenti libello. Ergo cum *df* arcus sit gr. 30. erit recta *de*, siue *ac*, 5000. respectu ipsius *ab* quæ est 10000. Hoc autem significat, quòd impetus grauis naturaliter cadentis ex *b* in *a* ad impetum parabolæ in extremo puncto (dummodo ad horizontem tantum comparetur) erit vt 10000. ad 5000. Duratio verò, siue tempus lationis naturalis per perpendiculũ *ba* ad tempus, siue durationem parabolæ erit vt eadem *ba* ad *ac*, nempe vt 10000. ad 5000.

Praxis.

Sume ipsos sinus rectos eleuationũ, & habebis numeros Tabulæ, exhibentes durationes, & impetus parabolarum ad horizontem comparatos.

Tabu-

Tabula continens Gradus eleuatinis aqua debet adhiberi, vt Amplitudo proiectionis fiat datæ mensuræ.

Spatia siue incrementa proiectionum æqualia.

Spatia.	GRAD. Eleuat.	Complemen.	Spatia.	GRAD. Eleuat.	Complemen.
10	17	89. 43	260	7. 32	82. 28
20	34	89. 26	270	7. 50	82. 10
30	52	89. 8	280	8. 8	81. 52
40	1. 9	88. 51	290	8. 26	81. 34
50	1. 26	88. 34	300	8. 44	81. 16
60	1. 43	88. 17	310	9. 2	80. 58
70	2. 0	88. 0	320	9. 20	80. 40
80	2. 18	87. 42	330	9. 38	80. 22
90	2. 35	87. 25	340	9. 56	80. 4
100	2. 52	87. 8	350	10. 14	79. 46
110	3. 9	86. 51	360	10. 33	79. 27
120	3. 27	86. 33	370	10. 51	79. 9
130	3. 44	86. 16	380	11. 10	78. 50
140	4. 1	85. 59	390	11. 29	78. 31
150	4. 19	85. 41	400	11. 47	78. 13
160	4. 36	85. 24	410	12. 6	77. 54
170	4. 54	85. 6	420	12. 25	77. 35
180	5. 11	84. 49	430	12. 44	77. 16
190	5. 29	84. 31	440	13. 3	76. 57
200	5. 46	84. 14	450	13. 22	76. 38
210	6. 4	83. 56	460	13. 42	76. 18
220	6. 21	83. 39	470	14. 1	75. 59
230	6. 39	83. 21	480	14. 21	75. 39
240	6. 57	83. 3	490	14. 40	75. 20
250	7. 14	82. 46	500	15. 0	75. 00

Supponimus proiectiones omnes eundem impetum habere, hoc est, esse eiusdem machinae. & maximam proiectionem ponimus part. 4000.

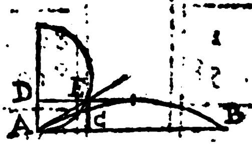
Spatia.	GRAD. Eleuat.	Complemen.
510	15. 20	74. 40
520	15. 40	74. 20
530	16. 0	74. 0
540	16. 21	73. 39
550	16. 41	73. 19
560	17. 2	72. 58
570	17. 23	72. 37
580	17. 44	72. 16
590	18. 5	71. 55
600	18. 26	71. 34
610	18. 48	71. 12
620	19. 10	70. 50
630	19. 32	70. 26
640	19. 54	69. 6
650	20. 16	69. 44
660	20. 39	69. 21
670	21. 2	68. 58
680	21. 25	68. 35
690	21. 49	68. 21
700	22. 13	67. 47
710	22. 37	67. 23
720	23. 2.	66. 58
730	23. 27	66. 33
740	23. 52	66. 8
750	24. 18	65. 42

Spatia.	GRAD. Eleuat.	Complemen.
760	24. 44	65. 16
770	25. 11	64. 49
780	25. 38	64. 22
790	26. 6	63. 54
800	26. 34	63. 26
810	27. 3	62. 57
820	27. 33	62. 27
830	28. 3	61. 57
840	28. 34	61. 26
850	29. 6	60. 54
860	29. 39	60. 21
870	30. 14	59. 46
880	30. 50	59. 10
890	31. 27	58. 33
900	32. 5	57. 55
910	32. 45	57. 15
920	33. 28	56. 32
930	34. 13	55. 47
940	35. 2	54. 58
950	35. 54	54. 6
960	36. 52	53. 8
970	37. 58	52. 2
980	39. 16	50. 44
990	40. 57	49. 3
1000	45. 00	45. 00

Spatia siue incrementa proiectionum aequalium.

Explicatio precedentis Tabulae.

DVM supponitur maxima proiectio esse partium 4000. tunc supponitur quarta ipsius pars, hoc est semidiameter circuli Propositionis 9. proiectorum esse 1000. qui numerus supponitur etiam pro sinu toto in Tabula sinuum.



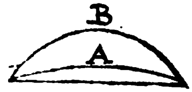
Quandoergo data erit futura amplitudo *ab* partiu 2120. (quę maior non sit numero 4000.) dabitur etiam *ac* 530. ipsius *ab* quarta pars, hoc est *de* erit 530. Ergo ex Tabulis sinuum habebitur quantitas arcus *ae* gr. 32. cuius semissis gr. 16. erit mensura anguli *cae*. Nempe eleuatio quaesita, iuxta quam fiet proposita amplitudo *ab* partium 2120. talium qualium maxima proiectio integra sit 4000.

Praxis pro construenda Tabula; & ad hoc vt quiuis per solas sinuum tabulas probl. soluere possit.

Datę futurae Amplitudinis quartam partem sume; hanc in tabula sinuum quaere, arcumq. ipsi respondentem bifariam seca. Sic habebis eleuationem, quae amplitudinem quaesitam facit. Sed fusius haec in sequentibus explicabimus.

Vso della precedente Tauola.

Supponiamo che il massimo tiro, cioè il tiro fatto all'eleuazione del sesto punto della squadra da una colubrina sia per esempio 4000. passi geometrici. Voglio fare con la medesima vn tiro di maniera tale, che riesca per appunto longo passi 2360. Piglio la quarta parte di 2360 la quale è 590. aguardo su la tauola, e vedo dirimpetto ad esso numero la eleuazione da darsi à detto pezzo esser gradi 18. e minuti 5. ouero gradi 71. e minuti 55. suo complemento. E dico per le cose dimostrate, che il sudetto pezzo con vna di queste due eleuazioni tirerà la palla lontano passi 2360. sopra l'orizonte. Se bene quelle eleuazioni, le quali passano il sesto punto della squadra, non si pongono per l'artiglierie, ma solamente per l'uso de' mortari, o trabocchi, o saltamartini. Deue però auuertirsi che con quella prima eleuazione la palla farà vna strada bassa, ma veloce, come la linea segnata a, e con impeto grande orizontale opportuno per sfondare muraglie, o dare altro impulso laterale. Ma con l'altra eleuazione farà la strada b, la quale sarà pigra di moto orizontale, ma con assai impeto perpendicolare nel fine, oportuno per sfondare volte, tetti, e far altre passate perpendicolari all'orizonte; ouero per gettar robbe in vn certo determinato segno, come sarebbero sacchetti imballati con corde, pieni di zolfo, o salnitro, o farina; ouero palle con lettere, & altro dentro. In somma l'vna, e l'altra eleuazione, che egualmente sia distante dal sesto punto porterà la palla nello stesso luogo, però con la prima, e minor' eleuazione caderà in terra (come essi dicono) Di striscio; e con la seconda e maggior' eleuazione batterà quasi perpendicolare.

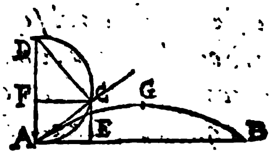


Sò che rarissime volte, e forsi anco mai s'incontrerà che il massimo tiro d'vn' artiglieria sia per appunto que' passi 4000. come par che si supponga nel calcolo della Tauola nostra, & anco in quelle del Sig. Galileo. però la detta Tauola potrebbe parere inutile. Ma noi mostreremo che il numero supposto di 4000. per ciò non serue ad alcuna machina particolare, accioche possa seruir' a tutte vniuersalmente. Bisogna dunque auuertire che quel numero supposto di 4000. non è di passi, ne di canne, o di braccia, ne di altra determinate misure, ma si bene di parti astratte, tali quali esse si siano, che però potendo conuertirsi in tutte le sorti di misure possibili, fanno la Tauola generale tanto per le colubrine, quanto per i mortari, o balestre. E per dare vno esempio come ella si possa addattare a tutte le spezie dell'artiglierie, e ridurre le parti astratte in passi geometrici, faremo così.

Il massimo tiro di vn Cannone per esperienza fatta trouo che è per esempio passi 2300. e voglio con lo stesso fare vn tiro il quale sia di passi 860. faccio così. Se il massimo tiro 2300. mi dà 860. tiro quesito, il numero 1000. massimo della Tauola che mi darà, faccio l'operazione, e trouo 374. il qual numero cercato nella Tauola si ritroua fra 370. e 380. Però adoprando a giudizio la parte proporzionale trouerassi l'arco della sua eleuazione douer' essere gradi 11. in circa, ouero 79. suo complemento. E così è certo che quella tale artiglieria, la quale eleuata a' 6. punti tiraua passi 2300. eleuata gradi 11. ouero 79. del quadrante tirerà passi 860. come desiderauamo.

Perche poi ad alcuno potrebbe parer difficile il trouar per esperienza il tiro massimo dell'artiglieria, mostreremo.

Come da qualunque tiro fatto anco casualmente, si possa trouar' il tiro massimo di vn pezzo d'artiglieria.



SIa vn pezzo dirizzato conforme la linea *ac*, della quale sia l'eleuazione l'angolo *bac*, qualunque si sia. Si misuri detto angolo con la squadra, e trouisi per esempio gr. 30. poi si spari l'artiglieria, e vada la palla fino al punto *b*, e si misuri diligentemente la linea *ab*, che sia per esempio 2400. passi Geometrici. Dico che date queste due cose, cioè la eleuazione, e la lunla lunghezza del tiro casuale *a g h.* viene ad esser data anco la linea *a d*, la quale è la metà del massimo tiro, conforme si è dimostrato nell'vltimo Corollario della Proposizione 9. de proietti.

Essendo dato l'angolo della eleuazione *c a b*, gr. 30. sarà il triangolo rettangolo *e a c* dato in spezie: e perche è data la *a b* in passi, sarà data la *a e* quarta parte di essa, cioè 600. passi. Opereremo dunque così per trouar la quantità di *a d.* per via di calcolo, e de i seni.

Facciasi. Come il seno retto 86602. dell'angolo *a c e* gr. 60. cioè del supplemento della eleuazione. al lato *a e*, che è 600. Così il seno totale 100000. ad vn quarto numero 693. E così la hipotenusa *a c* sarà passi 693. Ma per che anco il triãgolo rettangolo *a c d.* è dato in spezie. facciasi di nuouo. Come il seno retto 50000. dell'angolo *a d c*, il quale è eguale all'angolo dato della eleuazione *e a c*, alla retta *a c* che si trouò 693. passi, così il seno totale ad vn quarto numero 1386. & così la retta cercata *a d* sarà passi 1386. Ma perche *a d* essendo la linea dell'impeto, o sublimità è eguale alla metà del massimo tiro, se noi raddoppieremo 1386. verrà a farsi il numero di 2772. passi, che tanta sarà la lunghezza del massimo tiro, che si cercaua di quella machina, la quale eleuata gr. 30. si trouò tirar passi 2400.

Ma con molto maggior breuità, e con vn calcolo solo potremo operare così. Pongasi che il seno totale sia *c f*, saranno *f a*, & *f d* le tangenti vna dell'angolo della eleuazione, l'altra del suo supplemento. Facciasi dunque. Come il seno totale, alla *c f* che è 600. così 230940. (che è la somma d'ambidue le sudette Tangenti) ad vn quarto numero 1386. e così la retta *a d* si trouerà come prima 1386. passi. la quale raddoppiata darà come sopra la misura del tiro semiretto, o massimo, come vogliam chiamarlo.

Per Corollario si può auuertire che questo è il modo di argomẽtare, da qualsiuoglia tiro d'vn'artiglieria, quanto la medesima sia per tirare all'insu per linea perpendiculare; che sarà quanto

 la li-

la linea ad. *ritrouata per via del calcolo.*

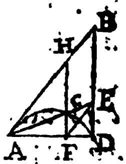
La stessa linea ad *ci insegna da quanta altezza bisognerebbe lasciar cadere una palla d'artiglieria, acciò arrivasse in terra con il medesimo impeto, che conferisce la stessa artiglieria astraendo però sempre dall'impedimento che può apportare la corpolenza dell'aria, che sappiamo esser sensibile per variare le proporzioni dimostrate de' tiri, ma molto più per impedire questo effetto.*

Come con le sole tauole de seni possiamo sapere la massima altezza alla quale è peruenuta per aria la palla di vn tiro. Data però l'eleuazione, e lunghezza di esso tiro.

NEll'istessa precedente figura, sia dato l'angolo della eleuazione *cab*. e la lunghezza del tiro *ab*. Si cerca l'altezza massima, alla quale è peruenuta la palla per aria: E questa sarà la linea *ec*. Prendasi pure di nuouo *ae* 600. passi, cioè la quarta parte di tutta la lunghezza *ab*. e poi facciasi. Come il seno 86602. dell'angolo *aec* supplemento della eleuazione, alla *ae* che è 600. passi, così 50000. seno della eleuazione *eac* ad vn quarto numero, e troueremo 346. passi per misura dell'altezza *ce*, cioè della maggiore altezza alla quale sia peruenuta la palla per aria.

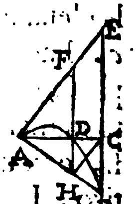
Deue auuertirsi, che non sempre si adoprano le artiglierie di maniera tale che la palla vada a terminare nel medesimo piano orizontale, dal quale era partita, si come suppongono le Tauole del Galileo, e nostre. Però douendosi tirare sopra una spiaggia d'vn colle decliue, ouero accliue; parimente douendosi tirare dalla sommità d'vna Rocca su'l piano sottoposto orizontale, fin hora non habbiamo scienza alcuna intorno alla misura di questi tiri. Potrebbe calcolarsi la tauola, ma ciascuno s'accorgerà che douendosi quella comporre per ogni grado d'eleuazione del pezzo, e poi per ogni grado d'inclinazione della spiaggia, e per ogni passo d'altezza della Rocca, il moltiplico anderebbe quasi in infinito.

finito. Mostreremo però per regola generale il modo di calcolare i sudetti tiri quando occorrerà.



Vna tale artiglieria con la direzzione *ab*. fà il tiro *acd* sopra il piano horizontale *ad*. Ma io voglio tirare sopra il piano *ac* inclinato, e cerco quãto sarà la lunghezza *ac* del detto tiro sopra questo piano. Si tirino *bd* per il punto *d*, & *bf* per il punto *c*. perpendicolari all'orizonte; e si congiunga *fe*. quale per le cose mostrate è parallela alla *ab*.

Misurisi con qualche strumento l'angolo *dae*, cioè la eleuazione della spiaggia, e dalla Tauola delle amplitudini si troui la lunghezza del tiro orizontale *ad*. Dopo questo facciasi. Come *db* tangente dell'angolo dell'eleuazione dell'Artiglieria, alla *be*, che è la differenza delle tangenti de duoi angoli *dab*, *dae* noti, essendo vno la eleuazione dell'artiglieria; l'altro la eleuazione della spiaggia sopra l'orizonte; così *da* nota in passi, ad vn quarto numero; e si trouerà la retta *fa* in passi. Facciasi poi di nuouo. Come il seno totale, a quel trouato quarto numero che è la misura di *af* in passi, così *ac* secante dell'angolo *fac*, ad vn quarto, e così aueremo noto il numero de i passi, i quali misureranno la linea *ac*, cioè la lunghezza del tiro che farà quella tale artiglieria sopra il piano *ac* quando si tira all'insù.



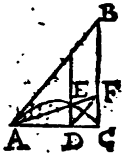
Ma quando dal punto *a* bisognasse tirare giù per vna spiaggia descendente come *ab*. Così troueremo la quantità di *ab*, cioè doue vada a ferire la palla. Sia data la direzzione *ae*, cioè, sia dato l'angolo della eleuazione del pezzo, *cae*; sia dato ancora l'angolo della inclinazione della spiaggia *cab*. Immaginiamoci l'orizonte *ac*. e tiriamo perpendicolari ad esso le *be*, & *bdf*, e congiunghiamo *cb*. la quale sarà parallela alla *ae*. Hora su la tauola delle amplitudini trouueremo quanti passi sia *ad*, ma noi cerchiamo quanto sia *ab*. Però facciasi il calcolo così. Come *fd* tangente dell'angolo

della

della eleuazione dell'artiglieria, alla *dh* tangente della inclinazione del piano, così *ad* nota in passi, ad un quarto numero. Et haueremo la misura di *dc* in passi; e però anco tutta la *ac* sarà nota in passi. Facciasi dunque di nuouo. Come *ac* seno totale, alla *ac* nota in passi, così *ab* secante dell'angolo *cab* ad vn quarto numero; e sarà la misura cercata della retta *ab* in passi; cioè la lunghezza del tiro su la spiaggia descendente *ab*.

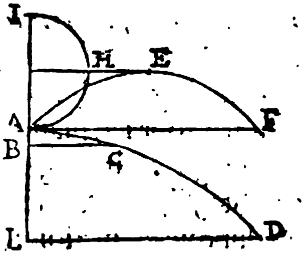
Occorre ancora spesse volte di tirare in piani perpendicolari all'orizonte, come in muraglie di Città, o di Torri, o d'altro. Però anco in questo caso soggiungeremo il calcolo per trouar l'altezza di quel punto doue nel suddetto muro ferirà la palla.

Sia la direzzione del pezzo la linea *ab*, e l'orizonte *ac*, & il muro della torre *de* perpendicolare all'orizonte; e sia la distanza *ad* nota in passi. Immaginiamoci che la palla passi libera senza battere nel muro, e vada a colpire nell'orizonte in *c*. la Tauola delle amplitudini dà la quantità della *ac*. Ma noi cerchiamo l'altezza *de*. Tirisi *cb* perpendicolare all'orizonte, & *df* parallela ad *ab*, e poi congiungasi *fa*, la quale passerà per la comun sezzione della parabola, e del muro, come si può raccorre dalle cose già mostrate. Facciasi hora, come *ca* lunghezza del tiro orizontale, alla *cd* differenza tra le linee *ac*, *ad*, già note, Così la *bc* tangente dell'angolo della eleuazione dell'artiglieria; alla *cf* tangente dell'angolo *fac*. Facciasi di nuouo. Come il seno totale, alla *ad* nota in passi, così la già trouata tãgente dell'angolo *fac*, ad vn quarto numero; il quale sarà la cercata misura della retta *de* in passi, e troueremo il punto *e*, nel quale anderebbe à ferire quel tiro. Lo stesso calcolo si può anco ridurre quando il muro *de* non sia perpendicolare, ma a scarpa, come quelli delle moderne fortezze; ma dubitando di apportar più tedio, che vtile lascierò la cura di ciò a quel Geometra che se ne curerà.



Le amplitudini delle parabole, delle quali tratta il Galileo, & anco noi, suppongono che il tiro non termini su'l piano della campagna,

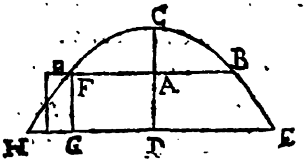
pagna, ma in quel piano orizontale, che passa per la bocca del pezzo. Questa non sarà vero, se non quando l'artiglieria si mettesse con le ruote in una fossa, si che la bocca venisse per appunto nel livello della campagna: Ma per che ciò non si costuma, e per che i tiri vanno a terminare nell'orizonte, che tocca l'infima punta delle ruote, cercheremo Geometricamente quanto possa prolungarsi un tiro livellato, o vogliam dire orizontale, per cagione dell'altezza della bocca del pezzo sopra il piano della campagna. Pare che il semidiametro delle ruote, e la grossezza del metallo cagionino che la bocca dell'artiglierie ordinarie venga alta sopra il sito orizontale intorno a due braccia. Suppongasi dunque in a la bocca d'una colubrina, e sia l'horizonte bc. altezza della bocca sia la retta ab supposta 2. braccia, & la parabola acd sia il tiro livellato; si cerca la retta bc. Sia il tiro semiretto, o massimo della medesima artiglieria, la parabola aef, e pongasi che af sia 3000 passi Geometrici, cioè 15000. braccia Fiorentine. Facciasi il semicircolo solito della Propositione 9. ahl. & prodotta al eguale alla ai, si applichi ld. Per le cose mostrate sarà la retta ai impeto della parabola aef, overo della acd (perche son fatte dalla medesima machina) però al sarà la quarta parte del lato retto della parabola acd. adunque ld sarà doppia di la; ma anche af si mostrò già doppia di ai, però sono eguali ld, & af; & vengono ad esser date tre linee, cioè la 7500 ld 15000; & ab 2. Dunque se noi faremo per la regola del tre: Come la retta la ad ab [illegible], così il quadrato della retta ld ad un'altro nu. troveremo 60000 il quale sarà il quadrato della retta bc; e cavatane la radice quadra, troveremo che la retta bc sarà 245. braccia: Concludasi dunque che quella machina, la quale fa il massimo tiro di 15000. braccia, se haverà la bocca sollevata due braccia sopra l'orizonte, farà il tiro livellato [illegible] [illegible] lungo in ogni [illegible] braccia 245.



Quan-

Quanto poi possa prolungarsi qualunque altro tiro, non orizontale, ma inclinato in sù, ouero in giù, per cagione dell'altezza delle ruote, o d'vn bastione, o d'vna Rocca, o di qualunque altro sito, che la sollieui sopra il piano horizontale, si cercherà in questo modo.

E certo che douendosi tirare dalla cima d'vna Rocca, ouero di vn castello posto in cima d'vn sasso, o da qualunque luogo alto su'l piano orizontale della campagna sottoposta, i tiri riusciranno assai più lunghi che i notati sopra la tauola delle amplitudini; e questa differenza sarà maggiore tanto più quanto più alta sarà la situazione dell'artiglieria sopra quel piano orizontale nel quale deuono ferir le palle, e terminare i tiri.



Sia l'altezza della Rocca, o d'altro luogo *gf.* e debbasi dal punto *f.* tirare sopra il piano della campagna *ge*. Immaginiamoci l'orizonte *fb*, e fatto il tiro *fcbe* con qualunque eleuazione, si cerca la misura di *ge*.

Dalla Tauola delle amplitudini si trouerà la quantità di *ab* e dalla Tauola delle altezze si trouerà la *ac*. altezza della parabola. La pratica poi del calcolo si potrà fare in più modi.

Quadretur numerus ab; *quadratusq; diuidatur per* ac, *& quotus erit latus rectum parabolæ* fcb. *Ducatur deinde quotus iam dictus, in* cd, *& producti radix quadrata dabit* de.

Ouero potremo operare così.

Ducantur simul numeri dc, ca, *& producti radix quadrata erit medio loco proportionalis inter* dc, ca. *Fiat vt* ca. *ad prædictam radicem, ita* ab *ad alium numerum. & quartus numerus erit iterum* de.

Ouero finalmente a questo modo,

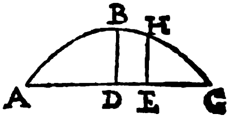
Fiat vt numerus ca. *altitudo parabolę ex tabula. Ad numerum* cd *altitud. parabolæ & arcis simul, Ita* ab. *semiamplitudo parabolæ ex Tabula, Ad alium quartum numerum.*

Sumatur deinde numerus medio loco proportionalis inter di-

ctum

quartum numerum, *& inter* a b, *quia medius ille proportionalis exhibebit ipsum* d e. *Et cum* d g *equalis ipsi* a b *nota sit, erit tota* g e *nota*.

Ma potrebbe soggiungere alcuno che dalla sommità *g f* più spesso forsi occorrerà tirare con l'artiglieria inchinata all'ingiù che all'insù, però sarebbe necessario sapere per regola Geometrica la lunghezza de' tiri, il che si auerà in questo modo, Sia il tiro da farsi all'ingiù il segnato *f h* con qualunque angolo d'inclinazione sotto l'orizonte, si cerca *g h*. fingasi con l'imaginazione che il tiro abia da farsi sopra l'orizonte con la medesima inclinazione per l'appunto, & per le regole precedenti si troui la quantità di *d e* come sopra, ouero di *d h*, dalla quale se leueremo la già nota *f a*, ouero *d g* rimarrà nota la quantità cercata g *h*.



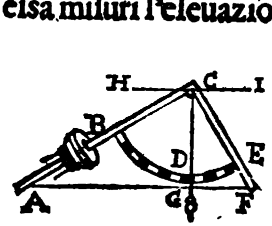
Ma se data la eleuazione gr. 40. del tiro *a b c*, e la base *a c* 1600. passi noi volessimo sapere tutte le diuerse altezze del transito della palla sopra qualunque punto della linea *a c*. Faremo così. Diuisa per mezzo la *a c*, & alzata *d b*. questa sarà l'altezza suprema, e si trouerà su la Tauola delle altezze, e delle amplitudini, operando in questo modo. Nella tauola delle amplitudini dirimpetto alli gradi 40. di eleuazione trouo la linea *a d* essere parti 9848. ma nella Tauola delle altezze trouo la linea *b d* essere parti 4132. Poi per la regola del tre, dico. Se *a d* 9848. mi dà passi 800. conforme alla supposizione; *d b* che è parti 4132. quanti passi darà? e ritrouo che la retta *b d* è passi 336. Sia ora proposto qualunque punto *e* sopra di cui si vuole saper l'altezza del transito della palla, cioè la linea *e h*. Suppongasi che la retta *a e* sia 1000, & la *e c* 600. e facciasi di nuouo la regola del tre in questo modo. Se il numero quadrato di *a d*, che è 640000. Mi dà il numero rettangolo delle rette *a e*, *e c*. che è 600000, Il numero *bd*, che fu trouato 336. che mi darà? E ritrouo 315 passi adunque l'altezza della parabola sopra il punto *e* fu passi 315. Che è quello che si cercaua.

Basterà l'auer' accennato questo poco per il calcolo di alcune varietà le quali possono occorrere intorno a questi tiri. Potemano porsi altri casi simili a questi, e particolarmente i conuersi loro, ma dalla intelligenza di questi si possono facilmente dedurre quelli, e l'ingegno di qualunque Geometra applicandoui trouerà minor difficoltà nello sciorre molti di questi problemi da se medesimo, che nel passare le lunghezze, & le oscurità delle nostre esplicazioni. Però passeremo alla fabbrica della squadra, la quale pare veramente appropriata, anzi fatta dalla natura a posta per misurar scientificamente, & Geometricamente i tiri de proietti.

DELLA SQVADRA.

RIducasi ora in pratica, e sciolgasi per mezzo di vno strumento alcune delle già dimostrate proposizioni. Fabricheremo vna squadra militare, la quale con certezza inuariabile insegni (almeno alli Filosofi Geometri, se non a' Bombardieri pratici) quanta eleuazione debba darsi a qualsiuoglia machina, acciò la lunghezza del tiro riesca della proposta misura. Sciorremo anco per mezzo d'essa tutti i Problemi, che sopra il tirar delle artiglierie si possino formare; quali già furonò promessi dal Tartaglia, e poi ridotti in Tauole dal Galileo, cō alcun'altro di più. Si accorse l'industria militare, che l'vso di vna machina tanto nobile, e di tanta conseguenza, quanto è l'artiglieria, sarebbe stato troppo ristretto, & di poco beneficio, se quella nō si fusse potuta adoperare se non dentro a quella poca distanza, ch'ella tira di punto in bianco, o vogliam dire di mira senza dargli con la squadra aiuto vantaggioso di alcuna eleuazione. Fù però pensato come si potesse fare, acciò con quel medesimo pezzo, il quale per se stesso non tiraua più che 200. ouero 250. passi Geometrici si potesse tirarne e 400. & anco 600. e più, e più, sino alla lunghezza del massimo tiro, che possa farsi da quel tale pezzo. L'inuenzione fu questa; Comminciarono ad aiutare il pezzo con l'eleuazione; cioè non lo dirizzauano a dirittura verso l'oggetto in che doueua colpire, ma tenendolo nello stesso verticale dell'oggetto, lo eleuauano sopra quella linea retta, la quale và dal pezzo all'oggetto: e ciò faceuano ora più, & ora meno, conforme che la sforzatura del tiro doueua essere maggiore, o minore. Artifizio che fino dal principio del mondo è stato noto anco a i putti inesperti. Vediamo che douendo essi con vna palla di neue, o d'altro, colpire in vn segno vicinissimo, la scagliano a dirittura verso esso segno; ma douendo poi giuocare a chi tira più lontano, ouero fare a sassi tra di loro, non tirano già orizontalmente, ne a dirittura verso i loro contrarij, ma volgendo i colpi a mezz'aria, senza auer fatto altra speculazione, tirano tutti all'eleuazione del quinto, & anco del sesto punto della squadra militare a loro ignota. I Bombardieri poi ebbero col progresso del tempo vno strumento, ilquale facilmente misura queste eleuazioni.

Fu inuentata da Niccolò Tartaglia Bresciano Matematico insigne vna squadra con le gambe disuguali congiunta con il quadrante, la quale già più di cento anni è sempre stata in vso, & è ancora l'vnica regolatrice de' Bombardieri, non solo per adoprar l'artiglieria, & alzarla in quei tiri, che essi chiamano di volata, ma anco per liuellarla negli orizontali. Diuise il Tartaglia quel quadrante in 12. parti eguali, cominciando la numerazione di esse dalla gamba minore; suddiuise anco ciascuna di esse in altre 12. parti eguali, nominando quelle prime Punti, e queste seconde Minuti della squadra. Ponghiamo la figura della squadra, e mostriamo come essa misuri l'eleuazione del pezzo.



Sia l'anima del Cannone a b *fermo in qualche positura; Mettasi in bocca d'esso la maggior gamba della squadra* c a *sì che si addatti sù'l fondamento di detta anima, e caschi il piombo in* d. *Io dico che l'angolo* e c d, *cioè l'arco* e d, *è la misura della eleua-*

 zione

zione del pezzo. Tirisi vna orizontale a f. *saranno gl'angoli intorno al punto* g, *retti, ma anco l'angolo* a c f. *è retto, adunque gl'angoli* c a f, *&* f c g *sono eguali per l'8. del sesto. Ouero così. Tirisi per* c *l'orizontale* h i. *Se da gli angoli retti* h c d, a c e, *si leuerà il comune* a c d, *resterà l'angolo* e c d *della squadra eguale all'angolo dell'artiglieria sotto l'orizonte* h i, *o sopra l'orizonte* a f, *che è lo stesso per essere alterni.*

Col mezzo poi di questa squadra si è fatta dalli Bombardieri con lunghe osseruazioni vna pratica tale, ch'essi sanno quanti punti debba eleuarsi verbigrazia vna Colubrina da 40. per colpire in vn segno lontano per esempio passi 700. geometrici, o in qualunque altra distanza.

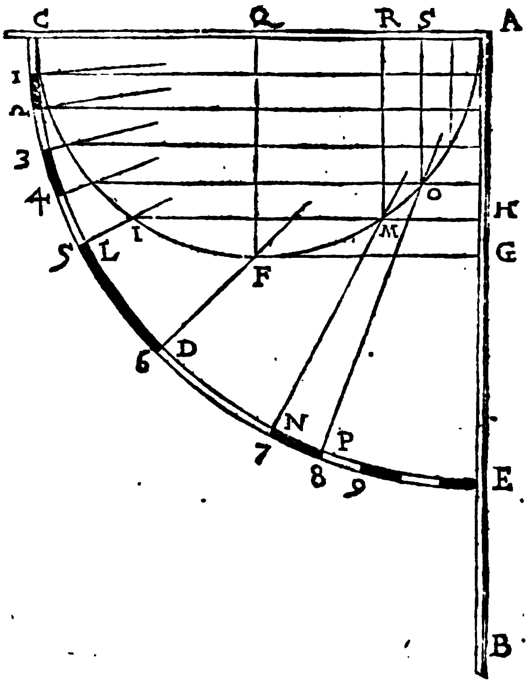
Ma vaglia il vero, le osseruazioni sono tanto fallaci; sono così pochi i Bombardieri che le abbiano fatte, e le abbiano fatte esquisitamente, che l'vso dell'artiglieria, leuatone il tiro di punto in bianco, non può auere se non pochissimo di certezza. Volendosi acquistare qualche scienza sicura intorno alla squadra ordinaria, sarebbe necessario di fare l'esperienze non solo con tutte le sorti di palle, e con tutte le differenze di poluere, ma in tutte le spezie de i pezzi, & anco in tutti quelli, che essendo della medesima spezie, sono differenti di grandezza, e poi a tutti i gradi delle eleuazioni possibili. Moltiplico, che quasi anderebbe in infinito, E notiamo, che conuerrebbe fare queste esperienze tutte ad vna ad vna; poiche nõ è vero che per via di proporzioni si possa da tre, o quattro tiri di vn Cannone, fatti a diuersa eleuazione, argomentare alcun'altro, ne pur dello stesso Cannone caricato con la stessa poluere, e palla. Che questo sia così, si dimostra per mezzo delle Tauole poste dal Sig. Galileo, e da noi. Per esempio. Quel Cannone che eleuato al sesto punto tira passi 4000. eleuato ad vn punto douerebbe tirar la sesta parte, & a due punti la terza, & a tre punti la metà. Ma la cosa passa molto diuersamente. Perche eleuato ad vn punto, tira 1032. in cambio di *666*. che è la sesta parte del sudetto massimo tiro 4000. Al secondo punto poi (& osseruisi che con questa eleuazione l'artiglierie tirano sem-

no semno sempre la metà del massimo tiro) nel caso nostro tirerà 2000 in cambio di 1333. che è la terza parte. Al terzo punto tirerà 2824. in cambio di 2000. che è la metà del massimo tiro Al quarto punto tirerà 3464. in cambio di 2666. Al quinto tirerà 3860. in cambio di 2333, che sono cinque sesti di quel massimo. Vedesi dunque come accrescendo egualmente le eleuazioni del pezzo, cioè tirando prima ad vn punto solo, poi a due, & a tre, e quattro &c. fino al sesto, gl'accrescimenti della lunghezza de i tiri non crescono egualmente, cioè con la medesima proporzione con la quale crescono le eleuazioni: Ma mentre il primo punto tira 1032. il secondo accresce sopra esso, 968. Il terzo accresce 824; il quarto 640. Il quinto 396. Il sesto 140. Per cauar dunque qualche regola dalle esperienze, era necessario il farle esattamente, a tutti i gradi della eleuazione, in tutte le sorti de i pezzi, con tutte le varietà delle polueri, e le diuerse materie delle palle, e forsi anco direi che era necessario che le facesse ogni Bombardiere da se stesso. Cose quasi impossibili a ridursi sotto regole, e cauarne certezza alcuna, se la Teorica, e la Geometria non ce ne daua manifesta scienza mediante quell'vnica proposizione del Galileo, nella quale primo di tutti egli hà auuertito, & insegnato a noi, che i proietti camminano tutti per vna linea parabolica. Su questa supposizione fonderemo lo strumento promesso: se poi per l'impedimento del mezzo le parabole venghino troppo deformate, o per molti altri accidenti i tiri riescono incostantissimi, ci basterà auer sodisfatto indubitatamente alla scuola de Matematici, se non a quella de Bombardieri.

Noi auanti di porre la fabbrica della nostra squadra, quale non cōsiste in altro che nel descriuere vn solo semicircolo, diuideremo la squadra ordinaria in punti disuguali, di maniera tale che misurino non le eleuazioni del pezzo, ma le lunghezze de i tiri, che è quello di che l'vso nostro hà bisogno. Così aueremo certezza che l'artiglieria, se sarà alzata ad vn punto di essa squadra, tirerà alla lunghezza d'vn' tale spazio, qualunque si sia; alzata poi a due punti raddoppierà precisamente

quel

tiro; se a tre punti, tirerà tre di quei spazij, se a quattro e mezzo, tirerà quattro e mezzo: se a cinque & vn quarto, tirerà cinque & vn quarto; e così fino al sesto punto cresceranno sempre nello stesso modo, e con la stessa proporzione i punti della squadra nello strumento, e gli spazij dei tiri nella campagna, e dal sesto fino al duodecimo punto anderanno nella stessa maniera decrescendo. La costruzione, e dimostrazione e Geometrica, cauandosi dalla proposizione da noi posta al numero XI. de proietti, la quale dalla data amplitudine insegna trouar l'eleuazione. E serue comunemente per qualsiuoglia sorte d'artiglieria, e di mortari, per qualunque spezie di palla, o di poluere.



Siano le gambe della squadra a b *la maggiore, &* a c *la minore: poi fatto cẽtro in* a *facciasi il quadrante* c d e. *sopra il quale si hanno a notare i punti disuguali; & intorno al diametro* a c. *facciasi il semicircolo* a f c *e tirata la* f g *perpẽdicolare ad* a b, *e tãgente al semicircolo diuidasi* a g *in sei parti vguali per auere i sei punti della squadra, e poi ciascuna parte in 12. per auere i minuti (quãdo però la grandezza dello stromento sarà capace di questa seconda diuisione.) Hora sia vna delle sei parti la* g h. *Alzisi la* h m i. *parallela a* g f. *la qua-*

la quale seghi il semicircolo ne i punti m, i. *Tirisi poi dal centro* a *la retta* a f d, *& il punto* d *sarà il sesto della squadra. Tirisi la* a i l, *& il punto* l *sarà il quinto della squadra; tirisi la* a m n, *& il punto* n. *sarà il settimo, e così di tutti gli altri. Auuertasi però che l'operazione sarà più giusta, se dopo auer trouato i punti 1. 2. 3. &c. formeremo con la trasportazione d'essi il nono, decimo, & vndecimo. I mezzi punti, i quarti, & i minuti si trouerranno nello stesso modo, col diuidere in mezzo, o in quattro parti, ouero in dodici ciascuna delle porzioni della linea* a g. *con alzar le perpendicolari dalli punti delle diuisioni; segheranno dette perpendicolari il semicircolo, & per i punti delle sezioni si tireranno i semidiametri nel quadrante, che questi segheranno il quadrante ne i punti desiderati, de' mezzi punti, de' quarti, o minuti.*

Hora è manifesto per la Proposizione IX. nostra, che se la linea della direzione, o vogliam dire della eleuazione del pezzo sarà *a o*, ouero *a p*; la amplitudine e lunghezza del tiro sarà come la quadrupla di *s o*; e se la direzione sarà *a m*, ouero *a n*. il tiro sarà come la quadrupla di *r m*: e quando la eleuazione fusse secondo la linea *a f d*, il tiro sarà come la quadrupla di *q f*. Ma le linee *s o*, *r m*, *q f*. per la costruzione nostra egualmente si eccedono, e però anco le loro quadruple, ouero i tiri sopradetti egualmente si eccederanno l'vn l'altro.

Vso della predetta diuisione, fatta nella squadra ordinaria.

SIaci proposta qualunque artiglieria, o mortaro, e con essa facciasi vna sola esperienza; cioè sia eleuata a qualunque punto, come per esempio al quinto. Sparisi, e si misuri la lunghezza del tiro, e trouisi, verbigrazia, essere 2000. parti. fatto questo possiamo sapere quanto tirerà la medesima artiglieria caricata nello stesso modo, & eleuata a qualsiuoglia punto, o minuto, che sarà facile per la regola del tre, essendo in questo strumento tanto i punti quanto la lunghezza de i tiri proporzionali. La pratica è questa. Voglio sapere quanto tira il sesto

punto.

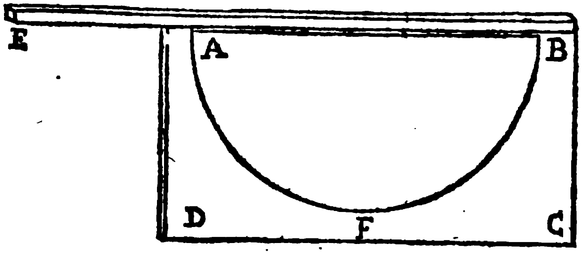
punto. Fò così; se 5. punti diedero 2000 passi quanto daranno 6. punti? e trouo 2400. passi. Dico dunque che quella artiglieria al sesto punto, cioè col massimo tiro, tirerà due mila e quattrocento di quelle parti delle quali al 5. punto ne tiraua 2000.

Auuertasi però che in cambio di fare questa operazione cō i punti 7. 8. 9. 10. 11. & 12. si fa con i loro complementi, i quali sono 5. 4. 3. 2. 1. & 0.

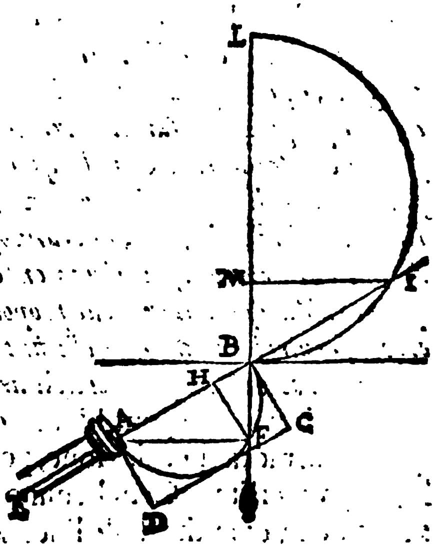
Ma se ci fusse comandato (& importa molto più) che noi eleuassimo il sudetto pezzo in tal modo, che la lunghezza del tiro douesse riuscire per esempio passi 1300. opereremo così. Se 2000. passi furono fatti da 5. punti, o per dir meglio da 60. minuti di squadra, 1300. passi da quanti minuti si faranno? ecco l'operazione 2000. 60. 1300. ? 39. E troueremo che per fare il tiro di lunghezza di passi 1300. bisognerebbe dare all'artiglieria l'eleuazione di minuti trentanoue di squadra, ouero di punti tre & vn quarto.

Modo per fabbricare la squadra nostra.

MA se noi volessimo formare vno strumento, il quale nō solo misurasse la lunghezza de i tiri fatti a diuerse eleuazioni, ma anco l'altezza della parabola, la durazione, o tempo del viaggio, la sublimità, e l'altre cose dimostrate nel precedente libro de proietti; tutto si farà col solo, e semplice semicircolo della proposizione 9. Ma venghiamo alla costruzione.



Prendasi la lamina rettangola *abcd*. di ottone, o d'altra soda materia la quale habbia la gamba *ae* lunga da poter mettersi in bocca del pezzo. Facciasi sopra il gra il diametro *ab* vno semicircolo *afb*, che sarà il semicircolo della proposizione 9. de proietti, & in *b* pongasi il filo con il piombo, e diuidasi il semicircolo *afb* in 90. parti eguali, che saranno li 90. gradi del quadrante; ouero in 144. parti eguali, che saranno i punti, e minuti eguali della squadra ordinaria. Mostriamo ora Geometricamẽte come questa squadra sia atta a misurare con somma simplicità le lunghezze, l'altezze de i tiri, il tempo delle durazioni, le sublimità delle parabole, e le eleuazioni de' pezzi. E poi porremo la diuisione delle linee in essa, senza auer bisogno di Tauola alcuna per operar detta squadra.

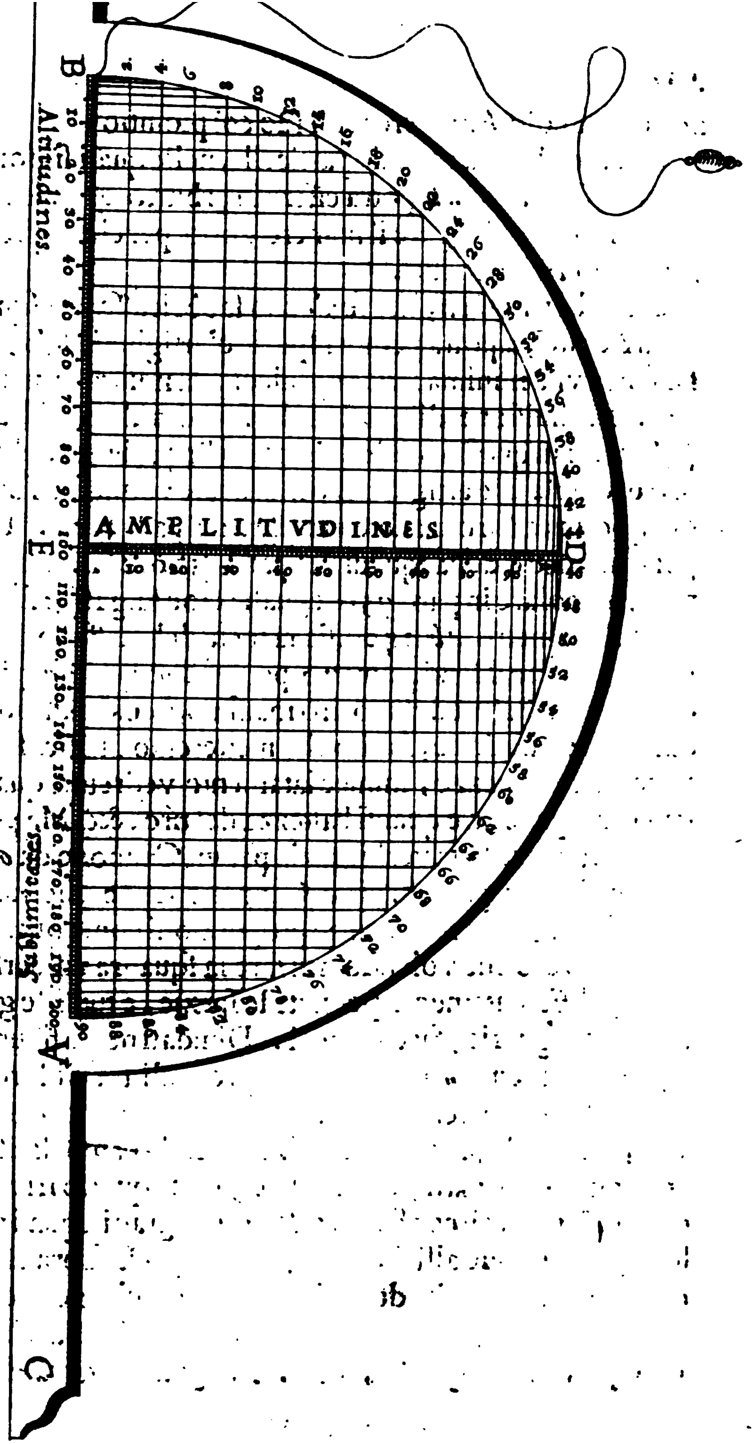


Pongasi, come nella seguẽte figura, la squadra sopradetta e a b c d. *in bocca di vn pezzo* e a. *qualunque si sia e caschi il piombo su'l pũto* f *del semicircolo* a f b *diuiso in 90. parti eguali. E certo primieramẽte, che l'arco* b f *misura l'eleuazione del pezzo* e a *sopra l'orizonte. imperò che hauendo noi con la diuisione del semicircolo in 90. parti solamente valutato ogni due gradi per vn solo, abbiamo fatto che l'arco* b f *sia misura dell'angolo* b a f, *cioè della eleuazione del pezzo sopra l'orizonte; qual orizonte sarà sempre la linea* a f. *Dico di più, che se noi fingeremo che la linea* a b. *diametro del semicircolo sia l'impeto della proposta artiglieria, ouero la metà del massimo tiro; la linea* f h, *perpendicolare al diametro, sarà la quarta parte della amplitudine, o lunghezza del tiro; la* b h. *sarà la altezza suprema della parabola; la* a h, *sarà la sublimità; la* b f. *sarà il tempo o durazione del tiro.*

Che

Che vedendosi qui noi si è veduto nella accennando la proposizione 9. de proietti, e che sia cimento 19 prolunghisi la linea della direzione a b i, *e parimente il perpendicolo* f b l *indefinitamente. Prendasi poi con l'immaginazione la* b l *di tanta lunghezza che sia eguale realmente alla metà del massimo tiro della nostra proposta artiglieria; & intorno al diametro* b l, *facciasi col pensiero il gran semicircolo* b i l, *che seghi la* b i *in qualunque punto* i; *e tirisi la orizontale* i m. *È manifesto, per la citata Proposizione 9. de proietti, che la linea* m i *sarà la quarta parte reale della lunghezza del tiro; e parimente che* d m *sarà l'altezza non finta, ma reale d'esso tiro; e così l'altre misure nel semicircolo* b i l *saranno tutte vere, e reali. Hora notisi che il triangolo* h b f, *è simile al triangolo* b m i, *per essere ambidue rettangoli, e per aver due angoli alla cima* b. *Adunque nelle medesime proporzioni saranno tra di loro tutte le misure piccole, e finte della squadra* a c, *nelle quali proporzioni sono tutte le misure vere nell'immaginato, e vasto semicircolo* b i l. *Cioè, le linee* a b, b f, f h, h b, *averanno fra di loro le proporzioni medesime che hanno respettivamente, le* l b, b i, i m, m b. *Però quanto all'argomentar nelle proporzioni, potremo senza alcuno errore servirci non meno delle finte su la squadra, che delle vere immaginate nell'ampiezza dell'aria.*

Resta hora, che ponghiamo come questa dottrina, che fin qui è stata mera speculazione, possa ridursi in pratica manuale, e con facilità. Ciascheduno vede che per aver noi cognizione della quantità delle linee *ab, bf, fh, hb*, e loro proporzioni nella precedente figura, sarebbe necessario, che tutte le predette linee fussero divise in parti minutissime con qualche commune misura. A questo effetto però divideremo in parti eguali, e minutissime il diametro *ab*, & il semidiametro *ed*, come apparisce nella seguente figura, dove dipinghiamo la squadra finita; e poi daremo a ciascuna divisione della circonferenza le sue guide parallele a detti diametri, acciò in essi si possa leggere il numero, e la quantità delle linee, che saranno indici della lunghezza, & altezza de tiri; e nel punto dell'angolo


B
Altitudines
AMPLITVDINES
E
D
Sublimitates
A
C

del semicircolo *b* metteremo il filo col piombo.

