BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ACU8840
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 09/12/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B34539
035/2: : |a (CaOTULAS)160644334
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Loria, Gino.
245:03: |a Le scienze esatte nell' antica Grecia, |c di Gino Loria. |n Libro I-[II].
250: : |a 2. ed. totalmente riveduta ...
260: : |a Milano, |b U. Hoepli, |c 1914.
300/1: : |a xxiv, 969 p., 2 L. |c 15 cm.
505/1:0 : |a libro 1. I geometri greci precursori di Euclide. 1893. 168 p. II pl.--libro 2. Il periodo aureo della geometria greca. 1895. 236, [2] p. II pl.--libro 3. Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci. 1900. 138 p. II pl.--libro 4. Il periodo argenteo della geometria greca. 1900. 80 p. I pl.--libro 5. L'aritmetica dei Greci. 1902. [2], 195 p.
650/1: 0: |a Mathematics |x History.
650/2: 0: |a Mathematics, Greek
998: : |c DPJ |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

MANUALI HOEPLI

GINO LORIA
Professore ordinario nella R. Università di Genova

LE SCIENZE ESATTE
NELL'ANTICA GRECIA

Seconda edizione totalmente riveduta
con 122 figure nel testo



ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO

1914

PROPRIETÀ LETTERARIA

TIPOGRAFIA SOCIALE — Milano, Via G. Mameli, 15.

PREFAZIONE

Il 17 marzo 1889 il R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti aperse un pubblico concorso con premio cospicuo per un Manuale di Storia delle Matematiche, *accompagnato da una* Crestomazia dei Classici *di tali scienze.* EUGENIO BELTRAMI, *che mi onorava della sua benevolenza, pel tramite di persona amica, attrasse la mia attenzione sopra quest'importante gara, esortandomi a parteciparvi. Benchè le mie occupazioni ufficiali, sino da allora gravosissime, non lasciassero adito alla speranza di potere seguire tale consiglio, pure la grande autorità della persona da cui proveniva fece orientare la mia mente verso la letteratura matematica del popolo straordinario che scrisse a caratteri indelebili le prime pagine di tutte le scienze; e tale e tanto fu il fascino che essa esercitò sopra di me, che, anche trascorso il termine utile per corrispondere alle aspettative del Veneto Istituto, io non potei più staccarmi dalle produzioni geometriche ed aritmetiche del genio greco. Un primo saggio dei miei studi sull'argomento venne pubblicato dall'Accademia Reale delle Scienze di Torino; ma l'intera opera vide la luce nelle* Memorie della R. Accademia delle Scienze, Lettere ed Arti di Modena, *durante il decennio 1893-1902, grazie al patronato che delle mie ricerche aveva volontariamente assunto* PIETRO RICCARDI, *nome caro a tutti i cultori di storia scientifica e che io ricorderò sempre con viva e profonda gratitudine.*

I lusinghieri giudizi, che sul mio lavoro vennero pronunziati in Italia e fuori, e le richieste, che incessantemente ed indarno mi venivano rivolte di estratti di essa, persuasero la Casa Editrice Hoepli dell'opportunità di una ristampa, tanto più che in tal modo il Disegno storico della vita e cultura greca *di* D. Bassi *e* E. Martini *avrebbe ricevuto un complemento, da molti ritenuto conveniente. Ma (è appena necessario avvertirlo) la nuova edizione non poteva essere una semplice riproduzione dell'antica, chè in quest'ultimo ventennio vennero in luce documenti di straordinaria importanza, i quali, se anche non potevano alterare nelle sue linee generali il quadro dello svolgimento storico della matematica greca, erano capaci di colmarne parecchie lacune e di completarlo in qualche punto importante: a dimostrare ciò basta ricordare un significantissimo frammento di* Archimede *e un' intera opera di* Erone, *l'uno e l'altra scoperti a Costantinopoli, l'uno proiettante gran luce sopra i metodi d'indagine degli antichi geometri, l'altra capace di fissare definitivamente i lineamenti scientifici del più grande geodeta dell'Antichità. Per conseguenza interi Capitoli vennero totalmente rifatti, mentre quasi ogni pagina, in seguito ad accurata revisione, fu posta sotto forma corrispondente alle nostre cognizioni odierne sopra la storia della matematica greca.*

Malgrado tali mutamenti di sostanza e di forma la presente opera ha conservate le caratteristiche che aveva al suo apparire: è un'esposizione, per quanto possibile completa, delle conquiste fatte dal popolo ellèno nel campo in cui stampò le orme sue più gloriose; esposizione fatta da un matematico per persone che, pur disponendo di una modesta cultura scientifica, si interessano alla matematica. Vennero, perciò, bandite le discussioni di natura esclusivamente filologica e, per compenso, incluso tutto ciò che fosse capace di spiegare il come *ed il* perchè *le scienze di cui ragioniamo poterono gradatamente costituirsi e svilupparsi. Segnalando e spesso riferendo i passi più significanti di antichi scrittori relativi agli argomenti trattati, noi abbiamo inteso di dar modo ai lettori di verificare la esattezza delle nostre asserzioni e di offrire loro un saggio di una letteratura che certuni, a torto, ritengono degna soltanto di interessare gli archeologi; lo studio di tali passi o,*

meglio ancora, di tutte le opere da cui sono tratti prova, invece, come a ragione un grande poeta (VICTOR HUGO) *potè asserire che « tout embryon de la science offre ce double aspect : monstre comme fœtus ; merveille comme germe ».*

