

Il "Liber Abaci"
di Leonardo Fibonacci
tradotto in Italiano

I
Capitoli da 1 a 5

Luciano Ancora

© Draft date November 28, 2016

a
a



Il “Liber Abaci”
Le origini della Matematica
tradotto in lingua italiana

Nota del traduttore

Tempo fa, leggendo un articolo di storia della matematica, ho appreso con meraviglia che il *Liber Abaci* di *Leonardo Fibonacci*, un testo di grande interesse storico per l'influenza che ha avuto nello sviluppo della matematica occidentale, non era stato ancora tradotto in lingua italiana. Ho quindi considerato questa opportunità, accarezzando l'idea di svolgere io stesso questo lavoro, avendone il tempo (sono un pensionato) e potendo utilizzare tutto il materiale necessario, presente in rete in latino originale [1].

L'impresa all'inizio poteva sembrare al di sopra delle capacità di una singola persona, ma poi mi sono accorto che la cosa era fattibile, potendosi eliminare dal libro circa i 2/3 del suo volume totale, cioè i capitoli dall' 8° al 13°, in cui sono trattati argomenti non attinenti alla scienza matematica propriamente detta: come problemi relativi al calcolo dei prezzi delle merci, dei guadagni, degli interessi e sconti, dei cambi fra monete diverse, fino al computo delle operazioni di scambio delle merci e quello degli utili o perdite delle società; insomma, un vero e proprio trattato di *ragioneria*. Ed ancora, nei capitoli 12° e 13°, problemi di vario tipo che l'autore chiama *questiones erratice*, la maggior parte dei quali indicheremmo oggi come *matematica ricreativa*.

Mi sono quindi limitato, nel mio lavoro di traduzione, alle due parti essenziali del *Liber Abaci*, la prima dedicata all'*aritmetica* e la seconda dedicata all'*algebra*.

Nella prima parte (capitoli da 1 a 7) Leonardo introduce le cifre indo-arabiche ed espone un nuovo sistema, basato sulla *numerazione posizionale*, per eseguire con esse le operazioni aritmetiche fra numeri interi. Gli antichi romani, che non potevano utilizzare il loro modo di scrivere i numeri per eseguire i calcoli come si fanno oggi, ricorrevano invece al calcolo pratico con i sassolini (*calculi* in latino), che mettevano entro linee verticali segnate per terra a formare colonne. Nell'ultima colonna ogni sassolino valeva 1 unità, nella penultima 10 unità, nella terzultima 100, e così via. Se nell'ultima colonna si arrivava a 10 sassolini, questi venivano sostituiti da un unico sassolino, da mettere nella penultima colonna. Quindi, gli antichi romani avevano già acquisito l'idea di *valore posizionale*. Il merito degli arabi è stato quello di introdurre le cifre indiane, in sostituzione dei sassolini dei romani, e di sviluppare con queste un nuovo metodo per calcolare, o *algoritmo*, che diffuso poi dal Fibonacci con il *Liber Abaci*, ha fornito agli uomini del Rinascimento quanto occorreva per compiere il grande e decisivo progresso, al di là della matematica greca, verso la matematica moderna. C'è da chiedersi quale sia stata la causa che ha determinato una così fortunata scelta da parte degli arabi. Probabilmente, come spesso accade per le grandi scoperte, deve essere stata la *necessità*: è più facile scrivere sulla sabbia, anziché reperire, al bisogno, dei sassi nel deserto.

[1] - Si tratta principalmente dell'edizione in latino del *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, pubblicata da Baldassarre Boncompagni nel 1857.

Vi è poi la parte riservata all'algebra (capitoli 14 e 15) che costituisce il primo vero trattato di algebra scritto in lingua latina. Qui Leonardo espone gli algoritmi per calcolare le radici quadrate e cubiche, e le regole di calcolo per radicali quadratici e cubici. Quindi, introduce una nuova disciplina, l'*algebra*, rivelando i legami esistenti fra questa e la geometria euclidea. Era infatti noto allora, che alcune proposizioni contenute nel secondo libro degli *Elementi* di Euclide venivano usate dai matematici greci per risolvere problemi che successivamente, con l'avvento dell'algebra, furono ricondotti alla risoluzione delle *equazioni di secondo grado*. Proprio per questo motivo qualcuno ha definito il secondo libro degli *Elementi* come quello dell'*algebra geometrica*.

La ricostruzione dell'evoluzione di questa nuova disciplina introdotta da Leonardo Pisano, l'algebra, nei secoli dal tredicesimo al quindicesimo, è possibile attraverso lo studio dei cosiddetti *Trattati d'abaco*, scritti successivamente dai *Maestri d'abaco*, che in quel periodo diffondevano in Europa l'insegnamento delle cifre indo-arabiche e delle relative tecniche di calcolo. In essi si vede come l'attenzione degli algebristi si sia spostata gradatamente, con difficoltà, dalla risoluzione delle equazioni di secondo grado contenute nel Liber Abaci, a quelle di terzo e quarto grado, con le formule trovate poi da Niccolò Tartaglia e da Ludovico Ferrari, nel sedicesimo secolo. Si può dire che la matematica moderna ha avuto inizio quattro secoli fa, quando la macchina algebrica ha cominciato ad essere applicata anche alla geometria, e lo studio delle curve, figure e superfici si è tradotto nello studio di opportune equazioni.

Dell'omesso capitolo dodicesimo, ho ritenuto poi opportuno tradurre due dei numerosi problemi in esso proposti. Il primo è quello in cui si chiede di calcolare *Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinantur*, nella cui soluzione compaiono per la prima volta i primi dodici termini di quella che sei secoli più tardi verrà denominata *la successione di Fibonacci*. Il secondo è quello in cui si propone di sommare una sequenza di potenze del numero due su una scacchiera, cioè, il famoso problema nato dalla leggenda sulla nascita del gioco degli scacchi, o *Leggenda di Sissa Nassir*. Quest'ultimo problema costituisce anche un esempio di come sia stato possibile, con il sistema di numerazione posizionale indo-araba, ricavare un numero spropositato, come 340 282 366 920 938 463 483 374 607 431 768 211 456, che con il sistema di numerazione romana sarebbe stato ben difficile, o forse impossibile, ottenere.

Nota alla revisione n. 3, emessa il 28/11/2016, al completamento della prima parte, capitoli da 1 a 5.

Contrariamente a quanto affermato da alcuni filologi della letteratura latina medievale, devo dire che il lavoro di traduzione intrapreso non mi è sembrato (almeno finora) particolarmente insidioso. Ho utilizzato alcuni programmi di traduzione istantanea presenti in rete, ricercando sempre la correttezza della traduzione alla luce delle mie conoscenze matematiche,

risolvendo così le ambiguità e giustificando gli errori presenti nella traduzione letterale del testo latino.

Un esame sommario dei capitoli 6, 7, 14 e 15, la cui traduzione è ancora in fieri, mi fa sperare che neanche questi debbano presentare le predette insidie e difficoltà, forse presenti maggiormente nei capitoli dall'8 al 13, che però abbiamo escluso, in quanto estranei alla nostra trattazione. Per cui, confido in un corretto risultato finale per questa traduzione di servizio, ad uso degli studiosi e dei cultori della matematica.

Luciano Ancora

PROLOGO

*Inizia il Libro dell'Abaco composto da Leonardo,
figlio di Bonacci Pisano, nell'anno MMCCII.*

Mi avete scritto, mio signore e maestro Michele Scoto, sommo filosofo, di trascrivere per voi il libro sul numero che tempo fa avevo composto; perciò, per assecondare la vostra richiesta, l'ho corretto sottoponendolo ad una accurata revisione in vostro onore e per l'utilità di molti altri. Così, nel correggerlo ho aggiunto alcune nozioni necessarie e ho eliminato alcuni passi superflui. In questo libro ho pubblicato l'intera dottrina dei numeri secondo il metodo degli Indiani, metodo che in questa scienza stessa ho assunto come il più efficace. E poiché le scienze dell'aritmetica e della geometria sono legate tra loro e si suffragano a vicenda, la dottrina del numero non può essere insegnata nella sua interezza, se non con l'intersezione di alcuni principi geometrici, di nozioni che si riferiscono alla geometria, che si applicano, in quest'ambito, soltanto secondo il metodo numerico, metodo che è stato stabilito in base a molte prove e dimostrazioni fatte con le figure geometriche. Ma tuttavia in un altro libro, che ho composto sulla pratica della geometria, ho spiegato con maggiore dovizia di particolari i principi che attengono alla geometria e parecchi altri, dimostrandoli ad uno ad uno con figure e prove geometriche. Certo, questo libro è relativo più alla pratica che alla teoria e per questo coloro che con il suo aiuto vorranno conoscere bene la pratica di questa scienza del numero, è necessario che con un continuo uso e con un lungo esercizio si dedichino con molta diligenza alle sue applicazioni, sicché, una volta trasformatasi la conoscenza teorica in abito attraverso la pratica, a tal punto siano concordi la memoria e l'intelletto con le mani e le cifre, da armonizzarsi naturalmente riguardo ad un medesimo scopo con l'aiuto di tutti i mezzi come con un solo impulso e anelito in un solo e medesimo istante: e solo quando il discepolo avrà ottenuto l'abitudine, passo dopo passo potrà facilmente pervenire al perfetto compimento di tale pratica. E perché la dottrina fosse esposta più facilmente, ho diviso questo libro in quindici capitoli, in modo tale che il lettore possa trovare con maggiore rapidità qualsiasi argomento voglia tra questi. Ma se invece in quest'opera si trova un'insufficienza o una mancanza, la sottopongo alla vostra correzione.

Quando mio padre, scrivano pubblico presso la dogana di Bugia per conto dei mercanti pisani, fu incaricato di dirigerla, essendo io ancora fanciullo mi fece andare presso di lui. Essendosi reso conto dell'utilità e dei vantaggi che me ne sarebbero venuti in seguito, volle che là per un certo tempo stessi a studiare l'abbaco e su esso venissi istruito. Ivi fui introdotto in tale arte da un mirabile insegnamento per mezzo delle nove figure degli Indi. La conoscenza di tale arte molto mi piacque rispetto alle altre. Successivamente con studio assiduo e impegnandomi in discussioni, giunsi a comprendere quanto di essa si studiava in Egitto, Siria, Bisanzio, Sicilia e Provenza, luoghi che ripetutamente visitai per i miei viaggi commerciali.

Per questo considerai l'algoritmo e gli archi di Pitagora quasi un errore in confronto al procedimento degli Indi. Riassunto in breve tale procedimento degli Indi, studiandolo più attentamente e aggiungendovi qualcosa di mia iniziativa e altro ancora apponendovi delle sottigliezze dell'arte geometrica di Euclide, mi sono impegnato a comporre nel modo più chiaro possibile questo libro diviso in 15 capitoli, presentandovi con dimostrazioni quasi tutto quello che ho inserito. E questo perché coloro che sono attirati da questa scienza ne vengano istruiti in modo perfetto, e i popoli latini non se ne trovino esclusi come è stato fino ad oggi. Se per caso ho tralasciato meno o più del giusto o del necessario, prego che mi sia concessa venia, visto che non c'è nessuno cui manchi difetto per quanto sia in tutto e dovunque prudente.

Capitolo 1

Inizia il primo capitolo.

Le nove figure indiane sono:

9 8 7 6 5 4 3 2 1.

Con queste nove figure, e con il segno 0 che gli arabi chiamano zephir, si scrive qualsiasi numero, come è mostrato di seguito. Un numero è una somma di unità, o un insieme di unità, e con la loro addizione i numeri aumentano, con un ritmo senza fine. In primo luogo, sono composti dalle unità quei numeri che vanno da uno a dieci. Secondo, dalle decine i numeri che vanno da dieci fino a cento. Terzo, dalle centinaia i numeri da cento fino a mille. Quarto, dalle migliaia i numeri da mille fino a diecimila, e quindi, per una sequenza infinita di passaggi, un numero qualsiasi è costruito dall'unione dei numeri precedenti. Il primo posto nella scrittura dei numeri inizia a destra. Il secondo segue il primo a sinistra. Il terzo segue il secondo. Il quarto, il terzo e il quinto, il quarto, e quindi sempre a sinistra, di posto in posto. Quindi, la cifra che si trova al primo posto rappresenta se stessa; cioè, se al primo posto c'è la figura dell'unità, essa rappresenta uno; la figura di due, rappresenta due; la figura di tre, tre, e così per quelle che seguono, fino alla figura di nove; le nove cifre che saranno al secondo posto rappresenteranno altrettante decine, come nel primo posto le unità; cioè, se la figura uno occupa il secondo posto, essa denota dieci; la figura due, venti; la figura tre, trenta; la figura nove, novanta.

La figura che è nella terza posizione indica il numero delle centinaia, come nella seconda le decine, o nella prima le unità; se la cifra è uno, cento; se la cifra è due, duecento; se la cifra è tre, trecento, e se la cifra è nove, novecento. Quindi, la figura che è nel quarto posto denota le migliaia, come nel terzo le centinaia, nel secondo le decine, e nel primo le unità; e così, aggiungendo sempre posti, il numero aumenta. Chiariremo questo principio mostrandolo con figure. Se la figura sette è al primo posto e la tre al secondo, entrambe insieme denotano 37; o permutando, la figura tre nel primo e la figura sette nel secondo, indicano 73. Ancora, se la cifra quattro è al primo posto e l'unità al secondo, cioè 14, sarà indicato XIII; oppure, se la figura dell'unità è al primo posto, e la figura quattro al secondo, cioè 41, sarà indicato XLI. Ancora, nel primo 2 e nel secondo 7, danno 72; il contrario dà 27. Se si vuole scrivere settanta, si mette al primo posto 0, e dopo si mette la figura sette, cioè 70; se ottanta, lo zephir è seguito da otto, cioè 80; questa dimostrazione mostra come si può scrivere qualsiasi numero da dieci fino a cento con due figure. Con tre possiamo scrivere da cento fino a mille; se la figura otto è al primo posto, la figura cinque al secondo, e l'unità al terzo, cioè 158, sarà indicato cento cinquanta otto; e permutando, se l'unità è al primo posto, la figura cinque al secondo, e la figura otto al terzo, 851, sarà indicato ottocento cinquanta uno; o permutando, se la figura otto è al primo posto, l'unità al secondo, e la figura cinque al terzo, sarà indicato 518.

Permutando ancora, la figura cinque al primo posto, la figura otto al secondo, e l'unità al terzo, sarà indicato 185. Se l'unità è al primo posto, la figura otto al secondo, e la figura cinque al terzo, sarà indicato 581; tre unità indicano centoundici. Ancora, se si vuole scrivere cinquecento, nel primo e nel secondo posto si metterà lo zephir, e nel terzo la figura cinque, in questo modo, 500; e quindi si sarà in grado di scrivere un numero qualsiasi di centinaia con due zephir. Se vorrete scrivere centinaia con decine e senza unità, si mette in primo luogo lo zephir, nel secondo le decine, e nel terzo le centinaia che volete. Ad esempio, se nel primo posto è lo zephir, nel secondo la figura nove, e nel terzo figura due, sarà indicato 290. Se poi si vuole scrivere centinaia con unità e senza decine, al secondo posto, cioè al posto delle decine, si mette lo zephir, al primo il numero di unità che si vogliono, e nel terzo, la figura due, 209; Quindi, in base al principio di cui sopra, è dimostrato che si può scrivere con tre figure qualunque numero si desidera da cento fino a mille. E con quattro, da mille fino a diecimila, come mostrato nelle figure che seguono.

M _I	MM _{xxiii}	MMM _{xxii}	MMM _{xx}	MMMM _{dc}	MMM	M _{cx}	M _{ccxxxiii}	MMMM _{cccxi}
1001	2023	3022	3020	5600	3000	1111	1234	4321

Proseguiamo con gli altri numeri. Con cinque figure si scrivono tutti i numeri da diecimila fino a centomila. Con sei, da centomila fino a mille mila, e quindi il numero aumenta, cifra dopo cifra. Onde, se accade che non si possa leggere né capire un numero con molte figure, a causa del gran numero di esse, allora avremo cura di mostrare come esso debba essere letto e compreso.

Pertanto, per la prima figura, cioè la figura al primo posto, si dica uno.

Della seconda, che è al secondo posto, si dica dieci.

Della terza, che è al terzo posto, si dica cento, e la si accenti nella parte superiore.

Della quarta cifra del numero, si dica mille, e la si accenti nella parte inferiore.

Della quinta si dica diecimila.

Della sesta si dica centomila, e la si accenti nella parte superiore.

Della settima si dica mille mila, e la si accenti nella parte inferiore.

Dell'ottava si dica diecimila mila.

Della nona si dica centomila mila, e la si accenti nella parte superiore.

Della decima si dica mille mila mila, e la si accenti nella parte inferiore; e così via, mediante questi tre numeri, cioè le migliaia, le decine di migliaia, e le centinaia di migliaia, accentando le migliaia nella parte inferiore e le centinaia di migliaia nella parte superiore, si può costruire fino all'ultimo posto il numero che si vuole studiare. Si cominci dunque a leggere il numero dall'ultimo posto, attraverso i suddetti accenti, dicendo sempre per gli accenti inferiori tante migliaia di migliaia quanti accenti vi sono prima nella parte inferiore verso il primo posto, e per gli accenti superiori, dicendo tante centinaia di migliaia quanti accenti vi sono prima nella parte inferiore, sempre verso il primo posto del numero; e per le figure non accentate dopo il quarto posto del numero, si dicano tante decine di migliaia, quanti accenti

vi sono prima di esse nella parte inferiore; e quindi si potrà conoscere e leggere qualsivoglia numero di molte figure. E affinché questo sia meglio capito proponiamo un numero di otto figure, 87654321. Della figura 1 che è al primo posto, si dice uno; della figura 2, che è nel secondo, si dice dieci; della 3, che si trova nella terza posizione, si dice cento, e la accentiamo nella parte superiore. Della figura 4, che è al quarto posto, si dice mille, e la accentiamo nella parte inferiore, come è mostrato nel soprascritto numero. Della figura 5, che è al quinto posto, si dice diecimila; della figura 6, che è nella sesta posizione, si dice centomila, e si accenta nella parte superiore; della figura 7, che è al settimo posto, si dice mille mila, e si accenta nella parte inferiore; della figura 8, all'ultimo posto, si dice dieci mila; quindi si ha nel numero sopradetto ottantasette mille mila, a causa dei due accenti inferiori, dei quali uno inferiore al 7 e l'altro inferiore al 4, e inoltre sei cento cinquanta quattro mila, e inoltre CCCXXI. Vi proponiamo un altro numero, di nove cifre, 257604813; dall'ordine degli accenti si riconosce che esso contiene in sé duecento cinquanta sette mila mila, e seicento quattro mila, e ottocento tredici. Proponiamo ancora un altro numero, di tredici figure, 1007543289081; dagli accenti si riconosce che esso è mille, e sette mila mila mila, e cinquecento quaranta tre mila mila, e duecento ottanta nove mila, e ottanta uno. Possiamo ora insegnare un'altra regola semplice in modo che la maggior parte di voi sia in grado di leggere rapidamente un numero di molte figure. Ad esempio, proponiamo ora un numero di 15 cifre, $\widehat{678935784105296}$; staccate le prime tre figure, vale a dire 296, sopra ogni tre si disegna una virgola a modo di arco come nell'esempio precedente; e si legge per ogni virgola; e le tre figure che sono all'inizio si staccano e si leggono come sono; e quindi tu dici: seicento settanta otto mila mila mila mila, in quanto vi sono quattro virgole, e novecento trenta cinque mila mila mila, in quanto vi sono tre virgole, e settecento ottanta quattro mila mila, in quanto vi sono due virgole, e cento cinque mila, in quanto vi è una virgola, e duecento novanta sei, per le tre figure staccate all'inizio; e se per ultimo rimane una figura o due, le metti sotto un'ultima virgola, e le leggi tutte e quattro o cinque insieme, e quindi sarai in grado di leggere un numero di quante figure si voglia.

Secondo quanto scritto sopra, attraverso l'uso frequente si possono ben conoscere le predette figure e i loro posti; coloro che vogliono conoscere l'arte del calcolo, le sue sottigliezze e ingegnosità, devono conoscere il calcolo con i dati in mano, una sapientissima invenzione dell'antichità usata dai maestri della matematica. I segni sono questi. La curvatura del mignolo della mano sinistra sopra il centro del palmo della mano denota 1. Con la curvatura dello stesso dito, dell'anulare e il dito medio sul centro del palmo si intende 4. Con la curvatura del dito medio, 5; dell'anulare, 6. Ancora, col posizionamento del mignolo verso l'alto sopra il palmo, si indica 7, e se sono sopra quel posto il mignolo e l'anulare, si indica 8; quindi, il posizionamento di questi ultimi col dito medio sopra lo stesso posto, indica 9. Con l'estremità del dito indice sul nodo del pollice a formare un cerchio, si denota 10. Con il pollice e l'indice estesi e che si toccano, 20. Con le loro estremità unite in cerchio, 30. Con il pollice posto sulla parte esterna del dito

indice, 40. Con la curvatura del pollice sopra l'inizio del dito indice, 50. Con la curvatura del dito indice sopra il pollice curvo, 60. Con la curva del dito indice sopra l'estremità del pollice esteso, 70. Con la curvatura del dito indice sopra la curva del pollice esteso, 80. Con la curvatura dell'intero indice su se stessa, 90. Inoltre, le centinaia e le migliaia sono realizzate nella mano destra nello stesso ordine, cioè il segno dell'unità rende 100 nella mano destra; due rende 200; dieci rende mille, e il segno di novanta fa 9000, come nei disegni delle mani mostrati nelle pagine seguenti (vedi copertina). Tutti i restanti numeri da dieci fino a diecimila sono quindi costruiti nelle mani con questi segni in questo modo; col segno di venti e il segno di tre si costruisce 23; col segno di tremila e il segno di cinquecento si costruisce nella mano destra tremilacinquecento, e quindi si capisce il resto.

Introduzione all'addizione e alla moltiplicazione dei numeri															
Del due				Del sette				60 e 60 fa 120				Del cinque			
2 e 2 fa 4				7 e 7 fa 14				60 70 130				5 volte 5 fa 25			
2 3 5				7 8 15				60 80 140				5 6 30			
2 4 6				7 9 16				60 90 150				5 7 35			
2 5 7				7 10 17				70 e 70 fa 140				5 8 40			
2 6 8				Dell'otto				70 80 150				5 9 45			
2 7 9				8 e 8 fa 16				70 90 160				5 10 50			
2 8 10				8 9 17				80 e 80 fa 160				Del sei			
2 9 11				8 10 18				80 90 170				6 volte 6 fa 36			
2 10 12				Del nove				90 e 90 fa 180				6 7 42			
Del tre				9 e 9 fa 18				Fine delle addizioni				6 8 48			
3 e 3 fa 6				9 10 19				Iniziano le moltiplicazioni				6 9 64			
3 4 7				Del dieci								6 10 50			
3 5 8				10 e 10 fa 20				Del due				Del sette			
3 6 9				20 e 20 fa 40				2 volte 2 fa 4				7 volte 7 fa 49			
3 7 10				20 30 50				2 3 6				7 8 56			
3 8 11				20 40 60				2 4 8				7 9 63			
3 9 12				20 50 70				2 5 10				7 10 70			
3 10 13				20 60 80				2 6 12				Dell'otto			
Del quattro				20 70 90				2 7 14				8 volte 8 fa 64			
4 e 4 fa 8				20 80 100				2 8 16				8 9 72			
4 5 9				20 90 110				2 9 18				8 10 80			
4 6 10				30 e 30 fa 60				2 10 20				Del nove			
4 7 11				30 40 70				Del tre				9 volte 9 fa 81			
4 8 12				30 50 80				3 volte 3 fa 9				9 10 90			
4 9 13				30 60 90				3 4 12				Del dieci			
4 10 14				30 70 100				3 5 15				10 volte 10 fa 100			
Del cinque				30 80 110				3 6 18				10 volte 20 fa 200			
5 e 5 fa 10				30 90 120				3 7 21				Fine delle moltiplicazioni			
5 6 11				40 e 40 fa 80				3 8 24							
5 7 12				40 50 90				3 9 27							
5 8 13				40 60 100				3 10 30							
5 9 14				40 70 110				Del quattro							
5 10 15				40 80 120				4 volte 4 fa 16							
Del sei				40 90 130				4 5 20							
6 e 6 fa 12				50 e 50 fa 100				4 6 24							
6 7 13				50 60 110				4 7 28							
6 8 14				50 70 120				4 8 32							
6 9 15				50 80 130				4 9 36							
6 10 16				50 90 140				4 10 40							

Scrivendo le addizioni e le moltiplicazioni in tabelle, sempre facendo uso delle mani per tenere i numeri, si disimpegna l'utilizzo delle mani per eseguire le addizioni e le moltiplicazioni di numeri.