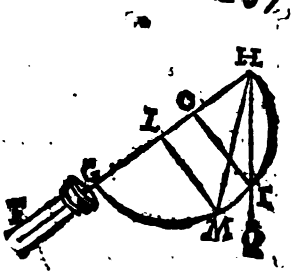
Quanto al numero delle particelle, nelle quali si douerà diuidere il diametro *ab* potrà essere in arbitrio di ciascheduno; sarà però bene eleggere il numero 2000. per che faciliterà l'operazioni Aritmetiche.

Deue ben notarsi, che se alcuno fabbricasse vna squadra come si è detto, a posta per vna spezie d'artiglierie sola, auerebbe senza vna minima fatica di calcolo la misura di tutti i tiri di essa. La diuisione di questa tale squadra douerebbe farsi a posteriori in questo modo. Facciasi l'esperienza del massimo tiro di quella tale artiglieria, per la quale vogliamo far la squadra a posta; e si troui essere verbigrazia passi 3000. Diuidasi poi il diametro della squadra in parti 1500. & il semidiametro perpendicolare in parti 750. eguali; cioè fingasi, e suppongasi che il diametro *ab* 1500. sia la metà del massimo tiro 3000. parimente che il semidiametro perpendicolare *cd* 750. sia la quarta parte del medesimo tiro massimo, e così data poi qualũque altra eleuazione, subito che metteremo questa squadra in bocca del suo pezzo, immediatamente vedremo quanti passi sarà la lunghezza, e quanti l'altezza del tiro, &c. Ma però questa tale squadra fatta verbigrazia per vn Cannone da 60. sarebbe anco buona per ogn'altro Cannone da 60. che fusse della medesima lunghezza, & altre proporzioni come quello.

E ben vero che volendo noi fare la squadra vniuersale, che serua indifferentemente per tutte le spezie, e tutte le grandezze dell'artiglierie, faremo così. Diuidasi nella figura precedente il diametro *ab* in parti 2000. eguali tra di loro. Parimente si diuida il semidiametro *cd*. in parti 1000, eguali fra di loro.(Noi per la piccolezza della figura abbiamo diuiso solo in 100.pigliãdo le parti a dieci a dieci.) Fatto questo si tirino dalle diuisioni della circonferenza segata in gradi eguali al solito, le guide parallele alli diametri; acciò si possa sopra essi diametri leggere la quantità delle linee rette, conforme occorrerà.

Siaci ora proposta vn'artiglieria ignota *fg*. Facciasi la preuia esperienza in questo modo. Pongasi in bocca di essa la

squa-

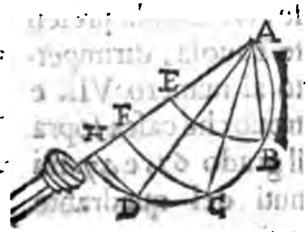


squadra, e caschi il filo in qualunque luogo in *i*. Leggasi per via della sua guida la quantità di *io* su'l semidiametro diuiso, e si tenga a memoria, e poi sparisi l'artiglieria, e si misuri il tiro, che sia passi (per esempio) 1250. Carichisi di nuouo l'artiglieria nello stesso modo, e s'inalzi diuersamente tanto che il filo caschi altroue in *m*. si cerca la lunghezza di questo tiro.

Facciasi così. Se il numero di *io* dà la lunghezza di 1250 passi, il numero di *ml*, che si legge su'l semidiametro diuiso, quanti passi darà? e trouerai parimente la lunghezza del tiro numerata in passi.

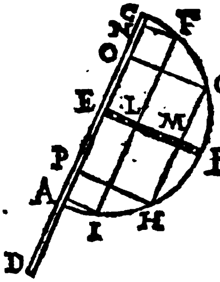
Chi volesse l'altezze, e non le lunghezze de' tiri, faccia la stessa operazione come s'è detto, ma non con le linee *io*, *ml* che danno le lunghezze, ma si bene con le *ho*, *hl*, le quali danno le altezze. Se poi volessimo le sublimità, bisognerebbe operare con le *go*, *gl*. Ma quello che importa più, se alcuno dopo fatta la preuia esperienza, volesse che quella medesima artiglieria facesse vn tiro propostoci, longo per esempio 2200. passi. Si cerca quanta eleuazione debba darsi al pezzo. Operisi così. Se li passi 1250. della preuia esperienza mi danno *io* numerata. li passi 2200. che mi daranno; e trouerai vn numero il quale sia per esempio nella squadra ascritto alla linea *ml*. Si douerà dunque alzar l'artiglieria tanto che il filo passi per il punto *m*, & allora il tiro riuscirà di passi 2200.

I tempi ouero durazioni de i tiri si danno da le linee *hi*, *hm*, e per auer la quantità di queste si può far in due modi. Primo per via di calcolo, perche il quadrato del tempo *hi* (nella passata figura) è sempre eguale alli due quadrati, dell'altezza *ho*, e della quarta parte della lunghezza *io*. Secondo, con fare a tutte le diuisioni della periferia *b*, *c*, *d*, (nella presente figura) dal centro *a*. le guide circo-



lari *b e*, *c f*, *d h*, che così essendo la *ab* diuisa già in parti minutissime eguali, essa ci misurerà tutte le rette *ab*, *ac*, *ad*. che sono i tempi de' tiri.

Confessiamo però che quanto all'uso militare, solamente l'amplitudini, o lunghezze de i tiri pare che importino, e siano di molto momento. L'altre sono tutte curiosità accessorie, le quali seruono molto più per gusto di Geometria, che per utile di guerra. Però chi volesse la squadra solo per questo rispetto delle lunghezze; io prenderei il semicircolo abc *di ottone (come nella presente figura) il quale hauesse la gamba* ad, *e col semidiametro* eb *diuiso in parti minutissime & eguali facendo il principio della numeratione dal punto* e. *Di più darei à tutti i punti della periferia* f, g, h, i, *le loro guide* gh, fi. *parallele alla* ac, *e così s'hauerebbero sopra la* eb. *diuise, e numerate tutte le* fn, go, *le quali seruono per le amplitudini, o lunghezze de tiri.*



Tauola la quale mostra quanti gradi è minuti del quadrante ordinario contenga ciascheduno punto della nostra squadra, che hà i punti disuguali, posta a car. 230.

Per esempio si cerca doue caschi la diuisione del settimo punto nostro disuguale. Guardo la presente Tauola, dirimpetto al numero VII. e trouo che casca sopra il grado 61. e 47. minuti del quadrante ordinario.

Punti della squadra disuguali	Gradi del Quadrante ordinario
mezzo	2. 23
I	4. 48
mezzo	7. 15
II	9. 44
mezzo	12. 19
III	15. 0
mezzo	17. 50
IV	20. 54
mezzo	24. 18
V	28. 53
mezzo	33. 24
VI	45. 0
mezzo	56. 46
VII	61. 47
mezzo	65. 42
VIII	69. 6
mezzo	72. 10
IX	75.
mezzo	77. 41
X	80. 16
mezzo	82. 45
XI	85. 12
mezzo	87. 37
XII	90.

MA Già che siamo entrati a considerare il moto, e l'impeto de' proietti, non si può sfuggir l'occasione di soggiungere qualche cosa circa la varietà delle forze loro, nel battere sopra le superficie resistenti, ora con maggiore, ora con minor angolo d'inclinazione. Il Galileo contempla l'impeto d'essi proietti in ogni punto della loro parabola, e lo misura solamente quanto è in se medesimo, cioè rispetto a quel piano, in cui perpendicolarmente egli percuotesse.

Noi supponendo che un'impeto mentre arriua a percuotere, quanto a se sia sempre l'istessa, lo considereremo, e misureremo quanto egli sia rispetto al piano resistente, variato, solamente dalla diuersità de gl'angeli dell'incidenza. Non è Bombardiero tanto inesperto, il quale non sappia, che le palle dell'artiglieria, mentre percuotono in vn muro, hanno sempre minore, e minor forza, (data ogn'altra parità) quanto l'angolo dell'incidenza sarà più e più acuto. Si che, se quel cannone con sessanta libbre di ferro, e quaranta di poluere, non solo sfonda ma ancora sconquassa con il tiro perpendicolare vna cortina, appena poi la offenderà, benche abbia la medesima carica, e la medesima distanza, con proiezzione del tiro, ch'essi chiamano di striscio. *Il Problema, per quanto io sappia, è intatto. Però se si produrrà qualche cosa meno sussistente, e non pura geometrica, o si compatisca fin che altri tratti meglio la dottrina, o si rifiuti affatto, che poco importa.*

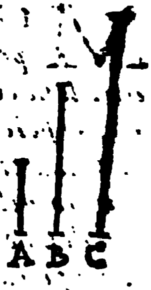
Supposizioni.

1. Parleremo solamente per i tiri dell'artiglierie: però Supponiamo, che quella porzione della linea, che fà la palla poco prima e poco dopo al colpire, sia come linea retta. Sò che si tratta di linea veramente curua; ma auendo questa (se fusse intera) la sua lunghezza di più di tre mila passi geometrici, si potrà bene considerarne vn braccio, ouero vn palmo solo, ouero vn dito senza errore sensibile, per linea retta.

2. Supponiamo secondariamente che le forze, ouero impeti de proietti siano come sono i spazij, che nello stesso tem-

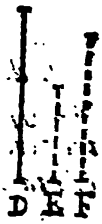
Gal. 2. de motu æquabili

po si scorrono, cioè: Se gli spazij a. b. c. saranno scorsi dal mobile nel medesimo tempo, gl'impeti o forze nel colpire saranno come gli spazij a. b. c. respettiuamente.



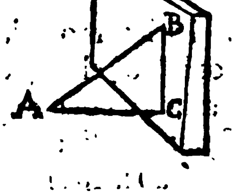
3. Ma se il medesimo spazio verrà scorso dal mobile in diuersi tempi, gl'impeti o forze del mobile in percuotere aueranno la proporzione reciproca de i tempi. cioè Se il medesimo spazio d. serà scorso vna volta nel tempo e. & vn'altra nel tempo f. la forza della prima sarà come f. e della seconda come e.

Gal. 3. de motu æquabili



4. Supponiamo poi che tutti i tiri abbino, quanto a se stessi, sempre il medesimo impeto, il che seguirebbe quando stãdo ferma l'artiglieria sempre nel medesimo luogo, con la medesima carica, medesima eleuazione, e distanza &c. solo si variasse l'obliquità del muro.

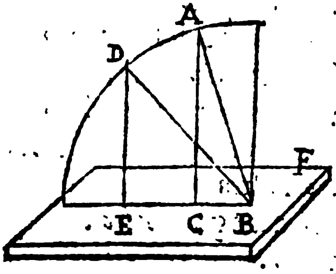
Supposto questo: mentre vna palla di cannone si auuicina al muro opposto, la linea, e dirittura del tiro, o è perpendicolare, al muro, o nò. Se è perpendicolare, la percossa opera con vna tal forza (che prouueremo esser la massima che possa auer quel tiro.) Se sarà ad angoli obliqui, come la linea ab. alla parete bc. Io noto che rispetto alla parete bc. sono nella linea ab del proietto due moti insieme composti: vno cioè, di auuicinamento perpendicolare alla parete, l'altro di passaggio laterale, o parallelo alla stessa. Il perpendicolare ci viene, e mostrato, e misurato dalla linea ac. il parallello dalla linea cb; poi che nel medesimo tempo vengono passati dalla palla ambi gli spazij ac, cb.



Hora osseruiamo che di queste due sorti d'impeto, vna sola è a proposito, per accrescer le forze rispetto a rompere il muro, & internar la palla in esso, cioè l'impeto della lazione per-

pen-

pendicolare *ae*. L'altro, ancor che fusse infinito, non accrescerà mai la forza del proietto contro alla resistenza del muro, se però non gli accellerasse anco la lazione perpēdicolare. Anzi se fusse l'orizontale semplice, e solo, senza mistura alcuna del perpendicolare, che altro farebbe la palla, se non correre equidistante dal muro, senza mai toccarlo, non che romperlo; se bene fusse vn sottilissimo vetro? Quando dunque data la dirittura di qualsiuoglia proiezione, noi sapremo quanto di questo impeto perpendicolare entra nella composizione del moto, sapremo anco l'attiuità, o momento del proietto verso la resistenza della muraglia contraposta.



Sia la linea di qualsiuoglia incidenza, *ab*. sopra il piano *bf*, presa con qualunque inclinanzione, ma però sia la porzione *ab* tanto piccola che possa considerarsi per retta. Tirisi perpendicolare al piano la *ac*., e si congiunga *cb*. Tanto dunque di moto parallelo sarà nella linea *ab*. rispetto alla parete *bf*., quanta è la linea *cb*. Ma di questo non facciamo stima; perche moltiplicato non aiuta, e diminuito nō debilita il momento, mentre l'altro impeto non alterato resti il medesimo. Di perpendicolare poi nella stessa, sarà quanto la linea *ac*. e la forza del colpo sarà magiore, e minore, secondo che nello stesso tempo sarà scorsa la *ac* maggiore o minore.

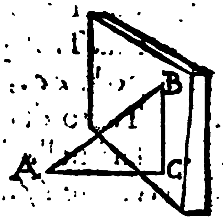
Supponiamo hora che la forza del incidēza *ab*. sia come *ac*, Per saper la forza di qualunq; altra incidenza *db*; prendasi *db*. eguale a *ba*, e tirata la *de*. perpēndicolare al piano, sarà la forza di questa incidenza come l'istessa linea *de*. Poiche se *ab*. *db*. sono eguali, e sono i tiri dell'istesso cannone, saranno scorse nel medesimo tempo. Adunque anco le *ac*. *de*. sono fatte nell'istesso tempo: però gli impeti rispetto al muro sono come *ac*. *de*. *Per la 2. supposizione.*

Inste-

Inferiremo dunque che, le attiuità, o momenti de i tiri diuersamente inclinati sono come i seni retti degli angoli delle incidenze.

Si caua di qui per Corollario che la incidenza perpendicolare *ab*. hà maggior forza di tutte le altre, essendo la forza di essa come il seno totale. E la proiezione parallela non ne hà niente, essendo la forza sua come seno nullo. L'incidenza *db*, ad angolo di 30. gradi hà la metà della forza totale, essendo il seno suo la metà del semidiametro. Le altre poi, conforme aueranno maggiore o minor seno retto, aueranno maggiore, o minor forza.

Le forze delle proiezzioni hanno reciprocamente la medesima proporzione, che hanno i lati del triangolo, che sul piano vien formato dalle linee dell'incidenze.

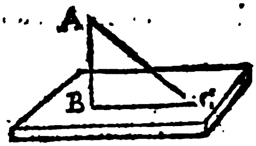


Sia vna proiezione fatta per la linea *ac* l'altra per la linea *ab*. E sia il piano del triangolo *abc*. perpendicolare al muro.

Perche dunque lo spazio *ac*. si corre dalla palla nel tempo *ac*; e lo spazio *ab* cioè (leuato il moto parallelo) lo stesso spazio *ac* si corre nel tempo *ab*. saranno le forze reciproche de i tempi. Cioè la forza per *ac*. sarà come *ab*. e per *ab* sarà come *ac*.

Per la 3. supposizione.

Allora i proietti aueranno la stessa forza, nel percuotere, quando gl'impeti saranno come le secanti de gli angoli del complemento delle incidenze.

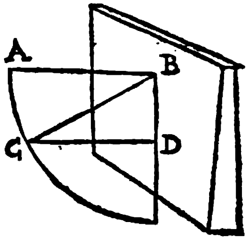


Sia l'impeto per la perpendicolare *ab* come *ab*. & abbia vna tal forza. Acciò l'impeto per l'inclinata *ac*. abbia la medesima forza, dico che l'impeto per *ac*. all'impeto per *ab* deue essere come *ac* alla *ab*; la quale *ac* è, secante dell'angolo *bac* complemento dell'inclinazione.

Poiche

Poiche se saranno gl'impeti per *ab*, & *ac*. come sono gli spazij *ab*, & *ac*. i mobili scorreranno nel medesimo tempo le due linee *ab*. *ac*. cioè lo stesso auuicinamento perpendicolare *ab*. Dunque aueranno la medesima forza contro al muro. *Per la 2 supposizione.*

Di più se col tale cannone, e per la linea *cb* la palla s'internasse tutta per l'appunto nel muro; adunque per tutte le linee eleuate non solo s'immergerà tutta nella solidità, ma farà sempre maggior passata, perche hà maggior forza. Ma delle meno eleuate, per che ciscuna auerà minor forza, niuna entrerà totalmente nella parete, ma alcune anco risalteranno, e sfuggiranno dall'altra parte.



Sia però detto tutto questo astraendo da vn certo effetto di piegamento, o refrazzione che fanno i proietti nel passar con inclinazione dal mezzo raro al mezzo più denso, incuruandosi la linea al contrario della refrazzione della luce, e spezie visibili.

FINE DE' LIBRI DEL MOTO.

DE DIMENSIONE
PARABOLÆ,
Solidique Hyperbolici
PROBLEMATA DVO:

ANTIQVVM ALTERVM

In quo quadratura parabolæ XX. modis absoluitur; partim Geometricis, Mecanicisque; partim ex indiuisibilium Geometria deductis rationibus:

NOVVM ALTERVM,

In quo mirabilis cuiusdam solidi ab Hyperbola geniti accidentia nonnulla demonstrantur.

CVM APPENDICE

De Dimensione spatij Cycloidalis, & Cochleæ.

Ad Sereniſſimum Principem

LEOPOLDVM AB ETRVRIA

DIFFICILE reor, Sereniſſime Princeps Leopolde, ferrea hac ætate libros conſcribere; difficiliùs dedicare: quandoquidem bonarum Artium ſtudia vbique in bella degenerant, & Regnantes viri non exigunt ingeniorum vires, ſed corporum. Etruſca tamen Regia, non minus foecunda virtutum, quàm Principum, mundum edocet, eandem eſſe Mineruam & Bellonã, vnumque Apollinẽ, qui arcum ſimul amat, & citharam. Sereniſſima enim Celſitudo Tua (vt reliquos omittam) litterarum, & ſcientiarum omne genus perinde fouet, colitq:, ac ſi mundus alta pace frueretur, pulſiſq; Furijs ſolæ Muſæ dominarentur. Verùm alia me maior difficultas terret, dum ego tenuitatis meæ conſcius mecum ipſe cogito, libellum hunc ad eum Principem ire, qui illum non ſolum protegere poteſt, ſed etiam iudicare. Quicquid eſt, non acre iudicium Sereniſs. Celſitudinis Tuæ, ſed incomparabilem humanitatem inuoco, illam inquam humanitatem, quæ nuper ampliſſima in me beneficia contulit, & humi iacentem erexit fortunã meam. Audiat preces meas Dominus Regnantium, talemq; Principem diu cuſtodiat: ſiquidem diuinitatis interest huiuſmodi viros proſperari, vt æterna Prouidentia magis eluceſcat, & coniunctam aliquando cum poteſtate ſapientiam in terris demonſtrare valeamus.

Sereniſs. Celſitud. Tuę

Humillimus, & obſequentiſs. ſeruus
Euangeliſta Torricellius.

Ad Le-

AD LECTOREM
Procemium.

NVllus in vniuerso Mathematicarum disciplinarum Theatro fortasse tritior puluis reperitur, quàm parabolæ quadratura. Quarè ergò (inquis amice Lector) circà tritum argumentum tàm diù desudasti? libentér equidem excipio obiectiones tuas; sed vtinam vltimus desudauerim. Quam tamen veniam mihi negas, scias eandem plurimis, & egregiè laudatis Scriptoribus te denegare. Obiectum enim de parabolæ quadratura, quod nostra hac ætate confiteor mihi nimis iam inueterasse, crediderim neq; nouum fuisse Caualerio, Galileo, Lucæ Valerio, & alijs. Quin immò ipsum Archimedem accusat, quicumque improbat lucubrationes circà subiectum vetus institutas. Audiamus ipsum in Proëmio Quadraturæ parabolæ, vbi scribens Dositheo inquit. Eorum enim, qui antehac Geometriæ operam dederunt, nonnulli id inuestigare, & memoriæ mandare studuerunt, circulo dato, vel circuli portione quacunque, spatium rectilineum æquale illi posse inueniri. Item spatium à coni totius rectanguli sectione compræhensum & lineâ rectâ, ad quadrati formam & mensuram reducere conati sunt; sumentes non facilé concessibilia fundamenta. *Quibus verbis disertissimè fatetur Geometrarũ Princeps, argumentum librorum De dimensione circuli, & de quadratura parabolæ, neque suum fuiße, neque nouum. Sed si quis attentè consideret Proëmialem epistolam, libro de lineis spiralibus præfixam, intel-*

liget

liget præcipua Archimedis Theoremata, aliorum inuenta fuisse, & magna ex parte Cononis. Maximæ enim Propositiones librorum De Sphæra & Cylindro; De conoidibus, & sphæroidibus, & De lineis spiralibus (qui libri inter opera Archimedis Principem locum tenent) Cononis sunt: Qui (vt inquit Auctor) non satis temporis ad hæc excogitanda sortitus, vitam permutauit, & ipsa reliquit inexplicata; cum illa inuenisset, & alia quamplurima perquisisset, ac multum adeò Geometricas facultates ampliasset. *Si ergò licuit admirabili, ac propè diuino Auctori, circa aliorum inuenta laborare; quis negabit ignoscendum ingeniolo meo mutuata theoremata contemplanti? Sed esto quòd conclusio antiqua sit; argumenta certè, quibus illa confirmabitur, vt plurimum noua erunt, & inaudita: Immò cum ad alteram partem libelli accedemus, in quâ de solido acuto hyperbolico dicendum est, non solum ipsum Theorema inexcogitatum, & vt ita dicam paradoxicum erit, sed etiam demonstrandi ratio inusitata, & penitus noua. Verùm (inquis) reliqui Scriptores, qui huiusmodi quadraturam aggressi sunt, vel singulas, vel ad summum binas prodiderunt; neque tamen mediocrem laudem consequuti sunt. Fateor; sed nec ego libellum hunc ex professo institui, composuique: immò quod & alijs, mihi quoq; accidit; singulas hasce quadraturas diuersis temporibus inueni, quas in vnum collectas nunc demum volentibus simul exhibeo. Tu tamen exclamas; bene nimis est: quotus enim quisq; reperietur tam famelicus Geometra, qui legat penè vicies repetitam propositionem, cum numero lemmatum ferè duplo? Huic sanè obiectioni libet contradicere. Cum enim libellus in Propositiones, vt plurimum*

non

non cohaerentes digestas sit; sed ita dispositas vt vbicunque libuerit initium facere possis, & finem, dicam cum Martiale

[illegible] tibi carta plicetur

Altera; diuisum sic breue fiet opus.

Si verò mauis probare consilium eorum qui vnam, aut alteram tantummodo quadraturam edidere; quis probibet? & in hoc legere potes vnam, aut alteram; si tamen hoc quoq; nimis videbitur, nullam. Vtilitatem exigis? concedo; & in hanc partem libellum excusare non ausim. attamen non deerit fortasse aliquis qui penitus inutilem non existimet, cum Geometricus sit. Sola enim Geometria inter liberales disciplinas acritér exacuit ingenium, idoneumque reddit ad ciuitates exornandas in pace, & in bello defendendas: caeteris enim paribus, ingenium quod exercitatum sit in Geometrica palestra, peculiare quoddam, & virile robur habere solet: praestabitq; semper, & antecellet, circà studia Architecturae, rei bellicae, nauticaeq; siue mauis circà Aritmeticam, artemq; metiendi, vnde totum ciuile commercium dependet, regiturque. Quinetiam circà ministeria fluuiorum, & aquarum fluentium, vnde non nisi magna percipiuntur siue damna, siue beneficia, prout bene, vel male intellecta fuerit huiusmodi rerum natura. Sed esto quòd inutilis penitus habeatur libellus; siue quia Reipub. nihil interest parabolae quadraturae; siue quia multis ab hinc saeculis excogitata fuerat, & demonstrata. Huic verò obiectioni respondeat Reuerendiss. D. Benedictus Castellius Magister meus. Ipse enim dicet, quòd si Principes terrae, solam illam vulgarem, & apparentem vtilitatem in Artibus magni facerent, exigerentque, damnandi penitus essent Sculptores, Caelatoresque egregij reijcien-

di ciuitatibus Pictores, Musici, Citharædi, Poëtæ, atque id genus alij. Contrà verò ditandi essent, atq; opibus, officijsq; omnibus demerendi pistores, quorum vtilitati nulla alia par est; caupones, sutores, & quicunque artem colunt vitæ hominum summoperè vtilem. Quinetiam si vtilitas sola attendatur, damnandus erit vini vsus, & detestanda cultura vinearum. At in summo pretio habenda aqua, cuius vtilitates tàm facilè est numerare, quàm difficilè sit ijs non indigere.

Vtcumque ea res sese habeat, veniamus ad obiectiones quæ circà artis fundamenta versantur. Indignor equidem Lucam Valerium, verè nostri sæculi Archimedem, cum optimam causam suscepisset, pessimá defensione vsum fuisse. Solent ab eruditis culpari figurarum Geometricarum dimensiones, quæ Mecanicis fundamentis innixæ stabiliuntur, tamquàm duplex falsum supponant: alterum, quòd superficies grauitatem non habentes, habere tamen concipiuntur: *alterum verò,* quòd fila quæ magnitudines ad libram suspendunt æquidistantia supponuntur, cum tamen in centro terræ concurrere debeant. *Ego verò in ea sum sententia, vel nullam ex his suppositionib. esse falsam, vel reliqua omnia principia Geometriæ falsa existere eodem modo. Falsum enim est, quòd circulus habeat centrum, sphæra superficiem, conus soliditatem. Loquor de figuris abstractis quales Geometria considerare solet; non autem de fisicis, & concretis. Necesse igitur erit fateri quòd circuli centrum, superficies sphæræ, soliditas coni, & reliqua huiusmodi non controuersa, nullam aliam habeant existentiam, præter illam quam accipiunt per definitionem, & per intelle-*

ctum,

ctum. *Eodem prorsus modo grauitas est in figuris Geometricis, quomodo in iisdem est centrum, perimeter, superficies, soliditas &c. Laudarem igitur in Mecanicis contemplationibus noua definitione figuras generare; hoc, aut alio non absimili modo.*

Quadratum est quadrilaterum, quod, cum æquilaterum, & æquiangulum sit, singula ipsius puncta momentum habent procedendi versus aliquam mundi plagam per lineas inter se parallelas.

Huiusmodi enim definitio omnem demeret occasionem dubitandi, illis, qui Mecanica Archimedis opera, secundum ipsius mentem non accipiunt. Sed hucusque dictum sit pro obliteranda primæ falsitatis nota, quòd figuræ Geometricæ graues sint.

Venio nunc ad secundum (vt aliqui existimant) falsum. Principiò, vulgatissima est etiam apud grauissimos viros obiectio illa, videlicet. Archimedem supposuisse aliquod falsum, dum fila magnitudinum ex librá pendentium considerauit tanquam inter se parallela, cum tamen re vera in ipso terræ centro concurrere debeant. *Ego verò (quod pace clarissimorum virorum dictum sit) crediderim fundamentum Mecanicum longè alia ratione esse considerandum. Concedo si Fisicæ magnitudines ad libram liberè suspendantur, quòd fila materialia suspensionum conuergentia erunt; quandoquidem singula ad centrum terræ respiciunt. Verumtamen si eadem libra, licet corporea, consideretur non in superficie terræ, sed in altissimis regionibus vltrà orbem Solis; tum fila (dummodo adhuc ad terræ centrum respiciant) multò minùs conuergentia inter se erunt; sed quasi æqui-*

distantia. Concipiamus iam ipsam libram Mecanicam vltrà stellatam libram firmamenti in infinitam distantiam esse prouectam; quis non intelligit fila suspensionum iam non amplius conuergentia, sed exactè parallela fore? Quando ego considero libram, figuras Geometricas ponderantem, non cōcipio illam esse inter cartas librorum in quibus depicta conspicitur; neque suppono punctum, ad quod magnitudines ipsius tendunt, esse centrum terræ; sed libram fingo in infinitū remotam esse ab eo puncto, ad quod ipsius grauia contendunt. Si posteà ibi conclusero triangulum aliquod triplum esse cuiusdam spatij; retrahatur imaginatione ipsa libra ad nostras regiones; concedo quòd retractâ librâ destruetur æquidistantia filorum suspensionis, sed non ideò destruetur proportio iam demonstrata figurarum. Peculiare quoddam beneficium habet Geometra, cum ipse abstractionis ope, omnes operationes suas mediante intellectu exequatur. Quis igitur mihi hoc negauerit, si libeat considerare figuras appensas ad libram, quæ quidem libra vltra mundi confinium in infinitam distantiā remota supponatur? Vel quis proibebit considerare libram in superficie terræ constitutam, cuius tamen abstracta magnitudines tendant, non ad medium terræ punctum, sed ad centrum caniculæ, siue stellæ polaris? Triangula & parabolæ, immo etiam sphæræ, cylindriq; Geometrici, cum nullam per se habeant motus differentiam, non magis ad ipsius terræ, quam ad Saturni centrum contendunt. Destruit ergo beneficium suum quisquis figuras illas, tamquam ad vnicum terræ centrum tendentes, contemplatur. Cur denique non licebit mihi considerare puncta cuiuscunq; figuræ eiusmodi virtute prædita, vt singula versus eandem mundi plagam per lineas in-

ter se parallelas æquali momento contendant? His ita suppositis, quæ vera sunt, quemadmodum sunt veræ passiones figurarum, quæ in definitionibus adhibentur, vera etiam erunt quæcunq; Theoremata per Mecanicas rationes ab ipsis abstrahentibus fuerint considerata, neque per falsas positiones demonstrabuntur. Tunc itaque falsum dici poterit fundamentum Mecanicum, nempe fila libræ parallela esse, quando magnitudines ad libram appensæ fisicæ sint, realesque, & ad terræ centrum conspirantes. Non autem falsum erit, quando magnitudines (siue abstractæ, siue concretæ sint) non ad centrum terræ, neque ad aliud punctum propinquum libræ respiciant; sed ad aliquod punctum infinitè distans connitantur.

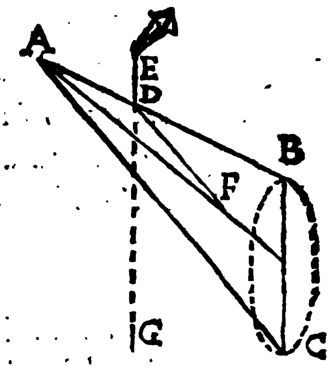
Cæterum, breuitatis, & facilitatis gratiâ à vocabulis consuetis non discedemus; punctumque illud ad quod magnitudines libræ contendere supponuntur, Centrum terræ nominabimus; Planum verò illud, quod erectum est ad lineam cõnectentem prædictum punctum cum centro libræ, Horizontem de more appellabimus.

Suppositiones, & definitiones.

I.

POnatur eam esse centri grauitatis naturam, vt magnitudo liberè suspensa ex quolibet sui puncto nunquam quiescat nisi cum centrum grauitatis ad infimum suæ sphæræ punctum peruenerit.

Concipiamus figuram ABC, suspensam ex sui puncto D,



mediante filò ED; liberè; hoc est, ita vt in quamcumque partem conuerti possit. Sit centrum grauitatis F. ponamusque rectam EDG. perpendicularem esse ad horizontem.

Certum est, donec centrum F fuerit extrà perpendiculum EG, figuram ipsam numquam mansuram esse. Quando verò punctum F. fuerit in perpendiculo suspensionis EG, tunc figura omninò quiescet: Centrum enim grauitatis ipsius nusquàm poterit amplius inferius descendere: Quin immò si figura moueretur, centrum ipsum ascenderet, quod esse non potest. Si quis enim centro E, interuallo EDF. tamquam vnà recta linea, sphæram concipiat esse descriptam; ipsa erit sphæra, in cuius superficie feretur punctum F, quando EDF. extensa fuerit, & ad rectitudinem redacta. certumque est infimũ punctum huiusmodi sphæræ esse in perpendiculo EG.

II.

Æquiponderare sibi ipsi figura dicetur, quæ ab aliquo sui puncto liberè suspensa maneat, & ad nullam sui partem inclinetur.

III.

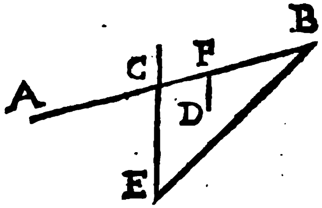
Æquiponderat sibi ipsi figura, quando (cum liberè suspensa sit) in ipso suspensionis perpendiculo centrum grauitatis reperitur. si enim adhuc moueretur, centrum grauitatis ascenderet. Quod est impossibile.

IV.

Centrum grauitatis tunc reperitur in ipſo ſuſpenſionis perpendiculo, quando figura liberè ſuſpenſa ſibi ipſi æquiponderat. Alias enim figura quieſcéret, & centrum grauitatis ipſius poſſet adhuc inferiús deſcendere. Quod eſt abſurdum.

V.

Centralitér ad illud libræ punctum appendi figura dicetur, in quod cadit perpendiculum, ex centro grauitatis figuræ productum.



Eſto enim libra AB, cuius fulcrum ſit C, & ad ipſam appenſa ſit figura CEB, ita vt totum latus CB cohereat, & ſit veluti ad ipſam libram conglutinatum. Eſto centrum grauitatis figuræ punctum D, & ex D agatur perpendiculum DF ad horizontem erectum.

Iam figura CEB dicetur, & conſiderabitur, tamquam appenſa centralitêr ad punctum F. Conſtat enim ex prædictis, quòd ſi figuræ latus CB ſoluatur vndiq; à brachio libræ, ſolumque remaneat filum connexionis DF, nihilo tamen minus figura adhuc manebit vt prius manebat, eandemq; ſeruabit verſus libram poſitionem, quam antea habebat. Vide Arch. Prop. 6. De Quadratura parabolæ.

VI.

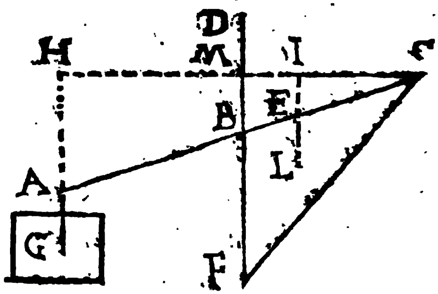
Æqualia grauia ex æqualibus diſtantijs æquiponderant, ſiue libra ad horizontem parallela fuerit, ſiue inclinata.

Et gra-

Et grauia eandem reciprocè rationem habentia, quam distantiæ, æquiponderant, siue libra sit ad horizontem parallela, siue inclinata.

Hæc sine alia explicatione præmitti poterant; quandoquidem in doctrina æquiponderantium numquam supponitur libra horrizonti æquidistans: Attamen quia ostendi possunt, non ommittendam censeo demonstrationem; præsertim cum nonnulli ex libra materiali male fabricata, errorem susceperint, & in intellectum admiserint.

Esto inclinata libra AC suspensa ex puncto B ad filum BD. Sintq; magnitudines BFC, & G. centralitèr appensæ ex punctis E, & A. Et ponatur esse, vt magnitudo BFC, ad magnitudinem G, ita reciprocè distantia AB ad BE. Dico libram AC, quamuis inclinatam, magnitudinesque ab ipsa pendentes, posse conquiescere, & æquiponderare.

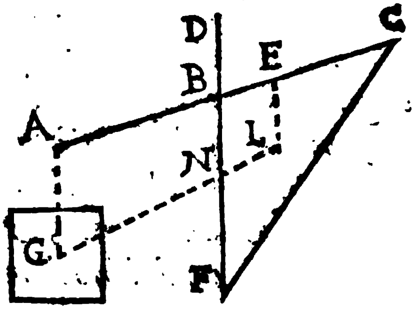


Producantur enim perpendicula GAH, LEI, per centra grauitatis figurarum G, & L, transeuntia, ducaturq; horizontalis libra CH, quæ item appensa sit ad filum MD. Quoniam igitur est per suppositionem, vt magnitudo BFC, ad magnitudinem G, ita reciprocè AB ad BE; siue (ob parallelas) HM ad MI; æquiponderabunt magnitudines BFC, & G, ad libram horizontalem HC appensæ. Ergo commune centrū grauitatis erit omninò in perpendiculo DF. Propterea magnitu-

gnitu-

gnitudines æquiponderabunt etiam dum ad libram AC suspenduntur: aliàs, si mouerentur, commune centrum grauitatis ipsarum, quod demonstratum est esse in perpendiculo DF, ascenderet. Quod est impossibile.

Hæc autem breuiùs concludentur hoc modo. Connectantur (in eadẽ figura) centra grauitatis ductâ rectâ G L. Quoniam magnitudo B F C ad magnitudinem G, est vt AB ad BE, siue (ob parallelas) vt



GN ad N L, erit N centrum commune grauitatis magnitudinum appensarum. Si ergo libra AC non quiesceret, centrum grauitatis N, ascenderet. Cum enim sit in perpendiculo DF, moueri non potest quin ascendat.

Non me latet Auctorum controuersiam, circà libram inclinatam, an redeat, maneatuè, supponere centra magnitudinum in ipsa libra esse collocata. Nos tamen, quia in hoc libello, semper considerabimus magnitudines infrà ipsam libram appensas, maluimus rei nostræ seruire, quàm aliorum controuersiæ demonstrationem accommodare.

Cæterùm passiones parabolæ quas in operis progressu supponemus tamquam notas, vel ipsius Apollonij erunt, vel Archimedis, vel saltem ex Apollonio ipso facili negotio deducentur, cuiusmodi sunt hæ, quæ sequuntur.

Si Parabola rectam lineam tangentem habuerit, à quibuslibet autem punctis ipsius tangentis recta lineæ vsque ad parabo-

rabo-

rabolam demittantur æquidistantes diametro, erunt demissæ inter se longitudine vt sunt portiones tangentis potentià inter se. Deducitur enim hoc ex 20. prim. Conic. Nàm rectæ illæ demissæ portionibus diametri respondent; at partes ipsius tangentis, ordinatim applicatis æquales sunt.

Item, si intrà parabolam à punctis quibuslibet rectæ illius ordinatim ductæ, quæ basis parabolæ dicitur, rectæ lineæ erigantur diametro parallelæ. Erunt erectæ inter se vt sunt rectangula facta à portionibus basis, quæ ab ipsis erectis abscinduntur. Hoc enim & à Caualerio, & à nobis in secundo libro de motu ostenditur.

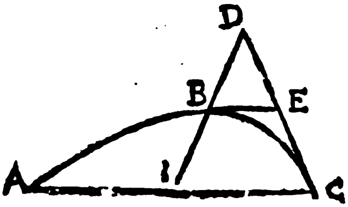
QVADRATVRA PARABOLAE.

Pluribus modis per duplicem positionem, more antiquorum, absoluta.

Lemma Primum.

SI PARABOLA duas tangentes habuerit, alteram ex termino basis, alteram verò ex vertice: tangens, quę ad basim est, bifariàm secabitur ab illa, quæ per verticem ducitur.

Esto parabola a b c, *cuius diameter* b i, *ordinatim verò applicata (siue basis) sit* a c; *tangens ex termino basis sit* c d; *per verticem verò tangens* b e. *Dico ipsam* c d *bifariàm secari in puncto* e.



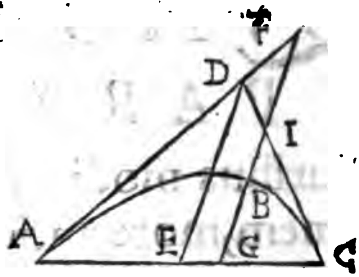
*Cum.n.*c d *sit tangens,* d i *diameter, erunt æquales inter se* d b. b i. *Et quia* a c *ordinatim appli-* 35 primi Conic.

per 32. eiusd. *cata est ad diametrum* b i, *ipsa verò* b e *tangit in puncto* b, *erunt* per 2. sexti. *parallelę* a c, b e. *Et ideo erit vt* d b *ad* b i, *ita* d e *ad* e c. *Quare æquales erunt etiam* d e, e c. *Quod erat ostendendendum &c.*

Lemma II.

Si parabola duas tangentes habuerit ex basis terminis; recta linea quæ ab occursu duarum tangentium ducitur diametro parallela, propositæ parabolæ diameter erit.

Esto parabola a b c, *cuius ex punctis* a *&* c, *duæ tangentes sint* a d, c d, *concurrentes in* d. *Ex puncto autem* d, *recta ducatur* d e *diametro parallela. Dico ipsam* d e *proposita parabola diametrum esse.*



Sit enim, si possibile est, diameter f g. *Erunt ergò ob tangentem* per 35. 1. Conicorum. a f *æquales inter se diametri portiones* f b, b g. *Iterum ob tangentem* c i, *æquales erunt* i b, b g. *Et ideò æquales erunt inter se ipsa* f b, b i: *totum, & pars. quod fieri non potest. Non est ergò alia diameter prater ipsam* d e. *Quod erat ostendendum &c.*

Lemma III.

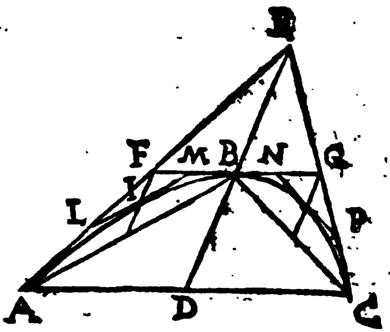
Si parabola tres tangentes habuerit; duas ad basim, & tertiam per verticem; erit triangulum sub tangentibus comprahensum octuplum trianguli, quod oritur ex ductu quartæ tangentis per verticem alterutræ semiparabolæ.

Esto parabola abc, *cuius basis* a c, *diameter* b d; *duæ tangentes ad basim* a e, c e. *Tangens per verticem sit* f b g. *Demittatur ex* f, *concursu tangentium* a f, g f, *recta* f i, *diametro parallela: eritque* f i *diameter parabolę* a i b. *Ducatur denique* l m, per Lem. praeced. *tangens semiparabolam* a i b *per verticem* i. *Dico triangulum* f e g, *sub tangentibus comprahensum, octuplum esse trianguli*

l f m,

l f m, *quod nascitur ex ductu quarta tangentis* l m *per verticem* i *portionis* a i b.

Iungatur a b *basis parabolæ* a i b, *eruntq; parallelæ* a b l m; *& cum sint æquales* f l, l a *ob tangentem* a f, *erit* a f *dupla ipsius* f l; *ideoque triangulum* a f b *quadruplum trianguli sibi similis* l f m. *Ergò etiam* f b e *quadruplum erit trianguli* l f m (*sunt enim per Lem. primum æquales bases* a f, f e.) *Propterea totum triangulum* f e g *octuplum erit trianguli* l f m. *Quod erat ostendendum &c.*



per 3 an. 2. Cor.
per Lem. primum

Corollarium Primum.

Ergò triangulum f e g, *factum à primis tribus tangentibus, octuplum ostendetur eodem modo etiam trianguli* n g p. *& propterea semper quadruplum erit duorum simul triangulorum* l f m, n g p, *quæ post ipsum (ductâ vtrinque alia tangente) oriuntur.*

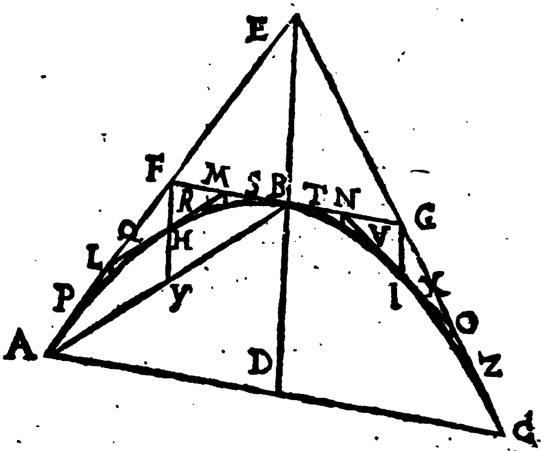
Corollarium secundum.

Manifestum etiam est triangulum f e g *sub tangentibus contentum, auferre plusquàm dimidium ex trilineo mixto* a b c e: *siquidem triangulum* f e g *dimidium est duorum simul triangulorum* e b a, e b c. *Ergò erit plusquàm dimidium trilinei mixti* a b c e.

Hinc sequitur quòd possibile sit intrà figuram mixtam a b c g f. *figuram rectilineam inscribere per continuum ductum tangentium; quæ quidem figura inscripta deficiat à figura mixta, defectu minori quàm sit qualibet data magnitudo.* *per primam decimi.*

Lemma IV.

Si parabola duas tangentes habuerit ad basim: deinde per vertices factarum portionum aliæ tangentes ex ordine ducantur; & hoc fiat quotiescunq; libuerit: figura à tangentibus circumsepta, si ex vertice parabolę suspendatur (posità diametro ad horizontem perpendiculari) æquiponderabit.



Esto parabola a b c, *cuius diameter* b d, *& duæ tangentes ad basim sint* a e, c e; *per verticem verò* b *tangens sit* f b g. *Deinde, demissis (vt in præcedenti Lemmate) diametris* f h, g i, *per vertices portionum* a h b, b i c, *tangentes ducantur* l m, n o. *Iterumque per vertices reliquarum quatuor portionum tangentes ducantur* p q, r s, t u, x z; *& sic semper donec libuerit: Dico figuram; siue potiùs duas figuras rectilineas à tangentibus* p q r s f p, t u x z g t; *circumseptas, ex puncto* b *ęquiponderare: statuta priùs diametro* b d *ad horizontem perpendiculari.*

Ponatur itaque b d *diameter parabolæ ad horizontem perpendicularis; & rectam* f g, *(quamcunq; inclinationem sortiatur) concipiamus esse libram, cuius fulcrum sit in* b.

Quoniam igitur applicata a b *bifariam secatur à diametro* f h *in puncto* y; *suntq;* a b, l m, *parallelæ, erit etiam* l m *secta bifariam in* h; *& ideò duorum triangulorum* l f m, n g o, *centra grauitatis sunt in* f h, g i; *suntq;* f h, g i *ad horizontem perpendiculares, ideò appensa centraliter erunt dicta triangula ad libram* f g. *ex punctis* f *&* g. *Aequiponderabuntque ex distantijs æqua-*
Lem. 3. *libus* b f, b g. *Cum ipsa quoque triangula sint æqualia; nempe subocttupla eiusdem trianguli* f e g. *Eadem prorsus ratione posita libra* l m, *duo triangula* p l q, r m s *appensa erunt ex punctis* l *&* m; *ęqui-*

& m; æquiponderabuntq; ex puncto h, *& ideo appensa erunt ex puncto* f. *(quandoquidem filum suspensionis* fh *perpendiculare est ad horizontem.) Duo verò triangula* tnu, xoz, *prædictis æqualia (cum sint singula suboctupla ęqualium* lfm, ngo.) *ponderabunt simul ambo ex puncto* g. *Ergo quatuor simul prædicta triangula æquiponderabunt ex puncto* b, *nempe medio totius libræ* fg: *Eodem modo concludemus reliqua triangula, quotcunque sint, ex puncto* b *æquiponderare. Vniuersa ergo figura à tangentibus circumsepta ex puncto* b *æquiponderabit. Quod &c.* Lem. 3.