Sotto l'appellativo generico di Scienze esatte, *io comprendo quelle discipline i cui risultati ottennero un posto nelle matematiche pure; lascio, quindi, in disparte tutto che concerne le applicazioni prossime o remote di queste discipline alla spiegazione dei fenomeni naturali ed alla vita civile. Tuttavia i vari rami del sapere hanno fra loro così molteplici ed indissolubili legami, che, volendo indagare l'origine o seguire lo svolgimento di certe idee, si è forzati a compiere qualche scorreria in campi stranieri, quali sarebbero, pei matematici puri, la filosofia, la geodesia e l'astronomia; tali digressioni s'impongono, in particolare a chi voglia delineare l'andamento del pensiero matematico, anche nell'epoca in cui esso si è svolto nel modo più indipendente da preoccupazioni estranee, perchè la storia delle scienze esatte nell'antica Grecia si confonde nei suoi primordi con la storia della filosofia ed in talune sue fasi con quella delle matematiche applicate. Al lettore non rechi, adunque, alcuna meraviglia se troverà nel presente lavoro, oltre tre libri consacrati allo studio della geometria presso i Greci (il primo di essi tratta del periodo di preparazione, il secondo del periodo di massimo splendore e l'ultimo del periodo di decadenza o epoca dei commentatori), un libro destinato a rintracciare le ricerche di matematica condotte incidentalmente a termine dagli astronomi e dai geodeti greci ; e se incontrerà nell'ultimo libro dell'opera presente, come nel primo, fatta menzione di elucubrazioni che sembrano a prima giunta riferirsi solo indirettamente alle scienze esatte.*

Il criterio di ordinamento della materia da noi preferito rappresenta, per così esprimerci, un compromesso fra la distribuzione per soggetti e l'ordine rigorosamente cronologico, ognuno dei quali presenta vantaggi ed inconvenienti: la via scelta tende a giovarsi dei primi ed evitare i secondi, e permette anche ad ogni attento lettore di ricostruire il bilancio completo dell' intera opera scientifica di quei grandi pensatori, le cui produzioni si trovano analizzate in sezioni differenti del nostro volume.

Alcuni rimprovereranno all'autore la tinta di dubbio che colora tutta l'opera presente; essa è l'espressione del convincimento che allo storico debba essere compagno costante un oculato scetticismo, se non un cieco pirronismo, per ascrivere fra i veri solo i fatti che è impossibile porre in discussione. Essa toglie forse all'esposizione un po' di storica maestà; ma fu da noi prescelta, tanto perchè corrisponde alle nostre convinzioni personali, quanto perchè fa più schiettamente apparire la distinzione fra i problemi definitivamente risolti e quelli la cui soluzione attuale, non essendo di quelle in cui il desiderio si acquieti, più urgentemente reclamano le cure degli studiosi. La stessa idea, diversamente atteggiata, ci fece adottare come regola costante di sostituire alle nostre parole quelle di autori vetusti; il lettore può così misurare la solidità delle basi del nostro edificio, evitare il pericolo di rimanere ingannato dall'orpello di smaglianti teorie e fugare da sè le larve di quelle che del nome di spiegazioni gli sembrano immeritevoli. Noi, anzi, in moltissimi casi ci limitammo a proporre ed iniziare una discussione col lettore. Nè questi si meravigli se noi esigiamo da lui questo attivo concorso, giacchè la sua costante collaborazione è, a parer nostro, indispensabile per dirigersi nel campo di studi nel quale si aggirano le indagini seguenti, in un campo ove è così spiccata ed incessante la discrepanza nelle opinioni, che vediamo ogni giorno, da un lato farsi appunto a taluno di tenersi attaccato alle notizie certe, come l'ostrica allo scoglio, senza mai permettersi un volo nel mondo geniale delle congetture, e dall'altro lato venire giudicate illegittime, fantastiche, epperò estranee alla storia le induzioni e le generalizzazioni un po' ardite. Fra questi due modi di giudicare e procedere il lettore scelga quello che più gli aggrada; o, meglio ancora, tracci una strada intermedia fra quelle che seguono coloro che li adottano, la quale eviti i pericoli di cui l'una e l'altra sono cosparse.

Genova, Agosto 1913.

INDICE

LIBRO PRIMO

I Geometri greci precursori d'Euclide

CAPITOLO I.

Sguardo generale sulla geometria greca pre-euclidea.

Pag.

1. Caratteri generali del periodo storico da studiarsi . . 3
2. Legame fra la civiltà greca e quella dei popoli orientali 5
3. Principali fonti di notizie sulla geometria greca pre-euclidea. Il riassunto storico di Proclo 6
4. Misura in cui sono utilizzabili le informazioni di Proclo 10

CAPITOLO II. - Talete e la Scuola jonica.

5. Vita di Talete 11
6. L'eclisse da lui predetta. 13
7. Scoperte geometriche di Talete 16
8-9. Problemi di geometria pratica di cui gli vengono attribuite le soluzioni 18
10-12. I successori di Talete (Mandriato, Ameristo, Anassimandro e Anassimene). Indirizzo della Scuola jonica; contributo da essa dato all'avanzamento della geometria 22

CAPITOLO III. - Pitagora e la Scuola italica.

13. Cenno intorno ai sistemi filosofici dei Greci fino a Pitagora 26
14. Origini delle idee pitagoriche. 28
15. Fonti di notizie su la vita e le idee di Pitagora . . 30

Pag.
16. Biografia di Pitagora 31
17. Sul silenzio imposto ai Pitagorici 32
18. Fonti di notizie sulle cognizioni matematiche dei Pitagorici 33
19. Definizioni adottate nella scuola di Pitagora . . . 34
20. Geometria mistica 35
21. Teoria delle proporzioni 36
22. Divisione del piano in poligoni congruenti . . . 38
23. Costruzione dei poliedri regolari 39
24. I problemi di *applicazione* in relazione con la costruzione di un pentagono regolare 40
25. L'analisi geometrica e la teoria della similitudine. . 45
26. Somma degli angoli d'un triangolo 47
27. Il teorema dell'ipotenusa 48
28. Le quantità irrazionali 50
29. Scoperte che vennero erroneamente attribuite ai Pitagorici 54
30. Riassunto dei contributi dati alla matematica della Scuola italica 54

CAPITOLO IV. - Eleati, atomisti, sofisti.