Capitolo 2

Inizia il secondo capitolo sulla moltiplicazione dei numeri interi.

Dividiamo il capitolo due sulla moltiplicazione dei numeri interi in otto parti, al fine di comprenderne meglio le proprietà e differenze. La prima parte sarà sulla moltiplicazione di due figure per due, e anche di una figura per molte. La seconda, sulla moltiplicazione di tre figure per tre, e anche di due figure per tre. La terza, sulla moltiplicazione di quattro figure per quattro, e anche di due e tre figure per quattro. La quarta, sulla moltiplicazione di cinque figure per cinque. La quinta, sulla moltiplicazione di più di cinque figure, o di un qualsiasi numero, per se stesso. La sesta, sulla moltiplicazione di numeri di due posti per numeri dello stesso numero di posti, cioè due figure per due figure, e anche una figura per molte, moltiplicando tutto ciò che si tiene nelle mani. La settima, sulla moltiplicazione di tre figure per tre, allo stesso modo, moltiplicando ciò che si tiene nelle mani. L'ottava, sulla moltiplicazione di numeri in un altro modo.

*Inizia la prima parte sulla moltiplicazione
di due figure per due.*

Un numero è detto essere moltiplicato per se stesso quando i numeri moltiplicati sono uguali, come 12 per 12, o 26 per 26. Un numero è detto essere moltiplicato per un altro numero quando i numeri moltiplicati sono diversi fra loro, come 12 per 37, o 46 per 59; quindi, come abbiamo promesso, insegniamo prima a moltiplicare per sé stessi i numeri di due posti, vale a dire da 10 a 100. Inoltre, se si vuole moltiplicare un numero qualsiasi di due posti per un numero qualsiasi dello stesso numero di posti, siano i numeri uguali o diversi, si scrive numero sotto numero, in modo che stessi posti siano sotto stessi posti; se i numeri sono diversi, il maggiore sia sotto il minore, e si cominci la moltiplicazione dei numeri al primo posto, come nelle tabelle scritte prima. Poi si moltiplica la figura al primo posto del numero superiore nella tabella scritta per la figura al primo posto dell'inferiore, e si scrivono le unità sul primo posto del numero scritto sopra, e per ogni decina si tiene uno nella mano sinistra; poi si moltiplica la figura al primo posto del numero superiore per la figura al secondo posto, cioè l'ultima figura del numero inferiore, e viceversa: la figura al primo posto in basso si moltiplica per l'ultima figura superiore, e si sommano tutte insieme con le decine conservate in mano; e ancora, le unità si scrivono sopra il secondo posto, e le decine sono tenute in mano. Infine, si moltiplica l'ultima figura del numero superiore per l'ultima in basso, e qualunque sarà il risultato della moltiplicazione è aggiunto alle decine tenute in mano, le unità saranno messe al terzo posto, e le decine nel quarto, e si avrà la moltiplicazione di numeri qualsiasi da dieci fino a cento. Ad esempio, se si vuole trovare la moltiplicazione di 12 per 12, si scrive due volte 12 in una tabella a sfondo bianco, in cui le lettere vengono facilmente eliminate, come

prima	4
	12
	12
seconda	44
	12
	12
ultima	144
	12
	12

mostrato in questo margine; il primo posto del numero inferiore è sotto il primo posto in alto, cioè la figura due sotto la figura due, e la seconda posizione in basso sotto la seconda in alto, cioè la figura uno sotto la figura uno, e si moltiplica due per due; si ha 4 che viene messo sopra entrambi i due, come nella illustrazione di prima. Ancora, il 2 superiore viene moltiplicato per la seconda posizione del numero inferiore; si ha 2 che è tenuto in mano, e di nuovo il 2 del numero inferiore si moltiplica per l'1 in alto; si ha 2 che si aggiunge al 2 tenuto prima; si ha 4, che viene messo sulle unità al secondo posto dopo la figura 4 messa prima, come mostrato nella seconda illustrazione; infine, si moltiplica 1 del numero superiore per 1 di quello inferiore, e si ha 1; si scrive questo nel terzo posto, vale a dire dopo la scritta 44, come mostrato nella terza ed ultima illustrazione. E in questo totale risulta la moltiplicazione di 12 per se stesso, cioè 144.

prima	9
	37
	37
seconda	69
	37
	37
la prova è 1	1369
	37
	37

Illustriamo ancora la moltiplicazione di 37 per 37. Si scrive il 37 sotto il 37, come abbiamo detto sopra dei 12, e si moltiplica il 7 per il 7; si ha 49; quindi il 9 si mette sopra entrambi i 7, come è mostrato nella prima illustrazione, e la figura quattro delle decine, che è in 49, è tenuta in mano; il 7 del numero superiore è moltiplicato per il 3 in basso, e il 7 in basso per il 3 in alto, e si sommano insieme; si ha 42 che si aggiunge al 4 mantenuto prima; si ha 46; le unità di 46, che sono 6, si scrivono sopra i 3 come mostrato nella seconda figura, e il 4 delle decine che sono in 46, si tiene in mano; quindi, il 3 del numero superiore viene moltiplicato per il 3 in basso; si ha 9 che si aggiunge al 4 che è in mano; si ha 13; il 3 di 13 viene messo al terzo posto e 1 al quarto, come nella terza e ultima illustrazione.

Per sapere se la moltiplicazione è corretta, si sommano le figure che sono nel 37 superiore, cioè il 3 e il 7; si ha 10, da cui si sottrae 9; rimane 1 che è tenuto in mano. Sempre allo stesso modo si sommano le figure del 37 in basso, e si sottrae 9; rimane 1; quindi si moltiplicano l'1 che rimane dal 37 superiore e l'1 che rimane dalla parte inferiore; si ha 1 che è chiamato il resto, ed è annotato nella tabella della moltiplicazione, come mostrato nella terza illustrazione; successivamente si sommano le figure che sono il risultato della moltiplicazione, e da tale somma si sottraggono tanti multipli di 9 quanti sarà possibile, e se rimarrà 1 come resto la moltiplicazione sarà certamente corretta. Ad esempio, se si sommano le figure che sono il risultato della moltiplicazione, e cioè 1, 3, 6, e 9, si ha 19, da cui sottraendo due volte nove, rimane 1 come resto, come abbiamo detto deve rimanere; o se del 19 si prende il 9 che è al primo posto, rimarrà ancora 1. Si noti che, quando si sommano le figure di 37, vale a dire il 3 e il 7, dalla divisione di 37 per 9 rimane 1, e lo stesso risultato si ha dal 10, che risulta dalla somma del 3 e 7, se da questo si toglie 9; del resto ciò che rimane da qualsiasi numero diviso per 9, si ottiene anche dalla somma di tutte le cifre dello stesso numero. E notiamo ancora, come dividendo ogni numero in parti, e moltiplicando queste parti per un altro numero, la moltiplicazione in totale è pari alla somma di tutti i prodotti delle singole parti. Pertanto, il prodotto di 36 per 37, aggiunto al prodotto 1 per 37, è pari al prodotto di 37 per 37. Ma dalla moltiplicazione del 36 per 37 risulta un numero che è un multiplo di nove, come 36 è multiplo di nove. Pertanto il numero derivante da 36 volte

il 37, se è diviso per 9, nulla rimarrà di indivisibile. Inoltre, la moltiplicazione di 1 per 37 è uguale alla somma della moltiplicazione 1 per 36 e di 1 per 1. Tuttavia, la moltiplicazione di 1 per 36 produce un numero che è divisibile per 9; la moltiplicazione di 1 per 1, cioè 1, è indivisibile per 9. Pertanto, dal prodotto di 37 per 37 diviso 9 resta 1, che si ha anche dalla somma di tutte le figure che formano il prodotto di 37 per 37, come abbiamo visto sopra; oppure, se dal detto prodotto si toglie 9, allora rimane 136, da cui cancelliamo 3 e 6, che danno una somma di 9; anche così rimanere 1; 1369 è indivisibile per 9.

Ancora, se si vuole moltiplicare 98 per 98, si scrive il 98 sotto il 98 come ho detto prima; 8 moltiplicato per 8 dà 64; si mette il 4 sopra gli 8, e il 6 si tiene in mano per le decine; si moltiplica l'8 per il 9; si ha 72; e ancora simmetricamente l'8 in basso si moltiplica per il 9 in alto; si ha 72 che viene aggiunto all'altro 72 ed al 6 tenuto in mano; si ha 150; e siccome non ci sono unità il 150, si mette uno zephir sopra entrambi i 9, e il 15 si tiene in mano per le decine; si moltiplica il 9 per il 9; si ha 81 che si aggiunge al 15 tenuto in mano; si ha 96 e si scrive il 6 nel terzo posto e il 9 nel quarto, come in figura. Vediamo ora se questa moltiplicazione è corretta; si sommano le figure del 98 superiore, vale a dire il 9 e l'8, e si sottrae il 9; rimane 8. Si fa la stessa cosa con il 98 inferiore; rimane ancora 8; si moltiplica 8 per 8; si ha 64 da cui vengono sottratti tutti i nove che sono in 64; rimane 1 per resto; o in altro modo, si sommano le figure che sono nel suddetto 64, vale a dire il 6 e il 4; si ha 10 da cui viene sottratto 9; rimane ancora 1; successivamente vengono sommate le figure che sono il risultato della moltiplicazione, cioè 9, 6, 0, e 4; tuttavia non è necessario aggiungere la figura nove in tali controlli; con nove la sottrazione si fa sempre in anticipo, quindi si sommano 6, 0, e 4; si ha 10 da cui viene sottratto 9; rimarrà 1 per resto, come doveva rimanere. Inoltre, se vorrete moltiplicare per se stesso qualunque numero di due posti senza le unità al primo posto, come in 10 o 40 o 90, in cui il posto zephir è sempre necessario, farete così: scrivete il numero come ho detto sopra; moltiplicate il secondo posto per il secondo, e mettete due zephir prima del prodotto, e quindi avrete il risultato di tale moltiplicazione. Se cercate la moltiplicazione di 70 per 70, scrivete i 70 nel modo di cui sopra, e moltiplicate la figura sette che è al secondo posto del numero superiore per il 7 in basso; si ha 49, di fronte al quale si mettono due zephir, cioè quelli che sono prima di ogni 7; 4900 è il risultato della moltiplicazione cercato. Se si cerca la moltiplicazione di 37 e 49, si scrive il 49 sotto il 37, cioè il numero più grande sotto il più piccolo, e gli stessi posti sotto gli stessi posti, come viene visualizzato nel margine; si moltiplica il 7 per il 9; si ha 63; si mette il 3 sopra il 7 e il 6 si tiene in mano per le decine; si moltiplica trasversalmente il 7 per il 4; si ha 28 che è aggiunto al 6 tenuto in mano; si ha 34. si moltiplica anche il 9 per il 3; si ha 27 che si aggiunge al 34; si ha 61; si mette 1 sopra il 3 e il 6 si tiene in mano per le decine; si moltiplica il 3 per 4; si ha 12 che si aggiunge al 6; si ha 18 che viene messo dopo il 13 nella posizione superiore; ciò produce 1813 per il risultato della moltiplicazione data, come qui illustrato.

la prova	9604
è 1	98
	98

4900
70
70

la prova	1813
è 4	37
	49

E così si saprà se la moltiplicazione è corretta: il 37 è diviso per 9; oppure, si sommano le figure di 37, cioè il 3 e il 7; si ha 10 da cui viene sottratto 9; rimane 1 che è conservato; analogamente, si sommano le figure di 49, cioè il 4 e il 9; si ha 13 da cui si sottrae 9; resta 4 che viene moltiplicato per il mantenuto 1; si ha 4 che viene mantenuto come resto; si sommano le figure che sono il risultato della moltiplicazione, cioè 1, 8, 1 e 3; si ha 13 da cui viene sottratto 9; si ha 4, come deve rimanere per il resto.

Procediamo ora nel modo detto sopra, separando i numeri in parti, e quindi moltiplicando tali numeri. La moltiplicazione di 37 per 49, è uguale alla somma delle moltiplicazioni di 7 per 49 e di 30 per 49. Ma la moltiplicazione di 7 per 49 è pari alla somma delle moltiplicazioni di 7 per 9 e di 7 per 40, e ancora la moltiplicazione di 30 per 49 è pari alle moltiplicazioni di 30 per 9, e di 30 per 40. Pertanto la moltiplicazione di 37 per 49 è pari alla somma di quattro moltiplicazioni che sono: 7 per 9, 7 per 40, 30 per 9, e 30 per 40. E le quattro moltiplicazioni di cui sopra si eseguono in ordine: si moltiplica prima il 7 per il 9, e si mettono le unità sopra al primo posto, perché quando il primo posto moltiplica qualsiasi posto esso dà lo stesso posto, o finisce in esso. Secondo, moltiplichiamo il 7 per 4; terzo, il 9 per 3, e prendiamo la somma di tali prodotti; mettiamo le unità nel secondo posto, perché quando il primo posto moltiplica il secondo si ottiene il secondo posto. Abbiamo moltiplicato 7 per 40, e 9 per 30; infine moltiplichiamo il 3 per 4, vale a dire il secondo posto per il secondo, e a questo prodotto aggiungiamo le decine tenute; mettiamo le unità al terzo posto, e le decine ottenute al quarto; e così abbiamo moltiplicato il 30 per 40, perché con la moltiplicazione di ogni secondo posto si ottiene il secondo posto. Allo stesso modo dalla moltiplicazione del terzo posto di un numero qualsiasi, si ottiene il terzo posto del risultato. E del quarto, il quarto, e del quinto, il quinto, e così via. Spiegherò quindi cosa vuol dire che moltiplicando il primo posto per qualsiasi altro, si ha lo stesso posto, oppure un numero che finisce in esso. Quando si moltiplica figura per figura, e la moltiplicazione non dà l'ultimo numero, allora la moltiplicazione produce lo stesso posto; e dalla moltiplicazione risulta un numero di due cifre, come 20 o 30, o composto dalla seconda e prima come 15 e 28; allora mettiamo la fine del numero nello stesso posto che il primo posto moltiplica; e per questo motivo, quando moltiplichiamo il primo posto per qualsiasi altro posto, mettiamo le unità di quella moltiplicazione nello stesso posto, e le decine le teniamo per il posto seguente, lo stesso vale per la moltiplicazione dei posti rimanenti.

Sulla moltiplicazione di una figura con molte.

Anche se si cerca la moltiplicazione di una figura con due, o con molte, si scrive la figura sopra il primo posto nel numero che si vuole moltiplicare, e si moltiplica la figura sola per il primo posto del numero, le unità vengono poste su di esso, e le decine sono tenute in mano; e la figura sola si moltiplica per la seconda del numero più basso, e viene aggiunta alle decine mantenute, mettendo sempre le unità, e tenendo le decine; e la stessa figura

viene moltiplicata ordinatamente per il terzo e il quarto, e per le altre figure. Per esempio, se è richiesta la moltiplicazione di 8 per 49, si mette l'8 sopra il 9, e si moltiplica l'8 per il 9; si ha 72; il 2 viene messo sopra l'8 e il 7 è tenuto in mano; si moltiplica l'8 per 4; si ha 32, e si aggiunge il 7 mantenuto prima; si ha 39, e si mettono il 9 e il 3; 392 è il risultato di detta moltiplicazione, come è mostrato a margine. Ancora, se è richiesta la moltiplicazione di 7 per 308, si scrive il 7 sopra l'8 e si moltiplica il 7 per l'8; si ha 56; si mette il 6, e si mantiene il 5; il 7 si moltiplica per lo 0, che dà 0, che si aggiunge al 5 mantenuto dando 5, che si mette dopo il 6; si moltiplica il 7 per 3 che dà 21, che si mette dopo 56; e 2156 è il risultato di detta moltiplicazione, e così una figura è moltiplicata per molte.

392
8
49

2156
7
308

Sulla stessa.

Ancora, se si vuole moltiplicare 70 per 81, lo 0 viene eliminato dal 7; il 7 rimasto si moltiplica per 81; si ha 567 che viene messo prima dello 0 che abbiamo tolto dal 70; si ha 5670.

5670
70
81

Inizia la seconda parte del secondo capitolo.

Tuttavia, volendo moltiplicare tre figure per tre figure, insegneremo una facile regola universale per questo. Vale a dire, il posto di un numero è scritto ancora sotto il posto di un altro, cioè le unità sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaia sotto le centinaia; il primo numero in alto si moltiplica per il primo in basso, le unità sono messe sopra il primi posti dei numeri e le decine sono tenute in mano; si moltiplica il primo in alto per il secondo in basso, e il primo in basso per il secondo nella parte superiore, i prodotti e le unità tenute vengono sommate, le unità sono scritte e le decine tenute; si moltiplica il primo in alto per il terzo in basso, il primo in basso per il terzo in alto, e il secondo per il secondo, ed i tre prodotti e il numero mantenuto vengono sommati; le unità sono messe sopra la terza posizione, ed eventuali decine sono mantenute in mano; si moltiplica il secondo nel numero superiore per il terzo nell'inferiore, e il secondo in basso per il terzo in alto; dei prodotti sommati le unità sono scritte e le decine tenute; si moltiplica il terzo per il terzo, e si aggiunge il risultato alle decine tenute; le unità sono scritte, e le eventuali decine sono messe di seguito; e quindi si avrà la moltiplicazione di qualsiasi numero di tre cifre, siano esse uguali o disuguali.

Appartengono a questa categoria di numeri uguali 345 e 345, che vogliamo moltiplicare insieme, mettendoli uno accanto all'altro come visualizzato in questa pagina; si moltiplica il 5 per il 5; si ha 25; il 5 è messo sopra entrambi i 5, come visualizzato nella seconda illustrazione, e il 2 è tenuto in mano per le decine; il 5 nel numero superiore viene moltiplicato per il 4 in basso, e il 5 in basso per il 4 sopra; i prodotti vengono aggiunti al 2 mantenuto; si ha 42; 2 viene messo sopra entrambi i 4, come nella terza illustrazione, e 4 viene mantenuto per le decine; il 5 in alto è moltiplicato per il 3 in basso, e il 5 in basso per il 3 in alto, e il 4 per il 4, e i risultati delle

prima	345
	345
	5
seconda	345
	345
	25
terza	345
	345

	025
quarta	345
	345
	9025
quinta	345
	345
	119025
ultima	345
	345

tre moltiplicazioni sono sommati con il 4 tenuto in mano; si ha 50; lo 0 è messo sopra entrambi i 3, come è mostrato nella quarta illustrazione, e il 5 è tenuto in mano; si moltiplica il 4 in alto con il 3 in basso, e il 4 in basso con il 3 in alto, e si sommano con il 4; si ha 29; 9 è messo dopo lo 0, come nella quinta illustrazione, e il 2 è tenuto in mano; 3 viene moltiplicato per 3; si ha 9, che si aggiunge al 2; si ha 11 che è scritto, come nella sesta e ultima illustrazione. E con i metodi sopra detti si verificherà se la moltiplicazione è corretta; cioè, le figure del 345 di cui sopra vengono sommate, e quindi viene sottratto 9; rimane 3; si fa allo stesso modo con il 345 di sotto e rimane ancora 3; si moltiplica il 3 per il 3 e si toglie 9; rimane 0 come resto; poi si sommano le figure del risultato della moltiplicazione, ossia 1, 1, 2, e 5; si ha 9, da cui viene sottratto 9; rimane 0 come dovrebbe rimanere. Perciò dichiarerò, infatti, che la moltiplicazione della seconda figura per la seconda va aggiunta alla moltiplicazione delle prime figure per le terze, perché, come si è detto, il primo posto moltiplica qualsiasi posto rendendo lo stesso posto, e il secondo posto moltiplica qualsiasi posto dando il posto dopo quello per cui viene moltiplicato. E perciò, quando si moltiplica il primo posto per il terzo, si ottiene il terzo posto. E quando si moltiplica il secondo per il secondo, si ottiene lo stesso di prima, cioè il terzo. Pertanto alla moltiplicazione del secondo posto per il secondo posto devono essere aggiunti i prodotti dei primi per i terzi. Si prosegue col prodotto dei secondi posti per i terzi, da cui risulta il quarto posto, cioè quello dopo coloro per cui si moltiplica. Per ultimo si moltiplica il terzo posto per il terzo, da cui risulta il quinto posto, vale a dire il terzo da quello che il terzo moltiplica. E per questa ragione, da ciò che si ottiene dalla moltiplicazione dei primi posti per i terzi e dei secondi per i secondi, mettiamo le unità al terzo posto, e continuiamo con le decine al quarto posto. E da ciò che viene dalla moltiplicazione del secondi per i terzi e dalle decine custodite, mettiamo le unità nel quarto posto, e teniamo le decine per il quinto posto; le decine vengono aggiunte al prodotto del terzo posto per il terzo, e si mettono le unità al quinto posto, e le decine nel sesto, e quindi si ha la moltiplicazione di sopra.

Sulla stessa.

368449
607
607

Se si vuole moltiplicare 607 per 607, collocati i numeri, si moltiplica il 7 per il 7; si ha 49; si mette il 9 e si mantiene il 4; si moltiplica il 7 per lo 0 e, in croce, lo 0 per il 7; si aggiunge il 4 tenuto e si ha 4, che si mette; si moltiplica il 7 per il 6, il 7 per il 6, e lo 0 per 0; si ha 84; si mette il 4 e si mantiene l'8; lo 0 viene moltiplicato per il 6, lo 0 per il 6, e lo zephir è aggiunta all'8; si ha 8 che si mette; il 6 è moltiplicato per il 6; si ha 36; si mette il 6 e il 3, e quindi si avrà 368449 per il risultato di detta moltiplicazione.

608400
78
78

Sulla stessa.

Se si vuole moltiplicare 780 per 780, si sopprimono entrambi gli zephir;

ci resta 78 e 78; il 78 è moltiplicato per il 78; si ha 6084, prima di mettere i due zephir, e si ha 608400 per il risultato di detta moltiplicazione. Anche se si vuole moltiplicare 900 da 900, si eliminano gli zephir da ogni numero, e si moltiplica il 9 per il 9; si ha 81, prima di mettere i quattro zephir cancellati, e 810000 sarà il risultato di detta moltiplicazione.

810000
9
9

Sulle stesse con numeri disuguali.

Tuttavia, volendo moltiplicare due numeri disuguali, questi saranno moltiplicati nello stesso modo e ordine; se si hanno 123 e 456 da moltiplicare, allora si scrive un numero dopo l'altro, come si è detto; il 3 è moltiplicato per il 6; si ha 18; l'8 è scritto e l'1 viene mantenuto; il 3 è moltiplicato per il 5; si ha 15 che aggiunto all'1 mantenuto dà 16; il 6 volte 2 viene aggiunto al 16; si ha 28; l'8 è scritto e il 2 è mantenuto; il 3 è moltiplicato per il 4, il 6 per l'1, e il 2 per il 5, e la somma viene aggiunta al 2 mantenuto; si ha 30; lo 0 è scritto e il 3 viene mantenuto; il 2 viene moltiplicato per il 4, il 5 per l'1, e la somma è aggiunta al 3 mantenuto; si ha 16; il 6 è scritto e l'1 che viene mantenuto si aggiunge al prodotto di 1 per 4; si ha 5 che viene scritto e 56088 sarà il risultato di detta moltiplicazione. Se si vuole controllare questo risultato, si aggiungono le figure di 123; si ha 6; si aggiungono le figure di 456; si ha 15 da cui si sottrae il numero 9; rimane 6, che viene moltiplicato per 6; si ha 36 che diviso per 9 dà 0 per resto. Poi si sommano le figure che sono il risultato di detta moltiplicazione; si ha 27 che diviso per 9 dà 0 per resto, come ci si aspetta. Ancora, se si propone di moltiplicare 370 per 451, allora si può moltiplicare usando la sopra detta istruzione; tuttavia, poiché lo zephir è nel primo posto di uno dei numeri, cioè del 370, la moltiplicazione viene insegnata in altro modo, cioè, lo 0 è eliminato dal 370; si ha 37 che viene moltiplicato per il 451; quindi si ha la moltiplicazione di due figure per tre, che deve ancora essere insegnata. Si scrive il 37 sopra il 51 del 451, e il 7 è moltiplicato per l'1; si ha 7 che è scritto. Il 7 è moltiplicato per il 5 e l'1 è moltiplicato per il 3; si ha 38; l'8 viene scritto e il 3 viene mantenuto; il 7 è moltiplicato per il 4 e il 3 per il 5, e la somma viene aggiunta al 3 mantenuto; si ha 46; il 6 è scritto e il 4 è mantenuto; il 3 è moltiplicato per 4, e il prodotto viene aggiunto al 4 mantenuto; si ha 16; il 6 e l'1 sono scritti e avremo 16687 per il risultato di detta moltiplicazione di due figure per tre, che messo davanti allo 0 cancellato dal 370 ci dà 166870; quindi, in questo modo vengono moltiplicate due figure qualsiasi con qualsiasi tre figure. Ancora, se è richiesta la moltiplicazione di 320 per 570, eliminando lo zephir da ogni numero, rimangono 32 e 57; questi numeri sono moltiplicati insieme; si ha 1824 che viene messo davanti ai due zephir, e 182400 sarà il risultato di detta moltiplicazione.