Corollarium I.

Hinc pro Corollario animaduertemus centrum grauitatis prędictę figurę, à tangentibus comprahensę, esse in diametro parabolæ. Cum enim figura prędicta ęquiponderet ex puncto b, *erit centrum grauitatis illius in linea quę ex puncto* b *ducitur perpendicularis ad horizontem; quapropter erit in* bd *diametro parabolę.*

Corollarium II.

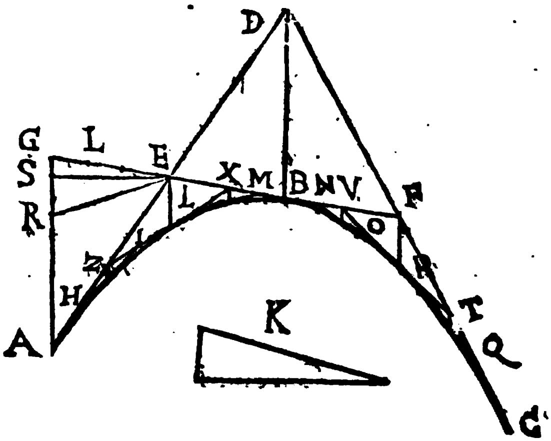
Colligemus etiam centrum grauitatis omnium trilineorũ mixtorum, quę sub linea parabolica abc, *& sub omnibus tangentibus* apqrstuxzc, *comprehenduntur, semper in diametro parabolę existere. Patebit autem hoc modo. Centrum trapetij* afgc, *est in diametro; centrum etiam parabolę est in diametro; ergò centrum reliquæ figurę mixtę erit in diametro. Si ergo centrum huiusmodi figuræ est in diametro; centrum etiam figurę à tangentibus circumseptę demonstratum est esse in diametro; propterea cẽtrum omnium simul trilineorum, quę continẽtur sub tangentibus & linea parabolica, erit in diametro per 8. prim. Aequipond.* 15 primi æquipond. 4. secundi eiusd. 8. primi eiusd.

Lemma V.

Si parabola duas tangentes habuerit alteram per verticem, alteram verò ad basim, & ex altera parte basis habeat parallelam diametro; figura sub tribus prædictis rectis lineis, & curuà parabolicà comprahensa, æquiponderabit ex puncto tangentis vertis verticalis, in quo ea sic diuiditur, vt pars ad reliquam tangenti terminata, dupla sit illius quæ ad parallelam diametro terminatur.

Esto parabola a b c, *cuius tangens ad basim sit* c d; *per verticem verò* f b g; *&* a g *sit parallela diametro. Secetur deinde* f g *in* e, *ita vt* f e *dupla sit reliqua* e g. *Dico figurã* a b c f g (*statutà diametro ad horiz. perpendiculari*) *æquiponderare ex puncto* e.

Concipiamus enim diametr. parabolæ esse horizonti perpendicularem (*hoc autem modo sẽper intelligendum est*). *quamcunq; tãdem inclinationem sortiatur libra* g f. *Et ducta tangente* a d (*quæ omnino transibit per* e, *vt infrà ostendemus*) *intelligatur* g f. *librã esse, cuius fulcrum est* e; *ex qua pendent ab vna parte triangulum* a g e; *ab alterà verò, figura mixta* a b c f e. *Quæ quidem figuræ si inter se non aequiponderant, ponamus alteram ipsarũ praeponderare. Esto igitur; & praeponderet primò* a b c f e, *tanto excessu quantum est spatium* k.



Inscribatur intrà ipsam alia figura à tangentibus h i l m n o p q f e h, *terminata, ita vt reliquae portiunculae sub dictis tangentibus & curua parabolica contentae, simul minores sint spatio* k (*quod fieri posse constat ex Corollario Secundo Lemmatis Tertij.*) *Praeponderabit igitur adhuc figura sub tangentibus compraehensa; quandoquidem pars ablata minor est excessu* K, *& in eodem puncto* b *ponderat simul cum tota magnitudine; tam enim ablatae, quàm totius, centrum grauitatis est in diametro,*

vt osten-

ut ostendimus ad Corollarium Secundum Lemmatis Quarti.

Accipiatur iam g r *quarta pars totius* g a; *ducaturq;* e r. *Sumatur etiam* e l *dupla reliquae* l g; *& ex puncto* l *centraliter suspensum erit quodlibet triangulum habens verticem in* e *puncto, & basim in recta* g a, *quae ad horizontem recta ponitur.* *Vide Archim. de Quadratura parab. Propos. 6. 8. 10. et 12.*

Iam sic: duo triangula z e x, u f t, *ad triangulum* e d f. *sunt ut duo ad 8, & ad triangul.* e b d *ut 2. ad 4. & ad aequale* a g e. *ut 2. ad 4. ergò ad triangulum* a r e. *erunt ut 2. ad 3., nempe ut* l e *ad* e g, *hoc est ut* l e *ad* e b *reciprocè. Quare in libra* l b *duo praedicta triangula* z e x, u f t *aequiponderant triangulo* a r e *ex puncto* e. *per Corol prim Lem. 3.*

Sumatur iterum g s *quarta pars totius* g r, *& iungatur* e s. *Cũ ergo* g r e *sit quarta pars ipsius* g a e, *vel ipsius* e d b, *erit* g r e *octaua pars totius* e d f. *Quapropter aequale erit* g r e, *alterutri ipsorum* z e x, u f t. *Sed quoniam* h z i *est octaua pars ipsius* z e x, *erunt quatuor simul triangula* h z i, l x m, n u o, p t q. *(quoniam aequalia sunt inter se) ad triangulum* z e x *ut 4. ad 8; siue ut 2. ad 4: & propterea etiam ad triangulum* g r e, *erunt ut 2. ad 4; ad ipsum verò* s r e *erunt ut 2. ad 3, nempe ut* l e *ad* e b. *Equiponderant igitur ex puncto* e *bina triangulum* s r e, *& inde quatuor praedicta triangula* h z i, l x m, n u o, p t q. *Eodem prorsus modo, si sub quatuor his triang. alia fuerint in residuis portiunculis triang. ex ordine descripta, ostendentur aequiponderare ex eodem puncto* e, *cum quodam triang. cuius vertex sit* e, *basis vero contineat 3. quar. ipsius* g s *&c. Sed in nostro casu, cum demonstratum sit prima duo triangula* z e x, u f t, *aequiponderare triangulo* a r e. *Reliqua item quatuor triangula, quorum unũ est* h z i. *aequiponderare triangulo* s r e; *aequiponderabit tota simul figura ex praedictis triangulis composita triangulo* a e s, *ex puncto* e. *Ex Lemmate 3.* *Sed demonstratum fuit, eandem figuram praeponderare triangulo* a e g; *necesse igitur est ut triangulum* a e g *minus sit triangulo* a e s, *totum sua parte; Quod est impossibile.*

Si vero ponamus praeponderare triangulum a e g *figurae* a b c f e. *Esto; & sit excessus quo praeponderat, spatium* k. *Accipiatur* g r e *quarta pars trianguli* a g e: *&, iterum accipiatur* g f e s

quar-

quarta pars trianguli g r e; *& hoc semper fiat, donec veniatur ad aliquod triangulum* g f e, *quod minus sit spatio* k. *Tunc enim triangulum* a f e *adhuc praeponderabit figurae* a b c f e. *Sed eodem modo, vt supra demonstrabimus triangulum ipsum* a l e *aequiponderare alicui figurae rectilineae inscriptae intra figuram mixtam* a b c f e. *Necesse ergo iterum erit vt inscripta figura rectilinea maior sit quàm figura mixta* abcfe, *cui ipsa inscribitur; pars suo toto. Quod est absurdum &c.*

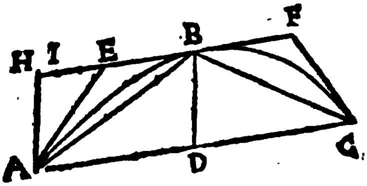
possibile est per 1. Decimi.

Aequiponderat ergo ex puncto e *vniuersa figura* a b c f g, *quae sub curua parabolica, duabusq. tangentibus, & linea ipsi diametro parallela continetur. Quod &c.*

Quod assumptum est ita ostendemus: Nempe tangentem a d *transire per punctum* e: *hoc est, ita secare rectam* f g, *vt pars* f e, *dupla sit reliquae* e g. *Secet enim* a d *tangens rectam* f g *vtcunq; in* e. *Iam; cum parallela sint* a g, b d, *& aquales* a e, e d; *erunt aquales etiam* g e, e b, *Sed aquales sunt* f b, b e, *ergo* f e *dupla est ipsius* e g. *Ideo* a d *transit per illud* e *punctum, quod ab initio dixeramus.*

Propositio Prima.

QVAELIBET parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.



Esto parabola ABC, cuius diameter BD, iunganturq. AB, BC, Dico parabolam sesquitertiam esse trianguli ABC, eandem cum ipsa basim, & eandem altitudinem habentis,

Ducantur tangentes AE, CF ad basim: FH verò per verticem B; & AH sit ipsi diametro parallela. concipiamusq. parabolæ diametrum erectam esse ad horizontem. Iam secta HE in I, ita vt EI dupla sit ipsius IH, erit triangulum HAE centraliter appensum ad punctum I (habet enim centrum grauitatis in recta quæ ex I ducitur parallela ad H A, & propterea ad horizontem perpendiculari.) Erit insuper figura mixta A B C F E centraliter appensa ad punctum B. (quandoquidem habet centrum grauitatis in diametro B D ad horizontem perpendiculari.) Sed vniuersa magnitudo, composita ex dicto triangulo H A E, dictaq; figura mixta, æquiponderat ex puncto E; erit ergo triangulum H A E ad figuram mixtam ABCFE, vt reciprocè B E ad E I, nempe vt 3. ad 2. Propterea trapezium AEFC sextuplum dicti trianguli, erit ad figuram mixtam ABCFE, vt 18. ad 2. & per conuersionem rationis, ad parabolam erit vt 18, ad 16. Qualium ergo partium parabola est 16, earum trapezium AEFC est 18. & triangulum A BC 12. Quare parabola ad triangulum ABC erit vt 16, ad 12 nempe sesquitertia. Quod erat ostendendum. *Vide Corol. 1. Lemmat. 4.* *Lemm. præced.* *ostendetur inf.* *ostenditur inf.*

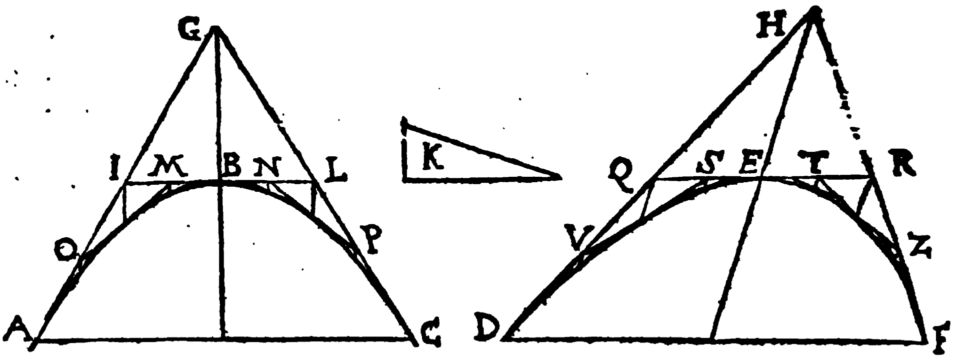
Quod trapezium a e f c *sextuplum sit trianguli* h a e, *patet. Nam parallelogrammũ* hd, *duplum est trianguli* h a b *& propterea quadruplum trianguli* h a e. *ergò trapezium* a e b d *triplum erit trianguli* h a e. *totum verò trapezium* a e f c. *sextuplum dicti trianguli* h a e. *Quod &c.*

Cum autem trapezium a e f c *sextuplum sit trianguli* h a e, *erit sextuplum etiam trianguli* e a b *; & ideo triplum duorum* e a b, b c f, *Nempe vt 18. ad 6. Per conuersionem verò rationis, erit ad triangulum* a b c *vt 18. ad 12. Quod &c.*

Lemma VI.

Si duæ parabolæ vtraque duas tangentes ad basim habuerit; erunt inter se trilinea mixta sub tangentibus, & curuis parabolicis contenta, vt sunt ipsa triangula sub tangentibus compræhensa,

Sint duæ parabolæ a b c, d e f. *quarum vtraque duas tangentes ad basim habeat* a g, g c *prioris, &* d h, f h, *posterioris parabolæ. Dico trilineum mixtum* a b c g, *ad trilineum mixtum* d e f h, *esse vt triangulum* a g c, *ad triangulum* d h f.



Si enim non est ita: habebit alterum ex trilineis, puta abcg, *ad reliquum, maiorem rationem quàm triangulum* agc, *ad* dhf. *Esto spatium* k *excessus, quo trilineum* abcg, *maius est quàm ut sit in ratione triangulorum.*

Ducatur per verticem b, *tangens* il; *demissisq; ex punctis* i,
Lem. 2. & l, *lineis diametro parallelis (quæ diametri semiparabolarum erunt) ducantur tangentes* om, np: *& ex punctis* o; m; n, p, *demittantur aliæ diametri ut supra; ducanturq; aliæ tangentes. Et hoc semper fiat, quousq; reliquę simul omnes portiunculæ, quæ sub tangentibus, & curua parabolica continentur; minores sint*
Corol. 1. Lem. 3. *spatio* k. *Tunc.n. uniuersa figura tangentibus circumsepta, & in trilineo mixto* abcg *inscripta, habebit adhuc ad trilineum* de fh, *rationem maiorem, quā triang.* agc, *ad triangulum* dhf.

Inscribatur iam etiam in altero trilineo mixto defh. *figura totidem laterum; ductis nimirùm tangentibus toties, quoties ducta fuerint in priori trilineo.*

Quoniam verò est, ut triangulum igl *ad triangulum* qrh, *ita duo simul triangula* oim, nlp, *ad duo simul* uqs, trz.
25. quinti. *(sunt enim partes cum pariter multiplicibus in eadem ratione.) Et ut duo simul triangula* oim, nlp, *ad duo* uqs, trz, *ita quatuor triangula quæ sunt infra puncta* o, m, n, p, *ad quatuor*
22. quinti. *illa, quæ sunt sub punctis* u, s, t, z; *ob eandem causam &c. Erunt etiam omnia antecedentia simul (nempe figura inscripta in prio-*

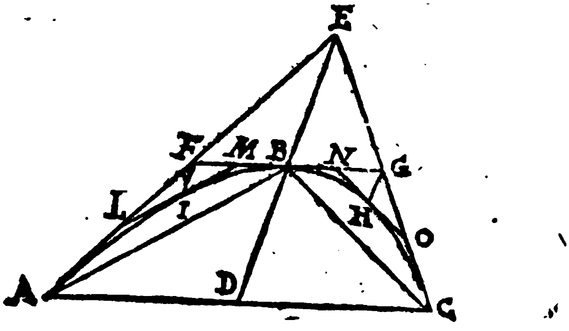
ri tri-

ori trilineo mixto,) ad omnia consequentia simul (nempe ad figuram inscriptam in posteriori trilineo mixto) vt vnum ad vnum; nempe vt igl, *ad* qhr. *Siue sumptis eorum quadruplis, vt* agc *ad* dhf. *Sed eadem inscripta figura habebat ad trilineum* defh *maiorem rationem quàm sit trianguli* agc *ad* dhf. *Minus ergo erit trilineum mixtum* defh, *quàm figura sibi inscripta: totum sua parte. Quod est impossibile. Trilinea ergò sub tangentibus, & curuà parabolicà comprahensa, sunt inter se vt triangula sub iisdem tangentibus & basibus contenta.* x. quint.

Propositio II.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Sit parabola ABC, cuius diameter BD; & sit inscriptum triangulum ABC. Dico parabolam sesquitertiam esse trianguli ABC.



Ducantur duæ tangentes ad basim, quæ sint AE, CE. & FG. tãgat per verticem B Demissis deinde FI, GH diametro parallelis, vt sint diametri portionum AIB, BHC; ducantur per I, & H tangentes LM, NO. 1. Lem.

Erit ergo per Lemma præcedens, trilineum ABCE, ad trilineum AIBF, vt est triangulum AEC, ad ABF. siue ad FBE. Idem verò trilineum ABCE ad aliud trilineum BHCG, erit vt idem triangulum AEC, ad triangulum BGC; hoc est ad BGE, Coniunctim ergo, erit trilineum ABCE ad duo trilinea AIBF, BHCG, vt triangulum AEC ad triangulum FEG, nempe vt 4, 24. quinti.

 ad vnum

ad vnum, & diuidendo, erit triangulum F E G ad duo trilinea AIBF, BHCG, vt 3, ad vnum. Trapezium autem AFCG, ad eadem trilinea erit vt 9. ad vnum; & per conuersionem rationis, ad parabolã erit vt 9. ad 8. & ad triangulum A B C, vt 9. ad 6, Qualium ergò partium parabola est 8, talium triangulum ABC est 6. Constat ergo parabolam inscripti sibi trianguli sesquitertiam esse. Quod erat &c.

Lemma VII.

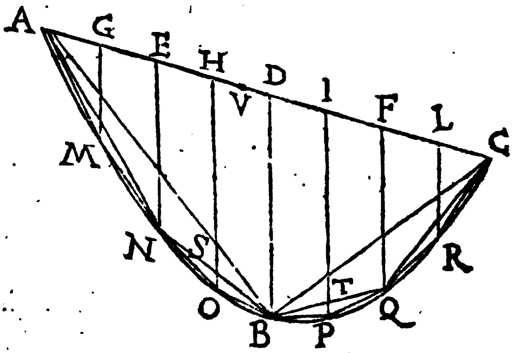
Si in parabola inscribatur triangulum: eandem habens cum parabola basim, eandemq; altitudinem. Inscribantur etiam pariter & in reliquis portionibus duo alia triangula: Erit triangulum primò inscriptum, octuplum alterutri posteriùs inscripti trianguli.

Demonstratur hoc Lemma ab Archimede Prop. 21. De Quadratura parabolæ.

Lemma VIII.

Si in parabola euidentèr inscribatur figura ex triangulis constans. Tam bina ipsius triangula (si prout sibi mutuò respondent ita sumantur) quàm etiam tota inscripta figura, æquiponderabit ex puncto medio basis ipsius parabolæ.

Esto parabola a b c, *cuius diameter sit* b d; *& inuersa statuatur figura, ita vt diameter ad horizontem sit perpendicularis. Sectâ deinde vtraq;* ad, dc *bifariam in* e f; *iterumque sectis partibus bifariã in* g, h, i, l. *&c. Ducantur* gm, en, ho, ip, fq, lr. *&c. Parallelæ ad diametrum.*



Inscribaturque in parabolà figura amnobpqrc. (*quæ dicitur euidentèr inscribi.*) *Dico triangula quæ figuram inscriptam componunt, si bina, & prout sibi mutuò respondent ita sumãtur, æquiponderare ex puncto* d. *Preterea vniuersam figuram inscriptam, ex ipsis triangulis compositam, ab eodem puncto* d, *æquiponderare.*

Sumantur enim duo triangula sibi mutuò respondentia, puta, nob, bpq, *quæ inter se æqualia erunt; cum triangula* anb, bqc *suboctupla. sint eiusdem trianguli* abc: *ipsa vero* nob, bpq, *suboctupla sint æqualium triangulorum* anb, bqc. *Habebunt insuper centra grauitatis in rectis* os, pt, *quæ quidem ab angulis* o, p, *ducuntur ad puncta media basium*, nb, bq, *Cum verò* osh, pti *rectæ ad horizontem positæ sint perpendiculares, erunt prædicta triangula* nob, bpq *centralitèr appensa ex punctis* h, & i. *Quamobrem ab æqualibus distantijs* hd, di, *æquiponderabunt. Et sic de reliquis figuræ triangulis. Quod erat primò propositum.* Lem. 7. 13 primi æquipo nder. 4. secundi eiusd. 8. primi eiusd.

Figura autem vniuersa euidentèr inscripta componitur ex partibus æquiponderantibus à puncto d; *quarè etiam ipsa ex* d *puncto æquiponderabit. Quod erat ostendendum, &c.*

Lemma IX.

Positis ijsdem. SI à parabola dematut vuiuersa figura euidentèr inscripta, etiàm omnia segmenta parabolica, quæ circumrelinquunrur, ex puncto D. æquiponderabunt.

Repetita enim eadem figura demonstratum est figuram inscriptam æquiponderare ex puncto d. *Ergo figura inscripta centrũ grauitatis habet in perpendiculo horizontali* db. (*per 4. suppositionem*) *sed etiam parabola centrum grauitatis habet in diametro* db, (*per 4. secundi æquiponderantium*) *ergo centrum omnium reliquorum segmentorum erit in diametro* db. *Quare ex puncto* d *æquiponderabunt. per 3. suppositionem. Quod &c.*

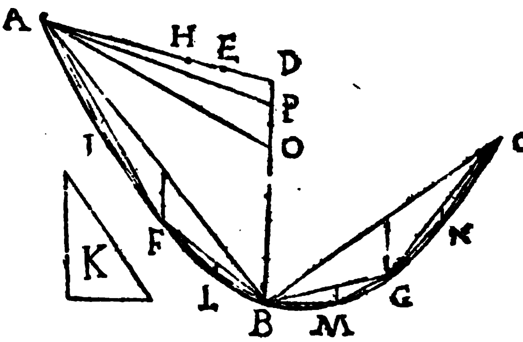
Cotollarium;

Constat etiam eodem prorsus argumenro, reliquum figuræ euiden-

densèr inscripta, detracto priùs triangulo a b c, *æquiponderare ex puncto* d. *Item reliquum parabola, dempto triangulo* a b c, *æquiponderare ex* d.

Lemma X.

Si ex parabola auferatur dimidium trianguli inscripti, tota reliqua figura mixta æquiponderabit ex puncto basis reliqui trianguli, in quo sic ea diuiditur, vt pars ad curuam terminata quadrupla sit illius, quæ terminatur ad diametrum;



Esto parabola a bc *inuersa; eiusq; diameter* bd *ita statuatur vt ad horizontem sit perpendicularis; Detractoq; semitriangulo inscripto* d b c; *secetur* ad *basis reliqui semitrianguli, in quinq; partes æquales; quarum vna sit* de. *Dico huiusmodi figuram ex puncto* e *suspensam, æquiponderare.*

Nisi enim æquiponderet; Cum recta a d *sit libra, cuius fulcrũ est in* e, *& magnitudo* a f b g c, *constans ex duabus portionibus parabolicis, appensa sit ad punctum* d *secundum centrum grauitatis ipsius: Reliquum autem triangulum* a b d *altera magnitudo appensa sit ad punctum* h (*sumptà* d h *tertia parte totius* da;) *Altera ex his duabus magnitudinib. præponderare necesse erit.* Coroll. Lem. 9.

Ponamus primò præponderare duas portiones a f b, b g c; *& sit excessus quo præponderant, æqualis spatio* K.

Inscribatur euidentèr intrà duas portiones parabolicas figura multilatera, ita vt omnia simul segmenta parabolica circumrelicta minora sint spatio K. *Tunc enim præponderabit adhuc figura inscripta multilatera* a i f l b m g n c b a.

Acci-

Accipiatur do *quarta pars totius* db; *& ductà* ao, *non solum triangulum* abo, *equiponderabit sibi ipsi ex puncto* h; *sed etiam quodcumq; aliud triangulum habens verticem in* a, *& basim in recta* db, *sibi ipsi equiponderabit ex puncto eodem* h.

Iam sic: Qualium partium ad *est 15*, dh *est 5*, *&* de *est 3. Ergo* de *ad* eh, *erit vt 3. ad 2. Cum autem demonstratum sit duo triangula* afb, bgc, *equiponderare ex puncto* d; *triangulum verò* boa, *ex puncto* h; *& cum duo predicta triangula sint ad totum triangulum* abd *vt duo ad 4.; erunt eadem ad triangulum* abo, *vt 2. ad 3.; nempe vt* he *ad* ed *reciprocè. Quamobrem duo illa triangula* afb, bgc, *cum triangulo* abo, *equiponderabunt suspensa ex puncto* e. Lem.8. ex Lem. 7. 6. Aequipond.

Sumatur deinde dp *quarta pars ipsius* do; *ducaturque* ap. *Iam; quia duo triangula* flb, bmg *equiponderant ex* d *itemque duo* aif, gnc, *equiponderant ab eodem puncto* d; *omnia simul predicta quatuor triangula equiponderabunt ex puncto* d; *Quatuor autem predicta triangula ad triangulū* afb *sunt vt duo ad 4. Sunt autem* afb, aod, *subquadrupla eiusdem trianguli* abd *& propterea ad triangulum* aop, *erunt vt 2. ad 3. nempe vt* he *ad* ed, *reciprocè. Aequiponderant ergo quatuor illa triangula cum triangulo* aop, *ex puncto* e. *Ergo vniuersa simul figura euidenter inscripta* aiflbmgncba *equiponderat triangulo* abp. *Sed eadem preponderabat triangulo* abd, *Minus ergò est triangulum* abd *quàm triangulum* abp: *totum sua parte: quod est impossibile.* Lem.8. ex Lem. 7. 6. Aequipond.

Ponamus deinde preponderare triangulum abd; *& sit excessus quo preponderat equalis spatio* K.

Accipiatur aod *quarta pars totius trianguli* abd; *iterumque sumatur* apd, *quarta pars trianguli* aod; *et hoc semper fiat, donec veniatur ad aliquod triangulum, puta* apd, *quod minus sit quàm spatium* K. *Tunc enim reliquum* abp *adhuc preponderabit duabus portionibus parabolicis* afb, bgc. *Sed idem triangulum ostendetur (eodem prorsus modo vt supra) equiponderare alicui figure intrà parabolicas portiones inscripte: necesse igitur erit quòd portiones parabolice minores sint quàm figura*

illa

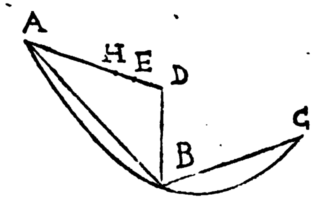
illa sibi inscripta; totum sua parte. Quod est impossibile. Aequiponderant ergo parabola inuersa (dempto semitriangulo inscripto) ex puncto quod dictum est, Quod erat ostendend. &c.

Corollarium

Hinc inferre possumus, quòd si ex puncto e, *recta ducetur diametro aquidistans, centrum praedictae figurae erit in producta. Siquidem figura ex puncto* e *aequiponderat, & linea ex* e *ducta aequidistans diametro, est ad horizontem perpendicularis. Posset etiam demonstrari, nisi extrà rem esset, centrum praedictae figurae dictam parallelã ita secare, vt pars quae terminatur ad curuam sit ad reliquam vt* 11. *ad* 12.

Propositio III.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem sibi basim, & eandem altitudinem habentis.



Esto parabola A B C, ex qua demptum sit dimidium trianguli inscripti: Sumptaq; DH, quæ sit tertia pars totius DA & DE quinta pars eiusdem; si parabola huiusmodi statuatur inuersa, ita vt diameter sit horizonti perpendicularis, æquiponderabit figura ex puncto E, Sed triangulum ABD appensum est secundum centrum grauitatis ad punctum H libræ HD. Duæ autem parabolicæ portiones residuæ appensæ sunt secundum centrum grauitatis ad punctum D; Ergo triangulum ABD, ad duas reliquas portiones erit vt DE ad EH, reciprocè, nempe vt 3. ad 2: Sumptis autem antecedentiũ duplis erit totum inscriptum triangulum ad reliquas portiones vt 6. ad 2. Conuertendo igitur, & componendo, erit ipsa parabola ad inscriptum sibi triangulum vt 8, ad 6. Nempe sesquitertia. Quod &c.

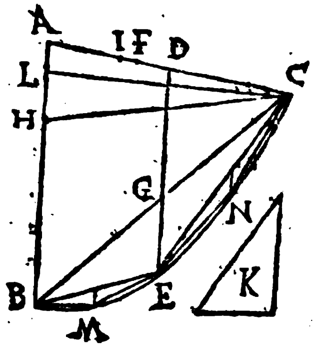
praeced. Lem.

Libet

Libet hic demonstrare Lemma Lucæ Valerij, nostro tamen modo, diuersisque penitùs Mechanicæ principijs. Ipse enim vtitur Propositione illa, quà ante demonstrauerat centrum grauitatis hemisphærij. Nos autem simili ratione, ac in præcedentibus, demonstrabimus & Lemma, & ipsam Valerij conclusionem.

Lemma XI.

Omnis semiparabola æquiponderat ex puncto basis, in quo sic ea diuiditur vt pars ad curuam terminata sit ad reliquam vt quinque ad tria.



Esto semiparabola abc, *cuius diameter* ab *statuatur ad horizontem perpendicularis: Secta deinde* ac *in* f, *ita vt* cf *ad* fa, *sit vt* 5. *ad* 3. *vel vt* 15. *ad* 9. *Dico figuram ex puncto* f *suspensam æquiponderare.*

Secetur iterùm ac *bifariam in* d, *& demissa* de *parallela diametro, erit ipsa* de, *diameter parabolæ* bec. *Sumatur iam* ai *tertia pars totius* ac. *Qualium igitur partium* ac *est* 24. *talium* ad *est* 12. af 9. *&* ai 8, *Ergo* df *tres, &* fi *vna. Iam si figura non æquiponderat ex puncto* f; *Cum* id *sit libra quædam cuius fulcrum est* f, *& ad punctum* i *appensum sit triangulum* abc; *ex puncto verò* d *appensa sit parabola* bec; *altera ex his figuris præponderabit. Ponamus primò præponderare parabolam* bec, *sitq; excessus quo præponderat æqualis spatio* K. *ex suppo-quinta*

Inscribatur euidentèr intra parabolam bec *figura rectilinea, ita vt omnes simul residuæ portiunculæ quibus parabola excedit inscriptam sibi figuram, minores sint spatio* K. *Manifestū est, quòd inscripta euidentèr figura adhuc præponderabit triangulo* abc.

Accipiatur ahc *quarta pars totius trianguli* abc. *Cum autem* dc *sit ad horizontem perpendicularis, & triangulum* bec

13 primi æquipon. *habeat centrum grauitatis in recta* g e; *erit dictum triangulum appensum ad* d. *Triangulum verò* b h c *appensum ad punctum* i; *quandoquidem* a i *tertia pars est totius* a c, *ipsa vero* a b *perpendicularis ad horizontem constituta est*, *Quoniam autem* b e c *ad* a b c *est vt vnum ad 4.*, *erit idem* b e c *ad* h b c *vt vnū*
Lem. 7. *ad 3. nempe reciprocè vt* i f *ad* f d, *Aequiponderant ergo ex puncto* f, *triangula* b e c, *&* h b c.

Sumatur iterum a l c *quarta pars trianguli* a h c; *Et quoniã duo triangula* b m e, e n c *aequiponderant ex* g (*uti demonstra-*
Lem. 8. *tum est*) *aequiponderabunt etiam suspensa ex* d. *Cum autem duo*
Lem. 7. *dicta triangula* b m e, e n c, *sint ad triangulum* b e c, *siue ad ipsi aequale* a h c, *vt vnum ad 4.*; *erunt ad* l h c, *vt vnum ad 3*; *nempe reciprocè vt* i f *ad* f d. *Aequiponderant ergo ex puncto* f. *duo triangula* b m e, e n c, *cum triangulo* l h c. *Figura ergò vniuersa euidentèr inscripta intrà parabolam* b e c. *aequiponderat ex puncto* f. *cum triangulo* l b c. *Sed eadem praeponderabat triangulo* a b c. *Necesse igitur est quòd triangulum* a b c *minus sit triangulo* l b c. *totum sua parte*, *Quod est absurdum*.

Ponamus deinde praeponderare triangulum a b c, *& sit excessus quo praeponderat aequalis spatio* K. *Sumatur* a h c *quarta pars totius trianguli* a b c. *Iterùm sumatur* a l c *quarta pars trianguli* a h c, *Et hoc semper fiat, donec ventum fuerit ad aliquod triangulum, puta* a l c, *minus spatio* K. *Tunc enim triangulum* l b c *adhuc praeponderabit parabolę* b e c. *Sed eodem modo, quo supra, demonstrabimus dictum triangulum* l b c *aequiponderare cuidam figurae euidentèr inscriptae intrà parabolam* b e c. *Vnde sequeretur ipsam parabolam* b e c *minorem esse aliqua figurà sibi inscriptà; totum videlicet sua parte. Quod est absurdum. Aequiponderat ergo semiparabola, vti dictum est constituta; & ex puncto* f *suspensa. Quod &c.*

Corollarium.

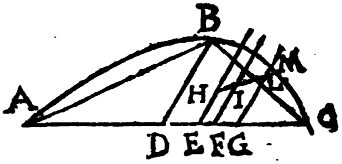
Hinc patet, quòd (cum semiparabola aequiponderet ex puncto
Suppositio 4. f.) *si ab* f *demittatur recta horizonti perpendicularis, in hac demissà erit centrum grauitatis semiparabolae; aliàs enim non ęqui-*

pon-

ponderaret ex f. Verùm quoniam etiam diameter parabolę a d horizontem perpendicularis constituta est, concludemus; quò d recta quæ ex puncto f ducitur diametro ęquidistans, transit per centrum semiparabolæ.

Propositio IV.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.



Esto parabola ABC, cuius diameter BD, triangulum verò inscriptum sit ABC, Dico parabolam dicti trianguli esse sesquitertiam.

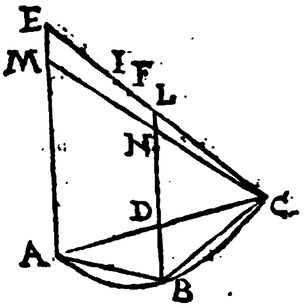
Sumatur, qualium partium tota DC est 24. talium DE 8.; DF 9; & DG, 12. Eritque earundem EF vna, & FG tres, Ductis verò EH, FI, GL, diametro parallelis, erit in EH centrum trianguli BDC; in FI centrum semiparabolæ DBMC, & in GL centrum portionis BMC, 13. primi æquip. Lem præced.

Ponatur centrum trianguli esse punctum quodcumque H. Item centrum semiparabolæ esse punctum quodcunque I (quamquàm huiusmodi puncta extrà ipsas figuras vbicunq; libuerit sumantur, tamen verum semper eodē modo inferemus.) iunctà deinde HI, & productà, in ipsa HI erit centrum portionis parabolicę BMC; quod cum sit etiam in recta GM producta, necessariò erit in communi concursu L. Parabola ergò BMC ad triangulum DBC erit reciprocè vt HI ad IL, hoc est, vt EF ad FG, nempe vt vnum ad 3. Componendo ergo, sumptisq; duplis, erit tota parabola ad totum triangulum vt 4. ad 3. Nempe sesquitertia. Quod erat propositum, &c. 4. secundi æquip. 8. primi æquipond.

Poterat hęc demonstratio produci etiam hoc modo, pręmisso hoc Lemmate.

Si parabola ad extremum basis lineam habuerit diametro parallelam, & diametri quadruplam, ductoq; tertio latere, compleatur triangulum. Vniuersa haec figura æquiponderabit ex puncto tertij lateris, in quo sic diuiditur vt pars ad curuam terminata sit ad reliquam vt 5. ad 3.

Esto parabola abc, *cuius diameter* db *statuatur ad horizontem perpendicularis; consideretur que ipsa parabola inuersa: Tum ad alterutrum basis* ac *extremum, puta ad punctum* a, *adiungatur recta* ae, *diametro æquidistans, & ipsius diametri quadrupla. Ducto deinde tertio latere* ec *trianguli* eac, *secetur in* f, *ita vt* cf. *ad* fe *sit vt 5. ad 3. Dico huiusmodi figuram ex puncto* f *æquiponderare. Quoniam enim* ce *ordinatim applicatur ad diametrum* ae; *erit tota figura* eabc *semiparabola. Ergo ijsdem rationibus, eodemq; progressu, quo vsi sumus in lemmate 11, ostendemus totam figuram æquiponderare ex* f. *Sumatur iam* ei *octo earum partium; qualium tota* ec *est 24. &* el *12. &* ef *9, Eritq;* if *earundem vna, &* fl *3. Ergo cum parabola* abc *pendeat ex puncto* l, *appensa ad ipsum secundum centrum grauitatis; triangulum verò* aec *ex puncto* i; *erit parabola* abc *ad triangulum* aec *vt reciprocè* if *ad* fl, *nempe vt vnum ad 3.; siue vt 4. ad 12. & propterea ad triangulum* abc *vt 4. ad 3. &c. Est enim* abc *quarta pars ipsius* ace *&c. Constat ergo parabolam sesquitertiã esse inscripti sibi trianguli.*



Ostendetur infra

ob communem basim AC altitudinem verò in ratione quadrupla.

Quod assumptum est, nempe rectam ce *ordinatim applicari ad diametrum* ae, *ostendemus hoc modo.*

Si enim non est ordinatim applicata ce, *applicetur ordinatim* cm; *eritq;* mabc *semiparabola; & quia sunt æquales* ad, dc, *erit* mc *secta bifariam in* n. *Ergo* ma *sesquitertia est ipsius* nb; *sed etiam* ea *ob constructionem sesquitertia est ipsius* lb. *ergo*

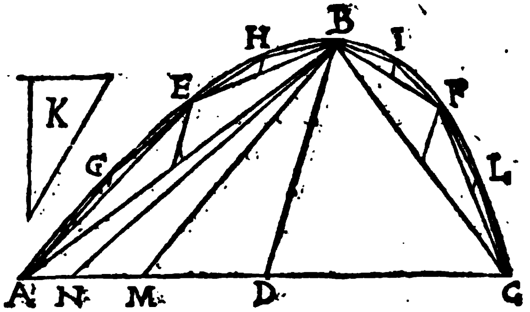
ob semiparabolã

ergo & reliqua em *sesquitertia est reliquæ* ln; *&* ec *sesqui*- 19 quin-
tertia ipsius cl. *quod est impossibile. Est enim dupla, non au*- ti.
tem sesquitertia. Quare nulla alia præter ce *ex puncto* c *ordinatim applicari potest ad diametrum* ae. *Quod &c.*

Propositio V.

PArabola sesquitertia est trianguli eamdem ipsi basim, eandemq; altitudinem habentis.

Esto parabola ABC, cuius diameter, BD, triangulum inscriptum ABC; Dico parabolam esse sesquitertiam trianguli ABC. sibi inscripti.



Si enim ita non est, neq; triangulum ABC erit triplum duarum simul reliquarum portionum AEB, BFC Sed erit vel magis quàm triplum, siue minus quam triplum.

Sit primò minus quam triplum, eruntq; duæ reliquæ portiones magis quàm tertia pars trianguli ABC. Esto excessus æqualis spatio K, & inscribantur intrà portiones primùm triangula AEB, BFC; iterumque in reliquis portiunculis quatuor triangula AGE, EHB, BIF, FLC; deinde octo &c. & hoc semper donec excessus portionum supra inscriptas euidentèr figuras sit minor spatio k. Tunc .n. erunt inscriptæ figuræ adhuc maiores quàm tertia pars trianguli ABC.

Summatur iam triangulum ABM quarta pars totius trianguli ABC. Et quoniam ABC quadruplum est tam trianguli ABM, ex Lem.
quam triangulorum AEB, BFC simul sumptorum, æquale erit 1.
trian-

triangulum A B M duobus simul triangulis A E B, B F C; & propterea triangulum M B C triplum erit duorum simul triangulorum A E B, B F C.

Accipiatur iterùm triangulum A B N quarta pars totius trianguli A B M. Cum ergò A B M quadruplum sit ipsius A B N; &
Lem. 7. duo A E B, B F C, quadrupla sint quatuor simul subsequentiũ triangulorum A G E, E H B, B I F, F L C; cumque antecedentia sint æqualia, æqualia erunt etiam consequentia; & propterea cum triangulum N B M triplum sit trianguli A B N, triplum etiã erit idem triangulum N B M. quatuor simul triangulorum A G
12 Quinti. E, E H B, B I F, F L C. Et vt vnum ad vnum ita omnia simul ad omnia. Quare totum simul triangulum N B C, triplum erit figurarum euidentèr intrà portiones inscriptarum. Sed triangulum A B C minus erat quàm triplum earundem: Ergo A B C minus est quàm N B C totum sua parte. Quod est absurdum &c.

Ponamus deinde triangulum A B C esse plus quam triplum duarum simul reliquarum portionum. Esto: & excessui, quo est magis quàm triplum, æquale sit spatium k.

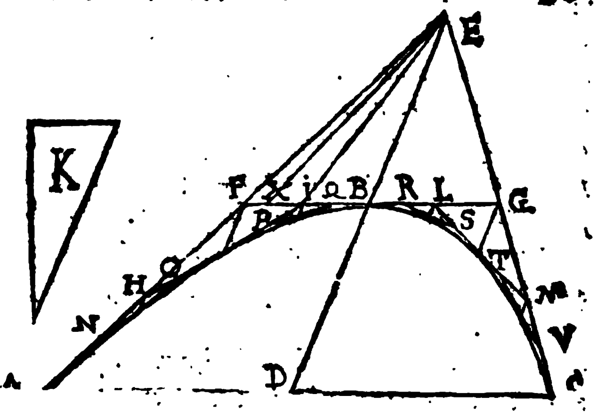
Accipiatur A B M quarta pars totius trianguli A B C. Iterum sumatur A B N quarta pars ipsius A B M. Et hoc semper fiat donec veniatur ad aliquod triangulum, puta A B N, quod minus sit spatio K. Eritq: adhuc triangulum N B C magis quàm triplum duarum portionum. Sed eàdem prorsus ratione, & ordine quo supra, ostendemus triangulum N B C triplum esse cuiusdam figuræ intrà portiones euidentèr inscriptæ; Necesse igitur erit quòd portiones ipsæ minores sint quàm figuræ intrà ipsas descriptę: Totum sua parte. quod est impossibile.

Triangulum ergo A B C duarum reliquarum portionum triplum est; & componendo; & per conuersionem rationis parabola ad suum triangulum erit vt 4. ad 3. Nempe sesquitertia. Quod erat propositum &c.

Lemma XII.

Si parabola tres tangentes habuerit, duas ad basim, tertiam verò per verticem: Erit triangulum sub tangentibus comprehensum, reliquæ figurę (demptà parabolà) triplum.

Esto



Esto parabola abc, *cuius diameter* bd; *tangentes ad basim* ae, ce; *per uerticem verò* fbg.

Dico triangulum feg, *sub tangẽtibus comprehensum reliquae figurę mixtae* abcgf (*dẽpta scilicet parabola*) *triplum esse.*

Si enim non est triplum, erit certè uel magis, uel minùs quàm triplum.

Sit primò minùs quàm triplum; eritq; reliqua figura mixta abcgf, *magis quàm tertia pars trianguli* feg. *Sit excessus* K. *Ducanturq; per uertices abscissarum portionum tangentes* hi, lm; *Iterumque per uertices subsequentium portionum, tãgentes agantur* no, pq, rs, tu. *& hoc semper; donec excessus figurae mixtae* abcgf, *supra figuram ex triangulis constantem* nopqrstugf, *minus aliquando relinquatur quàm spatium* K. *Tunc enim erit adhuc figura ex triangulis inscripta maior quàm tertia pars trianguli* feg.

Accipiatur triangulum fei *quarta pars trianguli* feg; *eritque triangulum* fei *aequale duobus simul triangulis* hfi, lgm. (*cum tam ista duo, quàm illud solum, subquadrupla sint eiusdẽ trianguli* feg) *Ergo triangul.* ieg *triplum erit duorum simul triangulorum* hfi, lgm. Lem. 3.

Sumatur iterùm triangulum fex *quarta pars ipsius* fei. *Cumque sit* fei *quadruplum trianguli* fex, *duo verò triangula* hfi, lgm *quadrupla sint quatuor simul triangulorum* nho, piq, rls, tmu, *& antecedentia aequalia; etiam consequentia aequalia erunt; eritq; triangulum* fex, *aequale quatuor praedictis triangulis* nho, piq, rls, tmu: *& propterea* xei *triplum erit* Lem. 3.

eorum-

11 Quinti. *eorumdem quatuor triangulorum. Cumq. sit vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia: Erit totum simul triangulum* x e g *triplum vniuersa figura rectilinea intrà figuram mixtam inscripta. Sed eiusdem figurę inscripta triangulum* f e g *minus erat quàm triplum; necesse igitur est vt triangulum* f e g *minus sit quàm ipsum* x e g *totum videlicet sua parte. Quod est impossibile.*

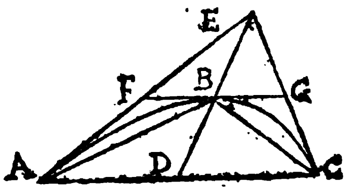
Ponamus deinde triangulum f e g *esse plusquàm triplum reliquę figura mixta demptà parabolà. Esto & sit excessus ęqualis spatio* k.

Accipiatur triangulum f e i *quarta pars totius* f e g: *& iterum sumatur triangulum* f e x *quarta pars trianguli* f e i: *& hoc fiat semper donec veniatur ad aliquod triangulum, puta* f e x, *quod minus sit spatio* K. *Eritq. triangulum* x e g *adhuc maius quàm triplum reliqua figura mixta* a b c g f. *Sed eadem penitùs ratione, atque ordine vt supra, ostendemus triangulum* x e g *esse triplum cuiusdam figurę intrà figuram mixtam* a b c g f. *descriptę. Necesse ergò erit, vt figura mixta* a b c g f. *minor sit quàm aliqua figura sibi inscripta; totum sua parte. Quod est absurdum.*

Si ergò parabola tres tangentes habuerit, vt positum est, erit triangulum sub tangentibus contentum, reliqua figurae, dempta parabola triplum. Quod erat propositum &c.

Propositio VI.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.



Esto parabola A B C, cuius diameter B D; duæ tangentes A E, C E ad basim, & tertia F B G per verticem. Dico parabolam sesquitertiam esse inscripti sibi trianguli A B C.

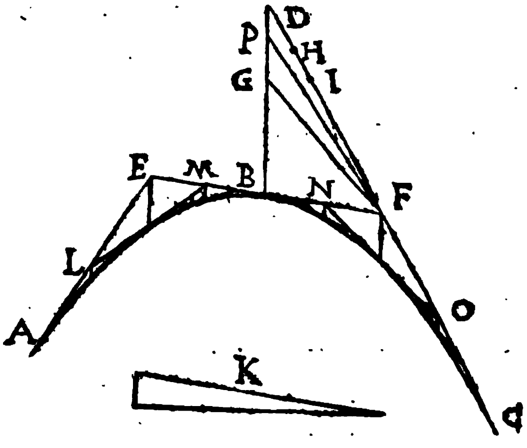
Triangulum enim F E G ad

duo

duo trilinea mixta AFB, BGC per præcedens lemma, est vt 3. ad vnum. Ergò trapezium. AFGC (cum triplum sit trianguli FEG) ad duo eadem trilinea mixta erit vt 9. ad vnũ. Et ad parabolam erit (per conuersionem rationis) vt 9. ad 8.& ad triangulum ABC, erit vt 9. ad 6. Qualium ergo partium parabola est octo, talium triangulum ABC est 6; Quare parabola ad inscriptum sibi triangulum est vt 8. ad 6. nempe sesquitertia. Quod erat &c.

Lemma XIII.

Si parabola tres tangentes habuerit; duas ad basim, tertiam verò per verticem, & ex vniuersa figura dempta sit parabola, dimidiumq; trianguli sub tangentibus contenti. Reliqua figura æquiponderabit ex quodam puncto, quod ita integram tangentem lateralem diuidit, vt pars quæ ad contactum curuæ terminatur sit ad reliquam vt 9. ad vnum.