Zenone d'Elea.

31. Opinioni filosofiche e vita di Zenone 55
32. Le sue celebri argomentazioni 57

Oinopide, Anassagora, Democrito.

33. Valore di Oinopide come matematico 61
34. Vita di Anassagora; contributi da lui arrecati alla geometria 63
35. Opere matematiche di Democrito 65

Ippia.

36. Caratteri ed influenza della sofistica 67
37. Ippia il matematico 68
38. La quadratrice 70

CAPITOLO V. - Pitagorei e Pitagoristi.

39. I continuatori del Pitagorismo 73

Ippocrate da Chio.

40. Vita d'Ippocrate 74
41. La prima redazione di elementi geometrici e il metodo di riduzione 75
42. Origine del problema della duplicazione del cubo . . 76
43. Trasformazione di questo problema nell'altro d'inserire due medie proporzionali fra due rette date . . . 78

Pag.

44-47. Studi d'Ippocrate sul problema della quadratura del circolo 80
48. Valore ed importanza delle ricerche geometriche d'Ippocrate 92

Antifonte e Brissone.

48. Antifonte 94
49. Brissone 96

Archita da Taranto.

50. Vita di Archita 98
51. Suo metodo per inserire due medie proporzionali fra due rette date 99
52. Commento a questo metodo 101

CAPITOLO VI. - Da Socrate ad Euclide.

53. I corifei nel periodo che corre da Socrate ad Euclide. 106

Platone.

54. Vita di Platone 107
55. Azione di Platone sullo sviluppo delle matematiche . 108
56. Sue idee intorno a queste in generale 109
57. Il metodo analitico e la teoria dei luoghi geometrici . 113
58. Alcune cognizioni geometriche possedute da Platone . 114
59. Un passo importante del *Menone*. 115
60. L'ipotesi geometrica nel *Menone* 120
61. Di altre ricerche geometriche attribuite a Platone . 122
62. Sua soluzione del problema di Delo 124

Leodamante, Teeteto e loro discepoli.

63. Leodamante e Leone 126
64. Teeteto ed Ermotimo 127

I geometri dell'Accademia.

65. Speusippo, Ateneo, Teudio, Amicla e Filippo. . . 128
66. Vita di Aristotele 131
67. Passi matematici nelle opere di Aristotele . . . 132
68. Continuazione 134

Eudosso da Cnido.

69. Vita di Eudosso 136
70. Sue ricerche sulla *sezione* (in media ed estrema ragione?) 139
71. Il V Lib. di Euclide. Teoremi stereometrici di Eudosso 142
72. Origini del così detto *assioma d'Archimede*; questioni storiche relative. 144
83. Congetture intorno al metodo di Eudosso per inserire due medie proporzionali fra due rette date . . . 146

Origine e primo stadio di sviluppo della teoria delle coniche: Menecmo ed Aristeo.

Pag.
74. Notizie intorno a Menecmo 449
75. Sue ricerche di filosofia matematica 150
76. Due soluzioni di Menecmo pel problema delle due medie 150
77. Passo di Gemino concernente lo sviluppo della teoria delle coniche 153
78. Come si arrivò alla scoperta di queste curve? . . 154
79. Aristeo autore dei *Luoghi solidi* 157
80. Aristeo autore di uno scritto *Su i poliedri regolari* . 159

Dinostrato.

81. Applicazione della curva di Ippia alla quadratura del circolo o alla rettificazione della circonferenza . . 160
82. Riassunto generale 164

APPENDICE I.

Cenno delle ricerche geometriche compiute nell'antichità da gli Egiziani ed i Babilonesi 167

APPENDICE II.

Aristeo e Viviani 174

LIBRO SECONDO

Il periodo aureo della Geometria greca.

Osservazioni generali.

1. Caratteri generali del periodo greco-alessandrino. . 183
2. Il centro della coltura si fissa allora in Alessandria . 184
3. Il Museo 185

CAPITOLO I. - Euclide.

4. Notizie intorno ad Euclide somministrate dai Greci . 188
5. Notizie provenienti da fonti arabe. 190
6. Che cosa insegnano. Euclide da Megara 193
7. Gli *Elementi* di Euclide: loro contenuto 194
8. Vicende subite dal testo degli *Elementi* 196
9. I preliminari agli *Elementi* 200
10. Le proposizioni del I Libro: come furono scelte e come sono dimostrate. 205
11. Il II Libro: fondamenti dell'algebra geometrica . . 208
12. Il III Libro; prime linee di una teoria della circonferenza 209

Pag.

13. Il IV Libro: i poligoni inscritti in una circonferenza ed i poligoni ad essa circoscritti 210
14. Il V Libro: teoria generale delle proporzioni . . . 211
15. Il VI Libro: similitudine delle figure piane rettilinee . 214
16. I tre libri aritmetici di Euclide. Il Libro VII: proporzioni fra numeri e divisibilità 216
17-18. I Libri VIII e IX: ulteriore sviluppo dell'aritmetica razionale 218
19. Il Libro X: le irrazionalità biquadratiche. 221
20. Osservazioni intorno all'importanza ed all'originalità del Libro X degli *Elementi* 231
21. Il Libro XI: fondamenti della geometria dello spazio . 234
22. Il Libro XII: metodo di esaustione in Euclide . . 236
23. Il Libro XIII: poliedri regolari 239
24. Osservazioni relative all'originalità degli *Elementi* di Euclide 242
25. Il Libro dei *Dati*. 245
26. Il Libro *Della divisione delle figure* 250
27-28. Le opere perdute di Euclide: *a*) I *Porismi* . . . 257
29. *b*) I *Luoghi superficiali*; *c*) Le *Coniche*, ecc. . . . 265

CAPITOLO II.

I pretesi continuatori degli *Elementi* di Euclide.

