

R. BARBON

DISPENSE

DI

ASTRONOMIA II

A. A. 2006-07

INDICE

Capitolo 1: <i>I fondamenti della fotometria astronomica</i>	1
Appendice 1-A: Atmosfera terrestre e suo effetto sulle radiazioni inviateci dai corpi celesti	19
Appendice 1-B: La magnitudine di apertura	21
Capitolo 2: <i>Sistemi fotometrici a larga banda e l'assorbimento interstellare</i>	
Il sistema UBV	23
L'assorbimento interstellare	30
Anomalie nella legge di assorbimento interstellare	36
Il sistema RGU	37
Capitolo 3: <i>Influenza delle righe sui colori. Classi di luminosità ed effetto Blanketing</i>	
Popolazioni ioniche e dei livelli eccitati	39
Effetto Blanketing	46
Sistemi a banda intermedia: L'ubvy di Stromgren	51
I filtri interferenziali	57
Capitolo 4: <i>Applicazione del sistema UBV agli ammassi aperti</i>	
Introduzione	61
Indicatori di struttura galattica	63
Distanza ed assorbimento	65
Interpretazione dei diagrammi c-m degli ammassi aperti	68
Raccordi di ammassi alla ZAMS	76
Capitolo 5: <i>Applicazione della fotometria UBV agli ammassi globulari</i>	
Introduzione	79
Densità stellare	80
Cenni di evoluzione dinamica	82
Criteri di classificazione	84
Le stelle variabili	84
I diagrammi HR	85
Determinazione della distanza e dell'età	89
Proprietà delle variabili pulsanti e la relazione P – L	91
Il metodo di Baade-Wesselink	96
Appendice 5-A: Le popolazioni stellari	101
Capitolo 6: <i>Le stelle binarie</i>	
Introduzione allo studio delle stelle binarie	105
Orbite relative ed orbite assolute	109
Masse delle componenti di una binaria	111
Cenno allo studio delle stelle doppie visuali	111
Le binarie spettroscopiche	112
Le funzioni di massa	122
Le binarie fotometriche: introduzione	125
Tipi di binarie ad eclisse	126
Calcolo dell'orbita di una binaria ad eclisse	129
Caso dell'eclisse totale	131
Sistemi binari stretti (CBS)	134
Dischi di accrescimento	139

Capitolo 1

I FONDAMENTI DELLA FOTOMETRIA ASTRONOMICA

Lo splendore degli astri viene misurato da più di due millenni in **magnitudini**. Ci si può chiedere come mai oggi, con l'uso intensivo di rivelatori che misurano direttamente in erg o fotoni al secondo, l'energia raccolta da un telescopio, si continui ad usare questa misura anacronistica. La scala delle magnitudini soffre infatti di svariati svantaggi:

- è una scala inversa
- non è una scala lineare ma logaritmica
- la base dei logaritmi non è il numero 10 oppure "e" ma 2.511886... la cui unica caratteristica è solo quella di essere la radice quinta di 100

Il primo a misurare in magnitudini lo splendore degli astri si pensa sia stato *Ipparco*, vissuto nel II secolo A. C., che classificò di magnitudine 1 lo splendore delle stelle più brillanti e di magnitudine 6 quelle appena visibili ad occhio nudo. Tra una magnitudine e l'altra, l'occhio avvertiva la stessa diminuzione d'intensità. *Tolomeo*, nel II secolo D. C., conservò la scala di magnitudini di Ipparco nel redigere il primo catalogo stellare contenuto nei volumi VI e VII del suo *Almagesto*. Se Ipparco avesse usato, come scala di magnitudini, lettere e non numeri nel classificare lo splendore delle stelle, gli astronomi moderni, specie quelli dell'800, non si sarebbero sentiti obbligati a conservarla ed anzi cercare di provarla in maniera obbiettiva ricorrendo ai primi risultati di esperienze psicofisiche che legavano lo stimolo con la sensazione luminosa.

Per la legge psico-fisica di *Weber-Fechner*, un incremento percentuale dell'intensità luminosa, I , produce un incremento lineare dello stimolo visivo, S , cioè segnali in proporzione geometrica danno risposte in progressione aritmetica. Così integrando la

$$\Delta S \sim \frac{\Delta I}{I} \quad \text{si ha} \quad S = k \log I \quad \left(\text{con } I \text{ espresso in } \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{sec}} \right)$$

Date due stelle di intensità I_1 ed I_2 , si avverte una differenza di stimolo ΔS , data da:

$$\Delta S = S_1 - S_2 = k \log \frac{I_1}{I_2}$$

La costante k è stata fissata da *Pogson* (XIX secolo) in modo da mantenere l'accordo con l'antica scala delle magnitudini di Ipparco (erano, come abbiamo detto, 6 classi di splendore, tali che la luminosità decresceva di 100 volte dalla 1^a alla 6^a classe, limite della sensibilità dell'occhio umano)

$$k = -2.5 \quad (\text{con log in base 10});$$

la costante è negativa perché le magnitudini decrescono numericamente al crescere del flusso. Così:

$$m_1 - m_2 = \Delta S = -2.5 \log \frac{I_1}{I_2} \quad \text{ovvero} \quad \frac{I_1}{I_2} = 10^{-0.4(m_1 - m_2)}$$

o ancora:

$$\frac{I_1}{I_2} = 2.512^{-(m_1 - m_2)}$$

Si noti la differenza tra 2.5, esatto per definizione (infatti $1 - 6 = k \log(\frac{100}{1})$ e quindi $k = -\frac{5}{2} = -2.5$) e $2.512\dots = 10^{+0.4}$ (rapporto tra le intensità di due stelle con $\Delta m = 1$, per cui sarà $\frac{I_1}{I_2} = 10^{+0.4} = \sqrt[5]{100} = 2.512\dots$).

La $m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{I_1}{I_2}$ originariamente permetteva di passare da magnitudini a flussi, oggi con l'uso di ricettori oggettivi avviene spesso il contrario. Il punto zero della scala delle magnitudini fu inizialmente fissato con la stella Polare ($m = 2.12$), poi con le stelle standard nella Sequenza Polare Nord, ed in seguito da quelle nelle "Selected Areas" distribuite omogeneamente in tutto il cielo (vedi Figura 1.1). Oggigiorno vengono utilizzate le sequenze fotometriche misurate da Landolt utilizzando rivelatori moderni come il CCD.

Se invece di magnitudini apparenti vogliamo passare alle magnitudini assolute (cioè di stelle poste ad una distanza standard di 10 parsecs) si avrà corrispondentemente

$$M = m - 2.5 \log \frac{L}{l} = m - 2.5 \log \frac{d^2}{10^2}$$

$$M = m - 5 \log d + 5$$

se trascuriamo per il momento l'assorbimento interstellare.

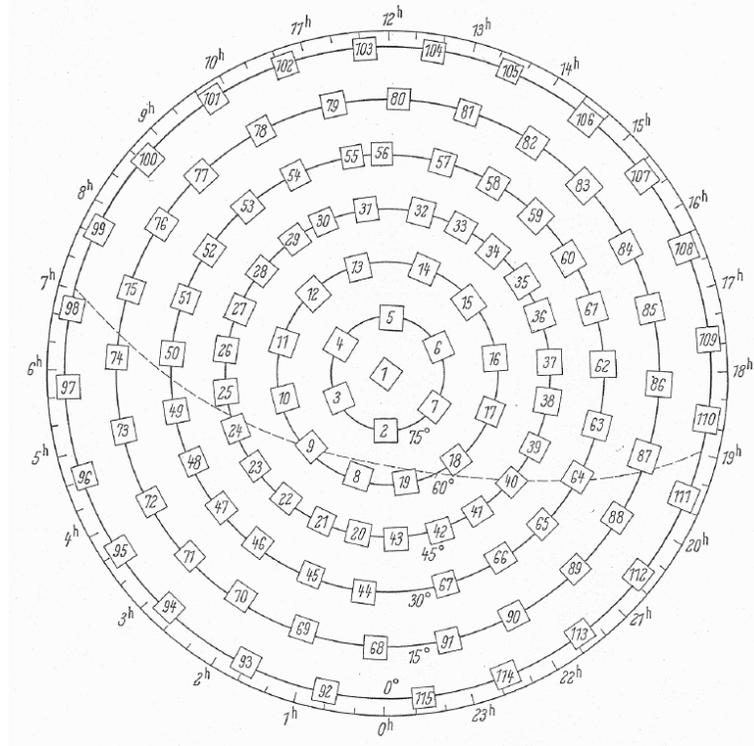


Figura 1.1: *Distribuzione delle Selected Areas nel cielo boreale. La S. A. numero 1 corrisponde alla Sequenza Polare Nord.*

Poiché le magnitudini apparenti sono vincolate dalla fisiologia dell'occhio, o dalle caratteristiche dei recettori, le precedenti considerazioni vanno precisate in funzione della lunghezza d'onda, λ . Assimiliamo una stella ad una sfera opaca di raggio R e chiamiamo $F(\lambda)$ l'emittanza specifica della superficie; il flusso totale emesso dalla sfera in tutte le direzioni, nell'intervallo $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ vale

$$4\pi R^2 \cdot F(\lambda) d\lambda \quad (\text{espresso in erg/sec})$$

Poiché dalla Terra sarà $d \gg R$, potremo approssimare $\frac{R}{d} \sim \frac{\theta}{2}$, essendo θ il diametro apparente della stella, in radianti. Da cui il flusso all'ingresso dell'atmosfera terrestre (tralasciando l'assorbimento) è

$$I_0(\lambda) d\lambda = \frac{\theta^2}{4} F(\lambda) d\lambda$$

L'astronomo al suolo usa comunemente un rivelatore dalla banda passante finita, ovvero di risposta nulla al di fuori dell'intervallo di lunghezze d'onda (λ_1, λ_2) ; di conseguenza la quantità misurata è

$$i(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} I_0(\lambda) A(\lambda) R(\lambda) K(\lambda) Q(\lambda) d\lambda$$

i cui veri fattori, che vedremo più avanti, sono: $A(\lambda) =$ *trasmissione dell'atmosfera terrestre*, $R(\lambda) =$ *riflessività, o trasmissione delle ottiche del telescopio*, $K(\lambda) =$ *risposta cromatica del filtro di colore*, $Q(\lambda) =$ *risposta cromatica del rivelatore*.

La funzione $T(\lambda) = A(\lambda) R(\lambda) K(\lambda) Q(\lambda)$ definisce il “sistema fotometrico” usato dall'astronomo; in esso è inclusa anche l'atmosfera terrestre, con l'avvertenza di riportare le misure “allo Zenith” dell'osservatorio. La funzione $A(\lambda)$ è dunque funzione dell'altitudine sul livello del mare, della prossimità a centri abitati, e così via. Un suo valore approssimato è riportato in Figura 1.2, nella quale non compaiono i forti assorbimenti tellurici di bande molecolari (O_2 , H_2O , *etc.*) nè le forti bande di emissione dell' OH .

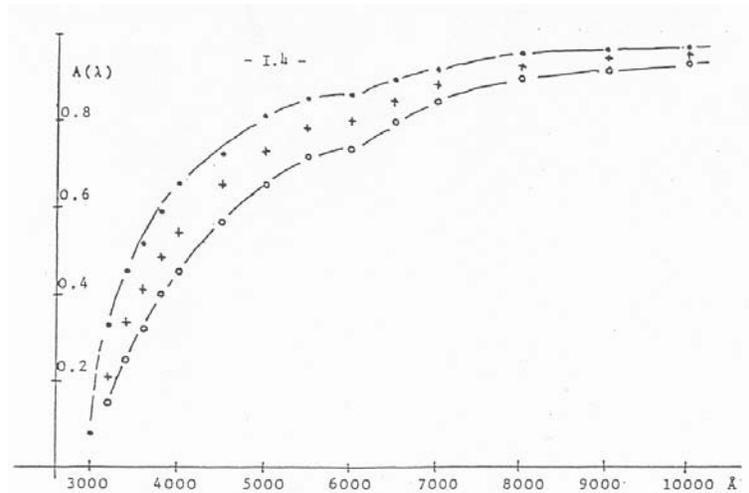


Figura 1.2: *Trasmissione atmosferica continua. Sono date tre curve per 1, 1.5 e 2 masse d'aria rispettivamente.*

Per determinare $A(\lambda)$ si può seguire il cosiddetto “metodo di Bouguer” (XVIII secolo). In generale quando la luce attraversa un mezzo, come l'atmosfera, viene indebolita da processi di assorbimento e “scattering”; in un mezzo di coefficiente di assorbimento costante, il flusso decresce in modo esponenziale con la distanza percorsa in questo mezzo. Ciò vale in generale, ed è noto come “**legge di Bouguer**”; la quantità dell'assorbimento dipende dalla natura del mezzo e dalla lunghezza d'onda trasmessa. Nel caso di una sorgente puntiforme di originale intensità I_0 , l'intensità misurata I ad una distanza x attraverso il mezzo è data da

$$I = I_0 10^{-\alpha_\lambda x} \quad \text{ovvero} \quad A(\lambda) = \frac{I}{I_0} = 10^{-\alpha_\lambda x}$$

ove α_λ è il coefficiente lineare di assorbimento del mezzo alla lunghezza d'onda in questione. Così le stelle osservate al di sotto dell'atmosfera sono meno luminose che non al di sopra di essa. La quantità di atmosfera attraversata dipende dall'altezza della stella sull'orizzonte, così la sua luminosità apparente varia nella notte mentre essa

sorge, culmina e tramonta. Per dare un senso alle osservazioni, e poterle confrontare, è importante avere rimosso gli effetti dovuti all'atmosfera con contributo variabile.

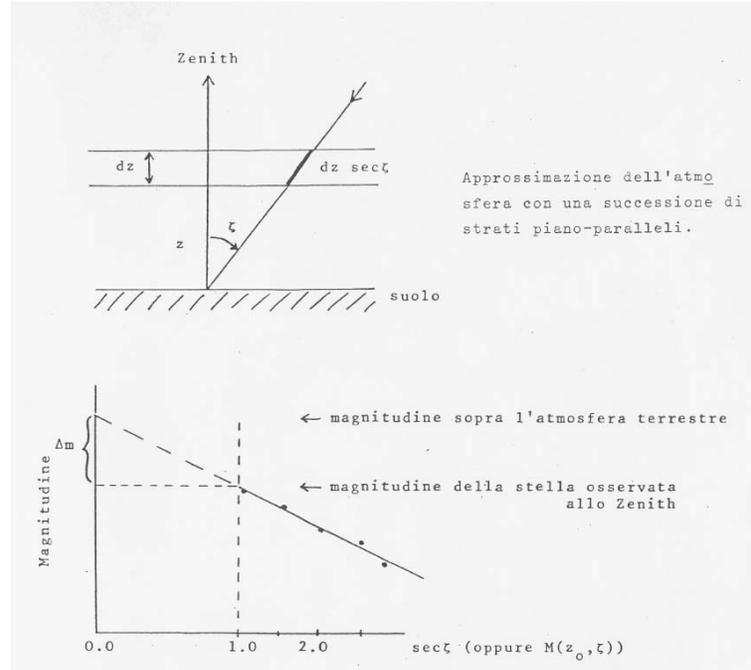


Figura 1.3: Metodo della retta di Bouguer per ricavare il coefficiente di estinzione atmosferica.

Fino ad una distanza zenitale di 60° si può usare il seguente metodo semplificato: si approssima l'atmosfera con una successione di strati sottili, piani e paralleli rispetto al suolo, ognuno di essi avente un coefficiente d'assorbimento ben definito. La Figura 1.3 illustra uno strato di spessore dz all'altezza z , e mostra che il cammino attraversato è $dz \sec \zeta$ per una stella a distanza zenitale ζ . I_0 sia la luminosità della stella sopra lo strato atmosferico ed I quella dopo che la luce lo ha attraversato, allora sarà per la legge di Bouguer:

$$I = I_0 10^{-\alpha_\lambda dz \sec \zeta}$$

con α_λ coefficiente di assorbimento lineare del singolo strato. La luminosità al di sotto dell'atmosfera è data dall'integrazione dell'assorbimento in tutto il cammino attraversato dalla luce della stella; cioè a distanza zenitale ζ si osserverà

$$I = I_0 10^{-\int_{z_0}^{\infty} \alpha_\lambda(z) \sec \zeta dz}$$

ove $\alpha_\lambda(z)$ è il coefficiente di assorbimento in funzione della distanza nell'atmosfera, e z_0 è l'altitudine dell'osservatore. In logaritmi si può scrivere

$$\log I(\zeta) = \log I_0 - \sec \zeta \int_{z_0}^{\infty} \alpha_\lambda(z) dz$$

Se adesso $I(0)$ è la luminosità che la stella avrebbe se osservata allo zenit, allora ci si riduce a

$$\log I(0) = \log I_0 - \int_{z_0}^{\infty} \alpha_{\lambda}(z) \, dz$$

e perciò

$$\int_{z_0}^{\infty} \alpha_{\lambda}(z) \, dz = \log(I_0/I(0))_{\lambda}$$

Notiamo che questa quantità dipende solo dalle caratteristiche dell'atmosfera e non dalla stella misurata. Sostituendo nella espressione precedente, si ha

$$\log I(\zeta) = \log I_0 + \sec\zeta \log(I(0)/I_0)_{\lambda} \quad \text{od altrimenti} \quad m(\zeta) = m_0 + \sec\zeta (m(0) - m_0)_{\lambda}$$

indicando con m_0 , $m(0)$ ed $m(\zeta)$ rispettivamente le magnitudini della stessa stella come misurate sopra l'atmosfera, quando è allo zenit, e quando è ad una distanza zenitale ζ . Chiamiamo in breve $\Delta m_{\lambda} = (m(0) - m_0)_{\lambda}$ l'aumento in magnitudine della stella tra la misura fatta al suolo quando è allo zenit, e quella fatta fuori dell'atmosfera che ricordiamo essere indipendente dalla stella, ed abbiamo

$$m(\zeta) = m_0 + \Delta m_{\lambda} \sec\zeta \quad \text{ovvero} \quad \Delta m(\zeta) = \Delta m_{\lambda} \sec\zeta$$

In questo metodo semplificato la magnitudine stellare osservata ha una dipendenza lineare dalla secante della distanza zenitale, come è mostrato in Figura 1.3 in basso: le misure di magnitudine stellare di una stella osservata per un certo numero di ore e cioè a vari angoli ζ nel corso di una notte, sono messe in grafico contro $\sec\zeta$, e si dispongono lungo una cosiddetta “**retta di Bouguer**”. La $\sec\zeta$ ha valore minimo quando la stella è allo zenit ($\zeta = 0$), valore uno, ma se immaginiamo che possa comportarsi come qualunque variabile per ogni valore, consideriamo di estrapolare il grafico fino al valore di magnitudine che avrebbe se potessimo porre $\sec\zeta = 0$. In questo caso si ritrova la magnitudine che si avrebbe fuori atmosfera, senza assorbimento. Si vede che la pendenza della retta è l'aumento di magnitudine Δm_{λ} (tra le misure fuori atmosfera, e dal luogo di osservazione al suolo con stella allo zenit). Ricavato il Δm_{λ} per un particolare luogo da una serie di osservazioni di stelle standard, sarà possibile applicare le correzioni atmosferiche a tutte le altre osservazioni, secondo le loro specifiche distanze zenitali. Poiché Δm_{λ} può fluttuare a distanza di minuti, e può variare da una notte all'altra con il cambiare delle condizioni in atmosfera, è opportuno fare frequenti misure di stelle standard.

Ogni osservatorio ha diverse quantità di assorbimento, per esempio secondo diversa altitudine. Per rendere significative le determinazioni di magnitudini, è poi necessario ridurre i valori a sopra l'atmosfera. Le liste che si trovano nei cataloghi stellari presentano magnitudini così corrette. La riduzione è ulteriormente richiesta se si hanno magnitudini in più colori. L'assorbimento è prodotto da “scattering” e sarà maggiore nella banda spettrale “blu” che in quella “rossa”. Questa differenza è illustrata in

Figura 1.4, dove sono messe in grafico contro la $\sec\zeta$ le misure di magnitudine sia in B che in V per una data stella. Se si vuole determinare l'indice di colore (B-V) della stella, è ovvio che i valori presi a varie distanze zenitali dipendono dai particolari valori di ζ ; se si vuole che esso sia significativo, occorrerà ridurre a sopra l'atmosfera ciascuna magnitudine prima di farne la differenza. Per ogni sistema di magnitudini si può trovare un certo valore della Δm , empiricamente trovato in ogni luogo di osservazione: tipicamente i valori saranno dell'ordine di $\Delta m = 0.6, 0.3$ e 0.2 mag rispettivamente per le bande U, B e V che sono le più usate.

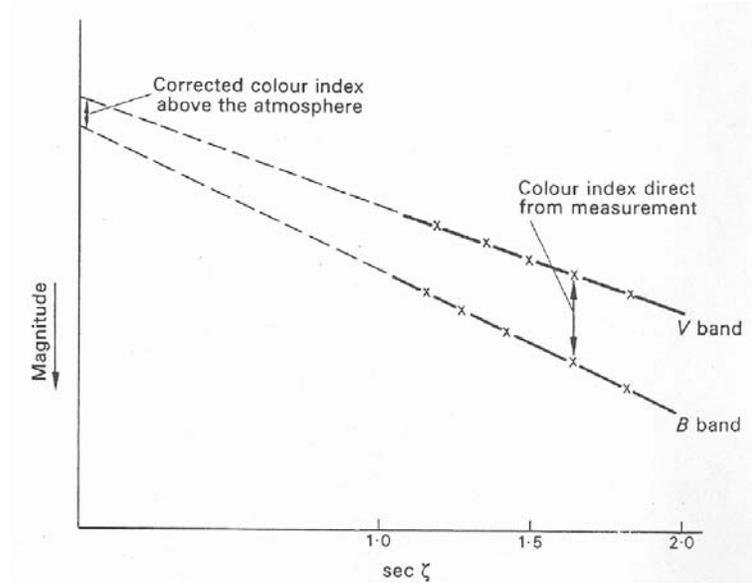


Figura 1.4: *Variazioni con la distanza zenitale delle magnitudini blu e visuali per una data stella.*

La variabile $\sec\zeta$ si identifica con la “massa d’aria” per distanze zenitali inferiori a 60° , al di là cade l’approssimazione piano-parallela usata, e si dovrebbe usare la variabile

$$M(z_0, \zeta) = \frac{\int_{z_0}^{\infty} \delta_z \, ds}{\int_{z_0}^{\infty} \delta_z \, dz}$$

In questa definizione della “massa d’aria”, δ_z è la densità dell’aria a \underline{z} , e \underline{ds} è un elemento di linea lungo il raggio curvilineo.

Come esempio si può tabulare l’assorbimento medio nel visuale, e la massa d’aria M in funzione della distanza zenitale:

ζ	$M(\zeta)$	\bar{A}_{vis}
0°	1.000	0.00 mag
30°	1.154	0.03
45°	1.413	0.09
60°	1.995	0.23
70°	2.904	0.45
80°	5.60	0.99
87°	15.36	2.61

La funzione $R(\lambda)$ dipende dalle ottiche del telescopio. Poiché il vetro assorbe del tutto radiazioni di $\lambda < 3400 \text{ \AA}$ (ma l'assorbimento è già molto forte a 3700 \AA), si sono preferite ottiche in quarzo, e poi si sono eliminate le parti rifrangenti per sostituirle con mezzi riflettenti. Oggi in quasi tutti i casi si ha a che fare con riflettori, i cui specchi sono alluminati; la loro curva di riflettività è data in Figura 1.5. Naturalmente essa va elevata ad una potenza pari al numero degli specchi interessati (per esempio $n = 2$ per osservazioni al fuoco Newtoniano o Cassegrain, $n = 3$ al fuoco laterale).

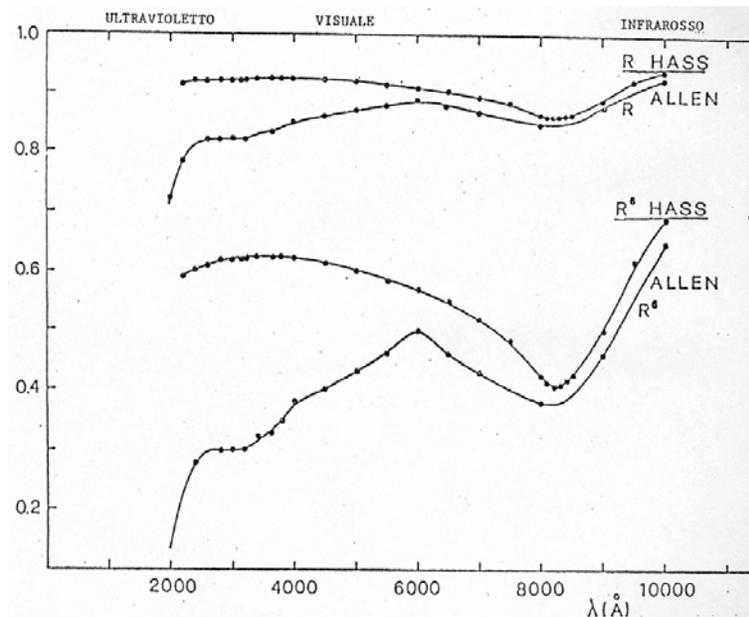


Figura 1.5: *Riflessività degli specchi alluminati secondo diversi autori.*

Infine le funzioni $K(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ dipendono in modo molto specifico dal particolare tipo di filtro e di rivelatore usato, e poiché esse possono variare molto ci limitiamo qui a mostrare in Fig. 1.6 l'andamento della *quantum efficiency*, intesa come rapporto tra il numero dei fotoni rilevati e quelli incidenti, per alcuni tipici rivelatori. È chiaro che anche un ricevitore perfetto (con risposta elevata e costante in lunghezza d'onda) non indicherà mai il flusso integrale dall'astro, per quanto si è detto sull'assorbimento atmosferico e strumentale.

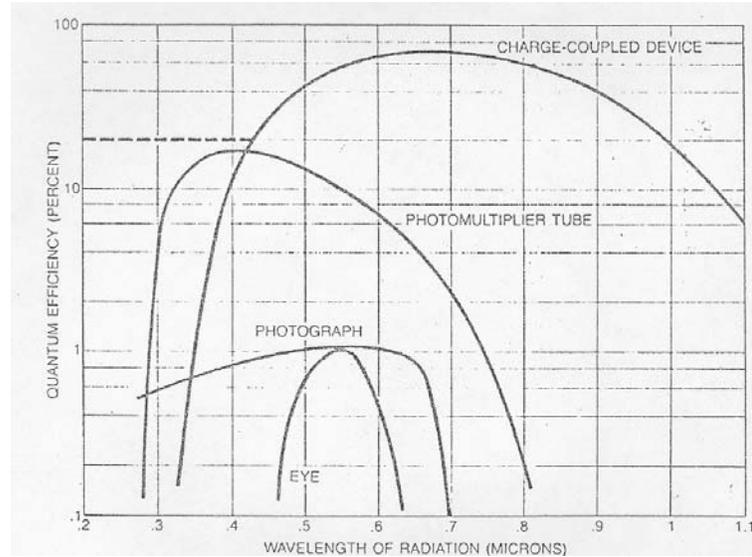


Figura 1.6: Curve di risposta per diversi detectors. La linea tratteggiata corrisponde all'aumento della sensibilità nel blu-violetto del CCD dopo un processo di "coating".

Dato dunque un sistema fotometrico $T(\lambda)$, possiamo semplificarne la descrizione con alcune grandezze caratteristiche:

- la λ_{max} , ove si ha il massimo di risposta, oppure
- la λ media $\langle \lambda \rangle$, così definita $\langle \lambda \rangle = \frac{\int \lambda T(\lambda) d\lambda}{\int T(\lambda) d\lambda}$, una media pesata delle lunghezze d'onda, con peso la funzione T del sistema
- l'intervallo (λ_1, λ_2) in cui la risposta del sistema è diversa da zero, oppure anche l'intervallo $\Delta\lambda_{\frac{1}{2}}$ a cui la risposta cade ad $1/2$ del suo valore massimo, denotato FWHM. Notare che esiste una certa confusione nel citare in modo omogeneo l'intervallo $\Delta\lambda$. In generale il rapporto $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ indica la larghezza percentuale del sistema fotometrico, e per

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \geq 20 \quad \% \text{ si ha un sistema a "banda larga"}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq 5 \quad \% \text{ si ha un sistema a "banda intermedia"}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \leq 1 \quad \% \text{ si ha un sistema a "banda stretta"}$$

In altri sistemi (**Strömgren**) si sono definiti i tre casi per:

$$300 \text{ \AA} < \Delta\lambda, \quad 90 \text{ \AA} < \Delta\lambda < 300 \text{ \AA}, \quad \Delta\lambda < 90 \text{ \AA}.$$

Il rapporto inverso, $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ si dice invece "*risoluzione spettrale*" del sistema fotometrico.

Il parametro $\langle \lambda \rangle$, utile dal punto di vista costruttivo, non è però molto significativo nei riguardi delle osservazioni, perché al telescopio viene definita operativamente l'altra lunghezza d'onda, detta "*efficace*" e cioè

$$\lambda_{eff} = \frac{\int \lambda I_o(\lambda) T(\lambda) d\lambda}{\int I_o(\lambda) T(\lambda) d\lambda}$$

una media pesata delle lunghezze d'onda che entrano nella determinazione del flusso, e con peso dato appunto da $I_o T$. La λ_{eff} dipende quindi da I_o a differenza della $\langle \lambda \rangle$ che dipende solo da T : essa varierà quindi con il tipo spettrale $T.Sp.$ della stella in esame. La differenza $\lambda_{eff} - \langle \lambda \rangle$ sarà tanto più grande, quanto più grande è la banda fotometrica $\Delta\lambda$, e quanto maggiore è la differenza di $T.Sp.$ tra le stelle osservate. Questo fenomeno impone una grande cautela quando si confrontino stelle di $T.Sp.$ molto diverso con fotometria a larga banda.

Facendo uso del teorema della media del calcolo integrale, possiamo dunque definire con maggiore precisione le “*magnitudini eterocromatiche*” con la formula

$$m(\lambda_{eff}) = m_0(\lambda_{eff}) - 2.5 \log I_0(\lambda_{eff}) \quad \text{con } \lambda_{eff} = \lambda_{eff}(T.Sp., T(\lambda))$$

ed $m_0(\lambda_{eff})$ è una costante arbitraria, fissata solo da convenzioni e non da considerazioni fotometriche.

Con un passo successivo, definiamo l’“indice di colore” di una stella come la differenza:

$$c_{\lambda_1\lambda_2} = m(\lambda_1) - m(\lambda_2) = m_{01} - m_{02} - 2.5 \log \frac{I(\lambda_1)}{I(\lambda_2)} \quad \lambda_1 < \lambda_2$$

$$\frac{I(\lambda_1)}{I(\lambda_2)} = 10^{-0.4(c_{12} - c_{012})} \quad \text{con } c_{012} = m_{01} - m_{02}$$

Nel caso del Sole è anche possibile misurare non solo magnitudini eterocromatiche ma anche bolometriche, usando rivelatori sensibili a tutte le radiazioni irraggiate dall'astro. Pensando quindi di integrare su tutte le lunghezze d'onda

$$I_{bol} = \int_0^\infty I(\lambda) d\lambda \quad , \quad F_{bol} = \int_0^\infty F(\lambda) d\lambda$$

avremo

$$m_{bol} = m_{0,bol} - 2.5 \log I_{bol} = m_{0,bol} - 2.5 \log \frac{\theta^2 F_{bol}}{4}$$

Per le altre stelle ci si accontenta di valutare una “correzione bolometrica” c_V , da applicare alla magnitudine visuale, e che evidentemente dipende dal tipo spettrale. La correzione può essere teoricamente valutabile, conoscendo la distribuzione di energia emessa, oppure può essere tarata su una serie di misure di stelle brillanti di diverso $T.Sp.$. Si definisce

$$m_{bol} = m_V + C_V(T.Sp.)$$

Si noti che diversi autori cambiano il segno di c_V (per loro $m_{bol} = m_V - C_V$). La correzione bolometrica è maggiore, ed anche più difficile da determinare, per quelle stelle con temperatura molto alta o molto bassa, in entrambi i casi avendosi la maggior parte dell'energia emessa fuori della zona visibile. Essa invece è minima per stelle che hanno lo stesso $T.Sp.$ del Sole (per alcuni autori $C_{V,Sole} = 0.0$). Insomma

$$C_V = -2.5 \log \frac{\int_0^\infty I_0(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty I_0(\lambda) A(\lambda) V(\lambda) d\lambda}$$

con $A(\lambda)$ trasparenza dell'atmosfera e $V(\lambda)$ la trasmissione della banda V . Per valori della c_V a varie temperature stellari, vedi la Figura 1.7

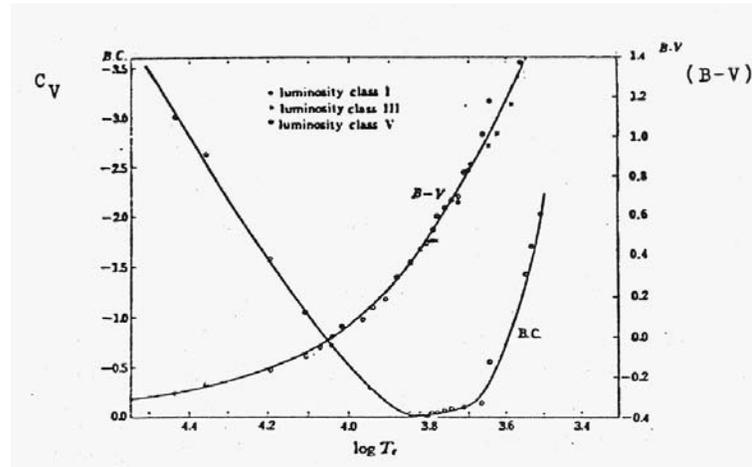


Figura 1.7: *Correzione bolometrica ed indice di colore in funzione della temperatura efficace.*

Dalle precedenti relazioni si ha

$$m_{0,bol} - 2.5 \log \frac{\theta^2 F_{bol}}{4} = m_{0,V} - 2.5 \log I(\lambda_V) + C_V(T.Sp.)$$

od anche

$$-2.5 \log F_{bol}(T.Sp.) - C_V(T.Sp.) = cost - 2.5 \log I(\lambda_V) + 2.5 \log \frac{\theta^2}{4}$$

Il valore della costante può essere determinato con il Sole, i cui valori sono:

$$4\pi R^2 F = 3.9 \times 10^{33} \text{ erg/sec} \quad I_V = 1.83 \times 10^5 \text{ erg/cm}^2 \text{ sec}$$

$$m_V = -26.78 \quad C_V = -0.07 \quad m_{bol} = -26.85$$

$$\theta \sim 33' = 1.98 \times 10^6 \text{ m arc sec}$$

Supponiamo ora che la stella irraggi come un corpo nero

$$F(\lambda) = B(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1} = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T} - 1}}$$

$$B(\lambda, T) = \frac{3.742 \times 10^{-5}}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{1.439/\lambda T} - 1)} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \quad (\text{con } \lambda \text{ in cm})$$

$$F_{bol} = \int_0^\infty B(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4 \quad \text{secondo la legge di Stefan - Boltzmann}$$

$$\sigma = 5.6696 \times 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec } ^\circ K^4}$$

Da cui si ricorda che per la formula di Planck si ha più energia “nel rosso” da una stella “blu” che da una stella “rossa”. Inoltre ricorda che va usato $\lambda(\text{cm}) = 10^{-8} \lambda(\text{\AA})$. Vedi Figura 1.8.

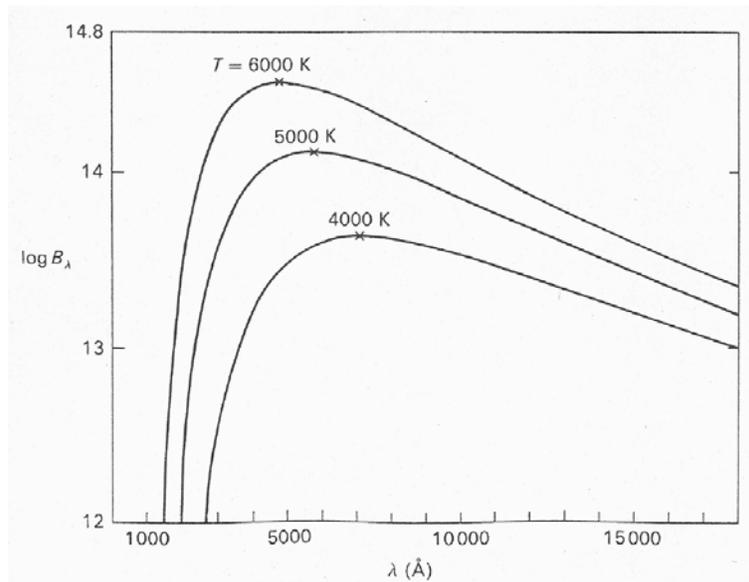


Figura 1.8: *Logaritmo della funzione di Planck in funzione della lunghezza d'onda per tre valori della temperatura. La legge di Wien, il massimo della distribuzione si sposta a lunghezze d'onda sempre più brevi all'aumentare della temperatura, appare chiaramente.*

Allora avremo

$$\log(\sigma T^4) + 0.4 C_V = \text{cost} + \log I(\lambda_V) - \log\left(\frac{\theta^2}{4}\right)$$

$$\log T + 0.1 C_V = 4.2207 - 0.1 m_V - 0.5 \log \theta$$

Qui \underline{T} ha il significato di “*temperatura efficace*” della stella, a sua volta dipendente da $T.Sp.$ cosicché anche

$$(\log T_e + 0.1 C_V)_{T.Sp.} = 4.2207 - 0.1 m_V - 0.5 \log \theta$$

che, tra l'altro, è la base per la determinazione dei diametri stellari apparenti. In altri casi, la magnitudine ci dà il flusso ricevuto, nota la distanza ricavo il flusso della stella, e se è noto T , per approssimazione di corpo nero, determino il raggio. Alternativamente, conoscendo raggio e potere emissivo determino il flusso irraggiato, e per confronto con quello ricevuto si ricava la distanza. Per esempio sul Sole:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad ; \quad L = 3.9 \times 10^{33} \text{ erg/sec} \quad R = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$$

si ricava $T_e = 5800 \text{ }^\circ K$

Nel caso dei diametri stellari vediamo pure come esempio:

$$\text{stella } G2 V \quad , \quad T_e = 5800 \text{ }^\circ K \quad , \quad C_V = -0.07 \quad , \quad m_V = 5$$

$$\log \theta = -2(3.7564 - 4.2207 + 0.5) \quad \underline{\theta} = 8.5 \times 10^{-1} \text{ m arc sec} \sim 1 \text{ m arc sec}$$

Naturalmente da θ non è possibile ricavare R se non abbiamo la parallasse.

Si tabulano alcuni valori di T_e , C_V e θ , ricavati per stelle che hanno tutte $m_V = 5$ ed espresso in milli-secondi d'arco (se si volesse avere per $m_V = 10$, basta dividere per dieci, come risulta dalla costanza del termine $-0.1 m_V - 0.5 \log \theta$):

$T.Sp.$	B0	B4	A0	F2	G0	G5	K2	M0
$\log T_e$	4.43	4.23	4.02	3.84	3.78	3.72	3.68	3.57
C_V	-4.1:	-2.06	-0.72	-0.06	-0.03	-0.09	-0.3	-1.1
$\theta (m_V = 5)$	0.25	0.25	0.35	0.6	0.8	1.05	1.4	3.3

Risulta quindi che le stelle più fredde del Sole, anche per $m_V = 5$, hanno dei *diametri apparenti* dell'ordine di uno o pochi 10^{-3} arc sec . Ne risulta che anche al livello del millesimo di secondo d'arco, vi sono in cielo pochissime stelle, le più rosse tra quelle visibili ad occhio nudo. Da ciò l'interesse del metodo, in confronto ad altri metodi di misura più diretta dei diametri stellari (che sono: interferometria, dal sistema di frange ottenute tramite due fenditure e che permette di misurare θ fino a circa $0.02''$; studio

di sistemi binari, dalla velocità misurata e dal tempo di eclisse; etc., recentemente si ottiene la misura dei diametri stellari con il metodo della *speckle interferometry*).

Riprendiamo adesso l'emissione del corpo nero, e riconsideriamo l'indice di colore

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= m(\lambda_1) - m(\lambda_2) = c_{o,12} - 2.5 \log \frac{B(\lambda_1, T)}{B(\lambda_2, T)} = \\
 &= c_{o,12} - 2.5 \log(\lambda_2/\lambda_1)^5 - 2.5 \log \exp(c_2/T \cdot (1/\lambda_2 - 1/\lambda_1)) - \\
 &\quad - 2.5 \log \frac{1 - \exp(-c_2/\lambda_2 T)}{1 - \exp(-c_2/\lambda_1 T)} = \\
 &= c'_{o,12} - 1.56/T \cdot (1/\lambda_2 - 1/\lambda_1) + f(T) \qquad (\lambda \text{ in } cm)
 \end{aligned}$$

in cui la funzione $f(T)$ è sempre prossima a zero, e lentamente variabile con T , secondo la seguente tabella:

$T(^{\circ}K)$	3.000	4.000	5.000	6.000	8.000	10.000	15.000	25.000
$f(T)$	0.000	+0.001	0.003	0.008	0.018	0.035	0.069	0.096

Per calcoli approssimati essa può essere trascurata, almeno per stelle non troppo calde, come segue direttamente dalla *approssimazione di Wien*, per cui

$$B(\lambda, T) \simeq \frac{c_1}{\lambda^5 e^{c_2/\lambda T}}$$

Il risultato importante è che l'indice di colore, in magnitudini, diminuisce con la temperatura (si tara l'indice di colore come nullo per stelle A0 di circa 10^4 gradi; sarà negativo per stelle più calde, e positivo per stelle più fredde).

Scrivendo allora

$$c_{12} = c'_{o,12} - 1.56/T \cdot (1/\lambda_2 - 1/\lambda_1) = c_{o,12} - 2.5 \log(I(\lambda_1)/I(\lambda_2))$$

vediamo che il parametro T è la temperatura del corpo nero che ha lo stesso rapporto $\frac{I(\lambda_1)}{I(\lambda_2)}$ della stella, cioè lo stesso *colore*: esso viene chiamato **temperatura di colore** T_C , e non necessariamente coincide con T_e . Anzi, non essendo la stella esattamente in equilibrio termico, T_C dipenderà dalla particolare scelta di (λ_1, λ_2) . Talvolta risulta più opportuno definire T_C con un procedimento di *best fit* di una estesa zona di continuo spettrale, ma allora è necessario fare ricorso alla spettrofotometria. La temperatura T_C dell'indice di colore è dunque scarsamente significativa.

ESERCIZIO :

per due stelle, assimilate a corpi neri, vale la relazione

$$\frac{L_1(\lambda_1)}{L_2(\lambda_2)} = \frac{R_1^2 F(\lambda_1)}{R_2^2 F(\lambda_2)} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 e^{c_2(1/\lambda_2 T_2 - 1/\lambda_1 T_1)}$$

segue che

$$M_1 - M_2 = a - 2.5 \log \frac{L_1}{L_2} = a - 5 \log \frac{R_1}{R_2} - 12.5 \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2.5 c_2 (1/\lambda_1 T_1 - 1/\lambda_2 T_2) \log e$$

In un primo caso, si abbia $T_1 = T_2$ ed $R_1 = R_2$, cioè la stessa stella (ciò vale almeno nel campo delle radiazioni visibili, altrimenti anche $R_1 \neq R_2$), ma $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$m_1 - m_2 = c_{12} = a - 12.5 \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{b}{T} (1/\lambda_1 - 1/\lambda_2) = -A_{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{B_{\lambda_1 \lambda_2}}{T}$$

che è proprio la definizione di indice di colore. Come vedremo in seguito nel sistema UBV si usa definire

$$B - V = -0.56 + 6900/T_c \quad (+f(T))$$

$$U - B = -1.62 + 8200/T_c \quad (+f(T))$$

In un secondo caso, si abbia invece $T_1 \neq T_2$ ed $R_1 \neq R_2$ con $\lambda_1 = \lambda_2$, cioè stelle diverse nella stessa banda fotometrica

$$M_1 - M_2 = -5 \log(R_1/R_2) + (c_3/\lambda) (1/T_1 - 1/T_2)$$

per esempio prendendo a riferimento il Sole ($M_2 = 4.8$, $R_2 = 1 R_\odot$, $T_2 = 5800^\circ K$)

$$M_1(\lambda_1) = M_\odot - 5 \log R + c_4(1/T - 1/T_\odot)$$

$$M_\lambda = c_\lambda - 5 \log R + \frac{D_\lambda}{T}$$

nota come la *formula di Russell*, che lega magnitudine assoluta, raggio e temperatura di ogni stella. Si ha per esempio, per la banda V e $\lambda \sim 5500 \text{ \AA}$,

$$M_V = \frac{29500}{T} - 5 \log R - 0.08$$

Riprendiamo adesso il discorso precedente, e quale prova empirica del grado di attendibilità dell'ipotesi fatta che le stelle irraggino come corpi neri, andiamo a confrontare i valori trovati per le temperature in base alle diverse definizioni date. Consideriamo i valori delle T_c di colore ricavate in un intervallo spettrale comprendente

lunghezze d'onda maggiori della discontinuità di Balmer, ed in un altro intervallo comprendente lunghezze d'onda minori. Poiché al limite della serie di Balmer, all'assorbimento discontinuo di righe subentra un assorbimento continuo dovuto alla ionizzazione degli atomi di idrogeno nello stato eccitato $n = 2$, avviene che l'atmosfera stellare è più assorbente per radiazioni di $\lambda < 3640 \text{ \AA}$ che per lunghezze d'onda maggiori. Di conseguenza la radiazione che ci giunge e che dà luogo allo spettro continuo, proviene per $\lambda < 3640 \text{ \AA}$ da strati in media meno profondi e quindi meno caldi. La discontinuità dipende dalla temperatura e dalla pressione (in dipendenza dalle equazioni di Saha e Boltzmann). Si ricavano quindi T_c diverse per la regione visibile e per la regione ultravioletta, la differenza essendo di alcuni 10^2 od alcuni $10^3 \text{ }^\circ K$, in funzione di T, P_e (in tabella T_c è ricavato da Barbier-Chalonge, T_e da Kuiper).

$T.Sp.$	$T_C(visibile)$	$T_C(UV)$	T_{eff}
$B 0$	28.000	20.000	28.600
$B 5$	18.000	15.000	15.000
$A 0$	16.500	10.500	10.700
$A 5$	11.000	9.500	8.550
$F 0$	8.600	8.300	7.500
$d G 0$	5.750	6.100	6.000 (stella nana)
$g G 0$	4.650	5.050	5.200 (stella gigante)

In conclusione si può affermare che le stelle non irradiano come corpi neri, ma nemmeno se ne discostano molto; per una prima conoscenza delle condizioni di una atmosfera stellare ed una interpretazione dei dati di osservazione questa ipotesi sarà del tutto ammissibile.

Riassumiamo infine le varie definizioni della temperatura.

- La T_{eff} è definita come la temperatura del corpo nero che irradia complessivamente lo stesso numero di (erg/sec) della stella, a pari superficie, secondo la $F_{bol} = \sigma T^4 = \int_0^\infty B(\lambda, T) d\lambda$;
- La T_C viene definita dalla $c_{12} = -A_{12} + B_{12}/T$ che è una funzione lineare di T , nell'approssimazione di Wien. Non occorre conoscere la superficie della sorgente. È la temperatura del corpo nero che ha la stessa distribuzione di energia nell'intervallo finito (λ_1, λ_2) . Si possono definire tante T_C quanti sono gli intervalli di lunghezza d'onda scelti.
- La *temperatura di gradiente* può essere definita in modo analogo: T_{grad} è la temperatura del corpo nero che ha lo stesso gradiente della stella alla λ data. $d B(\lambda, T)/ d\lambda = -a_\lambda + b_\lambda/T$ è una funzione univoca di T per ogni valore di λ . Anche qui si definisce una T_{grad} per ogni lunghezza d'onda.