Esto parabola abc, *cuius diameter* bd *concipiatur ad horizontem perpendicularis; Sintque duæ tangẽtes ad basim* ae, cd, *verticalis verò tangens* ebf. *Secta deinde laterali* cd *in* h, *ita vt* ch *ad* hd *sit vt 9. ad vnum; Dico figuram huiusmodi (demptà parabolà, & semitriangulo verticali* ebd*) æquiponderare ex puncto* h.

Sumatur di *quinque partium earum, quarum* df *est 15. sive quarum* dh *est 3. Eritq;* dh *ad* hi *vt 3. ad 2. Cum autem* bd *sit ad horizontem perpendicularis, portiones mixtæ* abe,

F bcf,

bcf, *appensę erunt secundum centrum grauitatis ad punctum* b, *siue ad punctum* d. *Triangulum verò* bdf *ob eandem causam, & eodem modo pendebit centraliter ex puncto* i. *(quandoquidem* fi *dupla est ipsius* id; *& ipsa* db *ad horizontem perpendicularis.) Iam si ista magnitudines non æquiponderant ex* h *puncto libra* di, *altera ipsarum præponderabit. Esto; & præponderent primò duæ portiones mixtę* abe, bcf. *Sitq; excessus quo præponderant, æqualis spatio* K.

Inscribatur intrà mixtas portiones figura ex tangentibus, vt iàm sæpè factum est. Donec excessus portionum suprà figuram rectilineam inscriptam minor sit spatio K. *Tunc enim figura inscripta adhuc præponderabit triangulo* bdf.

Accipiatur triangulum dfg *quarta pars totius trianguli* df ex Lem. 3. b; *eritq; triangulum* dfg *æquale triangulo* nfo *(cum ambo sint subquadrupla eiusdem trianguli* dfb) *& propterea triangulum* dfg *ad duo triangula* lem, nfo, *erit vt vnum ad* 2. *ergò* bgf *ad duo triangula* lem, nfo, *erit vt* 3. *ad* 2. *nempe reciprocè vt* dh *ad* hi. *Triangulum igitur* bgf, *& duo triangula* lem, nfo, *ex puncto* h *æquiponderant inuicem.*

Sumatur iterùm dfp *quarta pars totius* dfg, *eritq;* dfp ex Lem. 3. *æquale duobus simul triangulis quæ sunt infrà puncta* n, *&* o. *(Sunt enim quartæ partes æqualium triangulorum* dfg, nfo, *Propterea triangulum* dfp *ad quatuor simul triangula* l, m, n, o, *erit vt vnum ad* 2. *Sed triangulum* pfg, *ad eadem quatuor triangula erit vt* 3. *ad* 2. *nempe reciprocè vt* dh, *ad* hi. *Aequiponderat igitur triangulum* pfg, *cum quatuor dictis triangulis* l, m, n, o, *ex puncto* h. *Quamobrem vniuersa figura intrà portiones inscripta æquiponderabit cum triangulo* bpf *ex puncto* h. *Sed eadem pręponderabat triangulo* bdf. *Necesse igitur est vt triangulum* bdf *minus sit quàm triangulum* bpf, *totum sua parte: Quod esse non potest,*

Ponamus deinde pręponderare triangulum bdf *duabus simul portionibus mixtis* abe, bcf; *& ponatur excessus quo præponderat, ęqualis spatio* K.

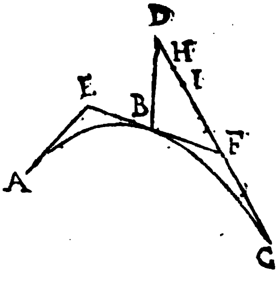
Accipiatur triangulum dfg *quarta pars ipsius* dfb. *& ite-*

rum

rum sumatur dfp *quarta pars ipsius* dfg, *& sic semper, donec veniatur ad aliquod triangulũ, puta* dfp *minus spatio* K. *Tunc enim reliquum triangulũ adhuc preponderabit portionibus mixtis* abe, bcf. *Sed ostendemus eodem penitus argumento, atq; ordine vt supra, idem triangulum* pfb *equiponderare alicui figure intrà portiones* abe, bcf, *descripte. Necesse ergo erit quòd ipsa duae portiones mixte minores sint quàm aliqua sibi inscripta figura; totum sua parte; quod est absurdum. Constat ergò quod propositum fuerat.*

Propositio VII.

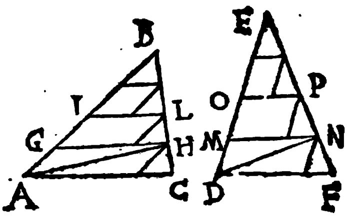
PArabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eã-dem altitudinem habentis.



Esto, ut in praecedenti lemmate, parabola A B C. cum duabus tangentibus lateralibus, siue ad basim, AE, CD; atque EBF per uerticem. Concipiaturq; diameter ad horizontem perpendicularis; & ablatà parabola, detractoque dimidio uerticalis trianguli; accipiatur D I tertia pars totius DF, & sit DH sesquialtera ipsius HI. Aequiponderant ergo (per lemma praecedens) ex puncto H librae D I, due magnitudines. Nempe hinc duae portiones A B C F E appensae ad punctum D; inde uerò triangulum D B F appensum ad punctum I. Quamobrem D B F ad A B C F E, erit ut reciprocè DH ad HI, nempe ut 3. ad 2. Sumptisq; antecedentium duplis, erit totum uerticale triangulum E D F ad reliquam figuram mixtam triplum. Propterea (ut in Propositione sexta demonstratum est) parabola inscripti sibi trianguli sesquitertia erit. Quod erat propositum demonstrare.

Lemma XIV.

Si duorum conorum latera trianguli per axem secta fuerint in partes æquales numero, & magnitudine, ductisque per puncta sectionum planis basi parallelis, super sectionum circulis intelligantur cylindri æquealti intrà conos descripti: Erit ut primus conus ad secundum, ita omnes cylindri primi coni, ad omnes cylindros secundi coni.



Sint duorum conorum triangula per axem abc, def, *& duo eorùm latera, puta* ab, de, *secentur in partes numero æquales; nempe in totidem partes diuidatur tàm* ab, *quàm* de; *sintq; partes lateris* ab *æquales inter se, & partes* de *item æquales inter se. Ductis deinde per singula sectionum puncta planis* gh, il *&c. basi* ac *parallelis; item planis* mn, op *&c. basi* df *parallelis; Concipiantur cylindri* ah, gl *&c. eiusdem altitudinis intrà conum* abc *descripti; itemq; in altero cono alij cylindri æquealti intelligantur; Dico esse vt conus* abc *ad conum* def, *ita omnes cylindros coni* abc *ad omnes cylindros coni* def.

Concipiantur duo coni gah, mdn; *quorum vertices sint* a *&* d, *bases verò circuli* gh, mn.

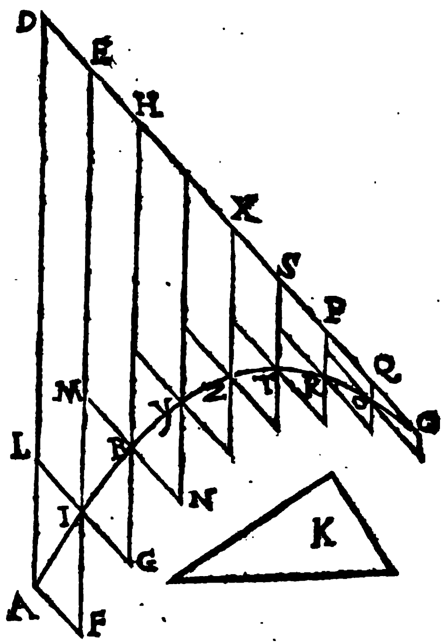
Iàm; Cylindrus ah *ad conum* gah, *est vt cylindrus* dn *ad conum* mdn. *(nempe in ratione tripla) conus verò* gah *ad conum* gbh *in eadem basi, est vt* ag *ad* gb; *siue (propter diuisionem in constructione adhibitam) vt* dm *ad* me, *hoc est vt conus* mdn *ad conum* men. *Conus denique* gbh *ad conum similem* abc, *est vt cubus* gb *ad cubum* ba; *siuè (propter constructionem) vt cubus* me *ad cubum* ed, *nẽpe vt conus* men *ad conum similem* def. *Quarè ex æquo cylindrus* ah *ad conũ* abc, *erit ut cylindrus* dn *ad conum* def. *Et permutando cylindrus* ah *ad cylindrum* dn *erit vt conus* abc *ad conum* def.

Vlterius. Cylindrus etiam gl *ad cylindrum* mp. *eodem penitus* *mōtus modo demonstratur esse ut conus* g b h *ad conum* m e n, *siue ut conus* a b c *ad conum* d e f; *& hoc modo semper. Propterea ut unus cylindrus* a h *ad unum* d n, *ità quilibet antecedentium ad quemlibet consequentium, ergò ut unus ad unum, nempe ut conus* a b c *ad conum* d e f, *ità omnes simul cylindri coni* a b c, *ad omnes simul cylindros coni* d e f. *Quod &c.* 11 Quinti. 12 Quinti.

Lemma XV.

Dato trilineo mixto, sub lineà parabolica, eiusq; tangente, & alià rectà diametro parallela compræhenso; possibile est in dato trilineo figuram inscribere constantem ex parallelogrammis æquealtis, quæ figura deficiat à trilineo mixto minori differentià quàm sit quæcumq; data magnitudo.

Esto linea parabolica a b c, *cuius tangens* c d, *& diametro æquidistans sit* a d. *Dico intrà trilineū mixtum* a b c d. *describi posse figuram constantem ex parallelogrammis æquealtis, quae figura deficiat à trilineo mixto, minori defectu quàm sit spatium quodcunque datum* K.



Secetur enim d c *bifariam in* x; *iterumq; partes bifariàm diuidantur in* h *& in* p; *semperq; hoc fiat, donec ueniatur ad sectionem aliquam puta* d e, *eiusmodi, ut parallelogram.* a d e, *minus sit spatio* K. (*Quod autem hoc fieri possit, patet. Si enim compleatur parallelogrammum* a d c, *ex ipso per continuam bisectionem semper detrahitur dimidium; ergò tandem remane-*

bit

bit a e *minus quolibet dato spatio.) Ducantur deinde ex punctis sectionum rectę* e f, h g *&c. æquidistantes ipsi* d a; *per puncta autem* i, b *&c. vbi parallelę secant parabolam, ducantur* l g, m n *&c. æquidistantes tangenti* c d. *Et factum erit quod oportebat.*

36. Primi. *Parallelogrammum enim* c o, *æquale est ipsi* o p, *& addito communi* o r, *erunt duo* c o, o r, *æqualia ipsi* r q, *siue ipsi* r s: *additoq; cōmuni* r t, *erunt tria* c o, o r, r t, *ęqualia ipsi* t p, *hoc est ipsi* t x, *additoq; cōmuni* t z. *& sic semper procedendo, erunt deniq. omnia simul parallelogrāma* c o r t z y b i a *æqualia ipsi parallelogrāmo* a e. *nempe minora spatio* k. *Multò igitur minor erit defectus figurę inscriptę ex parallelogrammis æquealtis compositę, à trilineo mixto* a b c d, *quàm sit propositum spatium* K. *Quod erat &c.*

Corollarium.

Hinc notabimus, quod eodem prorsus modo, eàdemq; operatione, figura etiam circumscribitur dato trilineo mixto, constans ex parallelogrāmis æquealtis, ita vt excessus figuræ circumscriptæ suprà ipsum trilineum, minor sit quocunque spatio dato K.

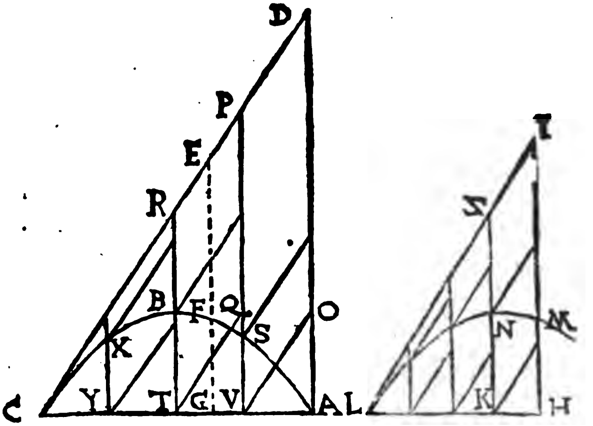
Lemma XVI.

Si parabola tangentem habuerit: & insuper duas rectas diametro parallelas, quæ duo trilinea abscindant sub tangente, & lineà parabolicà compræhensa; Erit figura ex parallelogrammis æquealtis constans in maiori trilineo descripta, ad figuram eiusdem speciei in minori trilineo descriptam, vt cubus maioris tangentis ad cubum minoris.

Esto parabola a b c, *cuius tangens* c d; *& diametro parallela sit vtraque* d a, e f; *vt fiant duo trilinea mixta* a b c d *maius, &* f b c e *minus. Dico, si in utroque trilineo inscribatur figura constans ex parallelogrammis æqualibus utrimque numero, (ut in præcedenti Lemmate expositum est) figuram trilinei* a b c d, *ad figuram trilinei* f b c e, *esse ut cubus* d c *ad cubum* c e.

Concipiamus, (ad euitandam linearum multitudinem, & confusio-

fusionem) triangulum gec *cum sua portione parabolę intercepta* fbc, *transferri, et esse idem quod positum est sub signis* hil. *trilineumq.* fbc c *esse idem cũ trilineo* mnli.



Inscribatur iam in utroque trilineo abcd, *&* mnli, (*quod quidem repræsentat ipsum* fbce *trãslatum*) *figura constans ex parallelogrammis æquealtis; & sit idem numerus parallelogrammorum in utroq. trilineo. Intelligatur etiam conus, cuius uertex* c, *siue* l; *& diameter basis sit, hinc quidem* ad, *inde uerò* hi. *Sintque in singulis coni segmentis cylindri ęquealti* op, qr *&c.*

Iam parallelogrammum bp *ad* fd, *est ut recta* br *ad* fp, *hoc est ut quadratum* rc *ad* cp: *hoc est ut quadratum* rt *ad quadratum* pu: *hoc est ut cylindrus* qr *ad cylindrum* op. *Eodem modo, erit parallelogrammum* xr *ad* fd, *ut cylindrus* yr *ad* ud. *Ergo erunt duo simul parallelogramma* bp, xr, *ad* fd; *ut duo simul cylindri* tp, yr, *ad cylindrum* ud. *Procedendo itaque semper hoc modo, & denique componendo, erit tota inscripta figura ex parallelogrammis constans in trilineo* abcd, *ad parallelogrammum* fd, *ut omnes simul cylindri, qui in cono* acd, *ad cylindrum* ud.

1. sexti. ob parabolam. 24 Quinti.

Amplius; parallelogrammum fd *ad* ni *compositam habet rationem, ex ratione rectę* fp *ad* nz, *siue quadrati* pc *ad* zl (*sunt enim duæ figuræ, sed circa eandem parabolam translatam*) *siue quadrati* pu *ad* zK; *Et ex ratione recta* dp *ad* iz. *Est ergò parallelogrammum* fd *ad* ni *ut cylindrus* ud *ad* ki,

Deni-

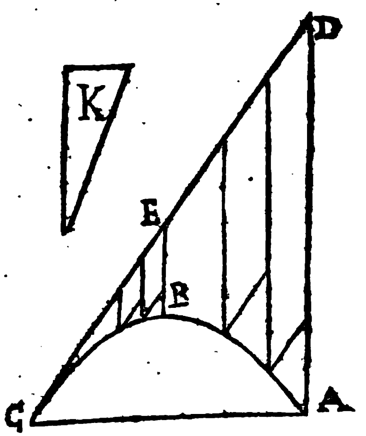
Denique parallelogrammum ni *ad totam figuram inscriptam intrà trilineum* mnli, *est ut cylindrus* ki *ad omnes cylindros inscriptos intrà conum* hli, *Propterea ex æquo erit figura ex parallelogrammis constans inscripta in maiori trilineo* abcd, *ad figuram ex parallelogrammis inscriptam in minori trilineo* mnli, *ut omnes cylindri in cono* acd *ad omnes cylindros in cono* hli. *Nempe ut conus* acd *ad conum* hli, *hoc est ad conum* gce *(qui idem est.) Nempe ut cubus* dc *ad cubum* ce. *Quod erat &c.*

ostendetur eodē modo ut in altera figura.

Lem.14.

Lemma XVII

Si parabola tangentem habuerit, & insuper duas diametro parallelas rectas lineas, quę duo trilinea mixta abscindant; Erunt inter se abscissa trilinea ut cubi suarum tangentium.



Esto parabola abc, *cuius tangens* cd: *& diametro parallela sit utraque* da, eb. *Dico trilineum mixtum* abcd *ad trilineum mixtum* bce, *esse ut cubus tangentis* dc, *ad cubum tagentis* ce.

Si enim ità non est, sit alterum illorum, si possibile est, maius quā ut habeat dictam proportionem ad reliquum; & ponamus illud esse abcd, *maius quàm quod esse deberet excessu* K.

Inscribatur intrà trilineum abcd *figura ex parallelogrammis ęquealtis constans; ita ut à trilineo deficiat minori defectu quàm sit spatium* k *(hęc autem fieri posse ostendimus) Habebitque adhuc figura inscripta ad reliquum trilineum* bce *maiorē rationem quàm cubus* dc *ad cubum* ce.

Lem. 15

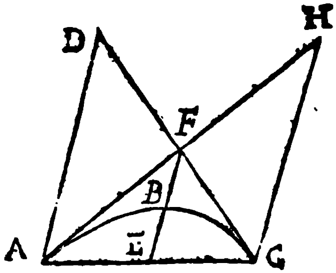
Inscribatur intrà alterum trilineum bce *figura eiusdem speciei, & eiusdem numeri parallelogrammorum cum descripta intra*

tra trilineum abcd. *Erit ergò figura inscripta trilineo* abcd *ad figuram inscriptam trilineo* bce *ut cubus* dc *ad cubum* ce. *Sed eadem figura inscripta trilineo* abcd *ad trilineum* bce *habet maiorem rationem quàm cubus* dc *ad* ce. *Minus ergo est trilineum* bce *quàm inscripta sibi figura. totum sua parte. Quod est impossibile. Constat ergo propositum.* *Lem. præcedens.*

Propositio VIII.

PArabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

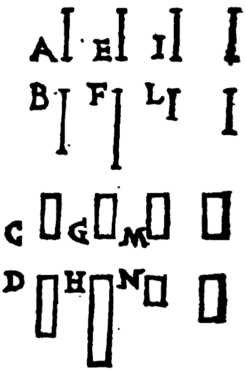
Esto parabola ABC, cuius diameter BE, tangentes verò AF, CF, productæ eousque, donec occurrant ipsis AD, CH, diametro parallelis. Iunganturq; rectę lineę AB, BC. (licet in figura omissę sint.) Dico parabolā trianguli ABC esse sesquitertiā.



Erit enim ABCD ad trilineum BCF, ut cubus DC ad cubum CF, nempe ut octo ad unum. (cum enim sit ut AE ad EC, ita DF ad FC, erit DF æqualis ipsi FC; cubusq; DC octuplus cubi CF.) Item trilineum CBAH ad trilineum BAF, est ut octo ad unum. Coniunctim ergò erunt duo trilinea ABCD, CBAH, ad spatium ABCF. ut octo ad unum. Et diuidendo bis, erunt duo triangula AFD, CFH, ad spatium ABCF, ut 6. ad unum. Quamobrem triangulum AFD, siue AFC ad spatium ABCF erit ut 3, ad unum; & ad parabolam erit ut 3. ad 2. uel ut 6. ad 4. Propterea parabola erit ad triangulum ABC ut 4. ad 3. Nempe sesquitertia. Quod erat propositum demonstrare, &c. *Lem. præcedent.* *2 Sexti.*

Lemma XVIII.

Si fuerit vt prima magnitudo ad secundam, ita tertia ad quartam; Et hoc quotiescunq; libuerit. Fuerintq; omnes primæ inter se, item omnes tertiæ magnitudines inter se æquales. Erunt omnes primæ simul ad omnes secundas, vt sunt omnes tertiæ simul, ad omnes quartas magnitudines.



Esto vt a *prima ad* b *secundam, ita* c *tertia ad* d *quartam. Et iterum vt* e *prima ad* f *secundam, ita* g *tertia ad* h *quartam; Et sic quotiescunq; libuerit. Sintq; omnes primæ* a, e, i, *&c. item omnes tertiæ* c, g, m, *&c. inter se æquales.*

Dico omnes primas simul ad omnes secundas simul, ita esse vt sunt omnes simul tertiæ, ad omnes quartas magnitudines.

Quoniam enim conuertendo est vt b *ad* a *ita* d *ad* c. *Item vt* f *ad* e; *siue ad æqualem* a, *ita* h *ad* g, *siue ad* c; *erunt simul* b f *ad* a, *vt sunt* d h *simul ad* c. *Hoc*
24. quinti. *modo procedendo, ostendemus omnes secundas simul esse ad* a, *vt sunt omnes quartæ simul ad ipsam* c. *Ipsa verò* a *ad omnes*
15 quinti. *primas est vt* c *ad omnes tertias (sunt enim æquesubmultiplices) Ergo ex æquo omnes secundæ ad omnes primas, sunt vt omnes quartæ simul ad omnes tertias. Conuertendo igitur cōstat quod erat propositum demonstrare.*

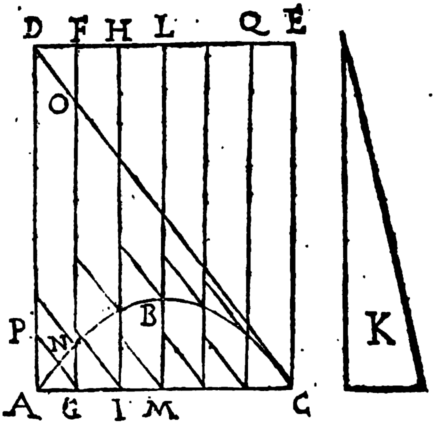
Lemma XIX.

Si parabola tangentem habuerit ad basim; ex alia verò parte rectam diametro parallelam. Erit triangulum sub tangente, & parallela diametro, ipsáq; basi compræhensum, ipsius parabolæ triplum.

Esto

Esto parabola abc, *cuius tangens* cd, *parallela diametro sit* ad; *Dico triangulum* adc *esse parabolæ ipsius* abc, *triplum*.

Si enim non est triplum parabolæ, per conuersionẽ rationis, non erit sesquialterum trilinei abcd; *& propterea (duplicato antecedente) totum parallelogrammum* ae *non erit triplum trilinei* abcd.



Trilineum ergo abcd *erit vel plus, vel minus quàm tertia pars parallelogrammi* ae. *Ponatur primùm esse plus quàm tertia pars, & sit excessui æquale spatium* K.

Inscribatur intrà trilineum abcd, *figura constans ex parallelogrammis aequealtis, deficiensque ab ipso trilineo minori defectu quàm sit ipsum spatium* K. *Et inscripta iam sit eiusmodi figura. Erit ergò adhuc figura inscripta plus quàm tertia pars parallelogrammi* ae.

Concipiatur circa rectam ad, *circulus, qui sit basis cuiusdam coni verticẽ habentis in puncto* c. *& super eadẽ basi intelligatur cylindrus* ae *eiusdem altitudinis cum ipso cono; sectusque sit tam conus quàm cylindrus planis basi parallelis per singulas rectas* fg, hi, lm *&c. ductis. Concipiantur etiam intrà conum* acd *cylindri aequealti* po, oi *&c.* 1. sexti.

Iam sic: Parallelogrammum af *ad* nd, *est vt recta* da *ad* on: *nempe vt quadratum* dc *ad quadratum* co; *siue, vt quadratum* da *ad quadratum* og, *nempe, vt cylindrus* af *ad cylindrum* po. *Et sic, semper. Suntq; omnes primæ magnitudines æquales parallelogrammo* af, *& ideo æquales inter se; omnes autem tertiæ magnitudines æquales cylindro* af, *atque ideo inter se. Erunt ergo omnes primæ simul, hoc est parallelogram-*

ob parabolam.

ob similitud. triãgul.

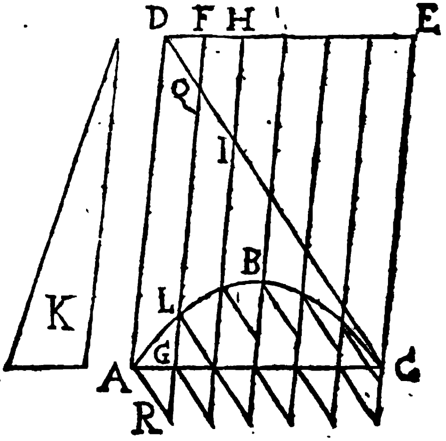
 mum

mum aq, *ad omnes secundas simul, nempe ad figuram inscriptã in trilineo* abcd, *vt sunt omnes tertiæ simul, nempe cylindrus* aq, *ad omnes quartas simul, hoc est ad omnes cylindros intrà conum* acd *descriptos. Conuertendo igitur; erit figura trilineo inscripta ad parallelogrammum* aq *vt omnes cylindri intra conum* acd *ad cylindrum* aq. *Parallelogrammum verò* aq *ad parallelogrammum* ae *est vt* dq *ad* de, *hoc est vt cylindrus* aq *ad cylindrum* ae. *Propterea ex æquo, figura inscripta in trilineo ad totum parallelogrammum* ae, *erit vt omnes cylindri in cono inscripti ad cylindrum* ae. *Sed figura inscripta in trilineo est (ex iam dictis) plusquam tertia pars parallelogrammi* ae, *ergò omnes cylindri in cono descripti erunt plusquã tertia pars cylindri* ae, *nempe maiores quàm conus* acd. *pars videlicet suo toto. Quod est impossibile.*

Sed ponamus nunc trilineum abcd *esse minus quàm tertia pars parallelogrammi* ae; *sitq; defectus æqualis spatio* K. *Circumscribatur trilineo* abcd *figura constans ex parallelogrammis æquealtis excedensq; minori excessu quàm sit spatium* K; *& erit figura circumscripta adhuc minor quàm tertia pars parallelogrammi* ae. *Corol. Lemmat. 15.*

Concipiatur iterum circa rectam ad *circulus pro basi coni, qui verticẽ habeat* c; *itemq; pro basi cylindri* aced *eiusdẽ altitudinis cum ipso cono* acd.

Intelligatur insuper circa conum descripta figura solida constans ex cylindris æquealtis aq, gi *&c.*



Iam parallelogrammum af *ac parallelogrammum* aq *(ob æqualitatem) est vt cylindrus* adfg *ad cylindrum* adqr. *Amplius. Parallelogrammum*

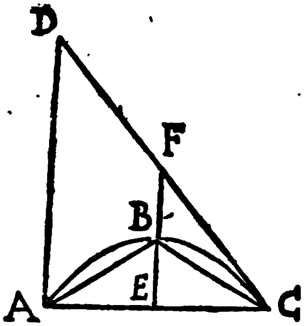
mum gh *ad parallelogrammum* li *est vt* gf, *siue* ad *ad* lq; *nempe vt quadratum* dc *ad quadratum* cq, *siue vt quadratum* da, *vel* fg, *ad quadratum* gq; *nempe vt cylindrus* gh *ad cylindrum* gi. *&c. & hoc modo semper. Suntq; omnes singillatim primæ magnitudines æquales parallelogrammo* af, *& ideò inter se: item omnes tertiæ æquales cylindro* af, *& ob id inter se; ergo erunt omnes primæ simul, hoc est parallelogrammum* ae, *ad omnes secundas simul, hoc est ad figuram trilineo circumscriptã, vt omnes tertiæ simul, nempe cylindrus* ae, *ad omnes quartas simul, nempe ad cylindros conum* acd *circumscribentes. Conuertendo igitur, erit figura circumscripta trilineo, ad parallelogrammum* ae, *vt omnes cylindri circumscribentes conũ ad cylindrum* ac. *Sed figura trilineo circumscripta minor est quàm tertia pars parallogrammi* ae; *ergo etiam omnes cylindri circũscribentes conum minores erunt quàm tertia pars cylindri* ae; *Nempe minores cono* acd. *Totum sua parte: quod esse non potest. Triangulum ergo* adc *ipsius parabolæ omninò triplum erit. Quod propositum fuerat.* *1. senti. ob parabolam. ob similitud. triãgul.*

Propositio IX.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Esto parabola ABC, cuius diameter EB, triangulum inscriptum sit ABC, Dico parabolam trianguli ABC esse sesquitertiam;

Ducatur enim tangens CD, & sit recta AD diametro æquidistans: Erit ergò per præcedens lemma, triangulum ACD parabolæ triplũ; & propterea erit parabola partes quatuor earum, quarum triangulum ADC est duodecim, nempe qualiũ

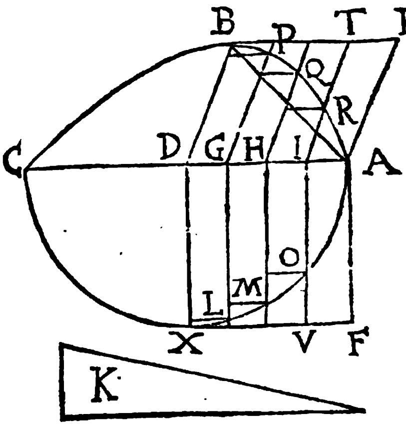


trian-

triangulum A B C est tres. (triangulum enim A B C æquale est triangulo E F C, cum vtrumq; duplum sit trianguli E B C, ergo triangulum A B C quarta pars erit totius A D C.) Constat ergo parabolam ad inscriptum sibi triangulum esse vt 4. ad 3. Nempe sesquitertiam. Quod &c.

Propositio X.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem sibi basim, eandemq; altitudinem habentis.



Esto parabola A B C cuius diameter B D. Dico parabolam A B C inscripti sibi trianguli esse sesquitertiam.

Compleatur parallelogrammum A D B E, & nisi parabola sesquitertia sit trianguli sibi inscripti, neque (sumptis dimidijs) semiparabola A B D sesquitertia erit trianguli A B D; neq; eadem semiparabola A B D erit 2. tert. parallelogrammi E D, sed vel plus, vel minùs quàm 2. tert. eiusdem.

Esto primùm si fieri potest semiparabola A B D magis quã 2. tert. parallelogrammi B D; & ponatur excessus æqualis spatio K. Ipsiq; semiparabolæ figura inscribatur constans ex parallelogrammis æquealtis (more apud Geometras vsitato, prout factum est Lemmate XV.) ita vt differentia inter figuram inscriptam, & ipsam semiparabolam minor sit spatio K. Tunc enim inscripta figura adhuc maior erit quàm 2. ter. parallelogrã mi A D B E.

Duca-

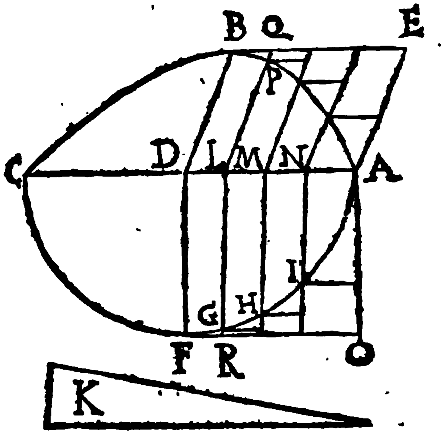
Ducatur circa diametrum A C ſemicirculus A X C, completoq; rectangulo, ſiue quadrato A F X D. ducantur G L, H M, I O perpendiculares ad A C, & compleantur rectangula D L, G M, H O; Tum intelligatur figura A F X D circumuerti circa axem A D; ita vt quadrans A D X hemiſphærium deſcribat, quadratum verò A F X D, cylindrum; & rectangula in quadrante inſcripta totidem cylindros faciant in ipſo hemiſphærio compræhenſos.

Iam parallelogrammum B G ad P D, eſt vt B D ad G P, ſiue vt rectangulum C D A ad rectangulũ C G A; ſiue vt quadratum X D ad quadratũ L G; ſiue vt cylindrus X G ad L D. Et hoc modo ſemper. Suntque omnes primæ magnitudines æquales parallelogrammo B G, & omnes tertiæ æquales cylindro X G. Ergo erunt omnes primæ ſimul, hoc eſt parallelogrammum T D, ad omnes ſecundas ſimul, nempe ad figuram inſcriptam in ſemiparabola, vt ſunt omnes tertię ſimul, nempe cylindrus V D ad omnes quartas ſimul, hoc eſt ad omnes cylindros in hemiſphærio inſcriptos. Parallelogrammum verò T D ad E D eſt vt cylindrus V D ad F D, ergo ex æquo, erit parallelogrammum E D ad figuram in ſemiparabola inſcriptam vt cylindrus F D ad omnes cylindros in ipſo hemiſphærio cõpræhenſos. Sed parallelogrammum E D minus eſt quam ſeſquialterum figuræ intra ſemiparabolam inſcriptæ; Ergò cylindrus F D minor erit quàm ſeſquialter omnium cylindrorum in hemiſphærio deſcriptorum. Quod eſt abſurdum. Scimus enim dictum cylindrum hemiſphærij eſſe ſeſquialterum. Lem. 18.

Eſto deinde (ſi fieri poteſt) ſemiparabola minor quam 2. tert. ipſius parallelogrammi E D. Ponaturq; defectus æqualis ſpatio K.

Tum ipſi ſemiparabolæ figura quædam circumſcribatur, conſtans ex parallelogrammis æquealtis (more ſolito, vt factum eſt in Lemmate X V. eiuſque Corollario) ita vt differentia inter circumſcriptam figuram ipſamq; ſemiparabolam minor ſit ſpatio K. Tunc enim manifeſtum eſt, quòd figura circumſcripta

adhuc



adhuc minor erit quam 2. ter. parallelogrammi ED.

Fiat circa diametrum A C semicirculus, vt in descriptione pręcedentis constructionis, completoque quadrato A O F D, perficiantur reliqua rectangula F L, G M, H N, I A. circa quadrantem descripta. Tum reuoluatur figura AF circa axem A D, ita vt solida generentur iam dicta: nempe hemisphærium ex quadrante, cylindrus ex quadrato A F; totidemque cylindri quot rectangula erunt ipsi quadranti circumscripta.

Iam parallelogrammum B L ad se ipsum est vt cylindrus factus ex F L ad se ipsum. Amplius. Parallelogrammum Q M ad P M; est vt Q L ad L P; siue B D ad L P, siue vt rectang. C D A ad C L A, siue vt quadratum F D ad L G, siue vt quadratum R L ad L G; nempe vt cylindrus factus ex R M ad cylindrum ex G M: & hoc modo semper. Suntq; omnes primæ magnitudines æquales parallelogrammo B L, omnesq; tertiæ
Lem. 28. ęquales cylindro facto ex F L. Ergo erunt omnes primæ simul nempe parallelogrammum A B ad omnes simul secundas, nẽpe ad figuram semiparabolæ circumscriptam, vt sunt omnes tertiæ simul, nempe cylindrus ex O D factus, ad omnes quartas, nempe ad cylindros hemisphærio circumscriptos. Sed parallelogrammum E D magis est quàm sesquialterum figurę circumscriptę ad semiparabolam, ergo cylindrus ex OD magis quàm sesquialter erit ad omnes cylindros hemisphærio circumscriptos. Quod est absurdum: Scimus enim cylindrum hemisphærio circumscriptum ipsius hemisphærij esse sesquialterum.

Patet itaq; parallelogr. ED sesquialterũ esse ad semiparabolam A B D; & ideo semiparab. sesquitertia trianguli A B D,

QVA-

QVADRATVRA PARABOLAE

per nouam indiuiſibilium Geometriam pluribus modis abſoluta.

HACTENVS de dimenſione parabolæ more antiquorum dictum ſit; Reliquum eſt ut eandem parabolæ menſuram noua quadam, ſed mirabili ratione aggrediamur; ope ſcilicet Geometriæ Indiuiſibilium, & hoc diuerſis modis: Suppoſitis enim præcipuis Theorematib. antiquorũ tam Euclidis, quàm Archimedis, licet de rebus inter ſe diuerſiſſimis ſint, mirũ eſt ex vnoquoq; eorum quadraturam parabolæ facili negotio elici poſſe; & vice verſa. quaſi ea ſit commune quoddam vinculum veritatis. Poſito enim quòd cylindrus inſcripti ſibi coni triplus ſit, hinc ſequitur parabolam inſcripti ſibi trianguli eſſe ſeſquitertiã: Si verò manis præmittere cylindrum inſcriptae ſibi ſphae-

æra esse sesquialterum, continuò parabolæ quadratura infertur. Eadem concluditur supposita demonstratione, quæ probat centrum grauitatis coni positum esse in axe, ita vt pars quæ ad verticem est, reliquæ sit tripla. Parabola non minus quadratur etiam supponendo spatium à linea spirali in prima reuolutione descripta, & à recta quæ initium est reuolutionis, comprehensum, subtriplum esse primi circuli. Contrà verò; supposità parabolæ quadratura, prędicta omnia Theoremata facilè demonstrari possunt. Quod autem hęc Indiuisibilium Geometria nouum penitus inuentum sit, equidem non ausim affirmare. Crediderim potius veteres Geometras hac methodo vsos in inuentione Theorematum difficillimorum, quamquã in demonstrationibus aliam viam magis probauerint, siue ad occultandum artis arcanum, siue ne vlla inuidis detractoribus proferretur occasio contradicendi. Quicquid est, certum est hanc Geometriam mirum esse pro inuentione compendium, & innumera quasi imperscrutabilia Theoremata, breuibus, directis, affirmatiuisq; demonstrationibus confirmare; quod per doctrinam antiquorum fieri minimè potest. Hac enim est in Mathematicis spinetis via verè Regia, quàm primus omnium aperuit, & ad publicum bonum complanauit mirabilium inuentorum machinator Caualerius.

Propositio XI.

PArabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

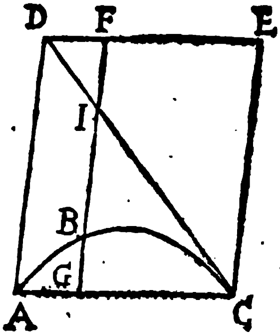
Esto parabola A B C, cuius tangens C D, & diametro æquidistans sit A D. Perficiatur parallelogrammum A E; & circa diametrum A D intelligatur circulus, qui sit basis coni cuiusdã verticem habentis in puncto C, & item sit basis cylindri alicuius A C E D eiusdem altitudinis cum dicto cono.

Ducantur iam quælibet recta F G parallela ad A D, & per ipsam intelligatur transire planum parallelum circulo A D.

Erit

Erit ergò F G ad I B vt recta D A ad I B hoc est vt quadratum D C ad quadratum C I, siue vt quadratum D A ad I G, hoc est vt circulus D A ad circulum I G nempe vt circulus F G ad eundem I G. Et hoc semper; suntque omnes primæ magnitudines æquales rectæ D A. & ideò inter se; omnes etiam tertiæ æquales circulo D A, & ob id inter se; ergo per Lemma 18, erunt omnes primæ simul, nempe parallelogrammum A E, ad omnes secundas simul, nempe ad trilineum A B C D, vt sunt omnes tertiæ simul, nempe cylindrus A E, ad omnes quartas simul hoc est ad conum A C D. Est igitur parallelogrammum A E triplum trilinei A B C D. Sumptoque dimidio, erit triangulum A C D sesquialterum trilinei A B C D; & per conuersionem rationis, erit triangulum A C D triplum ipsius parabolæ. Propterea, ex demonstratione propositionis 9. erit parabola inscripti sibi trianguli sesquitertia. Quod erat &c.

ob parabolam. ob simillitud. triang.



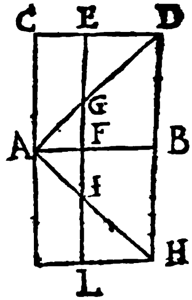
Alia quoque ratione parabolam quadrabimus, demonstratis priùs, quà fieri poterit breuitate, indiuisibilium principijs. Declinabimus autē ab immenso Caualerianę Geometriæ oceano, minori audacia radentes terram. Qui volet, hæc omnia videre poterit (in fonte dicam, an in pelago?) circa medium secundi libri Geometriæ Indiuisibilium Caualerij.

Lemma XX.

Quadrata omnium partium cuiuscunq; rectæ lineæ subtripla sunt totidem quadratorum totius.

Esto qualibet recta linea a b. *Dico omnia simul quadrata omnium partium rectæ* a b *esse subtripla totidem quadratorum eiusdem rectæ lineæ* a b.

Fiat enim quadratum acdb, *ductâq; diametro* ad. *conuertatur figura circa axẽ* ab *donec in eum locum redeat vnde cepit moueri. Manifestum est, quòd à quadrato cylindrus* ch *describetur, à triangulo verò* abd *conus* dah, *qui verticem habebit in* a. *Ducatur iam qualibet* ef *parallela ipsi* ca; *eritq;* af, *siue* fg (*sunt enim æquales*) *vna ex infinitis partibus totius* ab.



Iam; quadratum totius ab, *ad quadratum partis* af, *est, ob æqualitatem, vt quadratum* ef *ad* fg, *nempe vt circulus diametro* el *factus, ad circulum diametro* gi. *Et sic erit semper. Suntq; primæ magnitudines singulæ æquales quadrato* ab, *& tertiæ semper æquales circulo* dh. *Ergo omnes primæ simul, hoc est tot quadrata lineæ* ab. *quot ipsa habet partes, ad omnia quadrata partium, erunt vt omnes tertiæ simul, hoc est vt cylindrus* ch *ad omnes quartas simul, nempe ad conum* dah. *Sunt ergò tot quadrata alicuis lineæ quot ipsa habet partes, ad omnia quadrata partium ipsius vt cylindrus* ch *ad conum* dah, *nempe tripla. Et cõuertendo constat propositum quod demonstrandum fuerat &c.*

2. Duodecimi.

Lem. 18.

Lemma XXI.

Omnia rectangula, quæ continentur sub aliqua recta linea cum singulis suis partibus, & reliquis partibus, subsesquialtera sunt totidem quadratorum eiusdem rectæ lineæ.

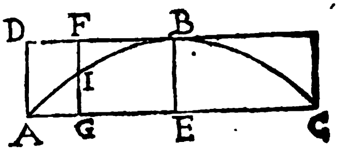
Assumpta præcedentis Lemmatis figura, acceptum sit in recta ab *quodlibet punctum* f. *Rectangulum sub* baf *tanquàm vna recta linea, & sub* fb. *contentum, erit vnum ex omnibus prædictis rectangulis (vnum enim latus componitur ex tota* ab, *cum parte* af; *alterum verò est* fb, *nimirum reliqua pars.*)

Rectangulum autem prædictum, sub baf *tanquam vna recta, & sub* fb *contentum, idem est, ob æqualitatem laterum, ac rectangulum* eil. *Et hoc semper verum erit hoc modo, vbicunq; sit pun-*

sit punctum f. *Sed omnia rectangula sub rectis interceptis in trapezio* cahd *(qualium vna est* ei*) & sub reliquis, qualium vna est* il; *vna cum omnibus quadratis intermediarum sectionũ (qualium vna est* fi*) æquantur (propter* v *secundi elementorũ) omnibus quadratis dimidiarum, qualium vna est* fl. *Omnia verò quadrata intermediarum sectionum (qualium vna est* fi*) ad omnia quadrata dimidiarum (qualium vna est* fl,*) sunt vt vnũ ad 3. Si ergo demantur omnia quadrata intermediarum, remanebunt omnia rectangula, quorum vnum est* eil, *siue omnia rectangula contenta sub* ab *cum singulis suis partibus, & reliquis partibus, subsesquialtera omnium quadratorum, quæ fiunt à dimidijs, siue totidem quadratorum totius* ab. *Quod fuerat ostendendum &c.* *præced. Lem.*

Propositio XII.

PArabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eãdem altitudinem habentis.



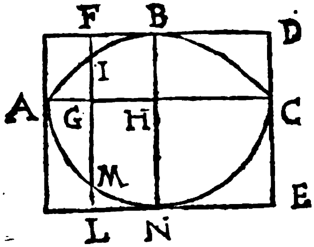
Esto parabola ABC cuius diameter BE, & circa parabolã sit parallelogrammum DC. Ducatur quælibet FG diametro parallela; eritq; FG. ad GI, vt BE ad GI, siue vt rectangulum CEA, ad CGA, hoc est vt quadratum CE ad rectangulũ CGA. Et hoc modo semper; Suntq; primæ magnitudines semper æquales rectæ BE; tertiæ autem semper æquales quadrato CE. Ergo omnes primæ simul, hoc est parallelogrammum AB, ad omnes secundas simul, nempe ad semiparabolã AIBE; erunt vt omnes simul tertiæ, videlicet tot quadrata lineæ CE quot ipsa habet partes, ad omnes quartas simul, nempe ad omnia rectangula sub CE cum singulis suis partibus, & sub reliquis partibus. Ergo (ex præcedenti lemmate) parallelogrammum AB erit ipsius semiparabolę sesquialterum: Totumq; *Lem.18.*

tumque parallelogrammum D C erit totius parabolæ sesquialterum, nempe vt 6. ad 4. Propterea parabola ad inscriptum sibi triangulum (quod quidem parallelogrammi D C subduplum est) erit vt 4. ad 3. Nempe sesquitertia. Quod erat &c.

Possumus sine molestia illorum lemmatum, parabolam quadrare eodem argumento, diuersis tamen principijs, nempe per suppositionem proportionis, quam cylindrus habet ad sphęram sibi inscriptam; quæ quidem proportio sesquialtera est, vt ostenditur ex Archimede; libro Primo de Sphęra & Cylindro.

Propositio XIII.

PArabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eãdem altitudinem habentis.



Esto parabola A B C, circa quam sit parallelogrammũ AD; & circa diametrum A C fiat semicirculus, circa quem sit rectangulum A E. Tum manente axe A C, intelligatur circumuerti ipsum semicirculum, ita vt ex ipsius reuolutione Sphæra circumscribatur: ex cõuersione verò rectang. A E cylindrus nascatur.

Sumpto iam quolibet puncto G. ducatur recta G F parallela diametro H B; & per idem punctum G agatur planum G L erectum ad axem A C.

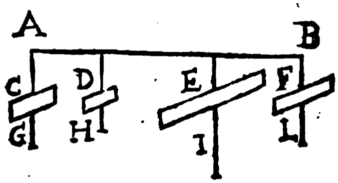
Erit recta F G ad G I, vt B H ad G I (ob æqualitatem) hoc est vt rectangulum C H A, ad rectangulum C G A, siue vt quadratum H N ad quadratum G M (ob circulum) siue vt quadratum G L ad quadratum G M; nempe vt circulus ex semidiametro G L in cylindro, ad circulum ex semidiametro G M in sphæra. Et hoc semper, vbicunque sumatur punctum G. Sunt autem æquales inter se tàm omnes primæ, quàm omnes tertiæ

magni

magnitudines. Ergò omnes primæ, nempe parallelogrammũ AD ad omnes secundas, nempe ad parabolam ABC, erunt vt omnes tertiæ, hoc est cylindrus, ad omnes simul quartas, videlicet ad sphæram. Sed cylindrus ad sphæram est sesquialter; ergò parallelogrammum etiam AD parabolæ sesquialterum erit: & ipsa parabola inscripti sibi trianguli sesquitertia; vt in præcedenti conclusum est. Quod &c. *Lem.18.*

Lemma XXII.

Si magnitudines quotcunque ad libram appensæ fuerint ex quibuscunq; punctis: totidemq; magnitudines alterius ordinis ex ijsdem punctis pendeant, pariter cum prædictis magnitudinibus proportionales. Erit vnum idemq; libræ punctum centrum æquilibrij vtriusque ordinis magnitudinum.