30. Il così detto XIV Libro degli *Elementi*: Ipsicle d'Alessandria 269
31. Il così detto XV Libro degli *Elementi*. 273

CAPITOLO III. - Archimede.

32. Vita d'Archimede 279
33. Enumerazione delle opere di Archimede tuttora esistenti 283
34. Il I Libro sull'*Equilibrio dei piani*. 284
35. *Quadratura della parabola* 287
36. Il II Libro sull'*Equilibrio dei piani* 290
37. L'opera *Sui galleggianti* 291
38-39. I due libri *Su la sfera ed il cilindro* 293
40-41. Il trattato *Delle spirali*. 301
42. *Conoidi e sferoidi* 313
43. *Misura del circolo* 317
44. Caratteri comuni ai lavori archimedei: l'Ἐφοδικόν . 323
45. Il Libro dei *Lemmi* 328
46. I poliedri semiregolari 333
47. Altri scritti attribuiti ad Archimede; due sue opere oggi perdute. Conclusione 339

Capitolo IV. - Eratostene.

Pag.
48. Biografia di Eratostene 342
49. Sua soluzione del problema di Delo 344
50. Sua opera perduta *Sulle proporzioni* 346
51. Lo *Staccio di Eratostene* 348

Capitolo V. - Apollonio.

52. Notizie greche ed arabe sulla vita di Apollonio Pergeo. Apollonio ε 350
53. Notizie bibliografiche sulle *Coniche* di Apollonio . . 353
54. Sul grado di originalità di quest'opera 356
55. La prefazione generale di essa 357
56. Il I Libro: fondamenti della teoria delle sezioni coniche 359
57. Il II Libro: asintoti, diametri coniugati ed assi . . 363
58. Il III Libro: alcuni teoremi generali sulle curve di second'ordine e loro applicazione al problema delle tre e quattro rette; poli e polari; germi della proiettività applicata alle coniche e del concetto di curve inviluppi; fuochi 366
59. Il IV Libro: intersezione e contatto di due coniche . 372
60. Il V Libro: problemi di massimo e minimo; normali ed evolute. 375
61. Il VI Libro: eguaglianza e similitudine di due sezioni coniche 380
62. Il VII Libro: i due " teoremi di Apollonio „ e le proposizioni che ad essi si collegano 382
63. Osservazioni generali sopra le *Coniche* di Apollonio . 384
64. I tre problemi *Su le sezioni* 387
65-67. Le opere di Apollonio *Su i contatti, Sui luoghi piani* e *Sulle inserzioni* 391
68. Altri lavori di Apollonio 397
69. Estensione data da Apollonio alla teoria degli irrazionali euclidei. Conclusione 401

Capitolo VI.

I geometri minori del periodo greco-alessandrino.

70. Peliminari. 403

Nicomede.

71. La concoide: genesi, proprietà ed applicazione di questa curva alla trisezione dell'angolo. 404
72. Applicazione della medesima alla duplicazione del cubo 408

Diocle.

73. Soluzione suggerita da Diocle pel problema di Delo; la cissoide 410

Pag.

Perseo.

74. Le linee spiriche 415

Zenodoro.

75. Primo stadio di sviluppo della teoria degli isoperimetri 418
76. Riassunto generale 420

APPENDICE.

Divinazioni di scritti perduti dovuti ai geometri del periodo greco-alessandrino 423
L'algebra geometrica degli antichi secondo H. G. Zeuthen. ivi
Sull'opera di Euclide relativa alla divisione delle figure . 426
I Porismi di Fermat, di Simson e di Chasles . . . 427
Divinazioni tentate dal Maurolico e dal Viviani dei Libri V e VI delle *Coniche* di Apollonio. 434
La restituzione di E. Halley dell'ultimo libro delle *Coniche* di Apollonio 436
Divinazione dei due libri di Apollonio *Sulle inserzioni* . 438
Restituzione dei *Luoghi piani* di Apollonio 440

LIBRO TERZO

Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci.

Proemio 447

CAPITOLO I.

Ipotesi cosmologiche e misurazioni astronomiche anteriori ad Ipparco.

1. Caratteri dell'astronomia greca 448

Ipotesi astronomiche contrarie alla sfericità della terra.

2. La cosmogonia di Omero e di Esiodo 451
3. Talete 452
4. Anassimandro 453
5. Anassimene. 454
6. Eraclito, Senofane, Anassagora, Empedocle e Democrito ivi

Ipotesi astronomica di Pitagora.

7. Sistema cosmologico di Pitagora. Parmenide . . . 456

Il primo sistema eliocentrico.

8. Ipotesi astronomica di Filolao; il fuoco centrale . . 459
9. Iceta, Ecfanto ed Eraclide; la rotazione diurna della terra. Aristarco e Seleuco; il sole come centro del mondo 640

Pag.

Idee astronomiche di Platone.

10. Platone come astronomo 463

Digressione sopra Teone Smirneo.

11. Scopo e piano di un lavoro di Teone Smirneo . . 465
12. Analisi della parte astronomica dell'opera di Teone . 468

Le sfere omocentriche di Eudosso da Cnido.

13. Problema di meccanica celeste proposto da Platone e risolto da Eudosso 470
14. Le ventisei sfere omocentriche 471
15. Riduzione del problema di Platone alle sue espressioni più semplici 472
16. L'ippopeda di Eudosso. Conclusione 474

Le sfere di Calippo e di Aristotele.

17. Modificazioni subite dal sistema di Eudosso. Le trentaquattro sfere di Calippo e le cinquantacinque di Aristotele. 475

I cicli cronometrici.

18. La cronologia greca dalle origini sino ad Ipparco . 477

L'astronomia come scienza di misura.