- La *temperatura monocromatica*, si definisce come l'unico valore per cui vale $B(\lambda_0, T_m) = I(\lambda_0)$. Essa è la temperatura del corpo nero che emette la stessa energia della stella alla λ_0 scelta.

In particolare ponendo $d B(\lambda, T) / d \lambda = 0$, risulta definita quella T che per una data λ corrisponde alla massima emissione, o viceversa data una T si definisce quella λ che soddisfa; ritroviamo così *la legge dello spostamento di Wien*: $\lambda_{max} T = cost = 0.288 \text{ cm}^\circ K$. Naturalmente se λ_{max} coincide con $\langle \lambda \rangle$ o λ_{eff} del sistema usato, si lavorerà al massimo rendimento.

Appendice 1-A - Atmosfera terrestre e suo effetto sulle radiazioni inviateci dai corpi celesti

L'atmosfera terrestre assorbe completamente le radiazioni di lunghezza d'onda inferiore a 3000 Å, e a lunghezza d'onda superiore a 9000 Å, sebbene nell'infrarosso, fra una banda d'assorbimento e l'altra vi sia qualche spiraglio libero da assorbimento, come a 1.2, a 1.8, a 2.2 e a 3.5 micron. L'atmosfera diventa di nuovo trasparente alle radiazioni di qualche millimetro di lunghezza d'onda, e non lascia passare invece le radiazioni di una cinquantina di metri che vengono riflesse nello spazio esterno.

Oltre all'assorbimento totale di certe regioni dello spettro elettromagnetico, l'atmosfera attenua parzialmente tutte le radiazioni, mediante un meccanismo di diffusione (scattering Rayleigh) dipendente dalla lunghezza d'onda come λ^{-4}

L'aria ha un indice di rifrazione leggermente diverso da quello del vuoto, e dipendente sia dalla lunghezza d'onda della radiazione, che dall'altitudine e dalle condizioni atmosferiche. Nel passare da un mezzo meno denso ad uno più denso un raggio viene continuamente deviato.

L'eterogeneità dell'atmosfera (dovuta ai venti e alle ineguaglianze di temperatura e di umidità) causa delle fluttuazioni locali dell'indice di rifrazione, che hanno per effetto di deviare in direzioni diverse e continuamente variabili i raggi inviati da una stella al telescopio, provocando il fenomeno detto della scintillazione.

1) Cause che provocano l'assorbimento totale delle radiazioni di certe parti dello spettro elettromagnetico

L'Atmosfera è composta dalla troposfera, che si estende fino a un'altitudine di circa 10 km, dalla stratosfera, fino a circa 40 km, e dalla ionosfera che si estende almeno fino a 500 km o forse più, sfumando impercettibilmente nello spazio interplanetario.

Le molecole di O_2 , H_2O , CO_2 , CH , N_2O , sono le principali cause di assorbimento della radiazione infrarossa, assorbimento che ha luogo soprattutto nella troposfera.

L'assorbimento della radiazione ultravioletta è dovuto soprattutto allo strato di ozono (O_3) che si trova concentrato fra 20 e 30 km di altezza. L'intervallo compreso fra 3000 e 8000 Å, che è poco assorbito dall'atmosfera è chiamato *finestra ottica*.

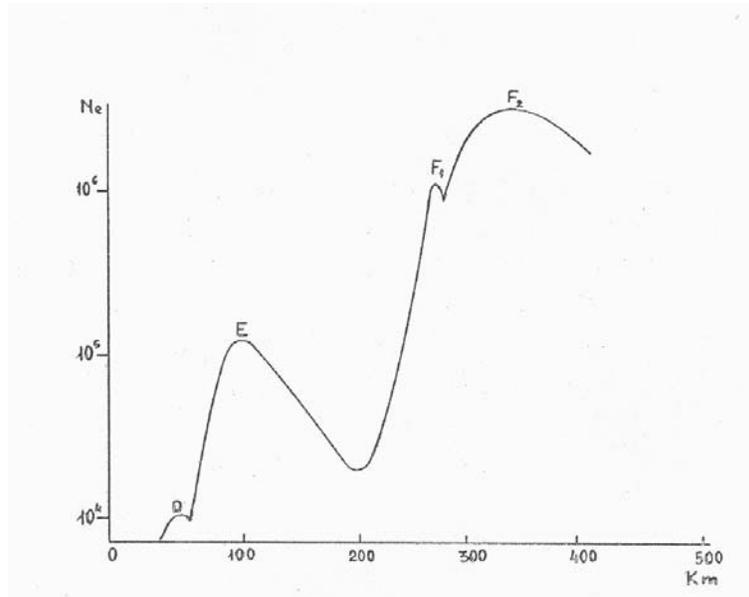


Figura 1.9: *Andamento della densità elettronica con l'altezza nella libera atmosfera. La posizione dei vari strati è indicata.*

La ionosfera è composta di gas parzialmente ionizzato dalla radiazione ultravioletta solare; la densità elettronica cresce da 10^4 elettroni per cm^3 nello strato D (fra 60 e 100 km) a 10^5 nello strato E (fra 100 e 200 km) a 10^6 nello strato F (al di sopra dei 200 km). La crescita di densità elettronica non avviene in modo continuo ma a salti, perché agiscono due fattori contrastanti (Figura 1.9): la densità del gas atmosferico decresce con l'altezza, ma il grado di ionizzazione del gas cresce perché diminuisce l'attenuazione della radiazione ultravioletta solare ionizzante. Poiché l'indice di rifrazione di un gas ionizzato per radiazione di frequenza f è dato da:

$$\mu = \sqrt{1 - (N_e e^2 / \pi m f^2)}$$

dove N_e è la densità elettronica, e ed m la carica e la massa dell'elettrone, si vede che per $f = \sqrt{N_e e^2 / \pi m}$, μ diventa uguale a zero. Tale valore di f è chiamato *frequenza critica*. Per valori di f più piccoli della frequenza critica μ diventa immaginario, il che significa che la radiazione di frequenza inferiore alla frequenza critica non può propagarsi nel mezzo e viene quindi riflessa totalmente. Le frequenze critiche degli strati ionosferici sono comprese fra 5 e 12 MHz (60 m e 25 m) per lo strato F, fra 3 e 4 MHz (100 e 75 m) per lo strato E e minori di 1 MHz (300 m) per lo strato D. Perciò le onde di lunghezza superiore a 60 m saranno riflesse totalmente dai più alti strati ionosferici e non potranno giungere ai nostri strumenti. L'intervallo di spettro elettromagnetico compreso fra qualche millimetro e una cinquantina di metri, che viene lasciato passare dall'atmosfera, è chiamato **finestra radioastronomica**.

Appendice 1-B - La magnitudine di apertura

Per la misura della magnitudine apparente delle stelle nelle varie bande di osservazione tramite detector CCD è necessario misurare la magnitudine strumentale dell'oggetto e determinare le costanti di calibrazione (relative alla particolare combinazione telescopio, filtri, rivelatore).

Per fare questo si utilizzano i *frames* relativi alle stelle dei campi standard e si misura la magnitudine strumentale delle stelle standard tramite fotometria di apertura.

Questa misura consiste nella somma dei conteggi all'interno di un'area circolare centrata sulla stella e di raggio generalmente pari a 3 volte la *Full Width Half Maximum* (FWHM), somma alla quale viene sottratto il valore relativo al *background* mediato su un'aureola concentrica al cerchio precedente. Per eseguire queste misure si utilizza, ad esempio, il *task* di IRAF *imexamine*. È evidente che tale procedimento garantisce buoni risultati solo per oggetti stellari isolati e posti su di un fondo uniforme mentre può risultare poco soddisfacente per oggetti sovrapposti ad un *background* poco uniforme, come nel caso di SNe sovrapposte a galassie. Tramite *imexamine* si misura la magnitudine di apertura delle stelle dei campi standard, di magnitudine nota. I dati relativi alle stelle standard sono tratti dal catalogo: "*UBVRI photometric standard stars in the magnitude range $11.5 < V < 16.0$ around the celestial equator*" di A. U. Landolt.

Prima di tutto si correggono le magnitudini misurate per tempo di posa (riportandole ad 1 secondo) ed estinzione atmosferica.

Se consideriamo

$$m = -2.5 \log_{10} I$$

dove m indica la magnitudine ed I è la somma dei conteggi, la magnitudine strumentale m' , corretta per tempo di posa e massa d'aria, è data da:

$$m' = m + 2.5 \log_{10}(t_{exp}) - K \cdot \text{airmass}$$

con K coefficiente di estinzione atmosferica. I coefficienti di estinzione atmosferica variano da sito a sito e col tempo, ad esempio per le osservazioni ESO si assumono validi i valori $K_U = 0.46$, $K_B = 0.27$, $K_V = 0.12$, $K_R = 0.09$, $K_I = 0.02$. Una volta corrette in questo modo le magnitudini per le stelle standard misurate in una certa banda, ad esempio la B, si costruisce un grafico con in ascissa l'indice di colore B-V e in ordinata b-B, cioè la differenza tra la magnitudine strumentale (corretta per tempo

di esposizione ed estinzione atmosferica) e la magnitudine vera, nota da catalogo. I punti relativi alle varie stelle si dispongono in prima approssimazione lungo una retta. La regressione lineare su questi punti sarà del tipo

$$m' - M = +a + b(B - V)$$

dove m' è la magnitudine strumentale corretta ed M indica la magnitudine vera della stella standard.

L'intercetta a e la pendenza b sono rispettivamente il *termine costante* e il *termine di colore* per passare dalle magnitudini strumentali a quelle standard. Mentre in prima approssimazione il termine di colore, per una data combinazione strumentale, rimane costante nel tempo, la costante dipende dalla trasparenza del cielo ed è quindi variabile da notte a notte. Operando analogamente per ogni altra banda e costruendo i relativi grafici (mag. misurata-mag. vera) su colore (B-V) si ottengono i termini correttivi per ogni banda. Attraverso i coefficienti così determinati possiamo calcolare la magnitudine vera di una qualsiasi sorgente a partire dalla magnitudine strumentale misurata.

In pratica, se consideriamo per esempio le magnitudini strumentali b e v , e quelle vere (non conosciute) B , V , tenendo conto delle relazioni $v - V = a_v + b_v(B - V)$, $b - B = a_b + b_b(B - V)$, dove a_x è il termine costante e b_x il termine di colore relativo alla banda x , si ha, sottraendo membro a membro

$$B - V = \frac{v - b - a_v + a_b}{b_v - b_b - 1}$$

Noti il termine costante, il termine di colore, b , v posso ricavare $B - V$ e quindi, riutilizzando la relazione:

$$b - B = a_0 + b_b(B - V)$$

si può calcolare la magnitudine vera B . Analogamente per le altre bande.

Capitolo 2

Sistemi fotometrici a larga banda e l'assorbimento interstellare

Scopo della fotometria multi-colore è la rappresentazione di certe peculiarità nella distribuzione di energia dei corpi celesti. Secondo Becker è necessario avere:

- a) una misura della discontinuità di Balmer (sono opportune due bande sul suo lato rosso non troppo vicine, ed una terza sul suo lato blu) ;
- b) una misura della depressione che caratterizza le stelle fredde alle brevi lunghezze d'onda (occorrono due bande oltre 4700 Å ove essa è ancora piccola, ed una spinta il più possibile nell'ultravioletto ove essa è massima) ;
- c) eccessi di colore per l'assorbimento interstellare, idealmente richiede posizioni delle bande tali che l'eccesso sia lo stesso per entrambi gli indici di colore. Se le bande sono larghe, nota che la λ_{eff} si sposterà al crescere dell'arrossamento interstellare, cioè si avranno diverse λ_{eff} per la stessa banda, con eccessi grandi o piccoli ;
- d) determinazione delle diverse popolazioni stellari e dei diversi contenuti chimici (occorre una magnitudine in UV, mentre non è ben chiaro per le altre).

Bande strette sarebbero preferibili sotto molti aspetti, ma si usano maggiormente sistemi a banda larga, che non limitano le possibilità osservative anche sulle stelle più deboli. Si fa un compromesso tra maggiore efficienza e possibilità tecniche.

2.1 Il sistema UBV

Il sistema fotometrico UBV è un sistema a tre-colori con banda larga, che fu stabilito fotoelettricamente da *Johnson e Morgan* (1953), usando un fotomoltiplicatore *blue-sensitive* di tipo 1P21 della RCA. Il catodo (Cs-Pb) ha risposta estesa dal violetto al verde, mentre non è sensibile al rosso, ed ha una sensibilità di circa $20\mu A/lumen$.

Il fotomoltiplicatore ha 9 stadi elettrostatici o *dinodi*, e guadagno di circa 2×10^6 con tensione di 100 V tra dinodo e dinodo, la massima corrente sopportabile senza deterioramento è circa 10^{-4} Amp. Le tre bande spettrali furono isolate con la seguente combinazione di filtri (che determinano soprattutto il taglio sul lato "blu"):

- U Corning 9863, 2mm (o Schott UG 2)
- B Corning 5030, 2mm + Schott GG 13 (o Schott BG 12, 1mm+ GG 13, 2mm)
- V Corning 3384, (o Schott GG 11 o GG 14)

e sfruttando il taglio "rosso" del catodo; a rigore il telescopio deve avere due specchi alluminati, ed un'altitudine di almeno 1600 m s.l.m.

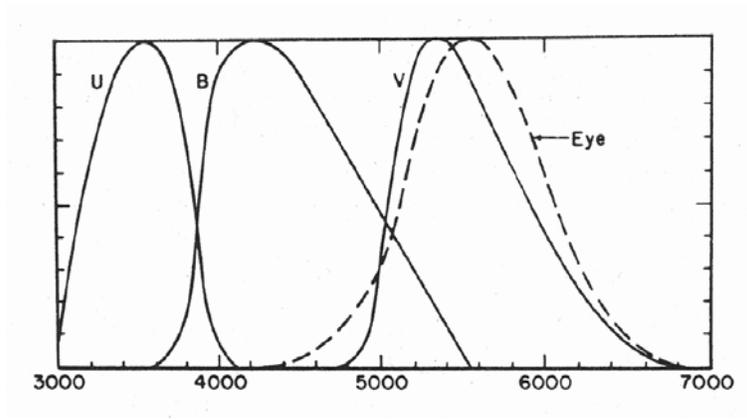


Figura 2.1: Confronto tra le curve di risposta del sistema UBV e quella dell'occhio.

I parametri caratteristici prima definiti valgono in questo sistema (Figura 2.1) :

	$\Delta\lambda$ a $T \simeq 10\%T_{max}$	λ_{max}	$\langle \lambda \rangle$	λ_{eff}
U	3100 – 4000 ($\Delta\lambda_{1/2} \sim 600\text{\AA}$)	3670	3680	3550 per $T = 2.5 \times 10^4 \text{ }^\circ K$ 3650 per $T = 1.0 \times 10^4 \text{ }^\circ K$ 3800 per $T = 4.0 \times 10^3 \text{ }^\circ K$
B	3750 – 5350 ($\Delta\lambda_{1/2} \sim 1000\text{\AA}$)	4295	4450	4330 4400 4500
V	4950-6350 ($\Delta\lambda_{1/2} \sim 850\text{\AA}$)	5450	5460	5470 5480 5510

Si nota che le bande U, V, più simmetriche hanno $\lambda_{max} \sim \langle \lambda \rangle$, mentre la B ha $\lambda_{max} \ll \langle \lambda \rangle$. La λ_{eff} varia più sensibilmente con la temperatura stellare in U, che in B, ed in questo più che in V. Vi è tuttavia in letteratura una certa ambiguità sui valori *veri* dell'originaria funzione $T(\lambda)$. Il punto zero degli indici di colore fu posto dalla media non pesata di sei stelle di tipo spettrale A0 V (e cioè αLyr , γLyr , $109 Vir$, αCrB , γOph , $BS 3314$).

Ricordiamo che in precedenza si era diffuso il **Sistema Fotografico Internazionale**, con una banda gialla, m_{pv} fotovisuale, che riproduce la risposta dell'occhio ed una blu, m_{pg} fotografica, come la risposta delle prime lastre fotografiche. Una curiosità: la prima stella ad essere fotografata fu *Vega* il 16/17 luglio 1850 con il rifrattore di 40 cm dell'Osservatorio di Harvard, fu necessaria una posa di $1^m 40^s$. Il B non è proprio come m_{pg} , mentre il V non ha termini di colore rispetto al m_{pv} ; il punto zero era aggiustato sulla Sequenza Polare, e l'indice di colore azzerato per le stelle A0. Nel nuovo sistema UBV è aggiunta di nuovo la banda U, per misurare la discontinuità di Balmer, e pure il colore (U-B) è azzerato alle stelle A0.

La *calibrazione assoluta* del flusso corrispondente alla magnitudine $V = 0$ è ancora un po' incerta, verrà comunque qui assunta uguale a

$$V = 0 \quad I_0 = 3.7 \times 10^{-9} \text{ erg/cm}^2 \text{ sec } \text{\AA} (\pm 9\%)$$

e così $U = 0$ corrisponde a 4.4×10^{-9} e $B = 0$ a 7.2×10^{-9} , nelle stesse unità (ridotte a fuori dell'atmosfera). Si vede che una stella A0 V non ha la stessa distribuzione d'energia di un corpo nero di circa $10^4 \text{ }^\circ K$ per le ragioni che discuteremo in seguito. Quindi i flussi per magnitudini U, B, V diverse da zero saranno date da:

$$\begin{aligned} I_0(V) &= I_0(V = 0) \times 10^{-0.4 V} = 10^{-0.4(V+21.08)} && \text{erg/cm}^2 \text{ sec } \text{\AA} \\ I_0(B) &= I_0(B = 0) \times 10^{-0.4 B} = 10^{-0.4(V+20.36)} && \text{"} \\ I_0(U) &= I_0(U = 0) \times 10^{-0.4 U} = 10^{-0.4(V+20.90)} && \text{"} \end{aligned}$$

Resta chiaro inoltre che indice di colore uguale a zero vuol dire magnitudini uguali nelle due bande, ma non uguale contributo energetico, proprio per la definizione dei diversi valori adottati per il punto zero nelle diverse bande (infatti gli indici di colore sono nulli per stelle di tipo A0, ma non per uno spettro *piatto*).

È utile richiamare anche il flusso di fotoni ricordando che un fotone ha energia

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 1.986 \times 10^{-8} / \lambda \text{ \AA} \quad \text{erg}$$

Quindi

$$n(V) = 1080 \times 10^{-0.4V}, \quad n(B) = 1600 \times 10^{-0.4B}, \quad n(U) = 810 \times 10^{-0.4U}, \quad \text{in fotoni/cm}^2 \text{ sec } \text{\AA}$$

Poiché al suolo arrivano circa l'80% dei fotoni V, il 70% di quelli B, il 55% di quelli U (rispetto allo Zenith) e se si usa un telescopio di diametro $2R \text{ cm}$, con configurazione Cassegrain, in cui il secondario occulta la frazione ϵ del primario, il flusso raccolto varrà

$$N_{fot/sec}(V) = \pi R^2 (1 - \epsilon) \mathbf{R}^2(\lambda_V) A(\lambda_V) K(\lambda_V) Q(\lambda_V) \Delta\lambda_V 1080 \times 10^{-0.4V}$$

ove \mathbf{R} indica al solito la riflettività degli specchi.

Usando come tipici valori:

$$A(\lambda_V) = 0.80, \epsilon = 0.1, \mathbf{R}(\lambda_V) = 0.9, Q(\lambda_V) = 0.10, \Delta\lambda_V = 1000 \text{ e } K(\lambda_V) = 1$$

si ottiene per una stella di $V = 0$ ed $R = 100 \text{ cm}$

$$N_{fot/sec} \simeq 2 \times 10^9 \quad (n_{fot/sec} \simeq 2 \times 10^6 / \text{\AA})$$

Il rumore minimo di questa misura è posto dalla statistica di Poisson sul tempo di arrivo dei fotoni, ed è la \sqrt{N} ; il rapporto *segnale-rumore* più favorevole è dunque, dopo un tempo di integrazione t :

$$\frac{S}{R} \lesssim \frac{N\Delta t}{\sqrt{N\Delta t}} = \sqrt{N}\sqrt{\Delta t}$$

Nell'esempio precedente,

$$\frac{S}{R} \quad (V = 0 \quad R = 1, \quad t = 1 \text{ sec}) \lesssim 4 \times 10^4$$

$$\frac{S}{R} \quad (V = 10 \quad R = 1, \quad t = 1 \text{ sec}) \lesssim 4 \times 10^2$$

$$\frac{S}{R} \quad (V = 20 \quad R = 1, \quad t = 1 \text{ sec}) \lesssim 4$$

Tuttavia, quando la stella diventa più debole diciamo della 15^m , vi sono altre sorgenti di rumore. Una inevitabile è il fondo del cielo; supponiamo ad esempio che il fotometro ammetta la luce stellare attraverso un diaframma circolare di diametro 20 arc sec , cioè di area $314(\text{arc sec}^2)$; la corrispondente magnitudine è circa:

$$m_c \sim 22.0 - 2.5 \log 314 = 15.8$$

ove 22.0 è la brillantezza superficiale del cielo espressa in $mag/arcsec^2$ corrispondenti al flusso in fotoni

$$N_{fot,c} \sim 957/sec \quad \text{mentre} \quad N_{fot} (V = 15) \sim 2000/sec$$

$$\frac{S}{R} = \frac{\sqrt{\Delta t} 2000}{\sqrt{2957}} \sim 37 \sqrt{\Delta t} \quad \text{contro un} \left(\frac{S}{R}\right)_{ideale} = 45 \sqrt{\Delta t}$$

che è una degradazione ancora accettabile. Invece per $V = 20$, avremo

$$\frac{S}{R} = \frac{\sqrt{\Delta t} 20}{\sqrt{977}} \sim 0.64 \sqrt{\Delta t} \quad \left(\frac{S}{R}\right)_{ideale} = 4 \sqrt{\Delta t}$$

cioè adesso l'effetto è disastroso, e per ottenere $(S/R) = 3$, valore minimo accettabile per la rivelazione, dovremmo usare una costante di tempo di 22 secondi. Converrà anche ridurre l'area del diaframma (e raffreddare il fotomoltiplicatore). Altre cause di rumore (termico. di lettura) si presentano utilizzando come rivelatore un CCD.

Comunque le larghe bande passanti del sistema UBV consentono, come detto, di raggiungere magnitudini abbastanza deboli. Per di più il sistema può essere riprodotto, con sufficiente approssimazione, anche per via fotografica, usando :

U lastra Eastman – Kodak 103a – 0 con filtro Schott UG 2 , 2mm
B lastra Eastman – Kodak 103a – 0 con filtro Schott GG 13, 2mm
V lastra Eastman – Kodak 103a – D con filtro Schott GG 14, 2mm

in modo da ottenere nella stessa posa i valori per molte stelle, il che è assai importante ad esempio nello studio degli ammassi stellari.

Considerando adesso gli *indici di colore*: dalla calibrazione assoluta si ha

$$U - B = c_0 - 2.5 \log \frac{I_U}{I_B} = 0.0$$

$$\text{se } (I_U/I_B) = 4.4/7.2 \quad , \quad \text{da cui} \quad c_{o,UB} = -0.53$$

ed analogamente $c_{o,BV} = 0.72$ che sarebbero i colori di un ipotetico oggetto a spettro *piatto* (cioè con $I_U = I_B = I_V$).

Avremmo allora per il corpo nero di temperatura T :

$$(U - B)_T = -0.53 - 2.5 \log(\lambda_2/\lambda_1)_T^5 - 2.5 \log \exp \left[\frac{c_2}{T} (1/\lambda_2 - 1/\lambda_1) \right] + f(T)$$

$$(U - B)_{2.5 \times 10^4} = -0.53 - 2.5 \log(4330/3550)^5 - \frac{15.6}{2.5(1/4.33 - 1/3.55)} + 0.1 = -1.23$$

$$(U - B)_{1 \times 10^4} = -0.53 - 2.5 \log(4000/3650)^5 - 15.6 (1/4.4 - 1/3.65) + 0.04 = -0.78$$

e così via, anche per il colore (B-V). Si noterà in particolare che i colori di un corpo nero a $T = 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ sono profondamente diversi da quelli di una stella A0 V, che pure ha una $T \sim 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ a giudicare dalle righe di assorbimento. Il risultato complessivo è mostrato in Figura 2.2. La curva del corpo nero si rappresenta con una relazione del tipo $A(B - V) + B(U - B) + C = 0$ (ottenuta dalle espressioni degli indici di colore del tipo $-a + b/T$, eliminando la temperatura). Peraltro si tenga presente che i colori del corpo nero differiscono lievemente da autore ad autore, per la ricordata incertezza sulla vera $T(\lambda)$ del sistema UBV.

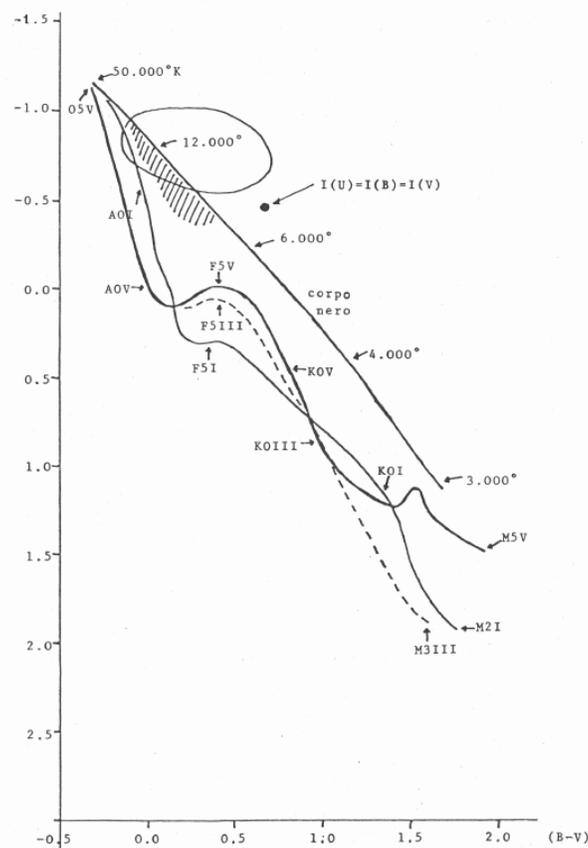


Figura 2.2: Diagramma a due colori. Sono indicate le posizioni di stelle di diverso tipo spettrale e classe di luminosità. È mostrata pure la curva dei colori del corpo nero. Tratteggiata è la zona delle nane bianche e l'ovale indica quella del QSO.

Confrontiamo adesso il luogo del corpo nero con l'insieme delle osservazioni UBV; la Figura 2.2 mostra la calibrazione standard del sistema di tipi spettrali di Morgan e Keenan (MK). Nei dati originali usati per costruire il diagramma mancano le giganti (stelle di classe di luminosità III) precedenti G0, che pure sono presenti nel cielo (ad

esempio $\gamma Ori B2III$, $\gamma Lyr B9III$, $\alpha 0ph A4III$, $\xi Leo F0III$), e mancano del tutto stelle di classe di luminosità IV. Si ricorda che anche le classi di luminosità VI e VII (dette sub-nane e nane bianche) non appartengono all'originario schema MK. Dalla figura è evidente che la conoscenza, anche precisa, degli indici (U-B, B-V) in generale non è sufficiente per classificare propriamente una stella; basta poi un modesto arrossamento dovuto alla materia interstellare per falsare completamente il giudizio. Il motivo fisico di questa scadente discriminazione delle classi di luminosità da parte del sistema UBV può essere attribuita al fatto che i colori del corpo nero non dipendono dal suo raggio, ma solo dalla temperatura. L'effetto del raggio (o meglio della gravità superficiale) sugli indici di colore a banda larga sarà dunque del secondo ordine; diversamente andranno le cose su particolari sistemi a banda stretta di cui parleremo più avanti.

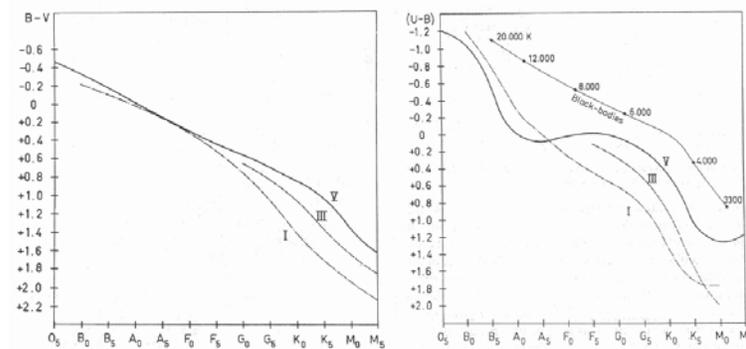


Figura 2.3: Gli indici di colore del sistema UBV in funzione del tipo spettrale.

La Figura 2.3 mostra gli indici di colore in funzione del $T.Sp.$. La Figura 2.4 poi mostra la distribuzione di tutte le osservazioni UBV disponibili in letteratura: la Sequenza Principale è definita molto bene, così come il ramo delle supergiganti F-G. Anche l'involuppo superiore del corpo nero è ben visibile, soprattutto nella parte alta del diagramma. Il diagramma però è popolato anche nelle regioni intermedie e non mancano anche oggetti sulla destra del corpo nero. Alcune stelle in queste posizioni un po' peculiari possono essere d'altra parte dei *sistemi multipli* non risolti; infatti la luce integrata di un insieme di N stelle di vario $T.Sp.$ sarà

$$I(\lambda) = \sum_{T.Sp.} n(T.Sp.) I_{T.SP.}(\lambda) \quad ; \quad N = \sum_{T.Sp.} n(T.Sp.)$$

la funzione $n(T.Sp.)$ è la cosiddetta *funzione di luminosità del sistema*

Per avere un'idea di quanto si verifica in sistemi molto più complessi, consideriamo la Figura 2.5 che dà i colori integrati delle galassie della sequenza di Hubble; l'effetto della funzione di luminosità è evidente e si noterà che le galassie normali non hanno $T.Sp.$ precedenti G0. Una questione molto dibattuta è la possibilità di risalire dai colori integrati alla funzione di luminosità, ad esempio alla percentuale di giganti rispetto alle nane; da quanto detto sinora si deve concludere che i colori UBV da soli non daranno risposte sicure, e che è preferibile avere informazioni aggiuntive quali quelle spettroscopiche.

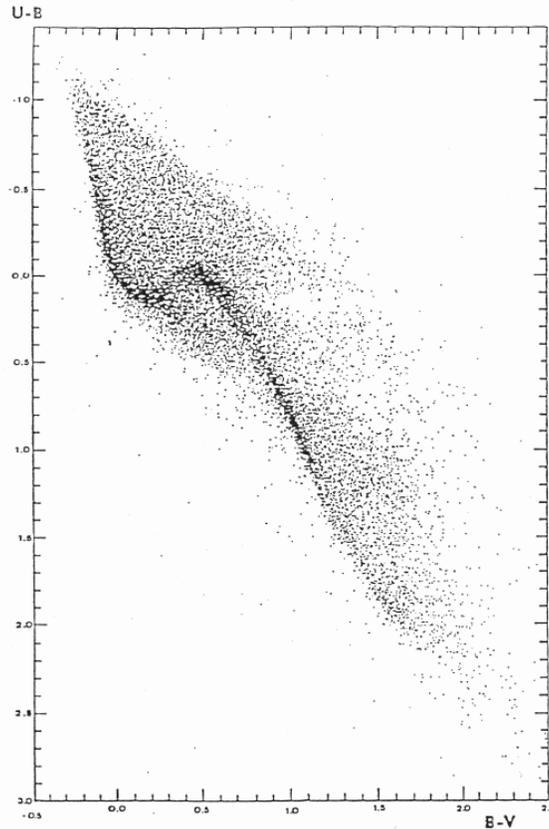


Figura 2.4: *Distribuzione, nel diagramma a due colori, di tutte le osservazioni disponibili.*

Altri oggetti in posizione peculiare possono avere uno spettro non termico, cioè con una notevole frazione di luce proveniente non da stelle. Un esempio sono gli Oggetti Quasi Stellari (QSO), la cui emissione è dovuta ad irraggiamento di sincrotrone. Oppure la gran parte della luce può essere concentrata in righe e bande di emissione (come per le Nebulose Planetarie, stelle di Wolf Rayet, etc.). Ed infine le Nane Bianche sono la miglior approssimazione al corpo nero, grazie all'altissima gravità superficiale che riduce l'effetto dell'atmosfera (che non è in equilibrio termico) sui colori.

2.2 L'assorbimento interstellare

Ma nel diagramma di Figura 2.4 agisce anche un meccanismo che non è intrinseco agli oggetti, ma è dovuto alla presenza del mezzo interstellare. In generale la radiazione di una stella, dopo aver attraversato una quantità M di materia interstellare, verrà attenuata secondo $E_\lambda = E_{\lambda,0} e^{-A_\lambda M}$. Consideriamo la *curva dell'assorbimento interstellare* A_λ , come determinata da Whitford (Figura 2.6).

Intanto vale la relazione tra colore osservato, colore intrinseco ed *eccesso di colore*

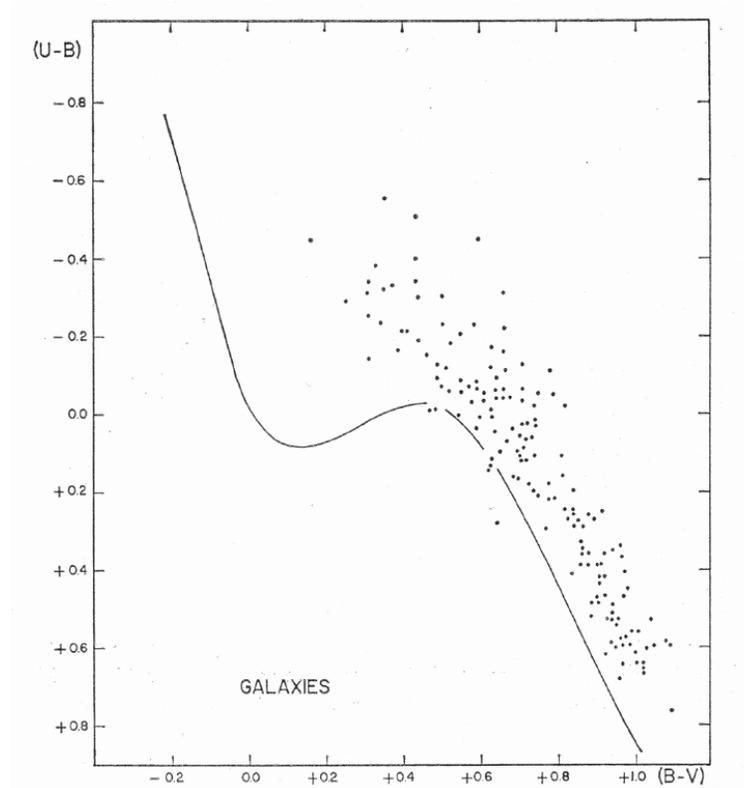


Figura 2.5: Posizione delle galassie nel diagramma a due colori. Le spirali avanzate e le irregolari presentano i colori più blu, le ellittiche i colori più rossi, riflesso della diversa popolazione stellare in questi sistemi.

$$A(\lambda_1) - A(\lambda_2) = E(\lambda_1, \lambda_2) \quad m_1 - m_2 = (m_1 - m_2)_0 + A(\lambda_1) - A(\lambda_2) = (m_1 - m_2)_0 + E(\lambda_1, \lambda_2)$$

e si definisce il rapporto R tra assorbimento totale e selettivo

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{A(\lambda_1)}{E(\lambda_1, \lambda_2)} = \frac{A(\lambda_1)}{A(\lambda_1) - A(\lambda_2)}$$

che è costante una volta fissate le lunghezze d'onda λ_1 ed λ_2 : se R è noto dalla curva di reddening si ottiene A ad un λ fissata dalla misura dell'eccesso di colore. Ora la curva di Whitford può essere rappresentata da una legge del tipo

$$A(\lambda) = \lambda^{-\alpha(\lambda)} \quad , \quad \text{ove vale}$$

$$\alpha(\lambda) = 0.9 \quad \text{nel visuale e nel rosso (tra } 1/\lambda = 0.80 \div 2.3)$$

$$\alpha(\lambda) = 0.4 \quad \text{nel violetto e nell'infrarosso}$$

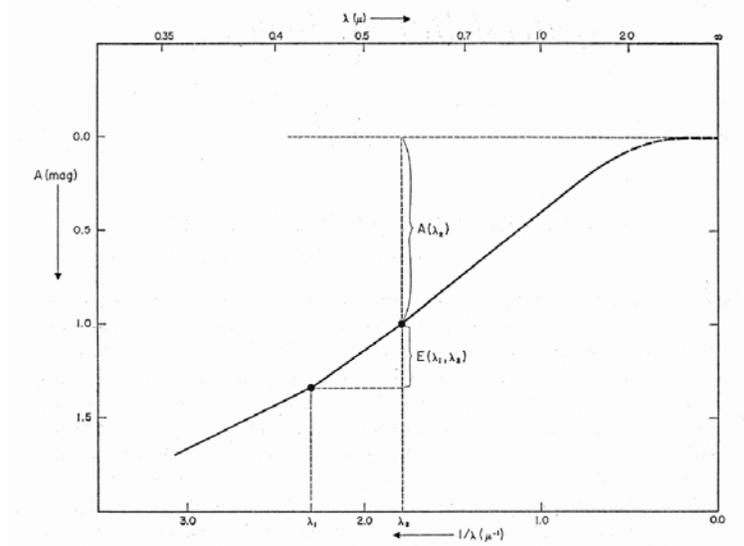


Figura 2.6: Curva di reddening schematica. Sono indicati l'assorbimento totale e l'eccesso di colore.

Se fosse rigorosamente $A(\lambda) = 1/\lambda$, allora per il corpo nero sarebbe impossibile discriminare l'assorbimento dalla variazione di temperatura mediante i solo indici di colore. Avendosi infatti

$$I.C. = C_0 + (1.56/T)(1/\lambda_1 - 1/\lambda_2)$$

la stella si muoverebbe sempre lungo la curva del corpo nero. In effetti la $A(\lambda)$ cambia pendenza verso i 4700 \AA ed è allora possibile usare tre filtri di cui uno con $\lambda < 4700 \text{ \AA}$ per separare i due fenomeni. Le prime considerazioni su questo punto sono dovute a Becker (1938) che realizzò un suo sistema, solo fotografico, a banda larga detto RGU e che vedremo fra poco.

Si noterà comunque che per un qualunque sistema fotometrico tra i 4500 e i 10000 \AA gli indici di colore (e più in generale la temperatura di colore) non riescono ad accorgersi dell'arrossamento interstellare, e quindi per giudicare correttamente la temperatura stellare si deve conoscere A_V per altra via. Per quanto riguarda la curva $A(\lambda)$, essa fu ottenuta con il sistema di sei-colori a larga banda, definito da Stebbins e Whitford, di cui non parleremo più oltre ma che ha avuto una grande importanza negli anni '50. Il sistema a sei-colori detto UVBGR1 copre un largo intervallo di lunghezze d'onda, ed i parametri caratteristici sono così definiti:

	λ_0	$\Delta\lambda_{1/2}$
<i>U</i>	3550 Å	500 Å
<i>V</i>	4200	800
<i>B</i>	4900	800
<i>G</i>	5700	800
<i>R</i>	7200	1800
<i>I</i>	10300	1800

Vediamo ora gli effetti dell'assorbimento interstellare sul sistema UB V . Siano $(U - B)_0$ e $(B - V)_0$ gli indici di colore intrinseci, ed invece $(U - B)$ e $(B - V)$ quelli osservati. Allora sono definiti **eccessi di colore** le due quantità :

$$E(U - B) = (U - B) - (U - B)_0 \quad E(B - V) = (B - V) - (B - V)_0$$

Esse in generale sono incognite, ma possono essere determinate dalla conoscenza del tipo spettrale e dalla calibrazione $(U - B)_{T.Sp.}$, $(V - B)_{T.Sp.}$ che è mostrata nella Figura 2.3. Le osservazioni inoltre dimostrano che in qualunque direzione si guardi entro la Galassia (a parte alcune regioni peculiari) vale la relazione :

$$E(U - B) = \frac{E(U - B)}{E(B - V)} \cdot E(B - V) \quad ; \quad \text{con} \quad \frac{E(U - B)}{E(B - V)} = 0.72 + 0.05 E(B - V)$$

cioè

$$E(U - B) = 0.72 E(B - V) + 0.05 E^2(B - V)$$

Lasciamo cadere per semplicità l'ultimo termine non lineare, che è comunque trascurabile per arrossamenti non troppo grandi, ed abbiamo

$$(U - B) - (U - B)_0 = 0.72[(B - V) - (B - V)_0]$$

da cui la quantità

$$Q = (U - B) - 0.72 (B - V) = (U - B)_0 - 0.72 (B - V)_0$$

è **indipendente dall'arrossamento**, ed è una funzione solo del tipo spettrale. Purtroppo la dipendenza $Q(T.Sp.)$ non è univoca; essa è però molto utile se si hanno ragioni di ritenere che le stelle in esame siano dell'alta sequenza principale, diciamo con $T.Sp.$ precedente A0V. Per queste stelle vale la

$$(B - V)_0 = +0.332Q$$

e quindi

$$E(B - V) = (B - V) - 0.332Q$$

relazione che permette di risalire immediatamente all'eccesso di colore.

Il parametro osservato Q fissa in questo caso univocamente $T.Sp.$, ed anche l'assorbimento totale in quella direzione fino alla distanza della stella. Infatti, di nuovo a meno di qualche direzione peculiare come in Orione, si ha anche che il rapporto tra assorbimento visuale A_V ed eccesso di colore è costante e vale all'incirca

$$R_V = \frac{A_V}{E(B - V)} \sim 3$$

Utilizzando ora le due relazioni $E(B - V) \sim A_V/3$ ed $E(U - B) \simeq 0.72 E(B - V)$ si otterrà anche, una volta stabilito A_V , che

$$A_B = E(B - V) + A_V = \frac{A_V}{3} + A_V = \frac{4}{3}A_V$$

$$A_U = E(U - B) + A_B = 0.72E(B - V) + A_B = \frac{0.72}{3}A_V + \frac{4}{3}A_V = \frac{4.72}{3}A_V = \frac{4.72}{4}A_B$$

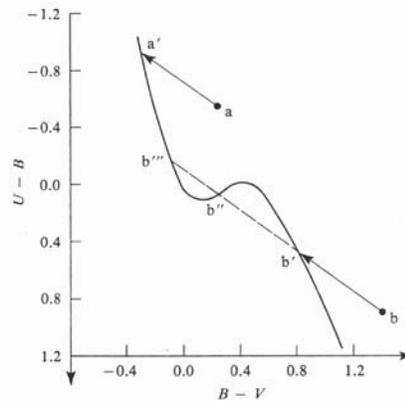


Figura 2.7: Rette di reddening nel diagramma a due colori. Sono indicati i casi di due stelle arrossate: solo la stella a si può de-arrossare in maniera univoca. Per la stella b esistono tre soluzioni e solo lo spettro può dare quella giusta a meno che le due stelle non facciano parte dello stesso ammasso stellare, nel qual caso, come in Figura, anche la sola fotometria può indicare la soluzione giusta: b'.

Nota pure che $E(U - B)$ è numericamente più piccolo di $E(B - V)$; soprattutto perché le bande U e B sono più vicine in λ . Come risultato, una stella arrossata si muoverà nel piano (U-B, B-V) verso il basso ed a destra seguendo una retta di pendenza 0.72, detta *retta di reddening*, come mostrato per due stelle in Fig. 2.7 di tanto quanto imposto dall'assorbimento totale (e si possono ottenere gli eccessi di colore di un ammasso, per doppia traslazione). Si noterà anche che, con l'aumentare di A si ha un importante effetto su λ_{eff} confrontabile con quello dovuto al $T.Sp.$: questo è il senso del piccolo termine correttivo, ed a rigore anche il coefficiente 0.72 dovrebbe dipendere dal $T.Sp.$.

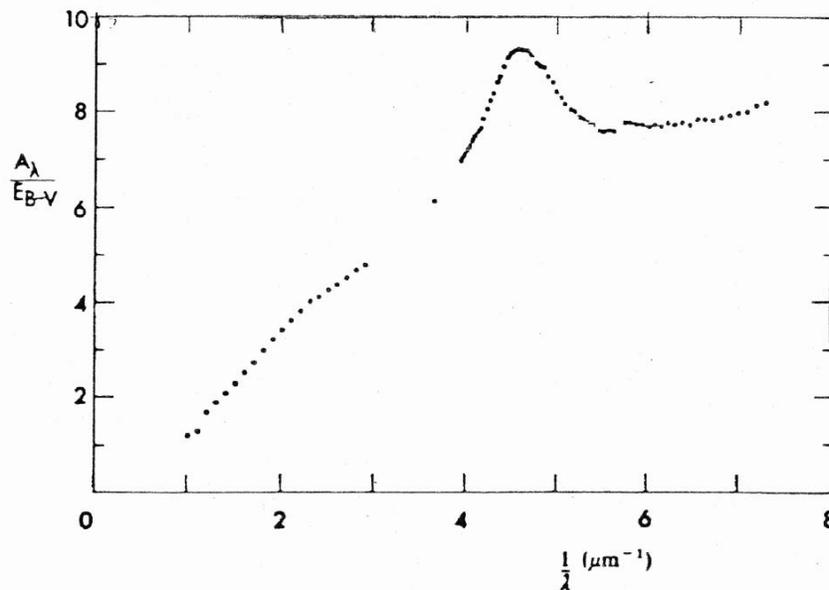


Figura 2.8: *Curva di estinzione interstellare estesa alla regione ultravioletta. È evidente il massimo attorno a 2200 Å di cui sono responsabili grani di grafite.*

Nella Figura 2.8 è mostrata la curva di estinzione interstellare media (Nandy et al., 1975) estesa alla regione spettrale ultravioletta. Essa è stata ottenuta con le osservazioni di un centinaio di stelle arrossate dei primi tipi spettrali e di altrettante stelle di confronto, fatte in diverse direzioni nella Galassia. Una tipica struttura è un massimo ben pronunciato attorno a 2200 Å, ben correlato con l'eccesso di colore visuale. Esso è causato da assorbimento (mentre il resto della curva, a minori e maggiori λ , è dovuto a *scattering*) e va trattato come un componente separato e sovrapposto. Si può risalire dalla forma della curva A_λ ai componenti del mezzo interstellare che la causano: per la banda 2200 Å è favorita la grafite (particelle piccole di raggio 0.01 – 0.02 μm), per il resto i silicati.

2.3 Anomalie nella legge di assorbimento interstellare

Il rapporto R tra l'assorbimento totale, solitamente A , e quello selettivo $E(B-V)$ viene determinato sfruttando il metodo detto della *variable extinction*. Se abbiamo un certo numero di stelle alla stessa distanza, per esempio stelle appartenenti ad un ammasso, ed isoliamo quelle dello stesso tipo spettrale e quindi stessa magnitudine assoluta, la magnitudine apparente osservata per queste stelle dipenderà solo dalla distanza e dall'eventuale presenza di assorbimento. Se l'assorbimento per queste stelle è variabile, come si riscontra in ammassi giovani e ricchi di polveri, avremo per ogni stella, che la sua magnitudine apparente è data da:

$$m = M + 5 \log d - 5 + A = M + 5 \log d - 5 + R E(B - V)$$

Poiché per queste stelle M e d sono le stesse, la pendenza della relazione tra la magnitudine apparente e l'eccesso di colore determina il valore di R .