Sint ad libram ab *magnitudines primi ordinis quotcunque* c, d, e, f, *ex quibuscunque punctis appensę. Totidemque magnitudines* g, h, i, l, *secundi ordinis pendeant ex ijsdem punctis; & sint proportionales: nempe: Vt* c *ad* d, *ita sit* g *ad* h. *Iterum ut* c *ad* e, *ita sit* g *ad* i. *&c. Dico idem punctum libræ esse centrum commune æquilibrij utriusque ordinis magnitudinum suspensarum.*

Cum enim sit ut c *ad* d, *ita* g *ad* h, *ex eodem puncto ęquiponderabunt, tam duę magnitudines* c *&* d, *quàm duę* g *&* h.

Ampliùs. Cum sit ut c *ad* d *ita* g *ad* h, *erit convertendo & componendo* dc *ad* c, *ut* hg *ad* g. c *autem ad* e *est ut* g *ad* i; *ergò ex ęquo* cd *simul ad* e, *erit ut* gh *simul ad* i. *Quare magnitudines* cd, *&* e, *ex eodem puncto ęquiponderabunt, ex quo ęquiponderant duę* gh, *&* i.

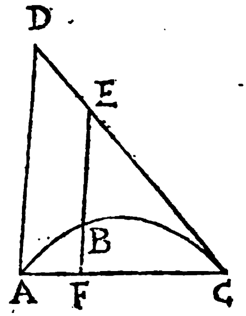
Vlteriùs. Cum autem per iam dicta, sit ut cd *ad* e, *ita* gh *ad* i, *erit componendo* cde *ad* e, *ut* ghi *ad* i. *Sed* e *ad* c *est ut* i *ad* g; *&* c *ad* f, *ut* g *ad* l. *Quare ex ęquo* cde *simul ad* f,

erit

erit ut ghi *simul ad* l. *Ergo duę magnitudines* cde, *&* f. *habebunt idem punctum æquilibrij, quod habent duę magnitudines* ghi *&* l. *Et sic etiam si sint plures magnitudines, usque in infinitum, quod erat propositum &c.*

Lemma XXIII.

Si parabola tangentem habuerit ad basim, ex altera verò parte lineam diametro parallelam. Trilineum compræhensum sub curuà parabolicà, sub tangente, & sub parallela prædictà, æquiponderabit ex puncto tangentis vbi ea sic diuiditur, vt pars ad contactum terminata reliquæ sit tripla.



Esto parabola abc, *cuius tangens ad basim sit* cd; *ęquidistans diametro sit* ad *Dico trilineum mixtum* abcd *ęquiponderare ex puncto tangentis* cd, *ubi ea sic diuiditur ut pars uersus contactum* c, *reliquæ sit tripla.*

Concipiatur figura ita ut da *ad horizontem sit perpendicularis; & circa diametrũ* da *intelligatur circulus, qui sit basis coni uerticem habentis in puncto* c.

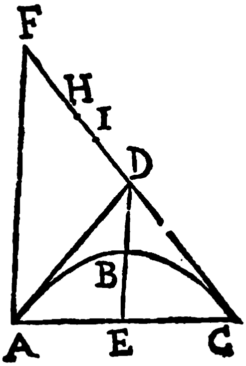
Sumpto iam quolibet puncto e *ducatur* ef *ęquidistans ipsi* da; *& per ipsam transeat planum parallelum basi coni.*

ob parabolam. *Erit ergò recta* da *ad* eb, *ut quadratum* dc *ad* ce; *siue ut quadratum* da *ad* ef, *hoc est ut circulus* da *ad* ef. *Et hoc semper, ubicunq; sit punctum* e. *Ergò cum ad libram* dc *pendeant ab ijsdem punctis magnitudines duorum ordinum proportionales ut in praecedenti lemmate imperatum est, habebunt omnes magnitudines simul primi ordinis (hoc est omnes lineae trilinei* abcd, *siue ipsum trilineum) idem punctum aequilibrij, quod habent omnes magnitudines simul secundi ordinis (hoc est omnes circuli coni* acd, *siue idem conus.) Conus autem aequiponderat ex puncto quod secat* cd *ita ut pars ad* c *reliquae sit tripla*

tripla, quandoquidem recta da *est ad horizontem perpendicularis; ergo etiam trilineum* abcd *æquiponderabit ex eodem puncto. Quod erat propositum &c.*

Propositio XIV.

PArabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eãdem altitudinem habentis.



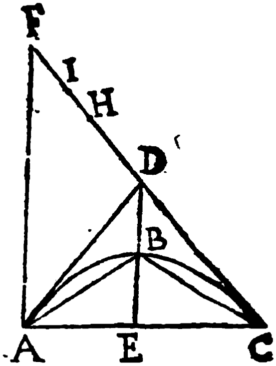
Esto parabola ABC, cuius diameter DE intelligatur ad horizontem perpendicularis; sintque CF, & AD tangentes; ipsa vero AF diametro æquidistans.

Sumatur deinde FH quarta pars totius FC; & ex puncto H (per Lemma præcedens) æquiponderabit trilineum mixtum ABCF. Accipiatur etiam FI tertia pars totius FC, & ex I æquiponderabit totum triangulum AFC. Parabola vero, cum habeat centrum in diametro, æquiponderat ex D. Ergo trilineum ABCF ad ipsam parabolam erit reciprocè vt DI ad IH, nempe duplum (qualium enim partium FC est 12. talium ipsa FD est 6. FI vero 4. & FH 3. & ideò DI 2, & IH vna.) Propterea componendo erit totum triangulum AFC, parabolæ triplum. Reliquum quadraturę absoluitur vt in Propositione IX. factum est. Quod erat &c.

Aliter.

Positis ijsdem, vt suprà, sumatur fh, *quarta pars totius* fc, *æquiponderabitq; ex puncto* h *trilineum mixtum* abcf. *Sumatur etiam* fi, *tertià pars ipsius* fd; *tunc enim æquiponderabit ex puncto* i *triangulum* fda. *Trilineum verò mixtum* abcd, *æquiponderat ex puncto* d, *(nam triangulum totum* adc *æquiponderat ex puncto* d; *parabola etiam ablata ex eodem pun-*

eo d *æquiponderat, ergò etiam reliquũ trilineum* a b c d *ex puncto* d *æquiponderare necesse est.*) *Erit itaque triangulum* f d a *ad trilineum* a b c d *ut reciprocè* d h *ad* h i *nempe ut 3. ad unum; & per conuersionem rationis triangulum* a d c *ad parabolam erit ut 3. ad 2. siue ut 6 ad 4. Quarè parabola ad triangulum* a b c *erit ut 4. ad 3. Nẽpe sesquitertia. Quod erat propositum demonstrare. &c.*

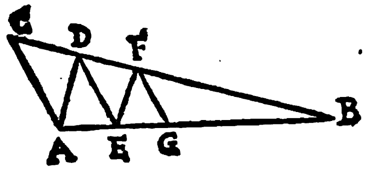


Alijs etiam principijs parabolæ quadraturam aggrediamur, præmissa sequenti progressionum Geometricarum speculatione.

Lemma XXIV.

Si duæ rectæ lineæ inuicem concurrant, & inter ipsas descriptum sit quoddam flexilineum constans ex lineis alternatim parallelis; erunt omnes lineæ, quæ inter se parallelæ sunt, in continua proportione.

Concurrant inuicem duæ rectæ lineę, a b, c b *in puncto* b; *& inter ipsas descriptum sit flexilineum* c a d e f g. *&c. itaut* c a, d e, f g *&c. sint inter se parallelę; item* a d, e f, *& reliquae uicisim sumptae inter se parallelae sint. Dico* a c, e d, g f, *esse in continua proportione.*



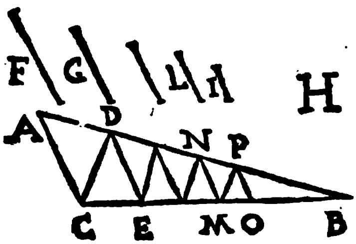
2. & 4. Sexti. *Est enim, ob parallelas, ut* a c *ad* e d, *ita* a b *ad* b e, *siue* d b *ad* b f, *hoc est* e d *ad* g f. *Constat ergò quod propositum fuerat.*

Lemma XXV.

Positis duabus rectis lineis inuicem concurrentibus, ut suprà;

Si inter

si inter ipsas fuerint duæ parallelæ AC, DE, & iunctâ CD. continuatum intelligatur flexilineum ACDE in infinitum vsque ad punctum concursus B. Dico in huiusmodi flexilineo esse omnes, & singulos ad vnguem terminos qui sunt in progressione proportionis AC ad DE. in infinitum continuatæ.



Ponatur f *æqualis ipsi* ac, *&* g *æqualis ipsi* de: *Et concipiatur proportio* f *ad* g *continuata in infinitis suis terminis* f H.

Iam, si possibile est, aliquem, siue aliquos terminos esse in progressione f H, *qui nō reperiantur in flexilineo. Esto: & sit maximus terminus* i, *illorum, qui cùm sint in progressione* f H, *non sunt in flexilineo. Erit ergo terminus* l *ipsi præcedens, in flexilineo. Sit ille* mn. *Et quoniam* l *ad* i *est vt* f *ad* g, *siue vt* ac *ad* de, *siue vt* nm *ad* po *proximè sequentem, suntq; æquales* l, *&* nm; *erunt æquales etiam* i *&* po. *Terminus ergo* i *qui ponebatur non esse in flexilineo, in eodem repertus est.*

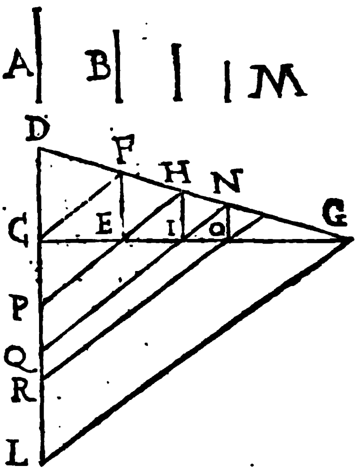
Eodem penitus modo demonstrabimus nullum terminum esse in flexilineo, qui non sit etiam in progressione fH. *&c. Concludemus igitur esse in flexilineo omnes præcisè terminos proportionis* ac *ad* de *in infinitum continuatæ, cum demonstratum sit nullum in flexilineo terminum desiderari qui sit in progressione* f H; *neq; vllum superabundare, qui non reperiatur etiam in progressione* fH. *&c.*

Lemma XXVI.

Suppositis infinitis rectis lineis in continua proportione maioris inæqualitatis, rectam lineam, quæ prædictis omnibus sit æqualis reperire.

Ponantur prima dua lineæ datæ progressionis esse a, b: *quib. ponantur æquales;* cd *maiori* a, *&* ef *minori* b *Sintq;* cd, ef *parallela; & iungantur* d f, c e, *quę necessariò concurrent. Concurrant itaq; in puncto* g, *& ductà* c f, *ipsi aequidistans sit* g l.

Dico rectam d l *aequalem esse omnib. infinitis terminis progressionis* a b m *simul sumptis.*



Concipiatur enim continuatū flexilineum d c f e *&c. in infinitum, vsq; ad punctum* g, *eruntq; in ipso omnes lineę, siue termini datę progressionis* a b m.

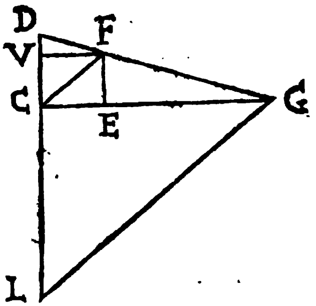
Producantur iam h e, n i. *& reliquae ipsis parallelę vsq; ad* d L. *Eritq;* e f. *ęqualis ipsi* c p, *&* h i *aequalis ipsi* p q; *&* n o *ipsi* q r; *& sic de singulis.* 34 primi. *Qualibet enim linea qua sit in flexilineo, habebit suam portiunculam respondentem in rectà* d l, *sibi ęqualem; donec flexilineum peruenerit ad vltimum punctum* g: *Tunc autem neque de flexilineo, neque de linea* d l *quidquam supererit; sed tam ipsum flexilineum, quàm etiam recta* d l *penitus absumpta erit: Est enim ipsa* g l, *qua ab vltimo flexilinei puncto* g *ducitur, vltima omnium parallelarum, qua producuntur vsque ad* d l. *Ergò omnes simul lineę flexilinei, quarum prima est* c d, *alternatim sumpta (hoc est omnes lineae progressionis* a b m*) aequales sunt omnib. portiunculis rectae* d l *simul sumptis: hoc est ipsi* d l. *Quod erat ostendendum &c.*

Lemma XXVII.

Suppositis infinitis magnitudinibus in continua proportione Geometrica maioris inęqualitatis, erit prima magnitudo media proportionalis inter primam differentiam & inter aggregatum omnium.

Assumptà enim pracedenti constructione, ducatur f u *aequidistans*

distans ipsi gc: *& erit* du *prima differentia. Sed* du *ad primam magnitudinem* dc *est ut* fd *ad* dg, *hoc est ut* dc *ad* dl *aggregatum omnium. Quod erat demonstrandum &c.* 4. Sexti.



SCHOLIVM.

Hoc esse uerum etiam in numeris, & cuiuscunq. generis magnitudinibus non dubitabimus affirmare. Afferremus etiam uniuersaliorem demonstrationem, praecipuè cum admodum breuis sit. Huius ueritatis conclusio cum à nobis obiter celeberrimo Cavalerio collata fuisset, ipse etiã idem Theorema sequenti demonstratione, quę à nobis iam in prima inuentione adhibita fuerat, confirmauit.

Pręmittitur hoc: Quòd si fuerint quotcunq. magnitudines siue finitę numero, siue infinitę, quarum antecedens semper sequente maior sit, erit prima omnium magnitudo ęqualis omnib. differentijs simul cum ipsa minima magnitudine sumptis.

Notum est hoc apud Geometras, demonstraturq. ut à nobis factum est in lemmate 15. Vbi ostendimus parallelogrammum ae *ęquale esse omnibus differentis inter sequentia parallelogramma, & minimo parallelogrammo* oc.

Supponantur iàm infinitae numero magnitudines in continua proportione Geometrica maioris inaequalitatis; manifestum est quòd minima omnium magnitudo vel non erit, uel punctum erit. Ergo in hoc casu erit prima magnitudo aequalis omnibus tantum differentijs.

Cum autem ponantur magnitudines in continua proportione Geometrica, erunt etiam differentia in eadem ratione proportionales; & ideo (facta conuersione) erit vt prima differentia ad primam magnitudinem, ita secunda differentia ad secundam magnitudinem, & sic semper. Propterea vt vna ad vnam, ita collectim erunt omnes ad omnes. Nempe vt prima differentia ad

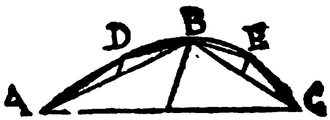
pri-

primam magnitudinem, ita erunt omnes simul differentiæ (hoc est ipsa prima magnitudo) ad omnes magnitudines simul. Constat ergò primam magnitudinem mediam proportionalem esse inter primam differentiam, & aggregatum omnium,

Propositio XV.

PArabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Esto parabola ABC in quà inscriptum sit triangulum ABC. Dico parabolam trianguli ABC esse sesquitertiam.



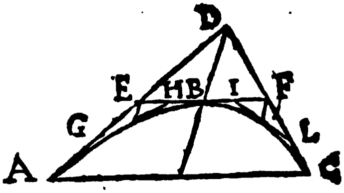
Inscribantur enim etiam in reliquis portionibus ADB, BEC, duo triangula ADB, BEC. Eritq; triangulum ABC quadruplum duorum simul triangulorum ADB, BEC. Lem.5. Concipiantur etiam in reliquis quatuor portiunculis AD, DB, BE, EC. inscripta quatuor triangula; eruntq; duo simul triangula ADB, BEC quadrupla Lem.5. prædictorum simul quatuor subsequentium triangulorum; & hoc modo semper. Parabola igitur nihil aliud est quàm aggregatum quoddam infinitarum numero magnitudinum in proportione quadrupla, quarum prima est triangulum ABC, secunda verò constat ex duobus triangulis ADB, BEC. Propterea prima magnitudo ABC media proportionalis erit inter primã differentiam, & aggregatum omnium, nempe parabolam.

Ponatur itaq; triangulum ABC esse vt 4. & ideo duo simul triangula ADB, BEC erunt vt vnum: eritq; prima differentia (nimirum inter 4. & vnum) vt 3. Ergo aggregatum omnium infinitarum magnitudinum, nempe ipsa parabola, erit (per lemma 27.) ad primam magnitudinem, hoc est ad inscriptũ triangulum ABC, vt prima ipsa magnitudo ad primam differentiam; videlicet vt 4. ad 3. nempe sesquitertia. Quod erat propositum demonstrare &c.

Aliter.

Aliter.

Esto parabola a b c. *cuius diameter* d b, *tangentes ad basim* a d, c d, *per verticem verò* e f. *Inscribantur autem in reliquis trilineis* a b e, b c f, *duo triangula* g e h, i f l, *(vt imperatum fuit pro constructione lemmatum Tertij, & Quarti.) Item in reliquis quatuor trilineis mixtis, quatuor triangula concipiantur; & hoc modo semper. Eritq; vniuersum trilineum* a b c d *nihil aliud quàm aggregatum quoddã infinitarum multitudine magnitudinum in proportione quadrupla, quarum prima est triangulum* e d f, *secunda verò constat ex duobus triangulis* g e h, i f l; *tertia verò ex quatuor sequentibus &c. Propterea aggregatum omnium, nempe trilineum mixtum* a b c d, *ad primam magnitudinem, nempe ad triangulum* e d f, *erit vt ipsa prima magnitudo ad primam differentiam, videlicet vt 4. ad 3.* Coroi. 2. Lem. 3. Lem. 27.



Cum itaque trilineum a b c d *ad triangulum* e d f, *sit vt 4. ad tria, erit idem trilineum ad triangulum* a d c *vt 4. ad 12. & ideo parabola ad triangulum* a d c *erit vt 8. ad 12. & ad inscriptum sibi triangulum vt 8. ad 6. Nempe sesquitertia. Quod erat demonstrandum &c.*

Lemma XXVIII.

Si fuerint infinitæ numero rectæ lineę AB, CD, EF. &c. in continua proportione Geometrica maioris inæqualitatis: altera autem ponatur progressio BG, DH, FI &c. ita vt sit quemadmodum AB prima ad BG primam, ità CD secunda ad DH secundam: & ita tertia EF ad tertiam FI & sic semper. Dico vniuersum aggregatum progressionis AB, CD, EF, &c. ad aggregatum progressionis BG, DH, FI, esse vt AB ad BG.

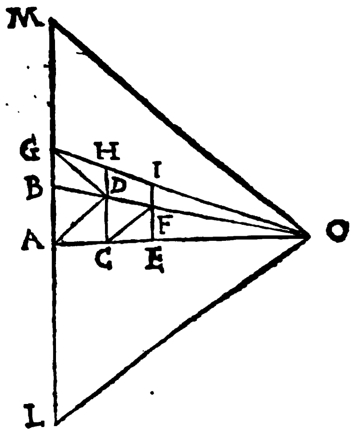
Intel-

Intelligantur omnes termini duarum progressionum esse in flexilineis &c. iunctisq; ad, gd, *ducatur* ol *parallela ipsi* ad, *&* om *parallela ipsi* dg, *Eritq;* bl *æqualis omnib. infinitis terminis* ab, cd, ef, *&c. ipsa vero* om *æqualis omnibus infinitis terminis reliquæ progressionis* bg, dh, fi.

iuxta Lemma 25.

Lem. 26.

Lem. 26.



Iam: vt lb *ad* ba, *ita est* ob *ad* bd, *hoc est* mb *ad* bg. *Permutando igitur, Aggregatum* lb, *ad aggregatum* bm, *est vt* ab *ad* bg; *nempe vt vna magnitudo ad vnam. Quod erat &c.*

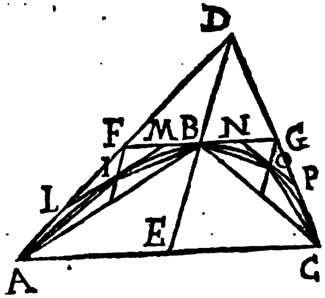
4. sexti.

Hoc Theorema poterat supponi tamquam demonstratum in Propositione 12. libri V. Euclidis: vnum enim atq; idem est cum Theoremate dictæ Propositionis: Verùm, quoniam ferè omnes opinantur Euclidem ibi supponere multitudinem magnitudinum finitam, voluimus auxilio flexilineorum vti.

Propositio XVI.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Sit parabola ABC, cuius diameter DE, tangentes ad basim AD, CD: per verticem vero FBG. Ditriangulum inscriptum ABC. Dico parabolam trianguli ABC. esse sesquitertiam.



Cum enim ipsa EB æqualis sit ipsi BD, recta verò AC dupla

ob parabolam.

recta

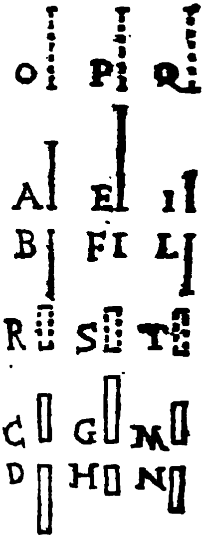
rectæ F G; erit inſcriptum triangulum A B C duplum trianguli F D G ſub tangentibus compræhenſi. Et hoc ſemper verum eſt etiam circa reliquas portiones parabolicas A I B, B O C; (eſt enim A I B parabola, cuius tangentes ad baſim ſunt A F, B F, ideoq; triangulum inſcriptum A I B duplum erit trianguli tangentium L F M. Idemq; verum etiam eſt ex alterà parte: Ergo duo ſimul triangula A I B, B O C, dupla ſunt duorũ ſimul L F M, N G P.) ergò cum ſint duæ progreſſiones vtraq; in proportione continuata magnitudinum infinitarum multitudine, (altera nempe intrà parabolam, cuius primus terminus eſt triangulum A B C, ſecundus verò, duo triangula ſimul A I B, B O C &c. altera verò progreſſio extrà parabolam, cuius nempe primus terminus eſt triangulum F D G; ſecundus autem duo ſimul triangula L F M, N G P. &c.) ſuntq; ſinguli termini progreſſionis, quæ intrà parabolam eſt, dupli ſingulorum terminorum progreſſionis, quæ extrà eſt; Erit ergo aggregatum vniuerſum primę progreſſionis duplum totius aggregati ſecundæ progreſſionis; Nempe ipſa parabola dupla erit trilinei mixti A B C D. Componendo igitur, & per conuerſionem rationis, erit triangulum A D C ipſius parabolę ſeſquialterum, nempe vt 6. ad 4. ideoq; parabola ad triangulum A B C erit vt 4. ad 3. videlicet ſeſquitertia. Quod erat oſtendendum &c. *Lem. 28.*

Parabolę quadratura haberi poteſt ſumptis alijs principijs, ope tamen indiuiſibilium. Supponimus quę Archimedes demonſtrauit in libro de lineis Spiralibus ad Propoſitiones 14. & 25. Præmiſſo Lemmate huiuſmodi.

Lemma XXIX.

Si fuerit vt prima magnitudo ad ſecundam, ita tertia ad quartam, & hoc quotieſcunq; libuerit: fuerintq; omnes primę, item & omnes tertię eodem ordine proportionales: Erunt omnes primæ ſimul ad omnes ſecundas, vt ſunt omnes tertię ſimul ad omnes quartas.

Sit a *prima ad* b *secundam, ut* c *tertia ad* d *quartã; &* e *ad* f, *ut* g *ad* h; *& hoc quotiescunq; libuerit. Sintque omnes primæ* a, e, i, *&c. & omnes tertiæ* c, g, m, *&c. proportionales ex ordine; Nempe ut* a *ad* e *ita sit* c *ad* g. *Amplius: ut* a *ad* i, *ita sit* c *ad* m *&c. et sic semper. Dico omnes primas simul* a, e, i, *etc. ad omnes secundas simul* b, f, l *etc. esse ut sunt omnes tertiæ simul* c, g, m, *etc. ad omnes quartas simul* d, h, n *etc.*



Accipiantur o, p, q; *singulæ æquales primæ primarum, hoc est ipsi* a; *et sint totidem quot sunt omnes primæ* a, e, i; *etc. Item sumantur* r, s, t; *totidem quot sunt, omnes tertiæ; et sint singulæ* r, s, t, *æquales primæ tertiarum nempe ipsi* c.

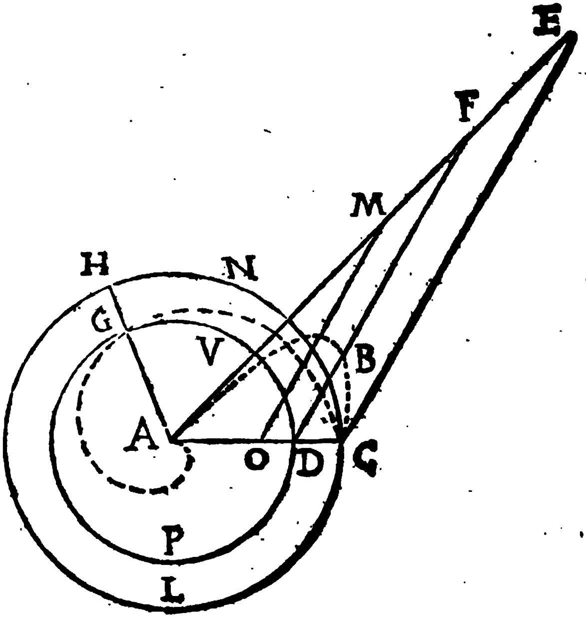
Iam ob æqualitatem erit ut o *ad* a, *ita* r *ad* c. *Amplius: Cum* p *sit æqualis ipsi* a, *et* s *ipsi* c, *erit (propter suppositionem) ut* p *ad* e, *ita* s *ad* g. *et hoc semper. sunt*
Lem. 18. *que omnes* o, p, q *æquales, itemq; omnes* r, s, t, *æquales, ergo erunt omnes simul* o, p, q, *etc. ad omnes* a, e, i, *etc. ut omnes* r, s, t, *simul, ad omnes* c, g, m. *Denique conuertendo, omnes* a, e, i, *ad omnes* o, p, q, *erunt ut omnes* c, g, m, *ad omnes* r, s, t. *Quod monendum.*

Quoniam verò ut o *ad* a, *ita* r *ad* c: *et ut* a *ad* b, *ita* c *ad* d: *erit ex æquo* o *ad* b, *ut* r *ad* d: *Eadem penitus ratione concludemus ex æquo esse ut* p *ad* f, *ita* s *ad* h: *et sic de cæteris.*
Lem. 18. *Erunt ergo omnes simul* o, p, q, *etc. ad omnes* b, f, l, *etc. ut sunt omnes simul* r, s, t, *etc. ad omnes* d, h, n; *etc. Quare ex æquo erunt omnes* a, e, i, *etc. ad omnes* b, f, l, *etc. ut omnes* c, g, m, *etc. ad omnes* d, h, n, *etc. Quod erat ostendendum*

Propo-

Propositio XVII.

PArabola ſeſquitertia eſt trianguli eandem ipſi baſim, & eã dem altitudinem habentis.



Sit parabola A B C, cuius tangens ſit A E; diametro vero æquidiſtans ſit C E; & ducatur quælibet F D, parallela ipſi C E, Eritq; E C ad F B. longitudine, vt E A ad A F, ſiue E C ad F D potentia. Propterea erunt in cõtinua proportione. E C, F D, F B.

Fiant deinde centro A, interuallis A C, A D, duo circuli; & ponatur Elicis initium ex ſemidiametro A C. Sitq; ipſa elix A G C.

ob parabolem.

Erit itaq; D F ad F B, vt C E ad D F; ſiue vt C A, ad A D, hoc eſt vt C A ad A G, ſiue vt periphęria tota C L H C, ad arcum C L H: hoc eſt vt periphęria tota D P G D, ad arcum D P G. Atque hoc erit ſemper, vbicunque ſumatur punctum D. Suntq; omnes primæ, item omnes tertiæ magnitudines, eo modo quo debent proportionales (vt infrà oſtendemus.) Quare omnes primæ ſimul, nempe triangulum A E C, ad omnes ſecundas ſimul nempe ad trilineum mixtum A B C E, erit vt omnes tertiæ ſimul, nempe vt circulus C L H, ad omnes quar

14. ſpiralium.

Lemma praced.

tas simul, hoc est ad reliquum ipsius circuli, dempto helicis spatio CAGC. Circulus autem CLH, dicti spatij, dempto helicis spatio, sesquialter est; Ergò etiam triangulum ACE sesquialterum erit trilinei mixti ABCE. Et per conuersionem rationis, triangulum ACE, triplum erit parabolę ABC. Reliquum quadraturæ absoluetur vt in 9. Propositione factum est.

25. de lineis spiralibus.

Quod autem assumptum fuit, nunc ostendemus; scilicet quòd omnes primę, omnesque tertiæ magnitudines sint proportionales eo modo, vt requiritur in lemmate præcedenti.

Ducatur in prędmissa figura, qualibet mo, *æquidistans ipsi* fd; *& ponamus ipsum* fd *esse primam primarum; ipsam verò peripharia* dpg *primam tertiarum. Erit ergò* df *ad* om, *vt* da *ad* ao, *siue vt peripheria* dpg *ad peripheriam cuius semidiameter est* ao *&c. Et sic semper. Quod oportebat &c.*

Parabolam etiam quadrabimus intentata adhuc via; nimirū quæsito eius centro grauitatis à priori ope indiuisibilium. Supponimus autem lemma, quod Archimedes ostendit in secundo Aequiponderantium. Hoc est parabolarum centra grauitatis, in eadem proportione suas diametros secare.

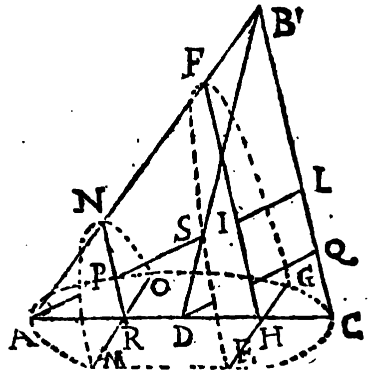
Lemma XXX.

Centrum grauitatis parabolæ diametrum ita diuidit, vt pars ad verticem terminata, reliquæ sit sesquialtera.

Esto conus quilibet abc, *cuius basis* amc, *axis* bd, *triangulum verò per axem sit* abc; *& sectus sit conus plano* efg, *vt iubetur in XI. Propositione lib. primi Conicorum. Eritque sectio quæ vocatur parabola, illiusque diameter erit* fh, *Esto iam centrum grauitatis parabolæ* efg, *quoduis punctum, puta* i. *Ostendendum est rectam* fi *sesquialteram esse ipsius* ih.

Agatur per punctum i *recta* ail; *seceturque conus alio plano* mno, *ipsi* efg *parall: eritq. sectio* mno *parabola, & eius centrum grauitatis erit* p (*est enim ob parallelas, vt* fi *ad* ih,

ita

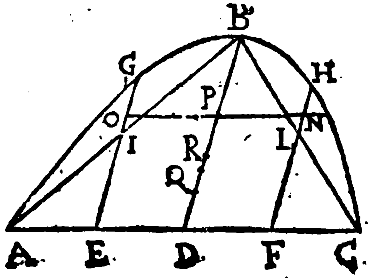


ita np *ad* pr; *sed* i *ponitur cētrum grauitatis parabolę* efg; *ergo per Proposit. 7. lib. secundi æquiponderantium* p *centrum grauitatis erit parabolę* mno.) *Et sic semper, vbicunq. sit planum* mno. *Omnium ergò singillatim parabolarum quę sunt in cono* abc, *centra grauitatis reperiuntur in recta* al: *Quare etiam commune centrum grauitatis omnium earumdem simul prędictarum parabolarum erit in recta* al. *Omnes autem parabolę, atq. ipse conus idem sunt; ergò centrum coni est in recta* al; *quod cum sit etiam in axe* bd: *erit centrum coni in communi concursu* l, *ideòq.* bl *erit ipsius* ld *tripla*.

Ducatur ex centro basis recta dq, *ęquidistans ipsi* al; *erunt que ęquales* cq, ql. *Cum autem ob centrum coni ipsa* bs *tripla sit ipsius* sd, *erit etiam* bl *tripla ipsius* lq: *& ideo* bl *sesquialtera ipsius* lc: *Quare etiam* fi *sesquialtera erit ipsius* ih. *Quod erat propositum &c.* *ob 2. sexti.* *2. sexti.*

Propositio XVIII.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eãdem altitudinem habentis.



Esto parabola ABC, cuius diameter BD: inscriptum verò triangulum ABC. Dico parabolam sesquitertiam esse trianguli ABC.

Secentur bifariam AD, DC in punctis E, & F: ductæq. EG, FH, diametro æquidistantes, iplæ diametri erunt portionũ AGB, BHC. Sint centra grauitatis dictarum portionum O, & N; eruntq; vtraq. GO, HN, sesquialtera reliquæ OI, NL. Iungatur ON, & in ipsa ON erit centrum commune grauitatis duarum portionum: sed est etiam in BD (nàm in BD est tam centrum totius parabolæ, quã etiam trianguli ABC) Quare punctum P. centrum erit portionum AGB, BHC. Ponatur BD partium 60. eritque GE, (cum sit subsesquitertia ipsius BD) partium 45. ipsa IE 30. & ipsa EO, hoc est DP. 36. Sit Q. centrum grauitatis trianguli ABC. Eritq. DQ. 20. Sit R centrum parabolę, eritq. RD 24. Erit ergo PR, 12. & RQ, 4. Sed vt PR ad RQ ita reciprocè triangulum ABC ad duas portiones AGB, BHC. Quarè triangulum ABC ad duas portiones AGB, BHC erit vt 12. ad 4. nempe vt 3. ad vnum; Componendòque, & per conuersionem rationis, erit parabola ABC ad inscriptum sibi triangulum vt 4. ad 3. Nempe sesquitertia. Quod erat propositum &c.

Lem pręcedens. *8. primi æquip.* *Lem præced.*

Noua adhuc ratione quadraturam parabolæ inuademus sumpto sequenti lemmate, quod quidem è Schola Caualeriana prodijsse relatum est. Inseruiebat enim mensurę cuiusdam solidi ab ipsa parabola circà ordinatim applicatam reuoluta, geniti. Est autem lemma huiusmodi, Authore Io. Antonio Roccha præstanti Geometra.

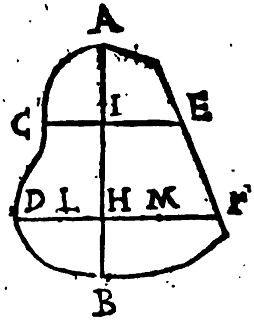
Lemma XXXI.

Si figura plana super aliquà sui rectà lineà figuram ipsam secante libretur, erunt momenta segmentorum figuræ, vt sunt solida rotunda ab ipsis segmentis, circa secantem lineam reuolutis, descripta.

Esto figura plana qualibet acdbfe, *quam secet recta linea* ab: *& concipiatur figura librari super rectà* ab. *Dico momentum segmenti* acdb, *ad momentum segmenti* aefb. *esse vt solidum rotundum genitum ex reuolutione segmenti* acdb *circa*

axem

axem ab, *ad solidum rotundum genitum ex conuersione reliqui segmenti circa eũdem axem reuoluti.*



Sumptis enim duobus quibuscumq; punctis h, & i. *in recta* ab: *ducantur per* h & *per* i, *recta* ce, df. *perpendiculares ad ipsam* ab: *secenturq; bifariam segmenta* dh, hf, *in punctis* l, & m.

Habebit ergo momentum recta dh *ad momentum rectae* hf, *rationem compositam ex ratione magnitudinum* dh *ad* hf, & *ex ratione distantiarum* lh *ad* hm; *siue* dh *ad* hf. *Propterea momentum recta* dh *ad momentum* hf *erit vt quadratum* dh *ad quadratum* hf.

Eodem modo ostendetur momentum rectae ci, *ad momentum rectae* ie, *esse vt quadratum* ci *ad quadratum* ie, & *sic semper.*

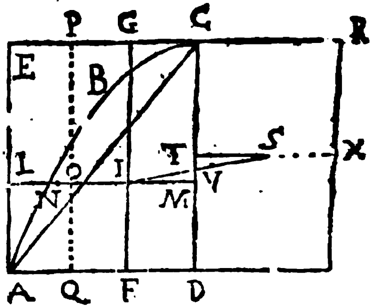
Amplius momentum dh *ad momentum* ci, *est (ob eandem rationem vt supra) vt quadratum* dh *ad quadratum* ci: & *hoc semper, Erunt ergo omnes primae simul magnitudines, nempe omnia momenta figurae* acdb, *ad omnes secundas simul, nempe ad omnia momenta reliquę figurę* aefb: *vt sunt omnes tertię simul. nempe omnia quadrata figurae* acdb, *ad omnia quadrata reliquae figurae. Siue vt sunt omnes circuli figurae* acdb *(nempe solidum rotundum ex ipsius conuersione circa axem* ab *descriptum) ad omnes circulos reliquae figurae* aefb *(nempe ad solidum rotundum ex ipsius reuolutione circa eundem axem* ab *genitum.) Quod erat ostendendum &c.* Lim. 29.

Hoc pręmisso (quod quidẽ vti supra ediximus penitus ab alijs desumptum est, & hic insertum tamquam alienum, neque quod ego sciam adhuc vulgatum) parabolam quadrabimus, supposita demonstratione, quã multis modis probatur Cylindrum inscripti sibi conoidis parabolici esse duplum.

Propo-

Propositio XIX.

PArabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.



Esto semiparabola ABCD, circa quam sit rectangulum DE. Sumatur punctum F, ita vt AF. ad FD sit vt 5. ad 3. ductaq. FG diametro æquidistans, erit in ipsa FG centrum grauitatis semiparabolæ. Esto illud punctum quodlibet, puta I, & per I ducatur LIM parallela ad AD, accipiaturq; IN. æqualis ipsi IM. Intelligatur etiam producta PQ parallela diametro CD (vbicunq; cadat) ita vt parallelogrammum rectangulum DP, æquale sit ipsi semiparabolæ. Tum concipiatur applicatum ad rectã CD, rectangulum DR, ita vt æquiponderet semiparabolæ facta libratione super recta CD. Sitq; centrum dicti rectanguli punctum S; & ductà TSX parallela ipsi AD iungatur recta IS.

Lem. 11.

Iam; manifestum est ex lemmate præmisso quòd cylindrus factus à rectangulo DR circa axem DC reuoluto, æqualis erit conoidali parabolico facto à conuersione semiparabolæ ACD, circa eundem axem CD reuolutę; cum æqualia supponantur figurarum planarum momenta. Erit ergo cylindrus à rectangulo DR factus, subduplus cylindri à rectangulo DE facti, & ideo quadratum TX subduplum erit quadrati ML (cylindri enim æquealti sunt inter se vt basium quadrata) quod memento.

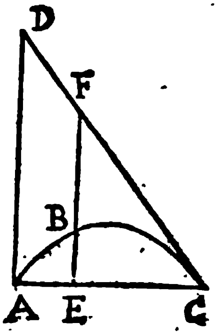
4. sexti. Verùm MN ad TX, est vt IM ad TS (sunt enim subduplæ earumdem) siue vt IV ad VS; nempe (quia æquiponderant figuræ planæ super linea CD, siue ex puncto V) vt rectangulum

gulum D R ad semiparabolam reciprocè, siue ad rectangulum D P. ipsi semiparabolæ æquale: siue vt eorum bases T X ad M O. Ergo T X media proportionalis est inter M N, M O: Quare rectangulum N M O, cum æquale sit quadrato T X, subduplum erit quadrati L M.

Ratio verò quadrati L M, ad rectangulum N M O, componitur ex ratione L M ad M N (quæ sesquitertia est per constructionem; sumpsimus enim punctum F, ita vt A F ad F D, esset vt 5. ad 3.) & ex ratione L M ad M O; quæ quidem ignota erat, sed necessariò sesquialtera nunc apparet. Ratio enim dupla cōponitur ex sesquitertia, & sesquialtera, vt ipsis etiam Cantoribus vulgatum est; vt videre est in his tribus numeris 4. 3. 2.

Rectangulum ergo D E ad ipsum D P, siue ad semiparabolam, sesquialterum erit; & ipsa semiparabola ad triangulum A C D. sesquitertia erit. Quod erat ostendendum &c.

Lemma XXXII.



Sit parabola A B C, cuius basis A C, tangens C D; diametro æquidistans sit A D. Sumpto quolibet puncto E. ducatur E F diametro æquidistans. Dico esse vt F E ad E B, ita C A ad A E.

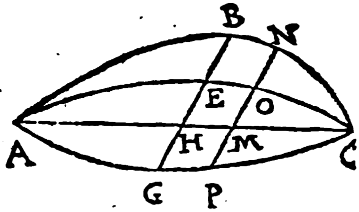
Est enim D A ad F B longitudine, vt D C ad C F potentià, siue vt D A ad F E potentià: Sunt ergo in continuà ratione D A, F E, F B. Quod memento. *ob parabolam.*

Iam vt A C ad C E ita est A D ad E F, siue E F ad F B; & per conuersionem rationis, vt C A ad A E, ita est F E ad E B. Quod erat ostendend. &c.

Lemma XXXIII.

Quælibet parabola æqualis est duabus parabolis simul sumptis, quæ quidem æqualem ipsi basim habeant, diametrum verò subrò subduplam, & æqualiter inclinatam.

Esto parabola abc, *cuius diameter* bh; *sintq. duę aliæ parabolæ* aec. agc. *in eadem basi. Diametri vero* he, hg, *vtraq. subdupla sit diametri* hb: *sed æqualiter ad basim inclinata, Dico parabolam* abc: *æqualem esse figuræ* aecg.

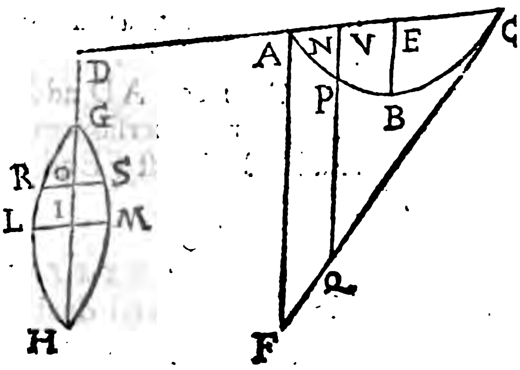


Sumatur enim quodlibet punctum in basi ac; *& sit* m; *ductàque* pmn *æquidistante ad diametrum* bh. *Erit* bh *ad* nm, *vt rectangulum* ahc, *ad rectangulum* amc; *siue vt recta* he *ad* mo. *Et permutando vt* bh *ad* he, *ita erit* nm *ad* mo. *Quare* nm *dupla erit ipsius* mo. *Eodem penitus modo ostendetur* nm *dupla etiam ipsius* mp, *Ergò tota* nm *æqualis est ipsi* op. *Et hoc semper. Propterea omnes simul lineę figuræ* abc, (*nempe ipsa parabola* abc) *æquales erunt omnibus simul lineis figuræ* aecg, (*nempe duabus parabolis* aec, agc.) *Quod erat &c.*

Propositio XX.

PArabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eãdem altitudinem habentis.

Esto parabola ABC, cuius diameter BE concipiatur ad horizontem perpendicularis, & ipsa parabola inuersa statuatur. Producatur CA in D, ita vt æquales sint CA, AD; & sit DC lib-



ra,

bra, cuius fulcrum est A. Ducatur CF tangens parabolam; & AF diametro EB æquidistans. Ponatur etiam GH æqualis ipsi AC, & diuisa bifariam GH in I, sit vtraq. IL, IM, sub dupla rectę EB. & æqualitèr ad basim inclinata vt est ipsa EB ad AC. Fiantq; duæ parabolæ GLH, GMH, quæ (per lemma præced.) simul æquales erunt parabolæ ABC; Et suspendatur figura GLHM ex puncto D.

Accipiātur iam puncta O, & N æqualiter distantia à punctis I, & E respectiuè. Ductisq. NQ æquidistantèr ad EB, & R OS ad LM; Erit vt in præcedenti lemmate NP ęqualis ipsi RS.

Iam QN ad RS est (ob æqualitatem) vt QN ad NP, siue vt DA ad AN reciprocè.. Aequiponderant ergo rectæ Q N, & RS. & sic semper. Ergo omnes simul lineæ trianguli AFC (nempe ipsum triangulum) æquiponderant omnibus simul lineis figuræ GLHM, (nempe ipsi figurę GLHM.) Lim. 3.

Accipiatur AV tertià pars totius AC. Manifestum est, quod si ex V demittatur recta ęquidistans ipsi AF. in ipsa erit centrum grauitatis trianguli AFC; eritq. ipsa ad horizontem perpendicularis. Propterea erit triangulum AFC. appensum centralitèr ex puncto V. Eritq. triangulum AFC ad spatium GLHM. reciprocè vt DA ad AV, nempe triplum.

Cum autem spatium GLHM æquale sit parabolæ ABC; erit triangulum AFC triplum etiam parabolæ ABC.

Reliquum quadraturę absoluitur vt in Propositione IX. Factum est, Quod &c.

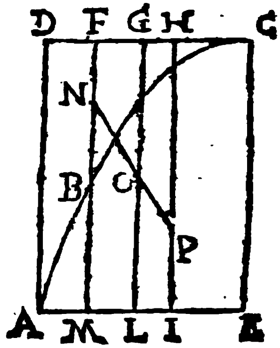
Propositio XXI.

PArabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Esto semiparabola ABC, cuius diameter CE, ordinata AE, tangens verò CD, & compleatur parallelogrammum AECD. Manifestum est quod omnes lineæ trilinei mixti D

A B C, quæ quidem diametro parallelæ sint, inter se sunt in eadem ratione in qua sunt omnes circuli coni alicuius, qui axem habeat D C, & verticem C.

Lem. 22. Ergo centrum grauitatis omnium linearum trilinei D A B C, erit in illa, quæ diuidit libram D C; quemadmodum diuidit eandem centrum grauitatis coni; nempe vt pars ad C terminata, reliquæ sit tripla. Fiat ergo C F tripla ipsius F D. & ducta F M parallela ad C E, erit centrum grauitatis trilinei D A B C in recta F M. vbicunq. sit.



Item, omnes lineæ, quæ in semiparabola A B C E ducuntur ad diametrum parallelæ, inter se sunt in eadem ratione, in qua sunt omnes circuli alicuius hemisphærij, cuius axis sit A E, vertex verò A. Ergò centrum grauitatis omnium linearum ad libram A E appensarum, siue ipsius semiparabolæ, erit in illa, quæ libram A E sic diuidit vt diuidit eandem centrum grauitatis hemisphærij; Nempe vt pars ad A terminata, sit ad reliquam vt 5. ad 3. Fiat ergo A I ad I E vt 5. ad 3.; & ducta I H parallela ad C E, erit centrum semiparabolæ in recta I H, vbicunque sit. Ducatur tandem G L, quæ bifariam secet latera A E, D C. & in G L erit centrum grauitatis parallelogrammi D E. quod sit O. Ponatur centrum grauitatis semiparabolę esse punctũ quoduis P. ductaq. P O, producatur in N; & erit N. centrũ grauitatis trilinei D A B C. Iam, semiparabola ad trilineum est vt N O ad O P, siue vt M L ad L I; nempe vt 2. ad vnum; (qualium enim partium tota A E est 8, talium A M est 2, M L est 2, L I est vna, & reliqua I E 3. per constructionem) Ergo semiparabola ad parallelogrammum erit vt 2. ad 3, siue vt 4. ad 6; & semiparabola ad triangulum inscriptum vt 4. ad 3. Nempe sesquitertia. Quod &c.

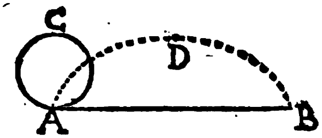
FINIS.

APPEN-

APPENDIX

De Dimensione Cycloidis.

LIBET hic appendicis loco addere solutionem problematis non iniucundi, & si materiā, propositionemque spectes, primo intuitu difficillimi. Torsit hoc, fefellitq. pluribus ab hinc annis Mathematicos nostri sęculi primarios; frustrà enim tentata demonstratio euasit ab illorū manibus ob fallaciam experientię. Appensis namque ad libram manufactam spatijs figurarum materialibus, nescio quo fato, ea proportio quę verè tripla est, semper minor quā tripla apparuit. Vnde factum est, quòd potius ob suspicionem incommensurabilitatis (vt ego credo) quàm ob desperationem demonstrationis, instituta contemplatio ab illis dimissa sit.