56088
la prova 123
è 0 456

166870
37
451

182400
32
57

Terza parte sulla moltiplicazione di quattro figure.

Volendo moltiplicare quattro figure per quattro, si scrivono i numeri, e posti simili si trovano sotto posti simili; il primo posto viene moltiplicato

per il primo e si mettono le +unità, ricordando sempre di mantenere le decine; il primo è moltiplicato per il secondo, e il primo per il secondo, e vengono scritti; il primo per il terzo, il primo per il terzo, e il secondo per il secondo, e vengono scritti; il primo per il quarto, il primo per il quarto, il secondo per il terzo e il secondo per il terzo, e sono scritti; il secondo per il quarto, il secondo per il quarto, e il terzo per il terzo, e sono scritti; il terzo per il quarto e il terzo per il quarto, e sono scritti; il quarto per il quarto, ed è scritto; e quindi si avrà la moltiplicazione di numeri di quattro figure, siano essi uguali o disuguali. In questa categoria, propongo la moltiplicazione di 1234 per se stesso, e scrivo il numero; il primo posto è moltiplicato per il primo, cioè il 4 per il 4; si ha 16; il 6 viene messo su entrambi i 4, e l'1 viene mantenuto; il 4 viene moltiplicato per il 3 ed il 4 per il 3, e sono aggiunti all'1 mantenuto; si ha 25; il 5 viene messo sopra entrambi i 3, e il 2 viene mantenuto. Il 4 è moltiplicato per il 2, il 4 per il 2 e il 3 per il 3, e i prodotti sono aggiunti al 2 mantenuto; si ha 27; il 7 è messo sopra entrambi i 2, e il 2 viene mantenuto; il 4 viene moltiplicato per 1, il 4 per 1, il 3 per 2 e il 3 per 2, e questi quattro prodotti vengono aggiunti al 2 mantenuto; si ha 22; il 2 è messo sopra entrambi gli 1, e il 2 è tenuto in mano; il 3 è moltiplicato per l'1, il 3 per l'1, e il 2 per il 2, ed i prodotti sono aggiunti al 2 mantenuto; si ha 12; il 2 è scritto, e l'1 è tenuto in mano; il 2 viene moltiplicato per l'1, e il 2 per l'1, ed i prodotti sono aggiunti all'1 mantenuto; si ha 5 che è scritto; l'1 è moltiplicato per l'1; si ha 1, che è scritto; e quindi 1522756 sarà il risultato della moltiplicazione.

1522756
1234
1234

Sulla stessa.

Ancora, per capire, si propone la moltiplicazione di 2345 per 6789; quindi si scrivono i numeri; il 5 viene moltiplicato per il 9; si ha 45; il 5 è scritto, e il 4 è mantenuto; il 5 è moltiplicato per l'8, il 9 per il 4, ed i prodotti sono aggiunti al 4 mantenuto; si ha 80; lo 0 è scritto e l'8 è mantenuto; il 5 è moltiplicato per il 7, il 9 per il 3 e il 4 per l'8, e i prodotti vengono aggiunti all'8 mantenuto; si ha 102; il 2 è scritto, e il 10 è tenuto in mano; il 5 è moltiplicato per il 6, il 9 per il 2, il 4 per il 7 e l'8 per il 3, ed i prodotti sono aggiunti al 10 mantenuto; si ha 110; lo 0 è scritto, e l'11 viene mantenuto; il 4 è moltiplicato per il 6, l'8 per il 2 e il 3 per il 7, e i prodotti vengono aggiunti all'11 mantenuto; si ha 72; il 2 è scritto e il 7 è mantenuto; il 3 è moltiplicato per il 6, il 7 per il 2, e i prodotti sono aggiunti al 7 mantenuto; si ha 39; il 9 è scritto, e il 3 viene mantenuto per essere aggiunto al prodotto del 2 per il 6; si ha 15, e il 5 e l'1 sono scritti, ottenendo la moltiplicazione di detti numeri, come mostrato.

15920205
la prova 2345
è 6 6789

Il controllo.

Controlliamo se la moltiplicazione è corretta: il resto di 2345, che è 5, viene moltiplicato per il resto di 6789, che è 3; si ha 15 da cui viene sottratto 9; rimane 6, che è anche il resto del risultato della moltiplicazione. Così si moltiplicano tutti i numeri di quattro cifre; ci sono comunque tra questi,

alcuni che possono essere moltiplicati in un modo più semplice, vale a dire quelli che hanno zephir in testa; se si chiede la moltiplicazione di 5000 e 7000, il 5 viene moltiplicato per il 7; si 35, prima di mettere gli zephir che sono nei numeri, che sono sei, e quindi si ha 35000000 per il risultato di detta moltiplicazione.

Ancora, se si cerca la moltiplicazione di 5100 per 7430, il 51 si moltiplica per il 743; si ha 37893, davanti al quale vengono messi i tre zephir, che sono alla testa di entrambi i numeri, e quindi si avrà 37893000 per il risultato di detta moltiplicazione.

37893000
51
743

Ancora, se si cerca la moltiplicazione di 2500 e 3701, si cancellano i due zephir che sono a capo di 2500; ci resterà 25 che si moltiplica con 3701, vale a dire due figure con quattro; si scrive il 25 sopra il 3701, come è mostrato sotto, e si moltiplica il 5 per l'1; si ha 5 che si scrive; si moltiplica il 5 per lo 0 e l'1 per il 2; si ha 2 che si scrive; il 5 per il 7 e il 2 per lo 0; si ha 35; si scrive il 5 e si mantiene il 3; si moltiplica 5 per 3 e 2 per 7 e si aggiungono i prodotti al 3 mantenuto; si ha 32; il 2 è scritto, il 3 è mantenuto; il 2 per il 3; si ha 6, che si aggiunge al 3 mantenuto; si ha 9 che si scrive. E così si ha 92525 per la moltiplicazione di 25 per 3701, come viene mostrato in figura, davanti al quale si mettono due zephir, e si avrà il risultato della moltiplicazione cercata.

9252500
25
3701

Quarta parte del secondo capitolo.

Se si vuole moltiplicare un numero di cinque posti per qualsiasi numero dello stesso numero di posti, vale a dire cinque figure per cinque, si moltiplicano prima i numeri situati al primo posto, e si scrive; il primo per il secondo e il primo per il secondo, e si scrive; il primo per il terzo, il primo per il terzo, e il secondo per il secondo, e si scrive; il primo per il quarto, il primo per il quarto, il secondo per il terzo e il secondo per il terzo, e si scrive; il primo per il quinto, il primo per il quinto, il secondo per il quarto, il secondo per il quarto e il terzo per il terzo, e si scrive; il secondo per il quinto, il secondo per il quinto, il terzo per il quarto, il terzo per il quarto, e si scrive; il terzo per il quinto, il terzo per il quinto, il quarto per il quarto, e si scrive; il quarto per il quinto, il quarto per il quinto, e si scrive; il quinto per il quinto, e si scrive. E così si moltiplica qualsiasi numero di cinque posti; per mostrare questo evidentemente, proponiamo una moltiplicazione, che vale per moltiplicazioni uguali o disuguali dello stesso numero di posti: se desideriamo moltiplicare 12345 per 12345, scriviamo i numeri, come abbiamo insegnato in precedenza; si moltiplica il 5 per il 5; si ha 25; si scrive il 5 e si mantiene il 2; il 5 per il 4, il 5 per il 4, e si aggiungono i prodotti al 2 mantenuto; si ha 42; si scrive il 2 e si mantiene il 4; il 5 per il 3, il 5 per il 3 e il 4 per il 4, e si aggiungono i prodotti al 4 mantenuto; si ha 50; si scrive lo 0 e si mantiene il 5; il 5 per il 2, il 5 per il 2, il 4 per il 3 e il 4 per il 3, e si aggiungono i prodotti al 5 mantenuto; si ha 49; si scrive il 9 e si mantiene il 4; il 5 per l'1, il 5 per l'1, il 4 per il 2, il 4 per il 2 e il 3 per il 3, e si aggiungono i prodotti al 4 mantenuto; si ha 39; si scrive il 9 e si mantiene il 3; il 4 per l'1, il 4 per l'1, il 3 per il 2 e il 3 per il 2, e si aggiungono al 3

152399025
12345
12345

mantenuto; si ha 23; si scrive il 3 e si mantiene il 2; il 3 per l'1, e il 3 per l'1, il 2 e per il 2, e si aggiungono al 2 mantenuto; si ha 12; si scrive il 2 e si mantiene l'1; il 2 per l'1 e il 3 per l'1, e si aggiungono i prodotti all'1 mantenuto; si ha 5, che si scrive; l'1 per l'1 dà 1, che viene scritto; e quindi si avrà il risultato di detta moltiplicazione. Vi mostrerò ora il modo di procedere per moltiplicare numeri che sono proporzionali tra loro. Infatti, se tre numeri sono proporzionali, cioè se il primo sta al secondo come il secondo al terzo, allora il prodotto del primo per il terzo sarà uguale al prodotto del secondo per se stesso. E se quattro numeri sono proporzionali, cioè se il primo sta al secondo come il terzo al quarto, allora il prodotto del primo per il quarto sarà uguale al prodotto del secondo per il terzo, come si trova in Euclide. Un numero può salire, attraverso posti così connessi, senza fine; per cui, il primo posto starà al secondo, come il secondo al terzo, il terzo al quarto, e così ogni antecedente al suo seguente. Pertanto, il prodotto del secondo posto per sé renderà lo stesso posto del prodotto del primo per il terzo. E la moltiplicazione del secondo per il terzo renderà il posto della moltiplicazione del primo per il quarto. Infatti, la moltiplicazione viene iniziata con le figure del primo posto, dalla cui moltiplicazione risultano o numeri del primo posto, o che terminano in esso. Perciò, dalla moltiplicazione della prima figura per la prima, le unità sono messe nel primo posto, e le decine sono conservate per il secondo, a cui si aggiungono le moltiplicazioni dei primi per i secondi, e risulta un numero del secondo posto, o che termina in esso. Pertanto, le unità sono messe sopra il secondo posto, e per ciascun dieci che si ha, viene mantenuto 1 per il terzo posto. Quindi, moltiplichiamo il primo per il terzo, e il prodotto viene aggiunto alla moltiplicazione del secondo per il secondo, perché la moltiplicazione del secondo posto per il secondo rende lo stesso posto dato dalla moltiplicazione dei primi posti per i terzi. Perciò, dalle moltiplicazioni dei primi posti per i terzi e i secondi per i secondi, le unità sono messe sopra il terzo posto; dopo ciò, il primo viene moltiplicato per il quarto, e i secondi dai terzi, come sono nei quattro posti proporzionali, perché il primo sta al secondo come il terzo sta al quarto, e dalle stesse moltiplicazioni risulta un numero terminante al quarto posto. Perciò, le unità sono messe al quarto posto, e poi si moltiplicano i primi per i quinti, i secondi per i quarti, e i terzi per i terzi, perché, come il primo posto sta al secondo, così il quarto sta al quinto. Poiché la moltiplicazione del secondo posto per il quarto rende il posto dato dalla moltiplicazione del primo per il quinto, vale a dire il quinto posto; e poiché il secondo posto sta al terzo come il terzo al quarto, per cui la moltiplicazione del terzo posto per il terzo rende il posto della moltiplicazione del secondo per il quarto, cioè il quinto posto; per questo motivo le unità sono messe sopra il quinto posto, e, quindi, seguendo la proporzionalità, si ottiene il risultato della moltiplicazione di numeri qualsiasi. Questo può essere chiaramente compreso da ciò che segue. Si osservi, per questo motivo, come il primo posto sta al secondo, così il penultimo sta all'ultimo; e come il primo sta al terzo, così il terzo sta all'ultimo; e come il primo sta al quarto, così il quarto sta all'ultimo, e così via. Nel seguito moltiplichiamo cinque figure per cinque; dopo aver

messo le cinque figure sopra le cinque, si moltiplicano la seconda per la quinta e la terza per la quarta, e le moltiplicazioni vanno al sesto posto; poich , come il secondo posto moltiplicato per il quinto d  il sesto posto, cos  si ha dalla moltiplicazione del terzo posto per il quarto, e come il secondo posto sta al terzo, cos  il quarto sta al quinto. Ancora, il terzo posto   moltiplicato per il quinto, e il quarto per il quarto, e il risultato va al settimo posto; dopo, il quarto   moltiplicato per il quinto, e si ha l'ottavo posto. Per ultimo, il quinto posto   moltiplicato per il quinto, ottenendo il nono posto; e quindi si avr  il risultato di detta moltiplicazione. Dopo tutto ci  che si   detto sulla moltiplicazione, chiunque sarebbe in grado di applicare le istruzioni sopradette, tuttavia mostrer , per completare l'insegnamento, la moltiplicazione di otto posti.

Quinta parte del secondo capitolo.

Se qualcuno vuole moltiplicare un numero qualsiasi di otto figure per qualsiasi altro dello stesso numero di posti, moltiplica il primo per il primo, e scrive il risultato; il primo per il secondo, e il primo per il secondo, e scrive la somma; il primo per il terzo, il primo per il terzo, e il secondo per il secondo, e scrive la somma; il primo per il quarto, il primo per il quarto, il secondo per il terzo e il secondo per il terzo, e scrive la somma; il primo per il quinto, il primo per il quinto, il secondo per il quarto, il secondo per il quarto e il terzo per il terzo, e scrive la somma; il primo per il sesto, il primo per il sesto, il secondo per il quinto, il secondo per il quinto, il terzo per il quarto, e il terzo per il quarto, e scrive la somma; il primo per il settimo, il primo per il settimo, il secondo per il sesto, il secondo per il sesto, il terzo per il quinto, il terzo per il quinto, e il quarto per il quarto, e scrive la somma; il primo per l'ottavo, il primo per l'ottavo, il secondo per il settimo, il secondo per il settimo, cio  quelli che sono con il primo e l'ottavo, il terzo per il sesto e il terzo per il sesto, cio  quelli con il secondo e il settimo, il quarto con il quinto e il quarto con il quinto, che sono con il terzo e il sesto, e scrive la somma. E quindi, in tutte le moltiplicazioni, le figure che emergono dalle parti interne sono moltiplicate alternativamente da entrambe le parti; moltiplicate cos  una con l'altra esse vengono sommate, le unit  sono scritte e decine tenute in mano. Quindi, le moltiplicazioni delle prime figure, in ordine crescente nel resto dei posti, vengono espletate fino all'ultima; poi le prime figure di entrambi i numeri sono lasciate indietro, e si moltiplica la seconda per l'ultima, cio , in questo problema si moltiplica il secondo posto per l'ottavo, il secondo per l'ottavo, il terzo per il settimo, e il terzo per il settimo, che sono aggiunti con il secondo e l'ottavo; il quarto per il sesto e il quarto per il sesto, che vengono aggiunti con il terzo e il settimo; il quinto per il quinto, racchiusi fra il quarto e il sesto, e si scrive la somma; poi si lasciano i secondi posti; si moltiplica il terzo per l'ottavo, il terzo per l'ottavo, il quarto per il settimo, il quarto per il settimo, il quinto per il sesto e il quinto per il sesto, e si scrive la somma; si lasciano i terzi posti; si moltiplica il quarto per l'ottavo, il quarto per l'ottavo, il quinto per il settimo, il quinto per il settimo e il sesto per il sesto, e si scrive la somma; si lasciano

1082152022374638
12345678
87654321

i quarti posti; si moltiplica il quinto per l'ottavo, il quinto per l'ottavo, il sesto per il settimo e il sesto per il settimo, e si scrive la somma; si lasciano i quinti posti; si moltiplica il sesto per l'ottavo, il sesto per l'ottavo e il settimo per il settimo, e si scrive somma; il settimo per l'ottavo, il settimo per l'ottavo, e si scrive la somma; l'ottavo per l'ottavo, e si scrive il risultato; e così si avrà la moltiplicazione di tutti i numeri di otto figure; essa sarà chiaramente compresa in numeri; siano i numeri 12345678 e 87654321, che moltiplicheremo uno per l'altro come descritto in seguito; si moltiplica l' 8 per l'1; si ha 8, che si scrive; l'8 per il 2, e l'1 per il 7; si ha 23; si mette il 3 e si mantiene il 2; l'8 per il 3, l'1 per il 6 e il 7 per il 2, e si sommano i prodotti con il 2 mantenuto; si ha 46; si scrive il 6 e si tiene il 4; l'8 per il 4, l'1 per il 5 e il 7 per il 3, e il 2 per il 6, che aggiunti al 4 mantenuto danno 74; si scrive il 4 e si tiene il 7; l'8 per il 5, l'1 per il 4, il 7 per il 4, il 2 per il 5 e il 6 per il , aggiunti al 7 mantenuto, danno 107; il 7 si scrive e si tiene il 10; l'8 per il 6, l'1 per il 3, il 7 per il 5, il 2 per il 4, il 6 per il 4, e il 3 per il 5, con l'aggiunta del 10 mantenuto, danno 143; si scrive il 3 e il 14 si mantiene; l'8 per il 7, l'1 per il 2, il 7 per il 6, il 2 per il 3, il 6 per il 5, il 3 per il 4, il 5 per il 4, aggiunti al 14 mantenuto, danno 182; il 2 si scrive e il 18 si mantiene; l'8 per l'8, l'1 per l'1, il 7 per il 7, il 2 per il 2, il 6 per il 6, il 3 per il 3, il 5 per il 5 e il 4 per il 4, con l'aggiunta del tenuto 18 danno 222; il 2 è messo, e il 22 è mantenuto; il 7 per l'8, il 2 per l'1, il 6 per il 7, il 3 per il 2, il 5 per il 6, il 4 per il 3 e il 4 per il 5, aggiunti al 22 mantenuto, danno 190; lo 0 è messo e il 19 è mantenuto; il 6 per l'8, il 3 per l'1, il 5 per il 7, il 4 per il 2, il 4 per il 6 e il 5 per il 3, aggiunti al 19 mantenuto, danno 152; il 2 è messo, e il 15 viene mantenuto; il 5 per l'8, il 4 per l'1, il 4 per il 7, il 5 per il 2 e il 3 per il 6, aggiunti al 15 mantenuto, danno 115; il 5 è messo, e l'11 è mantenuto; il 4 per l'8, il 5 per l'1, il 3 per il 7 e il 6 per il 2, aggiunti al'11 mantenuto, danno 81; l'1 è messo, e l'8 è mantenuto; il 3 per l'8, il 6 per l'1 e il 2 per il 7, aggiunti all'8 mantenuto, danno 52; il 2 è messo, e il 5 è mantenuto; il 2 per l'8 e il 7 per l'1, aggiunti al 5 mantenuto, danno 28; 8 è messo, e il 2 è mantenuto; l'1 per l'8 aggiunto al 2 mantenuto dà 10, che è scritto; si avrà quindi il risultato di detta moltiplicazione.

In verità, se ci sono zephir ai capi dei numeri, questi vengono cancellati, le figure rimanenti sono moltiplicate fra loro, e gli zephir eliminati sono messi prima del prodotto senza zephir, quindi si avrà il risultato della moltiplicazione, come abbiamo indicato nelle moltiplicazioni a due, tre e quattro posti; e se non riusciamo a moltiplicare poche figure con molte, con le istruzioni date sopra, allora scriveremo il numero con molte figure sotto il numero con poche figure, collocando sul primo posto del numero inferiore il primo dell'altro, e uno dopo l'altro ogni altro posto; e metteremo dopo il numero con poche figure tanti zephir quante sono le figure in eccesso del numero maggiore, e quindi avremo numeri di uguale lunghezza da moltiplicare; così, se si vuole moltiplicare tre figure con sei, si mette il numero di sei figure al di sotto del numero di tre figure, e si mettono tre zephir dopo le tre figure, ottenendo una moltiplicazione di sei figure con sei, che eseguiremo secondo le suddette istruzioni. Ad esempio, volendo moltiplicare 345 per 698541, li scriveremo in quest'ordine, con tre zephir

240996645
000345
698541

dopo 345. Il posizionamento degli zephir dopo le tre figure è frutto di mera necessità, senza un particolare significato.

Sesta parte del secondo capitolo.

Con l'uso frequente del tavolo, si saprà come operare con le istruzioni per moltiplicare scritte sopra; vediamo ora come applicare le stesse istruzioni a memoria e a mano, senza la tabella scritta, per i numeri di due e tre posti; si manterrà in memoria la scrittura dei numeri che si vogliono moltiplicare, e si inizierà a moltiplicare secondo l'ordine prescritto, mettendo in prima posizione nella mano sinistra il posto delle unità, e nella seconda posizione, nella stessa mano, il posto delle decine. Il terzo posto, quello delle centinaia, si mette nella mano destra, sforzandosi di imparare a mettere al quarto posto le migliaia. Il quinto posto non si può tenere in mano e si mantiene in memoria; e quindi si avrà la moltiplicazione di tutti i numeri di due o tre posti. Ad esempio, se si vuole moltiplicare 12 per 12, la loro scrittura viene tenuta in memoria; il 2 viene moltiplicato per il 2 e fa 4, che si mette nella mano sinistra al posto delle unità; si moltiplica il 2 del 12 superiore per l'1 di quello inferiore, e il 2 inferiore per l'1 superiore, e si sommano; si ha 4, che si mette nella stessa mano sinistra nel posto delle decine, indicando quaranta; si moltiplica l'1 per l'1, vale a dire la seconda figura per la seconda, e si ha 1, che si mette nella mano destra al posto delle centinaia. E si avrà 144 per detta moltiplicazione, come appare in questa pagina. Ancora, se si vuole moltiplicare 48 per 48 senza scrivere, si moltiplica l'8 per l'8; si ha 64; si mette il 4 nella mano sinistra al del posto delle unità, e si mantiene il 6 nella mano destra al posto della centinaia. Si moltiplica l'8 per il 4, l'8 per il 4 e si sommano i prodotti; si ha 64 che si aggiunge al 6 mantenuto nella mano destra; si ha 70; si mette lo 0 nella mano sinistra al posto delle decine, e il 7 si tiene nella mano destra, a cui si aggiunge la moltiplicazione del 4 per il 4, vale a dire 16; si ha 23; si mette il 3 nella mano destra al posto delle centinaia, e si mette il 2 nella stessa mano al posto delle migliaia, indicando duemila. E quindi 2304 sarà il risultato cercato. Ancora, se si vuole moltiplicare 23 per 57, allora si mantiene la scrittura in memoria, e si moltiplica il 3 per il 7; si ha 21; si mette l'1 al posto delle unità nella mano sinistra, e si mantiene il 2 nella mano destra; il 3 per il 5 e il 7 per il 2, e si aggiungono i prodotti al 2 mantenuto; si ha 31; si mette l'1 nel posto delle decine, e si mantiene il 3 nella mano destra; il 2 per il 5, e si aggiunge il prodotto al 3 mantenuto; si ha 13; si mette il 3 al posto delle centinaia nella mano destra, e l'1 al posto delle migliaia, e quindi si avrà 1311 per questa moltiplicazione.

144
12
12

48
48

1311
23
57

Parte VII del secondo capitolo.

Se si vuole moltiplicare 347 per 347 senza scrivere, si moltiplica il 7 per il 7, tenendo la scrittura dei numeri in memoria; si ha 49; si mette il 9 nella mano sinistra al posto delle unità, e nel destra si mantiene il 4; due volte il 7 per il 4, e si aggiungono i prodotti al 4 mantenuto; si ha 60; si mette lo 0 al

posto delle decine nella mano sinistra, e si mantiene il 6 nella destra; due volte il 7 per il 3, e il 4 per il 4, che aggiunti al 6 tenuto danno 64; si mette il 4 nella destra al posto delle centinaia, e il 6 si tiene al posto delle migliaia, o nella memoria; due volte il 4 per il 3, e si aggiungono al 6 tenuto; si ha 30; si mette lo 0 e si mantiene 3 nella memoria; il 3 per il 3, e si aggiunge il prodotto al 3 conservato in memoria; si ha 12, che si tiene, non potendosi mettere in mano; e quindi si avrà 120409 per questa moltiplicazione. E così, se si sanno mantenere i numeri in memoria, in questo modo si sarà capaci di produrre risultati più facilmente che con il tavolo. E si sarà in grado di trovare le moltiplicazioni di qualsiasi numero di due posti e tre posti, con la memoria e le mani.