Se il valore di R risultasse costante in qualunque direzione se ne dedurrebbe che le caratteristiche assorbenti della materia interstellare sarebbero le stesse in ogni parte della Galassia. Le osservazioni mostrano invece una variazione di R con la longitudine galattica come in Figura 2.9. Il valore più alto, circa 6, si misura in direzione di Orione, segno che in quelle zone la materia interstellare assorbe la radiazione in maniera diversa che non la norma che implicherebbe un valore di $R = 3.1$. Questa differenza di estinzione viene spiegata con differenti dimensioni dei grani di polvere. In particolare, in Orione, zona ricca di stelle O-B calde, la loro intensa radiazione distrugge i grani di polvere, che agiscono come diffusori della luce, ne altera la distribuzione in dimensioni facendo sopravvivere solo i più grossi, i più efficaci nella diffusione e quindi ne risulta una minore pendenza della curva di estinzione in quella regione e di conseguenza un maggior valore di R .

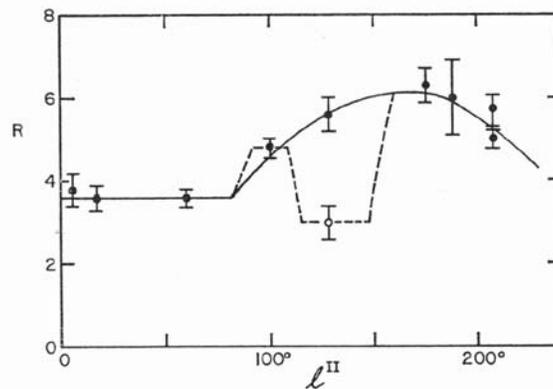


Figura 2.9: *Variazione del rapporto $R = A_V / E(B - V)$ in funzione della longitudine galattica.*

2.4 Il sistema RGU

Il sistema a tre-colori RGU fu introdotto da Becker ancor prima del sistema UBV (1946). Esso è stato usato fotograficamente ed applicato soprattutto alle ricerche di statistica stellare e di studi di ammassi. Esso era inteso a realizzare quelle condizioni esposte all'inizio di questo capitolo (per es. misurare il salto di Balmer, la depressione alle brevi lunghezze d'onda, etc.) e doveva, inizialmente, avere le sue bande localizzate in tal modo che i due eccessi di colore risultassero uguali.

Le bande passanti del sistema sono bande larghe, e sono state così definite:

U lastra 103a-0 (originariamente Agfa Astro) e filtro Schott UG 2 , 2mm

G lastra 103a-0 (originariamente Agfa Astro) e filtro Schott GG 5 , 2mm

R lastra 103a-E (originariamente Agfa Isopan) e filtro Schott RG 1 , 2mm

Parametri caratteristici del sistema sono:

$$\begin{array}{llll}
 U & \Delta\lambda_{1/2} = 530 \text{ \AA} & \langle \lambda \rangle = 3690 \text{ \AA} & \lambda_{eff}(T = 10^4 \text{ }^\circ K) = 3730 \text{ \AA} \\
 G & \Delta\lambda_{1/2} = 495 \text{ \AA} & \langle \lambda \rangle = 4630 \text{ \AA} & \lambda_{eff}(T = 10^4 \text{ }^\circ K) = 4810 \text{ \AA} \\
 R & \Delta\lambda_{1/2} = 430 \text{ \AA} & \langle \lambda \rangle = 6380 \text{ \AA} & \lambda_{eff}(T = 10^4 \text{ }^\circ K) = 6380 \text{ \AA}
 \end{array}$$

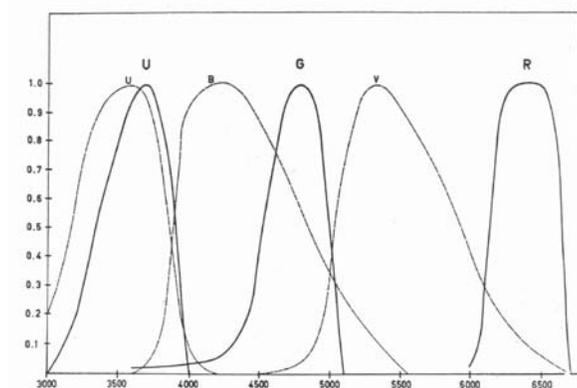


Figura 2.10: Confronto fra le bande dei sistemi UBV ed RGU.

Le curve di risposta dei sistemi RGU ed UBV sono mostrate a confronto nella Figura 2.10. Appare che il filtro *G* evita la regione spettrale 4000-4500 Å perché essa contiene sempre molte righe e bande di assorbimento. Pertanto l'indice di colore (G-R) risulterà molto meno sensibile di quello (B-V) ad effetti di righe spettrali, cancellando gli effetti di composizione chimica. Il sistema RGU offre anche una migliore separazione delle stelle giganti fredde da quelle nane, rispetto al sistema UBV (vedi Figura 2.11): l'indice di colore (U-G) appare essere più sensibile di quello (U-B) alle differenze di distribuzione d'energia tra nane e giganti. Ciò avviene perché il filtro *G* copre molto meno del *B* la regione di $\lambda < 4800 \text{ \AA}$ dove si accumulano gli effetti prodotti dalla differenza di

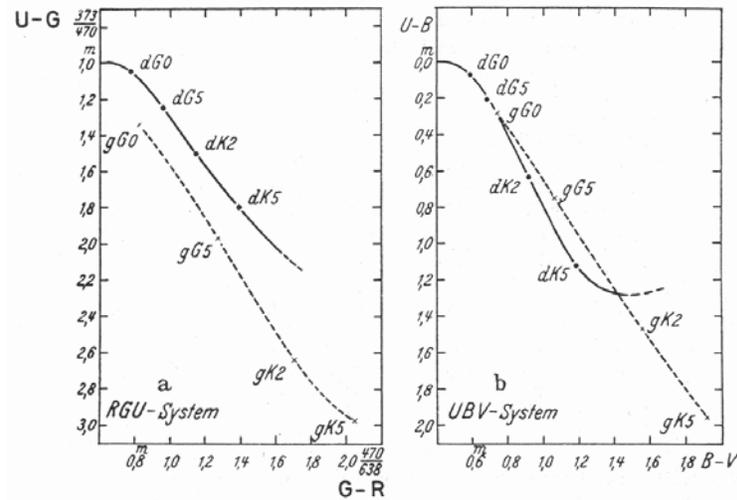


Figura 2.11: Confronto tra i sistemi UBV ed RGU come capacità di separare le stelle nane da quelle giganti.

luminosità (essi risultano chiaramente dal filtro U). Il filtro R è localizzato molto più sul rosso del filtro V.

Anche nel sistema RGU possiamo definire la grandezza

$$Q_{RGU} = (U - G) - 0.70(G - R)$$

che è parimenti libera da effetti di arrossamento, e non necessita di termini correttivi. Vale anche una relazione del tipo $A_G = 2.69E(G-R)$. Purtroppo il sistema RGU non ha avuto il successo dell'UBV essendo svantaggiato dalla sua definizione solamente fotografica e dalla mancanza di una adeguata rete di stelle standard. Comunque, esso è ancora utilizzato, specie all'Osservatorio di Basilea dove è stato concepito per ricerche di statistica stellare come vedremo più avanti.

Capitolo 3

Influenza delle righe sui colori. Classi di luminosità ed effetto blanketing

3.1 Popolazioni ioniche e dei livelli eccitati

Cerchiamo ora di commentare la caratteristica più rilevante del diagramma a due-colori, che è la posizione delle stelle rispetto al corpo nero. Evidentemente l'irraggiamento stellare è diverso, a causa delle righe spettrali di assorbimento e di depressioni nel continuo.

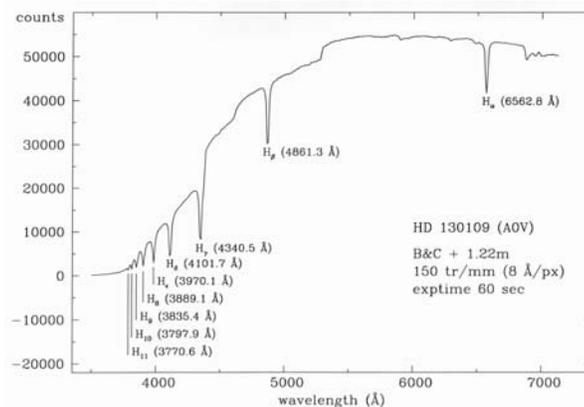


Figura 3.1: *Spettro della stella HD 130109 di tipo A0V con in evidenza le righe della serie di Balmer.*

La Figura 3.1 mostra lo spettro di una stella A0V nella zona dei filtri UBV, in cui è evidente la serie di Balmer dell'idrogeno. Ricordiamo che la formazione di *righe spettrali* è governata da due equazioni fondamentali, quella di *Boltzmann* e quella di *Saha*. Secondo la prima, in condizioni di equilibrio termico (cioè temperatura uniforme,

irraggiamento isotropo, densità di energia costante; che vale almeno strato per strato) gli atomi popolano i livelli eccitati secondo la

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{g_i}{g_j} \exp(-\chi_{ij}/kT)$$

in cui χ_{ij} è la differenza di energia dei due livelli, g sono i pesi statistici dei livelli (numero di sottolivelli degeneri, con la stessa energia, = $2n^2$ per l'idrogeno) e k la costante di Boltzmann. In particolare se il livello di riferimento è quello fondamentale, avremo

$$\frac{N_i}{N_1} = \frac{g_i}{g_1} \exp(-\chi_i/kT) \quad ; \quad N = \sum N_i = \frac{N_1}{g_1} u(T)$$

La funzione $u(T) = g_1(1 + g_2/g_1 \exp(\dots) + g_3/g_1 \exp(\dots) + \dots)$ si dice *funzione di partizione* perché esprime la distribuzione degli atomi tra gli stati eccitati. A tutto rigore u deve essere anche funzione della densità del gas, perché soprattutto i livelli più eccitati risentono dei continui urti con il gas circostante. Nonostante che il primo termine sia molto maggiore degli altri, la $u(T)$ diverge; nella maggior parte dei casi si pone $u \sim g_1$, per esprimere il fatto che la gran parte degli atomi deve trovarsi al livello fondamentale (a meno di temperature molto elevate). Con questa semplificazione $N_1/N \sim (g_i/g_1) \exp(-\chi_i/kT)$

Passando ai \log_{10} ed esprimendo χ in elettronvolt

$$\frac{N_i}{N} \sim \frac{g_i}{g_1} 10^{-5040.2 \chi_i/T} = \frac{g_i}{g_1} 10^{-\theta \chi_i}$$

in cui $\theta = 5040.2/T$, notazione di uso generale nella letteratura astronomica. La Tabella mostra alcuni risultati per l'atomo eccitato di idrogeno ($\chi_2 = 10.2$, $\chi_3 = 12.1$)

T	θ	N_2/N_1	N_3/N_1	N_3/N_2
4000	1.26	5.62×10^{-13}	5.25×10^{-16}	1.0×10^{-3}
6000	0.84	1.08×10^{-8}	6.28×10^{-10}	5.8×10^{-2}
8000	0.63	1.50×10^{-6}	2.17×10^{-7}	1.4×10^{-1}
10000	0.50	2.89×10^{-5}	7.25×10^{-6}	2.5×10^{-1}
14000	0.36	8.51×10^{-4}	4.00×10^{-4}	4.7×10^{-1}
18000	0.28	5.57×10^{-3}	3.71×10^{-3}	6.6×10^{-1}
20000	0.25	1.08×10^{-2}	8.50×10^{-3}	7.7×10^{-1}

Si noti che anche nelle stelle più calde $N_2 \ll N_1$, $N_3 \sim N_2/2$. La T che figura nell'equazione di Boltzmann si chiama *temperatura di eccitazione*. Avendo righe

spettrali da diversi multipletti, con le loro larghezze equivalenti, possiamo costruire le cosiddette *curve di crescita*. Riportando i valori del $\log(N_i/N)$ in funzione dei rispettivi potenziali χ_i , si ottiene una retta la cui pendenza è proporzionale ad $1/T$. Naturalmente questa T_{ecc} si determina bene solo se si hanno righe da molti multipletti con ben noti e distanziati valori di χ_i . La T_{ecc} rappresenta la temperatura degli strati in cui si sono formate le righe. Con diversi elementi possiamo ottenere temperature diverse tra loro: infatti la T_{ecc} risulta mediamente più alta per gli elementi che hanno potenziale di eccitazione più alto. La T_{ecc} ci indica così il fenomeno della *stratificazione*: gli elementi più facilmente eccitabili si trovano in strati più esterni e più freddi. Ora la T_{ecc} risulta sempre minore della T_{eff} ; questo ci dice che gli strati in cui si formano le righe sono superiori alla profondità di $\tau = 2/3$, corrispondente alla temperatura atmosferica che mi dà T_{eff} . La stratificazione delle atmosfere stellari è indicata anche da altre osservazioni, tra cui

- i) curve di crescita per elementi ionizzati risultano diverse da quelle per elementi neutri, i primi indicano maggior T e P,
- ii) l'abbondanza relativa di (H/He) dipende dalla luminosità, essendo minore per le giganti in cui si ha maggior profondità ottica.

L'equazione di Boltzmann, opportunamente modificata con correzioni ad $u(T)$, descrive dunque la ripartizione degli atomi tra i livelli eccitati di uno stesso stato di ionizzazione. Il problema di trovare la distribuzione, sempre all'equilibrio termico, tra i vari stati di ionizzazione fu risolto da Saha (1926). La formula è

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} P_e = 2 \frac{g_{i+1}}{g_i} \frac{(2\pi m_e)^{3/2}}{h^3} (kT)^{5/2} e^{-\chi_i/kT}$$

ove N_{i+1}, N_i sono il numero di atomi $(i+1)$ ed i volte ionizzati, χ_i il potenziale di ionizzazione dell'atomo già i volte ionizzato, P_e la pressione elettronica (in barie). Il senso fisico dell'equazione è il seguente: all'equilibrio vi deve essere un continuo scambio di elettroni



tra stati legati (A_i) e stati liberi (ioni A_{i+1} ed elettroni e^-), quindi nella ripartizione $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ deve intervenire il numero di elettroni liberi, cioè la pressione parziale P_e . Maggiore è il numero di elettroni liberi, corrispondentemente minore deve essere il numero N_{i+1} , quindi si può dire che diminuire la pressione (elettronica, ma anche quella totale) favorisce la ionizzazione. Passando ai \log_{10} ed esplicitando le costanti, si ha anche

$$\log \frac{N_{i+1}}{N_i} = -\theta \chi_i + 2.5 \log T - 0.48 + \log 2 \frac{g_{i+1}}{g_i} - \log P_e$$

Si ricorda che $1 \text{ dyne/cm}^2 = 1 \text{ barie}$, $1 \text{ atm} = 10^6 \text{ barie}$.

La seguente tabella mostra il risultato per l'idrogeno e per l'elio; si ricorda che in astronomia è usuale indicare lo stato ionico i con il numerale romano I+1, così HI significa H neutro, $HeII = \text{elio } 1 \text{ volta ionizzato}$, $FeXIII = \text{ferro } 12 \text{ volte ionizzato}$,

e così via. In tabella si usa $P_e = N_e kT = 10 \text{ dine/cm}^2$ pari a 10^{-5} atm ; ed è $\chi(H) = 13.53 \text{ eV}$, $\chi(HeI) = 24.46 \text{ eV}$, $\chi(HeII) = 54.4 \text{ eV}$.

T	N_{HII}/N_{HI}	N_{HeII}/N_{HeI}	N_{HeI}/N	N_{HeII}/N
4000	2.46×10^{-10}	1.44×10^{-23}	1	10^{-23}
6000	3.50×10^{-4}	7.70×10^{-13}	1	10^{-12}
8000	5.15×10^{-1}	2.49×10^{-7}	1	2.5×10^{-7}
10000	4.66×10^1	5.45×10^{-4}	1	5.5×10^{-4}
14000	9.82×10^3	4.37	0.19	0.814
18000	2.25×10^5	7.59×10^2	0.001	0.999
20000	7.05×10^5	4.82×10^3	2×10^{-4}	1
30000	2.60×10^7	1.54×10^6	1.4×10^{-7}	0.21
40000	1.86×10^8	3.41×10^7	2×10^{-11}	6.7×10^{-4}

L'elio illustra bene un fenomeno importante: la concentrazione di HeI diminuisce progressivamente al crescere di T man mano che l'HeII diviene abbondante, e poi infine tutto l'He è completamente ionizzato; invece l'HeII ha un massimo di concentrazione, mentre a temperature ancora maggiori ridiscende per ulteriore ionizzazione. Questo comportamento è simile per tutti gli atomi con più di un elettrone, per i quali si ha una *finestra* piuttosto stretta in temperatura in cui si ha il massimo di ogni stato di ionizzazione intermedio. Il parametro T nella formula di Saha *temperatura di ionizzazione* viene dunque individuato dalle intensità delle righe di un elemento nei diversi stati di ionizzazione negli spettri stellari (nota P_e); vedi Figura 3.2.

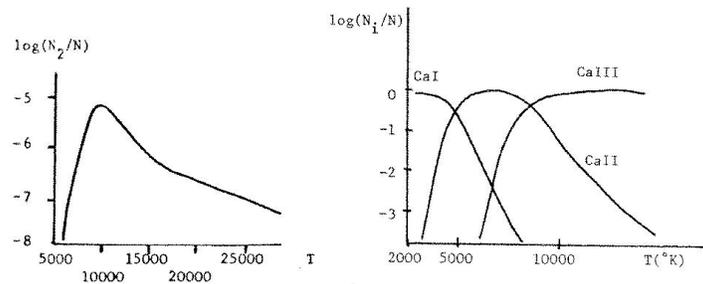


Figura 3.2: *Popolazione relativa del livello 2 per l'atomo di idrogeno, ovvero il numero di atomi in grado di assorbire le righe della serie di Balmer, a sinistra. Popolazione relativa del calcio neutro e nei primi stadi di ionizzazione, a destra.*

Per esempio le righe del CaI , come la $\lambda 4227$, si indeboliscono rapidamente per $T \geq 5000^\circ$ ($T.Sp. \leq G5$), mentre la H e la K del $CaII$ hanno il massimo di intensità

in stelle di tipo solare. Si nota anche che la *combinazione delle equazioni* di Boltzmann e di Saha può far sì che abbiano simultaneamente la massima intensità righe di ioni a potenziale di ionizzazione molto diverso: esempio tipico le righe λ 4077 dello *SrII* ($IP_1 = 5.7 \text{ eV}$; $EP = 0 - 3.0 \text{ eV}$) e λ 4325 del *FeII* ($IP_1 = 7.8 \text{ eV}$; $EP = 1.6 - 4.4 \text{ eV}$), entrambi forti tra *G5* e *K0*. Torniamo pure a notare che la popolazione dello ione i è estremamente piccola alla temperatura caratteristica dello ione $i+k$ ($k \geq 2$). Poiché nell'idrogeno ci sono solo gli ioni 1 e 2 ($k = 1$ solo), anche a temperature assai elevate c'è una quantità di HI non estremamente piccola, per esempio a $T = 4 \times 10^4$:

$$\frac{N(HI)}{N(H)} \quad (\sim 10^{-8}) \quad \gg \quad \frac{N(HeI)}{N(He)} \quad (\sim 10^{-11})$$

nonostante che IP dell'H sia minore dell'IP dell'elio (13.6 contro 24.5 eV). Questo si comprende perché nel caso dell'idrogeno l'aumento della probabilità di ionizzazione per aumento di T è parzialmente bilanciata dall'aumento del numero di elettroni; per l'elio invece la densità dello ione HeII dopo una prima crescita (massimo per $T \sim 2 \times 10^4 \text{ }^\circ K$) diminuisce per produzione di HeIII.

Si è detto che nello studio di un'atmosfera stellare le equazioni di Boltzmann e di Saha vanno considerate simultaneamente, perché simultaneamente agiscono eccitazione ed ionizzazione (per il momento supponiamo tutte le stelle con stessa composizione chimica): fissiamo la nostra attenzione sulla serie di Balmer dell'idrogeno che deriva da transizioni del tipo $n = 2 \rightarrow n = 3$ (H_α), $n = 2 \rightarrow n = 4$ (H_β), etc. L'intensità delle righe sarà proporzionale al numero $N_{HI,2}$: l'equazione di Saha ci assicura che fino a $T \sim 7000 \text{ }^\circ K$ tutto l'idrogeno è ancora neutro, ma quella di Boltzmann non consente una popolazione del livello 2 superiore a qualche parte per milione. A $T = 10^4 \text{ }^\circ K$, $N_{HI,2}(10^4) \sim 20 N_{HI,2}(8 \times 10^3)$ ma $N_{HI}(10^4) \sim 0.01 N_{HI}(8 \times 10^3)$, quindi per una qualunque riga Balmer

$$40 I_{Bal}(2 \times 10^4) \sim I_{Bal}(10^4) \sim 0.2 I_{Bal}(8 \times 10^3) \sim 50 I_{Bal}(6 \times 10^3)$$

La Figura 3.2 mostra l'andamento di $N_{HI,2}(T)$, numero di atomi di idrogeno capaci di assorbire la *serie di Balmer*: l'intensità cresce molto rapidamente con T, raggiunge un massimo tra 7000 e 10000 $^\circ K$, poi diminuisce più lentamente. Empiricamente si trova che le righe di Balmer hanno un massimo di intensità verso il *T.Sp. A0* per 10000 $^\circ K$, non a 8000 $^\circ K$ come risulterebbe dalla semplice combinazione delle espressioni per n_1/n_2 ed $N(HII)/N(HI)$ e come mostrato nella seguente tabella

T	$n_{HI,2}$
6000 $^\circ K$	1.1×10^{-8}
8000 $^\circ K$	10^{-6}
10000 $^\circ K$	6.1×10^{-7}
14000 $^\circ K$	9×10^{-8}

Infatti in assenza di perfetto equilibrio termico ma di equilibrio termico solo locale, le due "temperature" che intervengono nelle due equazioni non possono avere un significato fisico altrettanto ben preciso, *non* necessariamente $T_{ecc} = T_{ion} = T_{eff}$; ed inoltre per la differenza in P_e tra i vari tipi spettrali, assunta uguale nelle tabelle. Però le differenze per le righe più intense non sono eccessive, ed il concetto di *equilibrio termico* perlomeno localmente ed anche globalmente rimane utile.

Affrontiamo ora il *termine di pressione* nell'equazione di Saha, ricordando che

$$P_e = N_e kT \quad P_{gas} = (N_i + N_e) kT$$

essendo N_i ed N_e le densità in (cm^{-3}) degli ioni e degli elettroni rispettivamente. Quindi

$$\frac{P_{gas}}{P_e} = 1 + \frac{N_i}{N_e}$$

Ma nelle stelle, la gran parte di atomi è costituita da H ed He; chiamiamo Z tutto il resto (che contiene pochissimi elettroni per la scarsa abbondanza) ed avremo

$$N_i \sim N_{HI} + N_{HII} + N_{HeI} + N_{HeII} + N_{ZI} + N_{ZII}$$

$$N_e \sim N_{HII} + N_{HeII} + N_{ZII}$$

Nelle stelle molto calde sarà $N_e/N_i \sim 1$, quindi $P_{gas}/P_e \sim 2$; invece nelle stelle molto fredde $N_e \ll N_i$ e $P_{gas}/P_e \gg 1$, il valore esatto essendo sensibile ad N_Z . Vediamo qualche esempio:

- (a) a $T = 4000$, $N_{HII} = N_{HeII} = 0$, $N_e = N_{ZII}$, $N_i \sim N_{HI} + N_{HeI}$ quindi la P_e è determinata interamente da quell'1% circa di atomi più pesanti dell'elio;
- (b) a $T = 6300$ gli elettroni sono forniti soprattutto dagli atomi del gruppo 3 in tabella, in secondo luogo dall'idrogeno, nel rapporto 0.359/0.16; gli elementi del gruppo 4 ne forniscono 0.01 e l'elio assai meno (sono trascurabili gli elettroni prodotti da seconda ionizzazione). Pertanto $N_e = cost \cdot 0.529$ $N_i = cost \cdot 1100$ e $P_{gas}/P_e = 2080$
- (c) a $T = 12600$ gli elettroni sono invece forniti essenzialmente dall'idrogeno. Si ha infatti $N_e = cost \cdot 1004$ $N_i = cost \cdot 1100$ e $P_{gas}/P_e = 2.10$.

Gruppo	Elemento	$\chi_1(eV)$	Abbondanza	N_{II}/N $T = 12600^\circ$	N_{II}/N $T = 6300^\circ K$
1	He	24.5	100	0.04	0
2	H	13.5	1000	1.00	0.00016
3	Fe, Si, Mg, Ni	~ 8	0.43	1.00	0.835
4	Al, Ca, Na, K	~ 6	0.01	1.00	1.00

Si nota che l'idrogeno diventa dominante, come produttore di elettroni, per temperature poco superiori a $6000\text{ }^\circ K$, vale a dire per $T.Sp.$ precedenti ed attorno a G0. Per tipi spettrali seguenti sono i metalli i maggiori fornitori di elettroni. Quindi $T = 6000\text{ }^\circ K$ è grosso modo la temperatura di transizione tra il regime in cui P_e è alta ed essenzialmente dovuta ad H (ed He), ed il regime in cui P_e è bassa e dovuta agli elementi metallici. In realtà verso $4000\text{ }^\circ K$ vi è già una frazione non trascurabile di composti molecolari, per cui le precedenti considerazioni vanno opportunamente riviste. Una semplice estensione della legge di Saha si ha con la *legge dell'azione di massa di Guldberg e Waage* che considera formazione di molecole e loro dissociazione in funzione della temperatura e della pressione.

Abbiamo visto che l'equazione di Saha richiede che, a parità di T, un aumento di P si accompagni ad una diminuzione di ionizzazione espressa da (N_{i+1}/N_i) , e viceversa. Invece a parità di ionizzazione, se cresce P anche T cresce e viceversa. Gran parte delle classificazioni spettrali si basano su rapporti di intensità di righe ionizzate; si prendano allora due stelle di ugual (N_{i+1}/N_i) cioè in pratica di pari $T.Sp.$, ma diversa pressione: quella con P_e maggiore avrà anche maggior T. È per questo che una stella diciamo G0-V ha temperatura maggiore di una G0-III; in breve si dice che una gigante (con minore P) è più fredda (più rossa) di una nana dello stesso $T.Sp.$; oppure che una gigante di pari temperatura ha tipo spettrale antecedente. Per esempio a $T = 5800\text{ }^\circ K$ si ha una nana G2, ma una gigante $\sim F9$, così come è illustrato nella Figura 3.3.

La conseguenza pratica è che la scala delle T dovrebbe cambiare con la densità dell'atmosfera stellare, che per molti anni ha complicato la comprensione degli spettri stellari. Fowler e Milne (1923) dimostrarono che si ha una scala verosimile di temperature adottando in prima approssimazione $P_e \sim 130\text{ barie}$ ($\sim 19^{-4}\text{ atm}$) per tutte le stelle di sequenza principale. La scala di Fowler e Milne era:

$T.Sp. = B0\ T = 25,000\text{ }^\circ K$; $B2\ 16,000$; $A0 = 10,000$; $G5\ 5000$; $K5\ 4000$

In effetti si ha $P_e(A0 - V) \sim 200$, $P_e(K5 - V) \sim 10$, $P_e(M2 - V) \sim 2.5$, ma l'ordine di grandezza era corretto. Si noti che nella Figura 3.2 si è calcolato con $P_e \sim 100$, la Tabella di ionizzazione con $P_e \sim 10$: per una migliore precisione si devono simultaneamente variare P_e e T per riprodurre le condizioni lungo la sequenza principale.

Esistono comunque degli *effetti di luminosità* nelle stelle giganti. Infatti una diminuzione di P_e aumenta la ionizzazione nelle stesse proporzioni per tutti gli elementi, mentre una diminuzione della T (che figura come esponente) diminuisce la ionizzazione in proporzione diversa nei vari elementi: il cambiamento è più grande quando χ_i è pure più elevato. Per elementi di facile ionizzazione l'effetto di T non è sufficiente a compensare quello di P_e (e sono quindi ionizzati nelle giganti, per es. righe metalliche), mentre per elementi di difficile ionizzazione l'effetto di T è sovrabbondante (sono meno ionizzati nelle giganti). Gli elementi di potenziale di ionizzazione intermedio non sono sensibili ad effetti di luminosità; tutti questi casi sono confermati dalle osservazioni.

È stato detto che $T \sim 6 \times 10^3$ rappresenta una transizione tra un regime di P_e alta (per H, He) ed uno di P_e bassa (dipendente dalla composizione chimica di metalli). Nel

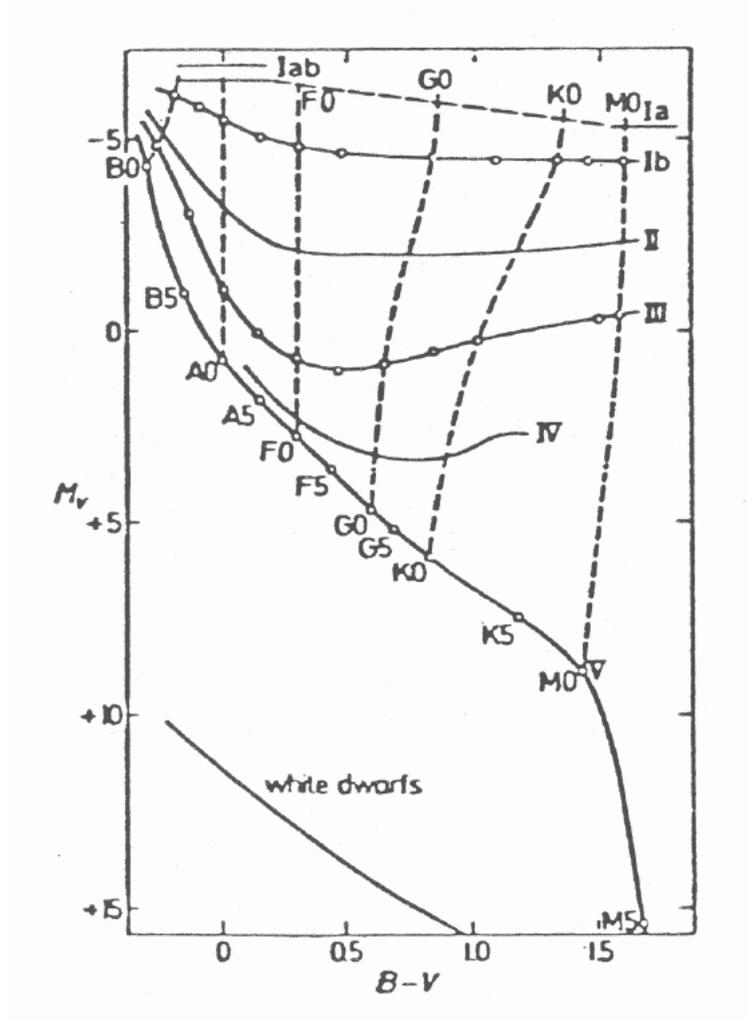


Figura 3.3: *Tipi spettrali e classi di luminosità della classificazione MKK. Si noti la dipendenza dell'indice di colore dalla classe di luminosità per pari tipo spettrale.*

diagramma a due-colori vediamo che si ha $T \sim 6 \times 10^3$ per $(B-V) = 0.6$ e concludiamo che i colori dipenderanno dalla composizione chimica attraverso l'effetto della P_e sulle righe di assorbimento per stelle più rosse. Tuttavia l'effetto è piccolo, per la larghezza delle bande UB V , e non supera qualche centesimo di magnitudine.

3.2 L'effetto blanketing

Invece la *presenza stessa delle righe* è responsabile di buona parte delle differenze con il corpo nero; esse agiscono in due modi rimuovendo una certa frazione del continuo in regioni spettrali precise (di preferenza U e un po' meno B; vedi la Figura 3.4), ed inviando una parte di queste radiazioni in altre zone spettrali, modificando cioè la

temperatura di colore della stella. Questa azione si dice *line blanketing* seguendo una notazione introdotta da Milne. Si noter  che la composizione chimica entra una seconda volta nei colori, ora in modo pi  importante, perch  la scarsit  di un certo elemento non modifica solo P_e ma anche il line blanketing; di nuovo la zona di $T \sim 4000 - 6000 \text{ }^\circ\text{K}$ (cio  T.Sp. G-K)   la pi  sensibile perch  l  sono abbondanti sia le righe metalliche, sia le bande molecolari del carbonio (banda *G* del CH a circa 4300 \AA , varie bande del CN).

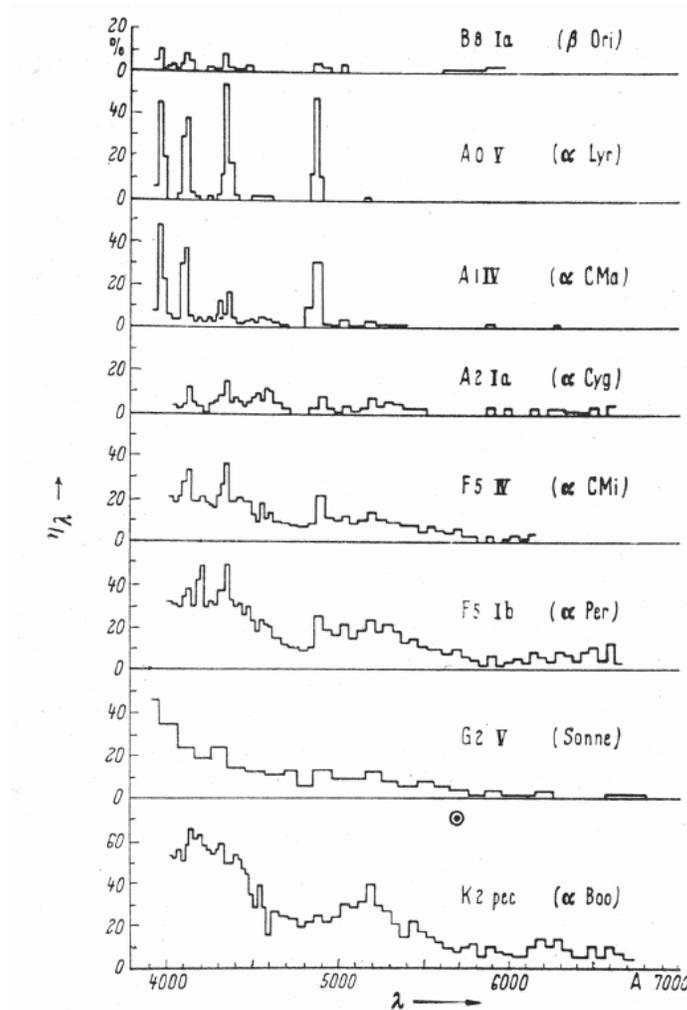


Figura 3.4: *Frazione di energia assorbita delle righe. Nei primi tipi spettrali sono dominanti le righe dell'idrogeno mentre per i tipi pi  avanzati domina nel blu-violetto il contributo delle righe metalliche.*

Siccome la deficienza dei metalli si avverte soprattutto in U ed in B, allora una stella di queste caratteristiche tender  a spostarsi verso l'alto ed un po' a sinistra nel diagramma a due-colori, come mostrato in Figura 3.5, risalendo la sua *retta di blanketing* espressa dalle relazioni

$$\frac{\Delta(U-B)}{\Delta(B-V)} = 2.70 (B-V)_{MS} + 0.62 ; \quad \frac{\Delta V}{\Delta(B-V)} = 0.75 (B-V)_{MS} + 0.97 ;$$

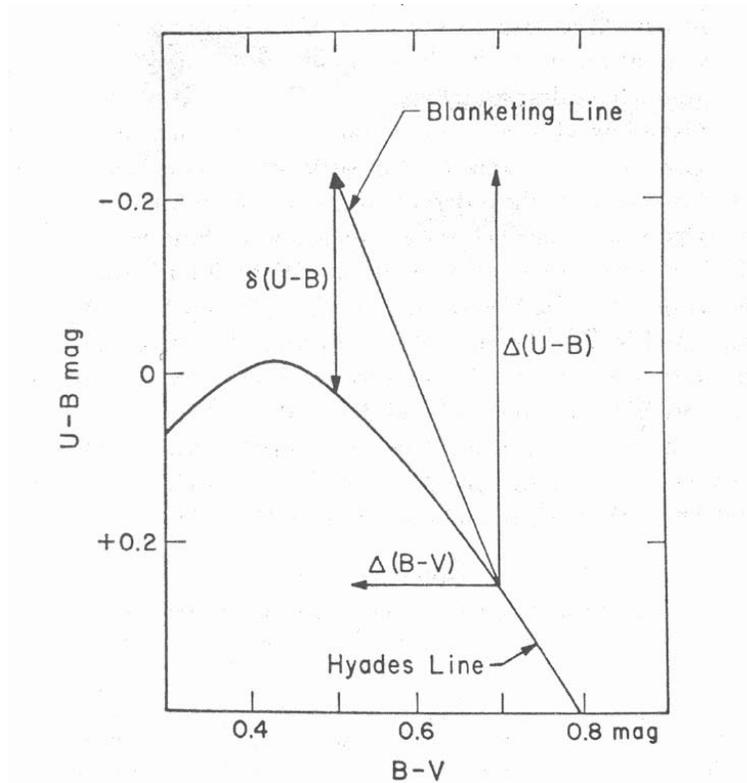


Figura 3.5: Definizione dell'eccesso ultravioletto e della retta di blanketing.

Esempio: sia una stella subnana osservata con $V = 8.0$, $(B-V) = 0.50$ ($U-B) = -0.13$: una stella delle Iadi con quel colore $(B-V)_{MS}$ avrebbe $(U-B)_{MS} = 0.03$, e pertanto si ha $\delta(U-B) = -0.16$. Se le righe spettrali fossero forti come nelle stelle delle Iadi, la stella diverrebbe con $(B-V) = 0.63$, $(U-B) = 0.16$, $V = 7.94$ discendendo la retta di blanketing.

Le teorie dell'evoluzione stellare attribuiscono la scarsità di metalli all'originaria composizione chimica del mezzo interstellare da cui la stella si è formata. Una riprova è data dal fatto che le stelle con *eccesso ultravioletto* $\delta(U-B)$, eccesso perché la mancanza di metalli le rende più brillanti in U rispetto a quelle di normale composizione solare, hanno orbite galattiche molto disordinate, come se si fossero formate nei primi tempi della Galassia, quando non si era ancora formato il disco galattico, e si aveva un mezzo interstellare meno ricco di metalli. Si è pure detto che nel sistema RGU, il filtro G evita la regione 4000-4500 Å, ricca di righe e bande, e quindi l'indice di colore (G-R) è molto meno sensibile del (B-V) a questi effetti. Nel filtro G il *line blocking* è dello stesso ordine del *backwarming* così cancellando effetti di composizione chimica (la correzione

ΔG è molto piccola, circa $1/4$ di ΔV). Gli effetti di righe sono forti nel filtro U. Nella Figura 3.6 si vede il confronto tra le rette di blanketing nei diagrammi a due-colori dei sistemi UBV ed RGU: in quest'ultimo si nota che le rette di blanketing intersecano la sequenza principale (delle Iadi) ad un angolo molto maggiore, e con maggiore lunghezza. Si ha così una separazione molto migliore delle diverse popolazioni stellari. Le stelle dell'alone galattico (Popolazione II) sono ben sistemate al di sopra della sequenza principale di Popolazione I.

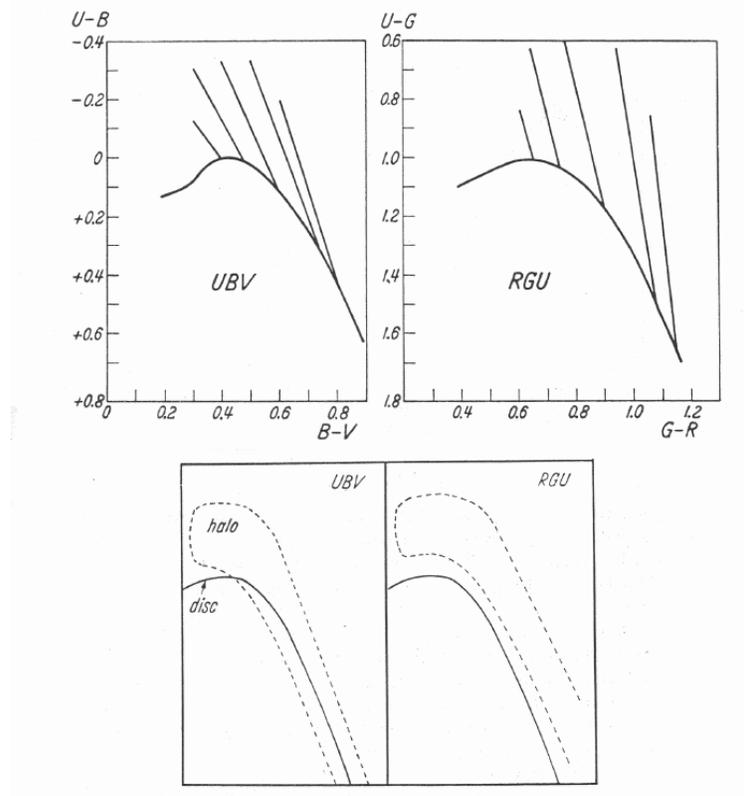


Figura 3.6: Pendenza delle rette di blanketing nei sistemi UBV ed RGU (sopra) e confronto della capacità di separare le diverse popolazioni stellari (sotto).

Riprendiamo un po' più in dettaglio il concetto di *blanketing*: esso esprime l'effetto totale dovuto alla presenza di righe di assorbimento nello spettro stellare, e si può dividere in due effetti, *line blocking* o blocco di energia da righe, e *backwarming* o rafforzamento del continuo (per lo più in altra regione spettrale).

Line blocking: la radiazione del continuo è bloccata, assorbita dalle righe, sottraendo un contributo di radiazione pari a:

$$\Delta m_{\lambda_1-\lambda_2} (\text{blocking}) = 2.5 \log \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F_{\lambda} T_{\lambda} d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F_{\lambda} (1 - \epsilon_{\lambda}) T_{\lambda} d\lambda}$$

ove ϵ è la frazione percentuale di energia sottratta al continuo e perduta in questo

processo. Ciò avviene di solito più in U che in B, in B più che in V; gli indici di colore sono quindi aumentati nelle stelle di ammassi a righe forti. Il line blocking è generalmente maggiore con l'avanzare del *T.Sp.* (vedi Figura 3.4).

Backwarming: la radiazione già bloccata dovrà uscire in regioni tra le righe, risultando in un innalzamento del livello di continuo. La parola indica che le radiazioni già bloccate sono rimesse "all'indietro" facendo alzare la temperatura degli strati sottostanti. In genere si trasformano in radiazioni di maggiore lunghezza d'onda, cioè il V diviene più forte del B, e questo dell'U, diminuendo l'effetto precedente.

L'ammontare di questo *backwarming effect* si può misurare come segue: consideriamo due stelle della stessa luminosità L , e raggio R e quindi della stessa temperatura effettiva T_e . La stella n. 1 abbia righe di assorbimento normali mentre la stella n. 2 sia senza righe. Ognuna irradia la medesima energia bolometrica L . L'energia sottratta dalle righe nello spettro della stella n. 1 è data da:

$$\text{energia sottratta} = \int_0^{\infty} \epsilon(\lambda) F_1(\lambda) d\lambda$$

dove $F_1(\lambda)$ è il livello del continuo della stella n. 1 e $\epsilon(\lambda)$ la frazione di energia sottratta dalle righe.

Definiamo η come *coefficiente integrato di blocking* tramite la

$$\eta = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon(\lambda) F_1(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} F_1(\lambda) d\lambda}$$

Allora si ha: energia sottratta = $\eta \int_0^{\infty} F_1(\lambda) d\lambda$

e poiché questa energia non può essere trattenuta, essa deve uscire tra le righe di assorbimento della stella n. 1 portando ad un innalzamento del continuo.

Se consideriamo i livelli del continuo nelle due stelle, da $L_1 = L_2$ ne segue che:

$$\int_0^{\infty} F_2(\lambda) d\lambda = (1 - \eta) \int_0^{\infty} F_1(\lambda) d\lambda$$

I livelli di continuo F_1 ed F_2 possono essere calcolati teoricamente, ad esempio da modelli di atmosfera caratterizzati da due temperature effettive $T_{e,1}$ e $T_{e,2}$ definite da

$$\sigma T_e^4 = \int_0^{\infty} F(\lambda) d\lambda$$

e quindi, per le nostre due stelle sarà

$$(T_{e,2})^4 = (1 - \eta)(T_{e,1})^4$$

Riassumendo: se togliamo tutte le righe di assorbimento dallo spettro di una stella, il livello del continuo si abbasserà dal suo valore F_1 ad un valore F_2 . Il cambiamento nelle magnitudini *UBV* dovuto a questo solo effetto di *backwarming* sarà:

$$\Delta mag = 2.5 \log \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F_1(\lambda) T(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F_2(\lambda) T(\lambda) d\lambda}$$

L'effetto totale nelle magnitudini UBV causato dal togliere le righe di assorbimento è la somma del *line blocking* e del *backwarming*. Il primo dà magnitudini più brillanti quando si tolgono le righe, il secondo invece dà magnitudini più deboli. I due effetti danno perciò contributi opposti, portando ad un cambiamento delle magnitudini con segno opposto. Le osservazioni mostrano che il *blocking* è maggiore del *backwarming* in U e B, quindi in queste bande le magnitudini diventano più brillanti quando si tolgono le righe. Il *backwarming* invece è maggiore del *blocking* nella banda V e quindi, togliendo le righe, la magnitudine in questa banda diventa più debole.

Definiamo come misura della metallicità di una stella la quantità

$$\left[\frac{Fe}{H}\right] = \log \frac{(Fe/H)_*}{(Fe/H)_\odot}$$

ove a numeratore si hanno quantità misurate sulla stella ed a denominatore le stesse misurate sul Sole.

Per stelle con composizione normale, cioè uguale al Sole, si ha $\left[\frac{Fe}{H}\right] = 0$ mentre ad esempio, stelle con metallicità dieci volte inferiore o superiore a quella solare avranno $\left[\frac{Fe}{H}\right] = -1, +1$ rispettivamente.

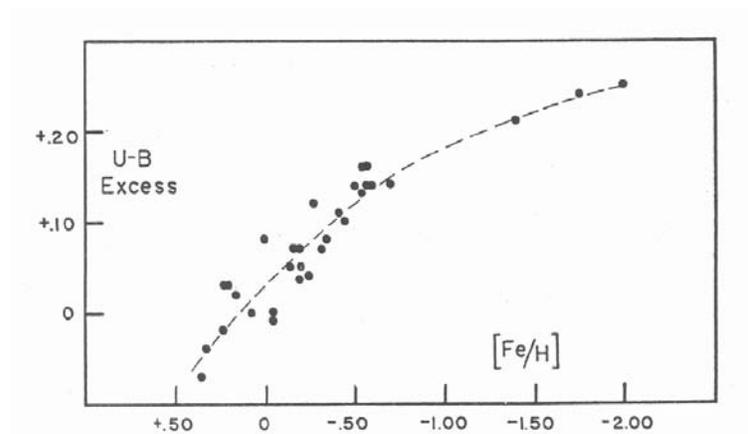


Figura 3.7: Correlazione tra l'abbondanza metallica e l'eccesso ultravioletto normalizzato a $(B-V) = 0.6$

La Figura 3.7 mostra la relazione tra l'eccesso ultravioletto $\delta(U-B)$ e la metallicità $\left[\frac{Fe}{H}\right]$ ora definita, utile per avere informazioni sulla composizione chimica di una stella da sole misure fotometriche.