19. L'opera superstite di Aristarco da Samo 480
20. Il metodo della dicotomia di Aristarco 481
21, Altre misure eseguite da Aristarco 385
22. La parte astronomica dell'*Arenario* di Archimede. . 488
23. Posidonio 491

CAPITOLO II. - La sferica.

Il primo trattato sulla sferica.

24. La piccola collezione astronomica. Esistenza ipotetica di di un'antica sferica 494
25. Tracce di essa nella *Didascalia celeste di Leptinio* . . 497

Autolico da Pitane.

26. Cenni sopra Autolico. Ciò che contiene il libro della sfera mobile 499
27. Osservazioni sullo stile di Autolico. Cenno intorno al suo libro *Su le albe ed i tramonti* 500

Euclide ed Ipsicle.

28. I *Fenomeni* di Euclide 501
29. Un opuscolo di Ipsicle 504

Teodosio.

30. Gli scritti di Teodosio. *Sulle abitazioni* e *Sopra le notti ed i giorni*. La *Sferica* 505

Pag.
31. Il I Libro della *Sferica* di Teodosio 506
32. I Libri II e III 508

Menelao d'Alessandria.

33. Notizie sopra Menelao. Il I Libro della sua *Sferica* 509
34. I Libri II e III 512
35. Continuazione. Contributo dato da Menelao egli elementi della geometria. La " curva mirabile „. . . 518

CAPITOLO III. - L'apogeo dell'Astronomia greca.

Ipparco.

36. Sua vita e sue opere 521

Tolomeo.

37. Notizie intorno a Claudio Tolomeo ed al suo *Almagesto* 523
38. Piano ed originalità di quest'opera 524
39. La trigonometria nell'*Almagesto*. Ipotesi sullo sviluppo storico della trigonometria greca 526
40. Alcune corde calcolate da Tolomeo 529
41. Il così detto " teorema di Tolomeo „; applicazione di esso alla teoria delle funzioni circolari 531
42. Un teorema di trigonometria dimostrato ed applicato da Tolomeo 535
43. Costruzione di una tavola di corde; valore di π . . 537
44. Il teorema di Menelao per triangoli piani e sferici . 540
45. Applicazione di esso alla risoluzione dei triangoli sferici rettangoli. Due teoremi di Apollonio riferiti da Tolomeo 543
46. Altre opere di Tolomeo: *Il Planisfero* 547
47. Continuazione: l'*Analemma* e la *Geografia* . . . 548
48. Tolomeo commentatore di Euclide 550

Teone d'Alessandria ed Ipazia.

49. Il *Commento all'Almagesto* di Teone d'Alessandria . 552
50. Continuazione. Vite di Teone e di Ipazia. Fine della scuola di Alessandria 554

CAPITOLO IV. - Gli albori della Fisica matematica.

L'Ottica di Euclide.

51. Generalità sull'ottica dei Greci. Due opere sulla teoria della luce attribuite ad Euclide. 557
52. Le due versioni dell'*Ottica* di Euclide 559
53-55. Contenuto di quest'opera 560

Il più antico scritto di Catottrica.

56. A chi appartiene e che cosa racchiude 564

Pag.

Eliodoro o Damiano? Tolomeo od Erone?

57. Un opuscolo attribuito ad Eliodoro di Larissa . . 566
58. Uno scritto sugli specchi attribuito a Tolomeo, ma dovuto probabilmente ad Erone 567

Tolomeo e la rifrazione della luce.

59. L'*Ottica* di Tolomeo: per qual via ci pervenne, in quale stato si trova e che cosa racchiude 569

L'idrostatica in Archimede.

60. Analisi dell'opera *Sui galleggianti* 571

La statica in Erone.

61. Erone come meccanico. Il I dei suoi libri sulla meccanica: soluzione del problema di Delo . . . 574
62. Il II e III dei libri stessi; l'elica cilindrica . . . 577

CAPITOLO V. - Erone d'Alessandria.

63. La questione eroniana 580
64. Tre Eroni matematici. Dati biografici sopra Erone di Alessandria 582
65. Il *Traguardo* 584
66. Continuazione. Area del triangolo rettilineo in funzione dei lati 587
67. Erone commentatore: notizie fornite da Proclo . . 592
68-69. Continuazione: notizie di fonte araba 596
70. Le *Definizioni dei termini della geometria* 600
71. Le altre opere superstiti di Erone 604
72-75. Analisi dei Μετρικά. Valore e significato di quest'opera 605

CAPITOLO VI. - I geodeti minori dell'antica Grecia.

Un geodeta bizantino (Erone il Giovane?

76. Notizie sopra un frammento greco concernente la geodesia 630

Sesto Giulio Africano.

77. Un capitolo dei Κεστοί 632

Il papiro Ayer.

78. Provenienza, epoca e contenuto del Papiro Ayer . . 633
79. Epilogo. Caratteri generali delle opere studiate nel presente Libro 635
80. Probabili cause di decadenza della geometria greca . 637

Libro Quarto

Il periodo argenteo della Geometria greca.

Pag.

Proemio 641

Capitolo I. - Gemino da Rodi.

1. Citazioni di Gemino fatte da Proclo e concernenti la teoria delle curve 643
2. Citazioni relative alla filosofia della matematica . . 644
3. Citazioni relative alla teoria delle parallele; ipotesi intorno al titolo di un'opera di Gemino 647
4. Un opera astronomica che va sotto il nome di Gemino; questioni collegate a questo scienziato 649

Capitolo II. - Teone da Smirne.

5. Conciderazioni sopra le proporzioni e le figure svolte da Teone Smirneo 652

Capitolo III. - Pappo d'Alessandria.