Capitolo 3

Inizia il terzo capitolo sull'addizione di numeri interi.

Volendo poi addizionare dei numeri, non importa quanti, si scrivono questi in una tabella come abbiamo fatto con la moltiplicazione, cioè mettendo il primo posto di ogni numero da aggiungere sotto il primo posto del numero che lo precede, il secondo sotto il secondo, e di seguito uno dopo l'altro. Poi si cominciano ad aggiungere nelle mani le figure dei primi posti di tutti i numeri da sommare, dal più basso fino a più alto; si mettono quindi le unità sopra il primo posto in alto e si tengono le decine in mano; a queste si aggiungono le decine scritte nei secondi posti, e si mettono le unità sopra il secondo posto, ed ancora si tengono in mano le decine. A queste si aggiunge la somma dei terzi posti, si mettono sopra le unità, mantenendo le decine, e così, addizionando i numeri passo dopo passo, si può avere la somma di tutti i numeri, senza fine. Per capire meglio, sono mostrate le addizioni di due numeri, di tre, e anche di più.

Vi è poi un altro modo di moltiplicazione molto apprezzato, migliore per moltiplicare grandi numeri, che io vi mostrerò nella moltiplicazione di 567 per 4321. Si costruisca un rettangolo a forma di scacchiera, con 5 punti di lunghezza, cioè uno in più del numero di figure del numero maggiore, e con 3 punti in larghezza, quante sono le figure del numero minore, e si metta il numero maggiore sopra il rettangolo sopradetto, ed il minore di fianco, così come mostrato. La prima figura del numero più piccolo, vale a dire 7, viene moltiplicata per 1, che è la prima del numero maggiore; si ha 7 che viene messo nel primo posto della linea superiore, cioè sotto l'1; il 7 è moltiplicato per la seconda cifra del numero maggiore, vale a dire 2; si ha 14; il 4 è messo nel secondo posto della linea superiore, e l'1 viene mantenuto e aggiunto alla moltiplicazione del 7 per il 3; si ha 22; il 2 viene messo nel terzo posto, dopo il 4, e il 2 è mantenuto; ad esso si aggiunge la moltiplicazione del 7 per il 4, che è l'ultima figura del numero maggiore; si ha 30; lo 0 si mette nel quarto posto, e il 3 nel quinto. Allo stesso modo il 6 sarà moltiplicato singolarmente per 1, per 2, per 3, e per 4; si avranno: 6 nel primo posto della seconda linea, 2 nel secondo, 9 nel terzo, 5 e nel quarto e 2 nel quinto posto; ed ancora si fa la moltiplicazione con il 5, che è l'ultima figura del numero più piccolo, e si avrà 5 nel primo posto della terza linea, 0 nel secondo, 6 nel terzo, 1 nel quarto e 2 nel quinto. Si prosegue mettendo il 7 nel primo posto, sopra l'1; si sommano il 6 e il 4 che sono adiacenti diagonalmente al 7; si ha 10; lo 0 è messo sopra il 2 e l'1 viene mantenuto e ad esso vengono aggiunti il 5, il 2 e il 2, che sono situati diagonalmente dopo i suddetti 6 e 4; si ha 10; di nuovo lo 0 viene posto al terzo posto e l'1 viene mantenuto e aggiunto a 0, a 9 e a 0, che si trovano adiacenti in diagonale dopo i suddetti 5, 2 e 2; si ha 10; lo 0 è messo sopra il 4, che è nell'ultimo posto del numero più grande, e l'1 viene mantenuto e viene aggiunto al 6, al 5 e al 3, che seguono in diagonale; si ha 15; il 5 viene messo al quinto posto e l'1 conservato è aggiunto a 1 e 2 che sono in sequenza diagonale; si ha 4 che si pone nel sesto posto. Il 2, che è

2	4	5	0	0	7
	4	3	2	1	
		3	0	2	4
			2	5	9
				2	6
					5

nell'angolo del rettangolo dopo la diagonale di 1 e 2, si mette al settimo posto e si ha il prodotto.

74
25
49

Se si vuole conoscere l'addizione di 25 e 49, si mette il 49 sotto il 25, come se si dovessero moltiplicare tra loro; si aggiunge il 9 al 5; si ha 14; si mette il 4 sopra, al primo posto, e si mantiene l'1 che si aggiunge al 4 e al 2; si ha 7 che si mette al secondo posto, ottenendo quindi 74 per la somma cercata.

4690
123
4567

Se si vuole conoscere l'addizione di 123 e 4567, li scriviamo come viene mostrato; si aggiunge il 7 al 3; si ha 10; si mette lo 0 e si mantiene l'1 che si aggiunge al 6 e al 2; si ha 9 che si scrive sopra. Si aggiunge il 5 all'1, che sono nella terza posizione; si ha 6 che si pone nello stesso posto; per il 4, che è al quarto posto del numero in basso, si mette 4 nella quarta posizione e quindi si ottiene 4690 per l'addizione cercata.

511110
4321
506789

Se si vuole conoscere l'addizione di 4321 e 506789, li scriviamo nell'ordine prescritto; si aggiunge il 9 all'1; si ha 10; si mette lo 0 e si mantiene l'1 che si aggiunge all'8 e al 2; si ha 11; si mette l'1 e si mantiene l'1 che si aggiunge al 7 e al 3; si ha 11; si mette l'1 e si mantiene l'1 che si aggiunge allo 0 che è in basso; si ha uno che si mette al quinto posto; il 5 che rimane si mette nel sesto posto, e quindi si ha l'addizione cercata.

Il controllo.

Se si vuole eseguire il controllo con la prova del nove, come abbiamo fatto con le moltiplicazioni, si prende il residuo da nove di 4321, che è uno, e si aggiunge al residuo di 506789 che è 8; si ha 9 da cui, sottraendo 9, rimane o come residuo; quindi, prendendo il residuo dell'addizione fatta, cioè di 511110, si trova che è 0, come dovrebbe essere.

Mostriamo infine come procede tale controllo; siano .ab. e .bg. due numeri che vogliamo addizionare; la loro somma sarà quindi .ag. Sommando il residuo del numero .ab. e il residuo del numero .bg., si abbia .dg. In primo luogo, lasciamo che ciascuno dei numeri .ab. e .bg. sia divisibile per 9, cioè 9 sia il fattore comune dei numeri .ab. e .bg.; poiché il numero .ag. totale deve essere anche divisibile per 9, il suo residuo sarà 0, che sarà anche la somma dei residui dei numeri .ab. e .bg. Sia ora un numero divisibile per 9 e l'altro no, cioè .ab. sia divisibile per 9, e dal numero .bg. diviso per 9, rimanga il numero .dg.; .bd. e .ab. siano divisibili per 9 e quindi il numero totale .ad. sarà divisibile per 9. Poiché il numero .ag. supera il numero .ad. del numero .bd., e il numero .ad. è divisibile per 9, rimarrà, dal numero .ag. totale., il numero .dg., indivisibile per 9, che deve risultare dalla somma del residuo del numero .ab., che è 0, con il residuo del numero .bg., cioè .dg. Ancora, nessuno dei numeri .ab. e .bg. sia divisibile per 9, ma dal numero .ab. resti il numero .ae., e dal numero .bg. resti il numero .dg. Le parti restanti, cioè i numeri .eb. e .bd., risultano divisibili per 9. E poiché il loro totale .ed. è divisibile per 9, i numeri .ae. e .dg., il cui totale è .ag., restano indivisibile, e sono i residui dei numeri .ab. e .bg., da cui deve risultare il residuo del numero .ag., come si doveva dimostrare.

Se si vuole conoscere l'addizione di 25, 461, 6789, 58, 491, e 10718, si scrivono tutti i numeri in ordine, come mostrato, e si addizionano i numeri delle figure che sono al primo posto, iniziando con il più basso, ossia 8, 1, 8, 9, 1, e 5, usando sempre la mano sinistra; si ha 32; si mette il 2 e si mantiene il 3, a cui si aggiungono i numeri delle figure che sono al secondo posto, ossia 1, 9, 5, 8, 6, e 2; si ha 34; si mette il 4 e si mantiene il 3, col quale si continua sommando i numeri delle figure del terzo posto, cioè 7, 4, 7, e 4; si ha 25; si mette il 5 e si mantiene il 2, a cui si aggiungono i numeri delle figure del quarto posto, cioè lo 0 e il 6; si ha 8 che si mette; dopodiché si mette 1 per l'1 che si trova al quinto posto del numero più in basso, e nei restanti numeri non ci sono figure nello stesso posto; e quindi si avrà 18542 per l'addizione, come mostrato.

18542
25
461
6789
58
491
10718

Se si vuole verificare questa addizione, si sommano tutte le figure che sono in tutti i numeri, eliminando via via i nove, e quello che avanza dopo la cancellazione di tutti i nove sarà il residuo. Con l'aggiunta di molti numeri non abbiamo bisogno del controllo, perché possiamo altrettanto facilmente rifare la somma invece di trovare il residuo. Voglio inoltre mostrarvi questo modo di addizionare: tutte le figure che sono nei primi posti di tutti i numeri sono effettivamente addizionate; con questa addizione, poichè tutte le figure sono unità, si addizionano le unità dei numeri. Pertanto le unità sono messe nel primo posto, e le decine sono trattenute per il secondo, che è il posto delle decine; quindi, alle decine tenute aggiungiamo tutte le figure dei numeri che sono nel secondo posto; e siccome dal conteggio risultano molte unità, così avremo molte decine nell'addizione; quindi le unità sono messe nel secondo posto, in quanto queste unità sono decine, e per ogni decina è mantenuto uno per il terzo posto. Da dieci decine è fatto il numero cento; a queste unità vengono aggiunti i numeri nella terza posizione di tutti i numeri, e ciò che si ottiene dalla somma dei numeri del terzo posto sono le centinaia. Per questo motivo, le unità sono messe in terza posizione e le decine sono conservate per la quarta; così, continuando gradatamente, posto per posto, aggiungendo figure in posti consecutivi e mettendo sopra la fine dei numeri, produciamo il risultato.

Inoltre, le istruzioni scritte sopra sono applicabili ai numeri che uno vuole scrivere; si possono addizionare spese di spedizione e cose simili, espresse in libbre, soldi e denari; note di un ciambellano, di un segretario, o di un venditore, dette singolarmente spese, o acquisti di qualsiasi cosa. Si scrive il prezzo di ogni cosa in una tabella, ponendo libbre sotto libbre, soldi sotto soldi e denari sotto denari delle spese o costi di ciascun elemento; si scrivono in tabella i rapporti per ogni spesa, annotandone gli eventuali inganni presenti; quindi si addizionano correttamente nella tabella le spese relative ai denari, e si trasformano in soldi, che si tengono sopra nella casella riservata ai soldi; questi si addizionano ai soldi scritti sotto nella tabella e il risultato si trasforma in libbre, che si tengono nella colonna delle libbre; i soldi che superano le libbre si mettono sopra i soldi, dopo il resto dei denari; dopo questo si mette la somma della libbre, e quindi si avrà la somma della tabella. Per esempio, se si elencano certe spese relative ad alcune cose, come nella tabella seguente, scrivendo il numero di libbre, soldi e denari, come

indicato, si ha che i denari, che sono in totale 73, sono formati da 6 soldi e 1 denaro; i 6 soldi, aggiunti agli altri che sono nella tabella, fanno 122 che sono 6 libbre e 2 soldi; alle 6 libbre si aggiungono le altre libbre e si trova la somma di 368 libbre; quindi la somma totale è 368 libbre, 2 soldi e 1 denaro; questa somma si conserva in una pagina in cui sono le spese aggiuntive; e quindi, in ordine, si aggiungono le spese sommandole in ogni pagina; quindi si scrivono in una tabella le somme di tutte le pagine, e si esegue la somma delle somme; e quindi si potranno addizionare eventuali spese in bisanti, carati, once d'oro, tareni genovesi, quintali, papiri, e tutti gli oggetti simili.

				368	2	1
				libbre	soldi	denari
Per cose	lii libbre	iiii soldi	ii denari	52	4	2
Per cose	xii libbre	xv soldi	v denari	12	15	5
Per cose		liiii libbre		53		
Per cose		lxxx libbre		80		
Per cose		xv soldi			15	
Per cose		xviii soldi			18	
Per cose		viii soldi	x denari		9	10
Per cose			xi denari			11
Per cose			vii denari			7
Per cose	v libbre	vi soldi	xi denari	5	6	11
Per cose	viii libbre	vii soldi	v denari	8	7	5
Per cose	lxxxvii libbre	viii denari		87		9
Per cose		viii libbre	vi soldi	8	6	
Per cose	xxvii libbre	xv soldi	vi denari	27	15	6
Per cose			xiii soldi		13	
Per cose			vii denari			7
Per cose	xxx libbre	viii soldi		30	8	
				6	6	
Somma	ccclxviii libbre	ii soldi	i denaro			

Capitolo 4

Inizia il quarto capitolo sulla sottrazione di numeri minori da numeri maggiori.

Volendo sottrarre un numero da un altro, si scrive il numero minore sotto il maggiore, ponendo posti simili sotto simili, e si comincia a sottrarre la prima figura del numero minore dalla prima nel maggiore, mettendo l'eccesso del numero sopra le prime figure. Quindi si sottrae il prossimo dal secondo, e si mette la differenza sopra le seconde figure, e la terza sopra le terze. E così con le altre figure, in ordine, sempre mettendo sopra le differenze. Quando la sottrazione della figura di un numero minore dalla figura del numero maggiore non è possibile, perchè la figura del numero minore è più grande della figura del numero maggiore, allora si aggiunge dieci alla figura del numero maggiore, e si sottrae dalla somma la figura del numero minore. Per la somma della suddetta decina, una unità sarà tenuta in mano, per essere aggiunta alla figura seguente del numero minore, costruendo la quantità che sarà sottratta dalla figura superiore dello stesso posto, se è possibile, altrimenti si aggiunge anche qui una decina, come abbiamo fatto in precedenza; e così via, gradatamente, fino all'ultima figura del numero minore; se il numero maggiore supera in grado il numero minore, le figure presenti nei gradi in eccesso saranno messe alla fine. E così si avrà la differenza dei numeri sottratti. Ad esempio, se si vuole sottrarre 35 da 89, il 35 viene messo sotto l'89, come mostrato a margine; quindi il 5 viene sottratto dal 9; resta 4 che è messo sopra il 9; il 3 è sottratto dall'8; resta 5, che si mette sopra, ottenendo così 54 per la differenza della sottrazione proposta. Se uno vuole sottrarre 39 da 85, allora si scrivono i numeri come mostrato; si sottrae il 9 dal 5, che è impossibile. Si aggiunge il 10 al 5; si ha 15 da cui si sottrae il 9; resta 6 che si mette; per l'aggiunta di 10 si tiene in mano 1 che si aggiunge al 3; si ha 4, che si sottrae dall'8 ottenendo 4 che si pone al di sopra di detto 8, e così si avrà 46 per la differenza della sottrazione proposta.

46

85
39

312

392
80

Se si vuole sottrarre 80 da 392, si mette l'80 sotto il 392, si toglie 0 dal 2; rimane 2, che si mette; si sottrae l'8 dal 9; rimane 1 che si mette; dopo si mette il 3 che sta nel numero maggiore, e quindi si avrà 312 per la differenza di detta sottrazione.

Se invece uno vuole sottrarre 92 da 380, si scrive il 92 sotto il 380, e siccome è impossibile sottrarre il 2 dallo 0, alla stesso zero si aggiunge 10; si ha 10 da cui si sottrae il 2 che è minore; resta 8 che si mette, e del 10 aggiunto si tiene in mano 1 che si aggiunge al 9; si ha 10 da sottrarre da 8; ma ciò non è possibile; viene sottratto da 18; rimane 8 che si mette, e si mantiene 1 che si sottrae dal 3; resta 2 che si mette, e così si avrà 288 per la differenza di detta sottrazione.

54

89
35

288

380
92

Se è richiesta la differenza della sottrazione di 457 da 939, allora, scritti i numeri, si toglie 7 dal 9; resta 2 che si mette; siccome è impossibile sottrarre 5 da 3, si sottrae 5 da 13; rimane 8 che si mette, e si tiene in mano 1 che si aggiunge al 4; si ha 5 che sottrae dal 9; rimane 4 che si mette; e quindi si avrà 482 per la differenza di detta sottrazione.

482

939
457

Se si vuole sottrarre 841 da 15738, si toglie 1 da 8; resta 7 che si mette; si toglie il 4 dal 13, resta 9 che si mette, e si tiene in mano 1 che si aggiunge all'8; si ha 9 che si sottrae dal 17; rimane 8 che si mette, e si continua togliendo 1 dal 5, che è il quarto posto del numero superiore; resta 4 che si mette, e dopo si mette l'1 che rimane nel quinto posto dello stesso numero; e quindi si avrà 14897 per la differenza di detta sottrazione.

Il controllo.

Se si vuole avere il residuo di una sottrazione qualsiasi, si prende il residuo di ogni numero, come abbiamo insegnato per la moltiplicazione. Si sottrae il residuo del numero minore, se è possibile, dal residuo del numero più grande; altrimenti si aggiunge, al residuo del numero maggiore, un modulo, cioè 9, e fatta la differenza si avrà il residuo della sottrazione. Per esempio, il residuo del numero maggiore, cioè 81728, è 8, e del più piccolo, cioè 28391, è 5; e il 5 sottratto dall'8 dà 3 per residuo, come si trova per la differenza della sottrazione.

	53337
Il	-----
residuo	81728
è 3	28391

Ancora, 4562 sottratto da 8383 dà 3821. Il residuo del numero maggiore è 4, e del numero più piccolo è 8; e poichè non è possibile sottrarre l'8 dal 4, cioè il residuo del numero più piccolo dal residuo del numero maggiore, viene aggiunto 9 al residuo del numero più grande; si ha 13 da cui viene sottratto l'8, cioè il residuo del numero più piccolo; rimane 5 che è il residuo della differenza di detta sottrazione, cioè di 3821.

Ade qd e de buete i qua se lantilet 100 unni ex quib p siglos mēset erit
 bre decimū residui. qrit qd lantilet i fine ani remāserit. b. 12 mēset.
 Nā si o pōtū eē qdā hūc bñt pēnt p 12 ann. 7 dedit i unūquap
 eū decimū residui suoz bñt. 7 remāserit ei. b. $\frac{10}{10} \frac{8}{10} \frac{6}{10} \frac{4}{10} \frac{2}{10} \frac{10}{10} \frac{8}{10} \frac{6}{10} \frac{4}{10} \frac{2}{10}$ 18.
 qrit qdā sit sūma bñt ipi. desēbe i ordie duodecet 12 sub quādā ū
 gula sita rē ut hie ostendit. $\frac{10}{10} \frac{8}{10} \frac{6}{10} \frac{4}{10} \frac{2}{10} \frac{10}{10} \frac{8}{10} \frac{6}{10} \frac{4}{10} \frac{2}{10}$ mēsa
 bñt 12 cū sint finenōib pōū 10 q se sub duocē nouenarijs pēpt
 ūgle. 7 diuide sūmā ipi mēcationis p illos duodec nouenarijs. cū pōst
 fūnt sub quādā ūgle. 7 sic hebēt. b. 100 p sūmā illi.
 Quidā hūc bñt uolūt erare de quādā ciuitate hñte pōtū 10 70 pō
 tū eū dñe pñe pōte $\frac{1}{2}$ suoz bñt. 7 isup $\frac{1}{2}$ unū bñt. se. dñi
 dñi bñt. qd ibi attulit 7 isit $\frac{1}{2}$ unū bñt. 7 eie tēū $\frac{1}{2}$ unū bñt. 7
 qrit 7 $\frac{1}{2}$ unū bñt. 7 ita p ordinē usq q i decima pōtā dedit deci
 mū bñt. qd ibi attulit. et $\frac{1}{10}$ unū bñt. 7 remāsit ei. b. 1 qrit qd
 bñt hñt ille. pōtē itaq. h qrit dupl solui. pñ qd ut de pōtā i
 pōtā ab ultia scpiendo ogdianit sic. Nā i fine remāsit ei. b. 1 de
 dit ultie pōte decimā unū bñt. q cū ipē dedit ipam decimā. hebāt
 bñt $\frac{1}{10}$ 7 qd eē dedit decimā bñt qd ibi attulit. 7 remāsit ei ipm
 bñt $\frac{1}{10}$ lūcūnd ē nūc ex q erētā $\frac{1}{10}$ remāet. b. $\frac{1}{10}$ quē nūc po
 ne ut sit 10 fin reglar. artor. de q erētā $\frac{1}{10}$ remāet. 7 q
 uellet ē $\frac{1}{10}$ qd mēsa 10 p $\frac{1}{10}$ 7 diuidet p 7 erib. b. $\frac{1}{7}$ 7 tñ re
 māsit ei p nonā pōtā. cū q adde $\frac{1}{7}$ unū. b. q dedit none pōte. erit
 b. $\frac{1}{7}$ 7 qd dñet nūm de q erētā $\frac{1}{7}$ ipi remāet. b. $\frac{1}{7}$ pōt
 g. q nūc ille sit 7 de q erētā $\frac{1}{7}$ remāet. 7 q uellet ē $\frac{1}{7}$.
 qd mēsa $\frac{1}{7}$ p 7 diuidet p 7 erib. b. $\frac{1}{7}$ 7 tñ remāsit ei p octi
 mū pōtā. cū q adde $\frac{1}{7}$ unū. b. q dedit i ipā pōtā. erit b. $\frac{1}{7}$ quē de
 octimū pōtā mē. p $\frac{1}{7}$ 7 diuidet p 7 erib. b. $\frac{1}{7}$ cū q adde $\frac{1}{7}$ unū
 b. q dedit septe pōte. erit. b. 7 qd mē. p 7 diuidet p 7 erib
 b. $\frac{1}{7}$ cū qd adde $\frac{1}{7}$ unū. b. quē dedit sette pōte. erit. b. $\frac{1}{7}$
 qd mē. p 7 diuidet p 7 erib. b. 7 cū qd adde $\frac{1}{7}$ unū. b. q
 dedit quito pōte. erit. b. $\frac{1}{7}$ qd mē. p 7 diuidet p 7 erib. b. 7
 cū qd adde $\frac{1}{7}$ unū. b. q dedit quito pōte. erit. b. $\frac{1}{7}$ qd mē. p 7
 diuidet p 7 erib. b. $\frac{1}{7}$ cū quib adde $\frac{1}{7}$ unū. b. q dedit tēte.
 pōte. erit. b. 7 qd mē. p 7 diuidet p 7 erib. b. 7 tot remā
 sit ei p pōtā. cū qd adde $\frac{1}{7}$ unū. b. q dedit i pōtā. erit. b. $\frac{1}{7}$
 p qd dñet nūm ex q erētā dimidio ipi remāet. b. $\frac{1}{7}$ p q nūo
 ponet 7 ex quo erētā dimidio remāet. 7 q uellet ē $\frac{1}{7}$ qd mē.
 $\frac{1}{7}$ p 7 diuidet p 7 erib. b. 7 tot remāsit ei p pñā pō
 tū. cū qd adde $\frac{1}{7}$ unū. b. q dedit i pñā pōtā. erit. b. $\frac{1}{7}$ 7 p qd

Summa
100

Capitolo 5

Inizia il quinto capitolo sulla divisione di numeri interi.

Quando si vuole sapere come dividere un qualsiasi numero per qualsiasi altro numero, è necessario, come nell'addizione, sapere prima dividere tutti i numeri per i numeri da due fino a dieci; e questo non è possibile fare fino a quando non si conoscano a memoria le divisioni di alcuni numeri; queste divisioni sono riportate in tabelle nelle pagine seguenti. Ma prima insegneremo come scrivere le piccole frazioni.

Se su un qualsiasi numero scriviamo una linea di frazione, e sulla stessa linea scriviamo un altro numero, il numero di sopra indica il numero di parti determinate dal numero di sotto; il numero di sotto è chiamato il denominatore e quello sopra è chiamato il numeratore. Se sopra al numero 2 scriviamo una linea di frazione, e sopra la linea di frazione scriviamo il numero 1, allora vogliamo intendere una delle due parti del tutto, cioè la metà; così, se mettiamo 1 sopra al numero 3, denotiamo un terzo; se sopra al numero 7, un settimo, se sopra al 10, un decimo, e se sopra al 19, intendiamo una diciannovesima parte dell'intera quantità, e così successivamente.