3.3 Sistemi a banda intermedia: L'uvby di Strömgren

La discussione dei sistemi fotometrici a banda larga ci ha portato ad alcuni importanti risultati: per distinguere la gravità dalla metallicità bisogna restringere le bande; stelle di classe spettrale diversa richiedono lunghezza d'onda diversa. Si spiega così la proliferazione di sistemi fotometrici, la cui applicazione è ristretta a problemi particolari.

Ci limiteremo qui ad esporre il sistema proposto da *Strömgren* nel 1962, utile per le stelle di *T.Sp. A2 – G0*, poco arrossate, ciò non sembri un'eccessiva limitazione perché si valuta che entro 100 pc di distanza ci siano circa 10^4 stelle di questi tipi, con diverse caratteristiche cinematiche.

Il sistema è definito in modo fotoelettrico, mediante filtri interferenziali a banda intermedia (tranne la banda *u* che richiede l'uso di due filtri Schott: UG 11, 8mm + WG 3, 1mm). La definizione originale di *Strömgren* è stata poi modificata da Crawford al Kitt Peak e diffusa in questo modo agli altri osservatori. Sono stati anche aggiunti un filtro per misurare l'intensità della riga H_β (filtro interferenziale stretto) ed un altro per l'intensità del continuo adiacente alla riga (filtro interferenziale più largo). La definizione precisa è riportata nelle Figure 3.8 e 3.9.

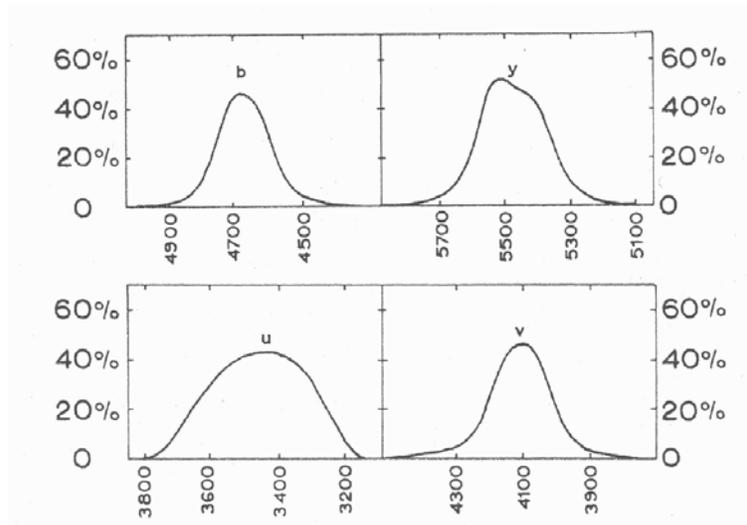


Figura 3.8: Curve di trasmissione del sistema *uvby* di *Strömgren*.

Si può notare che *u* e *v* sono completamente localizzati sotto e sopra la discontinuità di Balmer, mentre *b* ed *y* sono abbastanza simili al B e V (e quindi anche al relativo indice di colore): i filtri *b* ed *y* non trasmettono forti righe spettrali ed hanno rispettivamente il picco molto vicino a quello del V (si può ridurre le misure *y* a V con poca dispersione), e *b* “al rosso” di quella regione attorno a 4500 Å ove ci sarebbe forte “blanketing” in stelle di tipo spettrale avanzato (inoltre l’effetto di righe sul *b* rispetto al B è meno pronunciato anche perché la banda è più stretta). Il filtro *v* è “sul rosso” dell’addensarsi delle righe di Balmer, trasmette però la H_δ ; il filtro *u* ha un taglio alle brevi lunghezze d’onda che esclude la regione di forte assorbimento atmosferico, ed il suo taglio “al rosso” è ancora sotto la discontinuità di Balmer. Il sistema dovrebbe perciò essere insensibile al tipo di fotocatodo, ed all’altezza del luogo di osservazione (che produce vari tagli nell’ultravioletto); è anche poco influenzato da righe spettrali, a parte H_δ e le due strutture misurate che sono la discontinuità di Balmer ed il *blanketing* nella zona violetta. Per stelle F-G si ha circa lo stesso effetto di *blanketing* in *b* e *y*:

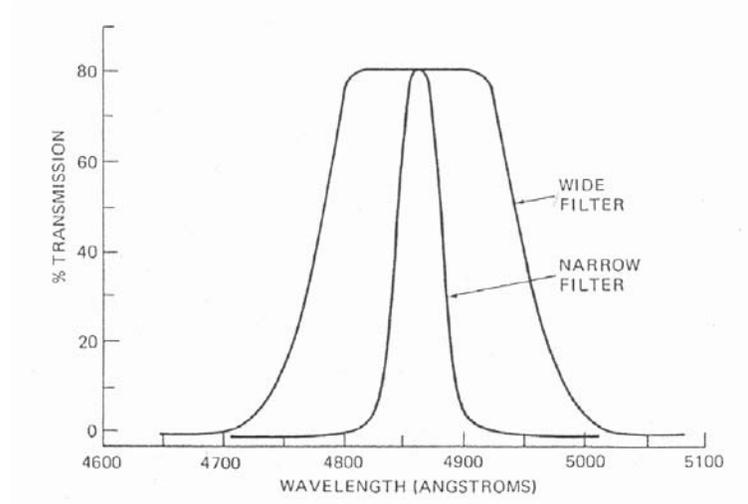


Figura 3.9: I filtri di Crawford per misurare la riga H_β .

così l'indice (b-y) è insensibile alle righe ed è un buon indicatore della temperatura, meglio che (B-V).

Vengono definiti anche nel sistema di Strömgen i soliti indici di colore (u-v) e (v-b), e poi si forma la loro differenza

$$c_1 = (u - v) - (v - b)$$

che è un parametro molto sensibile alla discontinuità di Balmer, cioè alla gravità, mentre invece è poco sensibile ad effetti di *blanketing*, infatti si stima che il suo contributo in u sia doppio che in v , e viene annullato perché in $c_1 = u - 2v + b$ come schematizzato in Figura 3.10.

Ci aspettiamo che il diagramma ($c_1, b - y$) separi meglio allora le nane dalle giganti rispetto al diagramma già noto (U-B, B-V), almeno nell'intervallo tra stelle A e G0. Infatti la Figura 3.11 mostra che la ZAMS è molto bene definita come l'involuppo inferiore della distribuzione di punti: entrando allora con il (b-y) di una particolare stella si potrà determinare la differenza

$$\Delta c_1 = c_1(stella, b - y) - c_1(ZAMS, b - y)$$

dell'indice c_1 a pari indice di colore, e che è legato alla luminosità della stella in esame da una relazione media del tipo:

$$\Delta M_V = M_V(stella, b - y) - M_V(ZAMS, b - y) = (8 \div 13) \Delta c_1$$

Poiché nella maggior parte dei casi è $\Delta c_1 \leq 0.2 \text{ mag}$, si avrà in corrispondenza $\Delta M_V \leq 2 \text{ mag}$. In realtà entro 100 pc vi sono pochissime supergiganti, e la relazione è osservata appunto per stelle A ed F di classi di luminosità V, IV e III, e solo V e IV per stelle G. Si nota che in ogni caso il sistema richiede misure molto precise; da questo

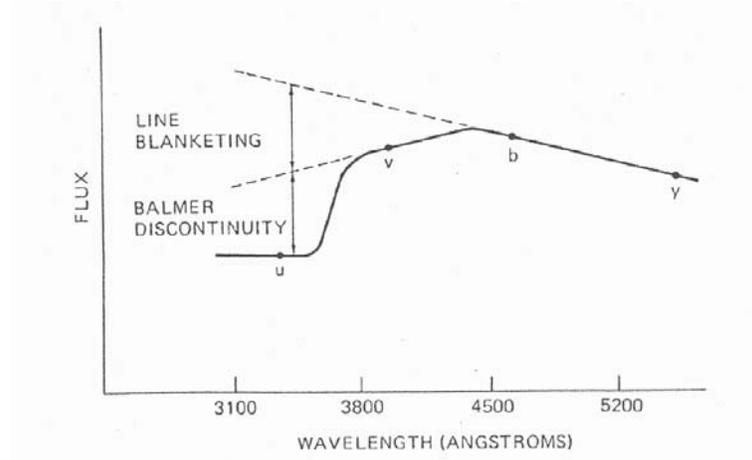


Figura 3.10: Posizione delle bande di Strömrgren su un ipotetico continuo stellare in cui, per chiarezza, non sono evidenziate le righe di assorbimento.

punto di vista la maggior strettezza delle bande aiuta ad eliminare gli errori sistematici (pur aumentando quelli associati alla statistica dei fotoni, che però sono molto più facili da trattare). Infatti se $\Delta\lambda/\lambda$ è piccolo, non ci sono effetti dipendenti dalla larghezza di banda, ovvero la distinzione tra le varie definizioni di lunghezza d'onda efficace svanisce; i termini non lineari dell'arrossamento interstellare o dell'estinzione in atmosfera terrestre o dell'atmosfera stellare o del diverso fotocatodo tendono così a scomparire.

La precisione di una singola misura è dunque tipicamente migliore di 0.01 mag; si perdono però circa 2 magnitudini rispetto al valore limite del sistema UBV a banda larga. Si è detto che il sistema si applica all'osservazione di stelle poco arrossate; valgono comunque le seguenti relazioni che descrivono gli effetti dell'arrossamento interstellare sul sistema di Strömrgren a quattro-colori:

$$E_{b-y} = 0.73 E_{B-V} \quad , \quad E_{c_1} = 0.20 E_{b-y} \quad , \quad E_{u-b} = 1.6 E_{b-y}$$

La stella si muove perciò parallelamente alla sequenza principale.

Si usa poi definire un secondo indice di metallicità, come:

$$m_1 = (v - b) - (b - y)$$

il quale dipende assai poco da $\log g$, mentre misura gli effetti del "blanketing" nella regione attorno a 4100 Å; ancor meglio si può fare con l'indice corretto secondo: $m_1 + 0.1 \Delta c_1$. La Figura 3.12 mostra i risultati teorici calcolabili tramite i modelli di atmosfere stellari di *Kurucz (1980)* per diverse abbondanze chimiche.

I filtri H_β aggiunti da Crawford sono uno largo e uno stretto, scelti in modo tale che il rapporto tra le loro risposte misuri la profondità della riga di assorbimento H_β ,

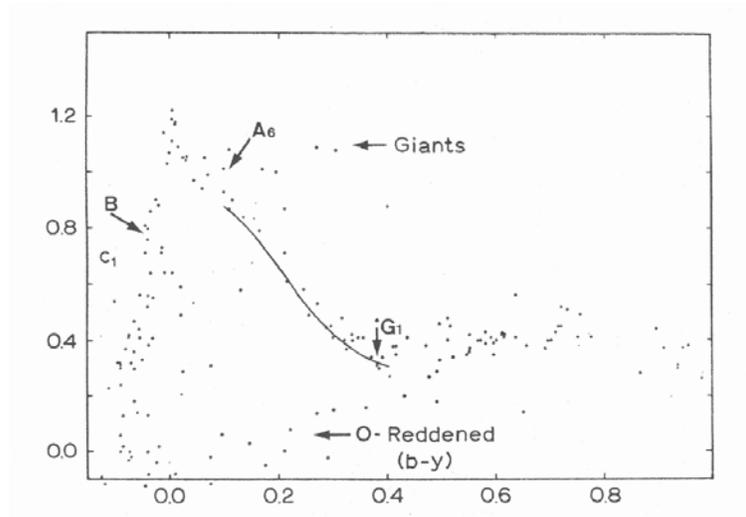


Figura 3.11: *Variazione di c_1 con l'indice di colore $(b-y)$. La riga continua rappresenta una porzione della sequenza principale.*

in modo del tutto indipendente dall'assorbimento interstellare (per confronto di due bande alla stessa λ_0). Per stelle di *T.Sp.* da A2 ad F5, vale la relazione:

$$\beta = -2.5 \log \frac{I_{stretto}}{I_{largo}}$$

che è proporzionale alla larghezza equivalente W_β , ed anche

$$(b-y)_0 = 2.506 - 0.819 \beta - 0.085 c_1$$

altra relazione che permette di determinare la quantità di assorbimento interstellare ed infine la luminosità della stella M_V .

La fotometria di Strömgen e Crawford non può essere estesa facilmente alle stelle O-B: intanto la riga H_β si presenta in emissione in circa il 20 % dei casi (stelle Be ed Of, che hanno in emissione anche il continuo sotto il limite di Balmer, che si traduce in eccesso ultravioletto), in secondo luogo le stelle ruotano assai rapidamente e la riga H_β si allarga scalibrando l'indice β ; non sono nemmeno rari i casi di stelle doppie. Comunque su di un campione abbastanza esteso di stelle B dell'emisfero sud è stata ricavata la relazione:

$$\beta = \beta(M_V) = 2.73 + 0.03M_V \quad (\text{più termini del second'ordine}),$$

valida nell'intervallo

$$2.50 \leq \beta \leq 2.70 \quad , \quad -8 \leq M_V \leq -0.5$$

Nota però che questa relazione è ripidissima, come mostrato in Figura 3.13, bastano infatti $\pm 0.01 \text{ mag}$ in β per cambiare M_V di $\pm 0.4 \text{ mag}$, e la dispersione intrinseca è

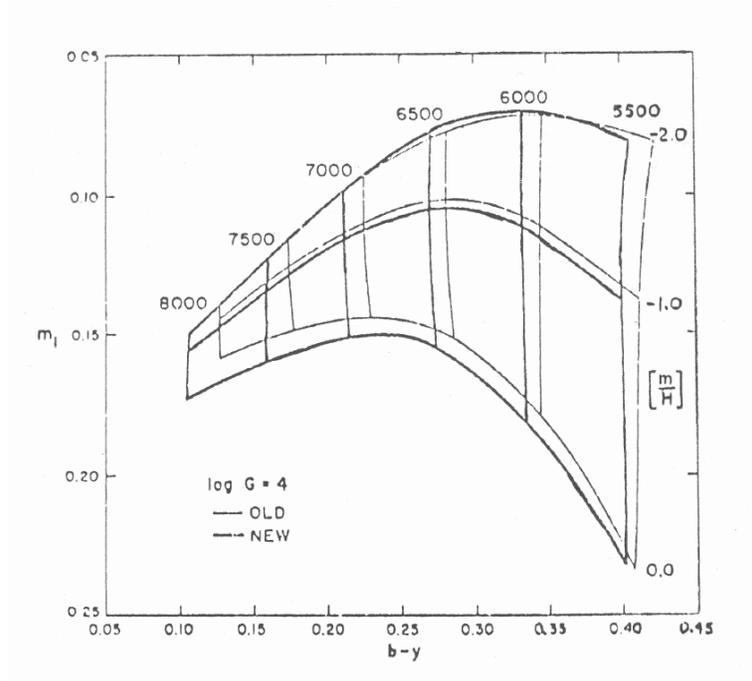


Figura 3.12: *Variazione di m_1 con l'indice di colore $(b-y)$ per i modelli teorici di Kurucz a diverse abbondanze chimiche.*

di circa 0.5 mag. Tuttavia queste *parallassi spettrofotometriche* di stelle B con l'indice β restano ancora più affidabili di quelle dagli spettri e classificazione MK.

Riassumendo i parametri nel sistema *uvby* di Strömrgren:

$(u - v), (b - y)$: poco sensibili al “blanketing” e funzioni di T_e ;

$c_1 = (u - v) - (v - b)$: indicatore della luminosità M_V (misura la discontinuità di Balmer cioè la gravità) per stelle A-F; può indicare la T_e per stelle O-B non arrossate;

$m_1 = (v - b) - (b - y)$: indicatore della metallicità per stelle A0-G0, mentre varia molto poco con T_e ;

β : indice di luminosità M_V per le stelle O-B; indice della temperatura per stelle A-G (esprime la larghezza equivalente della riga di assorbimento H_β).

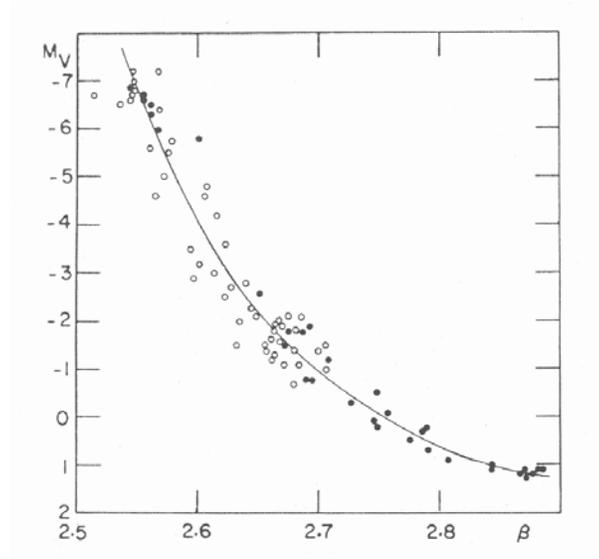


Figura 3.13: Relazione tra l'indice β e la magnitudine assoluta.

3.4 I filtri interferenziali

Questi filtri derivano direttamente dall'*etalon* di Fabry e Perot, costituito da due lastre ben piane e parallele di vetro, le cui facce interne sono rese semiriflettenti da uno strato sottile e trasparente di argento separate da un sottile strato d'aria. L'effetto di filtro è causato dal fenomeno dell'interferenza tra i raggi riflessi tra le due lastre. Infatti quando si illumina con luce bianca e parallela, la differenza di cammino tra i raggi che hanno subito diverse riflessioni tra gli strati semiargentati, dipende per ogni angolo di incidenza solo dallo spessore della lamina d'aria. Se questo spessore è costante e molto sottile (pari a qualche volta la lunghezza d'onda), il sistema lascia passare una piccola quantità della radiazione, quasi monocromatica. Scegliendo opportunamente lo spessore, si può far trasmettere la lunghezza d'onda che si desidera.

Un raggio incidente con inclinazione i sulla normale, viene in parte trasmesso dalla prima superficie semi-argentata ed incide sulla seconda; questa ne trasmette una parte e una parte ne riflette; e così via. Dalla seconda lastra emergerà una serie di raggi paralleli 1, 2, provenienti dal medesimo raggio incidente, e con ritardi di fase crescenti in progressione aritmetica. Ricordiamo che la differenza di cammino introdotta da uno spessore h (vedi la Figura 3.14) è data dalla

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 AB - n AD = 2 \frac{h}{\cos r} - 2 h n \tan r \sin i = 2 \frac{h}{\cos r} - 2 h n \frac{\sin r}{\cos r} \frac{\sin r}{n} \\ &= \frac{2 h}{\cos r} (1 - \sin^2 r) = 2 h \cos r \end{aligned}$$

essendo $n =$ indice di rifrazione, tale che $1/n = \sin i / \sin r$

(infatti risulta $AD = AC \sin i$ ed $AC = 2 AB \sin r = 2(h / \cos r) \sin r = 2 h \tan r$)

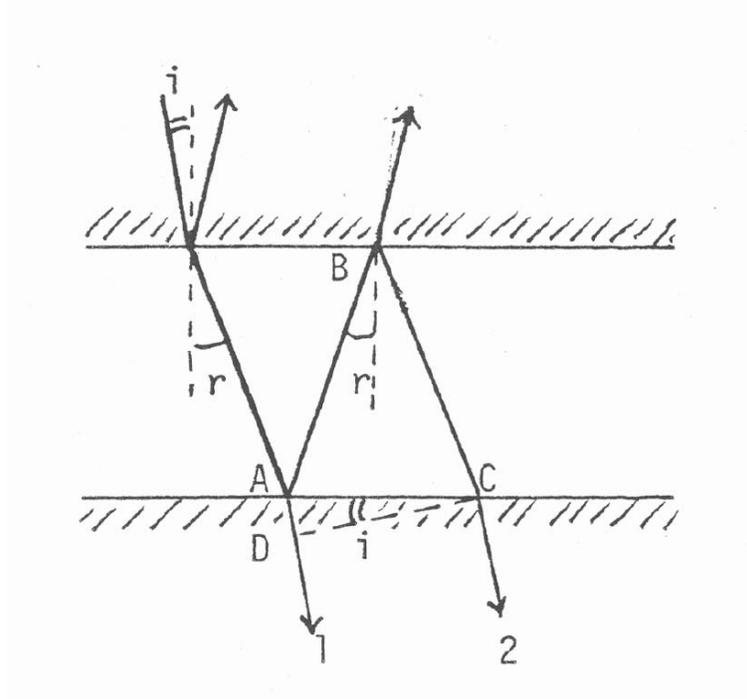


Figura 3.14: Schema ottico di funzionamento di un filtro interferenziale, tramite riflessioni multiple tra due lamine semitrasparenti.

Naturalmente l'intensità dei raggi emergenti successivi decresce con il numero delle riflessioni (ma abbastanza lentamente se si usano materiali con elevato potere riflettente). Questi raggi, portati ad interferire in un punto del piano focale di un sistema ottico, danno origine ad un massimo di luce intenso se la Δ tra ogni due raggi consecutivi è un numero intero di lunghezze d'onda, mentre in caso diverso ($\Delta \neq k\lambda$) l'intensità risultante è praticamente nulla.

I filtri moderni sono per lo più costituiti da un insieme di strati sottili di differente indice di rifrazione, depositati su un supporto di vetro uno sopra l'altro, alternativamente per strati aventi indice più alto e più basso (filtri interferenziali a strati multipli, in numero da 5 a 25). L'interferenza si genera dalle riflessioni sulle superfici separanti strati ad indice diverso, e più numerose sono le riflessioni più il filtro risulta selettivo in lunghezza d'onda. La lamina d'aria è comunemente sostituita da sostanze trasparenti come la *criolite* (floruro di litio e di magnesio), mentre l'argento è ora sostituito dall'alluminio. La lamina d'aria, il cui spessore poteva variare con la pressione, è anche

sostituita da sostanze colorate per cancellare gli ordini che si vogliono escludere. Ad esempio un filtro a $\lambda_0 = 8000 \text{ \AA}$ avrà un filtro rosso per escludere il secondo ordine blu a $\lambda_0 = 4000 \text{ \AA}$. I filtri si distinguono per la larghezza della banda spettrale che viene trasmessa, e per la quantità di luce che lasciano passare: si può avere una trasmissione del 45 % con $\Delta\lambda = 15 \text{ \AA}$ (a metà trasmissione). Naturalmente questi tipi di filtri non sono facili da costruire, e sono piuttosto costosi.

Capitolo 4

Applicazione del Sistema UBV agli ammassi aperti

Abbiamo visto che i vari fattori determinanti gli indici di colore (assorbimento interstellare, gravità e temperatura, composizione chimica) sono così mescolati insieme da rendere molto difficile classificare una generica stella di campo dai soli colori U-B, B-V. Il sistema darà invece i risultati migliori nello studio di stelle di ammasso, quando cioè potremo supporre che tutte le stelle abbiano la stessa composizione, siano alla stessa distanza da noi ed ugualmente assorbite. Iniziamo dagli ammassi aperti o galattici.

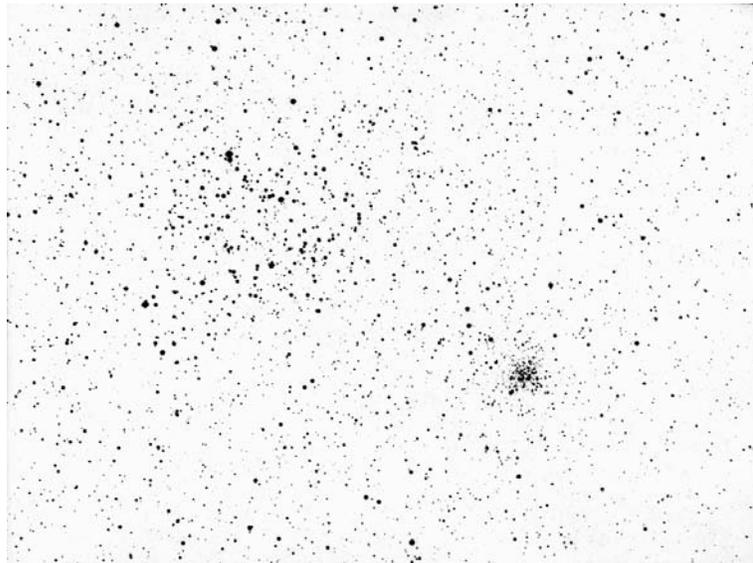


Figura 4.1: *Due ammassi aperti nella costellazione dei Gemelli di diversa concentrazione: M35=NGC 2168 a sinistra e NGC 2158 a destra*

AMMASSI APERTI: LORO MORFOLOGIA

Gli ammassi aperti, o galattici (vedi Figura 4.1), sono costituiti da un numero di stelle da poche decine fino a qualche migliaio. Essi hanno un aspetto più disperso di quelli globulari, che tratteremo in seguito, ed in qualche caso sono difficilmente evidenziabili dalla distribuzione stellare di fondo. Come tipici oggetti di Popolazione I giovane, appartengono al disco della Galassia costituendo un sistema molto appiattito. A causa di questa posizione lungo la fascia della Via Lattea, dove è più forte l'assorbimento interstellare, e del relativo piccolo numero di costituenti, essi sono osservabili bene solo entro un limitato intervallo di distanze (mediamente $d < 4 Kpc$), ma entrambi i parametri possono variare notevolmente, arrivando a distanze di circa $10Kpc$ per ammassi posti nella direzione dell'anticentro galattico.

CRITERI DI CLASSIFICAZIONE

Si possono suddividere secondo

- la concentrazione centrale osservata: dalla più alta, classe I, alla più bassa, classe IV.
- il numero stimato di membri, in classi di ricchezza (poveri con $N < 50$ stelle, medi con $50 < N < 100$, ricchi con $N > 100$ stelle).
- il tipo spettrale in corrispondenza al quale termina la sequenza principale, oppure il range (1,2,3) di magnitudini crescente tra la stella più e meno brillante.

Questi criteri furono introdotti da Trumpler, ed oltre a considerare l'aspetto morfologico tengono conto di importanti caratteristiche fisiche come l'aspetto del diagramma HR (dipendente da parametri come l'età e la composizione chimica) e le classi di ricchezza (legate anche all'evoluzione dinamica degli ammassi). Markarian fa riferimento alle stelle più luminose dell'ammasso, definendo tipi O, B, A, con sottoclassi per evidenziare caratteristiche quali sistemi tipo Trapezio, *catene* di stelle, presenza di nebulosità, etc. I diametri lineari sono dati in Figura 4.2, tra 1.5-15 pc (per lo più tra 2-7, e con $\bar{d} = 4 pc$). Essi sono correlati alle classi di concentrazione, nel senso che i meno concentrati hanno maggior diametro. Da questi valori si può ricavare una densità stellare media negli ammassi, di circa 1-5 stelle per $(pc)^3$. Poiché non tutte le stelle di ammasso, specie se lontano, sono osservabili, la *ricchezza* e la densità vere saranno più elevate dei valori pubblicati.

Tenendo conto del fatto che il *tempo di vita* degli ammassi (fino alla disgregazione) può essere breve rispetto all'età della Galassia, è ragionevole pensare che la maggior parte di essi sia già disgregata (i loro membri divenuti stelle di campo). Si stima infatti

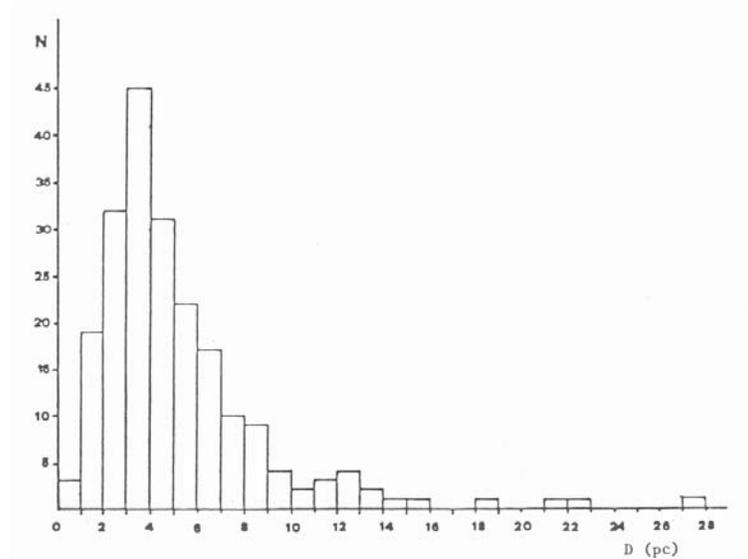


Figura 4.2: *Distribuzione dei diametri lineari degli ammassi aperti dal Catalogo di Becker e Fenkart*

che solo il 10% sopravviva per più di 5×10^8 anni. Nelle regioni esterne della Galassia sopravvivono più a lungo, perché vi è minore l'effetto di disgregazione mareale, e gli ammassi più ricchi sopravvivono due ordini di grandezza più a lungo di quelli poveri.

4.1 Indicatori della struttura galattica

Gli ammassi aperti possono essere usati come *indicatori della struttura galattica*. In generale indicatori di *Struttura della Galassia* devono:

- essere molto giovani, perché i loro moti peculiari tendono a disperderli dal punto di origine,
- essere sufficientemente luminosi per essere osservabili ad alcuni kpc di distanza
- la distanza deve essere ricavabile con discreta precisione.

Ammassi aperti giovani, associazioni di stelle OB, regioni H II, soddisfano a questi criteri. Le distanze di ammasso possono essere misurate in modo accurato, essi contengono stelle luminose, e l'età è ottenibile in modo sicuro (vedi in seguito); inoltre costituiscono campioni omogenei di stelle per età e composizione chimica. Lo studio sistematico degli ammassi aperti, in riferimento alla struttura della Galassia, inizia con Trumpler (1930) che esaminò 334 ammassi distribuiti lungo tutta la Via Lattea, fornendone anche la distanza ed una classificazione morfologica. Una prima conclusione riguardò l'esistenza di notevole assorbimento, stimato allora di circa 0.7 mag/Kpc (dal confronto della luminosità di ammassi simili, supposti avere lo stesso diametro). La distribuzione spaziale portò alle seguenti conclusioni:

- il sistema degli ammassi aperti forma un disco molto appiattito con $d \simeq 30 \text{ Kpc}$ e spessore di solo 1 Kpc ;
- la Via Lattea appare una galassia a spirale risolta, infatti si delineano strutture che possono rappresentare tratti dei bracci, lungo cui si dispongono gli ammassi in modo preferenziale (invece zone di scarsa concentrazione, come nelle costellazioni di Vela ed Aquila, suggeriscono addensamenti di materia oscurante).

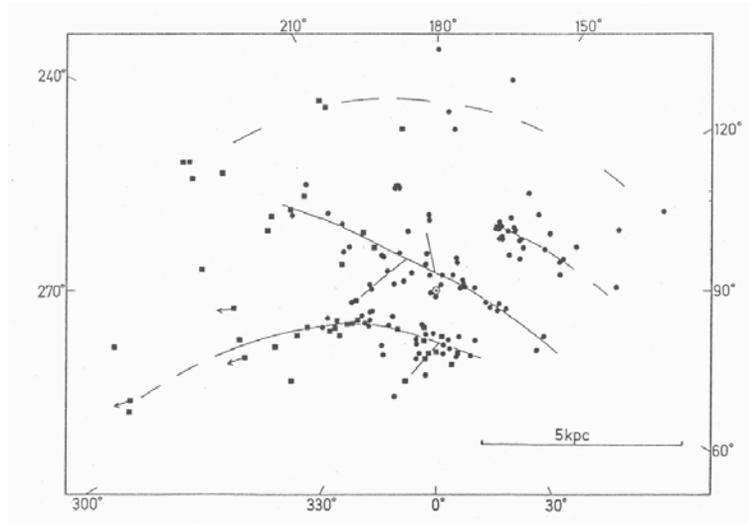


Figura 4.3: *Distribuzione degli ammassi aperti giovani proiettata sul piano galattico che rivela almeno tre porzioni di bracci di spirale*

Il quadro è stato confermato di massima e precisato da lavori successivi, anche collegando ammassi giovani alle regioni ove è massima la distribuzione di gas. L'introduzione della fotometria multi-colore (per determinare accuratamente età e distanza di ammassi) ha permesso di delineare (per es. Becker, 1958-64) la presenza di tre spezzoni di *bracci di spirale*, detti di Perseo (esterno), locale, e del Sagittario (interno), come mostrato in Figura 4.3. La distribuzione degli ammassi deve essere confrontata a quella degli altri indicatori, ed i risultati sono abbastanza in accordo. La struttura dei bracci di spirale è particolarmente ben visibile se si considerano solo gli ammassi aperti più giovani, con stelle O-B. Un braccio di spirale tenderebbe a dissolversi in alcuni 10^7 anni, e così gli ammassi più vecchi (con T.Sp. più avanzati) sono distribuiti in modo più omogeneo senza evidenziare bene i bracci.

Supponiamo ora di avere determinato il *diagramma H-R* di un certo numero di ammassi aperti, come $(V, B-V)$ e poi come $(M_V, B-V)$ tramite la distanza. Si ricorda che diagrammi di questo tipo furono ottenuti da Hertzsprung e Russell (1913) per tutte le stelle di distanza e tipo spettrale noti. Apparve che i punti occupavano solo alcune parti del diagramma: in particolare la *Sequenza Principale* (stelle nane) ove la luminosità decresce con l'avanzare del T. Sp., e distinti rami ai T. Sp. più avanzati

di *giganti e supergiganti*, perché $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ ed a pari T deve essere L maggiore con R ; per esempio se $\Delta m = 5$, $R_g/R_n = 10$). Il diagramma HR delle stelle più brillanti non rispecchiava la funzione di luminosità stellare perché le luminose stelle O-B erano favorite da effetti di selezione; al contrario per le sole stelle vicine al Sole appariva grande abbondanza delle stelle con bassa luminosità. Le differenze riscontrate nei diagrammi H-R di ammassi diversi, venivano interpretate in termini di *evoluzione stellare*. Essendo piccola la differenza di composizione chimica tra i vari oggetti, il parametro dominante era l'*età* dell'ammasso, come vedremo meglio in seguito.

4.2 Distanza ed assorbimento

Per determinare *la distanza e l'assorbimento* si possono sfruttare diverse relazioni tra quantità osservabili. La relazione tra $(B - V)_0$ ed il parametro Q (vedi Figura 4.4) è una curva con tre tratti quasi lineari: il più alto esprime l'equazione già riportata a pag. 34, la pendenza del secondo è dovuta al diminuire del salto di Balmer con l'aumentare dell'indice di colore, il terzo mostra l'ulteriore caduta della T_C e soprattutto la depressione a brevi λ nei T.Sp. più avanzati. Le stelle tra B0-K0 si dispongono lungo questa curva secondo il loro T. Sp. (quindi anche secondo M_V): si può determinare il T. Sp. di una stella sul diagramma data la fotometria a tre-colori, purché essa sia di classe V e priva di assorbimento interstellare. Se esso è presente si può spostare in senso verticale, fino al *fit* i valori della stella, o meglio il diagramma osservato di un ammasso dato, in proporzione all'assorbimento interstellare presente (che non influisce sul Q , ma solo sui valori di B-V).

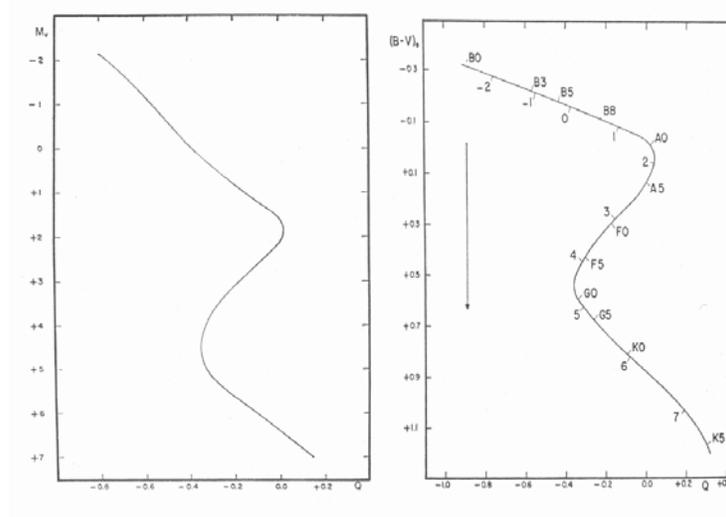


Figura 4.4: Relazioni tra il parametro Q e l'indice di colore $(B-V)$, a destra, e tra Q e la magnitudine assoluta M_V , a sinistra, per stelle di sequenza.

Per stelle di sequenza vale anche una relazione tra M_V e Q (ancora in Figura 4.4): per una determinazione fotometrica della distanza (quindi M_V) di stelle di ammasso, supposte tutte alla stessa distanza, si effettua uno spostamento verticale di *fit* che è questa volta proporzionale al modulo di distanza ($m-M$), che poi deve essere corretto del termine di assorbimento già determinato, per avere \underline{d} in parsec. I sistemi UBV ed RGU sono egualmente efficaci in questi casi.

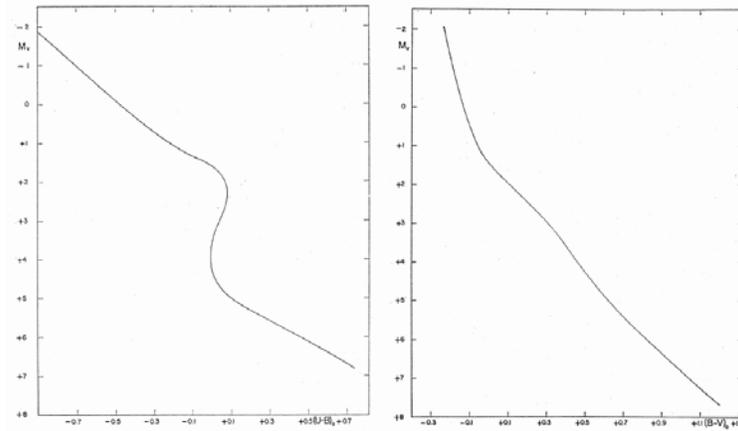


Figura 4.5: Relazioni tra magnitudine assoluta M_V e l'indice di colore $(B-V)$, a destra e l'indice di colore $(U-B)$, a sinistra, per stelle di sequenza. Assieme al diagramma a due colori, questi sono diagrammi fondamentali nel sistema UBV.

Si possono anche sfruttare le relazioni tra magnitudine assoluta e indici di colore (mostrate in Figura 4.5); il salto di Balmer e la depressione di stelle con T. Sp. avanzato risultano in forme diverse per i due colori: esse vengono usate per determinare in modo ancor più efficace distanza ed eccesso di colore simultaneamente con due sfilamenti sui due assi fino ad ottenere l'accordo con i diagrammi colore/magnitudine dell'ammasso in esame. Tre condizioni devono essere rispettate: entrambi i diagrammi coincidano il più possibile, per escludere stelle evolute; il modulo di distanza risulti lo stesso dai due diagrammi, gli eccessi di colore siano nel rapporto previsto dal sistema fotometrico. Il metodo funziona nell'ipotesi che la Sequenza Principale si realizzi bene in ogni ammasso, e che la legge di assorbimento sia uniforme. I risultati ottenuti si possono ritenere corretti entro il 10%.

Combinando adesso insieme vari diagrammi colore-magnitudine, otteniamo un famoso diagramma che sta alla base della teoria dell'evoluzione stellare (Figura 4.6). La figura mostra sequenze principali più o meno estese verso l'alto, con il punto terminale che mostra deviazioni verso destra. La figura si interpreta in funzione dell'età dell'ammasso, decrescente da M 67 (il più vecchio, età circa 6×10^9 anni) fino ad NGC 2362 (il più giovane, età circa 2×10^7 anni). Si noti che NGC 2362 ed h e χ Persei hanno stelle luminosissime, tra le più brillanti della Galassia. Dal punto di vista pratico l'età è indicata dal punto terminale della sequenza principale, dove si devia verso destra, verso la zona delle giganti rosse (da cui è separata dal *gap di Hertzsprung*). Però il punto

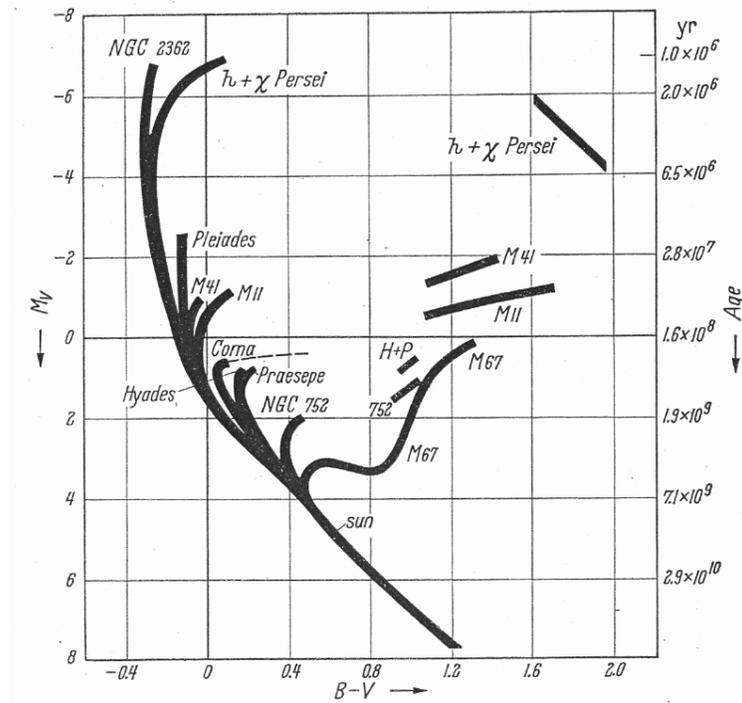


Figura 4.6: Sovrapposizioni di diagrammi $c-m$ per vari ammassi aperti. Sulla destra è data una scala di età basata sulla posizione del turning point della sequenza principale.

preciso non è facilmente determinabile, perché non è chiaro se una stella sia ancora sul luogo teorico detto ZAMS (*Sequenza Principale di Età Zero*) o se stia già evolvendo verso le giganti: per esempio nelle Pleiadi lo ZAMS cessa verso $B - V = 0 / + 0.1$, in NGC 2362 verso $B - V = -0.3$ ma lì il diagramma HR è così ripido da rendere incerto $M_{V,sup}(ZAMS)$ che per NGC 2362 dovrebbe essere circa -2.5. Le stelle più brillanti dovrebbero essere stelle già lievemente evolute, le cosiddette *giganti blu*. Una accurata discussione della ZAMS è dovuta a Blaauw, ed è mostrata in Figura 4.7

Gli ammassi entro 300 pc dal Sole, per cui si possono avere misure trigonometriche dirette, ad esempio col satellite Hipparcos, sono qui elencati. Purtroppo negli ammassi più vicini mancano le stelle più brillanti.

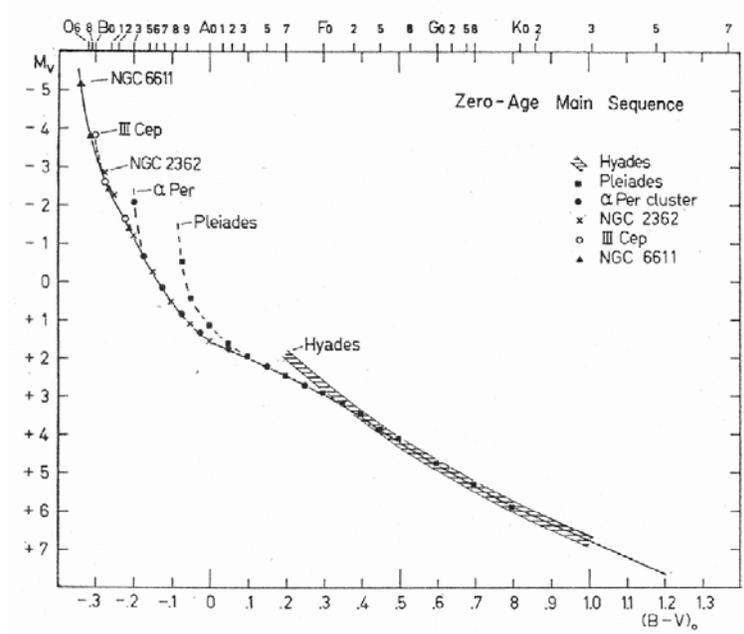


Figura 4.7: Costruzione della sequenza principale di età zero (ZAMS) secondo Blaauw, sfruttando le porzioni di sequenza non evoluta per ammassi di età diversa.

Nome	$d(pc)$	Primo T. SP. in sequenza
Iadi	40	A 2
Coma	80	A 0
Pleiadi	125	B 5
IC 2391	150	B 5
Presepe	160	A 0
α Persei	170	B 1
NGC 6475	230	B 5
NGC 7092	265	A 0

4.3 Interpretazione dei diagrammi C-M degli ammassi aperti

Per interpretare teoricamente il diagramma conviene operare una sostituzione di variabili, passando dall'indice di colore (B-V) alla temperatura efficace T_{eff} , e dalla M_V alla M_{bol} , entrambe le operazioni non prive, come si è visto di incertezze (vedi Figura 4.8). Ricordiamo che è

$$\log(L/L_{\odot}) = 0.4 (M_{bol,\odot} - M_{bol}) \quad ; \quad \log(L/L_{\odot}) = 4 \log(T_e/T_{e,\odot}) + 2 \log(R/R_{\odot})$$

con $M_{bol,\odot} = 4.63$ $L_{\odot} = 3.8 \times 10^{33}$ erg/sec $T_{e,\odot} = 5800^0K$ $R_{\odot} = 6.95 \times 10^{10}$ cm

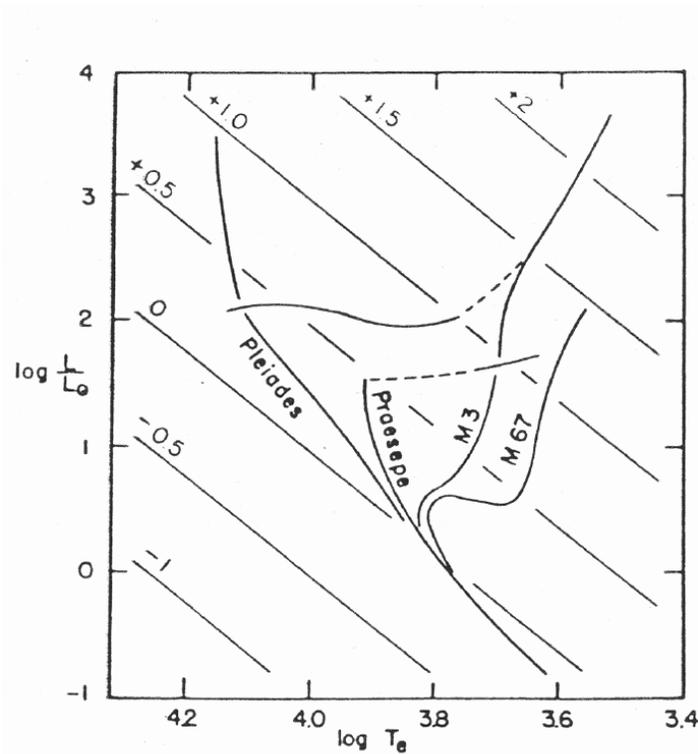


Figura 4.8: Il diagramma c-m, o l'analogo HR, trasformato nel piano teorico a coordinate $\log T_e$, $\log(L/L_{\odot})$. Le rette oblique danno i luoghi di equal raggio in unità di $\log(R/R_{\odot})$.