6. Importanza storica della *Collezione matematica* e notizie sopra Pappo 656
7. Generalità intorno alla *Collezione*: cenno intorno ai primi due libri di essa 658
8. Analisi del III Libro. La prima parte di esso (soluzione approssimata del problema di Delo e soluzioni esatte della stessa questione) 659
9. Continuazione. Le altre tre parti del III Libro (le dieci proporzioni, estratti dei *Paradossi* di Ericinio, poliedri) 662
10. Il Libro IV della *Collezione*, parte prima (generalizzazione del teorema di Pitagora, applicazioni del X Libro di Euclide, serie di circoli fra loro tangenti) . . 665
11. La seconda e la terza parte del IV Libro (spirale d'Archimede e concoide di Nicomede) 669
12. La quarta parte dello stesso Libro (quadratrice di Dinostrato e spirale di Pappo) 670
13. Il resto del IV Libro (problema della divisione di un angolo in parti aventi assegnati rapporti, problemi riducibili ai precedenti) 675
14. Il V Libro della *Collezione* (teoria degli isoperimetri nel piano e nello spazio) 676
15. Il VI Libro della *Collezione* (astronomia) 680

Pag.

16. Il VII Libro della *Collezione*. Generalità; il teorema che porta il nome di Guldin 681
17. Continuazione. Lemmi per la *Sezione determinata* di Apollonio 684
18. Continuazione. I lemmi alle *Coniche* e l'Algebra geometrica in Pappo 686
19. Continuazione. I lemmi alle *Inserzioni*, ai *Contatti*, ai *Luoghi piani* ed ai *Porismi* 690
20. I lemmi ai *Luoghi superficiali* di Euclide 693
21-22. L'VIII Libro della *Collezione* (meccanica) . . . 694
23. Conclusione. Altre opere di Pappo; notizie date da Proclo. 699
24. Informazioni di fonte araba. Commento di Pappo al X Libro di Euclide. 700

CAPITOLO IV.

Il Neo-Platonismo.

Proclo, Marino, Simplicio.

25. Origini del Neo-Platonismo. Vita di Proclo . . . 704
26. Sue opere 706
27-28. Il *Commento* di Proclo al I Libro di Euclide. Analisi di esso. 708
29. Esistevano commenti di Proclo agli altri libri di Euclide? 711
30. Marino da Neapoli, Isidoro, Simplicio 712

CAPITOLO V. - Eutocio.

31. Vita ed opere di Eutocio 715
32-33. Suoi commenti ai due Libri di Archimede *Su la sfera ed il cilindro* 717
34. Cenni intorno ai suoi commenti alla *Misura del circolo* ed all'*Equilibrio dei piani*. Commenti ad Apollonio. Conclusione 720

CAPITOLO VI. - Sereno.

35. Notizie intorno a Sereno ed alle sue opere . . . 722
36. Analisi dello scritto *Su la sezione del cilindro*. . . 624
37-39. Analisi dell'opuscolo *Su la sezione del cono* . . 727
40. Epilogo 734

Libro Quinto

L'Aritmetica dei Greci.

Pag.

Proemio 739

Capitolo I. - La logistica greca.

Numerazione parlata.

1. Preliminari 741
2. Vocaboli numerali usati dai Greci 742

Calcolo digitale e " numeratio calcularis ".

3. Prime tracce di calcolo digitale presso i Greci. Metodo, conservato dal Rabda, per designare i numeri dall'1 al 10000 743
4. Metodi congeneri per rappresentare numeri superiori. Computi con gettoni; l'abaco 746

Numerazione scritta.

5. Metodo primitivo; sistema erodiano 747
6. Sistemi fondati sull'uso delle lettere dell'alfabetto . . 749
7. Origini del più perfetto fra questi sistemi . . . 753

Le ottadi di Archimede.

8. La parte aritmetica dell'*Arenario* 854

Le tetradi di Apollonio. Il preteso 0 dei Greci.

9. Un'opera di Apollonio commentata da Pappo; il sistema delle tetradi 758
10. Pretese dimostrazioni della conoscenza dello 0 da parte dei Greci 760

Frazioni.

11. Le frazioni fondamentali, i quozienti e le frazioni sessagesimali od astronomiche 761

Le prime quattro operazioni nella logistica greca.

12. Fonti d'informazioni sulla logistica greca; sua natura secondo uno scolio al *Carmide* di Platone . . . 766
13. Metodi egiziani e metodi ellenici 767
14. I *pitmeni* di Apollonio, secondo la relazione di Pappo 773
15. La divisione dei numeri interi ed il calcolo con frazioni fondamentali 776
16. Calcoli con frazioni sessagesimali 779

Pag.

Estrazioni di radici quadratiche e cubiche.

17. Ricerca della parte intera di un radicale quadratico. Radici quadrate in Aristarco, Archimede ed Erone. Metodi di Erone e Teone Alessandrino per estrarre le radici quadrate 782
18. Estrazione di radici cubiche in Erone 789

CAPITOLO II. - L'aritmetica nella scuola di Pitagora.

Sguardo generale sopra l'aritmetica pitagorica.

19. Generalità 792
20. Prime ricerche sulle proprietà dei numeri; probabili origini della " prova per nove „ 793
21. Rappresentazione geometrica dei numeri e sue conseguenze 798

La pretesa origine pitagorica del sistema decimale.

22. Un brano della *Geometria* attribuita a Boezio; interpretazione datane da Chasles; indagini che da essa rampollano. La " questione boeziana „; stato in cui si trova presentemente. Indagini del Woepcke sulla genesi del nostro sistema di numerazione. Conclusione . . . 800

Timarida.

24. Chi fu Timarida? L'" epantema „. 807

CAPITOLO III. - L'aritmetica nell'Accademia.

25. L'aritmetica secondo Platone. I numeri armonici ed il numero nuziale 810
26. Metodo di Platone per costruire triangoli rettangoli numerici 811
27. Il " diametro razionale „ ed il " numero perfetto „ di Platone 844
28. Indirizzo che ebbe l'aritmetica nell'Accademia; Speusippo. L'aritmetica durante il periodo aureo della geometria greca 815

CAPITOLO IV. - L'aritmetica mistica.