Ancora, se mostriamo 2 su 3, cioè $2/3$, intendiamo due delle tre parti del tutto, cioè i due terzi. Se 2 su 7, cioè $2/7$, due settimi, con 2 su 23, indichiamo due ventitreesimi, e così successivamente. Se il 7 è messo sopra al 9, cioè $7/9$, intendiamo sette noni del tutto; se 7 è messo su 97, indichiamo sette novantasettesimi. 13 sopra 29 significa tredici ventinovesimi. Se 13 viene messo sopra 347, indichiamo tredici trecentoquarantasettesimi, e così intenderemo per gli altri numeri.

Se sotto una linea di frazione vengono messi più numeri, e sopra ciascuno di essi si scrivono altri numeri, allora il numero messo in testa, sopra la linea di frazione, sulla parte destra, indicherà il numero di parti determinate dal numero posto sotto di esso, come abbiamo detto prima. Ciò che è messo sopra il secondo è il numero di parti determinate dalla seconda delle parti determinate dal primo dei numeri messi sotto. Ciò che si intende con il numero sopra il terzo è il numero di parti determinate dal terzo numero sotto le parti determinate dal secondo numero sotto le parti determinate dal primo numero, e così si denota sempre il numero di parti determinate da tutti i numeri che seguono sotto la linea di frazione. Se sotto una certa linea di frazione si mettono 2 e 7, e su 2 si mette 1, e su 7 si mette 4, come viene visualizzato, si indicano quattro settimi e la metà di un settimo. Tuttavia, se sul 7 c'è 0, si leggerà la metà di un settimo. Se sotto un'altra linea di frazione sono 2, 6 e 10, e su 2 c'è 1, su 6 c'è 5 e su 10 c'è 7, come mostrato, il 7 che è sopra il 10 in testa alla linea di frazione rappresenta sette decimi, il 5 che è sopra il 6 indica cinque sesti di un decimo, e l'1 che è sul 2 denota una metà di un sesto di un decimo, e così singolarmente, uno alla volta, vanno letti; tuttavia è consigliabile sempre che i numeri minori siano verso sinistra sotto la linea di frazione, e se si

$$\frac{1}{2} \frac{0}{7}$$

$$\frac{1}{2} \frac{4}{7}$$

$$\frac{1}{2} \frac{5}{6} \frac{7}{10}$$

fanno diverse frazioni di una frazione, queste non corrispondano ad altre frazioni, e la frazione che è la maggior parte del tutto sia sempre messa verso destra. Si dice infatti che le frazioni che sono in una linea di frazione sono disposte a gradini rispetto alla frazione che è in testa alla linea di frazione, nella parte destra. La seconda è la frazione seguente verso sinistra. Ad esempio, nella linea di frazione scritta sopra, $7/10$ è al primo posto della linea di frazione, $5/6$ è al secondo, e $1/2$ al terzo, che è l'ultimo posto della stessa linea di frazione, e quindi quei numeri che sono in linea di frazione sono tutti al loro posto. E se nella linea di frazione vi sono più frazioni, e la linea di frazione termina con un cerchio, come mostrato a lato, allora queste frazioni saranno intese in un altro modo, cioè: otto noni del tutto, e sei settimi di otto noni, e quattro quinti di sei settimi di otto noni, e due terzi di quattro quinti di sei settimi di otto noni del tutto. Se invece la linea di frazione termina con un cerchio dall'altra parte, come mostrato, indicherà: due terzi di quattro quinti di sei settimi di otto noni del tutto. Infine, se le linee di frazione sono disegnate in quest'altro modo, denotiamo: cinque noni e un terzo e un quarto e un quinto di un nono. Questo essendo pertanto noto, le suddette divisioni, come sono scritte ed esposte nelle due pagine seguenti, sono da imparare a memoria.

$$\frac{1}{5} \frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{5}{9}$$

$$\frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7} \frac{8}{9} \circ$$

$$\circ \frac{8}{9} \frac{6}{7} \frac{4}{5} \frac{2}{3}$$

<u>di è resto</u>															
$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	6	3		$\frac{1}{2}$	11	5	1	$\frac{1}{2}$	16	8	
$\frac{1}{2}$	2	1		$\frac{1}{2}$	7	3	1	$\frac{1}{2}$	12	6		$\frac{1}{2}$	17	8	1
$\frac{1}{2}$	3	1	1	$\frac{1}{2}$	8	4		$\frac{1}{2}$	13	6	1	$\frac{1}{2}$	18	9	
$\frac{1}{2}$	4	2		$\frac{1}{2}$	9	4	1	$\frac{1}{2}$	14	7		$\frac{1}{2}$	19	9	1
$\frac{1}{2}$	5	2	1	$\frac{1}{2}$	10	5		$\frac{1}{2}$	15	7	1	$\frac{1}{2}$	20	10	

$\frac{1}{3}$	1	0	1	$\frac{1}{3}$	8	2	2	$\frac{1}{3}$	15	5		$\frac{1}{3}$	21	7	
$\frac{1}{3}$	2	0	2	$\frac{1}{3}$	9	3		$\frac{1}{3}$	16	5	1	$\frac{1}{3}$	22	7	1
$\frac{1}{3}$	3	1		$\frac{1}{3}$	10	3	1	$\frac{1}{3}$	17	5	2	$\frac{1}{3}$	23	7	2
$\frac{1}{3}$	4	1	1	$\frac{1}{3}$	11	3	2	$\frac{1}{3}$	18	6		$\frac{1}{3}$	24	8	
$\frac{1}{3}$	5	1	2	$\frac{1}{3}$	12	4		$\frac{1}{3}$	19	6	1	$\frac{1}{3}$	25	8	1
$\frac{1}{3}$	6	2		$\frac{1}{3}$	13	4	1	$\frac{1}{3}$	20	6	2	$\frac{1}{3}$	26	8	2
$\frac{1}{3}$	7	2	1	$\frac{1}{3}$	14	4	2								

$\frac{1}{4}$	1	0	1	$\frac{1}{4}$	11	2	3	$\frac{1}{4}$	21	5	1	$\frac{1}{4}$	31	7	3
$\frac{1}{4}$	2	0	2	$\frac{1}{4}$	12	3		$\frac{1}{4}$	22	5	2	$\frac{1}{4}$	32	8	
$\frac{1}{4}$	3	0	3	$\frac{1}{4}$	13	3	1	$\frac{1}{4}$	23	5	3	$\frac{1}{4}$	33	8	1
$\frac{1}{4}$	4	1		$\frac{1}{4}$	14	3	2	$\frac{1}{4}$	24	6		$\frac{1}{4}$	34	8	2
$\frac{1}{4}$	5	1	1	$\frac{1}{4}$	15	3	3	$\frac{1}{4}$	25	6	1	$\frac{1}{4}$	35	8	3
$\frac{1}{4}$	6	1	2	$\frac{1}{4}$	16	4		$\frac{1}{4}$	26	6	2	$\frac{1}{4}$	36	9	
$\frac{1}{4}$	7	1	3	$\frac{1}{4}$	17	4	1	$\frac{1}{4}$	27	6	3	$\frac{1}{4}$	37	9	1
$\frac{1}{4}$	8	2		$\frac{1}{4}$	18	4	2	$\frac{1}{4}$	28	7		$\frac{1}{4}$	38	9	2
$\frac{1}{4}$	9	2	1	$\frac{1}{4}$	19	4	3	$\frac{1}{4}$	29	7	1	$\frac{1}{4}$	39	9	3
$\frac{1}{4}$	10	2	2	$\frac{1}{4}$	20	5		$\frac{1}{4}$	30	7	2	$\frac{1}{4}$	40	10	

$\frac{1}{5}$	5	1	$\frac{1}{6}$	6	1	$\frac{1}{7}$	7	1	$\frac{1}{8}$	8	1	$\frac{1}{9}$	9	1
$\frac{1}{5}$	10	2	$\frac{1}{6}$	12	2	$\frac{1}{7}$	14	2	$\frac{1}{8}$	16	2	$\frac{1}{9}$	18	2
$\frac{1}{5}$	15	3	$\frac{1}{6}$	18	3	$\frac{1}{7}$	21	3	$\frac{1}{8}$	24	3	$\frac{1}{9}$	27	3
$\frac{1}{5}$	20	4	$\frac{1}{6}$	24	4	$\frac{1}{7}$	28	4	$\frac{1}{8}$	32	4	$\frac{1}{9}$	36	4
$\frac{1}{5}$	25	5	$\frac{1}{6}$	30	5	$\frac{1}{7}$	35	5	$\frac{1}{8}$	40	5	$\frac{1}{9}$	45	5
$\frac{1}{5}$	30	6	$\frac{1}{6}$	36	6	$\frac{1}{7}$	42	6	$\frac{1}{8}$	48	6	$\frac{1}{9}$	54	6
$\frac{1}{5}$	35	7	$\frac{1}{6}$	42	7	$\frac{1}{7}$	49	7	$\frac{1}{8}$	56	7	$\frac{1}{9}$	63	7
$\frac{1}{5}$	40	8	$\frac{1}{6}$	48	8	$\frac{1}{7}$	56	8	$\frac{1}{8}$	64	8	$\frac{1}{9}$	72	8
$\frac{1}{5}$	45	9	$\frac{1}{6}$	54	9	$\frac{1}{7}$	63	9	$\frac{1}{8}$	72	9	$\frac{1}{9}$	81	9
$\frac{1}{5}$	50	10	$\frac{1}{6}$	60	10	$\frac{1}{7}$	70	10	$\frac{1}{8}$	90	10	$\frac{1}{9}$	90	10

$\frac{1}{11}$	11	1	$\frac{1}{12}$	12	1	$\frac{1}{13}$	13	1	$\frac{1}{13}$	143	11
$\frac{1}{11}$	22	2	$\frac{1}{12}$	24	2	$\frac{1}{13}$	26	2	$\frac{1}{13}$	156	12
$\frac{1}{11}$	33	3	$\frac{1}{12}$	36	3	$\frac{1}{13}$	39	3	$\frac{1}{13}$	169	13
$\frac{1}{11}$	44	4	$\frac{1}{12}$	48	4	$\frac{1}{13}$	52	4	$\frac{1}{13}$	182	14
$\frac{1}{11}$	55	5	$\frac{1}{12}$	60	5	$\frac{1}{13}$	65	5	$\frac{1}{13}$	195	15
$\frac{1}{11}$	66	6	$\frac{1}{12}$	72	6	$\frac{1}{13}$	78	6			
$\frac{1}{11}$	77	7	$\frac{1}{12}$	84	7	$\frac{1}{13}$	91	7			
$\frac{1}{11}$	88	8	$\frac{1}{12}$	96	8	$\frac{1}{13}$	104	8			
$\frac{1}{11}$	99	9	$\frac{1}{12}$	108	9	$\frac{1}{13}$	117	9			
$\frac{1}{11}$	110	10	$\frac{1}{12}$	120	10	$\frac{1}{13}$	130	10			

Regola universale sulla divisione di numeri per numeri di primo grado.

Le istruzioni scritte sopra per la divisione sono state osservate, ed il loro uso è stato esaminato. Se si vuole dividere un numero di qualsiasi numero di posti per un numero di primo grado, vale a dire un numero da due fino a dieci, si scriverà il numero in una tabella, e si metterà la figura del numero per cui dividere sotto il primo posto del numero dato; si comincia la divisione dall'ultima figura del numero dato, dividendola, se sarà possibile, per la figura del numero per cui dividere, mettendo la divisione nella tabella sotto l'ultimo posto; se la divisione non è esatta, allora si mette l'eccesso sopra l'ultima figura; l'eccesso si accoppia con la figura che segue in modo da formare un numero di due figure, e si dividono le due figure, mettendo il quoziente sotto la figura seguente; e scrivendo l'eccesso, se c'è, sopra la stessa figura. E quindi, sempre accoppiando, nell'ordine prescritto, l'eccesso alle figure seguenti, e mettendo il quoziente che risulterà dalla divisione e l'eccesso come sopra descritto, procedendo per passi, si deve raggiungere la prima figura del numero. Accade spesso che alcune figure in qualche numero sono da dividere per una figura più grande di quella da essi mostrata; poichè tale divisione non è valida, si inizia la divisione dalla coppia formata con la figura successiva figura, mettendo il quoziente sotto la penultima figura, e l'eccesso sopra, operando come abbiamo detto; se l'eccesso non è grande come cinque, si divide la figura finchè si trova un eccesso da accoppiare come insegnato; se la figura non si può dividere, perchè è più piccola, si mette lo 0 sotto, ed essa si accoppia, come superfluo, alla figura seguente; e così si avrà la divisione di qualsivoglia quantità.

Se si vuole dividere 365 per 2, si scrive la figura 2 in alto nella tabella, evienziandola; un altro 2 si mette sotto il 5, e si inizia dividendo il 3 per 2, vale a dire l'ultima figura, dicendo $1/2$ di 3 è 1, e rimane 1; si scrive l'1 sotto il 3 e l'1 che rimane si scrive sopra, come si vede nella prima illustrazione; l'1 che rimane si accoppia con il 6 che si trova accanto all'ultima cifra data, dando 16; si prende $1/2$ di 16 che è 8; si mette l'8 sotto il 6, accanto all'1 messo prima sotto il 3, come si vede nella seconda illustrazione; siccome non c'è resto nella divisione di 16, si divide il 5 per 2; il quoziente è 2 e il resto 1; si scrive il 2 sotto il 5 e l'1 che rimane si scrive sopra; e si avrà così una metà del tutto; e prima del quoziente proveniente dalla divisione, vale a dire 182, si scrive $1/2$, come mostrato nell'ultima illustrazione. Le frazioni vanno sempre messe dopo il tutto, così si scrive prima il numero intero, e quindi la frazione. S osservi ancora che quando un numero viene diviso per un altro numero, allora la moltiplicazione del quoziente per il divisore fornisce il numero che è il dividendo. Così se il 40 è diviso per 4, ne risulta 10. Pertanto moltiplicare il 4 per 10, fa quaranta, cioè il numero diviso.

Allo stesso modo se $1/2$ 182 è moltiplicato per 2, ossia il quoziente per il divisore, allora si ha 365, vale a dire il numero da dividere o dividendo.

Se si vuole dividere lo stesso 365 per 3, si scrive il 3 sotto il 5, e si divide il 3 per 3; il quoziente è 1, che si mette sotto il 3. Si divide il 6 per 3; il quoziente è 2, che si mette al di sotto del 6; si divide il 5 per 3; il quoziente è

2
1
365
2
1

10
365
18

101
365
182

*Quoziente
della
divisione
 $\frac{1}{2}$ 182*

1 e rimane 2; si mette l'1 sotto il 5 e il 2 sulla linea di frazione sul 3, il parziale, che si mette prima del quoziente della divisione, vale a dire 121, e quindi si avrà $\frac{2}{3}$ 121 per la divisione cercata. Si fa notare che il numero diviso è chiamato il dividendo, il numero che divide è chiamato il divisore, e il numero risultante dalla divisione è chiamato il quoziente.

Divisione di 1346 per 4.

Se si vuole dividere 1346 per 4, si mette il 4 sotto il 6, si divide il 13 per 4, in quanto non si può dividere l'1 che è all'ultimo posto del numero; ne risulta 3 per il quoziente, e rimane 1; si mette il 3 sotto il 3 e il restante 1 si mette sopra il 3, e si accoppia l'1 con il 4 che precede il 3 nel numero; si ha 14; un quarto di 14 è 3, e rimane 2; si mette il 3 sotto il 4, e il restante 2 sopra, che accoppiato con 6 dà 26, che si divide per 4; il quoziente è 6, e il resto è 2; si mette il 6 sotto il 6, e il rimanente 2 sulla linea di frazione sul 4, il parziale, ad indicare due quarti del tutto che è pari alla metà del tutto; prima di questa frazione si mette il numero che è il quoziente della divisione, vale a dire 336; e quindi si avrà $\frac{1}{2}$ 336 per la divisione cercata. Per esempio, abbiamo diviso prima 13 per 4; 1346 termina al terzo posto con 13. Quindi avevamo 13 centinaia, perchè il terzo posto è delle centinaia. Pertanto la divisione di milletrecento per 4, ci ha dato trecento, con il resto di un centinaio indivisibile. Quindi abbiamo messo il 3 al terzo posto, vale a dire nel posto delle centinaia, e l'1, che indicava l'eccesso di un centinaio, lo abbiamo messo sopra il 6; e accoppiato l'uno con il 4, abbiamo avuto 14 che termina nel secondo posto, cioè al posto delle decine. Quindi abbiamo diviso 14 decine per 4, ottenendo tre decine, e sono rimaste due decine indivisibili; quindi abbiamo messo il 3 sotto il 4 e il 2 sul 4, cioè sul posto delle decine, ed accoppiato il 2 con il 6 della prima posizione. Questo accoppiamento, che termina nel primo posto, ha dato 26 unità; abbiamo diviso le 26 unità per il 4, ottenendo 6 unità, col resto di 2. Quindi abbiamo messo il 6 al posto delle unità, e il 2 sulla linea di frazione sul 4, concludendo come già detto.

Divisione di 5439 per 5.

Se si vuole dividere 5439 per 5, si mette il 5 sotto il 9, e si dice $\frac{1}{5}$ di 5 è 1, che si mette sotto il 5; e $\frac{1}{5}$ di 4 è 0, e rimane 4; si mette lo 0 sotto il 4, ed il restante 4 si accoppia con il 3, e si dice $\frac{1}{5}$ di 43 è 8, e resta 3; si mette l'8 sotto il 3, e si prende un quinto del 3 accoppiato con il 9, vale a dire 39; il quoziente è 7, e il resto è 4; si mette il 7 sotto il 9 e il 4 sopra la linea di frazione sul 5, il parziale, mettendo la frazione prima del quoziente della divisione.

Divisione di 9000 per 7.

Se si vuole dividere 9000 per 7, si mette il 7 sotto il primo 0, e si divide il 9 per 7; il quoziente è 1, e il resto è 2; quindi si pone l'1 sotto il 9 e il 2 sopra, che accoppiato allo 0 che è dopo il 9 dà 20 che viene diviso per 7; il

quoziente sarà 2, e il resto 6; si mette il 2 sotto lo 0, e il 6 sopra, che accoppiato con lo 0 seguente dà 60 che si divide per 7; il quoziente sarà 8, e rimane 4; si mette l'8 sotto lo 0, e sopra il 4 che accoppiato con lo 0 al primo posto fa 40, che si divide per 7; il quoziente è 5, e rimane 5; si mette il 5 sotto lo 0, e il 5 restante si mette sopra la linea di frazione sul 7, il parziale, e questa frazione si mette davanti al quoziente della divisione: $5/7$ 1285.

Divisione di 10000 per 8.

Se si vuole dividere 10000 per 8, si mette l' 8 sotto lo 0 del primo posto, e si dice $1/8$ di 10 è 1, e rimane 2; si mette l'1 sotto lo 0 al quarto posto, e il 2 sopra; si prende $1/8$ di 20, che è 2, e rimane 4; si mette il 2 sotto il terzo posto e il 4 sopra, e si prende $1/8$ di 40 che è 5, che si mette sotto il secondo posto; e si riempie la fila di posti nel quoziente mettendo 0 sotto il primo posto, come si vede nell'illustrazione.

24
10000
8
1250

Divisione di 120037 per 9.

Se si vuole dividere 120037 per 9, si scrive il 9 sotto il 7, e si dice $1/9$ di 12 è 1, e resta 3; si mette l'1 sotto il 2, e il 3 sopra; e $1/9$ di 30 è 3, e rimane 3; si mette il 3 sotto lo 0 al quarto posto, e il 3 sopra; e si prende $1/9$ di 30 che è 3, e rimane 3; si mette il 3 sotto lo 0 al terzo posto, e il 3 sopra lo stesso 0; e ancora una volta $1/9$ di 33 è 3, e rimane 6; si mette 3 sotto il 3 e il 6 sopra, e si fa $1/9$ di 67, che è 7, e rimane 4; si mette il 7 sotto il 7 e il 4 restante si mette sopra la linea di frazione sul 9, il parziale. E così, dopo questa descrizione, senza mai deviare, si saprà come eseguire tutte le divisioni simili; allo stesso modo si possono dividere tutti i numeri, anche per 11 e per 13; tuttavia si dovrebbero prima conoscere le introduzioni alle divisioni di tutti gli ordini, contenute nelle tabelle di cui sopra. Le divisioni per 11 salgono da una fino a 11decine, vale a dire a 110. E le divisioni per 13 salgono da una a 13 decine, vale a dire 130.

Divisione dei numeri per 11.

Note le suddette introduzioni, se si vuole dividere 12532 per 11, si mette l'11 sotto il 32, e si prende $1/11$ del 12 in testa al dividendo, che è 1, e rimane 1. In verità $1/11$ di 11 è 1, come mostra la tabella sopra scritta; pertanto $1/11$ di 12 è 1, e rimane 1. Si mette l'1 sotto il 2 e l'1 di resto si mette sopra il 2, e si accoppia l'1 con la figura precedente, cioè con il 5, e fa 15, di cui si prende $1/11$ che è 1, e da detto calcolo rimane 4; si mette l'1 sotto il 5 ed il 4 sopra il 5; si accoppia il 4 con la figura precedente, vale a dire con i 3, ottenendo 43; di questo si prende $1/11$ che fa 3, e rimane 10, questo perché $1/11$ di 33 è 3, quindi $1/11$ di 43 è 3, con 10 di resto, come abbiamo detto; si mette quindi il 3 sotto il 3 e il 10 si mette sopra il 43; cioè, si mette l'1 sopra il 4 che è stato messo sopra il 5 e si mette lo 0 sopra del 3; e si accoppia di nuovo il 10 con la figura precedente, vale a dire con il 2 che è al primo posto; si ha 102, di cui ancora si prende $1/11$; il quoziente sarà 9,

e rimane 3; si mette il 9 sotto detto 2, e il 3 di resto si mette sulla linea di frazione sopra l'11, il parziale; e si avrà $3/11$ 1139 per la divisione cercata.

Divisione per 13.

Se si vuole dividere 123586 per 13, allora il 13 viene messo sotto l'86; si divide il 123 per 13 perché 12 è inferiore a 13; il quoziente è 9, e rimane 6: 9 volte tredici è 117, e il resto fino a 123 è 6; si mette il 9 sotto il 3 del 123, e il 6 sopra lo stesso 3, e si accoppia il 6 con il 5; si ha 65, di cui $1/13$ è 5; quindi si mette il 5 sotto il 5, e sopra si mette 0; poiché l'8 è inferiore a 13, lo si accoppia con il 6 che è al primo posto; si ha 86, di cui $1/13$ è 6, e rimane 8; si mette il 6 al primo posto del quoziente, e 8 sulla linea di frazione sul 13, e si ha $8/13$ 9506 per la divisione cercata. Con questo metodo i numeri possono essere divisi per 17 e 19. Tuttavia si dovrebbero conoscere le introduzioni a questi numeri; queste introduzioni si possono imparare a memoria, anche se i numeri possono essere divisi per 17 e 19 con un altro metodo che mostreremo al suo posto.

Sulla divisione dei numeri in memoria e in mano.

Se si vuole lavorare il materiale delle divisioni in mente e in mano, si mantiene il numero da dividere in mano, e si tiene sempre il quoziente in mano, dividendo per fasi, iniziando con l'ultima cifra, mettendo sempre in mano i quozienti, tenendo sempre in memoria i resti, e cancellando passo dopo passo il dividendo dalla mano. Ad esempio, se si propone di dividere 7543 per 6, si mantiene il numero indicato in mano, e si divide il 7, che è nella mano destra al posto delle migliaia, per 6; il quoziente è 1, e rimane 1; si elimina il 7 dalla mano, e si mette l'1, e il resto 1 si tiene in mente, e si accoppia con il 5 che è nella mano destra al posto delle centinaia; si ha 15 che si divide per 6; il quoziente è 2, e rimane 3; si elimina il 5 dalla mano, e si mette il 2, e si mantiene il 3 in mente; questo si accoppia con il 4 che è nella mano sinistra al posto delle decine e si ha 34; questo si divide per 6; il quoziente è 5, e rimane 4; si elimina il 4 dalla mano, e si mette il 5, tenendo in mente il rimanente 4; si accoppia il 4 con il 3 che è in mano nel posto delle unità; si ha 43 che si divide per 6; il quoziente è 7, e rimane 1; si elimina il 3 dalla mano, e si mette il 7, e per il restante 1 si dice un sesto; e così si avrà $1/6$ 1257 in mano per la divisione cercata.

Divisione di 8059 per 5.