Infine possiamo calibrare la massa \underline{M} mediante la relazione empirica massa-luminosità (Figura 4.9). Il diagramma HR dimostra quindi una relazione tra le grandezze *Massa/Raggio/Luminosità* e presumibilmente *anche composizione chimica*; a tale insieme di relazioni si può facilmente arrivare con semplici ragionamenti. Infatti se la stella è una sfera gassosa in equilibrio, varrà la condizione di equilibrio idrostatico:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) = -g(r) \rho(r)$$

ove però essendo all'interno della stella, e non negli strati atmosferici l'accelerazione di gravità non è costante. Inoltre si ha anche:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

Varrà anche l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$P = \frac{K}{m} \rho T$$

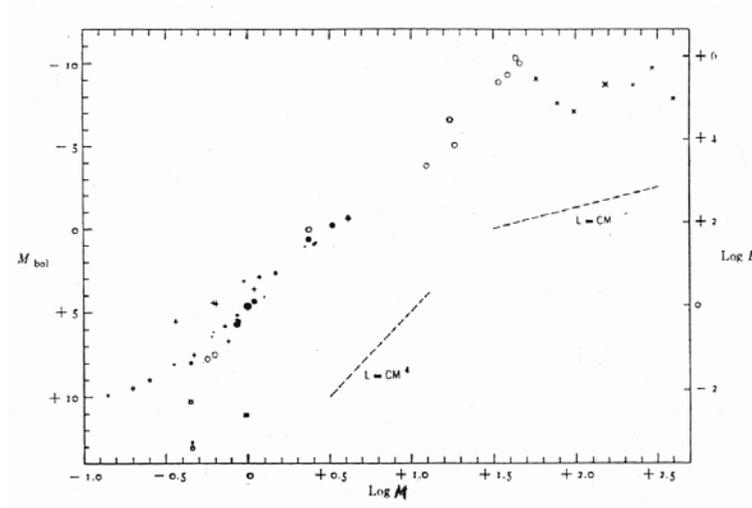


Figura 4.9: La relazione Massa-Luminosità empirica ricavata da Kuiper sfruttando le masse di stelle doppie. La relazione è valida per stelle di sequenza mentre le stelle giganti e supergiganti, a parità di massa, sono sovraluminose. La relazione non è soddisfatta dalle nane bianche che appaiono nettamente sottoluminose rispetto a stelle di sequenza di pari massa.

con $m =$ massa media, cioè tale che $M/m =$ numero totale di particelle.

Diciamo poi $\epsilon(r)$ l'energia liberata al secondo per grammo di materia, funzione a sua volta di T , ρ e composizione chimica, e scriviamo la luminosità totale come

$$L = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r) dr$$

od anche all'equilibrio

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

che rappresentano il flusso liberato dalla sfera di raggio r e la produzione di energia dentro la stessa sfera, quantità che all'equilibrio devono uguagliarsi.

Ora, per avere un'idea delle relazioni, sostituiamo alle derivate delle differenze finite:

$$\frac{\Delta P}{R} = \frac{P_{centr} - P_R}{R} \propto \frac{M}{R^2} \frac{M}{R^3}$$

cioè

$$P \propto \frac{M^2}{R^4}$$

ma

$$T \propto \frac{P}{\rho} = \frac{M^2}{R^4} \frac{R^3}{M}$$

quindi

$$T = \frac{M}{R} \quad ;$$

ed anche

$$L = \frac{RT^4}{\rho} = R (M^4/R^4) (R^3/M)$$

relazione questa che discende dall'equazione del trasporto della radiazione, e quindi

$$L \propto M^3$$

la luminosità aumenta con la terza potenza della massa; vedi Figura 4.9. Le relazioni tra struttura, massa, luminosità (e composizione chimica) qui delineate sono formalmente espresse da un importante teorema detto di *Vogt-Russell*: se pressione P , opacità k , e generazione di energia ϵ sono funzioni solo dei valori locali di temperatura T , densità ρ , e composizione chimica, allora la struttura della stella è univocamente determinata dalla *massa M e dalla composizione chimica*. Il teorema non prevede uno specifico meccanismo per la generazione d'energia. Ora sono facilmente prevedibili due tipi di energia:

l'*energia termica*

$$E_T = \int_0^R \frac{3kT}{2m} 4\pi\rho r^2 dr \simeq \left\langle \frac{3kT}{2m} \right\rangle M$$

che per il Sole vale circa

$$E_T = 5 \times 10^{48} \text{ erg}$$

e l'*energia gravitazionale*

$$E_G = - \int_0^R \frac{GM_r}{r} 4\pi\rho r^2 dr \simeq \left\langle \frac{GM_r}{r} \right\rangle M$$

che per il Sole vale circa

$$E_G = -4 \times 10^{48} \text{ erg}$$

Dall'equazione dell'equilibrio idrostatico si ha che

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{GM(r)}{r^2} \rho \quad 4\pi r^3 dP = - \frac{GM(r)}{r} 4\pi\rho r^2 dr$$

integriamo sul lato sinistro per parti tra 0 ed R:

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = |4\pi r^3 P|_0^R - \int_0^R 3P 4\pi r^2 dr$$

il primo termine a secondo membro si annulla perché ad R è nullo P, ed a 0 è nulla la coordinata radiale r. Dall'equazione dei gas perfetti si ha:

$$3P = \frac{3k}{m} \rho T \quad ,$$

quindi

$$- \int_0^R \frac{3kT}{m} 4\pi \rho r^2 dr = \int_0^R \frac{-GM_r}{r} 4\pi \rho r^2 dr$$

cosicché è esattamente

$$-2 E_T = E_G$$

ovvero

$$2 E_T + E_G = 0$$

relazione che esprime il *teorema del viriale*.

Ora possiamo immaginare cosa succede alla stella se la struttura si modifica, ad esempio se R diviene più piccolo pur mantenendo costante la massa. L'energia gravitazionale diviene più grande in valore assoluto, quindi l'energia termica aumenta (T diviene più grande) ma solo della metà. L'altra metà viene irraggiata, perduta dalla stella. Così la vita media di questo processo di contrazione può essere stimata dalla relazione approssimata:

$$\tau_K \sim \frac{E_T}{L}$$

che per il Sole vale

$$\tau_K = 5 \times 10^{48} \text{ erg} / 3.8 \times 10^{33} \text{ (erg/sec)} = 1.3 \times 10^{15} \text{ sec} = 4.1 \times 10^7 \text{ anni}$$

Il tempo medio di contrazione (*tempo Kelvin*) è dunque corto, e si richiede la presenza di un'altra sorgente di energia, che sappiamo ora essere quella nucleare. A seconda dei vari processi di trasmutazione di un elemento in uno più pesante (ad esempio: idrogeno in elio) si libera un'energia che varia tra il 7 e l'8 per mille della massa coinvolta:

$$\Delta E_N = \Delta m c^2 \simeq 0.007 mc^2$$

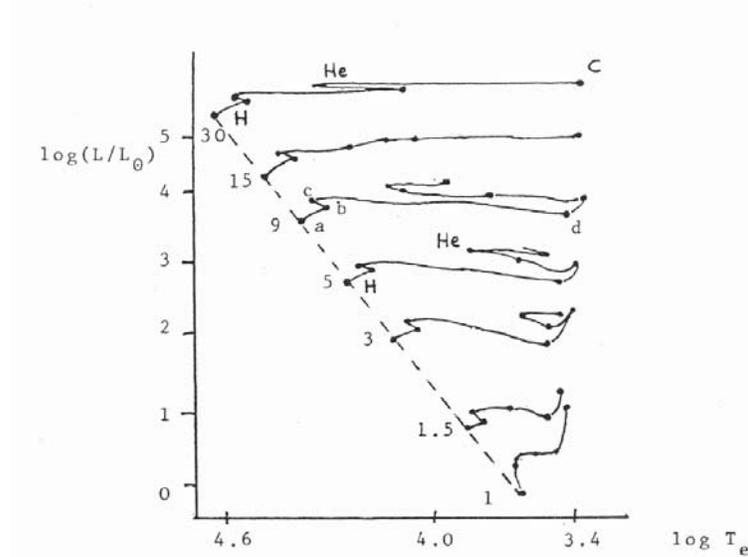


Figura 4.10: Tracce evolutive fuori della ZAMS per varie masse stellari. Sono indicati i luoghi d'innesco dell'elio e del carbonio.

Ebbene la sintesi di ogni grammo di idrogeno in elio realizza $0.007 c^2 = 6 \times 10^{18}$ erg. È facile ricordare che il peso di un atomo di idrogeno in "unità di massa fisica", pari a 1/16 della massa dell'isotopo 16 dell'ossigeno, è 1.0081, e quella dell'elio 4.0026, da cui $\Delta m = 0.0298/4.0324 \simeq 0.007$. Il Sole che libera 3.8×10^{33} (erg/sec)/ 1.9×10^{33} gr $\simeq 2$ erg/grsec impiegherebbe per bruciare tutta la sua massa in idrogeno:

$$\tau = 6 \times 10^{18} / 2 \text{ (sec)} = 3 \times 10^{18} \text{ sec} = 1.1 \times 10^{11} \text{ anni}$$

La vita media è ora così lunga rispetto a τ_K che ha senso considerare un ipotetico luogo di equilibrio della struttura stellare, la *Sequenza Principale* (MS). A rigore dovremmo avere tante sequenze principali a seconda delle diverse composizioni chimiche. Ora l'innesco delle reazioni nucleari agisce come un sensibilissimo stabilizzatore della struttura, cioè del raggio R e dunque della luminosità L , ed il tempo di vita in sequenza è molto lungo. Esso vale più propriamente

$$\tau_{MS} = 0.007 \frac{c^2 \alpha M}{L}$$

con α percentuale di massa che interviene nelle reazioni nucleari. La prima discussione del parametro α è stata fatta da Schönberg e Chandrasekhar che hanno trovato circa 10^{-1} , da cui numericamente

$$\tau_{MS} = 1.1 \times 10^{10} \frac{M/M_{\odot}}{L/L_{\odot}}$$

che è la scala dei tempi nella Figura 4.6. Si vede che in prima approssimazione vale la proporzionalità $\tau = M/L = M/M^3 = M^{-2}$. Però queste considerazioni sono molto schematiche; ci si deve aspettare che sia $\alpha = \alpha(M)$, ed anche che la dipendenza di $L(M)$ non sia esattamente $L = M^3$, ma piuttosto $L = M^\beta$ con $3 < \beta < 4$, sicché

$$\tau_{MS} = 1.1 \times 10^{10} M^{-\beta+1} \quad (\propto M^{-2} \div M^{-3})$$

La vita media quindi diminuisce molto in fretta con la massa M . Cosa succede quando la stella esaurisce l'idrogeno centrale (cioè quasi circa il 10 % di massa stellare consumato nel nocciolo stesso)? La struttura nucleare si disaccoppia da quella esterna: il nucleo si contrae e riscalda, mentre l'involucro esterno si espande e raffredda. Il risultato osservativo è che la stella *si muove dalla MS* verso l'alto e a destra, abbastanza lentamente all'inizio, dopodiché il *gap di Hertzsprung* verrà attraversato in brevissimo tempo (vedi Figura 4.10). Quindi di nuovo la ZAMS è più un concetto teorico che una concreta possibilità osservativa, se ci si limita a precisioni dell'ordine di 0.1 mag sull'asse delle ordinate. La seguente tabella riporta i valori della ZAMS secondo Sandage.

Sequenza Principale di Età Zero

M_{vis}	$B - V$	$\log T_e$	M_{bol}	$\log \frac{L}{L_\odot}$	$\log \frac{R}{R_\odot}$
-2.0	-0.24	4.43	-4.9	+3.81	+0.57
-1.5	-0.22	4.38	-4.1	+3.49	+0.51
-1.0	-0.19	4.30	-3.2	+3.13	+0.49
-0.5	-0.16	4.23	-2.3	+2.77	+0.45
0.0	-0.14	4.19	-1.61	+2.50	+0.39
+0.5	-0.11	4.15	-0.84	+2.19	+0.32
+1.0	-0.06	4.09	-0.01	+1.86	+0.27
+1.5	0.00	4.03	+0.78	+1.54	+0.23
+2.0	+0.08	3.97	+1.56	+1.23	+0.20
+2.5	+0.17	3.92	+2.25	+0.95	+0.16
+3.0	+0.28	3.88	+2.89	+0.70	+0.11
+3.5	+0.39	3.83	+3.47	+0.46	+0.09
+4.0	+0.47	3.81	+3.99	+0.26	+0.03
+4.5	+0.55	3.78	+4.48	+0.06	-0.01
+5.0	+0.63	3.75	+4.95	-0.13	-0.04
+5.5	+0.72	3.72	+5.39	-0.30	-0.07
+6.0	+0.82	3.68	+5.80	-0.47	-0.07
+6.5	+0.93	3.65	+6.17	-0.62	-0.09
+7.0	+1.04	3.62	+6.52	-0.76	-0.10
+7.5	+1.16	3.59	+6.83	-0.88	-0.10

A parte le incertezze teoriche, la ZAMS può servire come indicatore di distanza dell'ammasso con un metodo di *fit* tra la sequenza principale osservata nell'ammasso e sequenza *media* (cioè spostando in due direzioni, orizzontale per l'assorbimento interstellare, e verticale per la distanza; si ricavano ancora simultaneamente d ed A_V come indicato in precedenza).

Concludiamo questa sezione con un richiamo. Si è detto che τ_K è troppo breve rispetto alla vita di una stella. Tuttavia la contrazione gravitazionale gioca un ruolo importante nelle primissime e rapide fasi (*presequenza*) dell'evoluzione stellare. In queste la stella si sposta dall'alto (la sua luminosità è irradiata soprattutto nell'IR) verso il basso e poi da destra a sinistra nel diagramma HR (vedi Figura 4.11). Dopodiché per la diminuzione di R ed il conseguente aumento della T e ρ centrali, la contrazione si ferma quando la stella innesca nel centro il bruciamento nucleare dell'idrogeno, a partire da $T \simeq 10^7$ gradi, stabilizzandosi nella MS. Per il Sole il tempo impiegato è

$$\tau_{p-s,\odot} = 5 \times 10^7 \text{ anni}$$

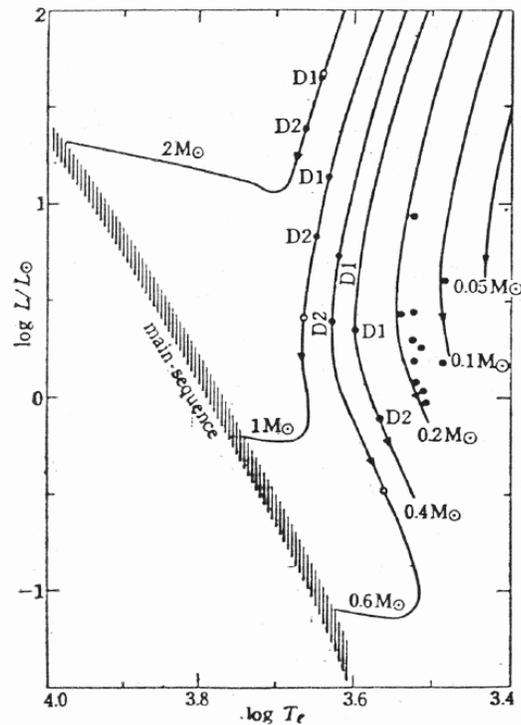


Figura 4.11: *Tracce evolutive di stelle in fase di contrazione gravitazionale (presequenza). I punti neri rappresentano stelle di tipo spettrale M osservate nella Nebulosa di Orione.*

In breve, il tempo di pre-sequenza è minore di 2 o 3 ordini di grandezza del tempo

speso in MS prima di evolvere oltre. Questa grande differenza di rapidità di evoluzione non è dovuta all'emissione di energia (L_* è circa la stessa nelle fasi di contrazione e di MS), ma piuttosto al fatto che la E_G usata nella contrazione è molto minore della E_N usata in MS. (Per una stella B0 il τ_{p-s} vale circa 10^5 anni).

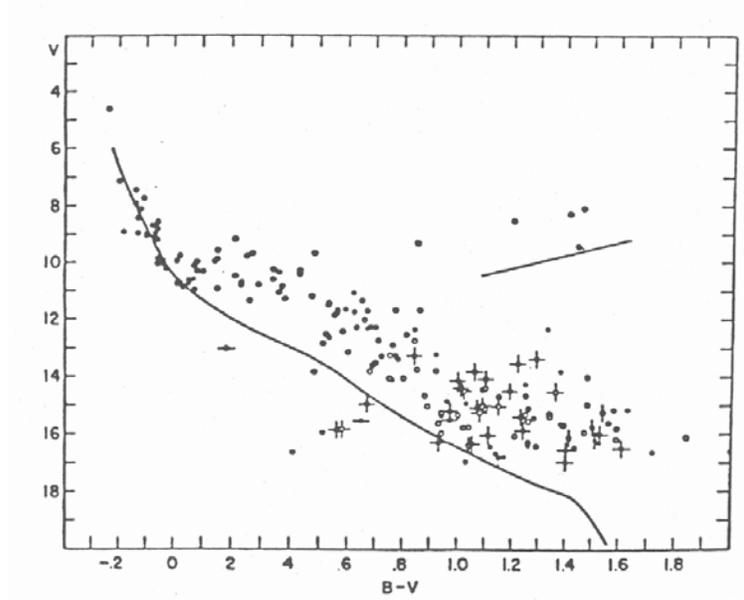


Figura 4.12: *Diagramma c-m dell'ammasso giovane NGC 2264. L'età è stimata di 3 Myr e solo le stelle massicce sono in sequenza. Quelle più fredde del tipo A0 sono ancora in contrazione gravitazionale.*

4.4 Raccordo di ammassi alla ZAMS

Una sequenza principale di età zero (ZAMS) deve essere ottenuta utilizzando ammassi giovani, contenenti stelle O-B. Però si deve notare che negli ammassi più giovani, in cui le stelle di alta sequenza possono essere considerate di età zero, quelle meno massicce non hanno invece completato la fase di pre-sequenza (così la MS non è popolata in tutta la sua possibile estensione, vedi Figura 4.12). Invece se si usano ammassi di età non tanto giovane, le stelle più luminose o massicce saranno soggette ad effetti evolutivi significativi, nel senso di una maggiore luminosità per deviazioni fuori sequenza. Per determinare una ZAMS si dovranno allora raccordare porzioni adeguate di sequenze di ammassi di età diversa, come mostrato in Figura 4.7. Definita una ZAMS, quale porzione di sequenza di ammasso si deve scegliere per il confronto? Va scelta una zona non interessata da effetti evolutivi e naturalmente considerando solo i membri certi dell'ammasso. Sandage (1957) propose di considerare solo stelle più deboli di almeno 3 mag rispetto all'estremità più brillante della sequenza. Poiché così si tolgono informazioni sulle stelle meglio osservabili, sono stati poi elaborati metodi per

utilizzare anche le stelle più brillanti ed evolute fuori sequenza, a patto di correggerne propriamente gli effetti evolutivi.

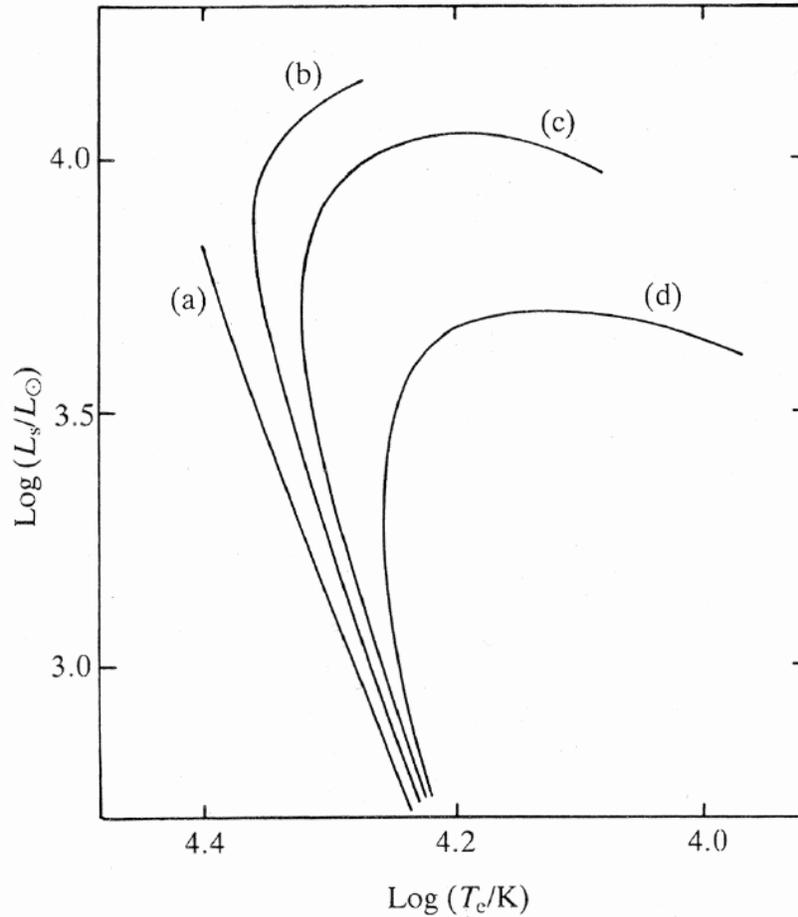


Figura 4.13: *Isocrone per ammassi giovani derivate dai modelli di evoluzione stellare. Sono mostrate: la Sequenza principale (a), e tre isocrone (b, c, d) corrispondenti ad età di 10^7 , 1.7×10^7 e 2.7×10^7 rispettivamente.*

Con *isocrone* di varie età (vedi Figura 4.13) è ancora possibile ricavare il modulo di distanza, cercando il migliore raccordo possibile tra la curva teorica e i dati fotometrici corretti per l'assorbimento dell'ammasso, determinando in tal modo anche l'età.

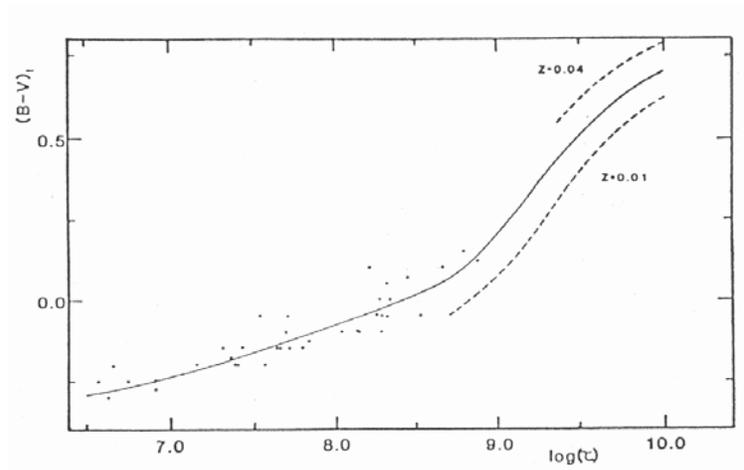


Figura 4.14: *Calibrazione dell'indice di colore al turning-point $(B - V)_t$ in termini dell'età dell'ammasso in $\log t$. La linea continua è la relazione per una composizione chimica solare ($Z = 0.02$).*

Una ulteriore maniera, infine, di determinare l'età è quella, vista più sopra, di sfruttare il $(B - V)_t$ al *turning point*, nel diagramma colore-grandezza dell'ammasso, sempre tolto l'eventuale effetto dell'assorbimento. La Fig.4.14 dà la relazione tra il $(B - V)_t$ e l'età, per varie composizioni.

Capitolo 5

Applicazione della fotometria UBV agli ammassi globulari

5.1 Introduzione

Lo studio degli ammassi globulari si è rivelato di fondamentale importanza in due campi dell'indagine astrofisica:

1. la determinazione del modello spaziale della Galassia (dimensioni e struttura),
2. la scoperta delle popolazioni stellari.

I primi ammassi globulari furono visti pochi decenni dopo l'invenzione del cannocchiale (Ihle osserva M22 nel 1665). Messier, al finire del secolo XVIII, cataloga diverse decine di ammassi considerandoli piccole nebulose da non confondere con comete. Herschel, con telescopi di dimensioni maggiori, è il primo a scoprirne la vera natura: ammassi di stelle a simmetria sferica (M53). Agli inizi di questo secolo, con l'avvento della fotografia astronomica, si scoprirono in questi oggetti numerose variabili, dette *variabili d'ammasso* di caratteristiche simili a variabili di campo del tipo RR Lyr.

Questi oggetti, al telescopio o su di una fotografia, si mostrano a simmetria circolare con una distribuzione regolare di stelle decrescente dal centro più denso ad una periferia via via meno popolata, vedi Figura 5.1. Per poterli distinguere fisicamente dalle *galassie ellittiche* alle quali assomigliano per forma e distribuzione di luminosità, si impongono dei limiti alle dimensioni ed alla magnitudine assoluta integrata:

D tra 10 e 200 pc con un valore medio $\overline{D} = 40 \text{ } pc$

M_V tra -5 e -10 con un valore medio $\overline{M}_V = -7.5$

esistono però degli ammassi con luminosità molto basse (Palomar clusters $M_V = -3$).

Il numero di stelle è dell'ordine di 10^5 il che comporta una densità media di 3-5 stelle per pc^3 (la densità vicino al sole è di 0.1 stelle per pc^3) ma nel centro la distanza

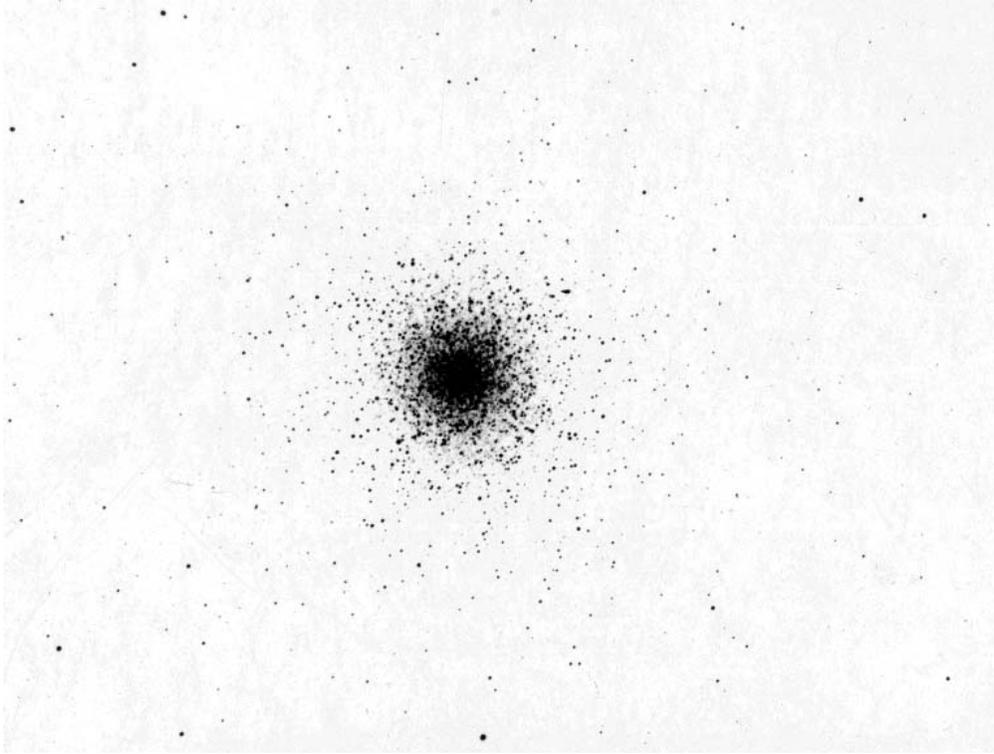


Figura 5.1: *L'ammasso globulare M 13 nella costellazione dell'Ercole.*

tra stella e stella risulta dell'ordine delle distanze planetarie, il che però non significa che le stelle siano *vicine*. Infatti la probabilità, partendo dal centro di un ammasso ricco e proseguendo per una direzione qualsiasi, di incontrare una stella è bassissima.

5.2 Densità stellari

Poiché questi sistemi sono trasparenti, nel senso che sono privi di polveri e gas che possono oscurare parte dei membri, è possibile da conteggi di stelle risalire alla distribuzione di densità. Il problema è quello di risalire ad una densità spaziale dalla conoscenza di quella osservata superficiale.

Consideriamo, come in Figura 5.2, un sistema di coordinate rettangolari con origine al centro dell'ammasso. Gli assi OX ed OY siano sul piano tangente la sfera celeste che coincide con il piano del disegno. L'asse OZ è diretto nella direzione della visuale. Sia $D(r)$ la densità stellare spaziale a distanza r dal centro dell'ammasso, assunto possedere simmetria sferica, ed $F(x) dx$ il numero di stelle visibili in una striscia di ampiezza dx e posta a distanza x dalla OY . Si avrà:

$$F(x) dx = dx \int \int D(r) dy dz$$

ove

Il secondo membro è una funzione del limite inferiore di integrazione e derivando rispetto a x si ottiene la funzione cercata:

$$D(x) = -\frac{F'(x)}{2\pi x} = D(r)$$

per la simmetria.

Per $D(r)$ si danno funzioni del tipo

$$D(r) \sim \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_t}\right)^2$$

ove r_t è il *raggio di stabilità* ovvero il *tidal radius* dell'ammasso, dato da:

$$r_t = R_P \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3}$$

ove

R_P è la distanza perigalattica

m : la massa dell'ammasso $10^5 - 10^6 m_\odot$

M : la massa della Galassia $10^{12} m_\odot$

I cataloghi moderni contengono alcune centinaia di ammassi globulari, si pensa che la Galassia ne contenga un migliaio. Globulari se ne sono trovati in galassie esterne come M31 ed M87.

La distribuzione peculiare in cielo di questi oggetti (concentrati dalla parte del centro della Galassia e rari nella parte opposta) deriva dalla forma del sistema globale degli ammassi. Questa è stata scoperta da Shapley negli anni '30, studiando posizione e distanza di una cinquantina di globulari. Si notò che questi erano distribuiti in un immenso sistema sferico avente diametro di diverse decine di kpc, con un addensamento verso il nucleo della Galassia ed in lenta rotazione. Questi studi portarono ad una prima conoscenza delle dimensioni del nostro Sistema Stellare e della posizione eccentrica del Sole rispetto al centro, cui dista in base a dati moderni 8.5 kpc, e che spiegava la peculiare distribuzione degli ammassi in cielo. Attualmente si sono misurate distanze di ammassi globulari maggiori di quelle delle Nubi di Magellano.

5.3 Cenni di evoluzione dinamica

Studiando la distribuzione delle posizioni e velocità radiali di questi oggetti si notarono che di regola ammassi distribuiti ad alta latitudine galattica presentavano alta velocità rispetto al Sole. Questi percorrevano orbite eccentriche e molto inclinate rispetto al disco galattico e formavano il sistema di *Alone*. Altri erano concentrati verso il nucleo ed

a basse latitudini galattiche con velocità basse ed orbite circolari: il sistema di *nucleo-disco*. Il passaggio di un ammasso al *perigalattico* (punto dell'orbita più vicino al centro della Via Lattea) lascia traccia sulle dimensioni dell'oggetto: si trova infatti che la distribuzione delle stelle dei globulari è, in periferia, condizionata da effetti mareali che pongono dei limiti alle dimensioni dell'oggetto e che si possono determinare dallo studio della distribuzione di luce (*leggi di King* e raggi di *core* e *mareali*). Quindi dall'aspetto di un ammasso e da informazioni sulla velocità si può risalire al tipo d'orbita.

Vi sono dei problemi ancora aperti riguardanti l'evoluzione dinamica degli ammassi globulari. È importante il concetto di *tempo di rilassamento*:

$$T(rel) = 8 \times 10^5 \frac{N^{1/2} R^{3/2}}{m^{1/2} (\log N - 0.5)} \text{ anni}$$

com m massa individuale delle N stelle, in masse solari, ed R raggio in pc. I raggi vengono fissati, analogamente a quanto avviene per oggetti estesi, da condizioni oggettive quali curve isodense od isofote di un livello determinato. Per un ammasso aperto come le Pleiadi si ha $T(rel) = 5 \times 10^7$ mentre per un globulare si ha $T(rel) = 10^9$ anni.

Il significato fisico di $T(rel)$ è il seguente: occorre all'ammasso un intervallo di tempo $T(rel)$ per accorgersi di una perturbazione, quale ad esempio la fuga di una stella che altera la distribuzione di equilibrio delle velocità, e ripristinare le condizioni di equilibrio preesistenti. Questi sistemi sono in equilibrio a causa del bilancio tra energia potenziale ed energia cinetica e mostrano una distribuzione di velocità delle stelle maxwelliana troncata alle alte velocità, però vi è sempre una probabilità che delle stelle abbiano velocità maggiori di quella di fuga ed abbandonino il sistema. Quindi il fenomeno del rilassamento è continuo.

Se un ammasso globulare è rilassato, vi è equipartizione di energia tra le varie stelle e quindi le più massicce si muovono poco mentre le più leggere presentano le velocità più alte. Questo comporta una segregazione di massa all'interno dell'ammasso stesso, con le stelle più pesanti verso il centro e le più leggere in periferia. Ciò si può verificare facilmente tramite conteggi in anelli concentrici che dimostrano come la distribuzione del numero di stelle in funzione della magnitudine apparente V (stelle più deboli presumibilmente anche meno massicce), normalizzata ad una certa V , sia sempre più ripida per le zone più esterne.

Il $T(rel)$ controlla il tempo di evaporazione delle stelle dell'ammasso secondo la:

$$\frac{\Delta N}{N} = 10^{-2} \frac{\Delta T}{T_{rel}}$$

ove ΔT è l'intervallo di tempo in cui, per evaporazione, l'ammasso perde ΔN stelle. Poiché $T(rel)$ varia con N ed R , l'evaporazione è sempre più veloce ed in pochi $T(rel)$ l'ammasso è destinato al collasso. Si stima che il tempo di evaporazione per un ammasso aperto sia, $\tau_{ev} = 3 \times 10^9$ anni, mentre per un ammasso globulare $\tau_{ev} = 8 \times 10^{10}$ anni. Data l'età di questi ammassi, tra i più vecchi oggetti che si conoscano, essi dovrebbero

essere quasi tutti collassati. Deve esistere quindi un meccanismo che li salva da questa fine. Si pensa che questo possa essere la formazione di binarie strette che, con un aumento di energia cinetica al sistema, lo faccia sopravvivere al collasso. Si possono distinguere fotometricamente, con la presenza o meno di un picco di luce al centro, ammassi che hanno, o non ancora subito il collasso. Un problema attuale è spiegare come mai di ammassi globulari post-collasso se ne vedano pochi (1/10 del totale). Forse i modelli di evoluzione dinamica sono errati o forse la distribuzione di luminosità non rispecchia quella di massa e vi è una popolazione invisibile di stelle ormai spente che però, con la loro massa, influiscono sull'equilibrio del sistema.

5.4 Criteri di classificazione

Gli ammassi globulari sono divisi in classi di concentrazione, che vanno dalla I (molto densi) fino alla XII (molto aperti), e soprattutto in *classi di metallicità* stabilite da *Morgan* dall'analisi delle righe spettrali: dalla classe I = ammassi molto poveri di metalli, alla classe VIII = ammassi di cosiddetta *alta* abbondanza (cioè alta in senso relativo). Esiste una corrispondenza per cui gli ammassi più poveri di metalli sono collegati al sistema di *halo*, di cui condividono le proprietà cinematiche mostrando infatti alta velocità relativa al Sole, e quelli più ricchi di metalli al sistema di *nucleo-disco*, di bassa latitudine galattica e con bassa velocità relativa al Sole. Nota peraltro che l'ammasso M 56 appartiene al sistema di *halo*, eppure è visto proiettarsi verso il centro galattico, perché lo sta attraversando nella sua orbita molto elongata (ed infatti se ne misura alta velocità radiale).

5.5 Le stelle variabili

Tra gli ammassi globulari poveri di metalli ci possono essere ammassi con molte *variabili di tipo RR Lyrae* (p. es. M 3 ne ha oltre 200), mentre in quelli *ricchi* ce ne sono sempre poche (47 Tuc ne ha solo tre, a pari abbondanza totale di stelle). Per le variabili RR Lyr, che sono del tipo Cefeidi pulsanti, ricordiamo che esse hanno periodi $P = 0.2 - 1.0$ giorni, spettro di tipo A-G variabile attraverso il periodo. Esistono RR Lyr del sottotipo *a* con ampiezza $A = 0.8 - 1.4$ mag (decescente col periodo), $P = 0.4^d - 0.8^d$, curva di luce asimmetrica con una salita ripida verso il massimo e discesa più lenta; e del sottotipo *c* con modesta ampiezza $A = 0.3 - 0.6$ mag, $P = 0.2^d - 0.4^d$ più brevi, ed una curva di luce sinusoidale (vedi la Figura 5.3). Secondo le variabili RR Lyr in esse contenute, gli ammassi globulari vengono suddivisi per l'appartenenza ai due *gruppi di Oosterhoff*, due gruppi ben separati (vedi Figura 5.4), tenendo conto del periodo *medio* dei due tipi di variabile e della loro relativa abbondanza numerica: il *I°* gruppo risulta associato agli ammassi globulari con maggior abbondanza metallica, il *II°* gruppo a quelli con minor metallicità. Nel diagramma HR le RR Lyr del sottotipo *c* (con minore indice di colore) stanno sistematicamente sul lato *blu* del ramo orizzontale, mentre quelle del sottotipo *a* stanno sul lato *rosso*.

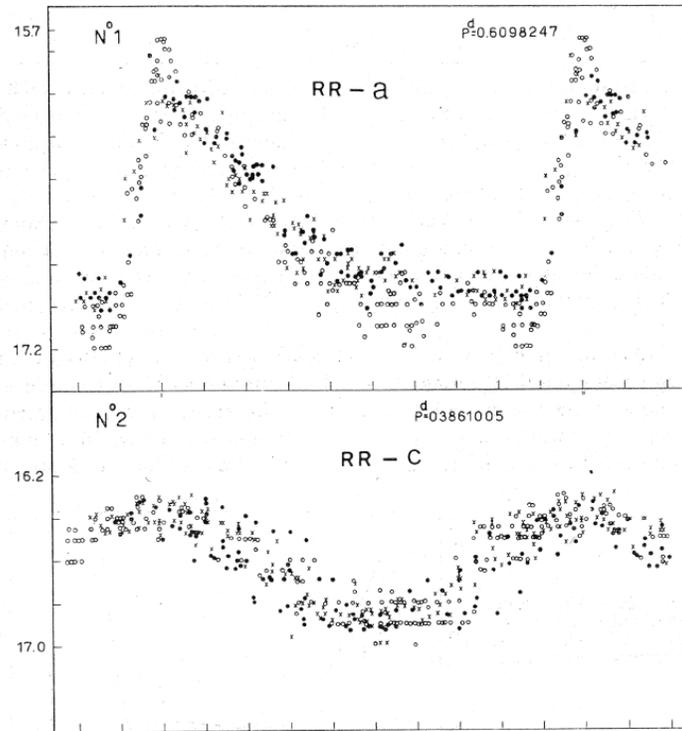


Figura 5.3: Curve di luce di due variabili RR Lyrae nell'ammasso M53.

5.6 I diagrammi HR

Alcuni *diagrammi HR di ammassi globulari* sono mostrati in Figura 5.5, molto diversi da quelli degli ammassi aperti (eccetto quelli degli ammassi più vecchi) e detti, prima che le osservazioni mostrassero anche per questi l'esistenza di una *Sequenza Principale*, per la loro caratteristica forma *ad Y rovesciato*. Si nota che qui le stelle più brillanti sono le giganti rosse, e che la sequenza principale è mal definita nel senso che è difficile da osservare ad alte magnitudini apparenti: essa è estesa verso il basso ma troncata in alto, a circa $M_V = +4$, da dove si collega al ramo delle subgiganti: mancano quindi in MS le stelle di maggiore massa e tipo spettrale B-A-F, che sono presenti solo come stelle del *ramo orizzontale*. Le differenze tra i diagrammi HR dei vari ammassi globulari non sono più tanto interpretate in *termini di età*, ma piuttosto di *diversa composizione chimica*. Si pensa infatti che essi si debbano essere formati nei primi tempi di vita della Galassia, ma non necessariamente nella stessa zona della Galassia e con la stessa composizione chimica. Infatti, avendo in mente i tempi di evoluzione per stelle di grande e piccola massa, e la legge di arricchimento chimico nella Galassia (Figura 5.6), si comprende come negli ammassi aperti (formati negli ultimi miliardi di anni) le differenze di abbondanza siano percentualmente piccole mentre sia grande la differenza delle relative *isocrone* o forma del diagramma HR nella zona delle alte

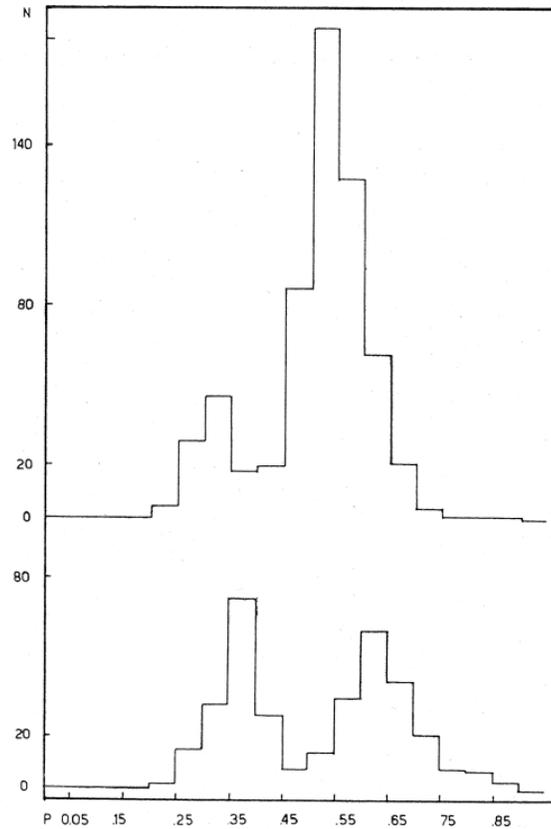


Figura 5.4: *Distribuzione di frequenza dei periodi di variabili RR Lyrae in ammassi dei gruppi I e II di Oosterhoff.*

luminosità. Al contrario negli ammassi globulari (formati nel primo miliardo d'anni) le differenze percentuali di abbondanze sono notevoli, ed al contrario l'evoluzione delle stelle di piccola massa tuttora osservabili (le altre si sono già evolute alla fase di nana bianca degenera o esplose come supernovae) è così lenta da dare minori differenze nelle varie *isocrone* o diagrammi HR.

Ora questa *diversa composizione chimica* si riflette su alcuni parametri del diagramma HR, ad esempio la pendenza del ramo delle stelle giganti, pendenza che viene convenzionalmente misurata con il ΔV tra il ramo orizzontale ed il ramo giganti nel punto di $(B-V)_0 = 1.4$: più l'ammasso è povero di metalli, maggiore è questa pendenza (per un ammasso molto povero si ha $\Delta V = 3.0 - 3.5$, per uno più ricco di composizione chimica vicina a quella *solare* si ha $\Delta V = 1.5 - 2.0$). Tra gli altri indici è anche usato il colore intrinseco $(B-V)_{0,g}$ del punto di intersezione tra il ramo orizzontale ed il ramo giganti.

Un secondo effetto di composizione chimica è dato dal diverso sviluppo del ramo orizzontale: in un ammasso povero esso è ben osservato sin oltre la zona delle variabili RR Lyr *c*, e così il rapporto n_b/n_r tra le stelle a sinistra (blu) ed a destra (rosse) del

gap è ~ 1 (si dice *gap* perché non vi sono mai state trovate stelle normali, diverse dalle variabili RR Lyr), mentre il ramo è praticamente nullo per ammassi di composizione chimica *solare* per cui il rapporto n_b/n_r sarà nullo o quasi.

Diagrammi HR schematici di un ammasso globulare *povero* di metalli (dell'alone), e di uno *relativamente ricco* (del nucleo-disco) sono mostrati in Figura 5.7.

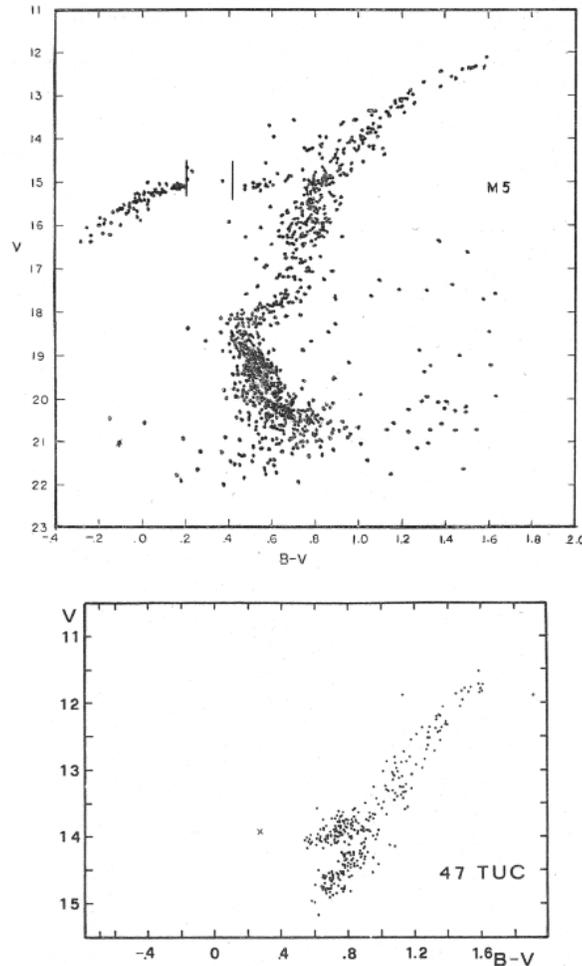


Figura 5.5: Diagrammi colore-grandezza degli ammassi globulari M5 e 47 Tucanae. Nel primo sono ben evidenti la Sequenza Principale, il ramo delle giganti ed il ramo orizzontale con il caratteristico gap delle RR Lyrae. Nel secondo, il ramo orizzontale è limitato alla parte rossa e la Sequenza Principale non è visibile per una limitazione nelle osservazioni.