29. Esordio 818

Nicomaco da Gerasa.

30. Notizie intorno a Nicomaco e la sua *Introduzione all'aritmetica* 818

Pag.
31. Il I Libro della *Introduzione* 820
32. Il II Libro della stessa 823
33. Continuazione. Le proporzioni, I *Theologumena arithmetica* e la " regula Nicomachi „ 829

Teone da Smirne.

34. La parte aritmetica dell'*Esposizione delle cognizioni matematiche necessarie per l'intelligenza di Platone* . . 833
35. Continuazione. Numeri laterali e diametrali; loro applicazioni 834

Giamblico da Calcide.

36. Vita ed opere di Giamblico 838
37. Ciò che di notevole contiene il suo *Commento* a Nicomaco 839
38. *Domnino da Larissa.* - Domnino ed il suo *Manuale di introduzione all'aritmetica* 843

Capitolo V.

La teoria dei numeri.

Diofanto.

39. Notizie intorno a Diofanto 845
40. Quali opere scrisse Diofanto e che cosa ne rimane . 848
41. Edizioni e traduzioni dell'*Aritmetica* di Diofanto . . 852
42. Natura di essa e stato nel quale si trova attualmente. 854
43. Preliminari teorici dell'*Aritmetica;* simbolica ivi adoperata. 856
44. Le equazioni in Diofanto; elenco di quelle da lui risolute 860
45. Gruppi di problemi 874
46. Metodi per risolvere le equazioni di primo grado ad un'incognita ed i sistemi di equazioni lineari . . 877
47. Le equazioni di secondo grado 879
48. Sistemi determinati di equazioni di grado superiore al primo. Un'equazione cubica. 885
49. Analisi indeterminata di primo grado 889
50-51. Analisi indeterminata di grado superiore . . . 891
52-53. Continuazione: metodo della " doppia equazione „ e metodo di " approssimazione „ 892
54. Costruzione di triangoli rettangoli in numeri. . . 905
55. Un problema figurato risolto da Diofanto . . . 908
56. Indice delle proposizioni aritmetiche applicate da Diofanto 909
57. Originalità di Diofanto 916
58. Il suo scritto *Sui numeri poligonali* 917

CAPITOLO VI. - Ricreazioni aritmetiche dei Greci.

I problemi dell'Antologia greca.

Pag.

59. Le questioni figurate nell' aritmetica greca. Gli epigrammi matematici dell'*Antologia greca* 820
60-61. Varie categorie in cui questi si possono distribuire 922

Il "problema della Corona" di Archimede.

62. Storia e soluzione di questo problema 928

La seconda lettera di Rabda.

63. Problemi aritmetici risolti nel papiro d'Akhmim e nella seconda lettera del Rabda 929

Il "problema dei buoi" di Archimede.

64. Storia di questo problema 932
65. Soluzione di esso 935

Moscopulo ed i matematici di Bisanzio.

66. I quadrati magici e Moscopulo 940
67. Cenni su alcuni matematici bizantini 941
68. Altri problemi di applicazione dell'algebra alla geometria risoluti dai Greci. Epilogo 943

APPENDICE.

Sul numero di Platone 947

Indice alfabetico dei nomi 955

Aggiunte 971

Correzioni degli errori che alterano od oscurano il senso 973

Libro Primo

I GEOMETRI GRECI PRECURSORI DI EUCLIDE

CAPITOLO I.

Sguardo generale sulla geometria greca pre-euclidea

1. - L'epoca, nella quale fiorirono gli scienziati di cui in questo I Libro della nostra storia tenteremo di narrare le gesta, ha le sue origini nell'istante in cui nel mondo greco appare la prima personalità scientifica spiccata e si chiude con lo sfacelo subito dall'impero di ALESSANDRO il Macedone per effetto della morte del grande conquistatore (323 a. C.); essa comprende pertanto all'incirca tre secoli. È un epoca, in certa misura, piuttosto di preparazione alla ricerca scientifica che di vera scienza, se tal nome si accorda soltanto a un complesso di cognizioni ed indagini cospiranti al raggiungimento di un determinato scopo, non già ad osservazioni frammentarie ed a scoperte isolate suggerite sia dai bisogni della pratica, sia da quella curiosità naturale, innata nell'uomo e che più chiaramente si manifesta nei periodi di giovinezza dell'umanità. È un'epoca in cui le guerre collo straniero e le lotte intestine lasciano poco tempo disponibile per la tranquilla ricerca della verità; in cui è ignota quella specializzazione che si manifestò necessaria più tardi e che raggiunse ai nostri tempi il suo completo sviluppo; in cui, all'opposto, ogni scienziato non soltanto abbraccia e coltiva ad un tempo tutti i rami dello scibile, ma spesso depone la penna del filosofo per brandire il ferro del

condottiero, abbandona le tranquille meditazioni per gettarsi nel tumulto della vita politica, e giunge perfino a trovar modo di inserire una speculazione commerciale fra una osservazione astronomica e lo studio di un problema di geometria. È un epoca che ci ha tramandato — nelle Matematiche almeno — un numero estremamente esiguo di monumenti scritti, sicchè per formarsi un concetto della geometria greca pre-euclidea fa mestieri, dopo avere accuratamente rintracciate e raccolte le nozioni matematiche sparse nelle opere filosofiche ed enciclopediche — quali sono quelle di PLATONE e ARISTOTELE —, attingere a fonti indirette, chiedere informazioni a scrittori coevi o di poco posteriori, ed industriarsi a colmare le lacune che il loro insieme presenta; operazioni queste estremamente delicate e difficili sempre, ma che lo sono tanto più nel caso attuale perchè, essendo i primi pensatori greci per tradizione considerati come filosofi, le loro opinioni furono raccolte, studiate, tramandate e spesso svisate da filosofi posteriori, onde è indispensabile sceverare quanto, sul modo con cui venne fatta la relazione di un fatto, abbiano influito i preconcetti del relatore (1).