Se si vuole dividere 8059 per 5, si mantiene il numero in mano, e si dice $1/5$ di 8, che si trova nella posizione delle migliaia, è 1, e il resto è 3; si elimina l'8 dalla mano, si mette l'1, e si mantiene il 3 in mente; e poiché per questo numero non c'è nulla in mano al posto delle centinaia, si dice che lì c'è 0, che accoppiato con il 3 tenuto fa 30, di cui $1/5$ è 6, che si mette nel posto delle centinaia; e si divide dalla mano destra, dicendo $1/5$ di 5 è 1, che si mette nel posto delle decine e si elimina il 5; si prende $1/5$ di 9,

che è 1, e si mantiene il 4 restante nel posto delle unità; si elimina il 9 dalla mano, e si mette l'1, e per il 4 che resta, si dice $4/5$; e quindi si avrà $4/5$ 1611 per la divisione cercata, e così anche per le altre divisioni simili.

Quando si vuole dividere qualsiasi numero per 10, si elimina dal numero la figura nel primo posto, e si mette questa sopra il 10 che è sotto la linea di frazione, e si mette prima il numero che rimane dopo l'eliminazione di detta prima figura; e quindi si avrà la divisione del numero per 10. Ad esempio, se si vuole dividere 167 per 10, si elimina dal 167 la figura nel primo posto, cioè il 7, che si mette sopra il 10 come abbiamo detto, sulla linea di frazione, il parziale, e prima di questo si mette il numero rimasto, cioè il 16; e quindi si ha $7/10$ 16 per la cercata divisione. Se si vuole dividere 1673 per 10, si sopprime il 3 dal 1673, ottenendo $3/10$ 167 per la divisione cercata.

Iniziano le divisioni di numeri per numeri incomposti di secondo grado.

Alcuni numeri sono incomposti, e sono quelli che in aritmetica e geometria sono chiamati numeri primi. Questo perché non esistono numeri più piccoli, tranne l'unità, che sono loro fattori. Gli arabi li chiamano hasam. I greci li chiamano lineari; noi li chiameremo irregolari. Quelli che sono inferiori a 100 sono scritti in sequenza nella tabella a lato. Per gli altri numeri primi, maggiori di 100, insegnerò la regola per trovarli. Il resto sono numeri composti, o *epipedi*, cioè aree, come venivano chiamati dall'abilissimo geometra Euclide. Tutti questi numeri sono costruiti con la moltiplicazione, come dodici che è composto dalla moltiplicazione di 2 per 6, o 3 per 4; noi chiameremo questi numeri regolari. L'insegnamento della divisione per numeri primi e composti non è la stessa; vedremo prima come dividere per numeri che sono irregolari e inferiori a 100, e poi per qualsiasi altro numero maggiore esistente.

Quando si vuole dividere qualsiasi numero per qualsiasi altro numero irregolare, si scrive il numero in una tabella, e sotto si mette il numero primo per cui si vuole dividere, posizionando posti simili sotto posti simili, e si vede se le ultime due cifre del dividendo formano un numero maggiore, uguale o minore del numero primo per cui si deve dividere. Se si ha un numero maggiore o uguale, l'ultimo posto del numero quoziente inizierà dopo l'ultimo posto del numero dividendo, cioè sotto il penultimo, e si mette la figura che moltiplicata per il numero divisore rende il numero delle suddette ultime due cifre, o quasi. Si moltiplica questa per l'ultima figura del primo numero, cioè del divisore, e si sottrae il prodotto dall'ultima figura; e se questo eccede, si scrive l'eccesso sopra la figura. Si moltiplica la figura messa per la prima figura del divisore, si sottrae la moltiplicazione dalla penultima figura, e se il resto dà un numero di due cifre che è maggiore di 10, si pone il primo posto del numero sopra la penultima figura, e l'ultimo sopra l'ultima. Tuttavia, se manca il primo posto di eccedenza, cioè se è meno di 10, si mette la figura sopra il penultimo posto, e si accoppia l'eccesso con la terzultima figura. Sotto la terza figura si mette il moltiplicatore, cioè la figura che moltiplicata per lo stesso divisore rende il numero di detta coppia, o quasi; il moltiplicatore si saprà con l'esperienza, in

Tabella dei numeri

Hasam

11	37	67
13	41	71
17	43	73
19	47	79
23	53	83
29	59	89
31	61	97

base alle differenze che si hanno nelle divisioni successive. Poi si moltiplica la figura messa sotto il terzo posto per l'ultima del divisore, e il prodotto si sottrae, se possibile, dall'ultimo posto di detto eccesso dei numeri uniti; se no, si sottrae dalla coppia dell'ultimo e seguente, mettendo l'eccesso sopra, nello stesso posto. E ancora una volta lo si moltiplica per il primo posto del divisore, il prodotto si sottrae dal numero residuo, e l'eccesso si mette sopra. E così, sempre accoppiando l'eccesso con le figure dei posti seguenti, e ponendo sotto il moltiplicatore, si procede con zelo, moltiplicando secondo l'ordine prescritto, fino ad arrivare alla fine del numero. Accade spesso che, dall'accoppiamento dell'eccesso con la figura precedente, non si può sottrarre il numero divisore; allora si scrive uno 0 sotto la figura precedente, e si accoppia un altro numero precedente, ottenendo un altro eccesso; si mette sotto la figura che moltiplicata per il numero divisore rende il numero di dette tre figure, cioè quelle formate dall'accoppiamento delle due figure in eccesso con l'altra figura precedente.

Se invece le ultime due cifre del numero dividendo sono meno del numero divisore, come abbiamo detto all'inizio, l'ultimo posto del quoziente sarà sotto la terzultima figura; in tal modo tutti i numeri possono essere divisi per dati numeri primi. Per spiegare meglio quanto abbiamo detto, faremo alcuni esempi numerici.

Divisione di 18456 per 17

1
18456
17
108

Se si vuole dividere 18456 per 17, si scrive il 17 sotto il 56 del 18456, e si prende 1/17 del 18 formato dalle ultime due cifre del numero dividendo. Si ha 1, e rimane 1; si mette l'1 sotto l'8 di 18, e il restante 1 si mette sull'8, come mostrato nella prima illustrazione. Si accoppia l'1 con la figura precedente, cioè con il 4; si ha 14, e 14 è minore del numero divisore, cioè di 17, si mette lo 0 al di sotto del 4, vale a dire prima dell'1 messo sotto l'8, e si accoppia il 14 con la figura precedente, vale a dire con il 5, dando 145; al di sotto di detto 5 si mette la figura del moltiplicatore di 17 che più si avvicina al detto 145; il moltiplicatore si avrà con l'esperienza; si vede il numero divisore, ossia il 17, al quale decina è più vicino; è più vicino a 20; perciò si divide il detto 145 per 20, e si fa così: dal 20 si toglie la prima figura, vale a dire lo 0; resta il 2 del 20; si toglie anche la prima figura del 145, cioè il 5; resta 14 che si divide per detto 2; il quoziente sarà 7; e tale, o 1 più grande, deve essere la figura da mettere sotto il 5. Si è messo l'8, perché il 17 è inferiore al 20, per cui 1/17 di 145 è maggiore di 1/20. Si mette quindi l'8 al di sotto del 5 di 145, perché questo deve essere il quoziente. Si moltiplica l'8 per 17 e si sottrae il prodotto dal 145, e si fa così: si moltiplica l'8 per l'ultima figura del 17, vale a dire l'1; il prodotto sarà 8 che si sottrae dal 14; rimane 6, che si mette sopra il 4 del 14, e si accoppia il 6 con il 5 precedente; si ha 65 dal quale si sottrae il prodotto dell'8 per l'altra figura del 17, cioè il 7; il prodotto è 56, e rimane 9, che è quanto rimane dalla sottrazione dal 145 del prodotto dell'8 per 17, come è mostrato nella seconda illustrazione. Si pone quindi il 9 sopra il 5, e si accoppia con la figura precedente, vale a dire con il 6, facendo 96, da

6
149
18456
17
108

dividere per il 17 e mettere il risultato sotto il 6. Ancora si cerca una figura che moltiplicata per 17 dà un numero il più vicino possibile al 96. Per conoscere questa figura, si lascia fuori il 6 dal 96, e il 9 che rimane si divide per il 2, come si faceva prima con il 14; il quoziente sarà $1/2 \cdot 4$; quindi si mette il 5, che è maggiore di $1/2 \cdot 4$, sotto il 6, che è il primo posto del numero quoziente, e si moltiplica il 5 per l'1 di 17, cioè per l'ultima sua cifra; si ha 5, che si sottrae dal 9 messo sopra il 5; resta 4, che si mette al di sopra del 9, e si accoppia il 4 con il 6 precedente, vale a dire con quello accoppiato prima con il 9; si ha 46 dal quale si sottrae il prodotto del 5 per 7, che è 35; ci resta 11 che si mette sopra la linea di frazione sul 17, il parziale, da mettere davanti al quoziente, cioè a 1085; e quindi si avrà $11/17 \cdot 1085$ per la divisione cercata, come viene mostrato in questa ultima figura.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 149 \\ 18456 \\ 17 \\ 108 \\ \hline 11 \cdot 1085 \\ 17 \end{array}$$

Se si vuole dividere lo stesso 18456 per 19, si scrive il 19 sotto il 56 del 18456. Si mette sotto il 4 del 184 la figura che moltiplicata per 19 realizza un prodotto di circa 184; la si trova con lo stesso metodo insegnato con il 17, cioè, si rimuove il 4 dal 184 lasciando 18, che si divide per 2; il quoziente è 9, e tale sarà la figura da mettere sotto il 4, cioè sotto la terza figura del dividendo; si moltiplica il 9 per l'1 del 19; si ha 9 che si sottrae dal 18; resta 9 che si mette sopra l'8, e si accoppia il 9 con il 4 dal quale si sottrae il prodotto del 9 per il 9 del 19, che è 81; resta 13; si mette il 13 sopra il 94, cioè l'1 sopra il 9 e il 3 sul 4, come mostrato nella prima illustrazione. Il 13 si accoppia con la figura precedente, vale a dire con il 5; si ha 135. E si mette sotto il 5 la figura che moltiplicata per 19 dà un prodotto di 135 o meno, e questa è 7; questo perché se il 5 viene rimosso dal 135, resta 13, che diviso per 2 dà 6 o più; quindi si mette il 7 sotto il 5 e si moltiplica per l'1 del 19; si ha 7, che sottratto dal 13 dà 6, che si mette sul 3 del 13 e si accoppia con il 5 facendo 65, da cui si sottrae il prodotto del 7 per 9, che è 63; rimane 2, che si mette sopra il 5, come è mostrato nella seconda figura. Si accoppia il 2 con la figura precedente, vale a dire con il 6 che è nel primo posto; si ha 26 che si divide per 19, come abbiamo detto; il quoziente è 1 e rimane 7; si mette l'1 nel primo posto del quoziente, cioè sotto il 6 e il restante 7 si mette sopra la linea di frazione sul 19, per il parziale; e il numero quoziente, cioè 971, si mette prima della frazione; e così si avrà $7/19 \cdot 971$ per la divisione cercata, come mostrato nell'ultima illustrazione.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 93 \\ 18456 \\ 19 \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 932 \\ 18456 \\ 19 \\ 97 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 932 \\ 18456 \\ 19 \\ 971 \\ \hline 7 \cdot 971 \\ 19 \end{array}$$

Vi abbiamo mostrato, nelle illustrazioni precedenti, come dividere per i numeri 17 e 19; ora vi mostriamo come dividere per i restanti numeri primi che sono inferiori a 100. Si fa così: quando dividiamo per 17 o per 19, prendiamo metà del numero dividendo, dopo aver rimosso la prima figura, o 1 in più se la figura rimossa è cinque, perché 17 e 19 sono meno di 20, come abbiamo detto prima; quando dividiamo per 23, prendiamo la metà, o se la prima figura è cinque, 1 in meno, perché 23 è più di 20; se dividiamo per 29, dobbiamo prendere un terzo, e se cinque, 1 in più, perché 29 è inferiore a 30, che è la decina più vicina. Quando dividiamo per 31, dobbiamo prendere un terzo, e se il primo posto è cinque, 1 in meno. Se dividiamo per 37 prendiamo un quarto, se cinque, 1 in più. Se dividiamo per 41 o 43 dobbiamo prendere un quarto, se cinque, 1 in meno. Quando dividiamo per 47 dobbiamo prendere un quinto, se cinque, 1 in più. Quando per 53, un

quinto, se cinque, 1 in meno; quando per 59, un sesto, o 1 in più. Quando per 61, un sesto, o 1 in meno. Quando per 79 dobbiamo prendere un ottavo, o 1 in più. Quando per 83, un ottavo, o 1 in meno. Quando per 89, un ottavo, o 1 in più. Quando dividiamo per 97 prendiamo un decimo del numero dividendo con una cifra soppressa; se cinque, 1 in più. Quando si deve dividere un numero per un altro numero e si ignora se si deve dare in più o in meno, come abbiamo detto, si mette la parte dichiarata in precedenza e si moltiplica per il numero divisore; se il prodotto è maggiore rispetto al dividendo, si dà 1 in meno, e se è inferiore, si dà 1 in più; e così si potrà dividere qualsiasi numero per un altro numero dato. Tuttavia diremo questo di nuovo in alcune divisioni.

Divisione di 13976 per 23.

Se si vuole dividere 13976 per 23, si mette il 23 al di sotto del 76; poiché il 23 è superiore al 13, cioè al numero formato dalle ultime due figure del numero dividendo, vengono prese le ultime tre figure; il numero è 139, per cui l'ultimo posto del numero quoziente è sotto il 9; si mette 6, che si trova dal materiale dato per i moltiplicatori, in questo modo: si lascia fuori la prima cifra di 139, vale a dire il 9, rimane 13, che si divide per 2, perché il 23 è più vicino al 20 rispetto a qualsiasi altra decina; il quoziente è 6 e mezzo, di cui dobbiamo mettere meno, perché il 23 è più rispetto al 20; lasciamo fuori la metà, e mettiamo il 6 sotto il 9, come abbiamo detto; si moltiplica il 6 per il 2 del 23; si ha 12 che si sottrae dal 13; rimane 1, che si mette sopra il 3, e si accoppia con 9; si ha 19. Si moltiplica il 6 per il 3 che è in 23; si ha 18, che si sottrae dal 19; resta 1 che si mette sul 9, come è mostrato nella prima illustrazione. Si accoppia l'1 con il 7 che precede nel numero; si ha 17; il 17 è inferiore a 23, si mette lo 0 sotto il 7 e il 6 che è nel primo posto del numero viene accoppiato con il 17; si ha 176; si mette sotto il 6 la figura che moltiplicata per il 23 dà quasi 176; dal calcolo prescritto si ha 7, che è meno della metà di 17; quindi si moltiplica il 7 per il 2 che è nel 23; si ha 14 che si sottrae dal 17; resta 3, che si mette sopra il 7, e si accoppia con il 6 nel primo posto; si ha 36 dal quale si sottrae il prodotto di 7 per il 3 del 23; resta 15, che si mette sopra la linea di frazione sul 23, il parziale, come mostra l'ultima illustrazione.

11
13976
23
6

3
117
13976
23
607

15 607
23

Controllo della divisione sopra scritta.

Se si vuole controllare la divisione sopra scritta con la prova del nove, si prende il residuo di 13976, che è 8, e si tiene da parte. Si prende il residuo del quoziente, ossia di 607, che è 4, e si moltiplica per il residuo di 23 che è 5; si ha 20; si prende il residuo di 20 che è 2, e si aggiunge al 15 che è sopra la linea di frazione sul 23; si ha 17, il cui residuo è 8, come quello di sopra che abbiamo tenuto da parte. Infatti, il divisore moltiplicato per il quoziente dà il dividendo; quindi se moltiplichiamo il residuo del divisore per il residuo del quoziente, risulta il residuo del dividendo; ma dal numero divisore 23 ci è rimasto 15, che sottratto da 13976 dà 13961, che diviso per

23 rende 607. Quindi, la moltiplicazione di 23 per 607 dà 13961. Per cui, se il residuo di 607, che è 4, è moltiplicato per il residuo di 23, che è 5, risulta 20, di cui il residuo è 2, che è anche il residuo di 13961, che aggiunto al residuo di 15, che è 6, rende 8, cioè il residuo di 13976; e questo abbiamo voluto dimostrare. In verità, moltiplicazioni, addizioni, sottrazioni, e divisioni di numeri possono essere controllate in un altro modo, scacciando altri numeri, cioè il 7 e tutti gli altri numeri primi esistenti, come 11, 13, e così via. Lo dimostreremo nel seguito, usando un metodo appropriato.

Se si vuole dividere 24059 per 31, si scrive il 31 sotto il 24059, e si mette il 7 sotto lo 0 perché il 31 è un po' più di 30. Onde se prendiamo $\frac{1}{3}$ di 24, vale a dire il 240 senza la prima figura a sinistra, avremo 8 che è superiore a 7 per una terza parte. Avendo messo, come abbiamo detto, il 7 sotto lo 0, e seguendo l'ordine prescritto, si moltiplica il 7 per il 3 del 31; si ha 21 che si sottrae da 24; resta 3, che si pone al di sopra del 4, e si moltiplica il 7 per 1 del 31; si ha 7, che si sottrae dal 30; resta 23 che si pone al di sopra del 30, e se si vuole, si trascura il 3, o lo si tiene in memoria per la cancellazione. Quindi si accoppia il 23 con il 5; si ha 235, e si mette ancora il prescritto 7, vale a dire meno di un terzo di 23, sotto il 5, e lo si moltiplica per il 3; si ha 21 che si sottrae dal 23; resta 2; si mette il 2 sul 3, quindi si ignora il 23, e si accoppia il 2 con il 5; si ha 25, sempre accoppiando il precedente con il seguente; si moltiplica il 7 per 1; si ha 7, che si sottrae dal 25; resta 18 che si mette al di sopra del 25, dimenticando il 25. Quindi si prende $\frac{1}{3}$ di 18 dal calcolo sopra descritto; si ha 6. Si mette il 6 sotto il 9, e sotto l'1 del 31; si moltiplica per il 3 del 31; si ha 18; si dimentica il 18 messo sopra, e si moltiplica il 6 per 1; si ha 6 che si sottrae dal 9; resta 3 che si mette sulla linea di frazione sul 31, il parziale. E quindi si avrà $\frac{3}{31} 776$ per la divisione cercata, come mostrato nella figura. Vorrei mostravi come questo metodo produca il quoziente; abbiamo messo sotto il terzo posto del numero dividendo ciò che moltiplichiamo per il 3 che è all'ultimo posto del divisore, ed occupa il secondo posto, sotto il secondo posto del numero dividendo; e da questa moltiplicazione risulta un numero che termina al quarto posto; pertanto, quando si moltiplica il terzo posto per un posto qualsiasi, si ottiene il terzo posto per quello che si moltiplica, o un numero che termina in esso. Il quarto posto è il terzo partendo dal secondo. Pertanto si sottrae il prodotto del 7 per 3, vale a dire 21, dal 24 che termina al quarto posto, e si mette il 3 sul quarto posto, cioè sopra il 4, e si accoppia il 3 con lo 0 che è al terzo posto del numero dividendo, la coppia è 30; poi si moltiplica il 7 per l'1 che è nello stesso posto del divisore; e così moltiplichiamo il terzo posto per il primo, che è come moltiplicare il primo per il terzo. Pertanto il prodotto del 7 per 1, vale a dire 7, lo sottraiamo dal 30, che termina al terzo posto; quindi, dalla moltiplicazione del terzo posto per il primo, o il primo per il terzo, risulta un numero del terzo posto, o che termina in esso; mettiamo il 23 sopra il 30 o al suo posto; accoppiamo il 23 con il 5 che è al secondo posto, e abbiamo 235 che termina nel secondo posto; mettiamo un altro 7 al secondo posto, che moltiplichiamo ancora per il 3 del divisore, che è al secondo posto dal secondo; da questa moltiplicazione risulta un numero del terzo posto, o che termina in esso; quindi si sottrae il 21 dal 23, in quanto

1
22
338
24059
31
776
<u>3</u> 776
31

entrambi terminano nel terzo posto; e il 2 che rimane lo mettiamo sopra il 3, e lo accoppiamo con il seguente 5, si ha 25, che termina al secondo posto; da questo si sottrae il prodotto del 7 per 1, vale a dire il secondo posto per il primo; da questa moltiplicazione risulta un numero del secondo posto, o che termina in esso; resta 18 nello stesso posto del 25, vale a dire nel terzo posto, e 8 nel secondo; si accoppia 18 con il 9 nel primo posto; si ha 189; mettiamo il 6 nel primo posto del numero quoziente, e lo moltiplichiamo per il 3, ossia il primo posto per il secondo; da questa moltiplicazione risulta un numero che termina al secondo posto; il prodotto è 18 da cui si sottrae il 18 sopra citato, che termina nel secondo posto; moltiplichiamo il 6 per 1; si ha 6, che si sottrae dal 9 che è nello stesso posto; resta 3, che diviso per il 31 rende $3/31$; e quindi abbiamo $3/31$ 776; e con questo metodo si possono comprendere le divisioni simili. Se si vuole conoscere come controllare una determinata divisione scacciando i sette, si prende il residuo modulo 7 di 24059, che è l'eccesso o resto del numero dopo averlo diviso per 7; questo resto si prende così: si dice $1/7$ del 24; resta 3; del 30, cioè di esso accoppiato, resta 2; del 25 rimane 4; del 49 rimane 0 per il residuo cercato. Nello stesso modo si prende il residuo di 776, che è 6, e si moltiplica per il residuo del 31 che è sotto la linea di frazione, che è 3; si ha 18, che si divide per 7; resta 4 che si aggiunge al 3 che è sopra la linea di frazione sul 31; si ha 7 che si divide per 7; rimane 0 come dovrebbe rimanere per il residuo.

Divisione di 780005 per 59.

Se si vuole dividere 780005 per 59, si scrivono i numeri, e si mette l'1 sotto l'8; togliamo l'8 dal 78, poi dividiamo il 7 per il 6, perché 59 è circa 60; il quoziente è 1 e qualcosa. Mettiamo l'1 sotto l'8, come abbiamo detto prima; moltiplichiamo l'1 per il 5; si ha 5 che si sottrae dal 7; resta 2 che si mette sopra il 7, si moltiplica lo stesso 1 per il 9 e si sottrae il prodotto dal 28; resta 19, si cancella o ignora il 2 sopra il 7, e si mette o dice 19 al di sopra del 78. Si mette il 3 sotto lo 0 secondo quanto prescritto, e si moltiplica per il 5; si ha 15 che si sottrae dal 19; resta 4; si cancella il 19, e al posto del nove si mette il 4. Si moltiplica lo stesso 3 per 9 e si sottrae dal 40; Resta 13; si cancella il 4 e si mette l'1, e sopra lo 0 si mette il 3; quindi si divide il 130 per il 59; si ha 2, che si mette sotto lo 0 del terzo posto; si moltiplica il 2 per 59 e il prodotto viene sottratto dal 130; resta 12; lo stesso 2 si moltiplica per il 5, si sottrae dal 13, si moltiplica per il 9, e si sottrae dal 30; quindi si cancella il 13, si mette l'1 al posto del 3 del 13, e si mette il 2 sopra lo 0 nella terza posizione. Quindi si mette il 2 sotto lo 0 al secondo posto, si moltiplica per il 59, e si sottrae il prodotto dal 120; rimane 2 sopra lo 0; si elimina il 120 che rimane dopo la divisione, e si dice che eliminare figure o rimuoverle è come pensarle cancellate o rimosse; dopo si accoppia il 2 con il 5 che è al primo posto; si ha 25; siccome questo è inferiore al 59, si mette 0 sotto il 5, e 25 sulla linea di frazione per il parziale, come chiaramente raffigurato.