Suppositum est huiusmodi. Concipiatur super manente aliqua recta linea a b. *circulus* a c, *contingens rectam* a b. *in puncto* a. *Noteturq; punctum* a, *tamquā fixum in peripharia circuli* a c. *Tum intelligatur super manente recta* a b. *conuerti circulum* a c, *motu circulari simul & progressiuo versus partes* b: *ita vt subinde aliquo sui puncto rectā lineā* a b *semper contingat, quousq. fixum punctum iterum ad contactum reuertatur, puta in* b. *Certum est, quòd punctum* a *fixum in peripheria circuli rotantis* a c, *aliquam lineam describet, surgentem primò à subiecta linea* a b, *deinde culminantem versus* d; *postremo pronam, descendētemque versus punctum* b.

Vocata est à predecessoribus nostris. Pracipue à Galileo iam supra 45. annum, huiusmodi linea a d b. *Cyclois, recta verò* a b. *basis cycloidis; At circulus* a c, *genitor cycloidis.*

Proprietas, & natura cycloidis ea est, vt basis ipsius a b. *ę-*

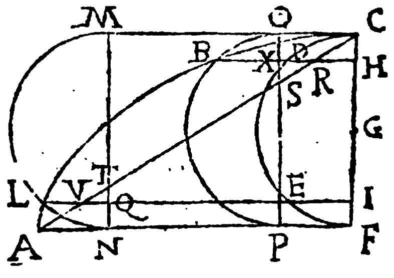
qualis

qualis sit peripharia circuli genitoris ac. *Quod quidem non adeò obscurum est: Nam tota peripharia* ac *se ipsam in conuersione commensurauit super manente recta* ab.

Quaritur nunc quam proportionem habeat spatium cycloidale adb *ad circulum suum genitorem* ac*? Ostendemusque, Deo dante, triplum esse. Demonstrationes tres erunt, inter se penitus diuersae. Prima, & tertia per nouam Indiuisibilium Geometriam nobis amicissimam procedent: secunda verò per duplicem positionem, more veterum recepto; vt vtrisque fautoribus satisfiat. Cęterum, hoc moneo; principia ferè omnia, quibus aliquid per Indiuisibilium Geometriam demonstratur, ad solitam antiquorum demonstrationem indirectam reduci posse: quod à nobis factum est, vt in multis alijs, ita etiam in primo, & tertio sequentium Theorematum; sed ne lectoris patientia nimium adhuc abuteremur plura omittenda censuimus, tresq; tantum demonstrationes exib emus.*

THEOREMA I.

Omne spatium quod sub linea Cycloide, & recta eius basi continetur, triplum est circuli sui genitoris; siue sesquialterum trianguli eandem basim, & eandem altitudinem habentis.



Esto Cyclois linea abc *descripta à puncto* c *circuli* cdef *dum ipse circumuertitur super manente basi* af. *(consideramus autem semicycloidem, & semicirculum tantum ad euitandam figura confusionem.) Dico spatium* abcf *triplum esse semicirculi* cdef; *siue sesquialterum trianguli* acf,

Accipiantur duo puncta h, *&* i *in diametro* cf. *ęquè remota à centro* g. *Ductisq.* hb, ilcm *aquidistanter ipsi* fa, *transeant per puncta* b, *&* l *semicirculi* obp, mln, *ęquales ipsi* cdf, *& contingentes basim in punctis* pn.

Nanist-

Manifestum est rectas hd, ie, xb, ql *aequales esse, per 14 Tertij, aequalesq. erunt arcus* ob, ln. *Item cum ęquales sint* ch if, *ęquales erunt* cr, ua *ob parallelas.*

Tota peripheria mln, *ob cycloidem, aequalis est rectę* af. *itẽque arcus* ln *recta* an *ob eandem causam, cum arcus* ln. *seipsum super recta* an *commensurauerit; ergo reliquus arcus* lm, *reliqua rectę* nf *ęqualis erit. Eadem ratione arcus* bp. *rectę* ap, *& arcus* bo *rectę* pf, *aequalis erit,*

Iam recta an *aequalis est arcuī* ln, *siue arcui* bo, *siue rectę* pf. *Ergo ob parallelas, ęquales erunt* at, fc. *Verum quia aequales erant etiam* cr, au. *reliquę* ut, fr *ęquales erunt. Propterea in triangulis aequiangulis* utq, rfx, *aequalia erunt latera homologa* uq, xr. *Patet itaque quod duae recta* lu, br *simul sumptae aequales erunt duabus rectis* lq, bx, *nempe ipsis* ei, dh, *& hoc semper verum erit vbicunq. sumantur duo puncta* h, *&* i, *dumodo aequaliter a centro sint remota. Ergo omnes lineae figurae* albca *aequales sunt omnibus lineis semicirculi* cdef; *& ideò figura bilinearis* albca *aequalis erit semicirculo* cdef.

Sed triangulum acf *duplum est semicirculi* cdef. *(nam triangulum* acf *reciprocum est triangulo Propos. pr. Arch. de dimens. circ. cum latus* af *semipeiriphaeriae, latus verò* fc *diametro sit aequale, vnde sequitur triangulum* acf *aequale esse integro circulo cuius diameter sit* cf.*) Ergo componendo, totum cycloidale spatium sesquialterum erit trianguli inscripti* acf; *Triplum verò semicirculi* cdef. *Quod erat.*

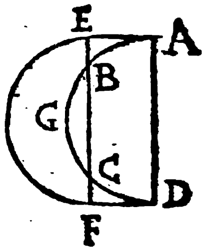
Lemma I.

Si super lateribus oppositis alicuius rectanguli AF, duo semicirculi descripti sint, EIF, AGD erit figura sub periphærijs, & sub reliquis lateribus comprehensa ęqualis prędicto rectangulo.

Vocetur autem talis figura Arcuatum; tam si fuerit integra, quàm etiam ipsius partes, quando secta fuerit à linea ipsi fd *parallela.*

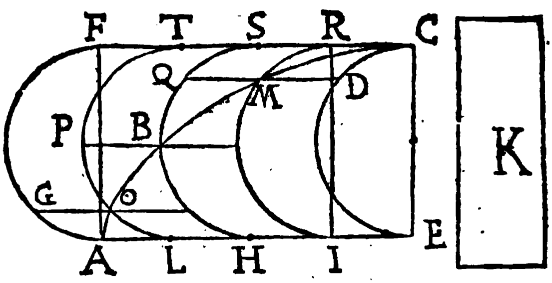
Demon-

Demonstratur; quoniam cum sint aequales semicirc. dempto communi segmento b g c, *additisque communibus trilineis* e b a, c f d. *clarum erit propositum.*



Quando verò detur casus quod segmentum nullum sit, tunc breuior, faciliorq. demonstratio erit. Facilè etiam per eandem prosthapheresim ostenditur arcuatum sectum à linea ipsi fd *parallela equale esse rectangulo aequealto, & super eadem basi constituto.*

Lemma II.



Esto linea cycloidalis a b c *descripta à puncto* c *semicirculi* c d e *dum conuertitur super manente* a e. *Compleatur rectangulũ* a f c e, *fiatq. circa diametrum* a f *semicirculus* a g f. *Dico cycloidem* a b c *secare bifariam arcuatum* a g f c d e.

Si enim ita non est, erit vtiq. alterum ex duobus trilineis f g a b c; a b c d e, *magis quam dimidium eiusdem arcuati. Esto & ponatur alterum ex ipsis (quodcunq. sit) puta* a b c d e *maius quàm dimidium arcuati. Sitq. excessus, quo trilineum superat semissem arcuati, aequalis spatio cuidam* K.

Secetur bifariam a e *in* h; *& iterùm* h e *in* i: *& sic fiat semper donec rectangulum aliquod* i e c *minus reperiatur spatio* K. *Tunc diuidatur integra* a e *in particulas aequales ipsi* i e, *& per puncta diuisionum* l, h, i, *transeant semicirculi aequales ipsi* c d e *semicirculo, tangentes basim in punctis* l, h, i, *secantesq. cycloidem in* o, b, m, *per quae puncta agantur recta* g o, p b, q m d *aequidistantes basi* a e.

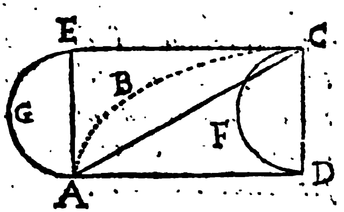
Erit itaque arcuatum oh *equale ipsi* gl: *arcuatum verò* bi *equale arcuato* ph: *& arcuatum* me *aequale arcuato* qi. *Propterea vniuersa figura inscripta in trilineo* abcde *constans ex arcuatis, equalis erit figura eidem trilineo circumscripte, excepto tamen arcuato* imrcde. *Quod si figura circumscripta addas suum arcuatum* imrcde, *superabit circumscripta figura ipsam inscriptam excessu praedicti arcuati, siue rectangulo* re, *nempe minori excessu quam sit spatium* K. *Propterea inscripta in trilineo figura adhuc erit plusquàm dimidium arcuati* agfcde. *& ideo maior quam trilineum* fgabc. *Sed eadem aequalis est alteri figure ex arcuatis composite & in trilineo* fgabc *descripta: ergò hec inscripta figura maior esset suo trilineo* fgabc. *pars suo toto. quod esse non potest.* *ostenditur infra*

Quod inscripta figura sint equales patet. Nam arcus ol *equalis est recta* la, *hoc est rectae* ie, *hec est arcui* rm (*ob cycloidem.*) *Ergo arcuatum* oh *aequale erit arcuato* mf. *& sic de singulis.*

Si verò supponeremus trilineum fgabc *maius quàm dimidium arcuati* agfcde, *constructio figurae, & demonstratio penitus eadem erit. Ergò concludemus cycloidem lineam* abc *bifariam secare arcuatum* agfcde. *Quod erat propositum.*

THEOREMA II.

Spatium cycloidale triplum est circuli sui genitoris.



Esto cyclois abc *descripta à puncto* c *circuli* cfd. *dico spatium* abcd *triplũ esse semicirculi* cfd.

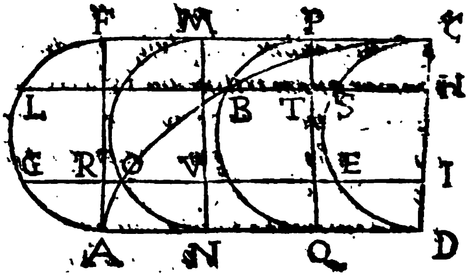
Compleatur rectangulum adce; *factoq. super* ae *semicirculo* age, *ducatur* ac.

Triangulum adc *duplum est semicirculi* cfd (*nam basis* ad *aequalis est periphaeriae* cfd *ob cycloidem, altitudo verò* dc *aqualis diametro) ideò rectangulum* ed *quadruplum erit eius-*

dem semicirculi cfd. *Ergo arcuatum* agecfd *quadruplum erit eiusdem semicirculi: propterea trilineum* abcfd *(per lemma praecedens) duplum erit semicirculi, & componendo spatium* abcd *triplum erit eiusdem semicirculi* cfd.

THEOREMA III.

Omne spatium cycloidale triplum est circuli sui genitoris.



Esto cycloidalis linea abc *descripta à puncto* c *semicirculi* ced. *Dico spatium* abcd *triplum esse semicirc.* ced.

Compleatur rectangulum afcd*; factoq. semicirculo* agf, *accipiantur duo puncta* h, *&* i *in diametro* cd *aeque remota à centro, & ducantur* hl, ig *aequidistantes* ad. *quae cycloidem secent in quibuslibet punctis* b, *&* o. *Agantur denique per* b, *&* o *duo semicirculi* pbq, mon, *ut in praecedentibus factum est.*

Iam recta go, *aequalis est rectae* ru *(cum aequales sint* gr, ou, *& communis* ro*) siue aequalis est rectae* an, *nempe arcui* on *(ob cycloidem) vel arcui* pb, *siue rectae* pc, *vel* th, *vel* bs.

Eodem prorsus modo, quo demonstrauimus rectam go *aequalem esse rectae* bs, *demonstrantur omnes & singulae lineae trilinei* fgabc *aequales omnibus lineis trilinei* abced. *Propterea dicta trilinea inter se aequalia erunt. Ergo ut in praecedenti Theoremate demonstrabitur cycloidale spatium triplum esse semicirculi* ced. *Quod erat &c.*

FINIS.

SCHO-

SCHOLIVM

De Cycloidibus aliarum specierum.

Hactenus de Cycloide dictum sit: ulterius enim contemplationem hanc demonstrando protrahere odiosum esset, & non appendix, sed liber fieret. Proponi tamen poterant adhuc non paucae circa hanc figuram planam, quam Cycloidem Primariam appellare non esset inconveniens; quandoquidem infinitae aliae species huiusmodi figurarum ab ipsa iam considerata primaria Cycloide oriuntur. Concipiamus enim (in figura paginae 85.) non solum peripheriam circuli ac *aequabili conversione rotari, sed etiam universum planum, tam internum, quàm externum ipsius circuli* ac *in infinitum extensi. Manifestum est quòd circuli centrum rectam lineam describet ipsi* ab *aequidistantem. Puncta verò, quae intra peripheriam* ac *sunt constituta, Cycloides describent humiliores quàm ipsa primaria* adb, *quasdam etiam (quod incredibile quasi videtur) flexuosas, & non ad easdem partes concauum habentes: tales autem fient à punctis prope centrum circuli rotantis* ac *existentibus. Puncta verò, quae extra peripheriam* ac *erunt, Cycloides describent ipsa primaria altiores, & usque in infinitum crescentes.*

Circulum cuiuscunq. cycloidis proprium genitorem dicere possumus eum, cuius peripheria concentrica sit peripheriae ac, *transeatq. per punctum cycloidem ipsam describens.*

In hoc conveniunt omnes, quod aequalibus basibus insistunt; humiliores tamen cycloides basim habent genitrici peripheria maiorem: altiores verò minorem genitrici peripheria basim habent.

Ratio, quam unaquaeq; cycloidalis figura habet ad suum triangulum, vel ad circulum suum proprium genitorem, semper est maioris inequalitatis, & variatur in infinitum. Si tamen utram-

que simul consideres & triangulum, & circulum, æqualitatis ratio erit.

Omne spatium sub qualibet cycloide linea, & rectâ eius basi contentum, ad triangulum super eadem basi, & sub eadem altitudine constitutum, est vt periphæria circuli proprij genitoris vna cum duplo basis cycloidis, ad duplum basis cycloidis. Ad circulum verò proprium genitorem vnumquodque cycloidale spatium est vt duplum basis cycloidis vna cum periphæria genitoris circuli ad eiusdem circuli periphæriam.

Hinc problemati locus paratur, datâ quacunq; ratione maioris inæqualitatis, cycloidale spatium inuenire, quod ad triangulum, siue circulum suum sit in data ratione, & in data basi.

Cuiuscunq. cycloidalis spatij ad quodlibet spatium cycloidale (*etiam si non ab eadem primaria cycloide ortum ducant*) ratio componitur ex ratione altitudinis ad altitud., & ex ratione dupli basis cum periphæriâ genitrice, ad duplum basis cum periphæria genitrice.

Tangentem ad quodlibet imperatum punctum dari posse certū est; peculiari primùm ratione pro Cycloide primaria; deinde vniuersali etiam pro omnibus alijs. Tangens ad datum quodlibet punctum primariæ cycloidis ducitur ex puncto sublimiori genitoris circuli per ipsum datum punctum transeuntis.

Tangens ad datum punctum cuiuscunque cycloidis ducitur hoc modo. Transeat per datum punctum cycloidis circulus ipsius genitor, quem in dato eodem puncto contingat recta conueniens vel cum basi cycloidis, vel cum alia ipsi æquidistante. Fiatq; vt radius circuli poprij ad radium circuli primarij, ita tangens prædicta inter datum punctum, & basim, vel æquidistantē intercepta, ad aliam quandam lineam aptè sumendam à termino tangentis in ipsa vel basi, vel æquidistante. Tum ab extremitate huius assumptæ tangens ad imperatum punctum cycloidis emittatur.

Nonnulla etiam Theoremata pro Mechanicis contemplatoribus ex hac figura deriuari possent, nisi considerandum iam tandem esset ne simul cum molestia tedium fiat.

FINIS.

DE SOLIDO ACVTO HYPERBOLICO

Problema alterum.

Proemium ad Lectorem.

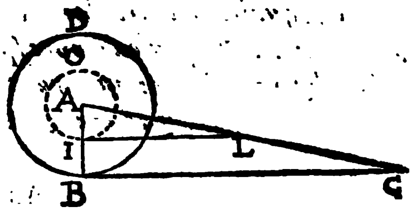
AGGREDIOR iam opus quod ipsis Geometriæ candidatis non solum difficile videatur verùm etiam impossibile. Hactenus enim in Mathematicis Scholis repertæ sunt dimensiones figurarum ab omni parte finem habentium; quandoquidem inter omnia solida, quæ ab antiquis, & modernis Auctoribus multiplici conatu ad mensuram redacta sunt, nullum adhuc, quod ego sciam, vllam dimensionem habuit extensione infinitam. Imò statim atq; proponatur siue solidum aliquod, siue figura plana, cuius aliqua extensio in infinitam distantiam procedat, vnusquisque cogitabit huiusmodi figuram infinitę magnitudinis esse debere. Attamen solidum habet Geometria, longitudine quidem infinitum, sed tanta prædítum subtilitate, vt licet in infinitum producatur, exigui tamen cylindri molem non excedat. Tale erit solidum illud ab hyperbola genitum, quod huius libelli contemplatione prosequemur; intactum hucusque ab alijs, & multiplici, curiosaque Theorematum varietate fæcundissimum; eò vsq. vt, nisi me fal-

lat

ſat affectus, vniuerſa Geometria inter hactenus conſideratas figuras nullam habeat curioſitatis abundantiorem.

Quo ad methodum demonſtrandi; vnicum quidem, & præcipuum Theorema duplici conatu oſtendemus, & per indiuiſibilia, & more Veterum. Quamquam (vt vera fateamur) primò inuentum ſit per Indiuiſibilium Geometriam; quæ ſanè verus eſt demonſtrandi modus ſcientificus, ſemper directus, & ipſi naturæ germanus. Miſeret me veteris Geometriæ, quæ eũ Indiuiſibilium doctrinam, ſiue non nouerit, ſiue non admiſerit, circà dimenſionem ſolidorum adeò paucas veritates inuenit, vt ipsà penurià infelix ad ætatem noſtram peruenerit. Antiquorum enim Theoremata circà doctrinam ſolidorum, quota pars ſunt contemplationum, quas mirabiles noſtro æuo Caualerius (omiſſis alijs) inſtituit, circà tot claſſes ſolidorum, ſpecie differẽtium, multitudine abundantium? Methodus noſtra, quam vſurpaturi ſumus in præfato Theoremate, procedet per Indiuiſibilia curua, ſine aliorum exemplo, non tamen ſine præmiſſa Geometriæ approbatione. Conſiderabimus enim omnes cylindricas ſuperficies circà communem axem in noſtro ſolido deſcriptibiles. Cuius rei cum nullum Caualerius ipſe tradiderit in ſua Geometria elementum, exiſtimauimus noſtram arguendi rationem exemplis aliquot eſſe corroborandam. Quamquam hoc apud me ſuperfluum ſit; cum iam totum huius libelli progreſſum ratum habeam, eò quòd ipſum admiſerit, probaueritque doctiſſimus, & eruditiſſimus vir *Raphael Magiottus*; cui, vt in plurimis alijs ſcientijs, artibuſq;, ita & in Mathematicis diſciplinis neminem quis iure antepoſuerit. Præmittemus itaque ante ipſum opus, ſub Exemplorum nomine, quaſdam Geometriç propoſitiones iam pridem notas, ſed à nobis per Indiuiſibilia curua demonſtratas: Sic enim magis manifeſtum fiet hunc modum demonſtrandi non eſſe negligendum, præſertim cum in rebus difficillimis maximum ipſius momentum reperiatur. Indiuiſibilia verò curua quæ ad huiuſmodi demonſtrationes idonea ſunt, in planis quidem figuris ſolæ circulorum peripheriç ſe ſe offerunt; in ſolidis autem, ſuperficies ſphæricæ, cylinlindricæ, conicæque. Quandoquidem isthæc tantum considerabiles sunt, tamquam ipsas figuras perfectè adæquantes, & vndique æqualis, vniformisque (vt ita dicam) spissitudinis. Præmittimus igitur ante operis aggressionem, promissa aliquot Theorematum Geometricorum Exempla.

EXEMPLVM PRIMVM.



Esto circulus, cuius centrū a, *semidiameter* a b, *tangens verò sit* b c, *quæ supponatur æqualis peripheriæ* b d. *Tū coniūgatur* a c. *Dico circulum* b d. *triangulo* a b c *esse æqualem.*

Sumatur in semidiametro a b, *quodlibet punctum* i; *& per* i *agantur, peripheria* i o *circa idem centrum* a, *& recta* i l *parallela ad* b c. *Erit itaque peripheria* b d, *ad peripheriam* i o, *vt semidiameter* b a, *ad* a i. (*demonstratur enim hoc à priori, non supposita circuli dimensione*) *sive vt* b c *ad* i l; *& permutando; erit peripheria* b d, *ad rectam* b c, *vt peripheria* i o, *ad rectam* i l. *Ergo peripheria* i o, *rectæ* i l *erit æqualis; & hoc semper, vbicumque sit punctum* i. *Quare & omnes peripheriæ simul sumptæ, omnibus rectis simul sumptis æquales erunt: hoc est, circulus ipse* b d, *æqualis erit triangulo* a b c. *Quod erat &c.*

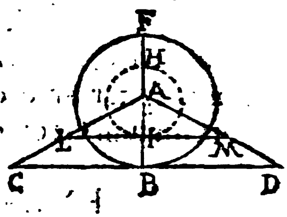
Concordat cum hoc Theoremate Propositio Prima Archim. De Dimensione circuli.

Exemplum II.

Esto circulus, cuius radius a b, *tangensque* b c *sit æqualis diametro; & coniunctâ* a c *circumuertantur figuræ circa* a b, *ita vt fiat sphæra* b f, *& conus rectus* c a d. *Dico sphæram* b f, *cono* c a d *esse æqualem. Sumatur enim in* a b *quodvis punctū* i, *& per ipsum* i *transeat superficies sphærica* i h, *circa centrum* a;

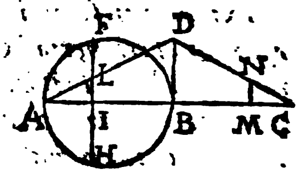
circu-

circulusq; lm *inscribi in cono* cad. *Iam: superficies sphaerica* bf *aequalis erit circulo* cd. *sphaerica vero* bf, *ad sphaericam* ih, *est ut quadratum* ha, *ad quadratum* ai; *sive ut quadratum* bc *ad quad.* il; *nempe ut circulus* cd, *ad circulum* lm. *Sed antecedentes equales sunt; ergò etiam consequentes: nempe sphęrica superficies* ih, *ęqualis erit circulo* lm. *Et hoc semper, ubicumque sit punctum* i. *Propterea omnes sphaericae superficies simul (sive ipsa sphaera* bf*) aequales erunt omnibus circulis simul sumptis, sive cono* cad. *Quod erat &c.*



Aliter.

E*sto sphaera, cuius diameter* ab, *tangensq.* bd *sit aequalis semidiametro sphaera: Et coniuncta* ad, *convertatur triangul.* adb *circà axem* bd. *ita ut fiat conus rectus* adc.



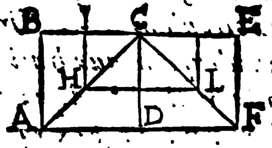
Dico sphaeram ab *aequalem esse cono* adc. *Sumatur enim in diametro* ab *quodlibet punctum* i, *per quod transeat circulus* fh, *ad axem erectus in sphaera; & superficies cylindrica* limn, *circà axem* db *in cono*.

4. *sexti.* *Iam: cum* ab *dupla sit ipsius* bd, *erit* ai *dupla* il, *ergò quadratum* fi, *quod aequale est rectangulo* aib, *duplum erit*

5. *p. de solidis sphaer.* *rectanguli* lib, *& aequale rectangulo* lim. *Propterea erit circulus* fh *aequalis superficiei cylindricae* limn. *Et hoc semper, ubicunque sit punctum* i. *Ergo omnes circuli simul, sive ipsa sphęra, ęquales erunt omnibus superficiebus cylindricis simul sumptis, nempe ipsi cono* adc, *Quod concordat cum* 32. *lib. I. De Sphaera & Cylindro Archimedis*.

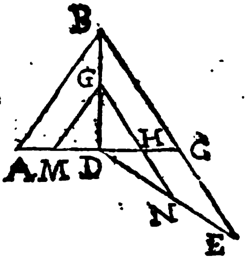
EXEM-

Exemplum III.



E*Sto quadratum* abcd (*nisi enim quadratum supponatur, ratiocinatio falsa caderet, ob inæqualem superficierum spissitudinem; siue ob diuersitatem transitus) cuius quadrati esto diameter* ac; *& conuertatur figura circà axem* cd, *ita, vt fiat cylindrus* hf, *& conus* acf. *Sumatur deinde in rectà* ac, *quodius punctum* h; *per quod intelligatur actus circulus* hl, *intrà conum comprehensus; & insuper superficies cylindrica, cuius sectio sit* hi, *axis verò* cd. *Erit ergò superficies cylindrica* hi *ad circulum* hl *suam basim, vt recta* hi, *ad quartam partem* 4. primi de Solid. Sphæ. *diametri* hl *Et hoc verum erit semper, vbicunq; sit punctum* h. *Ergò omnes simul superficies cylindricæ (nempe solidum, quod ex cylindro relinquitur, dempto cono* acf) *ad omnes simul circulos (hoc est, ad conum* acf) *erunt, vt sunt omnes simul rectæ trianguli* abc, *ad quartam partem omnium rectarum trianguli* acf; *nempe in ratione dupla. Quod concordat cum Theoremate X. lib. XII. Euclidis.*

Exemplum IV.



E*Sto conus rectus* abc, *cuius axis* bd; *& productà* bc *in* e, *ita vt circulus, cuius diameter* ce, *sit æqualis curuæ superficiei coni* abc, *concipiatur circà diametrum* ce *circulus erectus ad planum* abc; *& super circulo* ce, *intelligatur alter conus* cde, *habens verticem in* d. *Dico conum* abc, *cono* cde, *esse æqualem.*

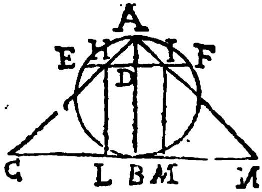
Sumatur in rectà dc *quodvis punctum* h, *per quod ductâ* hn *parallela ad* be, *intelligatur per* hg *superficies conica* mgh; *circàq; ipsam* hn *circulus parallelus circulo* ce. *Iam: conica superficies* abc, *ad circulum suæ basis* ac, *est vt recta* bc *ad* cd, *siue vt* gh *ad* hd; *nempe, vt conica superficies* mgh, *ad circulum* hm. *Circulus autem* ac, *ad circulum* ce, *est vt quadruplum quadrati* dc, *ad quadr.* ce; *siue vt quadruplum quadrati* dh, *ad quadrat* hn; *hoc est vt circulus* mh, *ad circulum* hn. *Ergò ex æquo, erit conica superficies* abc, *ad circulum* ce, *vt conica* mgh, *ad circulum* hn. *Et hoc semper verum erit, vbicunq; fuerit punctum* h. *Ergò omnes simul conicæ superficies (nempe conus* abc*) æquales erunt omnibus simul circulis, nempe cono* cde. *Quod erat &c.*

Concordat cum hoc Theoremate Propos. xvij lib. primi De Sphæra, & cylindro Archim.

Exemplum V.

E*Sto circulus, cuius diameter* ab, *ponaturque tangens* bc *diamet. æqualis, & iuncta* ac, *conuertatur figura circà axē* ab, *ita vt fiat sphæra* aebf, *& conus rectus* can.

Dico conum can, *ipsius sphæræ duplum esse.*



Accipiatur in diametro ab *quodlibet punctum* d, *per quod agatur planum* ef *ad axem* ab *erectum; quod quidem planum duos circulos effi iet, alterum* ef *in sphæra, alterum verò* hi *in cono; Concipiatur super basi* hi *cylindrus rectus* hlmi. *Iam: superficies cylindri* hlmi, *ad circulum* ef, *est vt rectangulum* li, *ad quadratum* ed; *nempe dupla. Et hoc semper; vbicunq. sit punctum* d: *propterea, vt vna ad vnā, ita omnes ad omnes. Erunt ergò omnes superficies cylindricæ, nempe conus* can, *ad omnes circulos, nempe ad sphæram* aebf, *in ratione dupla. Quod &c.*

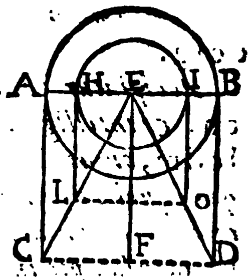
5. p: de soli: sph:

Concordat cum hoc Theoremate Proposit. xxxij. De Sphæra, & cylindr.

Exem-

Exemplum VI.

Esto circulus, cuius diameter ab, *tangensq;* ac *ponatur diametro aequalis, coniunctaq;* ec, *conuertatur figura circa axem* ef *aequidistantem tangenti* ac, *ita vt à circulo describatur sphaera, à triangulo verò* ace *solidum quoddam cylindricum excauatum dempto cono* ced. *Dico sphaeram praedicto solido excauato esse aequalem.*

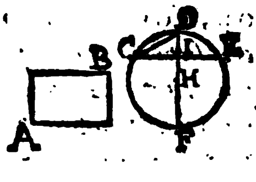


Sumatur in diametro ab *quoduis punctum* h, *per quod intelligatur superficies sphaerica* hi, *priori superficiei sphaericae concentrica; & insuper superficies cylindrica, quę describitur à recta* hl *tangenti* ac *parallela, circa axem* ef *reuoluta. Iam* ca *ad* ae *est vt* lh *ad* he, *& sumptis consequentium duplis,* ca *ad* ab, *est vt* lh *ad* hi. *Propterea,* lh *ad* hi *aequalis erit; & ideò superficies curua cylindri* lhio *aequalis erit superficiei sphaericae* hi. *Et hoc semper, vbi unq; fuerit punctum* h. *Propterea omnes omnibus, nempe omnes superficies sphericę simul, siue sphera* ab, *ęquales erunt omnibus superficiebus cylindricis simul, hoc est solido excauato* cabd, *dempto cono* ced. *Quod &c.*

Concordat cum hoc Theor. Propositio 32. de Sphaera & cylindro.

Lemma.

Superficies cuiuscunque cylindri recti, ab *(intelligo semper sine basibus) ad superficiem curuam cuiuscunque segmenti sphaerici* cde, *est vt rectangulum per axem cylindri, ad rectangulum* fdi, *sub catheto segmenti, & diametro sphaerae.*

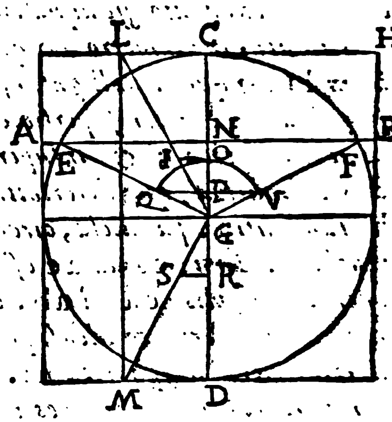


Nam, superficies cylindrica ab, *ad circulum cuius semidiameter sit linea ex polo* dc, *est vt rectangulum* ab, *ad quadra-* 5. p. de s. li. sph.

tum de: *Ergò, sumptis consequentium equalibus, erit cylindrica superficies, ad curuam sphærici segmenti* c d e *superficiē, ut rectangulum* a b *ad rectangulum* f d i. *Quod erat &c.*

Exemplum VII.

E*Sto sphæra, unà cum cylindro sibi circumscripto, quorum axis sit recta* c d. *Secenturq; plano* a b *ad axem erecto. Dico cylindrum* a h, *sesquialterum esse solidi sectoris sphærici* e c f g.



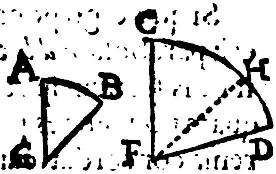
Accipiatur c h *equalis ipsi* c h. *& intelligatur cylindrus* l c d m, *cuius altitudo* l c. *eritque equalis cylindro* a h. *Concipiatur etiam demptus conus* l g m; *& sumpto in axe* c g *quouis puncto* o *fiant aquales* g o, g r, *& transeat per ipsum punctum* o *sphærica superficies* q o u *in sectore; & cylindrica* r o r f, *in solido cylindrico* l c d m *excauato ablatione coni* l g m; *sitque tam sphæricę superficiei quam cylindricę transeuntis per* o, *diameter ipsa* o r.

Iam: tota c g, *ad totam rectam* g o, *est ut* e g *ad* g q, *nempe, ut ablata* n g, *ad* g p; *ideò reliqua* c n, *ad* o p, *erit ut tota* c g, *ad* g o; *siue ut* c l, *ad* o i. *Sed antecedentes sunt aquales, ergò rectę* o p, o i *equales erunt. Propterea rectangula* r o p, r o i *aqualia erunt; & superficies sphærica* q o u *aequalis erit superficiei cylindricę* r o r f. *Et hoc semper, ubicunque sit punctum* o. Ergo *omnes superficies omnium segmentorum sphæricorum (nempe solidus sector* e c f g) *aequales erunt omnibus superficiebus cylindricis simul sumptis, hoc est solido excauato* l c d m. *Cui si addatur conus iam ablatus* l g m, *patebit propositum: nempe cylindrum* l c d m, *siue* a h, *sesquialterum esse sectoris sphærici* e c f g. *Quod &c.*

Lemma prec.ed:

Lem-

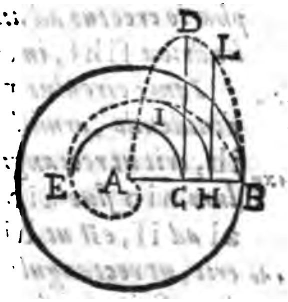
Lemma.



Arcus circulorum ab, cd, inter se rationem habent compositam ex ratione semidiametrorum ag ad cf, & ex ratione angulorum agb ad cfd.

Nam, fiat angulus cfh æqualis angulo agb. Erit igitur arcus ab ad ch, ut semidiameter ag ad cf; sed arcus ch ad cd, est ut angulus cfh, vel agb, ad angulum cfd. Ergò patet arcum ab, ad cd, rationem habere compositam ex rationibus semidiametrorum ag ad cf, & angulorum agb ad cfd.

Exemplum VIII.



Esto circulus, cuius semidiameter ab sit initium lineæ spiralis aeib. Secetur bifariam ab in c; & erecta perpendiculari cd, quantacunque, fiat per puncta adb parabola, cuius diameter cd. & centro a, interuallo ac fiat arcus ce. Dico spatium sub ipsa spirali, & recta ab comprehensum, ad factã parabolam adb; esse ut arcus ce, ad rectam cd.

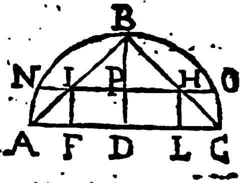
Sumatur in ab quoduis punctum aliud à puncto c, puta h; & per h fiat arcus hi in spatio spiralis, & recta hl in parabola, ipsius diametro æquidistans.

Iam: arcus ce ad hi rationem habet compositam ex rationem semidiametrorum ca ad ah; & ex ratione angulorum, siue (quod idem est ob lineam spiralem) ex ratione temporum, nempe recta cb ad bh. Ergo arcus ce, ad hi, est ut rectangulum acb, ad rectangulum ahb, siue ut recta cd, ad hl, ob parabolam. Permutando igitur, arcus ce ad rectam cd, est ut arcus hi ad rectam hl; & hoc modo semper; ubicun-

ubicunque sit punctum h. *Ergò omnes simul arcus, siuè spatii spiralis, ad omnes simul rectas, nempe ad parabolam, erunt ut unus arcus* c e, *ad unam rectam* c d. *Quod erat &c.*

Si quis ergò ponat rectam *c d* ęqualem arcui semicirculi *c e*, erit parabola *a d h* aequalis spatio spirali. Quinque adhuc aliis modis spatium spiralis lineę, in parabolam transformatur, quã-quam non omnes per curua Indiuisibilia procedant. Et Theorema concordat cum 25. de lineis spiralibus Archimedis.

Exemplum IX.



Esto hemisphærium a b c, *cuius axis* b d. *conus uerò inscriptus* a b c. *Dico, hemisphærium ipsius coni esse duplum.*

Sumatur in rectà a b *punctum quodlis* i; *per quod trãseat circulus* n o *in hemisphærio erectus ad axem; & superficies cylindrica* f i h l, *in cono circa axem* p d.

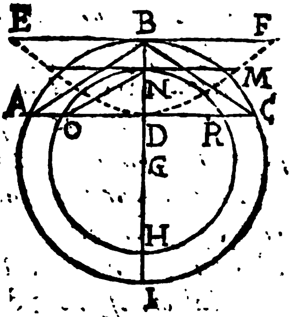
2. duodecimi: *Iam: circulus* n o, *ad* i h, *est ut quadratum* n p *ad* p i: *& diuidendo, armilla circularis, cuius latitudo* n i, *ad circulum* i h, *erit ut rectangulum* n i o, *ad quadratum* i p; *sed rectangulum* n i o *siue* a i b, *ęquale est rectangulo* f h (*nam, per 4. sexti,* a i *ad* i f, *est ut* h i *ad* i b.) *Ergò, armilla* n i, *ad circulum* i h, *erit, ut rectangulum* f h, *ad quadratum* i p; *siue ut cylindrica superficies* f i h l, *ad eundem circulum* i h. *Aequales ergò sunt armilla circularis, cuius latitudo* n i, *& superficies cylindrica* f i h l: *& hoc semper, ubicunq. sit punctum* i. *Ergò omnes simul armillę, nempe solidum hemisphæricum excauatum dempto cono* a b c, *ęquales erunt omnibus simul superficiebus cylindricis, nẽpe ipsi cono* a b c. *Propterea coniungendo, patet hemisphærium inscripti coni duplum esse. Quod &c.*

16 Sexti.

5. l. pr de sol. sph.

Exemplum X.

Quodlibet minus segmentum sphæricum a b c, *aequale est conoidi cuidam hyperbolico* e d f: *eandem altitudinẽ* b d *ha-*



bd *habenti, super basim verò* ef, *aequalem curuae superficiei segmenti, constituto: cuius latus versum sit* dg, *scilicet differentia inter catetum segmenti, & radium sphaerae.*

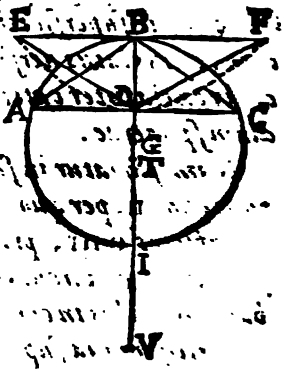
Nam, sumatur in sagitta bd *quoduis punctum* n, *per quod transeat sphaerica superficies* onr, *priori concentrica in segmento, & circulus cuius radius* nm, *basi parallelus in conoide.*

Eritq. curua superficies abc, *ad curuam* onr, *ut circulus ex radio* ab, *ad circulum ex radio* on, *ob aequalitatem: siue ut quadratum* ab *ad* on, *uel ut rectangulum* ibd, *ad rectangulum* hnd. *siue, in subduplis, ut rectangulum* gbd, *ad* gnd; *siue (ob hyperbolam) ut quadratũ* bf, *ad quadratum* nm; *siue ut circulus radio* bf, *ad circulum ex radio* nm. *Sed antecedentia sunt aequalia per suppositionẽ, ergo aequalis erit superficies curua* onr, *circulo cuius radius* nm. *Et hoc semper; ergo omnes omnibus; nempe sphaerae segmentum minus aequale erit conoidi hyperbolico. Quod erat &c.*

Quandò verò segmentum sphæræ fuerit hemisphærium; demonstratur æquale cono, qui basim habeat, æqualem curuæ superficiei hæmisphęrij, & altitudinem eandem.

Quando verò fuerit segmentum sphæræ maius, tunc ostendetur æquale duobus solidis nempe frusto cuidam recto conoidis hyperbolici, cuius maior basis sit æqualis curuæ superficiei segmenti sphærici, latus versum sit excessus sagittæ segmenti suprà radium sphæræ, altitudo verò excessus diametri suprà sagittam. Et cono cuidam, super minori basi prædicti frusti cõstituto, cum altitudine, quæ sit æqualis lateri verso ipsius frusti. Facilis demonstratio est, quamquam propositio difficilis videatur.

Concordantia praecedentis demonstrationis cum doctrina Archimedis.



Sumpta præcedenti constructione & figura; Esto Conoides hyperbolicum e d f, *quod ostensum est æquale minori segmento sphæræ* a b c. *Dico illud, etiam ex doctrina Archimedis, æquale esse prædicto segmento sphærico* a b c.

31. de Conoid. & sphæroid. 27 eiusdem;

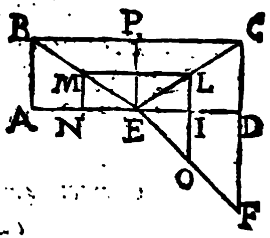
Producatur i u *æqualis radio sphæræ; eritq; segmentum minus* a b c, *ad conum* a b c *vt* u d *ad* d i. *Ponatur etiam* t d. *sesquialtera ipsius* g d. *Eritq; conoides* e d f, *ad conum* e d f, *vt* t b *ad* b g.

Iam; segmentum sphæricum, ad conum suum a b c, *est vt* u d *ad* d i; *conus autem* a b c, *ad conum æqualtum* e d f, *est vt quadratum* a d, *ad quadratum* e b; *siue ad quadr.* a b; *nempe vt rectangulum* i d b, *ad rect ang.* i b d, *siue vt earumdē altitudines,* d i, *ad* i b; *Ergo ex æquo, segmentum sphæræ* a b c, *ad conum* e d f, *est vt* u d, *ad* i b; *siue (sumptis earumdem rectarum subduplis) vt* t b *ad* b g. *Nempe vt Conoides, ad eumdem conum* e d f. *Aequantur ergò segmentū sphæræ, & ipsum Conoides etiam ex doctrinà Archimedis.*

Assumpsimus rectas *t b*, *b g*, esse semisses rectarum *u d*, *i b*, respectiuè. & hoc patet. Nam *u d* constat ex duabus semidiametris, & ex ipsa *g d*; sed *t b* constat ex vnica semidiametro, & semisse *d g*, ob constructionem. Reliquum manifestum est.

Latus Rectum prædicti Conoidis non est necessarium, quandoquidem datur latus Versum, & semidiameter basis, sed si quis illud requirat inueniet duplum esse lateris versi.

Exemplum XI.



Esto cylindrus rectus a b c d, *cuius basis* a d, *axis verò* p e, *intelligaturque ablatus ab ipso conus* b e c, *ita vt relinquatur cylindrus excauatus. Producatur deinde* c d *in* f, *ita vt* d f *possit duplum*

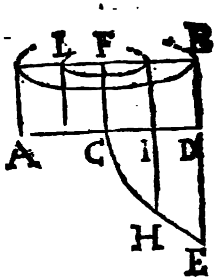
lum rectanguli c d e, *& iunctà* e f *conuertatur triang.* e d f *(saltem imaginatione, nam figura non est perfecta) ita vt oriatur conus, cuius basis semidiameter sit* d f, *axis verò* e d. *Dico talem conum æqualem esse prędicto cylindro excauato. Sumatur enim in axe* c d, *quoduis punctum* i, *& per ipsum transeat superficies cylindrica* i l m n, *circa axem* e p *in solido excauato cylindrico; & circulus cuius radius* i o *in eo cono, qui axem habet* e d.

Iam circulus ex radio d f, *ad circulum ex radio* i o *est vt quadratum* d f *ad* i o, *siue vt quadratum* d e *ad* e i, *siue vt rectangulum* c d e *ad rectang.* l i e; *Sed quadratum* d f *ponitur duplum rectanguli* c d e; *ergò quadratum* i o *duplum erit rectanguli* l i e: *& ideo æquale rectangulo* l i n m. *Propterea circulus ex radio* i o *æqualis erit superficiei cylindricæ* l i n m; *& hoc semper vbicunq; sit punctum* i. *Ergo omnes circuli simul, siue conus cuius axis est* e d, *æquales erunt omnibus superficiebus cylindricis simul, siue solido cylindrico excauato* a b e c d. *Quod erat &c.* 2. Duodecimi. 5. p. de soli: sph.

Quod autem concordet cum Euclide l. 12. ostenditur. Nam conus *b e c*, ad conum eum qui habet axem *e d*, rationem habet compositam ex ratione altitudinum, nempe rectæ *p e* ad *e d*, siue rectanguli *p e d*, ad quadratum *e d*, & ex ratione basium, nempe quadrati *e d*, ad quadratum *d f*. Ergo conus *b e c*, ad conum cuius axis est *e d*, est vt rectangulum *p e d*, ad quadratum *d f*, nempe subduplus, ob constructionem; sed idem conus *b e c* subduplus est solidi excauati *a b e c d*, ergo etiam ex doctrina Euclidis patet solidum cylindricum excauatum *a b e c d*, æquale esse cono, cuius axis est *e d*, radius verò basis *d f*. &c.

Exemplum XII.

Q*Vilibet cylindrus rectus* a b, *cuius axis sit* c f, *æqualis est conoidi parabolico, cuius altitudo sit* c d; *semidiameter verò basis sit* d e, *quæ quidem potentià sit æqualis rectangulo* a b; *& erit circulus ex radio* d e *æqualis superficiei cylindricę* a b. 5. p. de solid. sph.



Intelligatur conuerti semiparabola ec d *circà axem* c d, *itàut prædictum conoides oriatur. sumpto deinde in axe* c d, *quolibet puncto* i, *per ipsum transeat in cylindro superficies cylindrica* il, *circà axem* cf; *at in conoide, circulus, cuius semidiameter sit* ih, *basi parallelus.*

Iam: superficies cylindrica ab: *ad cylindricam* il, *est vt rectangulum* ab, *ad rectangulum* il, *siue vt eorundem semibases*, dc *ad* ci, *siue vt quadratum* de *ad* ih; *nempe vt circulus, ex radio* de *ad circulum ex radio* ih. *Sed antecedentes ponuntur æquales, ergo etiam consequentes; nempe superficies cylindrica* il, *æqualis erit circulo ex radio* ih: *& hoc semper, vbicunque sit punctum* i. *Propterea omnes cylindricæ simul superficies omnibus circulis æquales erunt. videlicet cylindrus conoidi. Quod &c.*

6.p de solid sph. ob parabolam.

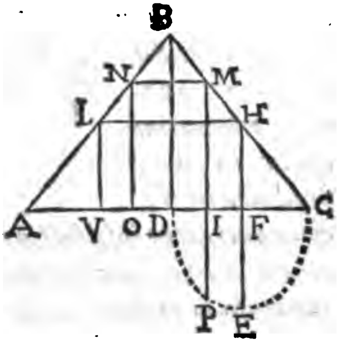
Demonstratur concordare cum Archimede hoc modo. cylindrus *ab* ad conum in conoide inscriptum, rationem habet compositam ex ratione altitudinum, nempe ex ratione *fc* ad tertiam partem *cd*, (pro cono inscripto, accipio cylindrum in eàdem quidem basi, sed cum altitudine subtripla) & ex ratione basium, nempe quadrati *cd* ad *de*, siue quadrati *cd*, ad rectangulum *ab*, siue rectæ *cd* ad duplam *cf*, siue in subtriplis vt tertia pars *cd*, ad duas tertias ipsius *cf*. Propterea cylindrus *ab*, ad conum in conoide inscriptum, erit vt *fc*, ad duas tertias ipsius *fc*, nempe sesquialter. Concordat itaq; cum 23. de Conoid. & sphæroid.

Exemplum XIII.

Q*Vilibet conus rectus* abc, *cuius axis sit* bd, *æqualis est sphæroidi, quæ axem habeat* dc, *nempe semidiametrum basis coni; & secta* dc *bifariam in* f, *semidiameter sphæroidis* fe *potentià sit subdupla trianguli* abc.