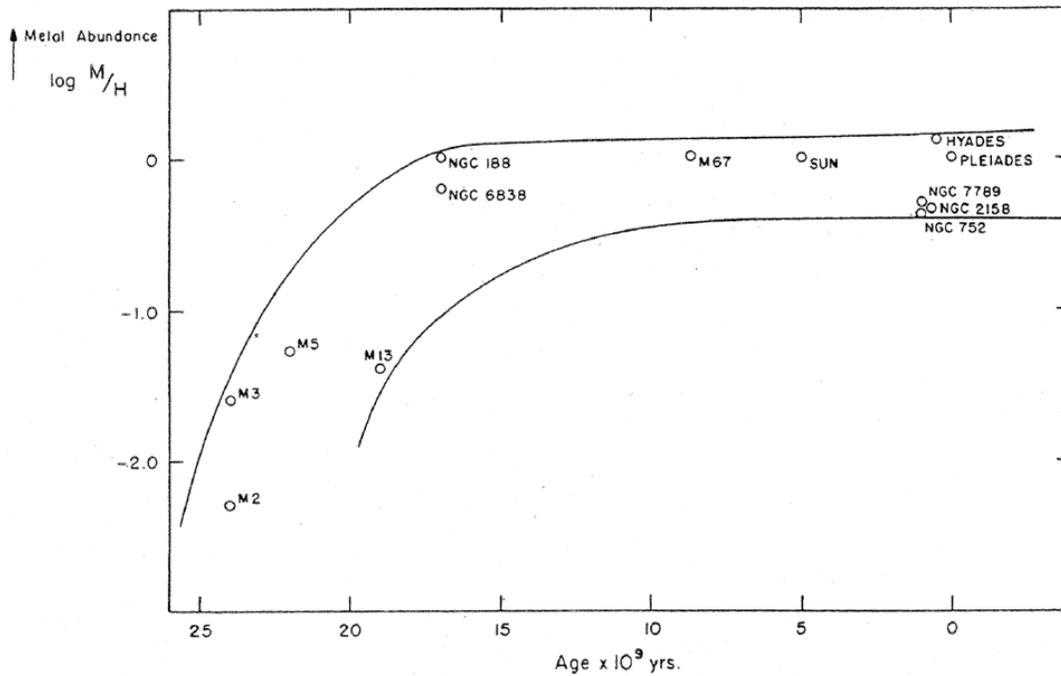


Figura 5.6: *Relazione tra l'età e la composizione chimica per gli ammassi globulari ed aperti della nostra Galassia. La scala dei tempi è stata recentemente revisionata e porta ad una età di circa 15×10^9 anni per gli ammassi globulari più vecchi.*

Riassumendo queste caratteristiche si avrà dunque:

basso tenore metallico:

prime classi di Morgan

sistemi dell'*halo*:

alte velocità (rispetto al Sole)

spettri meno avanzati

ramo giganti ripido ($\Delta V \sim 3$)

ramo orizzontale presente

$(\frac{n_b}{n_r} = 0.8)$

molte RR Lyr (in qualche caso però non presenti affatto) ed altre variabili

gruppo II^0 di Oosterhoff:

alto tenore metallico:

classi avanzate di Morgan

sistema del *nucleo-disco*

basse velocità (rispetto al Sole)

spettri più avanzati

ramo giganti poco inclinato ($\Delta V \sim 1.5$)

ramo orizzontale mancante

$(\frac{n_b}{n_r} \sim 0)$

poche variabili RR Lyr

gruppo I^0 di Oosterhoff

periodi più lunghi
 $\overline{P}_a = 0.65, \overline{P}_c = 0.37^d$

periodi più corti
 $\overline{P}_a = 0.55, \overline{P}_c = 0.32^d$

entrambi i tipi rappresentati $\frac{n_c}{n_a} \sim 0.8$ poche del tipo c , $\frac{n_c}{n_a} \sim 0.2$

Lo schema così rappresentato deve essere inteso come tendente verso casi estremi: esso è eccessivamente semplificato, per esempio nelle ultime classi di Morgan (nucleo-disco) è detto che le variabili RR Lyr sono scarse e quindi questi ammassi non si possono ben inquadrare nei Gruppi di Oosterhoff.

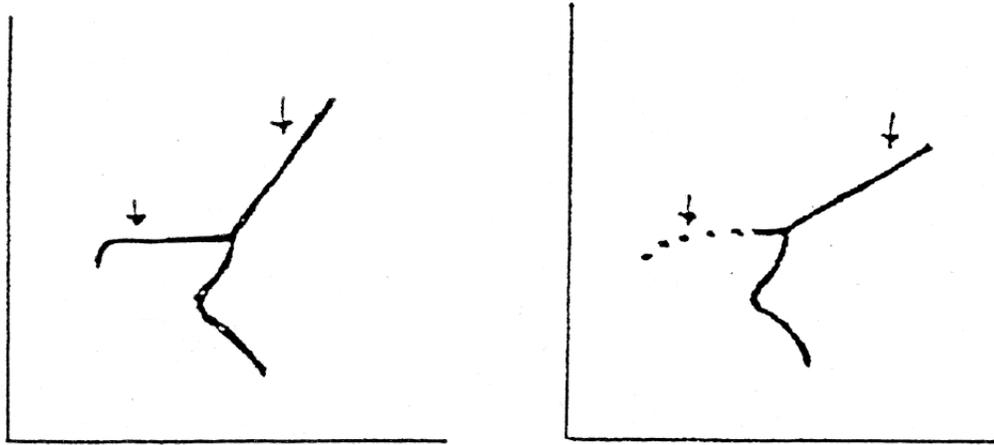


Figura 5.7: Effetti sulla composizione chimica nei diagrammi $c-m$ di un ammasso globulare a bassa metallicità, a sinistra, ed ad alta, a destra.

5.7 Determinazione della distanza e dell'età

Quando le osservazioni non avevano ancora mostrato pure per gli ammassi globulari l'esistenza di una Sequenza Principale, la distanza veniva dedotta ricorrendo alle RR Lyrae dell'ammasso, prendendo per queste una magnitudine assoluta media $M_V = 0.0$ dedotta dalle RR Lyrae di campo. Questo valore venne in seguito ricalibrato ricorrendo ai risultati della teoria delle pulsazioni che comportava, per le variabili dei due gruppi di Oosterhoff, la relazione:

$$M_V = -0.46 - 4.17 \log P_{tr}$$

ove P_{tr} è il periodo di transizione tra le variabili di tipo a e c . Si aveva allora come magnitudine assoluta delle RR Lyrae:

$$M_V = +0.51 \quad \text{in ammassi poveri di metalli} \quad \text{e} \quad M_V = +0.95 \quad \text{in quelli ricchi,}$$

che dava un valor medio per la popolazione di campo pari a $M_V = +0.65 \pm 0.35$.

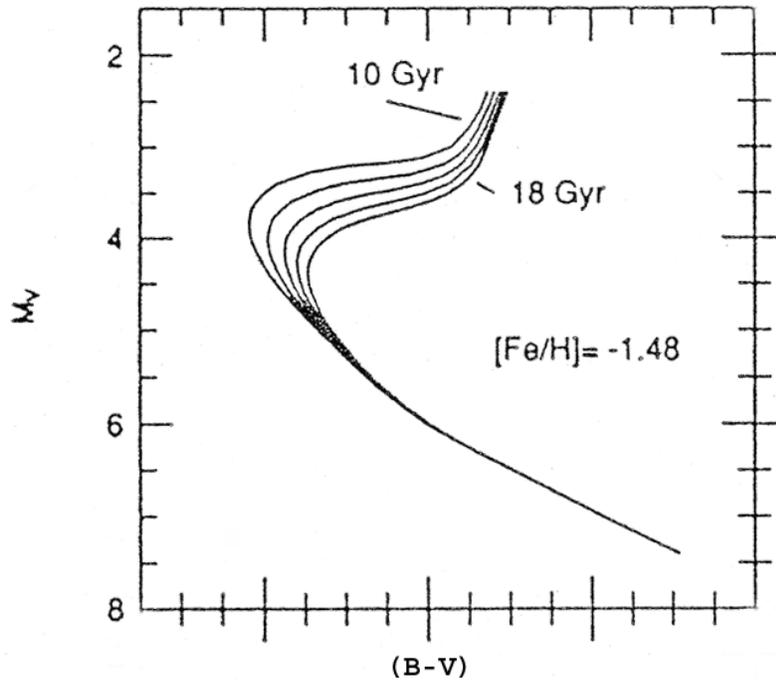


Figura 5.8: *Isocrone di varie età per la composizione chimica indicata.*

Quando fu chiaro invece che anche gli ammassi globulari possedevano una Sequenza Principale, la distanza poté essere dedotta con più precisione dal fit della sequenza osservata con quella intrinseca dedotta da quella delle Iadi dopo aver applicato le correzioni per blanketing, oppure con le sequenza delle subnane che presentano una composizione chimica analoga a quella dei globulari. Oggigiorno si fa ricorso al fit con un fascio di isocrone, vedi Figura 5.8, che permette di dedurre anche l'età. Poiché la composizione chimica varia da ammasso ad ammasso, il fit dovrà essere fatto con un fascio di isocrone calcolato per una determinata composizione, ricavata ad esempio da misure spettroscopiche.

Analogamente a quanto fatto per gli ammassi aperti, anche per i globulari, un indice di età è la posizione del *turn-off*. Una misura abbastanza precisa dell'età di un ammasso globulare è ricavabile dalla differenza ΔV , in magnitudine, tra il *turn-off* e il ramo orizzontale. Si hanno infatti le relazioni:

$$M_V(H.B.) = 0.37 [Fe/H] + 1.29$$

che dà la luminosità del ramo orizzontale in funzione della metallicità come dedotta dalle osservazioni, e:

$$M_V(T.O.) = 0.35 [Fe/H] + 2.70 \log t_9 + 1.38$$

che dà la luminosità del *turn-off* in funzione dell'età, in miliardi d'anni, e della metallicità come risulta dalla teoria. Ora, dato l'errore insito nelle osservazioni, i coefficienti di $[Fe/H]$ nelle due relazioni si possono considerare uguali e quindi, per differenza, ottenere:

$$M_V(T.O.) - M_V(H.B.) = \Delta V = 2.70 \log t_9 + 0.09$$

L'età dell'ammasso è deducibile allora dalla:

$$\log t_9 = 0.37 \Delta V - 0.03$$

così ad esempio, un ammasso che mostri una differenza di 3 magnitudini tra braccio orizzontale e *turn-off* avrà un'età di 12×10^9 anni.

Il metodo è di facile applicazione, non dipendendo dalla presenza di eventuale assorbimento, e dà un'età *relativa* tra gli ammassi con buona precisione. Età *assolute* dipendono dai modelli di evoluzione stellare e vengono determinate dal *turn-off* e dal fit con la Sequenza Principale. Si ottengono età comprese tra 11×10^9 anni per gli ammassi più giovani e 15×10^9 anni per quelli più vecchi.

5.8 Proprietà delle variabili pulsanti e la relazione P-L

Si osserva che il colore di una variabile RR Lyr varia con la fase nel corso del ciclo: a fase zero (massimo splendore) o poco prima si ha $(B - V) \sim 0$, esso cresce poi fino al valore 0.4 verso la fase 0.4, resta stazionario fino alla fase 0.8, e torna rapidamente verso lo zero (il colore, od il tipo spettrale, è più avanzato se il periodo è più lungo). Quindi con la fase cambia la temperatura (dedotta dal T. Sp. o dall'indice di colore): al massimo la stella è più calda che al minimo. Nello stesso tempo varia con la fase anche il raggio, secondo la curva di velocità radiale. Si può dire che la curva della velocità radiale è (quasi) speculare alla curva di luce, come mostrato in Figura 5.9. Se ne conclude che le RR Lyr sono *tipiche stelle pulsanti*, con la loro struttura soggetta a periodiche dilatazioni e compressioni. La teoria delle sfere gassose pulsanti è stata ben sviluppata e possiamo ricordarne almeno alcuni elementi: se al centro della stella si genera una fluttuazione di densità, essa si propaga al resto della struttura stellare, viene riflessa alla superficie, e ritorna al centro. Per avere una condizione di stazionarietà occorre che il tempo di andata e ritorno della perturbazione sia uguale al periodo dell'onda (od ad un suo multiplo). Detta v_s la *velocità del suono* all'interno della stella (per moto di pulsazione essenzialmente acustico) avremo dunque:

$$P = \frac{2 R}{v_s}$$

(questo è il periodo fondamentale).

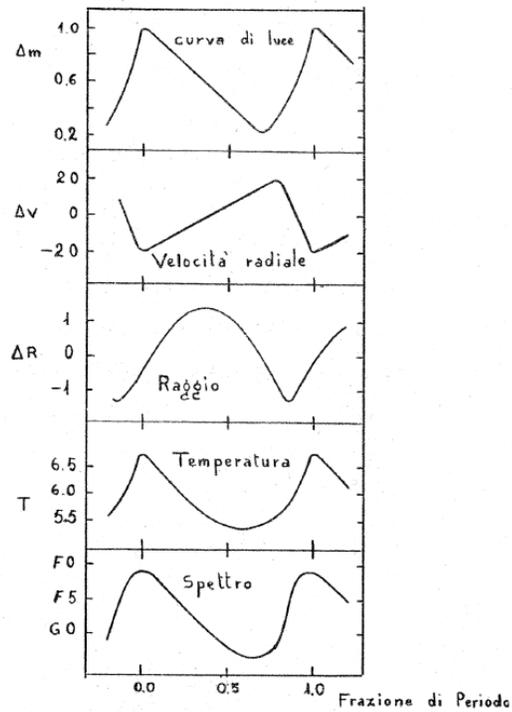


Figura 5.9: *Variatione della luminosità, velocità radiale, raggio, temperatura e spettro con la fase per una variabile RR Lyrae. Nota che si hanno i valori massimo e minimo del raggio a velocità radiale nulla e che la curva della V_r è quasi speculare alla curva di luce.*

In condizioni stazionarie la somma dell'energia cinetica e potenziale è legata dal teorema del viriale, per cui

$$2E_T + E_G = 0$$

chiamata M la massa della stella e m la massa media delle particelle del gas, si ha:

$$E_T = \frac{3}{2} k T \left(\frac{M}{m} \right) \sim M v_s^2$$

perché

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{3kT}{2}$$

mentre:

$$E_G = -\frac{G M^2}{R}$$

cosicché

$$v_s^2 \sim \frac{M}{R}.$$

Vale allora la

$$P^2 \sim \frac{R^2}{v_s^2} \sim R^2 (R/M) = \frac{1}{\rho}$$

ovvero

$$P\sqrt{\rho} = Q$$

ove Q è una grandezza che dipende in modo complesso dalla massa e dal peso molecolare cioè dalla composizione chimica. Per le RR Lyr in particolare, la teoria della pulsazione prevede che quelle di tipo a vibrino nel modo fondamentale, mentre quelle di tipo c con un periodo che è circa $2/3$ di quello con cui vibra il nucleo (Christy, 1966).

La teoria della pulsazione prevede che la dicotomia nella distribuzione in frequenza dei periodi per gli ammassi delle classi I° e II° di Oosterhoff sia dovuta ad un'intrinseca differenza in composizione chimica; anche se altri parametri sono stati presi in considerazione.

Si possono giustificare le proprietà osservate delle stelle pulsanti con le seguenti semplici considerazioni.

Dalle relazioni

$$L = 4 \pi R^2 \sigma T_e^4 \quad (\text{valida in senso generale}) \quad \text{e}$$

$$P^2 = \text{cost} \frac{R^3}{M} \quad (\text{valida per variabili pulsanti}) \quad \text{si ottiene}$$

$$P^2 M R^{-3} = \text{cost} = P^2 M T_e^6 L^{-1.5}$$

$$\text{ricorrendo alla} \quad \log L = -0.4 M_{bol} + \text{cost}$$

si ottiene:

$$\log P + 0.5 \log M + 0.3 M_{bol} + 3 \log T_e = \text{cost}$$

che è una specie di *relazione periodo-luminosità*, tramite la quale si può ricavare la massa M una volta noto il raggio (che lega M_{bol} a T_e); al solito la costante dipende dalla composizione chimica.

Quanto si è detto finora per le pulsazioni delle variabili RR Lyr si applica anche alle altre variabili in ammassi globulari come quelle dette del tipo *W Virginis* (con $P=10-20$ giorni, e valor medio su 16^d), ed anche alle *Cefeidi classiche*, che invece sono tipici oggetti della Popolazione I e non della II (nota la analogia tra stelle di diversa fase evolutiva). Queste sono presenti nel piano galattico ed in qualche caso anche in ammassi aperti. Però i loro periodi ora variano in un intervallo più ampio, diciamo tra 1 e 100 giorni, e soprattutto risultano in una ben definita *relazione periodo-luminosità* (che invece non è ben definita per le RR Lyr) in cui le variabili con maggior periodo risultano essere quelle più luminose. Elaborando la relazione precedentemente ricavata, con

$$M_{bol} = M_V + 0.145 - 0.332(B - V) \quad \text{e con} \quad \log T_e = 3.886 - 0.175(B - V)$$

di buona approssimazione nell'intervallo $0.4 < (B - V) < 1.0$
e con l'altra relazione

$$M^4 \propto L \propto M_{bol} \quad \log M = -0.1M_{bol} + cost$$

si ottiene infine la relazione:

$$\log P + 0.25M_V - 0.605(B - V) = cost$$

che, calibrata con Cefeidi in ammassi aperti, porta alla:

$$M_V = -3.51 \log P + 2.42 (B - V) - 2.33.$$

Notare che il coefficiente di $\log P$ a secondo membro non è -4.0 come dovrebbe essere, perché le osservazioni mostrano una lieve dipendenza della costante dal periodo. Quindi possiamo verificare (Figura 5.10) che: a pari colore P cresce con la luminosità; a pari periodo la luminosità è maggiore quando l'indice di colore ha il valore minore; a pari luminosità P cresce con il colore. Le variabili a che stanno a destra del *gap* nel diagramma HR, a pari luminosità della c , saranno stelle più estese e meno dense (se a pari massa) perché $P\sqrt{\rho} = Q$ e col periodo maggiore devono avere minore densità, ed inoltre mostreranno colori più rossi.

La relazione:

$$M_V = -10.9 (B - V) + 2.67$$

è la *linea centrale* della regione del diagramma HR occupata dalle Cefeidi (Figura 5.11), chiamata *instability strip* perché quando la traccia evolutiva di una stella entra in questa zona la sua struttura diventa instabile per pulsazione. Eliminato il colore tra le due relazioni, si ha:

$$M_V = -2.87 \log P - 1.40$$

che rappresenta la relazione *periodo-luminosità* per le variabili Cefeidi.

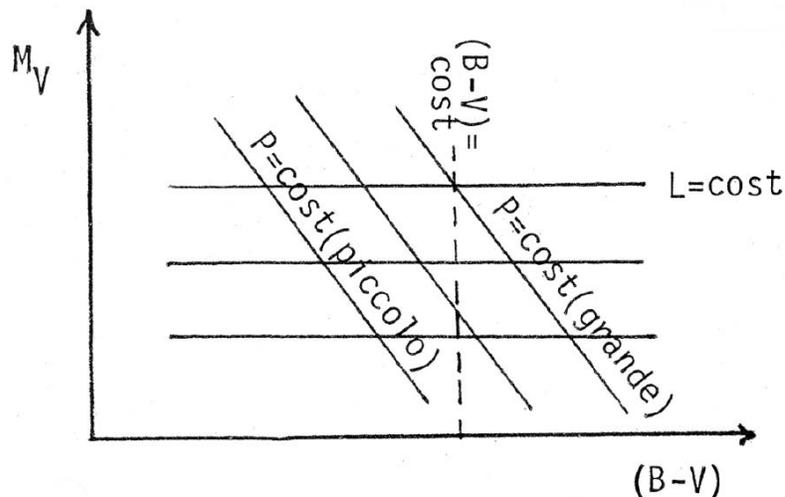


Figura 5.10: Schema delle correlazioni tra magnitudine assoluta M_V , periodo P e colore $B-V$ per le variabili pulsanti.

Inizialmente ricavata da Shapley e Leavitt (1912) con le Cefeidi nelle Nubi di Magellano, del tipo:

$$m = A - B \log P,$$

con m magnitudine media apparente, la relazione $P - L$ permette di fare delle variabili Cefeidi degli ottimi indicatori di distanza.

Però, finché le Cefeidi venivano adeguate alla relazione delle variabili di Popolazione II della nostra galassia, esse venivano sottostimate di $\Delta m \simeq 1.5$ mag (in effetti c'erano anche altri errori, tra cui quello di porre il punto zero anziché a $+0.65$ ad $M_{V,RR} = 0.0$). Si otteneva così un modulo di distanza:

$$m - M = 22.2$$

per la galassia vicina M 31 in cui erano osservate Cefeidi. Baade, nel 1944, prevedeva con il nuovo telescopio di Mt. Wilson di raggiungere anche le RR Lyr, ma ottenne al limite della lastra delle stelle giganti rosse note avere $M_V \sim -1$. Ci doveva essere un errore di modulo di circa 1-1.5 magnitudini: si dovette riesaminare la relazione, concludendo che ce ne sono due, vedi Figura 5.12, in cui le Cefeidi risultano più brillanti delle variabili di Popolazione II di pari periodo per un $\Delta m \simeq 1.5$ mag. Perciò adesso

$$(m - M)_{M31} = 24.2,$$

corrispondente ad una distanza doppia della precedente: e così furono anche raddoppiate le distanze per tutte le altre galassie, portando a una consistente revisione della scala delle distanze intergalattiche.

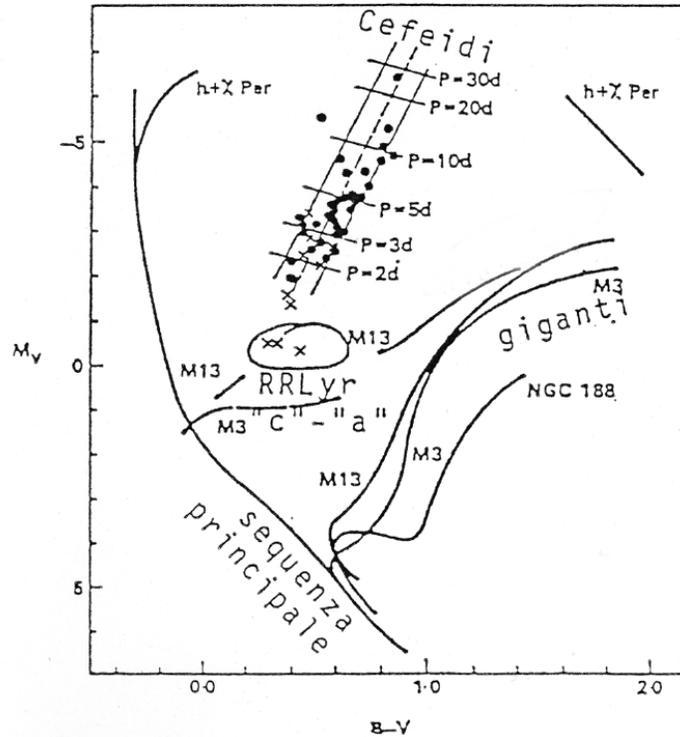


Figura 5.11: *L' instability strip, luogo delle variabili pulsanti nel diagramma c-m. Il gap delle RR Lyrae è la sua intersezione con il braccio orizzontale nei diagrammi c-m degli ammassi globulari.*

5.9 Il metodo di Baade-Wesselink

Consideriamo adesso una stella pulsante che abbia variabili in funzione del tempo sia la T_e che la R

$$L(t) = 4\pi R^2(t) \sigma T_e^4(t)$$

Possiamo considerare due istanti t_1, t_2 (Figura 5.13) in cui la stella abbia diverso splendore ma stessa T_e (giudicata ad esempio dal pari indice di colore $B-V$). Sarà allora

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{(R_0 + \delta R_1)^2}{(R_0 + \delta R_2)^2}$$

con $\delta R/R$ abbastanza piccolo, a giudicare dalla differenza di splendore, diciamo sul 5 %. Ma δR può essere ricavato dalla curva della velocità radiale v_r . Consideriamo infatti $v(t) = dR/dt$ la velocità rispetto al centro della fotosfera in espansione, e θ sia l'angolo tra il raggio e la linea di vista (Figura 5.14). La v_r misurata da un osservatore lontano sarà minore di $v(t)$ perchè risulta dalla sovrapposizione di tanti anelli la cui velocità è $v(t) \cos \theta$ e la cui importanza è $2\pi R^2 \cos \theta \sin \theta d\theta$.

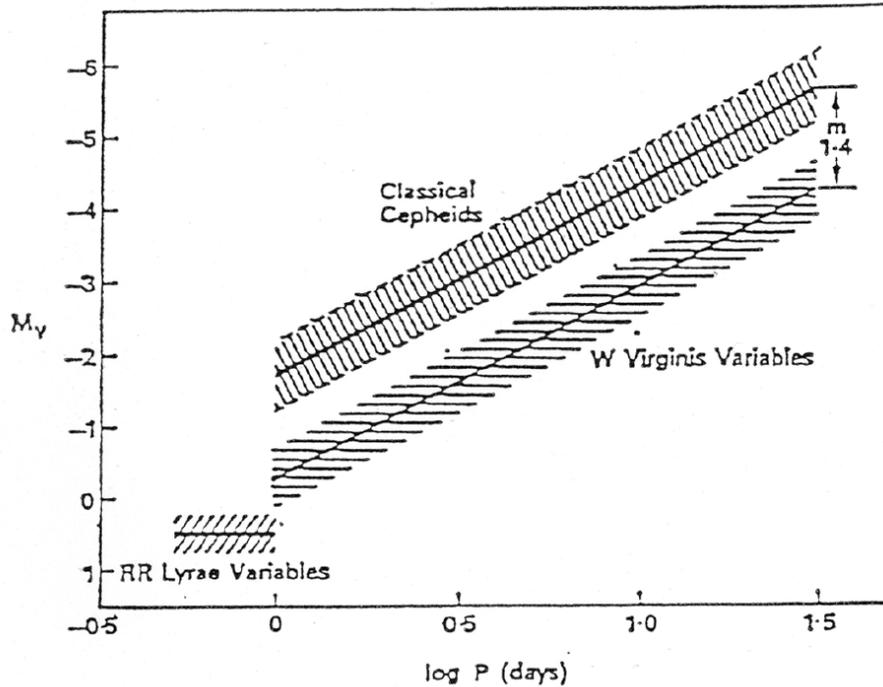


Figura 5.12: Le relazioni empiriche P-L per le cefeidi classiche, stelle di popolazione I, e per le RR Lyrae e W Virginis, stelle di popolazione II.

Quindi si osserverà una

$$\bar{v}_r(t) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{\pi/2} v(t) 2\pi R^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} v(t)$$

perché

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \left| -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} (0 - 1)$$

A rigore $\bar{v}_r(t)$ si approssimerà di più a $v(t)$ se nel peso di ciascun anello si tiene anche conto dell' *oscuramento al bordo*: con oscuramento *grigio* si ha meglio

$$\bar{v}_r(t) = (2/3 + 1/24) v(t) = \frac{17}{24} v(t)$$

Ed infine la stella può avere un moto V_0 rispetto al Sole, che si determina dalla condizione

$$\int_{t_0}^{t_0+P} (v_r - V_0) dt = 0$$

$$V_0 = \frac{1}{P} \int_{t_0}^{t_0+P} v_r dt$$

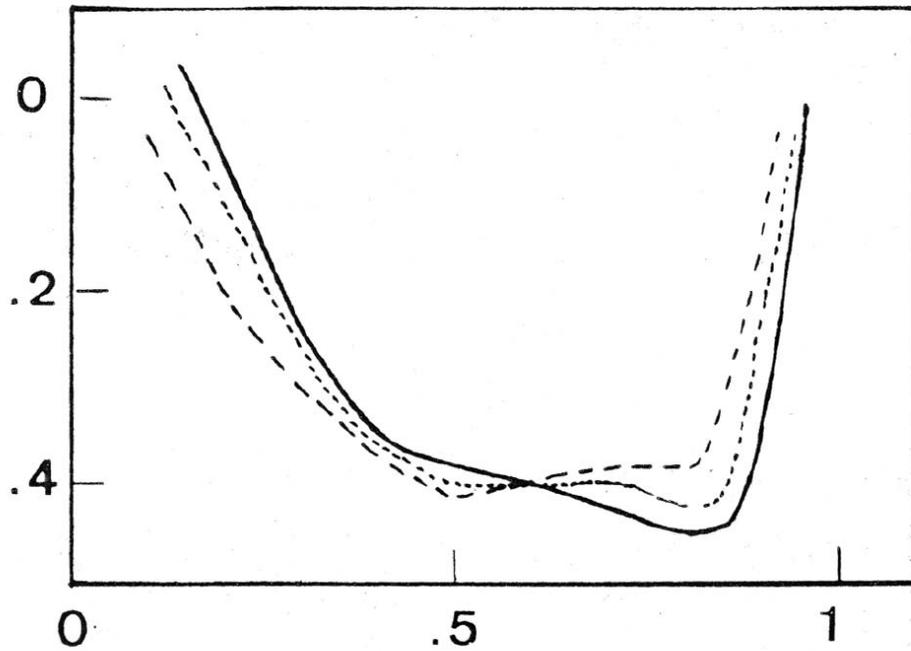


Figura 5.13: *Variazione del colore, in ordinata, con la fase, in ascissa, per le variabili RR Lyrae.*

Da cui infine la velocità occorrente è:

$$v(t) = \frac{24}{17} (\bar{v}_r(t) - V_0)$$

Sarà allora:

$$\delta R_1 = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

e

$$\delta R_2 = \int_{t_0}^{t_2} v(t) dt$$

calcolabili conoscendo la curva delle velocità radiali direttamente in Km, se $v(t)$ è in km/sec e t in secondi. Da cui infine

$$\frac{1 + \delta R_1/R_0}{1 + \delta R_2/R_0} = 10^{-0.2(m_1 - m_2)}$$

$$R_0 = \frac{\delta R_2 10^{-0.2 \Delta m} - \delta R_1}{1 - 10^{-0.2 \Delta m}}$$

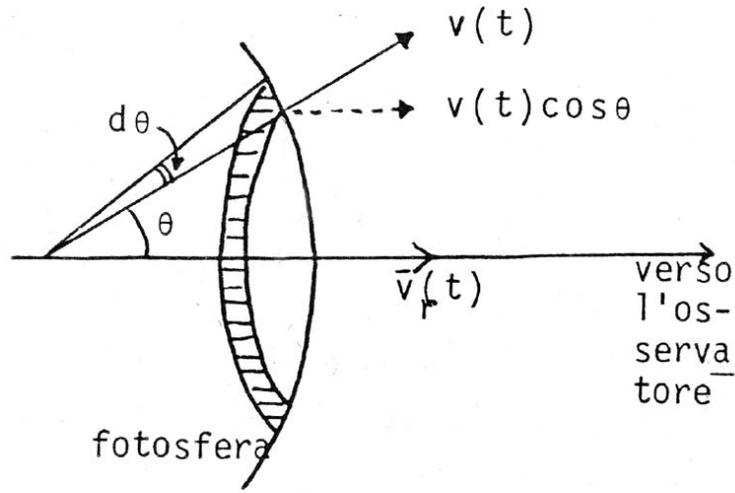


Figura 5.14: Per uno strato in espansione con velocità $V(t)$, l'osservatore misura una velocità radiale $V_r(t)$ come media pesata sull'intero disco stellare dei contributi dei vari punti con velocità $V(t) \cos \theta$.

dove Δm si ricava dalla curva di luce (e di colore), ed i δR dalla curva della velocità radiale, entrambi osservati. Il metodo dà risultati non molto precisi per le RR Lyr e migliori invece per le Cefeidi (pure stelle pulsanti) per questi motivi:

- l'indice di colore B-V non è proprio adatto a riconoscere i due istanti in cui la stella ha la stessa T_e ,
- la Δm è una quantità piccola, cosicché l'errore su R è piuttosto forte (il denominatore è quasi zero).

Comunque con questo metodo si ha:

$$R \sim 5 R_{\odot} \quad , \quad \delta R/R \sim 5\%$$

e dalla relazione *periodo-luminosità* si ricava che:

$$M \sim 0.5 M_{\odot}.$$

Le variabili RR Lyr hanno perciò le caratteristiche di stelle giganti, di bassa densità, e struttura pulsante. A loro volta le Cefeidi classiche risultano avere raggi molto maggiori, tra $20 \div 150 R_{\odot}$, e così anche le masse di circa $3 \div 5 M_{\odot}$.

5.10 Meccanismo di eccitazione delle pulsazioni stellari

Eddington nel 1926 scoperse l'esistenza di una relazione che lega il periodo alla densità media:

$$P \left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_{\odot}} \right)^{\frac{1}{2}} = Q$$

dove P è il periodo in giorni, $\bar{\rho}$ è la densità media e Q una costante che dipende dalla struttura interna della stella e soprattutto dalla concentrazione della massa centrale.

Il valore di Q per i vari tipi di variabili è generalmente compreso tra $0^d.03$ e $0^d.08$. Fisicamente la relazione può essere interpretata come una dimostrazione che il periodo di pulsazione è dell'ordine di tempo necessario per un'onda sonora per attraversare il diametro della stella. Quindi stelle piccole e compatte hanno periodi più brevi delle stelle grandi e rarefatte.

Il problema fondamentale che riguarda le variabili pulsanti regolari è di spiegare la natura del meccanismo che mantiene le pulsazioni osservate costanti per tempi molto lunghi (dell'ordine di 10^6 anni).

La spiegazione consiste in una specie di meccanismo *a valvola* capace di immagazzinare calore e quindi aumentare la pressione di alcuni strati abbastanza superficiali, e così causare una espansione. Tutto dipende dall'opacità χ del gas che è proporzionale alla densità e inversamente proporzionale alla potenza 3.5 della temperatura

$$\chi = \chi_0 \rho T^{-3.5}$$

T è massimo alla fase di massima compressione, l'opacità è minore e quindi si dovrebbe avere il massimo di irraggiamento. Però in certe condizioni e in certi strati può succedere che il gas sia più opaco al massimo di compressione. Questo può avvenire nelle regioni in cui un elemento abbondante subisce ionizzazione; allora durante la compressione cresce ρ ma non T , perché il calore viene speso per ionizzare il gas. Allora al massimo di compressione si ha anche la massima opacità, la radiazione verso l'alto è ostacolata, producendo un eccesso di pressione durante la successiva fase di espansione.

Si trova che uno strato in cui un elemento abbondante è parzialmente ionizzato tenderà ad assorbire calore durante la compressione, portando a un massimo di pressione che viene dopo il minimo di volume, e quindi fornisce un meccanismo per mantenere la pulsazione.

Nelle Cefeidi il meccanismo di pulsazione sarebbe fornito dalla 2^a ionizzazione dell'He che avviene a $T = 42000 \text{ } ^0K$. Solo il 30-50 % in raggio della stella subisce pulsazioni significative.

Appendice 5-A - Le popolazioni stellari

Come detto all'inizio del capitolo, lo studio degli ammassi globulari portò, oltre alla conoscenza della struttura e dimensioni del nostro sistema galattico, anche alla scoperta delle popolazioni stellari. I primi diagrammi colore-grandezza degli ammassi globulari si presentavano completamente differenti dal diagramma $c-m$ classico. In quest'ultimo le stelle più brillanti abbiamo visto essere di colore blu, negli ammassi globulari invece apparivano rosse. Allora non si notava nessuna presenza della Sequenza Principale ma solo una sequenza di giganti che si divideva, alla sua base, in un ramo orizzontale verso i colori blu ed uno subgigante verso le deboli magnitudini. A questo venivano ad aggiungersi differenze nella cinematica in quanto gli ammassi globulari e le RR Lyrae presentavano alte velocità rispetto al Sole mentre le stelle OB, le Cefeidi Classiche e gli ammassi aperti mostravano invece velocità basse.

Il primo ad avere il sospetto che nella nostra galassia, come in quelle esterne, potessero essere presenti due differenti tipi di popolazioni stellari fu *Baade* quando, con il telescopio di 2.4 metri del Mt. Wilson, esaminò due strani sistemi stellari nelle costellazioni della Fornace e dello Scultore. Le loro stelle più brillanti non erano blu ma rosse come nei globulari. Negli anni successivi, Baade fu in grado di risolvere in stelle altri sistemi extragalattici come NGC 147, NGC 185 ed il nucleo di M31: per tutti le stelle più brillanti erano rosse. Legando questi fatti alle proprietà allora conosciute delle stelle nella nostra galassia, quali la distribuzione, la composizione chimica e la cinematica, Baade arrivò nel 1944 alla conclusione che dovevano esserci almeno due distinte popolazioni di stelle: una Popolazione I con diagrammi $c-m$ di tipo classico, formata da stelle distribuite sul disco della Galassia e partecipanti al suo moto di rotazione attorno al centro e le cui stelle più brillanti erano blu; ed una Popolazione II con diagrammi $c-m$ simili a quelli degli ammassi globulari, distribuita nell'alone galattico e ricca di giganti rosse.

Con il procedere delle osservazioni, i dati mostrarono che occorreva una suddivisione più fine. Questa fu raggiunta in occasione di un importante convegno tenutosi a Roma nel 1958 e che portò ad una classificazione di popolazioni più dettagliata, suddividendo le due popolazioni originarie in uno schema comprendente *cinque categorie* di oggetti, le cui proprietà caratteristiche variano con più o meno gradualità tra i tipi *estremi*:

- (a) popolazione I *pura* od *estrema*: dovrebbe essere solo ZAMS, addirittura con divergenza alle basse luminosità (cioè stelle ancora in contrazione gravitazionale, in fase di formazione). È presente nei bracci di spirale (gas e polveri). Esempi

tipici: *supergiganti* O-B, variabili T Tauri, Cefeidi classiche, ammassi galattici aperti giovani.

- (b) popolazione I *vecchia*: con un contenuto metallico un po' meno marcato. Esempi tipici: ammassi aperti con diagrammi HR già intaccati dall'alto, stelle di tipo A, stelle con *righe metalliche forti* (indizio di metallicità), nane Me.
- (c) popolazione intermedia detta *del disco*: rappresentata da stelle nella *lente* galattica, tra i bracci, più abbondanti verso il nucleo. Tipici esempi sono le novae, le nebulose planetarie, stelle del nucleo galattico, ammassi del nucleo-disco delle ultime classi di Morgan, stelle a *righe metalliche deboli* (indizio di minore metallicità).
- (d) popolazione II *intermedia*: comprendente stelle *ad alta velocità* ed ammassi globulari delle classi intermedie.
- (e) popolazione *estrema* o *dell'alone*: comprendente le sub-nane, gli ammassi globulari *classici* ad alta velocità appartenenti alle prime classi di Morgan.

Analizzando le proprietà di stelle nelle varie popolazioni, si sono anche notate delle differenze di proprietà cinematiche, oltre che fisiche, e si sono quindi definiti diversi *sottosistemi* della Galassia (concetto dovuto a Lindblad), che si distinguono anche per il diverso grado di appiattimento sul piano galattico. Si definiscono così :

- sottosistema *sferico* o (*sferoidale*): ammassi globulari, WVir, RR Lyr, Mira con $100^d < P < 250^d$, sub-nane (tipica popolazione II);
- sottosistema *intermedio*: variabili *Mira*, nane bianche, stelle delle classi spettrali SRN, nebulose planetarie, semiregolari rosse, RV Tau, etc. (vi appartiene la maggior parte delle stelle)
- sottosistema *piatto*: novae, stelle O-B, Cefeidi classiche, ammassi galattici aperti, gas e polveri (nel disco della Galassia, tipica popolazione I).

Riassumiamo nella seguente Tabella alcune *proprietà fondamentali* delle diverse popolazioni della Galassia, intese come quantità a carattere statistico, e non sempre applicabili ai singoli soggetti:

Sequenza di Popolazioni Stellari

<i>Popolazione</i>	<i>II Estrema</i>	<i>II Intermedia</i>	<i>Disco</i>	<i>I Vecchia</i>	<i>I Estrema</i>
Distribuzione	Sferica	Intermedia	Disco	Piatta	Molto Piatta
Altezza sul piano galattico z in pc	2000	700	400	150	100
Velocità di rotazione V_r (km/sec)	100	200	240	250	250
Dispersione di velocità ΔV_r (km/sec)	250	80	25	15	12
Età (10^9 anni)	10-15	10	2-10	0.2-2	0.2
Metallicità (Z)	0.0001-0.001	0.01	0.02	0.03	0.04
Frazione di Massa Galattica (incerta)	0.2	0.2	0.5	0.1	0.03

Nella Tabella z indica l'altezza sul piano galattico a cui la densità della popolazione si dimezza.

È stato fatto molto lavoro per migliorare la conoscenza delle popolazioni stellari nella Galassia e dedurne la struttura e l'evoluzione. Uno dei vincoli maggiori per i *modelli di evoluzione chimica* è la relazione tra metallicità ed età già mostrata in Figura 5.6 o quella più moderna, schematizzata in Figura 5.15, che fa intervenire anche la posizione rispetto al piano galattico e la distanza dal centro, e che mostra come la composizione chimica non dipenda solo dall'età ma anche dalla posizione nella Galassia. Le già citate correlazioni tra parametri cinematici, quali eccentricità orbitale, momento angolare, moto perpendicolare, e l'eccesso ultravioletto dovuto a scarsità di metalli sono importanti per chiarire le differenze tra alone e disco. Le stelle formatesi prima hanno mantenuto l'alta velocità di turbolenza del gas originario ed il basso tenore metallico corrispondente al gas interstellare di quel tempo, mentre quelle formatesi dopo sono nate da un gas più ricco in metalli e sedimentatosi sul disco. Si parla oggi, più propriamente, di un *thin disk* spesso circa 300 pc ed a composizione solare ed un *thick disk* fino a circa 1 kpc e con metallicità decrescente con l'altezza sul piano. Tutti questi fatti trovano spiegazione in un modello di *merging* per la formazione della Galassia che ha soppiantato quello del *collasso* proposto da Eggen, Sandage e Lynden-Bell negli anni sessanta e che prevedeva che gli ammassi globulari si formassero in un

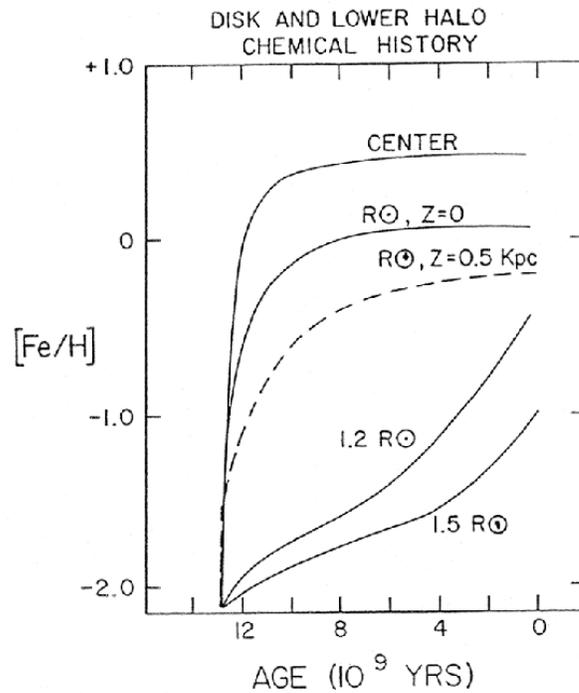


Figura 5.15: *Forme schematiche della relazione età-metallicità per differenti regioni della Galassia. R_{\odot} indica il raggio del circolo solare, pari alla distanza Sole-centro galattico, e Z è l'altezza sul piano.*

breve lasso di tempo, dell'ordine di 10^8 anni, cosa invece contraddetta dalle moderne osservazioni.

Capitolo 6

LE STELLE BINARIE

6.1 Introduzione allo studio delle stelle binarie

Osservando ad occhio nudo la stella centrale della coda dell'Orsa Maggiore, Mizar, si nota, a circa 12 primi d'arco, la presenza di una seconda stella più debole, Alcor. Entrambe formano quella che si definisce una *doppia prospettica*, le due stelle sono solo apparentemente vicine in cielo. Se invece puntiamo un cannocchiale proprio su Mizar, che all'occhio appare singola, si constata che l'astro è formato da due stelle vicine distanti fra loro 14 secondi d'arco. Molte altre stelle al telescopio rivelano la loro duplicità separandosi in due ed a volte in più componenti, si parla allora di *stelle doppie* o *binarie* o *stelle multiple*. Mizar è la prima stella di cui si sia constatata la duplicità al telescopio. Essa fu scoperta come doppia da P. Riccioli nel 1650. Da allora il numero delle stelle *doppie visuali*, cioè rilevabili attraverso l'osservazione diretta al telescopio, andò costantemente crescendo ed i moderni cataloghi ne registrano oggi diverse decine di migliaia.

Già dalla loro scoperta si presentò il problema della loro natura: singoli allineamenti prospettici, cioè stelle casualmente vicine perché quasi allineate con la visuale ma in realtà lontane tra di loro, oppure coppie fisicamente associate e legate dalla mutua attrazione gravitazionale? La risposta venne da W. Herschel che, nel 1803 analizzando osservazioni fatte nel corso di 25 anni, riuscì a mettere in luce l'esistenza di moti relativi dimostrando così che molte delle stelle doppie dovevano considerarsi delle doppie fisiche le cui componenti descrivevano orbite ellittiche attorno al comune baricentro. Si parla allora più propriamente di *doppie ottiche*, cioè stelle casualmente allineate ma senza alcun legame fisico e destinate ad allontanarsi, e *doppie fisiche* o *binarie* associate tra loro dalla mutua gravitazione ed è ovvio che solo queste ultime sono di interesse.

Con semplici considerazioni è facile rendersi conto della rarità delle doppie ottiche. Se ammettiamo che la distribuzione apparente delle stelle sia del tutto casuale, cioè che una stella abbia la stessa probabilità di trovarsi in qualunque parte del cielo, e consideriamo il numero totale N delle stelle più brillanti di una data grandezza apparente m , è chiaro che la probabilità P che, fissata una di queste stelle, una delle rimanenti $N - 1$ venga a trovarsi da questa ad una distanza minore di r secondi d'arco, è data

dal rapporto tra l'area della calotta sferica di raggio uguale ad r , espressa sulla sfera di raggio unitario da $\pi(r/206265)^2$, e l'area dell'intera superficie del cielo espressa da 4π . La probabilità cercata è dunque data da:

$$P = (1/4)(r/206265)^2$$

ed il numero di stelle che soddisfano alla condizione suddetta risulta quindi:

$$(N - 1)P = (N - 1)(1/4)(r/206265)^2$$

Potendosi ripetere il ragionamento per ognuna delle N stelle considerate ed osservando che in tal modo ogni stella viene contata due volte, e poi sostituendo N ad $N - 1$, risulta che, in tutto il cielo, dovremmo trovare

$$(1/8)N^2(r/206265)^2$$

stelle doppie ottiche soddisfacenti la condizione indicata. Ne segue che il numero di doppie ottiche che dovremmo trovare tra le stelle visibili ad occhio nudo, che sono circa 6500, con le componenti a distanza non superiore a 90 secondi d'arco, dovrebbe essere:

$$(1/8)6500^2(90/206265)^2 \sim 1$$

Invece se ne osservano moltissime. Così pure fra le 100000 stelle più brillanti dell'ottava grandezza, con una distanza fra le componenti minore di 6 secondi d'arco, dovremmo osservare appena una doppia ottica ed invece sono centinaia le doppie che soddisfano a questa condizione e quindi esse devono essere necessariamente doppie fisiche. Due stelle vicine costituiscono un sistema fisico con tanta maggior probabilità quanto più esse appaiono angolarmente prossime l'una all'altra. Statisticamente, due stelle prossime di grandezza apparente m , la cui distanza angolare r , in secondi d'arco, soddisfa alla:

$$\log r < 2.8 - 0.2m$$

sono doppie fisiche.

Si stima che il 10% delle stelle visibili ad occhio nudo siano doppie visuali mentre tra le stelle più vicine al Sole di 5 pc si hanno 3 sistemi tripli, per esempio α Cent, 13 doppi, per esempio Sirio e 33 stelle singole. Tenendo conto delle varie classi di stelle doppie, una statistica su 3000 stelle più brillanti di $m = 9$ porta alle seguenti percentuali:

$$\text{singole} : 30\% \quad \text{doppie} : 47\% \quad \text{multiple} : 23\%$$

Si distinguono tre classi principali di stelle binarie, a seconda di come vengono scoperte e studiate:

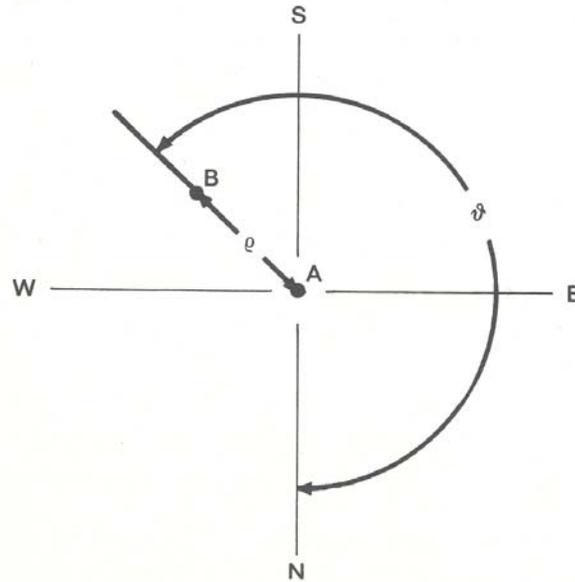


Figura 6.1: Definizione di angolo di posizione P.A. e separazione ρ della stella B rispetto alla stella A .