Poiché le divisioni date sono state chiaramente spiegate, divideremo un certo numero per 97; sia 5917200 scritto in basso, e il 97 sia messo sotto i

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 141 \\
 29322 \\
 780005 \\
 \quad 59 \\
 \quad 13220 \\
 \hline
 25 \quad 13220 \\
 59
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 59 \\
 5917200 \\
 \quad 97 \\
 \quad 6
 \end{array}$$

due zeri; si divide il numero delle ultime tre cifre del numero dividendo, cioè il 591 per 97; per questa divisione il quoziente è 6 perché il 97 è più vicino a 100 che a qualsiasi altro multiplo di dieci. Per cui si divide il 59, cioè il numero delle ultime due cifre, per 10; il risultato della divisione è quasi 6, vale a dire meno di dieci; e siccome il 97 è inferiore al 100, dobbiamo prendere più di cinque decine. Ne prendiamo 6; si mette il 6 sotto il primo posto del numero delle stesse tre figure, cioè sotto l'1 che è al quinto posto dell'intero numero; si moltiplica il 6 per il 9 del 97; si ha 54 che si sottrae dal 59, ossia dal numero delle ultime due cifre; rimane 5 che si mette sopra il 9; si moltiplica il 6 per il 7 del 97; si ha 42 che si sottrae dal 51, vale a dire dall'accoppiamento del 5 messo sopra con il precedente 1; rimane 9 che si mette sopra l'1 con il 5 messo, che si cancella, o si ignora. Il suddetto 9 messo sopra l'1 è il resto dalla divisione di 591 per 97; 9 è accoppiato con la figura precedente in posizione, vale a dire con il 7 che è al quarto posto del numero; si ha 97, che si divide per 97, vale a dire per il divisore; il quoziente è 1; si mette l'1 sotto il 7, e si moltiplica per il 9 del 97; si ha 9; si toglie 9 dal resto, e si moltiplica l'1 per 7; si ha 7, per cui rimane 7 che è stato accoppiato con il 9; e nulla rimane del 7 da accoppiare con il precedente 2, e questo 2 è inferiore al 97; si mette 0 al di sotto del 2, e si accoppia il 2 con lo 0 che lo precede, e si ha 20. Poiché anche questo 20 è inferiore al 97, si mette 0 sotto lo 0 accoppiato con il 2, vale a dire sotto a quello che è nel secondo posto del numero; dopo di che si accoppia il 20 con lo 0 che lo precede, vale a dire con ciò che è nel primo posto; si ha 200 che è diviso per 97; si ha 2 che viene messo sotto lo 0 al primo posto, per il ragionamento fatto sopra; si moltiplica il 2 per il 9, e si sottrae dal sopra accoppiato 20; resta 2, che si mette sopra lo 0 del secondo posto; l'accoppiamento di questo con il precedente 0 che è al primo posto è 20, da cui si sottrae il prodotto di 2 per 7; resterà 6 che si mette sopra la linea di frazione sul 97, per il parziale; e si avrà $6/97$ 61002 per la divisione cercata.

Abbiamo visto la divisione dei numeri per un numero di due cifre che è irregolare, cioè primo, mostreremo ora le stesse divisioni per numeri che sono composti, cioè regolari, ed inoltre come dividere qualsiasi numero per un numero composto, come per i numeri primi; mostreremo tuttavia come moltiplicare facilmente, con le seguenti regole di composizione dei numeri, vale a dire come trovare i numeri di cui essi sono composti; metteremo questi sotto una certa linea di frazione, e sempre il minore seguirà il maggiore verso sinistra, come abbiamo insegnato in precedenza in questo capitolo; Dopo ciò, si divide il numero dividendo per il più piccolo dei componenti del divisore, cioè per il numero più piccolo, o la figura sotto la linea di frazione; e se qualcosa avanza, si mette sopra la stessa figura o numero; si divide il quoziente della divisione per il numero precedente, o la figura nella frazione, e il resto, se ci sarà, lo si mette sul numero precedente o figura. E così, sempre in ordine, con i numeri componenti precedenti che appaiono come quozienti delle divisioni, si cerca di dividere fino alla fine; ed i resti sono messi su di loro, ed i numeri quoziente dalla divisione dell'ultimo componente, che è l'ultimo numero esistente sotto la linea di frazione, si mettono prima. E così si avrà la divisione di ogni numero per

qualsiasi numero composto di qualsiasi numero di posti. Prima di dichiarare ciò dimostrato, bisogna trovare le composizioni dei numeri composti, nonché quelli che sono noti per essere irregolari; si procede a dimostrare il necessario. Avendo mostrato nella tabella precedente i numeri di due cifre che sono irregolari, mostriamo ora le regole di composizione per numeri di due cifre, indicandole una per una sotto la linea di frazione; mostreremo poi come trovare la composizione dei numeri regolari con altro numero di posti.

ECCO LE REGOLE DI COMPOSIZIONE PER NUMERI DI DUE CIFRE

12 $\frac{10}{26}$	30 $\frac{10}{310}$	46 $\frac{10}{223}$	62 $\frac{10}{231}$	77 $\frac{10}{711}$	92 $\frac{10}{423}$
14 $\frac{10}{27}$	32 $\frac{10}{48}$	48 $\frac{10}{68}$	63 $\frac{10}{79}$	78 $\frac{10}{613}$	93 $\frac{10}{331}$
15 $\frac{10}{35}$	33 $\frac{10}{311}$	49 $\frac{10}{77}$	64 $\frac{10}{88}$	80 $\frac{10}{810}$	94 $\frac{10}{247}$
16 $\frac{10}{28}$	34 $\frac{10}{217}$	50 $\frac{10}{510}$	65 $\frac{10}{513}$	81 $\frac{10}{99}$	95 $\frac{10}{519}$
18 $\frac{10}{29}$	35 $\frac{10}{57}$	51 $\frac{10}{317}$	66 $\frac{10}{611}$	82 $\frac{10}{241}$	96 $\frac{100}{268}$
20 $\frac{10}{210}$	36 $\frac{10}{49}$	52 $\frac{10}{413}$	68 $\frac{10}{417}$	84 $\frac{100}{267}$	98 $\frac{100}{277}$
21 $\frac{10}{37}$	38 $\frac{10}{219}$	54 $\frac{10}{69}$	69 $\frac{10}{223}$	85 $\frac{10}{517}$	99 $\frac{10}{911}$
22 $\frac{10}{211}$	39 $\frac{10}{313}$	55 $\frac{10}{511}$	70 $\frac{10}{710}$	86 $\frac{10}{243}$	100 $\frac{10}{1010}$
24 $\frac{10}{38}$	40 $\frac{10}{410}$	56 $\frac{10}{78}$	72 $\frac{10}{89}$	87 $\frac{10}{329}$	
26 $\frac{10}{213}$	42 $\frac{10}{67}$	57 $\frac{10}{319}$	74 $\frac{10}{237}$	88 $\frac{10}{811}$	
27 $\frac{10}{39}$	44 $\frac{10}{411}$	58 $\frac{10}{229}$	75 $\frac{100}{355}$	90 $\frac{10}{910}$	
28 $\frac{10}{47}$	45 $\frac{10}{59}$	60 $\frac{10}{610}$	76 $\frac{10}{419}$	91 $\frac{10}{713}$	

*Una regola universale per trovare
la composizione dei numeri dispari.*

Inoltre, usando frequentemente le regole sopra scritte, e volendo trovare la regola, cioè la composizione di qualsiasi numero con tre o più figure, o volendo sapere che è un numero primo secondo la regola, si scrive il numero nella tabella, e si dice se il numero è pari o dispari. Se è pari, allora se ne ricerca la composizione. Tuttavia, se è dispari, allora sarà composto o primo. I numeri pari possono essere composti da pari e dispari, oppure solo da dispari. Quindi, in primo luogo mostreremo le regole per i numeri pari. I numeri dispari sono composti solo da dispari. Onde investigheremo prima i loro componenti in numeri dispari. Per cui, quando nella figura al primo posto di qualsiasi numero dispari vi è il numero 5, si saprà che 5 è un fattore, cioè che il numero è divisibile per 5. Tuttavia, se un'altra figura dispari compare al primo posto, allora si prende il residuo dell'intero numero dalla prova del nove; se risulta 0, allora 1/9, e se il residuo sarà 3 o 6, allora 1/3 sarà nella composizione; se il residuo non è nessuno di questi, si divide per 7; se ci sarà un eccesso, si divide ancora il numero per 11; e se c'è un eccesso, si divide di nuovo per 13, e si continua sempre in ordine a dividere per numeri primi, in base a ciò che è scritto sopra nella tabella, fino a quando si troverà un numero primo con il quale si può dividere il numero proposto, o senza raggiungere un numero primo con il quale si può dividere, e da lì fino alla radice quadrata; se non si potrà dividere per nessuno di loro, si giudicherà il numero essere primo. Tuttavia, se si potrà dividerlo per qualche dato numero primo, senza superarlo, ciò che la divisione produrrà, lo si divide ancora una volta per esso; e il numero quoziente che si ottiene dalla divisione, lo si divide nuovamente per lo stesso numero primo; questo è ciò che si comincia a trovare: i componenti del numero in ordine rispetto al resto dei numeri primi, fino alla radice quadrata; se non si trovano, allora il numero non avrà componenti; e così via, sempre ottenendo risultati, finché si avranno tutti i componenti. Dopo aver fatto questo, si avrà cura di raccogliergli sotto una linea di frazione, dal minore al maggiore. E così si avrà la regola per la composizione di un qualsiasi numero dispari. Per esempio, supponiamo che sia 805 il numero di cui si chiede la regola di composizione; poiché 5 è un fattore primo di questo numero, senza dubbio la sua composizione include 1/5. Perciò si divide il numero per 5; il quoziente è 161, di cui si prende il residuo, che è 8; questo mostra che 161 non può essere diviso integralmente né per 3 né per 9. Per cui lo si divide per 7; il quoziente è 23, un numero irregolare; si inseriscono gli elementi ottenuti, vale a dire il 5, 7, e 23 sotto una linea di frazione, e si avrà $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 7\ 23}$

per la composizione di 805, che è un quinto di un settimo di una ventitreesima parte, che è una ottocentocinquesima parte; pertanto il prodotto di 5 per 7, vale a dire 35, per 23, dà 805. Ancora, se si cerca la regola di composizione per 957, si divide per 3 perché 3 è il residuo del numero; il quoziente è 319 che non può essere diviso ancora per 3 perché il residuo è 4; lo si divide per 7, il resto è 4; quindi è divisibile per 11, ed è 11

volte 29 che è un numero primo; quindi abbiamo trovato la regola di composizione per 957 che raccogliamo sotto la linea di frazione: $\frac{1}{3} \frac{0}{11} \frac{0}{29}$.

Trovare la regola di composizione per 951.

Se si vuole trovare la regola di composizione per 951, si divide per 3, in quanto il residuo è 6; il quoziente è 317, e la ricerca di componenti per esso è impossibile, poichè non si può dividere integralmente per 7 oppure 11, oppure 13, o 17. E non si cercano più componenti, perché se fosse divisibile per 19, lo sarebbe per qualche numero primo prima del 19; quindi, la regola di composizione per 951 è $\frac{1}{3} \frac{0}{317}$. Se si vuole averla per 873, siccome il residuo del numero è 0, quando si divide per 9, il quoziente è 97; il numero 97 risulta primo nella tabella precedente. Abbiamo trovato la regola, che raccolta sotto la linea di frazione sarà $\frac{1}{9}$ di $\frac{1}{97}$.

Trovare la regola per 1469.

Se si vuole avere la regola di composizione per 1469, si prende il residuo del numero che è 2; ciò mostra che la composizione è priva di tre o nove. Se lo dividiamo per 17, il resto è 6; se per 11, il resto è 6; se si divide per 13, allora il quoziente è 113; perciò non si dovrebbero cercare altri numeri primi, o dividere ancora per lo stesso 13, in quanto 13 è maggiore della radice quadrata; quindi sappiamo quali sono i numeri primi e la regola di composizione del 1469 è la seguente: $\frac{1}{13} \frac{0}{113}$.

Trovare la regola di composizione per 2543.

Se si vuole averla per 2543, si prende il residuo del numero che è 5; ciò mostra che non può avere né 3, né 9 nella sua regola di composizione. Dividendo per sette, rimane 2. E per 11, resta 2; e per 13, l'eccesso è 8. E poi si scopre che non si può dividere per 17, o 19, o 23, o 29, o 31, o 37, o 41, e neanche per 47 o 53; e al di là di 53 non si cerca, perché 53 è maggiore della radice quadrata. E se fosse possibile nella composizione di 2543 avere un numero primo maggiore di 53, questo numero dovrebbe essere moltiplicato per un qualcosa di inferiore a 53, per ottenere il 2543, il che è impossibile, perché fino a 53 non abbiamo trovato niente cercando la regola; perciò 2543 è irregolare.

Ancora, se si vuole averla per 624481, allora si vede che né 3, né 9, né 7, sono nella composizione del numero; esso è divisibile per 11 la cui parte, ovvero un undicesimo, è 56771, che si divide nuovamente per 11, perchè non può essere diviso per numeri che sono inferiori a 11, cioè per 9, 7 e 3, che non sono stati trovati nel 624481. Ma anche nella composizione di questo, cioè del 56771, si potrà trovare un altro 11. Da questa divisione, vale a dire per 11, il quoziente è 5161, che si divide ancora una volta per 11; resta 2. Quindi avere di nuovo $\frac{1}{11}$ di esso è impossibile; dopo di ciò si vede se si ha $\frac{1}{13}$; vale a dire si divide per 13; il quoziente è 397, di cui né

624481
11
56771
11
res. 2 5161
13
397
$\frac{1}{11} \frac{0}{11} \frac{0}{13} \frac{0}{397}$

1/13, né 1/17 e né 1/19 può essere trovato. Quindi sappiamo che 397 è primo, non essendoci tra 19 e la sua radice quadrata alcun numero primo; è irregolare, come abbiamo detto prima, perché al di là della radice quadrata non ci può essere nessun fattore. La regola di composizione cercata per 624481 è infatti questa: $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{11\ 11\ 13\ 397}$.

Un controllo della precedente regola di composizione.

Se si vuole controllare la regola di composizione per residui di 7, si prende il residuo di 624481 dal 7, che è 4, e lo si tiene da parte; si prende il residuo dell'11 al primo posto sotto la linea di frazione che è 4, e lo si moltiplica per 4, cioè per il residuo dell'altro undici; si ha 16 che si divide per 7; resta 2 che si moltiplica per 6, vale a dire per il residuo di 13; si ha 12 da cui si sottrae 7; rimane 5 che si moltiplica per 5, e cioè per il residuo di 397; si ha 25 che si divide per 7; resta 4 per il residuo.

Su un metodo universale per trovare la regola di composizione dei numeri pari.

Se si vuole trovare la regola di composizione per un certo numero pari, si prende analogamente il suo residuo dal 9; se è 0, allora si avrà 1/9. Se è 3 o 6, allora la regola avrà 1/6 nella sua composizione. Tuttavia, se non c'è alcun residuo di esso, si controlla ciò che rimane dividendo per 8 il numero di due cifre che è nei posti primo e secondo, perché se è 0, e la figura del terzo posto appare pari, 2 o 4 o 6 o 8 o 0, allora l'intero numero, di qualsiasi numero di posti, può essere diviso per 8. Se invece la terza figura è dispari, 1 o 3 o 5 o 7 o 9, allora il numero avrà 1/4 nella sua composizione. Se si ha 4 come resto, e la figura del terzo posto è dispari, allora l'intero numero sarà similmente divisibile per 8. E se è pari, avrà 1/4 nella sua composizione. Tuttavia, se il resto è 2 o 6, allora il numero sarà divisibile soltanto per il numero pari 2. E si prosegue così, prendendo i componenti pari, finché si verifica la regola, o se c'è qualche numero dispari, per esso si cerca di individuare la composizione secondo la regola precedente. Se nel primo posto di un numero c'è uno 0, viene rimosso, e per esso si avrà 1/10 nella composizione del numero. E se rimane qualche altro 0 in testa al numero, allora si rimuove, e di nuovo ci sarà 1/10 nella composizione dello stesso numero. E così sempre, per quanti 0 appaiano in testa al numero, si deve capire questo. E con ciò abbiamo trovato la regola di composizione dei numeri pari, come chiaramente indicato nella dimostrazione.

Trovare la regola di composizione per 126.

Se è richiesta la regola di composizione regola per 126, di cui il residuo è 0, questo mostra che nove è un fattore integrale; quindi si divide 126 per 9; il quoziente è 14, per il quale la regola $\frac{1\ 0}{2\ 7}$ è mostrata sopra nella tabella

della regole di composizione per i numeri di due cifre; quindi si avrà $\frac{1\ 0\ 0}{2\ 7\ 9}$ per la regola per 126, come è qui mostrato.

Se è richiesta la regola per 156, allora il suo residuo è 3 e questo dimostra che può essere diviso per 6. Se diviso per 6, il quoziente è 26 la cui regola è $\frac{1\ 0}{2\ 13}$; e così si avrà la regola per 156, come qui mostrata: $\frac{1\ 0\ 0}{2\ 6\ 13}$.

3
2112
6
3
352
8
44

$\frac{1\ 0\ 0\ 0}{4\ 6\ 8\ 11}$

Se vuole trovare la regola per 2112, siccome il suo residuo è 6, questo mostra che può essere diviso per 6. Pertanto 2112 è diviso per 6; il quoziente è 352 di cui si prende il residuo, che è 1; questo mostra che non può essere diviso né per 6, né per 9; onde 52, vale a dire un numero di due cifre, è diviso per 8; dalla divisione rimane 4; dal resto, e dalla figura nel terzo posto del numero, cioè il 3 visto prima, è dimostrato che 352 può essere diviso per 8, ed è diviso per 8; il quoziente è 44 per il quale la regola è $\frac{1\ 0}{4\ 11}$; quindi

la regola per 2112 è qui indicata: $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{4\ 6\ 8\ 11}$. Come $\frac{1\ 0}{4\ 6}$ che è contenuta nella frazione è una regola per 24, un'altra regola per 24 si trova nella tabella di composizione dei numeri, vale a dire $\frac{1\ 0}{3\ 8}$, dove compare la cifra 8 che è maggiore del 6 che è in $\frac{1\ 0}{4\ 6}$; quindi si prende sempre la regola estrema, fra le regole composte da numeri che vanno da 2 a 10, come mostreremo in seguito. Perciò congiuntamente è stata trovata la regola, vale a dire $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 8\ 8\ 11}$.

Trovare la regola di composizione per 4644.

Se si vuole trovare la regola per 4644, il suo residuo è pari a 2. Ciò mostra che né 1/6 né 1/9 possono essere nella regola. E poiché il numero di due cifre in testa, cioè il 64, ha 8 come divisore con resto 0, e la figura al terzo posto, vale a dire 6, è pari, si sa che 4664 ha 1/8; perciò dividendo per 8, si ha 583 come quoziente; per quanto detto prima, si cercherà la regola per numeri dispari, e si trova che è $\frac{1\ 0}{11\ 53}$; quindi per 4664 si ha la regola: $\frac{1\ 0\ 0}{8\ 11\ 53}$.

Se si vuole trovarla per 13652, essendo il residuo 8, mancano 1/6 e 1/9. Se il numero di due cifre che compare in testa sarà diviso per 8, rimarrà 4. Onde, siccome la figura del terzo è 6, un divisore esiste, e nella regola si ha 1/4; quindi si divide il 13652 per 4, e si ha 3413, cui manca una regola; si avrà $\frac{1\ 0}{4\ 3413}$ per la regola del 13652.

Trovare la regola di composizione per 15560.

Se si vuole trovare la regola per 15560, siccome c'è lo 0 in testa, viene rimosso. Perciò si avrà 1/10 nella regola del numero dato; si cerca poi di trovare la regola del resto del numero, vale a dire di 1556, che ha residuo 8; si vede che la regola manca di 1/6 e 1/9. E poiché il numero di due cifre in testa, che è il 56, è divisibile per 8 con resto 0, e la figura del terzo posto che è 5 è dispari, si vede che nella regola non ci può essere un numero pari

33
1556
4
389

$\frac{1\ 0\ 0}{4\ 10\ 389}$

maggiore di 4. Si divide quindi 1556 per 4; il quoziente è 389 per il quale non esiste alcuna regola. Per cui la regola per 15560 è la seguente:

$$\frac{1 \ 0 \ 0}{4 \ 10 \ 389}.$$

Se si vuole trovare la regola per 32600, siccome nel primo posto c'è 0, deve esserci 1/10 nella regola. Rimosso lo 0 del numero, resta 3260. Nel primo posto c'è ancora 0, per cui si ha ancora 1/10. Rimuovendo lo 0 dal numero, resta 326 il cui residuo 2, nega 1/6 o 1/9 nella composizione. Il 26 delle due figure in testa al 326, non può essere diviso per alcun numero pari, salvo per 2. Onde 326 è diviso per 2; il quoziente è 163 a cui manca una regola. Si ha $\frac{1 \ 0 \ 0 \ 0}{2 \ 10 \ 10 \ 163}$ per la regola di 32600.

Se si vuole trovarla per 7546000, vengono rimossi i tre zeri dal numero e si ha $\frac{1 \ 0 \ 0}{10 \ 10 \ 10}$; rimane 7546 di cui il residuo, vale a dire 4, nega 1/6 o 1/9 nella sua composizione. Se il 46 che è in testa al 7546 è diviso per 8, rimane 6; quindi 7546 non avrà nessun altro numero pari salvo 2 per cui può essere diviso; 7546 è diviso per 2, il quoziente è 3773. La sua regola, secondo quanto detto per i numeri dispari, risulta essere $\frac{1 \ 0 \ 0 \ 0}{7 \ 7 \ 7 \ 11}$. Riorganizzando questa con la regola trovata sopra, vale a dire $\frac{1 \ 0 \ 0 \ 0}{2 \ 10 \ 10 \ 10}$, si avrà: $\frac{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0}{2 \ 7 \ 7 \ 7 \ 10 \ 10 \ 10 \ 11}$ per la regola di 7546000.

La divisione di 749 per 75.

Se si vuole dividere 749 per 75, si ricerca il fattore 5, e si trova la regola per 75, cioè $\frac{1 \ 0 \ 0}{3 \ 5 \ 5}$. Si divide il 749 per 3; il quoziente è 249, e rimane 2 che si mette sul 3 nella frazione; si divide il 249 per il 5, che precede il 3 nella frazione; il quoziente è 49, e rimane 4; questo 4 si mette sopra il 5, e si divide nuovamente il 49 per il 5, che si trova alla fine della frazione; il quoziente è 9, e rimane 4; 4 si mette sul 5 e il 9 si mette prima della frazione; e quindi si ha $\frac{2 \ 4 \ 4}{3 \ 5 \ 5}9$ per la divisione cercata.

La divisione di 67898 per 1760.

Se si vuole dividere 67898 per 1760, allora si trova la regola per 1760 che è $\frac{1 \ 0 \ 0 \ 0}{2 \ 8 \ 10 \ 11}$; si divide il 67898 per 2; il quoziente è 33949, e rimane 0; lo 0 si mette sopra il 2, e si divide 33949 per 8; il quoziente è 4243, e rimane 5; il 5 si mette sopra l'8 della frazione, e si divide 4243 per 10; il quoziente è 424, e rimane 3; la figura del primo posto di 4243 viene interrotta; 424 si divide per 11; il quoziente è 38, e rimane 6; si mette il 6 sull'11 della frazione e il 38 si mette prima della frazione; e quindi si ha $\frac{0 \ 5 \ 3 \ 6}{2 \ 8 \ 10 \ 11}38$ per la divisione cercata.

Controllo della divisione soprascritta.

Se si vuole controllare la divisione scacciando i 13, si divide il 67898 per 13; resta 12 come residuo. Dopodichè, si divide il 38 posto prima della frazione per il 13; resta 12 che si moltiplica per l'11 dalla frazione, e si aggiunge il 6 che è al di sopra dell'11; si ha 138 che si divide per il 13; rimane 8 che si moltiplica per il 10 della frazione, e si aggiunge il 3 che è sopra il 10; si ha 83 che si divide per 13; rimane 5 che si moltiplica per l'8 della frazione, e ad esso si aggiunge il 5 che si trova sopra l'8; si ha 45 che si divide per il 13; rimane 6 che si moltiplica per il 2 della frazione; si ha 12, come il residuo mantenuto sopra. Si impari ad aver cura, in una divisione, a non scacciare un numero che sta nel denominatore della frazione, perché ciò può trarre facilmente in inganno; perciò in questa divisione è vietato cacciare l'11, perché il residuo che rimane da 38, o da qualsiasi numero che viene moltiplicato per l'11 che è sotto la linea di frazione e poi diviso per il residuo, non sopravviverà; onde se il 38 non è corretto, allora l'errore non può essere rilevato scacciando undici. C'è poi un'altra difficoltà nella dottrina della divisione dei numeri, cioè quando il numero dividendo ha qualche comunanza con il divisore, ossia quando il numero dividendo è integralmente divisibile per un numero o numeri che sono nella regola di composizione del divisore. Allora, prima il numero viene diviso per il numero della composizione del divisore che avrà se stesso nel dividendo, purchè sia maggiore o minore nella frazione, perché se si divide qualcosa per sé nulla resta dalla divisione. Quanto qui si è percepito, sarà mostrato con i numeri nella proposizione seguente.

La divisione di 81540 per 8190.

Se si vuole dividere 81540 per 8190, allora si trovala la regola di composizione del divisore, che è $\frac{1}{7} \frac{0}{9} \frac{0}{10} \frac{0}{13}$, con 1/10 nella regola di 81540 per lo 0 che è al primo posto, anche se 1/10 non è in testa nella frazione; quindi 81540 viene dapprima diviso per 10 rimuovendo lo 0 dal numero; rimane 8154; estratto 1/10 dalla frazione rimane da dividere 8154 con $\frac{1}{7} \frac{0}{9} \frac{0}{13}$. Si divide 8154 per 9 della frazione, perché 0 è il suo residuo della prova del nove; il quoziente è 906, che resta da dividere con $\frac{1}{7} \frac{0}{13}$; il 906 è diviso per 7; il quoziente è 129, e rimane 3; 3 si mette sopra il 7. Si divide il 129 per 13; il quoziente è 9, e rimane 12; il 12 si mette sopra il 13, e il quoziente 9 si mette davanti al frazione; e per la divisione cercata si avrà $\frac{3}{7} \frac{12}{13} 9$.