Compleatur rectangulum fhlu: *erit 4., ob suppositionem, recta* fe *cta* fe *æqualis potentià rectangulo* fl *: ideoq. circulus, cuius radius* fe, *aequalis erit superficiei cylindricæ, quæ transit per* fh *circà axem* bd. 5. p. de solid: sph:

Sumatur iam quodlibet punctū i *in axe* dc. *& per* i *transeat superficies cylindrica* imno: *& circulus in sphæroide, cuius radius sit* ip. *Superficies itaque cylindrica* fl, *ad cylindricam* in, *est vt rectangulum* fl *ad* in. *Nempe, rationem habet cōpositam ex ratione* fh *ad* im, *siue* fc *ad* ci; *& ex ratione* fu *ad* io, *vel* fd *ad* di. 6 p: de solid; sph:

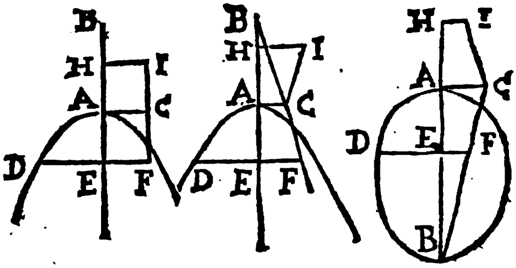


erit itaq. cylindrica fl, *ad cylindricam* in, *vt rectang.* dfc *ad rectang.* dic; *siue vt quadratum* fe *ad* ip, *nempe vt circulus ex radio* fe, *ad circulum ex radio* ip. *Sed antecedentes æquales sunt, ergo etiam consequentes: nimirum, superficies cylindrica* imno, *æqualis erit circulo ex radio* ip. *& hoc semper, vbicunq. punctum* i. *Ergò omnes omnibus: hoc est conus* abc, *æqualis erit sphæroidi prædictæ. Quod erat &c.* ob ellipsim.

Concordare cum Archimede ostendemus. Nàm; conus *abc*, ad conum in hemisphæroide inscriptum, rationem habet compositam ex ratione basium, nempe quadrati *dc*, ad quadratum *fe*; vel quadrati *dc* ad rectangulum *fl*; siue (cum rectangula habeant æqualem basim) rectæ *dc*, ad *fh*; siue *ac* ad *db*. Et ex ratione altitudinum, nempe *bd* ad *df*. Erit ergò conus *abc*, ad conum in hemisphæroide inscriptum, vt recta *ac* ad rectam *df*, nempe quadruplus. Concordat ergò cum Prop. 29 de Conoid. & sphæroid.

Exemplum XIV.

E*Sto parabola, vel hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cuius axis* ab; *semilatus rectum* ac *sit ad an-*



gulos rectos cum axe ab: *& coniuncta* bc *ab extremitate axis procedat. Sumatur iam qualibet ordinatim applicata* de, *producta in* f; *& conuertatur ipsa sectio conica circà axem* ae; *sed quadrilaterum* aefc *conuertatur circà* ac. *Dico solidum factum à conuersione trilinei* dae, *æquale esse solido* efcih, *facto à conuersione quadrilateri* aefc, *circà axem* ac *reuoluti*.

Nam; cum ac *sit semilatus rectum, erit quadratum applicata* de, *duplum rectanguli* aef, *& ideò æquale rectangulo* hef. *Propterea, circulus, cuius radius sit* de, *æqualis erit superficiei cylindricę, quæ describitur à rectà* ef, *circà axem* ac *conuersà. Et hoc semper, vbicunq; sit punctum* e. *Ergo omnes omnibus. Nempe omnes circuli simul, siue solidum conoidale, æquale erit omnibus superficiebus cylindricis simul sumptis, nempe solido descripto à quadrilatero* aefc, *circà axem* ac *conuerso. Quod &c.*

5: vide solid: sph:

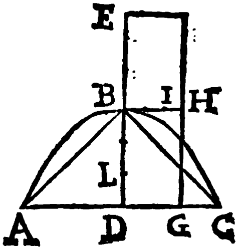
Scholium.

SI quis verò dubitet, an præcedens Theorema concordet cum Propositionibus Archimedis, omnem dubitandi occasionem delebunt tres sequentes demonstrationes.

Concordantia pro Conoide parabolico.

Esto conoides parabolicum *abc*. Ostendit Archim. Prop 23. de Conoid. & Sphæroid. Conoides *abc*, esse sesquialterum coni *abc*.

Esto

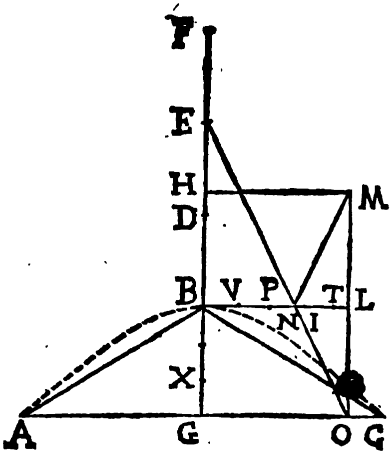


Esto solidum, quale discriptum est à quadrilatero *d b h g*, in precedenti constructione; quod quidem solidum in parabola, erit cylindrus. Secetur in tres partes equales tàm *b h*, quàm etiam *b d*. Eritq; conus *a b c* equalis cylindro super eàdem basi *a c* constituto, sub altitudine verò *d l*; considerabimusq; cylindrum hunc, pro dicto cono *a b c*.

Iam: cylindrus *g e*, ad conum *a b c*, siue ad cylindrum eius vicarium, rationem habet compositam, ex ratione altitudinum *h b* ad *l d*. & ex ratione basium, nempe circuli *e d*, ad circulum *a c*, siue quadrati *b d*, ad *d a*; siue recte *b d*, ad duplam *b h*. cum enim *b h* sit semilatus rectum, erit quadratum *a d* equale rectangulo sub *b d*, & dupla *b h*) siue in subtriplis, recte *l d* ad *b i* duas tert. ipsius *b h*. Est ergò cylindrus *g e*, ad conum *a b c*, vt *h b* ad *b i*; nempe sesquialter. Quod concludit etiam Archimedes de Conoide parabolico.

Pro Conoide Hyperbolico.

Esto deinde conoides hyperbolicum *a b c*, cuius latus versum *b e*; sitq; *f b* sesquialtera ipsius *b e*. Ostendit Archimedes Prop: 27. de Conoid. & sphero-id. quòd conoides *a b c*, ad conum *a b c*, est vt *f g* ad *g e*. Dico etiam solidum *h m n o g* genitum in Exemplo 14. ad conum *a b c* esse, vt *f g*, ad *g e*.



Secentur in tres partes æquales rectæ *b g*, *b n*, *n l*, eritq; conus *a b c* equalis cylindro cuidam, cuius basis sit eadem *a c*, altitudo verò subtripla, nempe *g x*. At solidum

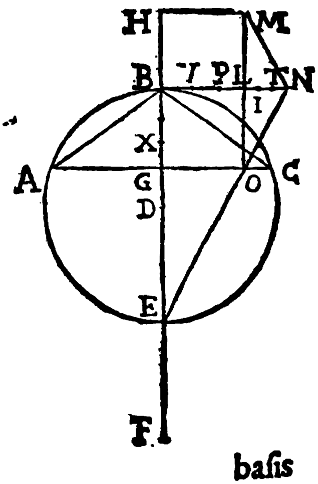
h m n o g

hmnog (cum nil aliud sit, nisi cylindrus quidam cui deest conus *mno*) ęquale erit cylindro super eadem basi *bg* constituto, cum altitudine verò *bt*. Considerabimus igitur tam solidum *hmnog*, quàm etiam conum *abc*, tanquam si essent cylindri iam dicti, eorumdem solidorum vicarij.

Iam: solidum *hmnog*, ad conum *abc*, rationem habet compositam ex ratione altitudinum *bt* ad *gx*, & ex ratione basium, nempe circuli *bg*, ad circulum *ac*; siue quadrati *bg*, ad quadratum *ag*; siue rectæ *bg*, ad duplam ipsius *go* (cum enim *bn*. sit semilatus rectum, erit quadratum *ag* æquale rectangulo sub *bg*, & dupla ipsius *go*.) siue, sumptis subtriplis, vt *gx*, ad duas tertias ipsius *go*, vel ad duas tertias *bl*. Erit ergò solidum *hmnog*, ad conum *abc*, vt *bt* ad *tu*. Quod memento.

Recta *be* ad *eg*, est vt *bn* ad *go*, siue vt *bn* ad *bl*, siue (in subsesquialteris) vt *nu* ad *ut*. Sumptis ergo antecedentium dimidijs, erit *fe* ad *eg*, vt *bu*, ad *ut*. & componendo, *fg*, ad *ge*, vt *bt*, ad *tu*. Propterea solidum *hmnog*, ad conum *abc*, (quod iàm ostendimus esse vt *bt*, ad *tu*) erit etiam vt *fg*, ad *ge*. Quod prorsus de conoide concludit etiam Archimedes Prop. 27. de Conoid. & sphęroid.

Pro segmento sphęroidali, vel spharico.



Esto portio sphæroidis, siue sphęræ *abc*, vel maior, vel minor; ponaturq; *ef* æqualis ipsi *ed*; nempe dimidio axis. Ostendit Archimedes Prop. 31. & 33. de Conoi. & sphær. portionem *abc*, ad conũ inscriptũ *abc*, esse vt *fg* ad *ge*. Dico etiam solidum *hmnog*, genitum in exemplo 14. ad eundem conum inscriptum *abc*, esse vt *fg* ad *ge*. Secentur in tres partes æquales, rectæ *bg*, *bl*, *ln*. eritque conus *abc* æqualis cylindro, cuius

basis

basis eadem sit cum cono, nempe ac; altitudo autem subtripla, nempe gx. Solidum verò $hmnog$, quia componitur ex cylindro $hmog$, & ex cono mno, æquale erit cylindro super eadem basi hg constituto, cum altitudine bi. Considerabimus igitur tam solidum $hmnog$, quàm etiam conum abc, tanquã fressent cylindri iam dicti eorumdem solidorum vicarij.

Iam: solidum $hmnog$, ad conum abc, rationem habet compositam ex ratione altitudinum bi ad gx; & ex ratione basium, nempe circuli hg ad ac, siue quadrati bg ad quadratum ga, siue rectæ bg ad duplam ipsius go. (cum enim bn, sit semilatus rectum, erit quadratum ag æquale rectangulo sub bg, & dupla go) siue sumptis subtriplis, vt gx ad duas tertias ipsius go, vel ad duas tertias bl. Ergo solidum $hmnog$ ad conum abc, erit vt ib ad bp. quod memento.

Recta bg ad ge, est vt no ad oe, siue vt nl ad lb, siue (in subsesquialteris) vt tl ad lu; Componendo autem be ad eg, erit vt tu ad ul; sumptisq; antecedentium dimidijs, erit fe ad eg, vt ip ad ul, siue ad pb: Et componendo, fg ad ge, erit vt ib ad bp. Propterea, solidum $hmnog$, ad conum abc (quod iam ostendimus esse: vt ib ad bp) erit etiam vt fg ad ge. Quod prorsus de portione sphæroidis concludit etiam Archimedes Prop. 31 & 33. de Conoid. & sphæroidibus.

Plura adhuc exhibere poteram exempla demonstrationum per Indiuisibilia curua procedentium, nisi superflua, immò etiã & molesta existimassem. Hoc vnum admoneo lectorem, in magna parte præcedentium Theorematum me facilitatis gratia fecisse casum Propositionis particularem, cum tamen facere potuissem vniuersalissimum. Exempli causa. Poteram (in figura primi exempli) supponere tangentem bc cuiuscunq; longitudinis, & deinde ostendere ita esse circulum ad triangulum, vt peripharia ad tangentem: sed faciliorem conclusionem iudicaui æqualitatem inferre, quàm proportionalitatem; præsertim cum in solido Hyperbolico de æqualitate tantùm ratio habeatur. Sitaq; Corollaria limitata plerumq; demonstraui, vice Theorematum vniuersalium, scias datà operà factum esse.

Defi-

Definitio.

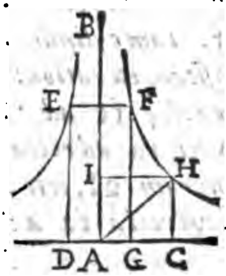
Si hyperbola circà asymptoton, tamquàm circà axem, conuertatur, solidum fiet (si secundum axem consideretur) longitudine infinitum, quod quidem Acutum solidum hyperbolicum nominabimus.

DE SOLIDO

Hiperbolico Acuto.

Lemma Primum.

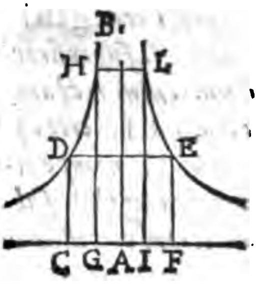
ESTO hyperbola, cuius asymptoti sint ab, ac, *angulum rectum continentes; & reuoluta figura circà axem* ab, *factum supponatur solidum acutum hyperbolicum infinitè longũ versus* b; *quemadmodum definitum est. Intelligatur iàm intrà ipsum acutum solidum, rectangulum aliquod per axem* ab *ductum, puta* defg. *Dico hoc rectangulum æquale esse quadrato semiaxis ipsius hyperbolæ.*



Ducatur ex a *centro hyperbolæ, semiaxis* ah, *qui angulum* bac *bifariam secabit; fiatq; rectang.* aihc; *quod omninò quadratum erit (nam cum rectangula figura sit, angulus* a *bifariam ab axe* ah *diuiditur). Ergò quadratum rectæ* ah *duplum erit quadrati* aihc, *siue duplum rectanguli* af. *& ideò æquale rectangulo* defg, *Quod erat propositum &c.* ex 12. secundi Conic.

Lemma II.

OMnes cylindri, circà cõmunem axem intrà solidum acutum hyperbolicum descripti, isoperimetri sunt. intellige semper sine basibus. Esto acutum solidum, cuius axis ab, *& intra ipsum intelligantur descripti circà cõmunem axem* ab *quotlibet cylindri* cdef, ghli. *Eruntq; æqualia rectã-*



gula

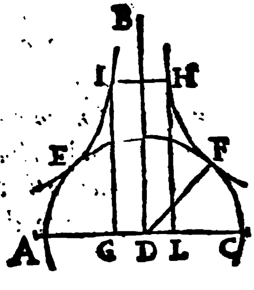
12 secundi Conic. 6 p de solid. sph. *gula per axem* ce, gl. *ergò æquales erunt etiam curuæ cylindrorum superficies. Quod erat.*

Lemma III.

OMnes isoperimetri cylindri (cuiusmodi sunt illi, qui in acuto solido hyperbolico describuntur) inter se sunt vt diametri suarum basium. *Quoniam enim, in præcedenti figurâ, æqualia sunt rectangula* ae, al; *erit vt* fe *ad* il, *ita* ia *ad* af. *Iam cylindrus* ce *ad cylindrum* gl, *rationem habet compositam ex ratione quadrati* fa *ad quadratum* ai; *& ex ratione rectæ* fe *ad* il; *siue ex ratione rectæ* ia *ad* af, *vel quadrati* ia *ad rectangulum* iaf. *Propterea cylindrus* ce *ad cylindrum* gl, *erit vt quadratum* fa *ad rectangulum* iaf; *nempe vt rectâ* fa *ad* ai. *Quod &c.*

Lemma IV.

ESto solidum Acutum abc, *cuius axis* db, *& centrum hyperbolæ sit punctum* d. *in quo scilicet asymptoti conueniunt. axis autem hyperbolæ sit* df. *Intelligatur ex centro* d, *ad interuallum* df *descripta sphæra* aefc, *quæ maxima erit omnium intra acutũ solidum describtibilium ex centro* d. *Sumptoq; cylindro quocunque intrà acutum solidum descripto, puta* gihl. *Dico cylindri* gh *superficiem subquadruplam esse superficiei sphæræ* aefc.



Cum enim rectangulum gh *per axem cylindri, æquale sit quadrato* df, *erit cylindrica superficies æqualis circulo qui fit ex radio* df *nempe circulo* aefc: *Propterea eadem superficies cylindrica* gihl *subquadrupla erit superficiei sphæræ* aefc, *cuius etiam circulus* aefc *subquadruplus est. Quod &c.*

4: de sol. sphær.

Lem-

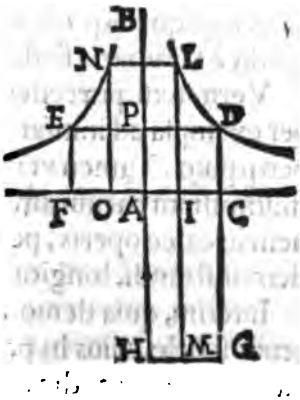
Lemma V.

CVinscunque cylindri ghil *intra solidum acutum descripti (vt in precedenti figura) superficies sine basibus æqualis est circulo cuius semidiameter sit linea* df. *nempe semiaxis, siue semilatus versum ipsius hyperbolæ. Hoc enim in ipso progressu præcedentis lemmatis demonstratum est.*

Theorema.

SOlidum acutum hyperbolicum infinitè longum, sectum plano ad axem erecto, vnà cum cylindro suæ basis, æquale est cylindro cuidam recto, cuius basis diameter sit latus versum, siue axis hyperbolæ, altitudo verò sit æqualis semidiametro basis ipsius acuti solidi.

Esto hyperbola cuius asymptoti *ab*, *ac* angulum rectum contineant; sumptoq; in hyperbola quolibet puncto *d*, ducatur *de* æquidistans ipsi *ab*, & *dp* æquidistans *ac*. Tũ conuertatur vniuersa figura circa axẽ *ab*. ità vt fiat solidum acutum hyperbolicum *ebd*, vna cum cylindro suæ basis *fedc*. Poducatur *ba* in *h*. ita vt *ah* æqualis sit integro axi, siue lateri verso hyperbolæ. Et circa diametrum *ah* intelligatur circulus erectus ad asymptoton *ac*: & super basi *ab* concipiatur cylindrus rectus *acgh*, cuius altitudo sit *ac*, nempe semidiameter basis acuti solidi. Dico solidum vniuersum *febdc*, quanquam sine fine longum, æquale tamen esse cylindro *acgh*.



Accipiatur in recta *ac*. quodlibet punctum *i*, & per *i*. intelligatur ducta superficies cylindrica *onli* in solido acuto comprehensa circa axem *ab*: item circulus *im* in cylindro *acgh* æquidistans basi *alh*.

Erit ergo prædicta superficies cylindrica *onli* ad circulum *im*, vt rectangulum per axem *ol*, ad quadratum radij circuli *im*; nempe vt rectangulum *ol*, ad quadratum semiaxis hyperbolæ; & ideo æqualis ex lemmate. Et hoc semper verum erit, vbicunq; sumatur punctum *i*. Propterea omnes simul superficies cylindricæ, hoc est ipsum solidum acutum *ehd*, vna cum cylindro basis *fedc*, æquale erit omnibus circulis simul, hoc est cylindro *acgh*. Quod erat &c.

Scholium.

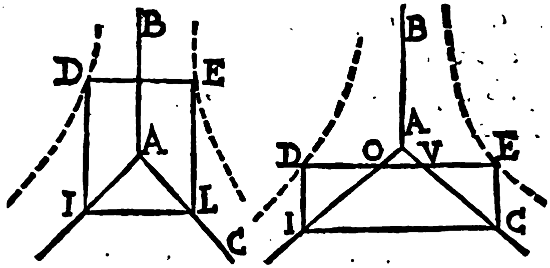
Incredibile videri potest, cum solidum hoc infinitam longitudinem habeat, nullam tamen ex illis superficiebus cylindricis quas nos consideramus, infinitam longitudinem habere; sed vnamquamq; esse terminatam; vt vnicuiq; patebit, cui vel modicè familiaris sit doctrina Conicorum.

Veritatem præcedentis Theorematis satis per se claram, & per exempla ad initium libelli proposita confirmatam satis superq; puto. Tamen vt in hac parte satisfaciam lectori etiam Indiuisibilium parùm amico, iterabo hanc ipsam demonstrationem in calce operis, per solitam veterum Geometrarum viam demonstrandi, longiorem quidem, sed non ideo mihi certioré.

Interim, quia demonstrationes exhibebimus de illo tantùm acuto solido, cuius hyperbolæ genitricis asymptoti angulum rectum contineant, dicamus hic obitèr, omissà demonstratione, quibus figuris æqualia sint acuta solida; quando asymptoton angulus obtusus fuerit, vel acutus.

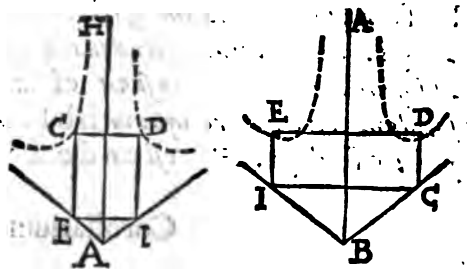
Demonstrationes, quas ad euitandam molem prçterimus, sibi lector industrius facili negotio comparabit.

Est o hyperbola cuius asymptoti *ab*, *ac* angulum obtusũ contineant; & reuoluta figura circa axem *ab* fiat solidum acutũ infinitè longum versus *b.* feceturq; (vt in prima fig.) plano *de* ad axẽ erecto. Erit solidum acutum *dbe* æquale cylindro *dile*,



& cono *ial.* In secunda verò figura sit planum secans *de*. erit solidum acutum vniuersum quod imponitur super circulo *de* sumpto etiam cono *oau*, æquale cylindro *ie*, & cono *iac* simul sumptis.

Quando verò angulus asymptoton acutus ponatur, & sit planum secans *cd* in prima figura. Erit solidum acutum *chd* vna cum cono *eai* æquale cylindro *ceid*. At in secunda figura erit vniuersum solidum acutum factum ex conuersione quadrilinei mixti *abeda* sine fine longi, duplum cylindri *iedc*.



Sequuntur iàm sub nomine Corollariorum Propositiones quædam ex præcedenti Theoremate promanãtes; quæ quidem aliquot prærogatiuas huius acuti solidi hyperbolici fortasse nõ contemnendas demonstrabunt.

Corollarium Primum.

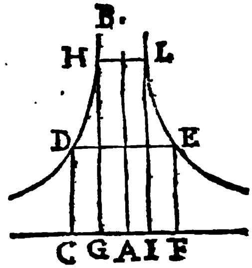
Acuta solida hyperbolica ebd, nbl, *quæ in figura pag. 115. ex sectionib.* ed, nl *ad axẽ erectis fiunt, vna cum cylindris suarum basium, inter se sunt vt diametri earundem basium, nempe vt recta* ed *ad* nl.

Nam resumpta præcedentis Theorematis figura, & constru-

ctione

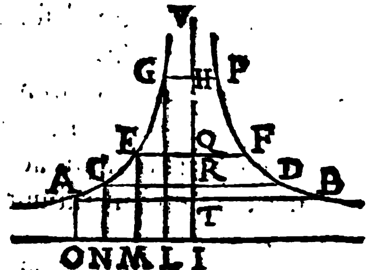
ctione, erit solidum febdc, *æquale cylindro* acgh. *& solidum* onbli *æquale cylindro* aimh, *Ergo solidum ad solidum erit vt cylindrus ad cylindrum, nempe vt* ca *ad* ai, *siue sumptis duplis vt recta* fc *ad* oi; *siue vt* ed *ad* nl. *Quod erat &c.*

Corollarium II.



Acuta solida hyperbolica dbe, hbl, *etiam sine cylindris suarum basium sumpta, inter se sunt vt diametri earumdem basium, nempe vt* de *ad* hl. *Descriptis enim basium cylindris* cdef, ghli, *erit totum solidum* cdbef, *ad totum solidum* ghbli *vt* cf *ad* gi. *Sed ablatus cylindrus* ce *ad ablatum cylindrum* gl *est vt* cf *ad* gi. *Ergo reliquum etiam solidum* dbe, *ad reliquum* hbl *erit vt totum ad totum; nempe vt* cf *ad* gi. *Hoc est vt* de *ad* hl. *Quod &c.*

Corollarium III.



Esto solidum acutum sectum planis ab, cd, ef, gp *ità vt sectionum semidiametri sint vt numeri naturalitèr ab vnitate progredientes (quod facile fiet, si accepta ad libitum* il, *æquales ipsi* il *secentur* lm, mn, no *&c. ductisq;* lg, me, nc *&c. ad axem parallelis, per puncta* g, *&* e, *&* c *&c. agantur secantia plana.) Dico omnia frusta intercepta æqualia esse tum inter se, tum etiam acuto solido* gup.

Patet hoc. Nam cum acuta solida sint vt diametri basium: & in hoc casu diametri basium ponantur vt numeri naturalitèr ab

vni-

vnitate progredientes, etiam acuta solida gup, euf, cud *&c. in eadem Aritmetica ratione erunt. Ergo omnes excessus, nempe omnia frusta aqualia erunt tam inter se, quam etiam acuto solido* gup. *vt erat propositum &c.*

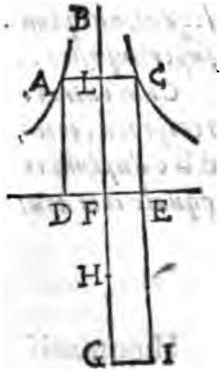
Scholium.

Poterat etiam proponi hoc modo. Si fuerit solidum acutũ sectum plano *g p* vbicunque. Sumaturq. *b q* semissis axis *b i*. Deinde sumatur *q r* ter. pars axis *q i*; iterumq; accipiatur *r t* quar. pars axis *r i*: postea accipiatur quinta pars reliqui axis. & hoc semper; & per puncta sectionum plana agantur; erunt ead. ut supra &c.

Corollarium IV.

Acutum solidum hyperbolicum abscissum plano ad axem erecto, aquale est cylindro sua basis.

Esto solidum acutum abc *abscissum plano* ac *ad axem erecto (hoc enim modo intelligemus semper plana secantia, quod oportet meminisse) & supponatur solidum infinitè productum ad partes* b. *Dico solidum* abc, *aquale esse cylindro sua basis nempe* dace.

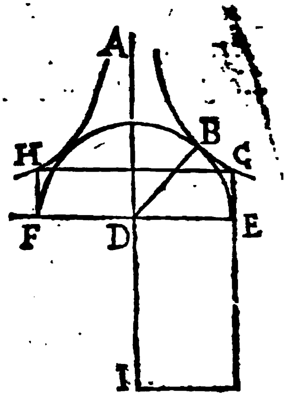


Fiat enim cylindrus feig *vt in Theoremate pag. 115. Eritq; totum solidum* dabce, *ex demonstratis equale cylindro* fi. *Iam cylindrus* fi, *ad cylindrum* dc, *rationem habet compositam ex ratione quadrati* ht *ad* fe *& ex ratione recte* fe *ad* ec; *siue quadrati* fe *ad rectangulum* fec. *Cylindrus itaq;* fi *ad cylindrum* dc, *est vt quadratum* fh *ad rectangulum* fc, *nempe duplus. Propterea solidum vniuersum* dabce *(cum aquale sit cylindro* fi*) duplum erit cylindri* dc. *Et diuisim, erit solidum acutũ* abc *aquale sua basis cylindro* dace. *Quod &c.*

Corol.

Corollarium V.

Maximum hemisphærium f b e, *intra solidum acutum inscriptibile ex* d *centro hyperbolæ, subsesquialterum est vniuersi solidi* f h a c e *ipsum hemisphærium ambientis. Solidum autem* f h a c e *constat ex acuto solido infinitè longo* h a c, *& ex cylindro basis hemisphærium tangente* f h c e.



Facto enim cylindro i e *vt in Theoremate pag. 115. erit hemisphærium* f b e *subsesquialterum cylindri* i e; *Cum eandem altitudinem habeat, & basim eandem, nempe circulum cuius radius est semiaxis* d b. *Subsesquialterum ergo erit ipsum hemisphærium etiam solidi* f h a c e, *quod æquale demonstratum est cylindro* i e. *&c.*

Corollarium VI.

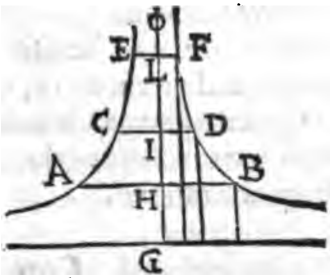
Esto solidum acutum cuius axis a b, *(in figura pag. 118.) sectum vbicunq; plano* d e. *Secetur verò & altero plano* h l, *quod capiat portionem axis duplam. Dico frustum solidum* d h l e, *à secantibus planis interceptum æquale esse solido acuto* h b l *sibi superimposito.*

Cum enim rectangula c e, g l *sint æqualia, & latera eorum reciproca, erit recta* d e *dupla ipsius* h l, *& ideo solidum acutũ* d b e *duplum erit acuti solidi* h b l, *& diuidendo, frustum* d h l e *æquale erit acuto solido* h b l. *Quod &c.*

Scholium.

Hinc manifestum est, quòd si acutum solidum secetur vti dictum est, frustum interceptum *d h l e* (quod duas bases habebit) æquale semper erit cylindro minoris basis *g h l i*. Subduplum verò erit cylindri maioris basis *e d e f*.

Corollarium VII.

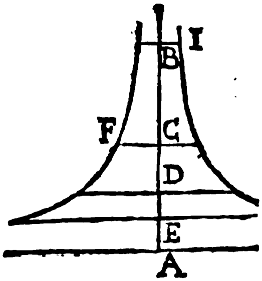


Esto solidum acutum sectum à tribus planis ab; cd, ef, *secantibus axem solidi proportionaliter; hoc est, sit vt* gh *ad* gi, *ita* gi *ad* gl. *Dico frustum* acdb *ad frustũ* cefd *esse vt* li *ad* ih. *nempe in reciproca ratione altitudinum.*

Cum enim rectangula gf, gd, gb. *sint ęqualia, & latera eorum reciproca, erunt tres rectæ* hb, id, lf, *in eadem continua proportione in qua sunt* gl, gi, gh. *Sed solida acuta* aob, cod, eof *sunt vt basium semidiametri* hb, id, lf, *siue vt* gl, gi, gh, *ergo excessus solidorum inter se erunt vt excessus linearum. Nempe frustum solidum* acdb, *ad frustum* cefd *erit vt* li *ad* ih. *Quod &c.*

Scholium.

Ex demonstratis patet primò, quomodo datum frustum *a e f b* *in fig. præced.* secari possit plano *c d*, ita vt factæ portiones inter se sint vt altitudines, reciprocè tamen sumptæ. Quod quidem fit sumendo *g i* mediam proportionalem inter *g l*, *g b*.

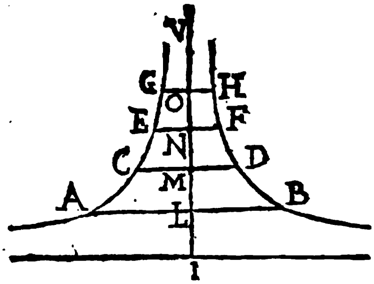


Manifestum etiam est, quòd si sumatur quodlibet segmẽtum axis, puta *a b*. & secetur bifariam in *c*. deinde *a c* secetur bifariam in *d*; reliquum autem *a d* bisecetur in *e*; & sic semper. Erunt frusta solida intercepta à planis per *b*, *c*, *d*, *e*, ductis, in continua proportione in qua axes, siue axium differentię. Eritq; primum, & subtilissimũ frustũ *fi* æquale acuto solido sibi superimposito. At secundum frustũ duplum erit primi; tertiũ quadruplum primi, 4. verò octuplum, quin tum sedecuplum: & sic semper; quò magis ad centrum *a* accedemus, maiora præcedentibus erunt frusta, & multiplicia secundum numeros in proportione dupla progredientes ab vnitate.

Si verò sumatur quodlibet segmentum axis *a e*, cuius duplum ponatur *a d*; & ipsius *a d* duplum secetur *a c*, & sic deinceps; eadem euenient, vt supra dictum est.

Quæcunq; autem diximus exemplo allato de ratione dupla, verum etiam est de tripla, quadrupla; sesquialtera, & de quacunq; alia ratione.

Corollarium VIII.



Si solidum acutum sectum fuerit planis ab; cd, ef, gh, *&c. ita vt axis portiones à cētro* i *incipientes, nempe* il, lm, mn, no *&c. æquales sint; erit primū frustum* ad, *ad secundum* cf *vt 3. ad vnum: secundum verò frustum ad tertiū erit vt 4. ad 2; Tertium ad quartum erit vt 5. ad 3. quartum ad quintum vt 6. ad 4.; Et sic semper vt numeri binario differentes; addita scilicet semper vnitate vtrique termino rationis.*

Nam solidum acutum aub *ad solidum acutum* cud, *est vt* al *ad* cm, *nempe vt* mi, *ad* il, *hoc est duplum. Et diuidendo, erit frustum* ad *æquale solido acuto* cud. *siue vt 3. ad 3. Solidum vero* cud *ad solidum* euf *est vt* cm *ad* en, *siue vt* ni *ad* im, *nempe vt 3. ad 2. Et per conuersionē rationis erit solidum* cud *ad frustum* cf *vt 3. ad vnum. Ergo ex æquo erit frustum* ad *ad frustum* cf *vt 3. ad unum. Quod &c.*

Eodem modo penitus ratio reliquorum frustorum consequentium ostenditur esse talis qualis proposita est.

Scholium.

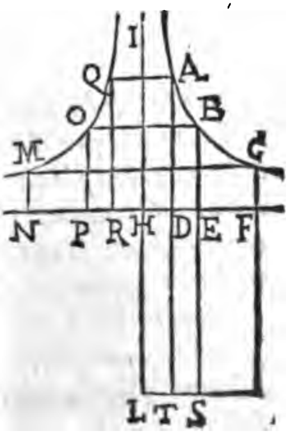
Patet in progressu demonstrationis primum frustum *ad* æquale

quale esse solido acuto sibi imposito *cud*. At secundum frustũ *ef* duplum est solidi *euf* sibi impositi; Tertium verò triplum; quartum quadruplum. & sic in infinitum.

Corollarium IX.

Si solidum acutum à cylindricis superficiebus diuisum fuerit, erunt solida annularia inter cylindricas superficies intercepta, inter se, vt sunt portiones asymptoti ab ipsis cylindricis superficiebus abscissę.

Sit hyperbola abc, *& lineæ quotcunq;* ad, be, cf. *parallelæ asymptoto* hi; *& conuertatur figura circa asymptotō* hi. *Dico solidum descriptum à quadrilineo* ebcf, *ad solidum descriptum à quadrilineo* dabe, *esse vt recta* fe *ad* ed.

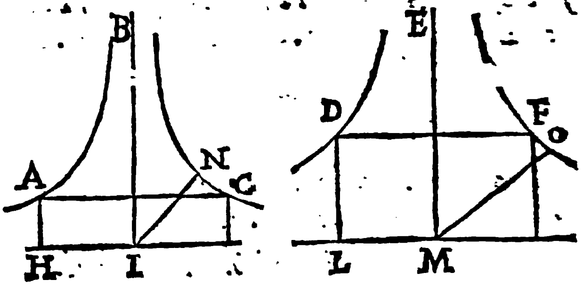


Fiat enim cylindrus lf, *vt in Theoremate pag. 115. eritq; solidum* nmicf *æquale cylindro* lf. *Et solidum* poibe, *æquale cylindro* le. *ablatis ergo æqualibus, remanebit cylindrus* sf *ęqualis solido sibi respondenti facto à quadrilineo* ebcf. *Pari ratione cylindrus* te *ęqualis ostendetur solido sibi respondenti facto à quadrilineo* dabe; *erit igitur ob æqualitatem, solidum quadrilinei* ebcf *ad solidum quadrilinei* dabe *vt cylindrus* sf *ad cylindrum* te, *nempe vt recta* fe *ad* ed. *Quod &c.*

Corollarium X.

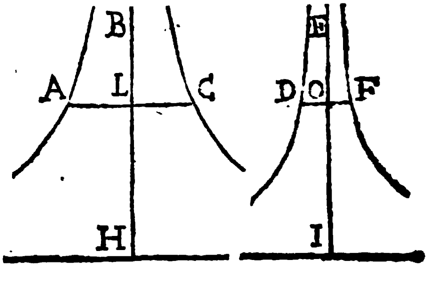
Acuta solida abc, def. *super basibus æqualibus* ac, df *constituta, & à conuersione inæqualium hyperbolarum descripta, sunt inter se in duplicata ratione axium suarum hyperbolarum.*

Intelligantur enim sub basibus solidorum cylindri hc, lf, *eritq; solidum* abc *æquale cylindro* hc; *&* *solidum* def. *æquale cylind.* lf. *Propterea solidũ* abc *ad solidum* def, *erit ut cylind.* hc *ad cylind.* lf. *sive (cum æquales bases habeant) ut altitudo* ha *ad altitudinem* ld. *sive ut rectangulum* hc *ad rectangulum* lf. *hoc est, sumptis æqualibus, ut quadratum axis* in *ad quadratum axis* mo. *Quod &c.*



Corollarium XI.

Acuta solida abc, def *facta ab inæqualibus hyperbolis, & secta planis* ac, df *ita ut portiones axis* lh, oi *æquales sint; erunt inter se ut bases, nempe ut circulus* ac *ad circulum* df.



Hoc autem patet. Nam solidum abc *æquale est cylindro cuius basis sit* ac *altitudo verò* lh. *& solidum* def *æquale est cylindro cuius basis sit* df *altitudo vero* oi. *Ergo solidum* abc *ad solidum* def *erit ut prædictus cylindrus ad dictum cylindrum, nempe (cum æquales altitudines habeant) ut basis* ac *ad basim* df. *Quod erat &c.*

Corollarium XII.

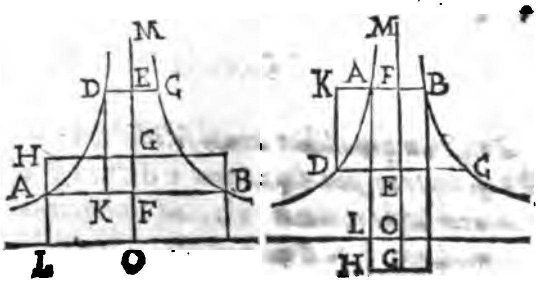
Acuta solida quæcunq; sint abc, def; *in p. fig. huius pag. inter se sunt ut solida rectang. basi quadrato axium hyperbolarum; alti-*

altitudine verò diametro basium eorumdem solidorum. Hoc est, solidum abc *ad solidum* def *erit ut solidum parallelepipedum basi quadrato axis* in, *altitudine* ac. *ad parallelepipedum basi quadrato axis* mo, *altitudine* df.

Factis enim de more cylindris hc, lf; *ratio cylindri* hc *ad cylindrum* lf *componetur ex his tribus rationibus. nempe ex ratione altitudinis* ha *ad* ld. *& ex ratione basiũ, siue ex ratione rectę* ac *ad* df, *iterumq; ex ratione rectæ* ac *ad* df. *Ergo ratio cylindri* hc *ad* lf, *componitur ex ratione rectanguli* hac *ad rectangulum* ldf, *siue quadrati* in. *ad quadratum* mo, *& ex ratione recta* ac *ad rectam* df. *Propterea etiam ratio solidi acuti* abc *ad solidum acutum* def *composita erit ex ratione quadrati* in *ad* mo, *& ex ratione rectę* ac *ad rectam* df. *Ergo patet propositum.*

Corollarium XIII.

Dato acuti solidi frusto quocunq; adcb, *æqualem ipsi cylindrũ exhibere super altera sui base quæcunque sit. puta* ab.



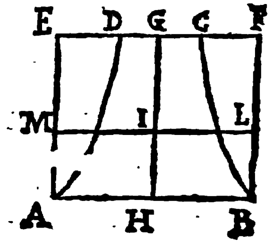
Fiat ut recta ab *ad* dc *ita* ef *ad* fg. *Dico cylindrum* hb *cuius altitudo sit* fg, *basis verò* ab *æqualem esse frusto* ac.

Ducatur dk *parallela ad* ef. *Eritq;* fo *ad* oe, *ut* de, *siue* Kf *ad* fa. *Propterea* of *ad* fe *erit ut* fk *ad* ka. *Sed* ef *ad* fg *est ut* af *ad* fK, *ergo per perturbatam erit* of *ad* fg *ut* fa *ad* aK. *Quod memento.*

Iam acutum solidum amb *ad acutum solidum* dmc *est ut* ab *recta ad* dc, *uel ut* af *ad* de, *hoc est ut* af *ad* fk, *Ergo erit solidum acutum* amb, *siue cylindrus* lb *ipsi æqualis, ad frustum* adcb *ut* fa *ad* aK, *hoc est* of *ad* fg, *hoc est ut cylindrus*

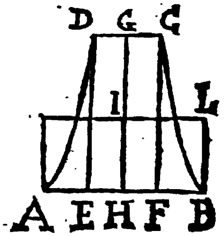
lindrus lb *ad cylindrum* bh. *Constat igitur cylindrum* lb *eidem habere rationem & ad frustum* adcb, *& ad cylindrum* bh. *Quare cylindrus* bh *equalis erit dato frusto acuti solidi, & super altera eiusdem basi. Quod &c.*

Corollarium XIV.



Circumscriptus cylindrus aefb *ad frustum acuti solidi* adcb. *est ut diameter* ab *maioris basis ad diametrum* dc *minoris basis. Fiat enim ut* ab *ad* dc *ita* gh *ad* hi, *& erit cylindrus* amlb *equalis frusto solido per Cor. precedens. Cylindrus autem* af *ad cylindrum* al *est ut* gh *ad* hi; *hoc est ut* ab *ad* dc. *Quare cylindrus circumscriptus* aefb *etiā ad frustum* ac *erit ut recta* ab *ad* dc. *Quod &c.*

Corollarium XV.



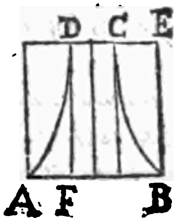
Frustum quodlibet acuti solidi adcb *ad inscriptum sibi clyndrum* edcf, *est ut diameter basis maioris* ab, *ad diametrum minoris basis* dc. *Fiat enim ut* ab *ad* dc. *ita* gh *ad* hi, *eritq; cylindrus* al *equalis frusto* ac. *Erit insuper cylindrus* al *isoperimeter cylindro* ec, *quandoquidem latera eorum facta sunt reciproca, & ideo rectangula per axem equalia. Erit ergo (per lemma 3. huius) cylindrus* al *siue frustum* adcb, *ad cylindrum inscriptum* ec *ut diametri basium; siue ut recta* ab *ad* ef, *hoc est ut* ab *ad* dc. *Quod &c.*

Corol. 23 (margin, beside "ita gh ad hi")

6. primi de solid. sphæral. (margin, beside "perimeter cylindro ec")

Corollarium XVI.

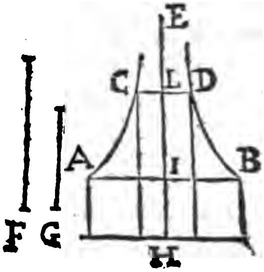
Frustum quodlibet acuti solidi adcb. *medium proportionale est inter inscriptum, & circumscriptum sibi cylindrum.*



Demonstratum enim est in duobus praecedentibus Coroll. quòd circumscriptus cylindrus a e *ad frustum* adcb *est ut recta* ab *ad* dc. *Frustum verò* adcb *ad inscriptum cylindrũ est ut* ab *ad* dc. *Ergo constat quòd frustum est mediũ proportionale inter duos cylindros. Quod erat &c.*

Corollarium XVII.

Datum acutum solidum aeb *in data ratione secare ut* f *ad* g. *Fiat ut* g *ad* f *ita data* hi *ad* il. *& per* l *agatur planum* cd. *Eritq; conuertendo, & cōponendo* f *&* g, *simul ad* g *ut* lh *ad* hi, *siue ut* ab *ad* cd, *vel ut solidum* aeb *ad solidum* ced; *& diuidendo patet propositum.*



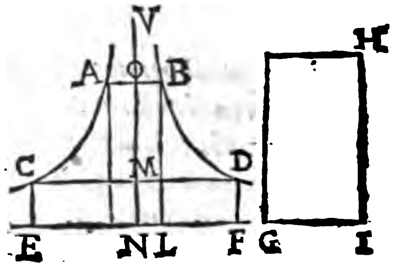
Si verò basis acuti solidi sit cd, *& oporteat illud secare iterum inferius versus hyperbolę centrum plano* ab, *ita ut frustũ* acdb *ad reliquum solidum* ced *quamlibet datam rationem habeat ut* f *ad* g. *Ita imperata exequemur. Fiat ut* f *&* g *simul ad* g, *ita data* lh *ad* hi; *& per* i *ducatur planum* ab. *erit que ut* f, *&* g *simul ad* g, *ita* ab *ad* cd; *siue solidum* aeb *ad* ced; *& diuidendo patet propositum. Quod erat &c.*

Corollarium XVIII.

Dato solido acuto secto plano ab. *frustum accipere* cabd *versus* n *centrum hyperbolæ, quod sit æquale cuicumq; dato cylindro* gh *molis etiam immensæ.*

Fiat

Fiat ut cylindrus al *ad cylindrum* gh *ita recta* nl *data ad rectam* lf. *& erecta* fd *ductoq; plano* dc. *Dico frustum* cb *aequale esse cylindro* gh.



Nam cylindrus al *ad* gh, *est ut recta* nl *ad* lf, *& conuertendo, componendo, iterũque conuertendo, erit cylindrus* al *ad cylindros* al, gh, *ut* ln *ad* nf, *siue ut* ob *ad* md; *siue ut solidum acutum* aub *ad solidum acutum* cud; *siue ut cylindrus* al *ad solidum acutum* cud. *Aequales ergo sunt duo simul cylindri* al *&* gh, *acuto solido* cud. *Demptisq. aequalibus, nempe cylindro* al *& solido acuto* aub, *remanet cylindrus* gh *aequalis frusto* cabd. *Quod &c.*

Versus verticem vero limitatione opus est. Esto Datum solidum acutum sectum plano cd, *debeatq; sumi frustum* cabd *versus verticem, aequale cylindro dato* gh *(dummodo cylindrus* gh *minor sit cylindro* ecdf.)

Fiat, ut cylindrus ed *ad* gh, *ita recta* nf *data, ad* fl, *& erecta* lb, *dico frustum* cabd *aequale esse cylindro dato* gh.

Nam recta fn *ad* nl, *est ut* dm *ad* bo, *siue ut acutum solidum* cud *ad acutum* aub; *& per conuersionem rationis* nf *ad* fl, *erit ut acutum solidum* cud, *siue ut cylindrus* ed *ad frustum* cabd. *Sed ut* nf *ad* fl, *ita est etiam cylindrus idem* ed *ad* gh, *aequantur ergo frustum* cabd, *et cylindrus* gh. *Quod &c.*

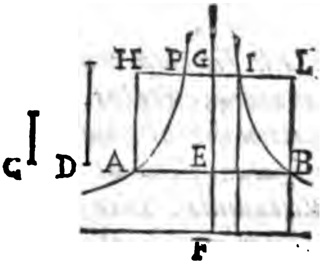
Scholium.

Ex priori parte huius demonstrationis patet solidum hyperbolicum versus infinitam planitiem ef magnitudine infinitum esse. potest enim ex ipso sumi pars ipsius quae aequalis sit cuicũque magnitudini datae:

Corol

Corollarium XIX.

Esto solidum acutum sectum plano ab. *Oportet illud secare iterũ alio plano* pi, *ita vt frustum* api b *ad cylindrum sibi circumscriptũ, sit vt* c *ad* d; *dummodo ratio* c *ad* d, *sit minoris inæqualitatis.*

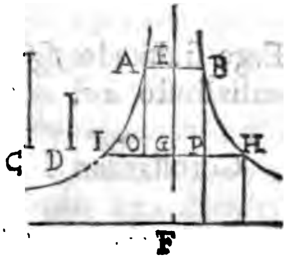


Fiat, vt c *ad* d, *ita data* ef *ad* fg; *& per* g *ducatur planum* hl. *Eritq;* c *ad* d, *vt* ef *ad* fg, *nempe (ob æqualia rectangula) vt* ig *ad* be, *hoc est vt frustum* ai *ad cylindrum* al. *Quod &c.*

Si verò datum planum secans sit pi, *& solidum secandum sit inferius versus* f *iterum eadem lege, ita procedemus. Fiat vt* c *ad* d, *ita* ef *ad datam* fg. *& per* e *ducatur planum* ab. *Eritq; frustum* ai *ad cylindrum* al, *vt* gi *ad* eb, *siue vt* ef *ad* fg, *hoc est vt* c *ad* d. *Quod erat &c.*

Corollarium XX.