1. *binarie visuali*: al telescopio si vedono due stelle distinte, la più brillante è la componente A e, di solito, a questa si riferisce il movimento della componente più debole B , la secondaria. Le osservazioni portano a conoscere l'orbita apparente, ovvero la proiezione sul piano tangente alla sfera celeste dell'orbita relativa alla stella B rispetto alla compagna A , misurando la distanza apparente ρ , in secondi d'arco, tra le due stelle e l'angolo di posizione θ della secondaria in funzione del tempo. (vedi Figura 6.1)
2. *binarie spettroscopiche*: al telescopio si osserva una singola stella e la binarietà è rivelata misurando, in funzione del tempo, la velocità radiale. Di solito si osserva un unico spettro e quindi viene ricavata una sola curva di velocità radiale che dà la proiezione del moto orbitale sulla visuale. Se le stelle hanno magnitudine simile si possono osservare i due spettri e ricavare due curve distinte.
3. *binarie fotometriche*: al telescopio si osserva un'unica stella e la duplicità è dedotta dalla presenza nella curva di luce, cioè la variazione della magnitudine della stella in funzione del tempo, di minimi regolari e periodici dovuti alle eclissi, totali e parziali, delle due componenti essendo, per questi sistemi, la linea di vista contenuta o poco distante dal piano orbitale.

A queste tre principali categorie recentemente ne viene aggiunta una quarta rappresentata dalle *binarie astrometriche*, stelle di cui è possibile rilevare la duplicità misurando il moto dell'astro perturbato dalla presenza di un compagno.

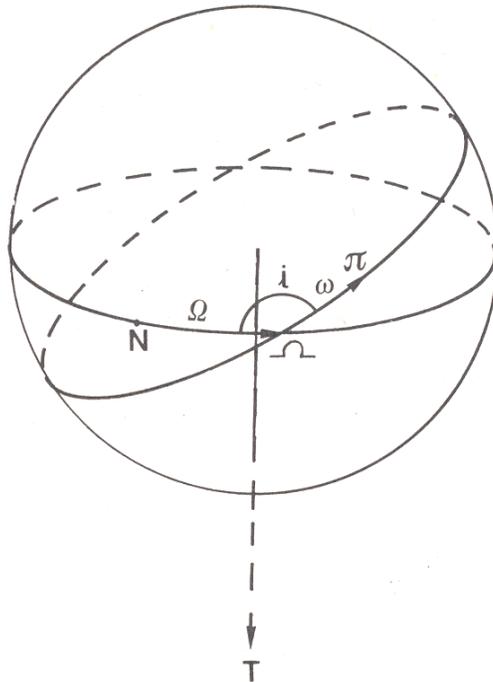


Figura 6.2: *Gli elementi orbitali geometrici di una stella doppia. La sfera, di raggio unitario, ha origine al baricentro del sistema per le orbite baricentriche, oppure sulla componente primaria nel caso di orbita relativa. T dà la direzione della visuale.*

Nello studio delle stelle binarie si devono affrontare due problemi, uno geometrico che consiste nel ricavare dalle osservazioni la giacitura del piano orbitale rispetto al piano tangente la sfera celeste, l'orientazione, le dimensioni e la forma dell'orbita; ed uno più propriamente astrofisico che consiste nel determinare le proprietà fondamentali delle stelle componenti quali le masse, le dimensioni e le temperature. Il primo problema porta alla determinazione di sette grandezze, cinque geometriche e due temporali, dette *elementi orbitali* dell'orbita reale descritta dalla secondaria attorno alla primaria, nel caso di doppie visuali, o dall'orbita attorno al baricentro nel caso delle doppie spettroscopiche. Facendo riferimento alla Figura 6.2, abbiamo:

1. angolo di posizione della linea dei nodi, intersezione tra il piano tangente la sfera celeste e quello orbitale, indicato con Ω a partire dalla direzione del Nord verso E. Data l'indeterminazione tra nodo ascendente e discendente nelle binarie visuali, si hanno sempre due valori di Ω e si sceglie quello minore di 180° gradi
2. inclinazione i , da 0° a 180° , rimanendo indeterminato il segno. Più precisamente, i è l'angolo sferico in Ω , inferiore di 180° indicato in figura, dove le frecce indicano i versi positivi dell'angolo di posizione e del moto orbitale

3. distanza ω del periastro dal nodo, contato nel verso del moto della secondaria a partire da Ω , da 0° a 360°
4. eccentricità e dell'ellisse orbitale vera
5. semiasse maggiore a dell'orbita vera, in secondi d'arco
6. tempo di passaggio al periastro T_0
7. periodo di rivoluzione P

6.2 Orbite relative ed orbite assolute

Siano A e B le componenti di una stella doppia e G il loro baricentro. L'orbita relativa di B rispetto ad A sia l'ellisse a tratto pieno nella Figura 6.3

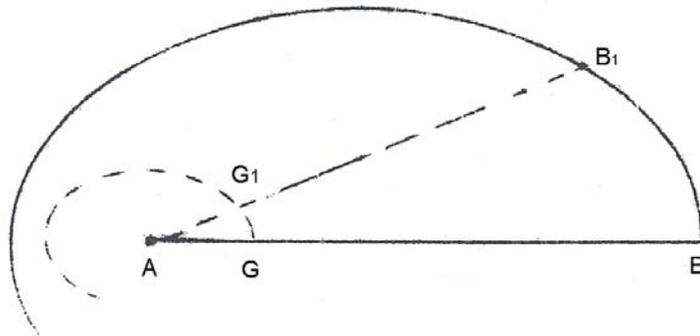


Figura 6.3: Mentre la componente B orbita attorno alla componente A , il baricentro del sistema, rispetto ad A , si muove lungo l'orbita tratteggiata.

Consideriamo l'allineamento AB . Il baricentro si troverà ad una distanza da A tale che:

$$AG = \frac{m_B}{m_A + m_B} AB$$

Consideriamo ora l'allineamento AB_1 corrispondente ad una nuova posizione della secondaria sulla sua orbita relativa ad A . Il baricentro sarà a distanza da A tale che

$$AG_1 = \frac{m_B}{m_A + m_B} AB_1$$

Il baricentro G descrive quindi, rispetto ad A , un'ellisse di fuoco A , simile all'ellisse di B rispetto ad A ed il cui semiasse maggiore a_1 è uguale a:

$$a_1 = \frac{m_B}{m_A + m_B} a$$

essendo a il semiasse maggiore dell'ellisse descritta da B attorno ad A . L'orbita reale di A rispetto a G è pertanto un'ellisse simile all'ellisse relativa di B rispetto ad A ; e così pure l'orbita reale di B rispetto al baricentro G è simile all'ellisse descritta da A rispetto a B , a sua volta uguale all'ellisse di B rispetto ad A . Il semiasse a_2 dell'ellisse descritta da B attorno a G è quindi

$$a_2 = \frac{m_A}{m_A + m_B} a$$

La somma dei semiasse delle orbite reali baricentriche, descritte cioè sul piano orbitale, risulta uguale al semiasse dell'orbita relativa, infatti:

$$a_1 + a_2 = \frac{m_B}{m_A + m_B} a + \frac{m_A}{m_A + m_B} a = a$$

La Figura 6.4 illustra quanto appena detto.

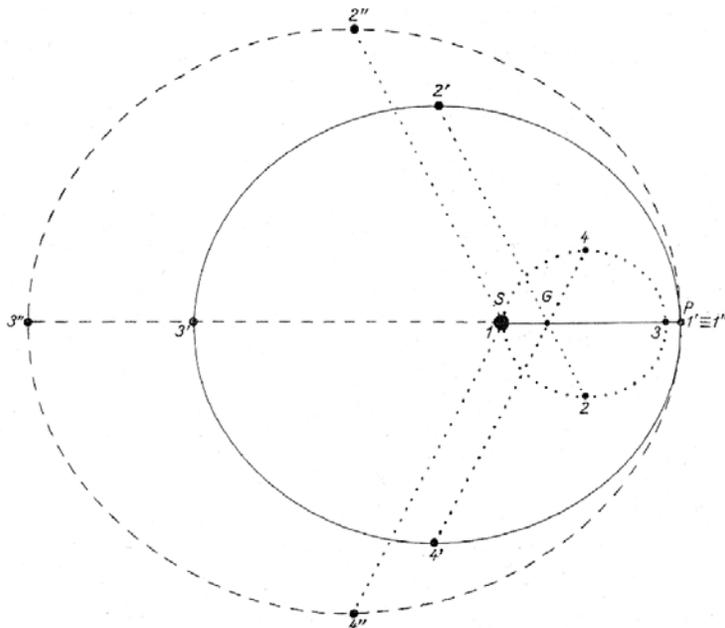


Figura 6.4: I corpi P ed S , supposti isolati e sotto la mutua attrazione gravitazionale, si muovono descrivendo attorno al comune baricentro G due ellissi simili, le cui dimensioni sono inversamente proporzionali alle loro masse: S , supposto di massa tripla di P , descrive un'ellisse, punteggiata, di dimensioni uguali ad $1/3$ di quella descritta da P , ellisse a tratto intero. L'ellisse più grande, tratteggiata, simile alle precedenti, rappresenta l'ellisse che P descrive attorno ad S , considerato fisso, ed è l'orbita di P relativa ad S . I numeri indicano posizioni corrispondenti nelle tre orbite.

6.3 Masse delle componenti di una binaria

La terza legge di Keplero, nella sua formulazione esatta, dà una relazione fra il semiasse a dell'orbita relativa della componente B (o A) rispetto ad A (o B), il periodo P e le masse che indicheremo ora con m_1 ed m_2

$$4\pi^2 \frac{a^3}{P^2} = 4\pi^2 \frac{(a_1 + a_2)^3}{P^2} = G(m_1 + m_2)$$

Se ora scriviamo la stessa legge per il sistema Sole-Terra avremo:

$$4\pi^2 \frac{a^3}{P^2} = G(m_{\odot} + m_{\oplus}) \sim G m_{\odot}$$

dove ora a è il semiasse dell'orbita terrestre (distanza Terra-Sole) e P è il periodo occorrente alla Terra per compiere un'orbita, ovvero un anno. Dividendo ora le due espressioni possiamo scrivere:

$$\frac{a^3}{P^2} = m_1 + m_2$$

che è una forma concisa della terza legge di Keplero ottenuta misurando il semiasse a in unità astronomiche, il periodo P in anni e le masse in masse solari. Notare che in questa formulazione della Legge, le grandezze in gioco sono numeri puri, ovvero adimensionali.

Nota ora la distanza del sistema, la conoscenza delle dimensioni lineari dei semiassi maggiori delle orbite assolute conduce immediatamente alla determinazione delle masse delle due stelle. Infatti la terza legge di Keplero dà la somma delle masse, ed il rapporto delle masse, come facilmente si comprende, è uguale al rapporto inverso dei semiassi maggiori:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Le due relazioni fra le incognite m_1 ed m_2 determinano appunto dette masse. Si vede quindi l'enorme importanza che riveste lo studio delle stelle binarie ai fini della conoscenza di un parametro fondamentale quale è la massa di una stella.

6.4 Cenno allo studio delle stelle doppie visuali

Lo studio delle doppie visuali ha visto coinvolte, nei due secoli passati, generazioni di astronomi, tra i quali spiccano i nomi di *Struve*, *Schiaparelli*, *Demboski* e più recentemente *Aitken* e *van Biesbroeck*. Le osservazioni fatte hanno provato il moto orbitale delle componenti i sistemi binari fisici e prodotto vari cataloghi di binarie visuali. Oggigiorno l'interesse su questa classe di binarie è focalizzato principalmente sui sistemi

stretti separabili con tecniche particolari tipo *interferometria* o *speckle* e daremo perciò solo un cenno al loro studio *classico*.

Consideriamo allora una qualsiasi doppia visuale. Al telescopio essa appare costituita da due stelle distinte di eguale o diverso splendore. Se le due stelle formano un sistema fisico, entrambe devono percorrere orbite ellittiche col fuoco nel comune baricentro. Ciò che si osserva non è tuttavia l'orbita reale ma la sua proiezione sulla sfera celeste o, ciò che è lo stesso, sul piano tangente la sfera celeste nel punto che segna il baricentro. Il piano orbitale del sistema binario può infatti essere inclinato rispetto alla visuale andando dal caso limite in cui ha la medesima giacitura del piano tangente, inclinazione 0 gradi ossia visto *face on*, al caso in cui è visto di taglio, inclinazione 90 gradi rispetto al piano tangente, ossia visto *edge on*. Il problema consiste nel ricavare gli elementi orbitali dell'orbita *vera* dalla conoscenza dell'orbita *apparente*, ossia della sua proiezione sul piano tangente la sfera celeste.

In genere l'orbita *apparente* data dalle osservazioni è la proiezione dell'orbita *relativa* della componente meno luminosa, la secondaria, rispetto alla stella primaria, più luminosa, presa come origine delle misure di angolo di posizione *P.A.* e separazione ρ . L'analisi delle osservazioni fatte in maniera analitica, *metodo di Kowalsky*, o grafica, *metodo di Zwier*, porta alla conoscenza dei sette elementi orbitali dell'orbita *relativa* tra cui il semiasse maggiore a che, tramite la terza legge di Keplero e nota la distanza, permette di risalire alla somma delle masse delle stelle componenti la binaria.

Le masse singole si ottengono solo se si possono ricavare le orbite baricentriche e quindi i semiassi a_1 ed a_2 , il cui rapporto è legato inversamente al rapporto delle masse delle componenti. Poiché il baricentro non si vede, si devono effettuare delle misure *assolute* di ascensione retta e declinazione di ciascuna stella e ripetere le misure a distanza di tempo per anni e anni. Si ottiene così il moto *assoluto* di ciascuna stella del sistema rispetto ad assi fissi. È da dire però che questo metodo, ben più complicato del primo, è poco seguito e gli astronomi preferiscono usare l'altro, ossia riferire il moto di una stella alla compagna più brillante, che ha il vantaggio di un'origine degli assi facilmente visibile ma non permette di identificare la posizione del baricentro e quindi determinare il rapporto delle masse.

6.5 Le binarie spettroscopiche

Una binaria spettroscopica, vedi Figura 6.5, è un sistema di due stelle, legate dai vincoli della mutua attrazione, e ruotanti attorno a un comune centro di massa, tuttavia tanto vicine tra loro che non è possibile vederle separate coi comuni telescopi ottici. La duplicità del sistema può essere rivelata dallo spettro, ossia da periodiche variazioni della velocità radiale, ottenibile dall'effetto Doppler, tramite la:

$$V = c \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

ove λ è la lunghezza d'onda misurata della riga e λ_0 è quella di laboratorio.

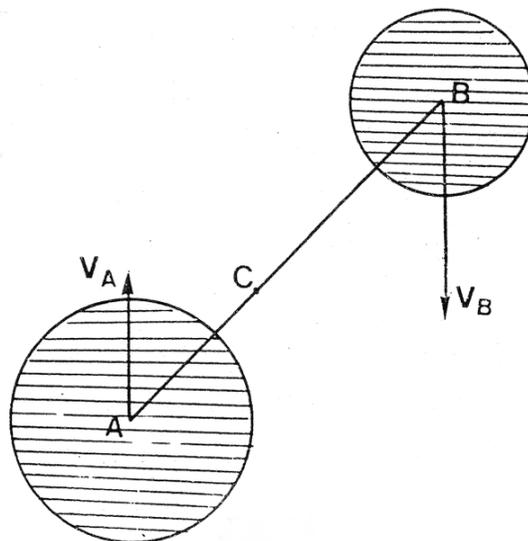


Figura 6.5: Il moto orbitale delle due stelle A e B attorno al comune baricentro C viene rilevato dalla misura delle velocità radiali V_A e V_B delle componenti.

Che cosa si osserva nello spettro di una stella che si muove, rispetto a noi con velocità radiale V ? Le righe di emissione o di assorbimento non hanno più la lunghezza d'onda corrispondente a quella dei campioni osservati in laboratorio, in quiete, ma risultano spostate verso il rosso o verso il violetto a seconda che V sia positiva (allontanamento) o negativa (avvicinamento). Se poi la stella percorre attorno all'altra componente un'orbita tale che il suo piano sia inclinato rispetto al piano tangente alla sfera celeste, nel punto dove si vede la stella stessa, allora lo spostamento delle righe varia a seconda del valore di V , e oscilla tra i valori estremi di V , positivo o negativo. Una binaria spettroscopica viene quindi scoperta in base a questa oscillazione delle righe spettrali, evidente quando si disponga di un sufficiente numero di spettri ben distribuiti nel tempo.

Supponiamo che i due astri che costituiscono la binaria spettroscopica abbiano press'a poco lo stesso splendore. In tal caso l'osservatore vedrà gli spettri sovrapposti di entrambe le componenti e noterà che le righe di una componente si spostano nel verso opposto a quello delle righe dell'altra componente e che ha luogo una periodica oscillazione di queste coppie di righe, come sdoppiandosi, attorno alla lunghezza d'onda corrispondente alla posizione di riposo della sorgente come mostrato in Figura 6.6 nel caso di MIZAR, la prima doppia spettroscopica scoperta. Ciò è evidente, in quanto l'oscillazione delle righe riflette semplicemente il moto orbitale delle due stelle, sempre diametralmente opposte, attorno al comune baricentro C . Può darsi che lo splendore della stella principale A sia tale da soverchiare quello della B , nel qual caso si vedrà il solo spettro della prima, con le singole righe oscillanti attorno alla posizione di riposo.

Nello studio di una binaria spettroscopica, ottenuta una serie di spettrogrammi ben

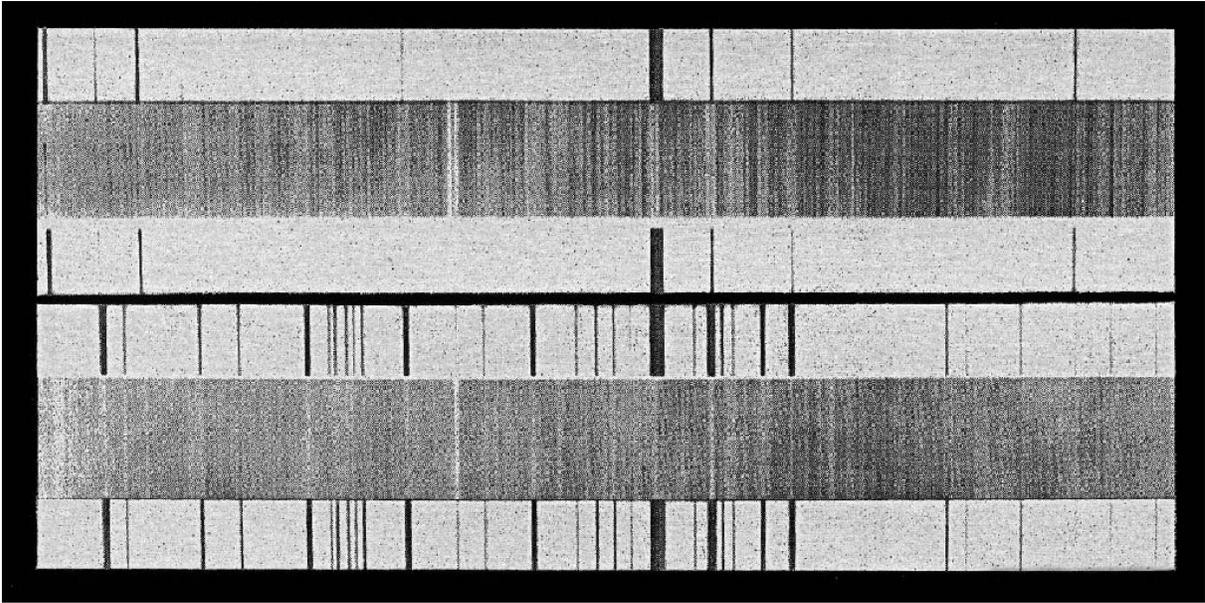


Figura 6.6: *Due spettri di Mizar, compresi tra spettri di confronto del ferro. Nello spettro superiore le righe appaiono doppie, in quello inferiore, semplici. Lo sdoppiamento, che ha una periodicità di 20.5 giorni, dimostra la duplicità dell'astro. Mizar è la prima doppia spettroscopica scoperta da Pickering nel 1889.*

distribuiti nel tempo, e dedotte da questi, con appropriate misure, le velocità radiali V ad ogni tempo t , la prima operazione consisterà nella costruzione della *curva di velocità radiale*. In Figura 6.7 sono mostrate alcune curve di velocità radiale corrispondenti a diverse orientazioni ed eccentricità dell'orbita.

Supponiamo, per metterci nel caso più frequente, che nello spettro si distinguano le righe di una sola componente. Nel diagramma di Figura 6.8 siano nelle ascisse i tempi, espressi per esempio in giorni, e nelle ordinate le velocità osservate. La curva che così ne risulta è appunto la *curva di velocità radiale*.

Dalla curva è facilmente deducibile la velocità radiale massima V_M e quella minima V_m ; la semidifferenza $\frac{V_M - V_m}{2} = K_1$ dà la *semiampiezza* della velocità radiale. Si parla di K_1 perché ci si riferisce alla curva di velocità radiale di una componente; se entrambi gli spettri fossero visibili si potrebbe ottenere anche K_2 . Consideriamo ora due istanti t_1 e t_2 e siano V_1 e V_2 le velocità radiali della stella agli istanti stessi. Lo spostamento radiale della nostra stella, nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ sarà espresso dall'area del trapezoide $V_1 V_2 t_1 t_2$ ovvero

$$A = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt.$$

Questo spostamento radiale non è però dovuto al solo moto orbitale: parte di esso infatti va ascritto allo spostamento (radiale) dell'intero sistema per effetto della componente radiale V_0 della velocità uniforme del baricentro. Per determinare tale velocità V_0 del baricentro, consideriamo due istanti t_3 e t_4 , essendo $t_4 = t_3 + P$, dove

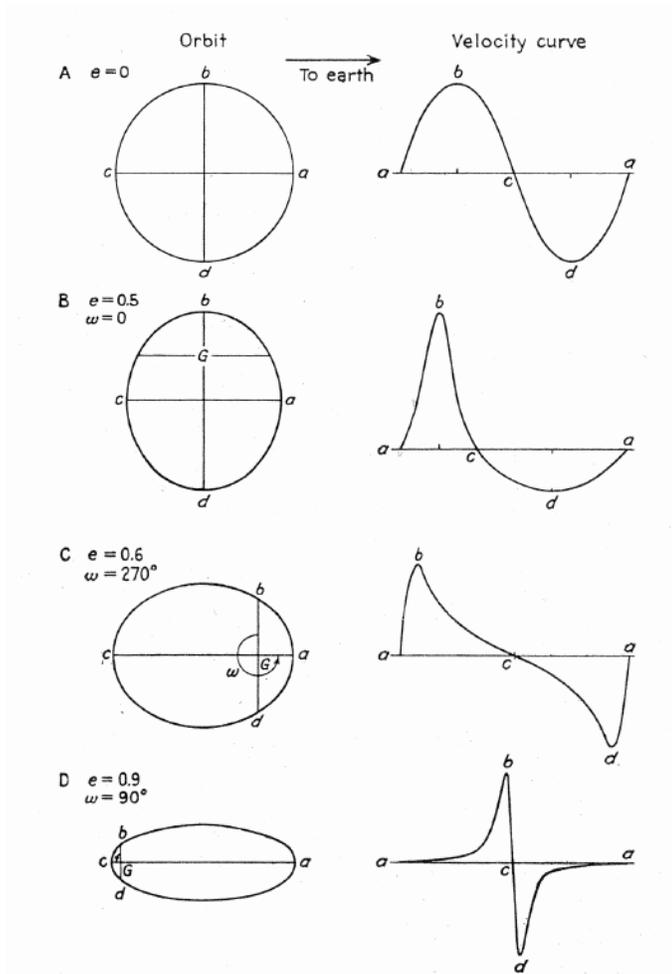


Figura 6.7: Orbite rappresentative di stelle doppie e le corrispondenti curve di velocità radiale. La direzione bd rappresenta la linea dei nodi ed i massimi e minimi della velocità radiale si osservano sempre in corrispondenza al passaggio della stella da questi.

P è il periodo di rotazione attorno al baricentro. Se V_0 fosse eguale a zero, l'area A della figura $t_3 V_3 V_4 t_4$ presa col dovuto segno, dovrebbe essere uguale a zero, perché la stella, compiuta una rivoluzione attorno al baricentro, riassume all'istante t_4 la medesima posizione che aveva all'istante t_3 . In generale, invece, $A \neq 0$, negativa o positiva. Ciò è dovuto al moto radiale, non nullo, del baricentro. E poiché questo si muove radialmente con velocità uniforme, la sua curva di velocità, nella Figura 6.8 dovrà essere una retta parallela all'asse dei tempi ($V_0 = cost$). Questa retta si traccia facilmente tenendo presente che essa determina tra le ordinate in t_3 e t_4 e l'asse delle ascisse, un'area esattamente eguale ad A con la condizione

$$A = \int_{t_3}^{t_4} V(t) dt = V_0 \cdot P$$

La retta di equazione $V = V_0$, si dice anche *retta di compenso* e viene scelta di

regola come asse delle ascisse.

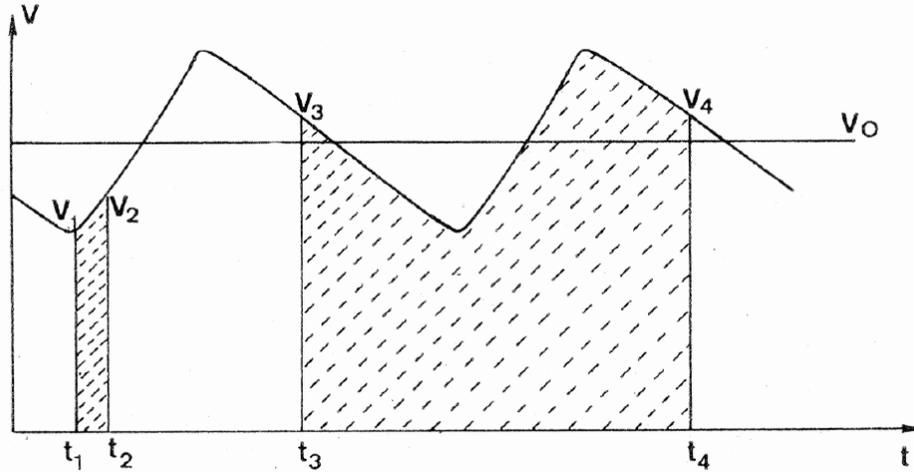


Figura 6.8: *Curva di velocità radiale della componente di una stella doppia. Le aree tratteggiate danno lo spostamento radiale del baricentro del sistema nell'intervallo temporale considerato. Se questo è uguale al periodo P , annullandosi lo spostamento dovuto al moto orbitale, si può risalire alla velocità radiale V_0 del baricentro.*

Per il calcolo degli elementi di una binaria spettroscopica notiamo intanto che ciò che noi possiamo osservare è la proiezione del moto orbitale sulla visuale V (vedi Figura 6.9)

Tale proiezione dipende ovviamente dal prodotto dei due fattori r , distanza della stella da G , e $\sin i$ essendo i l'inclinazione. È prevedibile a priori, perciò, che non potremo avere, comunque sia impostato il calcolo, a e i , separatamente, ma solo il prodotto $a \sin i$. Analogamente, poiché nella proiezione la direzione $\Omega\Omega$ della linea dei nodi non entra in gioco, ossia tutto resta eguale per una qualsiasi rotazione del piano orbitale intorno a V , è ovvio che non potremo ricavare l'angolo di posizione Ω del nodo stesso. In definitiva, potremo avere: $a \sin i$, e , ω , P e T .

Per ricavarli riferiamoci ad un sistema di assi x, y, z , l'asse z diretto secondo la visuale in G contato positivamente da G in là, gli assi x e y giacenti sul piano tangente alla sfera celeste in G con x coincidente con la linea dei nodi. Il nodo ascendente Ω sia quello in cui la stella si allontana da noi. Supponiamo che la stella sia in un certo istante in S , a distanza r da G . La proiezione di r su z sarà $Z = r \cos(\widehat{rz})$ indicando con (\widehat{rz}) l'angolo che la direzione GS forma con GZ . Questo angolo si calcola subito dal triangolo sferico (Figura 6.10) $Z \Omega S$, avendosi:

$$\cos(\widehat{rz}) = \cos SZ = \sin(\nu + \omega) \sin i$$

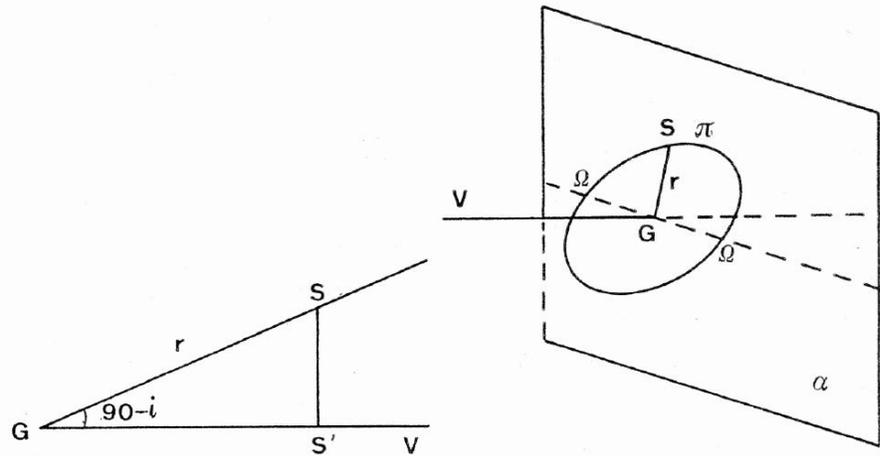


Figura 6.9: A sinistra: V è la direzione della visuale ed S è la posizione di una componente sulla sua orbita riferita al baricentro G . Le osservazioni permettono solo di ottenere la proiezione del moto sulla visuale, cioè $r \sin i$. A destra: V è ancora la direzione della visuale ed α il piano tangente la sfera celeste passante per il baricentro G , π è il piano in cui avviene il moto orbitale e che interseca α lungo la linea dei nodi $\Omega - \Omega$. Una rotazione di questa linea, e quindi del piano dell'orbita, attorno alla visuale non incide sulla proiezione del moto sulla visuale.

essendo il lato $Z \Omega = \pi/2$. Ove ν è l'anomalia vera, ovvero l'angolo che assieme ad r fissa la posizione della stella nella sua orbita; segue:

$$Z = r \cdot \sin(\nu + \omega) \sin i,$$

e quindi la velocità radiale sarà:

$$V = \dot{Z} = \frac{dr}{dt} \cdot \sin(\nu + \omega) \sin i + r \cos(\nu + \omega) \sin i \frac{d\nu}{dt}$$

Ricordando che:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$$

con a semiasse dell'orbita e ν l'anomalia vera e che dalla legge delle aree:

$$r^2 \frac{d\nu}{dt} = \frac{2\pi a^2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{P}$$

si ottiene:

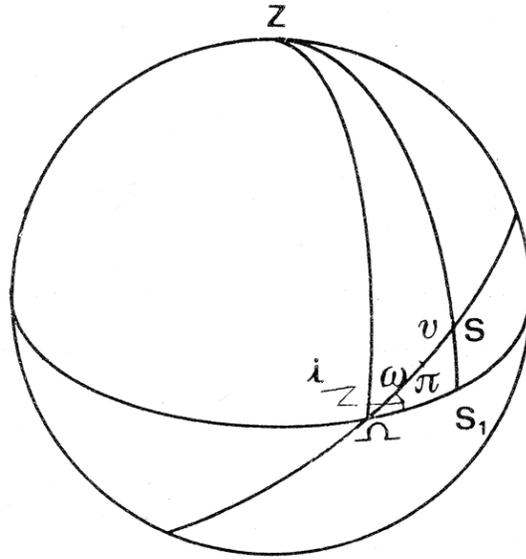


Figura 6.10: La sfera, di raggio unitario, ha come origine il baricentro del sistema. Z ed S sono rispettivamente le intersezioni della sfera con la direzione della visuale e con quella che indica la posizione della stella nella sua orbita. La figura mostra la costruzione del triangolo sferico ΩZS .

$$r \frac{d\nu}{dt} = \frac{2\pi a(1 + e \cos \nu)}{P(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} = \frac{2\pi a e \sin \nu}{P(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Segue:

$$V = \dot{Z} = \frac{2\pi a e \sin \nu}{P(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin(\nu + \omega) \sin i + \cos(\nu + \omega) \sin i \frac{2\pi a(1 + e \cos \nu)}{P(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}$$

e quindi, dopo un po' di calcolo:

$$V = \frac{2\pi a e \sin i}{P(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \left(e \cos \omega + \cos(\nu + \omega) \right)$$

Si vede intanto che V è massima o minima quando $(\nu + \omega) = 0$, ossia per $\nu = -\omega$, o per $\nu = \pi - \omega$, che è quanto dire *ai nodi*.

Se indichiamo con V_1 la velocità radiale al nodo ascendente ($\nu = -\omega$) e con V_2 quella (negativa) al nodo discendente ($\nu = \pi - \omega$) e posto

$$K_1 = \frac{2\pi}{P} \frac{a \sin i}{\sqrt{1-e^2}}$$

abbiamo

$$V_1 = K_1(e \cos \omega + 1)$$

$$-V_2 = K_1(e \cos \omega - 1)$$

da cui $2K_1 = V_1 + V_2$ ossia

$$\frac{2\pi}{P} \frac{a \sin i}{\sqrt{1-e^2}} = K_1 = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

e ancora:

$$e \cos \omega = \frac{V_1 - V_2}{2K_1} = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}$$

ma V_1 e V_2 sono noti dalla curva della velocità radiale, quindi è noto intanto il valore dell'espressione:

$$\frac{2\pi}{P} \frac{a \sin i}{\sqrt{1-e^2}}$$

e quello di

$$e \cos \omega$$

Consideriamo ora la Figura 6.11. Partendo dal nodo ascendente Ω , dove è massima positiva, la V diminuisce, annullandosi quando l'astro è alla massima distanza Z_M da noi.

Si ha $V = 0$ quando $e \cos \omega = -\cos(\nu_q + \omega)$.

Se indichiamo con Q la posizione della stella alla massima distanza da noi, con ν_q la corrispondente anomalia vera, la Z_M risulta:

$$Z_M = r \sin i \sin(\nu_q + \omega) = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu_q} \sin i \sin(\nu_q + \omega)$$

Proseguendo nel suo moto, la V si inverte e diventa negativa raggiungendo in Ω , al nodo discendente, il massimo valore negativo. Poi la velocità diminuisce e di nuovo si annulla in P , dove l'astro tocca la massima vicinanza, distando Z_m dall'origine. Come sopra, indicando ν_p l'anomalia vera in P , si ha:

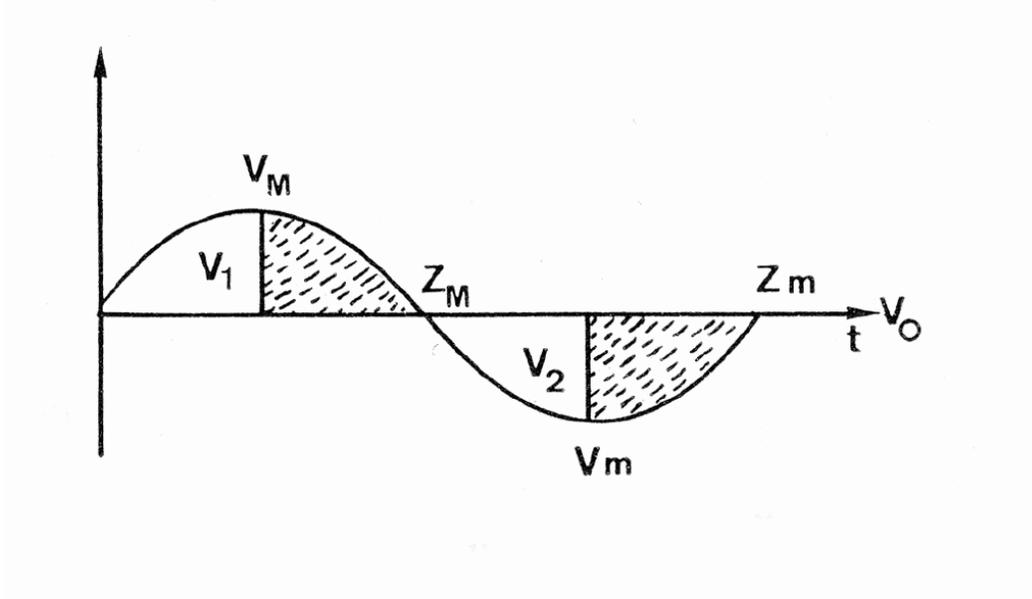


Figura 6.11: Sulla curva di velocità radiale, con riferimento alla retta di compenso, sono evidenziate le aree che danno rispettivamente la proiezione sulla visuale del punto più lontano dell'orbita Z_M e quella del punto più vicino Z_m .

$$e \cos \omega = -\cos(\nu_p + \omega)$$

$$Z_m = r \sin i \sin(\nu_p + \omega) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu_p} \sin i \sin(\nu_p + \omega)$$

dividendo le due espressioni si ha:

$$\frac{Z_m}{Z_M} = \frac{1 + e \cos \nu_q}{1 + e \cos \nu_p} \cdot \frac{\sin(\nu_p + \omega)}{\sin(\nu_q + \omega)}$$

ma poiché

$$\cos(\nu_q + \omega) = \cos(\nu_p + \omega)$$

dovrà dunque essere o:

$$\nu_q + \omega = \nu_p + \omega$$

oppure:

$$(\nu_q + \omega) = -(\nu_p + \omega)$$

Dovendo essere:

$$Z_M > 0 \quad \text{e} \quad Z_m < 0$$

si ha:

$$\nu_q + \omega = -(\nu_p + \omega)$$

e per di più è:

$$\sin(\nu_q + \omega) > 0$$

e quindi:

$$\frac{Z_m}{Z_M} = -\frac{1 + e \cos \nu_q}{1 + e \cos \nu_p}$$

D'altra parte

$$0 < \sin(\nu_q + \omega) = -\sin(\nu_p + \omega) = \sqrt{1 - \cos^2(\nu_q + \omega)} = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \omega}$$

ossia:

$$\sin(\nu_q + \omega) = \sqrt{1 - \frac{(V_1 - V_2)^2}{(V_1 + V_2)^2}} = 2 \frac{\sqrt{V_1 V_2}}{V_1 + V_2}$$

Analogamente:

$$\sin(\nu_p + \omega) = -2 \frac{\sqrt{V_1 V_2}}{V_1 + V_2}$$

Ma:

$$\begin{aligned} \frac{Z_m}{Z_M} &= -\frac{1 + e \cos \nu_q}{1 + e \cos \nu_p} = -\frac{1 + e \cos(\nu_q + \omega - \omega)}{1 + e \cos(\nu_p + \omega - \omega)} = \\ &= -\frac{1 + e \cos(\nu_q + \omega) \cos \omega + e \sin(\nu_q + \omega) \sin \omega}{1 + e \cos(\nu_p + \omega) \cos \omega + e \sin(\nu_p + \omega) \sin \omega} = \\ &= -\frac{1 - e^2 \cos^2 \omega + e \sin(\nu_q + \omega) \sin \omega}{1 - e^2 \cos^2 \omega + e \sin(\nu_p + \omega) \sin \omega} = \end{aligned}$$

e sostituendo i valori noti:

$$\frac{Z_m}{Z_M} = -\frac{1 - \left(\frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}\right)^2 + e \sin \omega \frac{2\sqrt{V_1 V_2}}{V_1 + V_2}}{1 - \left(\frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}\right)^2 - e \sin \omega \frac{2\sqrt{V_1 V_2}}{V_1 + V_2}}$$

che con facili passaggi porta alla

$$e \sin \omega = \frac{2\sqrt{V_1 V_2}}{V_1 + V_2} \frac{Z_m + Z_M}{Z_m - Z_M}$$

Ma Z_m e Z_M sono, nella curva delle velocità le aree tratteggiate, che esprimono appunto lo spostamento radiale dal momento in cui la velocità è massima o minima al momento in cui è nulla. Segue che è noto $e \sin \omega$ ed essendo anche noto $e \cos \omega$ risultano subito e ed ω . Infine dato P , sempre dalla curva delle velocità, conosciuto e , si ha dalla K_1 il valore di $a \sin i$.

Resta da trovare il tempo T_0 del passaggio al periastro: osserviamo che nell'istante t in cui la stella passa nel nodo ascendente si ha un massimo nella curva delle velocità; t è quindi noto, ed inoltre all'istante t (passaggio al nodo ascendente) dev'essere $\nu = -\omega$. Quindi, ricordando le relazioni intercorrenti nel problema di Keplero, l'anomalia eccentrica E sarà:

$$\tan \frac{1}{2} E = -\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{1}{2} \omega$$

Infine:

$$M = E - e \sin E = \frac{2\pi}{P} (t - T_0);$$

noto t , essendo conosciuti P ed M si ha subito T_0 .

Finora abbiamo supposto che sia visibile un solo spettro, quello della stella principale. È questo il caso più frequente. Tuttavia non è raro che entrambi gli spettri siano osservabili, e che sia perciò possibile costruire la curva di velocità della componente A ed insieme quella della componente B . Ovviamente, poiché nel moto attorno al baricentro una componente si avvicina mentre l'altra si allontana, le due curve di velocità saranno opposte rispetto all'asse baricentrico, e inoltre simili, ossia tali che il rapporto $\frac{V_A}{V_B}$ delle velocità in un qualsiasi istante t sia costante.

Ciò posto è ovvio che si avrà

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{V_A}{V_B}$$

e quindi sarà immediatamente noto il rapporto delle masse m_1 e m_2 dei due astri, ma non le masse singole.

6.5.1 Le funzioni di massa

Vogliamo ora esaminare quali informazioni si possono trarre sulle masse delle binarie dalla conoscenza delle orbite spettroscopiche.

Consideriamo la III legge di Keplero per una binaria. Misurando P in anni siderali, a in unità astronomiche, e le masse in masse solari, abbiamo:

$$\frac{a^3}{P^2} = m_1 + m_2 \quad , \quad \text{ove} \quad a = a_1 + a_2 \quad \text{e} \quad m_2 = m_1 \cdot \frac{a_1}{a_2}$$

Segue che

$$m_1 = \frac{a^3}{P^2 \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right)}$$

Scriviamo

$$m_1 \sin^3 i = \frac{(a_1 \sin i + a_2 \sin i)^3}{P^2 \left(1 + \frac{a_1 \sin i}{a_2 \sin i}\right)}$$

Analogamente

$$m_2 \sin^3 i = \frac{(a_1 \sin i + a_2 \sin i)^3}{P^2 \left(1 + \frac{a_2 \sin i}{a_1 \sin i}\right)}$$

Se sono note le orbite di entrambe le componenti, risulteranno noti anche i termini al secondo membro per cui si avrà la conoscenza di

$$m_1 \sin^3 i \quad \text{e} \quad m_2 \sin^3 i$$

che si chiamano *prime funzioni di massa* o anche *masse ridotte*. Esse rappresentano il *minimo valore che può assumere la massa delle componenti 1 e 2* rispettivamente. È chiaro che si potranno esprimere queste funzioni di massa a mezzo delle semiampiezze K_1 e K_2 . Esprimendo allora P in giorni, K in Km/s e le masse in unità solari, avremo:

$$m_1 \sin^3 i = 1.035 \times 10^{-7} K_2 (K_1 + K_2)^2 P (1 - e^2)^{3/2}$$

$$m_2 \sin^3 i = 1.035 \times 10^{-7} K_1 (K_1 + K_2)^2 P (1 - e^2)^{3/2}$$

Se è noto i (binaria ad eclisse), le prime funzioni di massa permettono il calcolo delle masse di ciascuna componente.

Se invece è nota l'orbita di *una sola componente*, la 1 per esempio, procediamo così. Scriviamo la legge di Keplero nella forma

$$\frac{(a_1 + a_2)^3}{P^2} = m_1 + m_2$$

e poiché nulla sappiamo su a_2 , esprimiamo tutto in funzione di $a_1 \sin i$, di m_1 e m_2 .

Dalla

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

abbiamo

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{m_1 + m_2}{m_2}$$

e quindi

$$\frac{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} a_1\right)^3}{P^2} = m_1 + m_2$$

$$m_2^3 = \frac{(m_1 + m_2)^3 a_1^3}{P^2 (m_1 + m_2)} = \frac{a_1^3 (m_1 + m_2)^2}{P^2}$$

$$\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{(a_1 \sin i)^3}{P^2}$$

Il secondo membro è conosciuto tramite gli elementi orbitali spettroscopici. Introducendo la semiampiezza K in Km/s ed esprimendo le masse in unità solari e il periodo in giorni avremo

$$f(m_2) = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = 1.035 \times 10^{-7} K_1^3 P(1 - e^2)^{3/2}$$

Analogamente, se è noto solo lo spettro della componente 2:

$$f(m_1) = \frac{m_1^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = 1.035 \times 10^{-7} K_2^3 P(1 - e^2)^{3/2}$$

La funzione $f(m_2)$ si chiama *seconda funzione di massa*, o anche semplicemente *funzione di massa*, per antonomasia.

Se scriviamo

$$m_2^3 = (m_1 + m_2)^2 \frac{f(m_2)}{\sin^3 i}$$

vediamo che m_2 cresce con $f(m_2)$, per cui a piccoli valori di $f(m_2)$ corrispondono piccoli valori di m_2 , a parità di massa m_1 del primario e di inclinazione i ; quest'ultima tuttavia non può riuscire prossima a zero, perché non si avrebbero velocità radiali abbastanza elevate da rendersi misurabili.

Ponendo al secondo membro $m_1 = 0$, si ha il minimo valore di m_2 , cioè

$$m_2 \min = \frac{f(m_2)}{\sin^3 i}$$

È da notare che, con una binaria ad uno spettro, le informazioni che si ottengono riguardano la massa, m_2 , della componente che non si vede.

Da quanto fin qui detto è chiaro che il rapporto di massa si può ricavare facilmente nel caso di binaria a spettro doppio, semplicemente scrivendo

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{a_1 \sin i}{a_2 \sin i}$$

Se la binaria è del tipo ad eclisse e se lo spettro è singolo, si dovranno concentrare alcune osservazioni in prossimità del minimo principale, quando cioè viene occultata la stella generalmente più luminosa. In tal modo si può eventualmente rivelare la presenza del secondario, del quale si cercherà di stimare il tipo spettrale e la classe di luminosità, nonché di misurarne la velocità radiale nel breve arco della visibilità dell'astro. Dal rapporto delle velocità simultanee rispetto al baricentro delle due componenti, si potrà risalire al rapporto di massa. Il metodo è di scarso affidamento, dato che il minimo fotometrico è di breve durata rispetto al periodo e inoltre le velocità radiali sono generalmente prossime a zero, in quella fase, per cui gli errori percentuali sono forti.

È ovvio che se percepiamo solo lo spettro della primaria in un certo intervallo spettrale e lo spettro della secondaria in un altro intervallo, potremo ricavare il rapporto di massa dal rapporto delle semiampiezze K_1 e K_2 ottenuto per le due componenti nei due distinti intervalli spettrali.