Se si vuole controllare la divisione precedente, si mettono il 10 ed il 9 estratti dalla frazione sotto la riga dopo il 7, e sopra di essi si mettono gli zeri, così: $\frac{0}{10} \frac{0}{9} \frac{3}{7} \frac{12}{13}$; dopo di ciò si potrà controllare ordinatamente in base alla procedura. In alternativa si abbiano 906 come dividendo, e $\frac{1}{7} \frac{0}{13}$ come divisore, e con questi si esegua il controllo con il metodo sopradDETTO.

Abbiamo visto la divisione dei numeri per dati numeri composti, salvo l'esistenza nella composizione di qualche numero di tre o più cifre. Per completare la dottrina della divisione contenuta in questo lavoro, mostreremo come dividere per numeri che sono di tre o più cifre.

La divisione dei numeri per numeri primi di tre posti.

Volendo dividere un numero di qualsiasi numero di posti per un numero di tre cifre, cioè tre posti, mette posti simili del numero di tre figure sotto posti simili del numero dividendo, e vede se il numero delle ultime tre cifre del numero dividendo appare più grande del numero divisore; se sarà maggiore o uguale, allora l'ultimo posto del numero quoziente inizierà sotto la terza figura dall'ultima, e se sarà più piccolo inizierà sotto la precedente, cioè sotto la quarta dall'ultima. La figura scelta, messa sotto il predetto posto, viene moltiplicata per il numero divisore, per cui è diviso il numero maggiore, formando un numero di tre cifre, o le ultime quattro, o quasi, in quanto non ve ne saranno più di quelle del numero divisore. Perciò si moltiplica per l'ultima cifra del numero divisore, e il prodotto si sottrae, se possibile, dal numero dell'ultima cifra, se no, si sottrae dal numero delle ultime due cifre, e si mette il resto sopra il posto da cui il prodotto è stato sottratto. La cifra messa si moltiplica per la precedente del numero divisore, cioè per ciò che è nella seconda posizione, e il prodotto trovato si sottrae dall'eccesso sopra accoppiato con la figura precedente nel numero maggiore; se ci sarà un eccesso, si mette al primo posto sopra la stessa figura precedente, e il resto viene cancellato, cioè si cancella l'altro eccesso posto prima. Quindi si moltiplica la figura messa per la figura del primo del numero divisore e il prodotto si sottrae dall'accoppiamento del secondo eccesso con la figura precedente del numero maggiore; il primo posto dell'eccesso si mette sulla figura precedente; il resto va eliminato, cioè si cancella un altro secondo eccesso.

Dopo di ciò si mette un'altra figura sotto un'altra figura precedente del numero maggiore, cioè prima della cifra messa prima e moltiplicata per il prescritto numero divisore; si fa un accoppiamento del terzo eccesso con la figura precedente, e questo viene moltiplicando per le cifre del numero divisore, come insegnato con la prima figura messa, mettendo sempre ordinatamente l'eccesso sopra; e allo stesso modo si lavora per gradi con le cifre restanti, procedendo fino alla fine. Se da qualche sopraddetta cifra in eccesso e precedente sarà prodotto un numero inferiore al divisore, allora si mette lo 0 sotto la figura precedente, e si accoppia la figura precedente e l'eccesso con un'altra figura precedente; la cifra sarà messa sotto a quella prima dello 0 suddetto, e se ancora l'eccesso accoppiato alle due figure precedenti è meno del divisore, di nuovo si mette un altro 0, e si accoppia il suddetto eccesso e le suddette altre due figure alla figura precedente; dopo di ciò si mette una figura che moltiplica il numero divisore, il numero in eccesso e le tre figure precedenti; quindi si avrà una divisione simile; per esporre chiaramente ciò che abbiamo detto, mostriamo un esempio numerico.

$$\begin{array}{r}
 64 \\
 1349 \\
 257 \\
 5 \\
 \hline
 64 \quad 5 \\
 257
 \end{array}$$

Se si desidera dividere il 1349 per 257, si scrive il 257 sotto il 349 del 1349. Il numero formato dalle ultime tre cifre del dividendo, che è il 134, è inferiore al 257, cioè al numero divisore; perciò, la figura del numero quoziente che occupa il primo posto sarà messa sotto la quarta figura del numero dividendo, cioè il 9; il numero che moltiplicato per 257 rende quasi 1349 è 5, che è messo sotto il 9; si moltiplica 5 per l'ultima cifra del numero divisore, vale a dire per 2; si ha 10 che si sottrae da 13, ossia dal numero delle ultime due cifre del numero dividendo, poichè non si può sottrarre dal numero dell'ultima figura; resta 3 che si accoppia con il precedente 4; si ha 34 da cui si sottrae il prodotto del 5 messo con il 5 del numero divisore; rimane 9, che si pone al di sopra del 4; si moltiplica il 5 messo per 7; si ha 35 che si sottrae dal 99, ovvero dall'accoppiamento del 9 con il primo posto del numero dividendo; resta 64 che si mette sopra la linea di frazione del suddetto 257. Il quoziente 5 si mette prima della frazione; e per la divisione cercata si avrà il risultato mostrato in figura.

La divisione di 30749 per 307.

Se si vuole dividere 30749 per 307, si scrive il 307 sotto il 749; e poichè il 307, che è il numero delle ultime tre cifre del numero dividendo, è uguale al numero divisore, si mette 1 sotto la prima posizione delle tre figure dette, cioè sotto il 7 che si trova nella terza posizione del numero dividendo; si moltiplica l'1 per il 3 del divisore; si ha 3, che viene sottratto dal 3 che si trova nell'ultimo posto del dividendo; si moltiplica ancora l'1 per lo 0 del divisore e si ha 0; per cui lo 0 che è nel numero divisore si lascia; si moltiplica ancora l'1 per il 7 e si ha 7, che si sottrae dal 7 che è nel numero dividendo. Quando il terzo posto moltiplica qualsiasi posto, si ottiene il terzo posto al di là di ciò che si moltiplica. Pertanto, quando si moltiplica il terzo, si ha il quinto posto; quando si moltiplica il secondo, si ha il quarto; quando si moltiplica il primo, si ha il terzo. Il 4 che precede il 7 nel numero dividendo è inferiore al 307, cioè al divisore; si mette 0 sotto il 4, e ancora il 49 del numero dividendo è inferiore al 307; si mette 0 sotto il 9, vale a dire al primo posto del numero quoziente; e il suddetto 49 si mette sopra la frazione del 307, il parziale, e il quoziente 100 si mette prima della frazione; e si avrà il risultato in figura per la divisione cercata.

$$\begin{array}{r}
 49 \\
 30749 \\
 307 \\
 100 \\
 \hline
 49 \quad 100 \\
 307
 \end{array}$$

Se si vuole dividere 574930 per 563, si mette il 563 sotto il 930; si mette il moltiplicatore 1 sotto il 4, cioè nel quarto posto; si moltiplica per il 5 del numero divisore e si ha 5 che si sottrae dal 5 che si trova nell'ultimo posto del numero dividendo; quando si moltiplica il terzo posto per il quarto posto, si ha il sesto posto, cioè il quarto al di là di ciò che si moltiplica; si moltiplica l'1 per il 6 del divisore e si ha 6 che si sottrae dal 7; resta 1 che si mette sopra il 7; quando si moltiplica il quarto posto per il secondo, si ha il quinto; e ancora si moltiplica l'1 per il 3 del divisore e si ha 3 che si sottrae dal 4, cioè da 14, a causa dell'1 che sta sopra il 7; quando si moltiplica il quarto posto per il primo, si ha il quarto, o il numero termina in esso. E poichè il detto 3 viene sottratto dal 4 che è al quarto posto, cioè dal 14 che termina in esso, resta 11, che va sopra il quinto e il quarto posto; si accoppia

$$\begin{array}{r}
 107 \\
 670 \\
 1193 \\
 574930 \\
 563 \\
 1021 \\
 \hline
 107 \quad 1021 \\
 563
 \end{array}$$

il 9 con questo 11 e si ha 119 che è inferiore al 563, cioè al divisore; si mette 0 sotto il 9, e si accoppia il 3 che è nel secondo posto del numero dividendo con il 119, formando 1193. Pertanto si mette nel secondo posto un moltiplicatore tale che moltiplicato per il 563 dia quasi 1193; questa cifra sarà 2 che si moltiplica per il 5 del divisore e si ha 10, che si sottrae dall'11 scritto lasciando 1; si lascia l'1 messo sopra il 4 e si rimuove l'altro 1 che è sopra il 7; si moltiplica il 2 per il 6 del divisore e si ha 12 che si sottrae dal 19; rimane 7 che si pone sopra il 9; si rimuove l'1 che è sopra il 4, si moltiplica il 2 per il 3 del divisore e si ha 6 che si sottrae dal 73; resta 67; si toglie il 7 che sopra al 9 e si pone il 67 sopra il 93, come nella figura. Si accoppia il 67 con lo 0 e si ha 670; per moltiplicatore si mette 1 sotto lo 0, e si moltiplica per il 5 del divisore dando 5, che si sottrae dal 6; rimane 1; si toglie il 6 e si mette l'1; si moltiplica l'1 per 6 e si sottrae dal 7; rimane 1; si toglie il 7 e si mette l'1; si moltiplica l'1 per il 3 del divisore e si ha 3 che si sottrae dal 110; rimane 107 che si mette sopra la frazione di 563, e prima si mette il quoziente 1021, come mostrato nella figura.

Controllo della divisione sopra scritta.

Se si vuole controllare la divisione scacciando gli 11, si divide il 574930 per 11; resta 4, che si mantiene per il residuo; analogamente si divide il quoziente 1021 per 11; rimane 9 che si moltiplica per il 2 che rimane dalla divisione del 563 per 11; si ha 18, al quale si aggiunge il residuo del numero rimanente sulla frazione, cioè 107, che ha residuo 8, perché quando 107 è diviso per 11 rimane 8; e così si avrà 26 che quando è diviso per 11 lascia 4 per residuo, come deve essere. Nel trovare il moltiplicatore da moltiplicare per il numero quoziente, quando un numero di tre cifre o più è diviso da un numero di tre cifre, di cui abbiamo insegnato la tecnica, si considera se il numero divisore è più o meno vicino ad alcune centinaia, e si cerca una figura nel numero quoziente da mettere contro quel numero, e si lasciano le due figure che sono nella sua prima e seconda posizione. Si divide il resto dei numeri per il numero di centinaia appare più vicino, e si mette la figura che si ottiene: poco più, se il divisore è inferiore al previsto numero di centinaia, o poco meno, se il divisore sarà superiore al numero di centinaia. Per esempio, se vogliamo dividere il 1247 per 421, lasciamo fuori 4, e dividiamo il 12 che rimane per 4, poichè il 421 è più vicino a 400 di qualsiasi altro numero di centinaia; il risultato è 3; il moltiplicatore è più piccolo, perché il 421 è più di 400, e sarebbe più grande con meno di 379 come divisore; e in tal modo si comprende il resto. Se il numero divisore è un centinaio e mezzo, 150, o 250, e così via, si raddoppia il numero delle due predette figure restanti, si divide la quantità raddoppiata per il doppio delle centinaia, e si avrà la figura del moltiplicatore. Ad esempio, vogliamo dividere il 2137 per 563; dividiamo il 21 per $1/2$ 5, cioè il doppio di 21, cioè 42, per il doppio di $1/2$ 5, cioè 11; il quoziente sarà 3 e qualcosa; e così si trova il moltiplicatore in simili situazioni.

Se si vuole dividere 5950000 per 743, allora si scrive giù il numero; si sceglie il moltiplicatore come sopra; si mette 8 sotto lo 0 del quarto posto, poichè dopo aver rimosso 50 dal 5950, rimane 59; se si divide il doppio di 59 per il doppio di $1/2$ 7, perchè il divisore è vicino a 750, risulta 8, che si moltiplica per il 7 del divisore; si ha 56 che si sottrae dal 59; resta 3 che si mette sopra il 9. L'8 viene moltiplicato per il 4 e si ha 32 che si sottrae da 35; resta 3, che si pone al di sopra del 5; si cancella il 3 che è stato messo sopra il 9; 8 per il 3 del divisore dà 24 che si sottrae dal 30; rimane 6 che si pone al di sopra dello 0; si cancella il 3, che era al di sopra del 5; quindi, si moltiplica sempre singolarmente la figura messa per le figure del numero divisore, a partire dall'ultima e salendo fino alla prima, lasciando sempre in figura la divisione, con la figura messa sotto questa in precedenza, come mostrato nel primo esempio di questa divisione. Dopo di ciò si mettono due zeri sotto i due zeri del terzo e secondo posto, ma entrambi questi zeri, accoppiati con il 6, fanno una quantità più piccola del numero 743. Per cui si divide per 743 il dividendo 6 con tre zeri, vale a dire 6000; per questa divisione si mette 8 al primo posto del numero quoziente, ossia al di sotto dello 0 del primo posto; questo perché la divisione del doppio di 60 per il doppio di $1/2$ 7 risulta 8; questo 8 moltiplicato per 7 e sottratto dal 60 lascia 4 che si mette sullo 0 nel terzo posto; si toglie il 6 che si trova sopra lo 0 nella quarta posizione; si moltiplica di nuovo 8 per il 4 nel divisore, e il prodotto si sottrae da 40 lasciando 8; siccome la moltiplicazione di detto 8 è cambiata da posto a posto nel numero divisore, così la moltiplicazione nel numero dividendo deve essere cambiata da posto a posto. Si mette il restante 8 sullo 0 al secondo posto, e si rimuove il 4 che è stato messo sullo 0 al terzo posto; si moltiplica l'8 per il 3 e si ha 24 che si sottrae da 80; resta 56 che si mette sulla linea di frazione sul 743, e prima di essa si mette 8008; e si avrà il risultato della divisione proposta. Da ciò che è stato detto finora sulle divisioni, si può avere una piena padronanza nel dividere numeri di quattro o più figure; tuttavia tali divisioni saranno capite meglio se mostrate con alcuni numeri di quattro cifre.

56
6000
5950000
743
8008
<u>56</u> 8008
743

La divisione di 17849 per 1973.

Se si propone di dividere 17849 per 1973, allora si scrive il divisore sotto il dividendo, cioè il 1973 al di sotto del 7849 del 17849; siccome il numero delle ultime quattro cifre del numero dividendo, cioè il 1784, è inferiore al divisore, bisogna mettere la figura del numero quoziente sotto il primo posto del numero dividendo. Per cui si mette 9 sotto il primo posto di entrambi i numeri, in quanto la moltiplicazione del 9 per il divisore rende quasi il numero dividendo, e poichè il divisore è vicino a venti centinaia, 17 è diviso per 2, e le rimanenti tre cifre del numero dividendo, ossia 849, sono trascurate; poi si moltiplica il 9 per l'1 del divisore, si sottrae dal 17 e si ha 8 che si mette al di sopra del 7; si moltiplica 9 per il 9 del divisore e si sottrae da 88; resta 7 che si mette al di sopra dell'8, e si cancella l'8. E ancora, si moltiplica il 9 per il 7 del divisore e si sottrae da 74; rimane 11 che si mette al di sopra del 74; si moltiplica il 9 per il 3 del numero divisore e si sottrae

dal 119; rimane 92 che si mette sopra la linea di frazione sopra il 1973; prima di essa si mette il 9, e si avrà la proposta quantità della divisione.

La divisione di 1235689 per 4007.

Se si vuole dividere 1235689 per 4007, si scrive il numero e si mette 3 al di sotto del terzo posto dei numeri; 3 è il prescritto moltiplicatore; si moltiplica il 3 per 4 e si ha 12 che annulla il 12 che è il numero delle ultime due cifre del numero dividendo. Si moltiplica il 3 per lo 0 che è nella terza posizione del divisore e si ha 0; si sottrae 0 dal 3 del numero dividendo e si ha 3. E ancora si moltiplica il 3 per lo 0 al secondo posto del divisore e si ha 0, che si sottrae dal 35 lasciando ancora 35; 3 volte 7 fa 21 che si sottrae dal 356; resta 335 che si mette al di sopra del 356. Poiché 3358 è l'accoppiamento di 335 con il numero residuo, e questa cifra è minore del 4007, prima del 3 viene messo lo 0, vale a dire al di sotto del secondo posto dei numeri. Il 3358 si accoppia con la figura precedente, cioè con il 9, sotto il quale si mette l'8 nel numero quoziente. Si moltiplica per 4 e si sottrae dal 33 lasciando 1, che si mette sopra il 3 nel primo posto di 33, e si cancella il 33. E 8 volte lo 0 nel terzo posto viene sottratto dal 15 lasciando 15. E di nuovo si moltiplica l'8 per lo 0 al secondo posto del numero divisore, e si sottrae da 158 lasciando 158. E 8 volte il 7 fa 56, che si sottrae dal 1589 lasciando 1533 che si mette sulla linea di frazione sul 4007, e prima di essa si mette il 308, e si avrà il quantitativo richiesto dalla divisione, come è mostrato nell'illustrazione.

Se si vuole controllare questa o qualsiasi altra divisione in maniera diversa dallo scaccia numero, si moltiplica il numero quoziente per il divisore, e si aggiunge il prodotto al resto della divisione, vale a dire a ciò che è stato messo sulla linea di frazione. In questo caso, si moltiplica il 308 per 4007, e al prodotto ottenuto si aggiunge il 1533 che è sopra la riga di frazione, e se la somma darà il numero dividendo, allora si sa che la divisione è corretta.

Dal capitolo XII

La successione di Fibonacci

Quante coppie di conigli discendono in un anno da una coppia.

Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita. Poiché la suddetta coppia si riproduce nel primo mese, devi raddoppiarla: nel primo mese le coppie saranno 2. Di queste, la prima, nel secondo mese ne genera un'altra: quindi nel secondo mese ci sono 3 coppie. Di queste, durante il mese, due si riproducono e nel terzo mese, generano 2 coppie: quindi, nel terzo mese, ci sono 5 coppie di conigli. Di queste, durante il mese, 3 si riproducono e nel quarto mese ci sono 8 coppie. Di queste, al quinto mese, 5 coppie ne generano altre 5 che aggiunte alle 8 coppie esistenti fanno 13 coppie. Di queste, le 5 generate nel mese precedente non generano nel sesto mese, ma le altre 8 si riproducono, quindi nel sesto mese ci sono 21 coppie. Aggiungendo a queste altre 13 coppie generate nel settimo mese, ci saranno in quel mese 34 coppie. Aggiungendo a queste altre 21 coppie generate nell'ottavo mese, ci saranno in quel mese 55 coppie. Aggiungendo a queste, altre 34 coppie generate nel nono mese, ci saranno in quel mese 89 coppie. Aggiungendo nuovamente a queste altre 55 coppie generate, nel decimo ci saranno 144 coppie. Aggiungendo nuovamente a queste altre 89 coppie generate nell'undicesimo mese, ci saranno in quel mese 233 coppie. Aggiungendo nuovamente a queste anche 144 coppie generate nell'ultimo mese, ci saranno 377 coppie. Tante sono le coppie generate dalla coppia iniziale in quel luogo in capo ad un anno.

Puoi inoltre vedere in questo margine come abbiamo operato: abbiamo sommato il primo numero con il secondo, cioè 1 e 2; il secondo con il terzo, il terzo con il quarto, il quarto con il quinto e così via finché abbiamo sommato il decimo con l'undicesimo, cioè 144 con 233 ed abbiamo ottenuto la somma dei suddetti conigli, cioè 377; e così si può fare per un numero infinito di mesi.

Coppie
1
Primo
2
Secondo
3
Terzo
5
Quarto
8
Quinto
13
Sesto
21
Settimo
34
Ottavo
55
Nono
89
Decimo
144
Undicesimo
233
Dodicesimo
377

La leggenda di Sissa Nassir

Sulla duplicazione delle case di una scacchiera ed alcuni altri metodi.

Proponiamo di duplicare le caselle di una scacchiera, utilizzando un metodo duplice: una scacchiera con una sequenza di caselle in cui ciascun numero è il doppio del suo antecedente e un'altra con una sequenza di caselle con numeri che sono ciascuno la somma di tutti i numeri precedenti. Mostriamo ora come si può eseguire la duplicazione. Per prima cosa si eseguono i raddoppi, posto dopo posto, raddoppiando il posto precedente, fino alla fine; l'altro modo si esegue raddoppiando la quantità del primo posto, si ha due, il due si moltiplica per sé; si ha 4, che supera di 1 il totale dei due primi posti. Per esempio, nel primo posto si mette 1, nel secondo 2, che aggiunto al primo fa 3; questo tre più 1 dà il 4 scritto sopra; si moltiplica il 4 per sé, dà 16, che supera di 1 la somma del doppio dei primi 2 posti, cioè 4 posti. Per esempio, nel primo c'è 1, nel secondo 2, nel terzo 4, nel quarto 8, che sommati insieme fanno 15, che è di 1 inferiore a 16. Inoltre moltiplicando il 16 per sé, si ha 256 che è di 1 più grande della somma delle potenze di due nel doppio dei 4 posti sopra scritti, cioè gli 8 posti che formano la prima fila della scacchiera. Per esempio, nel primo è 1, nel secondo 2, nel terzo 4, nel quarto 8, nel quinto 16, nel sesto 32, nel settimo 64, nell'ottavo 128, che sommati insieme fanno 255, cioè 256 meno 1, come abbiamo detto prima; quindi, 256 moltiplicato per se stesso fa 65536, che è di 1 più grande della somma delle potenze di due nel doppio della prima fila, vale a dire nei primi 16 posti; quindi, per lo stesso motivo, si moltiplica il 65536 per se stesso, ottenendo 4294967296, che similmente è di 1 più grande della somma delle potenze di due sul doppio di due file, ossia su 32 posti, che costituiscono la metà della scacchiera. Infine, moltiplicando il 4294967296 per sé, si ottiene 18446744073709551616 che è di 1 più grande della somma delle potenze di due sull'intera scacchiera; questo numero, moltiplicato per sé, eccede di 1 la somma delle potenze di due su due scacchiere, cioè 340 282 366 920 938 463 483 374 607 431 768 211 456, e quindi, moltiplicando, possiamo procedere senza fine. Ma quando il numero dei raddoppi diventa una moltitudine, non si è più in grado di seguire la procedura; cercheremo di spiegare ciò più chiaramente. Dalla somma di due file di scacchiera, vale a dire da 16 posti, otteniamo 65536, e con questi riempiamo uno scrigno; allora, raddoppiamo questo scrigno, e quindi avremo due scrigni da inserire nel diciassettesimo posto, che è il primo della terza fila; nel secondo posto della stessa fila avremo 4 scrigni, nel terzo 8, nel quarto 16, nel quinto 32, nel sesto 64, nel settimo 128, e nell'ultimo posto della stessa fila 256 scrigni. Nel primo posto della quarta riga avremo 512 scrigni, nel secondo 1024, nel terzo 2048, nel quarto 4096, nel quinto 8192, nel sesto 16384, nel settimo 32768, e nell'ultimo posto avremo 65536 scrigni; con questi scrigni riempiamo una casa, allora avremo nel primo

città
65536
case
65536
scrigni
65536
bisanti
65536

posto della quinta fila 2 case, nel secondo 4, nel terzo 8, e quindi, raddoppiando in tal modo, avremo nell'ultimo posto in sesta fila 65536 case. Con queste case facciamo una città, e continuiamo con il raddoppio nei restanti posti; allora avremo nell'ultima posizione della scacchiera 65536 città; quindi la somma di tutti i numeri sulla scacchiera ammonta a 65536 città; ogni città ha 65536 case, in ogni casa ci sono 65536 scrigni, e in ogni scrigno ci sono 65536 bisanti. Per effetto della dimostrazione suddetta si deve avere in ogni scrigno 1 bisante in meno.

INDICE

	Nota del traduttore	1
	Prologo	4
1	Inizia il primo capitolo	6
2	Inizia il secondo capitolo sulla moltiplicazione dei numeri interi	11
3	Inizia il terzo capitolo sull'addizione di numeri interi	25
4	Inizia il quarto capitolo sulla sottrazione di numeri minori da numeri maggiori	29
5	Inizia il quinto capitolo sulla divisione di numeri interi	32
	Dal capitolo XII: - La successione di Fibonacci	59
	- La leggenda di Sissa Nassir	60