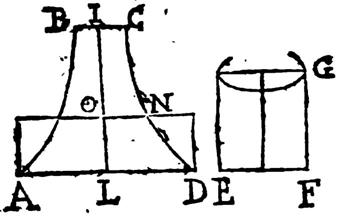
Esto solidum acutum sectum plano ab. *oportet illud iterum secare versus* f. *ita vt frustum intersectiones comprahensum, ad inscriptum sibi cylindrum quamlibet datam rationem maioris inæqualitatis habeat, vt* c *ad* d.



Fiat, vt c *ad* d, *ita data* ef *ad* fg; *ductoq; per* g *plano* ih. *Erit frustum* ib *ad cylindrum inscriptum* ob, *vt* gh *ad* eb, *siue vt* ef *ad* fg, *siue vt* c *ad* d. *Quod &c.*

Si vero planum secans datum sit ih, *& secandum sit solidũ iterum eadem lege versus infinitam longitudinem. fiat vt* c *ad* d *ita* ef *ad datam* fg. *Eritq; frustum* ib *ad cylindrum* ob *vt* ef *ad* fg, *nempe vt* c *ad* d. *Quod &c.*

Corollarium XXI.



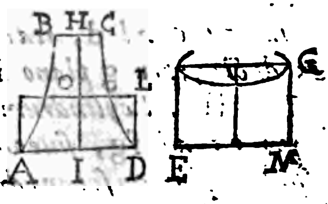
Esto frustum acuti solidi abcd *ponaturq; circulus*. ef *medius proportionalis inter bases* ad, bc, *& erigatur cylindrus* eg *cuiuscunq; altitudinis. Dico frustum* ac *ad cylindrum* eg *esse vt recta* il *ad* gf.

Fiat enim vt recta ad *ad* bc *ita* il *ad* lo, *& ad altitudinẽ* lo *erigatur cylindrus* an, *qui equalis erit frusto* ac (*per coroll. 13.*) *Iam cylindrus* an *ad cylindrum* eg, *rationem habet compositam ex ratione basium, nempe quadrati* ad *ad* ef; *hoc est ex ratione recta* ad *ad* bc; *siue potius recta* il *ad* lo *& ex ratione altitudinum, nempe* lo *ad* fg. *Ergo cylindrus* an *ad* eg, *erit vt recta* il *ad* fg; *Propterea etiam frustũ* ac *ad cylindrum* eg *erit vt* il *ad* fg. *Quod &c.*

Scholium.

Ergo si altitudo *fg* fiat æqualis ipsi *il* erit cylindrus *eg* æqualis frusto *ac*.

Corollarium XXII.



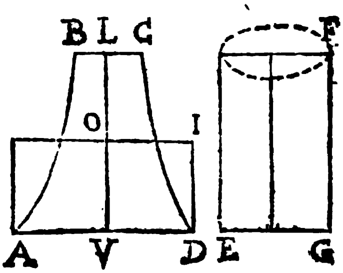
Esto frustum acuti solidi abcd, *quod habeat alteram ex suis basibus (quæcunq; illa sit) puta* ad, *æqualem basi* em *cylindri* eg. *Dico frustum* ac *ad cylindrum* eg *esse vt rectangulum sub diametro in-*

qualis

qualis basis, & sub altitudine frusti, ad rectangulum per axem cylindri. Nempe ut rectangulum bc, hi *ad rectangulum* eg.

Fiat ut ad *ad* bc *ita* hi *ad* io; *erectoq; cylindro* al *cum altitudine* io, *erit frustum* ac *æquale cylindro* al. *Iam cylindrus* al *ad* eg, *ob æquales bases, est ut* oi *ad* gm, *Sed ratio recta* oi *ad* gm, *componitur ex ratione recta* oi *ad* ih, *siue* bc *ad* ad, *hoc est* bc *ad* em; *& ex ratione* hi *ad* gm. *Ergo ratio* oi *ad* gm *erit eadem quæ est rectang.* bc, hi *ad rectangulum sub* em, mg. *Propterea etiam cylindrus* al, *siue frustum* ac *ad cylindrum* eg *erit ut rectangulum* bc, hi, *ad rectangulum* emg. *Quod &c.*

Corollarium XXIII,



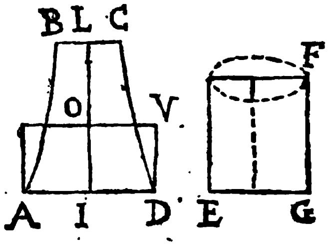
Si frustum acuti solidi abcd *& cylindrus* ef *æquales altitudines habuerint. Erit frustum* ac *ad cylindrum* ef *ut rectangulum sub* bc, ad, *ad quadratum* eg.

Fiat ut ad *ad* bc, *ita* lu *ad* uo. *eritq; frustum* ac *æquale cylindro* ai *cuius altitudo sit* uo. *Iam cylindrus* ai *ad cylindrum* ef, *rationem habet cōpositam ex ratione altitudinum* uo *ad* gf; *siue* uo *ad* ul *siue* bc *ad* ad; *nempe ex ratione rectang.* bc, ad, *ad quadratum* ad. *Et ex ratione basium; nempe quadrati* ad *ad* eg. *Ergo cylindrus* ai, *siue frustum* ac, *ad cylindrum* ef, *erit ut rectang. sub* bc, ad, *ad quadratum* eg. *Quod &c.*

Corollarium XXIV.

Frustum acuti solidi abcd, *ad cylindrum quemlibet* ef, *rationem habet compositam ex ratione rectanguli* bc, li *ad rectangulum* ad, gf; *& ex ratione quadr.* ad *ad quadratū* eg.

Fiat vt ad *ad* bc, *ita* li *ad* io; *eritque cylindrus* au *æqualis frusto* ac. *Iam recta* io *ad rectam* gf, *est vt rectangulum sub* bc, li *ad rectangulum sub* ad, gf. (*nam ratio rectæ* io *ad* gf, *componitur ex ratione* io *ad* il, *siue* bc *ad* ad; *& ex ratione* il *ad* gf. *Ergo recta* io *ad* gf, *est vt rectangulum* bc, il *ad rectangulum* ad, gf.) *Sed cylindrus* au *ad cylindrum* ef *rationem habet compositam ex ratione* io *ad* gf, *nempe ex ratione rectanguli* bc, li, *ad rectangulum* ad, gf; *& ex ratione quadrati* ad *ad* eg. *Propterea etiam frustum* ac *ad cylindrum* ef *rationem habebit compositam ex ratione rectanguli* bc, li, *ad rectangulum* ad, gf; *& ex ratione quadrati* ad *ad* eg. *Quod &c.*

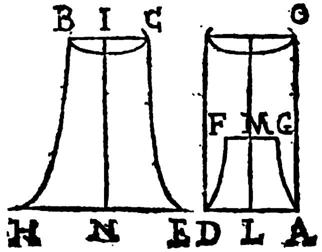


Scholium.

Poterat etiam proponi sic. Frustum *ac* ad cylindrum *ef*, rationem habet compositam ex ratione rectanguli *ad*, *il*, ad rectangulum *bc*, *fg*; & ex ratione quadrati *bc*, ad *eg*.

Corollarium XXV.

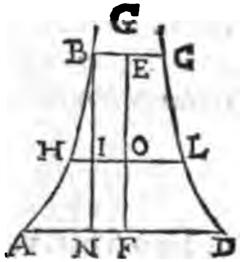
Sint duo frusta acutorum solidorum qualiacunque. Dico frustum hbce *ad frustum* dfga, *habere rationem compositam ex ratione rectangulorum basium, & ex ratione altitudinum; nempe ex ratione rectanguli* bc, he *ad rectangulum* fg, da; *& ex ratione rectæ* in *ad* ml.



Fiat

Fiat enim super basi da *cylindrus* do *cum altitudine* ao, *quæ sit æqualis ipsi* ni. *Eritq; (per Coroll. 23.) frustum* hc *ad cylindrum* do, *vt rectangulum* bc, he *ad quadratum* da. *Cylindrus autem* do *ad frustum* dg *est (per Coroll. 22.) vt rectangulum* dao *ad rectangulum* fg, ml. *Nempe ad illud, rationem habet compositam ex ratione rectæ* da *ad* fg, *siue ex ratione quadrati* da *ad rectangulum* da, fg. *Et ex ratione rectæ* oa *ad* ml, *siue* in *ad* ml. *Ratio itaq; frusti* he *ad frustum* dg *componitur ex rationibus, rectanguli* bc, he, *ad quadratum* da; *& ex ratione quadrati* da *ad rectangulum* da, fg: *& ex ratione rectæ* in *ad* ml. *Demptoq. medio illo termino superfluo nempe quadrato* da. *Erit ratio frusti* hc *ad frustum* dg *composita ex ratione rectanguli* bc, he, *ad rectangulum* da, fg; *& ex ratione rectæ* in *ad* ml. *Quod erat &c.*

Corollarium XXVI.



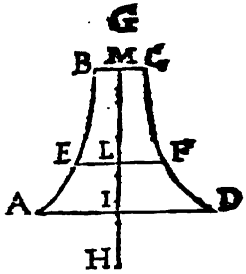
Esto frustum solidi acuti abcd *sectũ plano* hl; *ducaturq;* bn *parallela ad axẽ. Dico, totum frustum* abcd *ad partem* hbcl, *esse vt* an *ad* hi.

Nam solidum acutum agd, *ad solidũ* bgc, *est vt* af *ad* be, *siue vt* af *ad* fn; *& diuidendo frustum* abcd *ad solidum acutum* bgc *erit vt* an *ad* nf, *siue vt* an *ad* io. *Solidum verò* bgc *ad frustum* hc *(simili argumento) est vt* oi *ad* ih. *Ergo ex æquo. frustum* ac, *ad* hc *erit vt* an *ad* hi. *Quod &c.*

Scholium.

Hinc patet quomodo datum frustum acuti solidi in data ratione secari possit, quod tamen ad finem Corollariorum elegantiori problemate exequemur.

Corollarium XXVII.



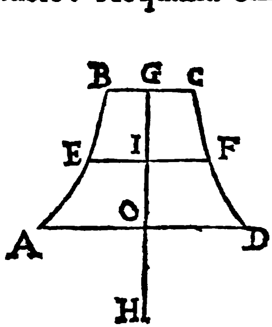
Esto frustum solidi acuti abcd. *cuius axis* mi. *sitq; centrum hyperbolæ punctũ* h. *Secetur deinde frustum* ac *plano quocunq;* ef *ad axem erecto. Dico frustum* af, *ad frustum* ec. *esse vt rectangulum sub* il, hm, *ad rectangulum sub* hi, lm.

Nam frustum af *ad frustum* ec, *rationem habet compositam ex ratione frusti* af *ad acutum solidum* egf; *& ex ratione solidi longi* egf, *ad frustum* ec. *Sed quia solidum acutum* agd *ad acutum solidum* egf *est vt recta* ai *ad* el; *siue vt recta* lh *ad* hi, *erit diuidendo frustum* af *ad solidum* egf *vt* li *ad* ih. *Amplius: Solidum* egf *ad solidum* bgc *est vt* el *ad* bm, *siue vt* mh *ad* hl; *& per conuersionem rationis, erit solidum* egf *ad frustum* ec, *vt* hm *ad* ml. *Patet ergò quòd ratio frusti* af *ad frustum* ec, *componitur ex ratione* li *ad* ih, *& ex ratione* hm *ad* ml *Propterea frustum* af *ad* ec, *erit vt rectangulum sub* li, hm, *ad rectangulum sub* ih, lm. *Quod &c.*

Scholium.

Ideò si fiat, vt *mh* ad *hi*, ita *ml*, ad *li*. Bifariam secabitur frustum *ac* à plano per punctum *l* ducto. Aequalia enim erunt ipsa rectangula.

Corollarium XXVIII.

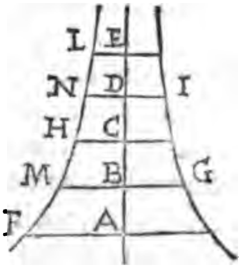


Si axis frusti abcd *bifariam secetur à plano* ef. *Erunt portiones inter se, nempe* af. *ad* ec *vt recta* ad *ad* bc. *scilicet vt diametri basium remotarum.*

Frustum enim af *ad* ec, *est ut rectangulum sub* hg, oi *ad rectangulum sub* ho, ig *per praeced: Sed* oi, *&* ig, *altitudines rectangulorum sunt aequales, Ergò frustum* af *ad* ec, *erit ut* gh *ad* ho, *siue ut* ad *ad* bc. *Quod &c.*

Scholium.

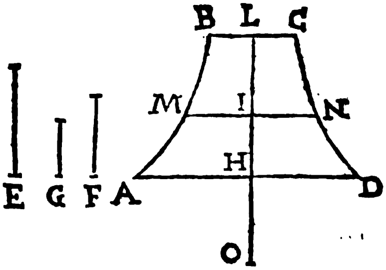
Hinc patet; quò d si in solido longo hyperbolico quotcunq; sumantur axis portiones deinceps æquales *a, b, c, d, e.* vbicunq; fiat initium. Erit frustum *fg* ad *gh* vt recta *fa* ad *hc.* Frustum verò *gh* ad *hi* erit ut *mb* ad *nd.* & frustum *hi* ad *il* ut *hc*, ad *le.* & sic in infinitum.



Corollarium XXIX.

Datum acuti solidi frustum abcd *in data ratione secare; puta vt* e *ad* f.

Fiat, vt recta ad *ad* bc, *ita* e *ad aliam quae sit* g. *Deinde fiat, vt* g *ad* f, *ita* hi *ad* il, *& per* i *ducatur planū* mn



Iam frustum an *ad* mc *est vt rectangulum* lo, ih, *ad rectangulum* li, oh. *Ergò ratio frusti* an *ad* mc *componitur ex ratione laterum* lo *ad* oh, *siue* ad *ad* bc, *siue* e *ad* g. *Et ex ratione laterum* hi *ad* il, *siue* g *ad* f. *Ergò ratio frusti* an *ad* mc. *componitur ex ratione* e *ad* g, *&* g *ad* f. *Propterea erit* an *frustum ad* mc *vt* e *ad* f. *Quod &c.*

Iam ista sufficiat demonstrauisse, ex plurimis Theorematibus, quæ ex fæcundissimo hoc solido deriuari poterant. Interim ad promissam demonstrationem accedamus, quam tamen præterire poterit quicunq; iam allatà contentus fuerit.

DE

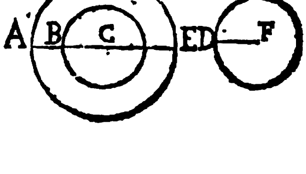
De Dimensione Acuti solidi Hyperbolici iuxtà methodum Antiquorum.

SVpereſt nunc vt Theorema illud, quod poſt lemma Quintum oſtendimus per methodum, & doctrinam Indiuiſibilium, demonſtremus iterùm more Antiquorum, & præcipuè Archimedis. Impoſſibile enim quodammodo videtur, infinitam longitudine figuram ſub ſolita figurarum inſcriptione, & circumſcriptione poſſe compræhendi. Tamen id non ſolum à nobis factum eſt, verum etiam à Clariſſimo viro, & Geometra præſtantiſſimo Roberuallio, qui noſtrum ſolidum hyperbolicũ inuẽtis arduis, ſublimibus, acutiſſimis, & vt breuitèr dicam ſuis, menſurauit, eiuſq; fruſtum in data ratione diſſecuit. Abſtineo ab illius demõſtrationis editione inuitus. comparuit enim eius epiſtola eo prorſus tempore, quo iàm hęc prælis ſubijcerentur, neque de voluntate Authoris ſatis conſtabat, neque iam per tẽpus licebat expectare, donec illius beneplacitum ex Gallia Pariſijq; ſignificaretur. Veniamus itaq; ad lemmata opportuna, quorum primum ſit.

Lemma Primum.

Differentia, qua eſt inter duos circulos, ad circulum quemlibet tertium; eſt vt rectangulum comprahenſum ſub differentia, & aggregato ſemidiametrorum eorundem circulorum, ad quadratum ſemidiametri tertij illius circuli.

Vocetur autem talis differentia duorum circulorum, quando concentrici fuerint, Armilla.

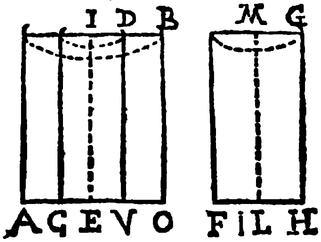


Eſto Armilla, ſiue differentia duorum circulorum concentricorum, illa cuius latitudo a b, *centrum verò* c. *Dico Armillam* a b, *ad circulũ quemlibet* d f; *eſſe vt rectangulum* abe, *ad quadratum semidiametri* df.

Nam circulus ex radio ac, *ad circulum ex radio* cb, *est vt quadratum* ac, *ad quadratum* cb; *& diuidendo Armilla* ab, *ad circulum ex radio* cb; *erit vt rectangulum* abe, *ad quadratum* cb. *Circulus verò ex radio* cb, *ad circulum ex radio* df, *est vt quadratum* cb, *ad quadratum* df. *Ergò ex æquò, erit Armilla* ab, *ad circulum* df, *vt rectangulum* abe, *ad quadratum* df. *Quod erat &c.* per 2. duodecimi. ex 5. secundi.

Lemma II.

Si ex cylindro recto ab, *ablatus fuerit cylindrus* cd, *circa communem axem* ie *constitutus; reliquum solidum excauatum quod remanet, æquale erit cylindro cuidam recto* fg, *cuius quidem basis* fh *æqualis sit Armillæ, quæ circa centrum* e *latitudinem habet* ac; *altitudo verò* lm *æqualis sit altitudini* ei.

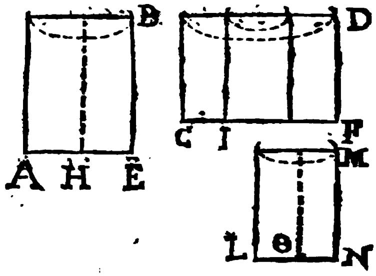


Vocetur autem tale solidum excauatum, tubus cylindricus.

Quoniam tres cylindri ab, cd, fg, *æquealti sunt; Erit cylindrus* ab *ad* cd, *vt circulus* ao *ad circulum* cu. *& diuidendo erit tubus cylindricus ad cylindrum* cd, *vt armilla* ac *ad circulum* cu; *sed cylindrus* cd *ad cylindrum* fg, *est vt circulus* cu *ad circulum* fh. *Ergo ex æquo erit tubus cylindricus* ab, *ad cylindrum* fg, *vt armilla* ac *ad circulum* fh. *Sed armilla* ac *circulo* fh *supponitur æqualis; ergò & tubus cylindricus* ab, *æqualis erit cylindro* fg. *Quod erat &c.*

Lemma III.

Quilibet cylindrus rectus ab, *ad quemlibet tubum cylindricum rectum* cd, *rationem habet compositam ex ratione altitudi-*



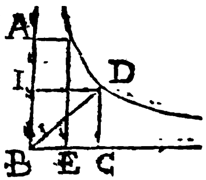
titudinum, nempe eb *ad* fd; *& ex ratione basium; nempe ex ratione quadrati* ah *ad rectangulum* cif. *(demonstratum enim est ita esse circulum* ae *ad armillam* ci, *ut quadratum* ah *ad rectangulum* cif.)

Lib. 1.

Ponatur cylindrus lm, *cuius altitudo* nm *sit aequalis altitudini* fd; *basis verò* ln, *aequalis sit armillae* ci; *Et erit, per praecedens lemma, tubus cylindricus* cd *aequalis cylindro* lm.

Iam cylindrus ab, *ad tubum* cd *eandem habebit rationem quam habet ad cylindrum* lm; *nempe compositum ex ratione altitudinis* eb *ad* nm, *siue ad* fd; *& ex ratione basium, hoc est circuli* ae *ad circulum* ln; *siue quadrati* ah *ad quadratum* lo, *vel quadrati* ah, *ad rectangulum* cif. *Quod erat &c.*

Lemma IV.



p. ..

Esto hyperbola cuius asymptoti sunt ab, bc, *angulum rectum comprehendentes; sitque hyperbolae semiaxis* bd. *(semiaxem appello, quia* b *punctum in quo asymptoti concurrunt, centrum hyperbolae est.) Dico quadratum rectae* bd, *duplum esse cuiuscunque rectanguli* ae, *inter asymptotos, & hyperbolam ipsam comprehensi.*

Ducantur dc, di *asymptotis aequidistantes; eritq; figura* bidc, *quadratum: cum anguli ad* b *semirecti sint; sed ad* c, *& ad* i *recti. Ideo quadratum lineae* bd, *duplum erit quadrati* bidc; *siue rectanguli* ae, *inter asymptotos, & hyperbolam ipsam comprahensi. Quod erat &c.*

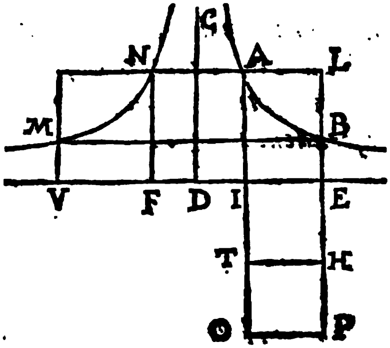
ex 12. sec. Con.

Lemma V.

Esto hyperbola ab, *cuius asymptoti angulum rectum conti-*

nen-

mentes sint cd, de; *Sumptisq; duobus punctis* a, b, *utcumq; in hyperbola, ducantur duæ recta* be, ai, *asymptoto* cd. *æquidistantes, &* an, bm *alteri asymptoto* de *parallelę, quæ concurrant in* l. *Tum conuertatur uniuersa figura circa axē* cd.



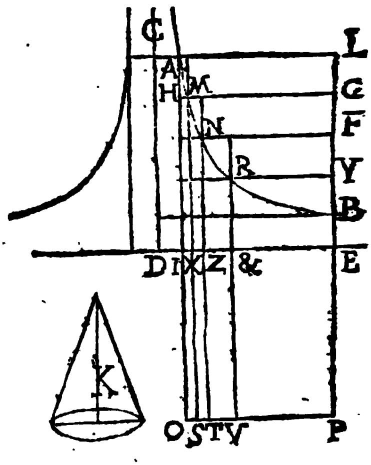
Dico cylindrum quemdam iepo *(cuius quidem basis* io *habeat semidiametrum* it *æqualem semiaxi hyperbolæ; altitudo verò sit intercepta* ie.*) maiorem esse tubo illo cylindrico, qui fit ex conuersione rectanguli* ib *circa axem* cd; *Minorem verò tubo illo qui fit ex conuersione rectanguli* il, *circa eundem axem reuoluti.*

In primis; quia it *est æqualis semiaxi hyperbolæ, erit quadratum* it *duplum rectanguli* db, *siue æquale rectangulo* ub. *Iam: cylindrus* oe, *ad tubum qui fit ex rectangulo* ib *(intellige semper circa axem* cd*) rationem habet compositam ex ratione basium; nempe ex ratione quadrati* it, *siue rectanguli* ub, *ad rectangulum* uie. *Hoc est (abiectis rectangulis) ex ratione lateris* ue *ad* ei: *& ex ratione lateris* eb *ad* iu. *Et insuper ex ratione altitudinum; nempe rectę* ei *ad* eb. *Ergo ratio cylindri* oe *ad tubum* ib, *componitur ex prædictis tribus rationibus; scilicet. ex ratione recta* ue *ad* ei: *& ex ratione* ei *ad* eb; *& ex ratione* eb *ad* iu. *propterea cylindrus* oe, *ad tubum* ib, *erit vt primus terminus ad vltimum; nempe vt recta* ue *ad* iu; *hoc est minor. Quod erat ostendendum primò.* Lem. præcedens. Lem 35

Ratio verò cylindri oe, *ad tubum, qui fit ex rectangulo* il, *cōponitur ex ratione basium, scilicet ex ratione quadrati* it, *vel rectanguli* in, *ad rectangulum* uie; *hoc est (abiectis rectangulis) ex ratione lateris* fi, *ad* ie; *& ex ratione reliqui lateris* ai, *ad* iu. *Et insuper ex ratione altitudinum, nempe* ie *ad* ai. *Er-*

gò ratio cylindri o e, *ad tubum* i l, *componitur ex his tribus prædictis rationibus; nempe ex ratione* f i *ad* i e; *&* i e *ad* a i; *&* a i *ad* i u. *Propterea cylindrus* o e, *ad tubum* i l, *erit ut primus terminus* f i *ad vltimum* i u. *& ideo minor. Quod erat ostendendum &c.*

Lemma VI.



Esto hyperbola cuius asymptoti c d, d e *angulum rectum comprehendant, sumptisq. in hyperbola vtcumque duobus punctis* a *&* b; *ducantur* a i, b e *asymptoto* c d *parallelæ.*

Dico solidum illud annulare quod describitur ex conuersione quadrilinei mixti i a b e, *circa axem* c d *reuoluti, æquale esse cuidam cylindro recto* i e p o. *Debet autem huius cylindri altitudo esse* i e; *diameter verò basis* i o, *debet esse æqualis integro axi ipsius hyperbolæ.*

Sit enim (si possibile est) solidum illud annulare factum ex quadrilineo i a b e, *circa axem* c d *reuoluto, minus cylindro* o e: *& ponatur defectus æqualis cuidam solido* K.

Secetur b l *bifariam in* f. *deinde reliqua* f l *secetur bifariã in* g; *Et hoc fiat semper donec tubus aliquis cylindricus, qui describitur ex reuolutione rectanguli* a l g, *minor sit solido* K. *Tunc enim secta tota* b l, *in partes æquales vltimę* g l, *ducantur à singulis punctis diuisionum, rectæ* g h, f n, y r, *æquidistantes ipsi* d e. *Ex punctis verò* m, n r. *in quibus prædictę parallelę hyperbolam secant, demittantur rectæ, siue potius plana* m s, n t, r u, *ad asymptoton* d e *erectæ. Denique ex conuersio-*

uersione singulorum rectangulorum æqualium, quorum vnum est a g, *totidem tubi cylindrici describantur circa axem* c d.

Iam: tubus qui fit à rectangulo r b *(intellige semper circa axem* c d*) ob æqualem altitudinem, eandemque basim, æqualis erit tubo* r f. *additoq; communi tubo* r n. *erunt duo tubi* b r, r n *simul sumpti æquales tubo* n y, *siue tubo* n g. *Additoq. communi* n m. *erunt tres tubi* b r n m, *æquales tubo* m f, *siue* m l; & *addito communi vltimo* m a, *erunt omnes tubi simul* b r n m a, *æquales tubo* a g, *nempe minores solido* K. *ob constructionem. Propterea vniuersa figura solida constans ex tubis* e r, & n, z m x a, *circumscripta solido annulari facto à quadrilineo* i a b e, *minus addit supra ipsum solidum annulare, quàm sit solidum* K. *Ergo ipsa figura circumscripta adhuc minor erit cylindro* o e. *Quod est absurdum. Nam tubus* a x. *superat cylindrum* x o; *Tubus item* m z *superat cylindrum* z s. & *sic de reliquis per lemma 5.* Lem. 5.

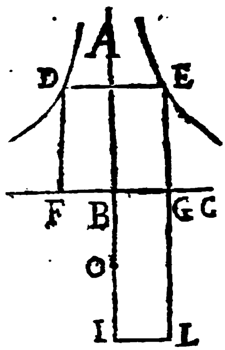
Ponatur deinde (si possibile est) solidum annulare genitum ex quadrilineo i a b e, *maius esse cylindro* o e. *ponaturq. excessus æqualis solido cuidam* K.

Peragatur similis constructio, vt supra; ita vt omnes tubi cylindrici b r n m a, *minores iterum ostendantur solido* k. *Tunc enim figura inscripta in solido annulari prædicto, constans ex tubis* & b, z r, x n, i m, *minus deficiet ab ipso solido annulari, quàm sit solidum* k. *Propterea eadem inscripta figura adhuc maior erit cylind.* o e. *Quod est absurdum. Nam tubus* x b *minor est cylindro* x o; & *tubus* x n *minor est cylindro* x t. *Et sic de reliquis.* Lem. 5.

Patet ergo, quòd solidum annulare genitum ex conuersione quadrilinei i a b e, *circa axem* c d, *æquale est cylindro* o e. *Siquidem ostensum est, neq; minus, neq. maius esse posse.*

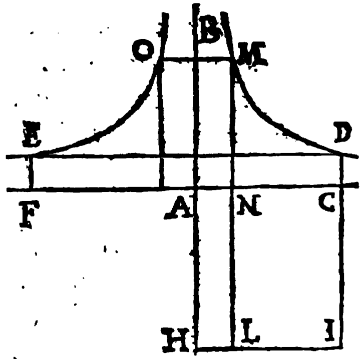
Lemma VII.

Esto hyperbola, cuius asymptoti angulum rectum continentes sint a b, b c; & *conuertatur figura circa axem* a b, *ita ut fiat solidum hyperbolicum, cuius infinita sit longitudo versus partes* a. *Secto deinde huiusmodi solido, plano* d e *ad axem erecto,* *Esto, super basi* de *concipiatur cylindrus* df ge, *habens altitudinem* df. *Intelligaturque alius cylindrus* bgli, *cuius altitudo sit* bg, *basis verò semidiameter* bo *ponatur aequalis semiaxi hyperbolę*. *Dico cylindrum* bl *duplum esse cylindri* fe.



Nam cylindrus bl *ad cylindrum* fe, *rationem habet compositam ex ratione basium, nempe ex ratione quadrati* ob *ad* bg; *& ex ratione altitudinum, nempe ex ratione rectę* bg *ad* ge, *siue quadrati* bg *ad rectangulum* bge. *Ergò cylindrus* bl, *ad cylindrum* fe, *est vt quadratum* ob, *ad rectangulum* be. *Nempe duplus*. *Quod erat &c.*

Theorema.



Esto hyperbola, cuius asymptoti angulum rectũ continentes sint *ab*, *ac*. Et sumpto in hyperbola quolibet puncto *d*, ducatur *de* parallela ad *ba*. Tum cõuertatur figura circa axem *ab*; ita vt fiat solidum acutum hyperbolicum infinitæ longitudinis versus partes *b*, (intellige semper punctum *b* in infinitam distantiã esse remotum.) Constabitq. prædictum solidum hyperbolicum ex duobus solidis, nempe ex cylindro recto *fedc*, & ex solido acuto *ebd*, cuius quidem basis erit circulus *ed*, altitudo verò sine fine.

Dico vniuersum huiusmodi solidum *febde* æquale esse cylindro cuidam recto *acih*. cuius altitudo sit *ac* (nempe semidiameter basis acuti solidi) diameter verò basis *ah*. æqualis sit integro axi hyperbolæ.

Sit enim (si possibile est) solidum hyperbolicum *febdc* minus cylindro *ai*. Ponaturq; ex cylindro *ai* cylindrus aliquis *ncil*, qui æqualis sit solido hyperboblico: & producatur *lnm* donec hyperbolæ occurrat in *m*. (occurret enim, cum asymptoto *ab* supponatur parallela.)

Iam cylindrus *ni*, æqualis erit solido annulari, quod describitur à reuolutione quadrilinei mixti *nmdc*; & propterea mi- *Lem.6.*
nus omninò erit solido integro hyperbolico *febdc*. Non ergo eidem est æqualis. Quod est contra suppositum.

Ponatur deinde (si possibile est) solidum hyperbolicum *febdc* maius cylindro *ai*. Quoniam igitur solidum hyperbolicum *febdc*. (siue finitæ magnitudinis sit, siue infinitę) maius supponitur quàm cylindrus *ai*. Erit aliquod ipsius segmentũ, puta *feomdc*, æquale cylindro *ai*. Quod est absurdum. Nã
solidum annulare factum à reuolutione quadrilinei *nmdc*, ę- *Lem:6:*
quale est cylindro *ni*; Cylindrus autem *on* subduplus est cy-
lindri *nh*. Ergò tota portio solidi hyperbolici *feomdc*, mi- *Lem:7:*
nor erit cylindro *ai*.

Patet ergo, quòd vniuersum solidum acutum hyperbolicum *febdc*, quamquam infinitæ longitudinis sit, æquale tamen est prædicto cylindro *ai*. Quandoquidem neque minus, neq; maius esse potest. Quod erat ostendendum &c.

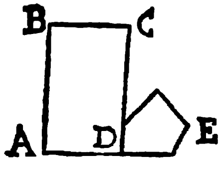
APPEN-

APPENDIX
De Dimensione Cochleæ.

CVM adhuc à nemine, quod ego sciam, Geometrica consideratione examinatum sit solidum vulgatum, & antiquissimum, meoq; iudicio aliqua animaduersione non indignū (Cochleam intelligo,) non abs re fore iudicaui illud breui cōtemplatione prosequi. Non enim aliena erit à præcedenti libello præsens speculatio, quæ per Indiuisibilia curua, superficiesq; cylindricas procedit. Neq; ingratum Geometris opus futurum existimo, si demonstrauero cui figuræ notæ iam dimensionis, æquale sit solidum quiddam neque rectum, neque rotundum, sed spirali reuolutione contortum, quale nullum adhuc inter mensuratas figuras possidet Geometria. Præmissa itaq; definitione veniamus ad lemmata, qua fieri poterit breuitate, expedienda.

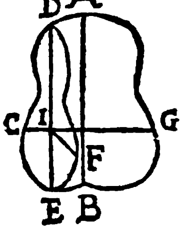
Definitio.

SI eodem tempore moueantur duæ planæ figuræ, quæ semper in eodē plano consistant, nempe rectāgulum *a b c d*. circa axem *a b* motu circulari æquabili, & figura quæcunq; *d e* motu progressiuo super latere *d c*. Solidum quod à figura genitrice *d e* describitur, Cochleam appello.



Lemma Primum.

Esto solidum quodlibet rotundum a c b g; *cuius axis sit* a b, *figura genitrix* a b c; *sectūq. sit plano* d f e *æquidistantèr axi, & ad figuram genitricem erecto, quod quidem faciat in superficie solidi rotundi semisectionem lineam* d f e. *Dico*

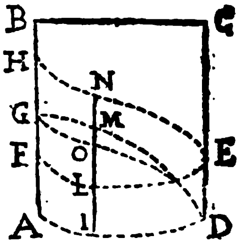


soli-

solidum illud rotundum quod oritur ex reuolutione figuræ dfe, *circa axem* de, *æquari solido quod describitur à figura* dce *circa axem* ab *reuoluta*.

Intelligatur enim solidum rotundum secari alio plano per cf g *ducto, & ad axem* ab *erecto, eruntq; puncta* cfg *in semicirculi periphæria cuius diameter est* cg; *& ideò quadratum* if *æquale erit rectangulo* cig, *& propterea (per lemma primũ præcedentis demonstrationis) circulus cuius radius* if, *æqualis armillæ quam recta* ci *describit circa axem* ab. *Et hoc semper verum erit vbicunq; sit planum secans* cfg. *Ergo omnes simul circuli, nempe solidum rotundum factum à reuolutione figuræ* dfe *circa axem* de, *æquales erunt omnibus armillis simul sumptis, hoc est solido facto à figura* dce, *reuoluta circa axem* ab. *Quod erat &c.*

Lemma II.

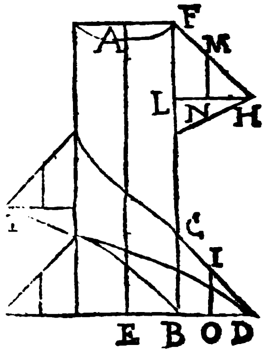


Esto cylindrus rectus abcd, *& ex recta* ed *tamquam termino duæ rectæ lineæ in superficie cylindrica æquales ipsi* ed *moueantur: quarum altera puro circulari motu Zonam* efad *describat, altera vero quocunque motu Zonam* ehgod *designans, moueatur donec ambæ ad vnum, idemque latus cylindri, puta* ab *peruenerint, Dico huiusmodi zonas, siue zonarum portiones inter se esse æquales.*

Concipiatur enim trigonus cylindricus superior hfe *transferri, & supra inferiorem* gad *collocari, ita vt periphæria* fe *ipsi* ad *superponatur, quæ necessariò congruent, cum sint arcus æqualium circulorum & rectæ siue chordæ* fe, ad *(si ducantur) æquales sint per Propositionem 33. Primi elementorum Euclidis.*

Ipsa etiam recta fh *congruet cum recta sibi æquali* ag, *aliàs duæ rectæ se intersecarent in superficie cylindrica, quod esse non potest. Ipsa tandem curua* hne, *qualiscunq; sit, congruet cum* *curua* g o d. *Nisi enim congruat; esto: Et sit* g m d *translata curua* h n e, *qua non congruit cum* g o d. *ductaq.* i n *in superficie cylindri, erit* m i *inęqualis ipsi* i o; *ergo etiam* n l, *cum ęqualis sit* m i, *erit inaequalis ipsi* i o, *quod esse non potest; Cum enim per suppositionem ęquales sint* i l, o n, *additaq: siue ablatà communi* l o, *erit tota* i o, *aequalis toti* n l. *Propterea totum triangulum cylindricum* h f e *ęquale est triangulo cylindrico* g a d. *& ideo, per prosthaphęresim, Zona* e f a d, *zonę* e h g d *est ęqualis. Quod &c.*

Lemma III.



Si rectangulum a b, *& figura quęcunque genitrix* b c d *moueantur, ut in definitione positum est donec peracta integra reuolutione ad idem planum redeant unde ceperant moueri. Dico factam cochleā primae reuolutionis* d g h, *aequalem esse annulo circulari, qui ab eadem figura genitrice describetur circa axem* a e.

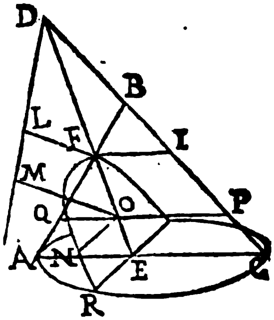
Concipiatur enim figura b c d *describere primum cochleam primae reuolutionis* d g h, *quę initium habeat à figura* b c d, *& finem in figura* l f h. *Deinde intelligatur describere annulum circularem in se redeuntem, qui habeat initium, & finem in figura eadem* b c d.

Accipiatur in figura b c d *qualibet recta* i o *parallela axi* a e, *quę quidem recta* i o *in reuolutione duas zonas cylindricas, & aequales (per lemma pręcedens) describet, in una eademq: cylindrica superficie, alteram quidem in cochlea, alteram verò in annulo. Et ęquales semper erunt, ubicunq; sumatur recta* i o. *ergo omnes simul Zonę cylindricę quę sunt in cochlea, ęquales erunt omnibus simul Zonis cylindricis quę sunt in annulo, propterea & ipsa cochlea ęqualis erit ipsi annulo. Quod &c.*

Corollarium.

Hinc manifestum est omnes cochleas primae reuolutionis esse in-se inter se æquales, quandoquidem singulę eidem annulo circulari æquales sunt.

Lemma IV.

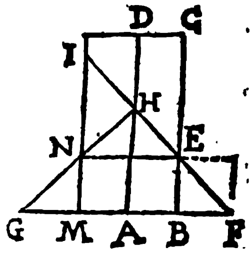


Manentibus ijs quæ Apollonius supponit in XI, XII, & XIII, primi Conicorum. Esto conus abc, *sectus plano non verticali per* fnr, *faciente in superficie coni sectionem* fnr, *quæcunq; illa sit; cuius diameter esto* fe. *Ducaturq;* fi *æquidistans ipsi* ac. *Tum fiat, vt* fe *ad* ea *(partem basis trianguli per axẽ à vertice coni auuersam) ita* if *ad* fl. *Dico* fl *esse latus rectum sectionis.*

Ponatur fl *ad punctum* f *vtcumque, & ducatur* dl *ab extremitate axis: Accepto deinde quolibet puncto* n *in sectione, applicetur* no, *& per* o *agatur* qp *æquidistans ipsi* ac; *at* om *ducatur parallela ad* fl. *Erit iam* fo *ad* oq, *vt* fe *ad* ea, *siue vt* if *ad* fl; *nempe vt* po *ad* om, *ob parallelas; Ergo rectangula* fom, poq *sunt æqualia; quamobrem rectangulum* fom *æquale erit quadrato* on, *& propterea* fl *rectum figuræ latus. Quod &c.*

Licet hoc verum sit in omni sectione coni, solam hyperbolam depiximus, quoniam sola hyperbola facit ad rem nostram.

Lemma V.



Si rectangulum ac, *in eodem existens plano cum triangulo orthogonio* ebf. *conuertatur circa manens latus* ad *donec ad locum redeat vnde cæpit moueri. Dico annulum circularem descriptum à triangulo* ebf *æqualem es-*

se conoidi cuidam hyperbolico, cuius altitudo sit be; *cuius latus rectum sit quarta proportionalium si fiat vt* eb *ad* bf *ita dupla* ba *ad aliam. Versum verò latus quarta sit proportionalium, si fiat vt* fb *ad* be, *ita dupla* ba *ad aliam*,

Conuertatur figura vti dictum est, & rectangulum ac *describat cylindrum cuius sectio per axem* cm; *intelligaturque productam esse rectam* fe, *donec cum axe conueniat in* h, *& cum* mi *in* i. *Manifestum est triangulum* haf *describere conum* ghf, *cuius axis est* ah. *Concipiatur iàm secari conum* ghf *æquidistantèr axi plano per* eb, *siue per* inm *ducto, quod quidem planum erectum sit ad figuram genitricem coni, nempe ad planum* ghf. *Eritq. sectio in cono* ghf *hyperbola; Et propterea solidum quod describitur à triangulo* mng, *siue* ebf, *circa axem* ad, *æquale erit (per lemma primum) conoidi hyperbolico à prædicta hyperbola descripto. Huius autem conoidis, siue huius hyperbolæ latus rectum habetur (per lemm. præced.) si fiat vt* nm, *ad* mg, *ita* en, *siue dupla* ba *ad aliã. Versum verò, quod est* ni, *habebitur, si fiat vt* gm *ad* mn, *ita* en, *siue dupla* ba *ad aliam quæ erit* ni. *Quod erat &c.*

per 4. sexti.

Theorema.

Cochlea primæ reuolutionis, quæ describitur à triangulo *ebf* in præcedenti figura, æqualis est conoidi cuidam hyperbolico, cuius altitudo sit *eb*; latus rectum sit quarta proportionalium, si fiat vt *eb* ad *bf*, ita dupla *ba* ad aliam. Versum verò latus sit quarta proportionalium, si fiat vt *fb* ad *be*, ità dupla *ba* ad aliam.

Hoc enim patet ex iam demonstratis. Prædicta enim cochlea æqualis est (per lem. primum) annullo facto à triangulo *ebf*. Sed annulus circularis trianguli *ebf* prædicto conoidi est æqualis (per lemma pręcedens.) Ergo patet quod propositum erat.

Scho-

Scholium.

Cochlea verò cuius figura genitrix parallelogrammum rectangulum sit, æqualis est cylindro cuius altitudo sit eb, *eadem cum altitudine figuræ genitricis, semidiameter verò basis media proportionalis sit inter* fb, *& rectam compositam ex ex* fa, ab.

Si verò figura genitrix circulus fuerit, erit facta cochlea primæ reuolutionis ad sphæram circuli genitoris, ut peripheria quæ describitur à radio, qui sit æqualis utrique, nempe rectæ ab *in præcedenti figura, semidiametroq; circuli genitoris, ad duas tertias diametri eiusdem circuli genitoris.*

R*Eliquum esset ut Mechanica etiam Theoremata horum solidorum exequeremur, præsertim quando Cochlea gignitur à triangulo: Centrum enim grauitatis in axe est, diuiditq; portiunculam quandam ipsius axis (æqualem abscindendam lateri* eb, *& circa punctum medium ipsius axis collocandam) veluti conoidis cuiusdam hyperbolici centrum secat propriam diametrum; siue prædicta portiunculæ semissem ita diuidit, uti eandem secaret centrum grauitatis cuiusdam segmenti sphærici duplam habentis altitudinē, basimq; dato cuidam circulo æqualem. Sed tanti non est singulas istas nugas longiùs protrahere, ut te beneuolum Lectorem ulteriùs adhuc torqueamus. Fortaße etiam fiet, nisi uniuersa hæc, quæ in istis libellis continentur, tibi displicuisse comperiam, ut ea quæ hic desiderantur, & multò plura circa grauitatem, ipsiusq; centrum, peculiari libello Geometricè comprehendam. Interim scio me patrocinium debere longissimæ tot mensium desidiæ: cum iam supra annum, ex quo opuscula hæc maximis Geometris promissa sunt, producatur lentissima eorum impressio. quod quidem pluribus de causis factum est; neq; hoc tam negligentiæ meæ imputandum est, quàm fortuitis quibusdam casibus, insperatisque. Accidit enim intermedio hoc tempore, ut plurium mensium studio atq; labore inciderim in solutionem optici illius Problematis tamdiù per-*

qui-

quisiti, cuius videlicet figuræ esse debeant superficies vitrorum, quæ ad vsum Telescopij elaborantur. Exitus demonstrationem confirmauit. quamquam enim neque optatam figuram (vt credibile est) perfectè haberent, neque vndequaque absoluta, & perpolita à Tirone adhuc inexperto, & inexercitato viderentur, ope tamen, & vi figuræ illius ad quam proximè tantùm accedebant, ad eum vsq; perfectionis gradum peruenerunt, vt Telescopia optimi cuiusq; artificis, cuius ad hunc diem fama in hac Vrbe innotuerit, superauerint. Neque iudicium hoc perperàm prolatum est; sed repetitis sæpius, summaq; cum diligentia varijs experimentis, nocte, dieque, & adhibitis eruditissimis testibus, quorum iudicium nemo iure damnauerit. Certè, qualecunq; fuerit inuentum, nescio plusne gaudij, laudisq; mihi attulerit, an præmij: quandoquidem Serenissimi Magni Ducis effusa, & verè Regia liberalitas magno auri pondere donatum me non semel voluit. Mirum itaq; videri non debet quòd omissà per integrum semestre libellorum curà, totam operam nouo inuẽto, mihiq; in primis exoptatissimo, ne dicam vtilissimo, impenderim. Factum etiam est vt hac de causa libelli minus castigati euaserint; authore nimirùm distracto, & ad alia, eaq; diuersissima, conuerso. Quapropter orandus etiam atq; etiam es beneuole lector, vt hæc qualiacunq; æqui, boniq; facias, & errata vel toleres, vel corrigas. presertim cum tam manifesta plerunq. sint, vt neminem fugere valeant, sed vltrò sese ipsa offerant; vt videre est in prima statim epistola nuncupatoria, & subinde satis frequenter in ijs quæ sequuntur. Correctiones non addemus in fine operis, vt pleriq. solent: quia neque satis vacauit temporis ad mendosa omnia adnotanda, neq. voluimus mutilà breuiq. recensione aliquot erratorum, omnem deinde excusationi meę locum eripere; dum tacita pretermissio eorum, quę censum effugissent, tamquam approbationis quoddam genus mihi potuisset imputari.

FINIS.

Il Re-

Il Reu. M. Carlo Mariotti veda se nella presente Opera si contenga cosa che repugni alla Pietà Cristiana, e buoni costumi, e riferisca. D. il dì 30. di Marzo 1644.

Vincenzo Rabatta Vic. Gen. di Fir.

Ego P. Carolus de Mariottis nullam in hoc opere contra pietatem ac bonos mores inueni labem, immo maximam in ipso mathematicæ studentibus, ac huiuscemodi incumbentibus arti in legendo sum expertus vtilitatem: in quorum fidem scripsi

Idem Ego qui supra manu propria.

Attenta præsenti relatione imprimatur opus seruatis seruan. D. die 9. Aprilis 1644.

Vincentius Rabatta Vic. Gen. Flor.

Si può stampare in Fiorenza li 13. Aprile 1644.

Fr. Iacomo da Castiglione Canc. del S. Off. de mand.

Alessandro Vettori Senatore Aud. di S. A. Sereniss.