Il problema di conoscere le singole masse m_1 e m_2 non è quindi risolto, neppure quando sono noti i due spettri, cioè il rapporto m_1/m_2 . Per risalire alle masse singole è sufficiente tuttavia conoscere i e ciò avviene in casi particolarissimi, come detto, quando l'inclinazione i è prossima a 90° . In tal caso, ad ogni rivoluzione, una delle due componenti occulta l'altra, dando luogo ad un'attenuazione osservabile dallo splendore integrale (sistemi spettrofotometrici) che rivela appunto come il valore di i sia vicino a 90° , cioè $\sin i = 1$. Note $f(m_1)$ e $f(m_2)$ è allora immediato il calcolo di m_1 e m_2 .

6.6 Le binarie fotometriche

6.6.1 Introduzione

Tratteremo adesso il caso delle binarie fotometriche, o binarie ad eclisse. La maggior parte di esse è costituita da doppie molto strette, che non differiscono fisicamente dalle binarie spettroscopiche. La sola differenza consiste nel fatto che l'inclinazione del piano orbitale è prossima a 90° , ossia tale piano contiene la visuale e perciò ad ogni semirivoluzione attorno al baricentro noi vediamo una delle due stelle coprire, in tutto o

in parte, l'altra. Poiché nè l'occhio nè i telescopi riescono a separare le due componenti, l'effetto dell'occultazione è puramente fotometrico. In altri termini, anziché ricevere la somma dei flussi luminosi di ciascuna stella, quando una stella fa schermo all'altra noi riceviamo un flusso minore quanto più era il contributo della zona occultata. Nel caso più estremo la componente meno splendente copre completamente l'altra con una marcata attenuazione dello splendore complessivo ed il sistema, che vediamo come fosse una stella singola, è affievolito per tutto il tempo in cui dura l'eclisse.

Le binarie ad eclisse ci consentono di estendere lo studio delle binarie strette fino a stelle molto deboli; esse sono più facili da scoprire e da studiare delle binarie spettroscopiche. Inoltre un esame accurato della curva di luce, specie se fatto a più colori, consente di ricavare informazioni sulla forma delle componenti, sull'eventuale afflusso di materiale gassoso, sulle mutue interazioni fisiche non limitate agli effetti gravitazionali, etc. Lo studio contemporaneo di una binaria ad eclisse dal punto di vista fotometrico e spettroscopico, specie se entrambi gli spettri sono osservabili, consente di desumere dati sui raggi e masse stellari. Infine le binarie ad eclisse suscitano una serie di problemi di scambio di massa, di esplosioni, di interazioni profonde, che sono di grande attualità. Ci limiteremo qui ad alcuni problemi particolari, rimandando per un approfondimento ai trattati come *Close Binary Stars* del Kopal.

6.6.2 Tipi di binarie ad eclisse

La classificazione viene fatta in base all'esame della curva di luce, che mostra come la stella varia di splendore in relazione alla mutua posizione delle sue componenti rispetto all'osservatore. Dalla curva di luce (vedi Figura 6.12) si ottengono subito i seguenti dati:

- 1) epoca del minimo principale T_0 . Se l'eclisse è totale ed il minimo è piatto, si sceglie il punto di mezzo;
- 2) epoca del minimo secondario T_S . Di solito si trova indicata come *primaria* la stella occultata al minimo principale, e *secondaria* quella occultata al minimo secondario: questi termini non vanno confusi con i rispettivi termini che si attribuiscono di solito secondo le loro masse. In questo caso invece la *primaria* è quella con maggior luminosità superficiale (alla λ_{eff} a cui si osserva), cioè la stella più calda;
- 3) periodo P , intervallo di tempo tra due punti di ugual fase in cicli successivi;
- 4) magnitudini, al massimo o fuori eclisse m_0 , al minimo principale m_P , al minimo secondario m_S (talora sostituite dai relativi flussi I_0, I_P, I_S);
- 5) ampiezza del minimo principale $A_P = m_P - m_0$ e del secondario $A_S = m_S - m_0$;
- 6) durata temporale del minimo d .

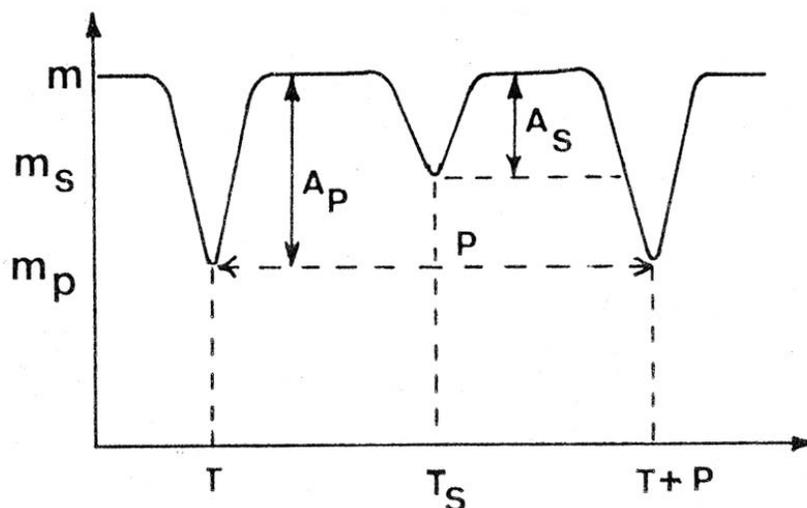


Figura 6.12: Curva di luce schematica di una binaria ad eclisse e le grandezze fotometriche da essa derivabili.

Poiché la curva è di solito regolare e perfettamente periodica, l'epoca T_i di un qualunque minimo può essere indicata da $T_i = T_0 + nP$, dove n è un intero, positivo o negativo. Infine la fase ad un tempo t qualsiasi si indica con la $f = (t - T_i)/P$, rapportandosi alla T_i immediatamente precedente a t .

L'esame delle curve di luce mostra che queste si possono dividere essenzialmente in due tipi fondamentali, ciascuno dei quali viene talora suddiviso in due sottotipi (vedi Figura 6.13).

Nelle curve del tipo I la magnitudine fuori delle eclissi è costante; ciò si deve al fatto che le stelle sono perfettamente sferiche e perciò presentano all'osservatore sempre la stessa area totale, quando non sono in eclisse. Si possono poi distinguere due sottocasi: nel sottotipo Ia la magnitudine al minimo rimane costante per qualche tempo (eclisse totale o eclisse anulare); nel sottotipo Ib il minimo ha una durata molto breve, anzi in linea di principio nulla (eclisse parziale).

Nel tipo II la magnitudine fuori delle eclissi è variabile; ciò avviene perché le due stelle non sono sferiche, ma a causa della marea che l'attrazione di una induce sull'altra, sono alquanto allungate nella direzione dei due centri; durante la rivoluzione del sistema l'area totale che le due componenti presentano all'osservatore varia perciò continuamente anche quando esse non sono in eclisse. Oltre che alla variazione dell'area, la variazione della magnitudine è dovuta anche ad altri effetti come l'effetto della riflessione della luce di una delle due componenti da parte dell'altra e la variazione della brillantezza da un punto all'altro della superficie delle componenti a causa della variazione della gravità.

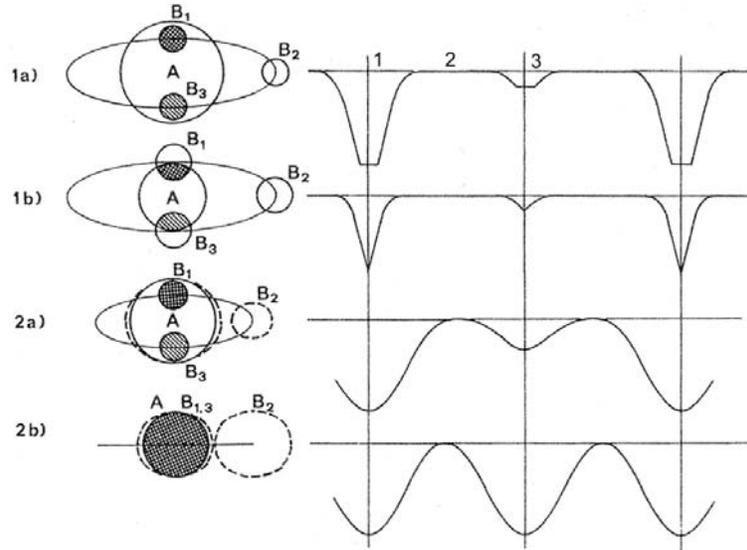


Figura 6.13: *Classificazione delle binarie fotometriche in base alle loro curve di luce. 1 e 3 stanno ad indicare rispettivamente gli istanti del minimo principale e secondario, mentre 2 indica una osservazione fuori eclisse.*

Evidentemente effetti di questo genere dovrebbero presentarsi in tutte le binarie a eclisse, ma nelle binarie con curve di luce del tipo I essi sono molto piccoli, perché la separazione delle componenti è molto maggiore che nelle binarie con curve di luce di tipo II. Infatti tra le prime si osservano i periodi più lunghi, che in alcuni casi eccezionali possono arrivare fino ad alcuni anni. Anche tra le curve di luce di tipo II si sogliono distinguere due sottotipi: IIa o classe β *Lyræ* con due eclissi disuguali e IIb o classe *W Ursæ Maioris* con i due minimi ugualmente profondi.

I periodi più corti si hanno tra le binarie della classe *W UMa* (alcune ore); le binarie della classe β *Lyr*, hanno periodi che vanno da un giorno a una decina di giorni (β *Aur* : $P = 3^d.96$, β *Lyr* : $P = 13^d$). Come è stato detto i periodi più lunghi si verificano tra le binarie con curve di luce del tipo I, il periodo più lungo, $P = 27^a.08$, spetta a ϵ *Aur*, quello successivo, $P = 2^a.66$, corrisponde a ζ *Aur*. In questi casi l'eclisse si prolunga per alcune settimane o mesi (due anni nel caso di ϵ *Aur*).

Terminiamo con il menzionare i prototipi delle stelle binarie ad eclisse totale, tipo Ia, e quelle ad eclisse parziale, tipo Ib. Si tratta delle stelle UV Cephei e β Persei ovvero Algol. Quest'ultima fu scoperta come variabile da Geminiano Montanari nel 1669 con un periodo $P = 2^d21^h$ e magnitudini, fuori eclisse, $m_0 = 2$ ed al minimo principale $m_p = 3.5$.

6.6.3 Calcolo dell'orbita di una binaria ad eclisse

Esaminiamo il caso più semplice, di orbita circolare, e con stelle di forma sferica. Gli elementi orbitali da trovare (a : semiasse maggiore dell'orbita, e : eccentricità della stessa, i : inclinazione tra il piano dell'orbita ed il piano tangente alla sfera celeste, ω : distanza del periastro dal nodo, contato nel verso del moto della secondaria, Ω : angolo di posizione del nodo, da nord verso est, P e T_0) si riducono ai soli a , P , T_0 ed i prossimo a 90° . Infatti $e = 0$, ω ed Ω sono indeterminati. Gli elementi temporali P e T_0 si determinano facilmente dalla curva di luce. Restano quindi da trovare a , i oltre ad altre grandezze che caratterizzano le due componenti come raggi e masse.

Sia r' il raggio della stella più piccola, r quello della più grande, inoltre $K = r'/r$. Sia E_1 il potere emissivo della più oscura, E quello della più luminosa. Sia a la distanza della secondaria dalla principale. Supponiamo che l'eclisse sia parziale, nel qual caso l'inclinazione i sarà prossima ma non esattamente uguale a 90° . Sul piano tangente alla sfera celeste (vedi Figura 6.14) assumiamo una coppia di assi ortogonali x, y con centro al centro della stella principale e l'asse x diretto secondo la linea dei nodi. Un'altra coppia con la stessa origine, giaccia nel piano orbitale, con l'asse ξ coincidente con x e l'asse η diretto al centro dell'astro occultante al momento del minimo.

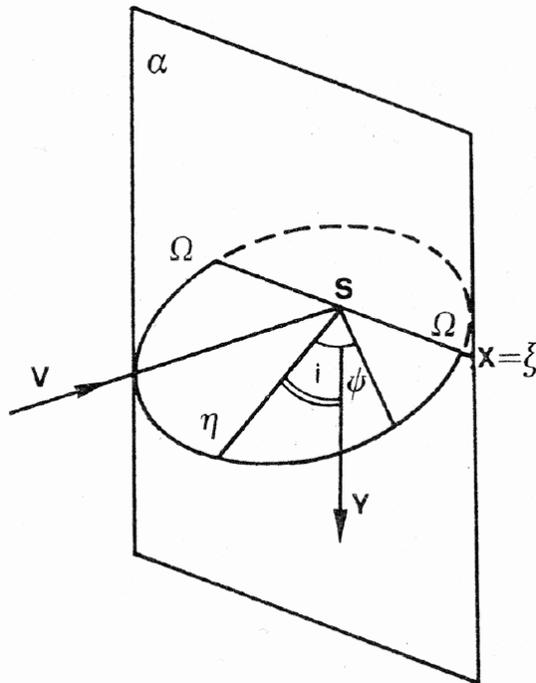


Figura 6.14: Schema per il calcolo della separazione p tra i centri delle componenti di una doppia ad eclisse. V indica la direzione della visuale ed α è il piano tangente alla sfera celeste passante per la stella primaria posta in S .

Osserviamo intanto che è

$$y = \eta \cos i.$$

Inoltre, se T_0 è l'epoca del minimo principale, la fase all'istante t sarà:

$$\psi = 2\pi (t - T_0)/P.$$

Inoltre

$$\xi = a \sin \psi \quad , \quad \eta = a \cos \psi$$

e quindi:

$$x = a \sin \psi \quad , \quad y = a \cos \psi \cos i$$

D'altra parte la distanza apparente ρ delle due stelle, ossia la proiezione di a sul piano tangente alla sfera celeste, è funzione di ψ :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = a^2(\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \cos^2 i)$$

Condizione perché abbia luogo un'eclisse parziale è:

$$(r' + r) > \rho > (r - r')$$

Osserviamo adesso che se S è l'area che una stella occulta sull'altra:

$$S = r^2(\theta - \sin \theta \cos \theta) + r'^2(\theta' - \sin \theta' \cos \theta')$$

ove θ e θ' sono gli angoli tra la congiungente i centri dei due dischi stellari ed i raggi r ed r' tracciati dai rispettivi centri ad uno dei due punti di intersezione dei dischi stessi.

Essendo

$$r \sin \theta = r' \sin \theta' \quad ; \quad \rho = r \cos \theta + r' \cos \theta'$$

ed introducendo $K = \frac{r'}{r}$ si ha

$$\sin \theta' = \sin \theta / K \quad ; \quad \cos \theta' = (1 - \sin^2 \theta / K^2)^{1/2}$$

e quindi:

$$\cos \theta + (K^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} = \rho / r$$

Facciamo ora il rapporto

$$\alpha = S / \pi r'^2 = (\theta - \sin \theta \cos \theta) / \pi K^2 + (\theta' - \sin \theta' \cos \theta') / \pi$$

tenuto presente che $\sin \theta'$ e $\cos \theta'$ sono funzioni di θ , a sua volta funzione di K ed ρ/r , si ha

$$\alpha = \alpha(K, \rho/r) \quad \text{ossia} \quad \rho/r = \phi(\alpha, K)$$

funzione ϕ che è nota nelle ipotesi fatte. Ne consegue che è possibile tabulare ρ/r per opportune serie di valori di K e di α .

Inoltre si ha:

$$\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \cos^2 i = \rho^2/a^2 = r^2 \phi^2(\alpha, K)/a^2$$

equazione che lega le osservazioni, espresse dalla fase ψ , alle incognite r/a , i , K ed α del nostro problema. Notare che si tratta di numeri puri.

Indichiamo ora con I l'illuminamento prodotto dalla binaria fuori eclisse, con I_P quello al momento del minimo principale, con I_S quello al momento del minimo secondario.

Poniamo inoltre

$$P_P = \frac{I - I_P}{I} \quad , \quad P_S = \frac{I - I_S}{I} \quad , \quad I > I_S > I_P,$$

ed osserviamo che

$$\frac{I_P}{I_S} = \frac{I - SE}{I - SE_1}$$

essendo l'area occultata eguale nei due casi del massimo principale e secondario. Segue che

$$\frac{I - I_S}{I - I_P} = \frac{P_S}{P_P} = \frac{E_1}{E} = (T_1/T)^4$$

rapporto delle temperature delle due stelle.

In particolare se $E_1 = 0$, ossia se una delle due componenti fosse totalmente oscura, $P_S/P_P = 0$, $I = I_S$ ossia non ci sarebbe eclissi secondaria.

6.6.4 Caso dell'eclisse totale

Facendo riferimento alla Figura 6.15, sia d la lunghezza temporale dei minimi, a splendore costante. Se T_0 è l'epoca del centro dell'eclisse, l'inizio e la fine della totalità saranno

$$t = T_0 \pm d/2$$

e la distanza delle due componenti, all'inizio e alla fine della totalità, sarà

$$\rho = r - r' = r(1 - K)$$

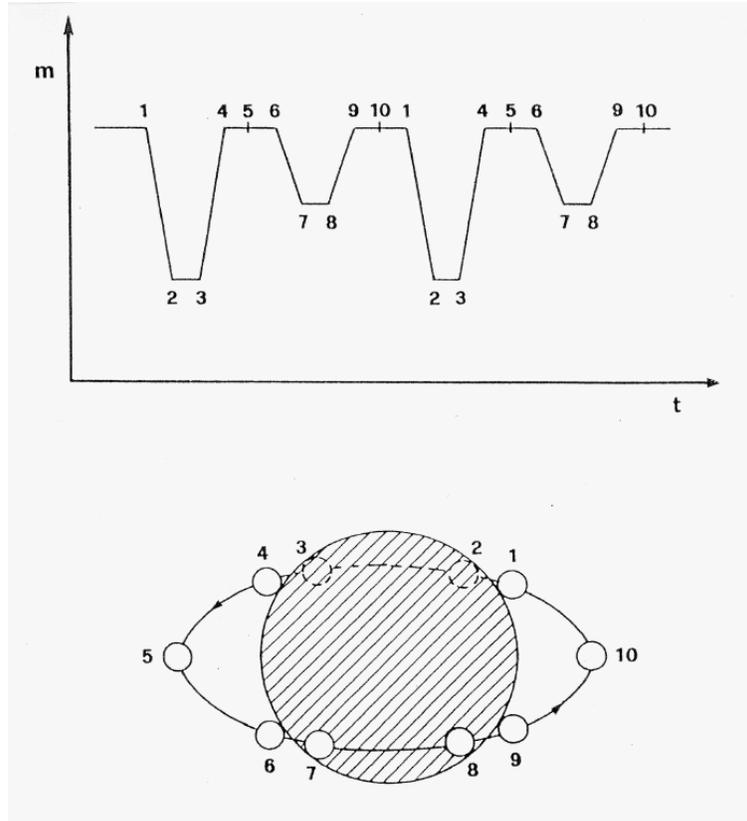


Figura 6.15: *Curva di luce schematica nel caso di eclisse totale con indicate, in funzione della fase, le posizioni della stella occultata sulla sua orbita.*

e la fase corrispondente

$$\psi = \frac{\pi d}{P}.$$

Segue che

$$\rho^2 = a^2(\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \cos^2 i) = a^2(\sin^2(\pi d/P) + \cos^2(\pi d/P) \cos^2 i)$$

ossia:

$$\frac{(1 - K)^2 r^2}{a^2} = \sin^2(\pi d/P) + \cos^2(\pi d/P) \cos^2 i$$

nelle tre incognite K , r/a ed i .

Analogamente, se D è la durata totale dell'eclisse (dal primo declino di luce fino al ritorno al massimo), negli istanti $t_0 = T_0 \pm D/2$ i dischi sono tangenti esternamente, cioè

$$\rho = r + r' \quad , \quad \psi = \pi D/P.$$

$$\rho = r(1 + K) \quad \rho^2 = a^2(\sin^2(\pi D/P) + \cos^2(\pi D/P) \cos^2 i)$$

$$\frac{(1 + K)^2 r^2}{a^2} = \sin^2(\pi D/P) + \cos^2(\pi D/P) \cos^2 i$$

altra equazione nelle stesse incognite K , r/a ed i .

Supponiamo ora che la stella con potere emissivo E_1 , ossia la stella più oscura, abbia raggio $r > r'$ e quindi sia la più grande. Allora al minimo principale l'eclisse è totale ed al secondario è eclisse anulare. Segue, a meno di una costante moltiplicativa, che

$$I = \pi(r^2 E_1 + r'^2 E) = \pi r^2 (E_1 + K^2 E) \quad I_P = \pi r^2 E_1$$

e quindi

$$\frac{I - I_P}{I_P} = K^2 \frac{E}{E_1}$$

ma

$$\frac{E_1}{E} = \frac{I - I_S}{I - I_P}$$

segue

$$K^2 = \frac{I - I_S}{I_P} = \frac{P_S}{1 - P_P}$$

e finalmente

$$\frac{P_S}{K^2} + P_P = 1$$

Analogamente, se la stella oscura è quella più piccola, allora il minimo principale avviene con eclisse anulare, e si ha

$$\frac{P_P}{K^2} + P_S = 1$$

A priori, dalle osservazioni fotometriche non è possibile stabilire se il minimo principale corrisponde all'eclisse totale od anulare. In ogni caso deve essere $i \sim 90^\circ$ e quindi in prima approssimazione

$$\frac{(1 - K)^2 r^2}{a^2} = \sin^2(\pi d/P)$$

$$\frac{(1 + K)^2 r^2}{a^2} = \sin^2(\pi D/P)$$

$$\frac{1 - K}{1 + K} = \frac{\sin(\pi d/P)}{\sin(\pi D/P)} \sim \frac{d}{D}$$

dalla quale si ha un valore approssimato di K , e quindi la possibilità di scegliere tra i due valori precisi di K , molto diversi tra loro, dati nei due casi esaminati. Le tre equazioni ricavate risolvono il problema, cioè danno

$$K = \frac{r'}{r}, \quad \frac{r}{a}, \quad i.$$

Il caso delle eclissi parziali, che qui tralasciamo, risulta più complicato dovendosi ottenere dalle osservazioni l'ulteriore incognita α , percentuale del disco della stella più piccola occultata durante l'eclisse.

Ricordiamo infine che dallo studio dei sistemi spettroscopici, con entrambi gli spettri visibili, si ricava

$$\frac{a_1^3 \sin^3 i}{P^2} = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2}$$

con al secondo termine la *funzione di massa*, ed

$$\frac{a_2^3 \sin^3 i}{P^2} = \frac{m_1^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2}$$

è quindi noto il rapporto $m_2/m_1 = a_1/a_2 = V_1/V_2$.

Non erano ottenuti i singoli valori delle masse, neppure quando erano noti i due spettri, ma solo il loro rapporto. Per poter risalire alle masse singole è ora sufficiente conoscere i come nel caso delle binarie ad eclisse (che in questo caso si chiamano sistemi *spettrofotometrici*). Essendo noti i primi membri ed inoltre il valore di i , si può avere la somma $m_1 + m_2$ e quindi le singole masse m_1 ed m_2 . Infine, essendo noti a_1 ed a_2 (perché è noto i) e quindi anche $a = a_1 + a_2$, si hanno i singoli raggi r ed r' . È questo l'unico caso in cui si possono ottenere simultaneamente masse e raggi delle stelle.

6.7 Sistemi binari stretti (CBS)

Oltre alla grande utilità per lo studio delle correlazioni astrofisiche massa-luminosità, massa-raggio, scala delle temperature, ecc., le binarie a eclisse presentano un notevole interesse anche per il grande numero di problemi particolari che esse sollevano, soprattutto per la prossimità delle due componenti.

In molti casi l'accoppiamento gravitazionale tra queste è così forte che i periodi di rotazione sono entrambi uguali al periodo della rivoluzione orbitale, di modo che tutto il sistema ruota come un corpo rigido intorno al centro di gravità. Quando ciò accade è conveniente, per descrivere la configurazione che ne risulta, assumere un sistema di

riferimento rotante x, y, z , con l'asse z passante per il centro di gravità G e normale al piano dell'orbita e l'asse x coincidente con la retta AB che passa per le due componenti. In questo sistema le coordinate delle due componenti sono rispettivamente, $a_1, 0, 0$, e $-a_2, 0, 0$, essendo a_1 e a_2 i raggi delle orbite, perché queste sono naturalmente circolari.

Il potenziale per unità di massa sopra un punto P di coordinate x, y, z è dato da

$$U(r) = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \frac{\Omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

dove m_1 e m_2 sono le masse di A e di B e r_1 e r_2 le distanze \overline{AP} e \overline{BP} , rispettivamente; Ω è la velocità angolare con cui ruota tutto il sistema, che è data, per la terza legge di Keplero da

$$\Omega^2 = G \frac{m_1 + m_2}{a^3}$$

Evidentemente i primi due termini dell'espressione di U rappresentano il potenziale dovuto alle masse delle componenti, mentre il terzo è il potenziale della forza centrifuga.

Convienne, per giungere a un'espressione adimensionale, assumere come unità di distanza il raggio dell'orbita relativa $a = a_1 + a_2$ e indicare con

$$\mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

il rapporto tra la massa di A e la massa totale; l'equazione delle *superfici equipotenziali* diviene allora

$$\frac{\mu}{r_1} + \frac{1 - \mu}{r_2} + \frac{x^2 + y^2}{2} = C, \quad (C = \text{cost}).$$

Questa equazione rappresenta la forma delle superfici equipotenziali nel caso in cui le masse m_1 e m_2 si possono considerare tutte concentrate nei centri delle due componenti A e B e le orbite siano circolari (modello di Roche); tuttavia essa può essere considerata una approssimazione abbastanza buona, almeno per una discussione qualitativa, anche perché le stelle sono generalmente alquanto concentrate, con una densità centrale considerevolmente superiore alla densità media, come mostrano i moderni modelli di struttura stellare.

La Figura 6.16 rappresenta l'intersezione di alcune superfici equipotenziali, corrispondenti all'equazione precedente, con il piano orbitale. Per grandi valori di C la superficie si spezza in due superfici chiuse, praticamente sferiche, concentriche ad A e a B rispettivamente. Al diminuire di C , cioè del potenziale, le due superfici si allungano una verso l'altra assumendo una forma di pera, fino a che per un particolare valore di C si toccano in un punto L_1 della linea AB . Il punto L_1 è un punto nodale di questa particolare superficie e prende il nome di *punto interno di Lagrange* e, come vedremo più avanti, è un canale di trasferimento della materia da una componente all'altra.

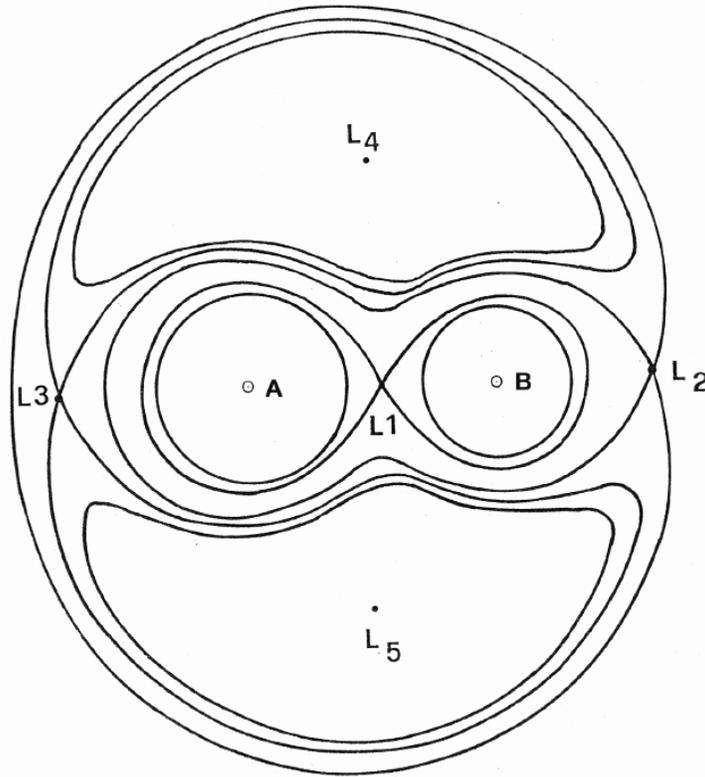


Figura 6.16: *Intersezione delle superfici equipotenziali di una binaria di componenti A e B ed il piano orbitale, coincidente con quello del disegno. Sono indicate le posizioni dei cinque punti lagrangiani.*

Se C continua a diminuire, le superfici equipotenziali abbracciano tutta la configurazione e si potrebbe vedere che esistono altre due superfici che possiedono un punto nodale sulla linea AB (*punti esterni di Lagrange* L_2 e L_3). Continuando la diminuzione di C si può dimostrare che le superfici equipotenziali spariscono dal piano orbitale in due altri punti, L_4 ed L_5 , posti ai vertici di due triangoli equilateri con base AB . I punti L_1 , L_2 ed L_3 sono di equilibrio instabile mentre L_4 ed L_5 sono punti di equilibrio stabile e sono mostrati in Figura 6.16. Ora, in condizioni di equilibrio, la superficie libera di un fluido deve coincidere con una superficie equipotenziale del campo in cui il fluido si trova. Pertanto le superfici del modello di Roche devono corrispondere almeno approssimativamente alle forme delle componenti di un sistema binario stretto quando l'accoppiamento gravitazionale è molto forte.

Quando i raggi delle componenti sono molto piccoli rispetto al raggio orbitale, le due stelle sono praticamente sferiche e si può presumere che anche la loro struttura interna non sia apprezzabilmente modificata rispetto a quella di stelle singole di uguale massa. Quando i raggi sono abbastanza grandi rispetto alle dimensioni dell'orbita, la

forma risulta sempre più deformata e, al limite, potrà accadere che una componente (o ambedue), riempia completamente il lobo della superficie di Roche che contiene il punto interno di Lagrange, che chiameremo per brevità *lobo di Roche*.

Data una binaria con componenti di massa m_1 ed m_2 e separazione a , le dimensioni dei rispettivi lobi di Roche sono, in prima approssimazione, individuate dai raggi delle sfere di ugual volume dati dalle:

$$R_1 = a[0.38 + 0.2 \log(m_1/m_2)]$$

$$R_2 = a[0.38 + 0.2 \log(m_2/m_1)]$$

valide per $q = m_2/m_1$ tra 0.05 e 2.0

Ora, nel corso della loro evoluzione fuori sequenza, le due componenti aumentano di raggio fino ad un massimo R_G (fase di gigante rossa). Fissandoci sulla componente di massa m_1 , se R_G risulta maggiore di R_1 la stella riempirà il suo lobo di Roche e trasferirà materia sulla compagna. Avremo cioè una binaria stretta (CBS) con tutta la conseguente fenomenologia. Se invece R_G è minore di R_1 , la stella, pur espandendosi, non riuscirà a riempire il suo lobo di Roche e l'evoluzione del sistema, in questo caso, avverrà senza trasferimento di massa: avremo cioè una binaria *normale*.

Adesso vediamo come le binarie strette possono essere classificate, a seconda di come i loro componenti si rapportano alla superficie limite di Roche. Si hanno i seguenti tre gruppi di caratteristiche simili (vedi Figura 6.17):

1. - *Sistemi staccati*. Entrambi i componenti sono piccoli di dimensione, in confronto ai limiti di Roche (prototipo β Aurigae oppure *U Ophiuchi*). Un'analisi dei dati osservati rivela che le stelle dei sistemi staccati si addensano attorno alla linea di Sequenza Principale e seguono le relazioni empiriche *massa-luminosità* e *massa-raggio*. Di conseguenza le stelle primarie (più massicce) di questi sistemi binari sono le più grandi e di tipo spettrale antecedente: quando sono binarie ad eclisse il loro minimo principale sarà del tipo di transito (eclisse della stella più grande da parte di quella più piccola).
2. - *Sistemi semi-staccati*. In questi, i componenti primari sono nettamente più piccoli del loro limite di Roche, mentre i secondari lo riempiono esattamente (o quasi). Il prototipo è Algol. Risulta dai dati che le primarie di questi sistemi continuano a comportarsi come normali stelle di Sequenza Principale di uguale massa; invece i secondari sono sistematicamente sopra la Sequenza (sono sovraluminosi per la massa) e mostrano alcune caratteristiche associate alla classe sub-gigante. È chiaro che se sono binarie ad eclisse, la primaria risulterà la più piccola e di tipo spettrale antecedente, cosicché il minimo principale sarà del tipo di occultazione (eclisse della stella più piccola da parte della più grande).

L'addensarsi delle componenti secondarie ai loro limiti di Roche, deve riflettere l'esistenza di processi di non-equilibrio. Se le stelle tendono infatti ad una fase di

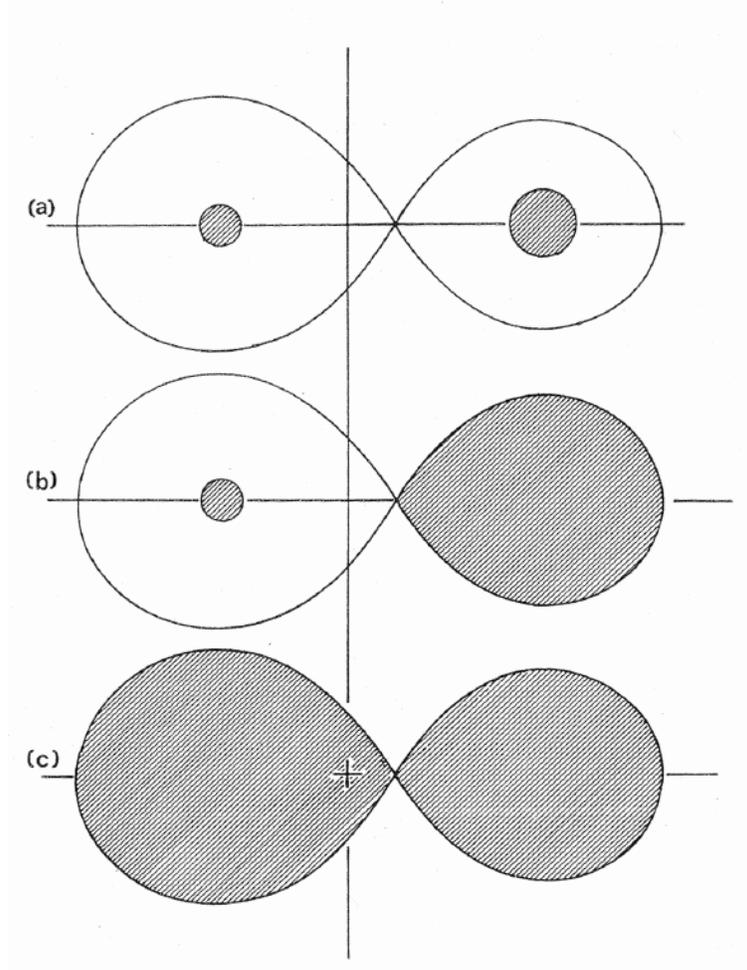


Figura 6.17: Una classificazione fisica delle binarie fotometriche: (a) sistemi staccati, (b) sistemi semistaccati, (c) sistemi a contatto.

espansione (dopo la M.S.), la loro crescita verrà arrestata al limite di Roche, e la successiva evoluzione darà luogo a trasferimento di materia dalla stella *a contatto*, materia che scorrerà tramite il punto L_1 verso la buca di potenziale dell'altra componente. Poiché il lobo si stringe al diminuire della massa, lo scambio di massa continua e si accelera.

A prima vista sembrerebbe più logico trovare stelle al limite di Roche, con massa maggiore della compagna: ciò rappresenterebbe il primo caso di espansione evolutiva che per le stelle massicce è però molto rapida (dell'ordine dei 10^5 anni). Si osservano invece comunemente le fasi di evoluzioni più lente delle secondarie meno massicce (aventi già in passato ricevuto materia dalla primaria, ma non in modo da variare sostanzialmente il rapporto di masse; primaria che si è già evoluta per suo conto a stati meno espansi).

3. - *Sistemi a contatto.* Entrambi i componenti appaiono riempire completamente le loro superfici critiche di Roche, e sono perciò a reale contatto (prototipo è la W Ursae Maioris). Esse possiedono diverse caratteristiche ben definite: periodi orbitali più brevi di un giorno, per lo più compresi tra 7-12 ore; le variazioni di luce sono tra pochi decimi ed 1 mag, in cui le variazioni per la distorsione dei corpi si accompagnano con gradualità a quelle dovute alle eclissi. Se entrambi riempiono i limiti di Roche, la primaria per massa è la più grande delle due, e l'eclisse deve essere del tipo di occultazione perché essa è di tipo spettrale posteriore (con minore luminosità superficiale); gli spettri sono spesso simili, appartenendo per lo più ai tipi spettrali *F* e *G*.

Le binarie a contatto sono le più numerose, almeno di un fattore 20 nell'unità di volume, di tutte le altre classi, sebbene non siano cospicue per la loro bassa luminosità intrinseca. Questo solleva importanti problemi circa la loro origine.

6.7.1 Dischi di accrescimento

Concludiamo questo Capitolo, ricordando che la natura dei sistemi binari stretti è complicata dal fatto che la materia trasferita dal componente evoluto verso il compagno attraverso il punto L_1 forma una corrente di materia (*gaseous stream*). Inoltre questa materia porta con sé grande momento angolare a causa del moto orbitale della stella evoluta che perde massa (secondaria del sistema). Perciò attorno alla primaria che riceve questa materia, e concentrato sul piano orbitale, si formerà un denso *disco* od *anello gassoso*, rapidamente rotante (con diversi 10^2 km/sec), che accumula la maggior parte della materia e del suo momento angolare (vedi Figura 6.18). Accelerato dal campo gravitazionale, il gas, cadrà infine sulla superficie. Tutte queste strutture danno effetti osservabili nelle curve di luce e di velocità radiale del sistema binario, oltre che nello spettro (righe di assorbimento supplementari, distorsioni della curva di velocità radiale, etc.). Talvolta è anche presente un *involucro* o *shell*, che circonda tutto il sistema binario (caso di sistema *overcontact*). Nelle CBS vanno incluse le binarie *cataclismiche*, e le binarie sorgenti di radiazione *X*, ove la caduta di materia sulla superficie della componente più compatta rappresenta una efficiente sorgente di energia.

Valutiamo ora le energie in gioco quando si ha trasferimento di massa e la formazione di un disco di accrescimento attorno a una componente, di solito la primaria, di un sistema binario. Abbiamo visto che il disco si forma sul piano orbitale poiché il materiale che fluisce attraverso L_1 non cade direttamente sulla stella ed è poi la viscosità che gli fa perdere energia ed infine cadere, spiraleggiando, sulla superficie della primaria.

Si può avere un'idea dell'energia in gioco quando si ha materia in caduta sulla superficie di una stella con questo semplice calcolo:

Consideriamo una massa m in quiete e posta a distanza infinita da una stella di massa M e raggio R . L'energia totale iniziale sarà:

$$E_T = E_K + E_P = 0$$

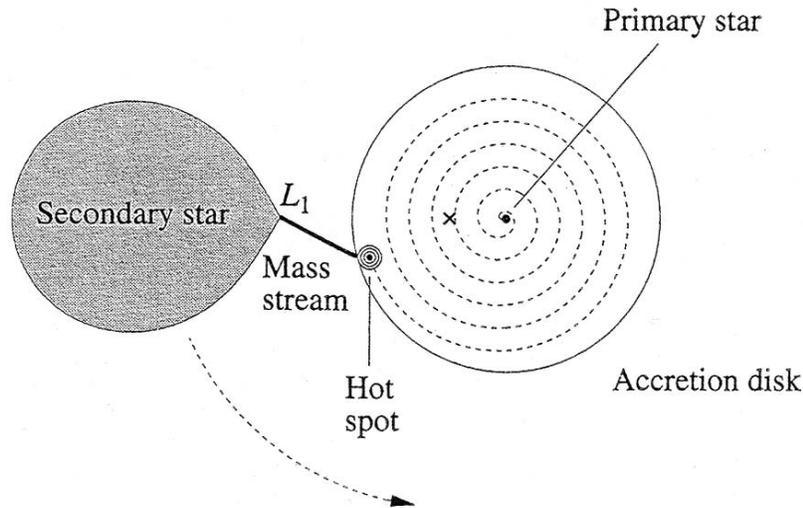


Figura 6.18: *Orbita della stella secondaria attorno al centro di massa x e formazione del disco di accrescimento, attorno alla stella primaria, per trasferimento di materia attraverso il punto L_1 . Il piano orbitale coincide con quello della figura.*

Per la conservazione dell'energia, l'energia cinetica della massa m quando arriva sulla superficie sarà:

$$E_K = -E_P = \frac{GMm}{R}$$

Dopo l'impatto questa energia è trasformata in calore e radiazione. Se la stella in questione fosse una nana bianca di massa $M = 0.85 M_\odot$, ed $R = 6.6 \times 10^8 \text{ cm}$, circa $0.01 R_\odot$, l'energia rilasciata da un grammo di materia in caduta sulla stella sarebbe:

$$\frac{GM}{R} = 1.71 \times 10^{17} \text{ erg}$$

Questa rappresenta solo lo 0.019% dell'energia di riposo (mc^2) di un grammo di materia. Ricordiamo, per confronto, che l'energia ottenuta dalla fusione di un grammo di idrogeno in elio vale $6.3 \times 10^{18} \text{ erg}$. Se la stella fosse invece una stella a neutroni di massa $M = 1.4 M_\odot$ e raggio $R = 10 \text{ km}$, l'energia liberata sarebbe di $1.86 \times 10^{20} \text{ erg}$, circa 30 volte maggiore che non con la fusione dell'idrogeno! Da ciò si comprende come della materia in caduta su di una stella possa sviluppare enormi quantità d'energia.

Cerchiamo ora di valutare la temperatura della zona di un disco di accrescimento alla distanza r da una stella di massa M e raggio R . Assumiamo che il disco irradi come un corpo nero, cioè che ad ogni distanza r esso emetta un continuo planckiano caratteristico della temperatura a quella distanza. Poniamo anche che la velocità di caduta sia piccola rispetto a quella orbitale. In questa ipotesi i gas del disco seguiranno

orbite kepleriane ed inoltre, essendo la massa del disco piccola, risentiranno della sola forza gravitazionale della stella centrale.

Ricordiamo, dal problema dei due corpi, che l'energia totale di una massa m di gas orbitante a distanza r da una stella di massa M è data dalla:

$$E_T = -\frac{GmM}{2r}$$

Come il gas, spiraleggiando, si avvicina alla stella, questa energia diventa sempre più negativa. L'energia perduta serve a mantenere la temperatura del disco ed infine è riemessa come radiazione di corpo nero.

Ora, con riferimento alla Figura 6.19, consideriamo l'anello di raggio r ed ampiezza dr , all'interno del disco. Se indichiamo con \dot{m} la rate di trasferimento di massa dalla secondaria alla primaria, supposta costante, allora la quantità di massa che passa attraverso il bordo esterno dell'anello indicato in figura nell'intervallo Δt sarà $\dot{m}\Delta t$.

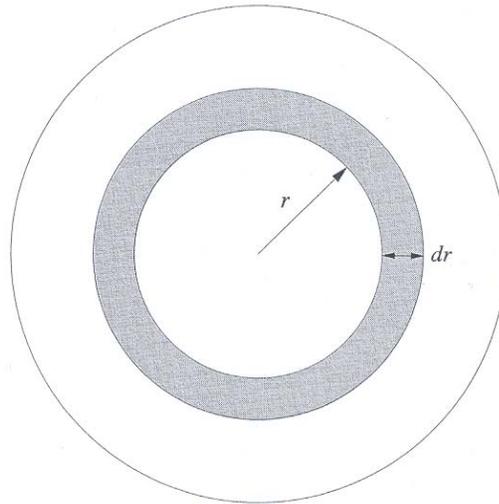


Figura 6.19: Uno degli (immaginari) anelli contenuti nel disco di accrescimento.

Facendo l'ulteriore ipotesi di stazionarietà del disco, cioè che le condizioni di questo non cambino nel tempo, un'uguale quantità di massa deve lasciare, nello stesso intervallo di tempo, il bordo interno dell'anello. Vi sarà allora diminuzione di energia totale e questa sarà uguale, sempre per la conservazione dell'energia, all'energia dE irradiata dall'anello, che viene ad essere:

$$dE = \frac{dE}{dr} dr = \frac{d}{dr} \left(-G \frac{mM}{2r} \right) dr = G \frac{M\dot{m}\Delta t}{2r^2} dr$$

dove si è posto $m = \dot{m}\Delta t$ come la massa che transita attraverso i due bordi dell'anello. Se chiamiamo dL_r la luminosità irradiata dall'anello, avremo:

$$dL_r \Delta t = dE = G \frac{M\dot{m}\Delta t}{2r^2} dr$$

Nell'ipotesi che l'anello emetta come un corpo nero e considerandone entrambi i lati, questa diventa:

$$dL_r = 4\pi r \sigma T^4 dr = \frac{GM\dot{m}}{2r^2} dr$$

da cui:

$$T = \left(\frac{GM\dot{m}}{8\pi\sigma r^3} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{GM\dot{m}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{3}{4}}$$

moltiplicando e dividendo per R^3 .

Una trattazione più accurata e nell'ipotesi di $r \gg R$, cioè per zone del disco lontane dalla superficie della stella, porta alla:

$$T = \left(\frac{3GM\dot{m}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{3}{4}} = T_{disk} \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{3}{4}}$$

La T_{disk} è una temperatura caratteristica del disco ed è legata alla temperatura massima dalla:

$$T_{max} = 0.488 T_{disk}$$

Per avere ora la luminosità totale del disco, integriamo tra $r = R$ ed $r = \infty$ la

$$dL_r = \frac{GM\dot{m}}{2r^2} dr$$

Si ottiene:

$$L_{disk} = \frac{GM\dot{m}}{2R}$$

che risulta essere la metà della luminosità ottenuta da una caduta libera sulla stella, come visto più sopra. Quindi la presenza del disco fa sì che la quantità d'energia perduta si converta per metà in radiazione e per metà in mantenimento della temperatura del disco.

Calcoliamo ora, come esempio, la T_{max} e la luminosità di un disco di accrescimento orbitante una nana bianca di massa $M = 0.85M_{\odot}$, $R = 0.0095 R_{\odot}$ e $\dot{m} = 10^{16} \text{ gr/sec} = 1.6 \times 10^{-10} M_{\odot}/\text{anno}$.

Si ha facilmente:

$$T_{max} = 0.488 \left(\frac{3GM\dot{m}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{\frac{1}{4}} = 2.62 \times 10^4 \text{ K}$$

Ricordando la legge di Wien, $\lambda T = 0.29$ (con λ in cm), si trova che l'emissione di corpo nero a questa temperatura ha il picco a $\lambda = 1110\text{\AA}$, cioè nel lontano ultravioletto. La luminosità del disco di accrescimento vale:

$$L_{Disk} = G \frac{M\dot{m}}{2R} = 8.55 \times 10^{32} \text{ erg/sec},$$

cioè circa 0.22 luminosità solari. Ripetendo l'analogo calcolo per una stella di neutroni di massa $1.4 M_{\odot}$, $R = 10 \text{ Km}$ ed $\dot{m} = 10^{17} \text{ gr/sec}$ pari a $1.6 \times 10^{-9} M_{\odot}/\text{anno}$, si ottiene una $T_{max} = 6.86 \times 10^6 \text{ K}$ ed una luminosità $L = 9.29 \times 10^{36} \text{ erg/sec}$. Ora il disco, estremamente caldo, emette nella regione X dello spettro elettromagnetico e la sua luminosità è pari a $2400 L_{\odot}$. Si conclude che i dischi di accrescimento che circondano le nane bianche emettono radiazione nell'UV mentre quelli attorno alle stelle di neutroni sono forti sorgenti di raggi X.