Questo lavoro di raccolta, confronto ed elaborazione di materiali, tentato una prima volta, per quanto ci consta, in due lavori scolastici (2), venne compiuto da C. A. BRETSCHNEIDER (1808-1878) (3) e poi recato a maggior perfezione da G. JOHNSTON ALLMAN (1824-1904) (4). A questi eminenti scienziati tennero dietro M. CANTOR, il duce venerato degli sto-

---

(1) Tale scarsità ed incertezza di notizie rende assai malagevole l'ordinare in modo soddisfacente le opere appartenenti a quest'epoca: il criterio cronologico è insufficiente e mal sicuro quello della figliazione delle idee matematiche: onde assai spesso ci appigliammo al partito di assumere siccome criterio di classificazione le opinioni filosofiche attribuite ai singoli autori.

(2) DILLING, *De Graecis mathematicis, Mathematico-historica Commentatio.* Berolini, 1831; FINGER, *De primordiis geometriae apud Graecos.* Heidelbergae, 1831.

(3) *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Ein historisches Versuch.* Leipzig, 1870. — Cfr. anche G. FRIEDLEIN, *Beiträge zur Geschichte der Mathematik.* II e III (Hof. 1872 e 1873).

(4) *Greek Geometry from Thales to Euclid.* Dublin, 1889.

rici tedeschi (1), e P. TANNERY (1843-1904) (2), che con le sue dotte ed ingegnose pubblicazioni, mostrò che anche la Francia non è indifferente agli studi di cui è parola (3), in ciò validamente aiutati da F. HULTSCH (1833-1903) e J. L. HEIBERG, a cui debbonsi edizioni definitive di molti matematici classici.

2. - Durante il periodo di cui stiamo per occuparci — nonchè durante i precedenti, dei quali, per l'enorme lontananza da noi, non è possibile dire alcuna cosa che sia storicamente dimostrata — la Grecia ebbe con l'Oriente e più ancora con l'Egitto attivi commerci e vivace scambio di idee, sia in causa degli arditi viaggi che intraprendevano i suoi figli, sia per mezzo delle colonie, le quali anzi, forse per trovarsi in più immediato contatto con più antiche civiltà, prima della madre patria si diedero alla speculazione scientifica. L'influenza che la Grecia subì in conseguenza dovette essere senza dubbio assai grande se il popolo ellèno — il quale per orgoglio nazionale era a nessun secondo — non solo non tentò negarla, ma con la leggenda di CADMO (4), mantenne viva la memoria dei benefici di cui era debitore all'Oriente e, col conservare alle lettere dell'alfabeto il nome di *segni fenici*, curò che non si perdesse il ricordo dell'essere desse venute dal di fuori; nè si ritenne offeso dal fatto

---

(1) Specialmente vanno qui ricordate le *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.*

(2) Oltre alle numerose, memorie che verranno citate più innanzi - e di cui si sta pubblicando la raccolta completa — mi piace fissare fin d'ora l'attenzione del lettore sulle opere di maggior lena di questo geniale scrittore:

Pour l'histoire de la Science hellène. De Thalès à Empédocle. Paris, 1887; *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons.* I Partie: *Histoire générale de la géométrie élémentaire.* Paris, 1887; *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne.* Paris, 1894.

(3) Siccome le opere di CANTOR, BRETSCHNEIDER, ALLMAN e TANNERY sono più diffuse fra i matematici di quelle di PLUTARCO, TZETZE, SUIDA, ecc., così spesso citammo invece dei passi originali di queste, i luoghi ov'erano stati riportati in quelle.

(4) Cfr. BASSI e MARTINI, *Disegno storico della vita e coltura greca.* Milano, 1910, p. 96.

che uomini del valore di SOLONE venissero rappresentati siccome alcuni de' sacerdoti egiziani (1).

Se, pertanto, non v'ha dubbio che i Greci abbiano ricevuto da altri popoli i rudimenti delle arti e delle scienze (2), essi però li trasformarono siffattamente, v'infusero tale novello spirito, li svolsero con tanta genialità ed originalità, che è lecito considerare tutta la loro opera scientifica come loro esclusiva proprietà. Tanto più (3) che non è possibile sorprendere alcuna lotta dell'elemento ellenico primitivo con elementi forestieri, alcuna applicazione di concetti non compresi, nessun riferimento a tradizioni scientifiche del passato, in una parola, non si può avvertire nessuno di quei fenomeni, coi quali, ad esempio nel Medio Evo, si manifesta la dipendenza da fonti esotiche della filosofia che aveva corso in Europa; per converso tutto si svolge naturalmente dalle ipotesi relative alla vita del popolo greco.

3. - Le più copiose e migliori miniere di materiali per ricostruire l'edificio geometrico esistente nell'Ellade prima di EUCLIDE sono alcuni commenti, che verranno da noi studiati a parte nel Libro IV della presente storia. Sono: il *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide* di PROCLO (4), la *Collezione matematica* di PAPPO ALESSAN-

---

(1) CURTIUS. *Storia greca,* trad. di MÜLLER e OLIVA, T. I. Torino, 1877, p. 61, 530, 534.

(2) Affinchè il lettore potesse agevolmente formarsi un concetto della somma di cognizioni geometriche che i Greci possono avere attinte da altri popoli di più antica civiltà, abbiamo riuniti nell'*Appendice* I a questo I Libro alcuni dati relativi.

(3) ZELLER. *Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwicklung dargestellt.* V. Aufl., I. Theil, I Hälfte. Leipzig, 1892, p. 35.

(4) La migliore edizione è quella del FRIEDLEIN, che reca il titolo *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum liber.* Lipsiae, 1873. Di essa TH. H. MARTIN rese conto nel *Bull. di bibl. e storia,* ecc., T. VII, 1874, p. 145, ciò che offrì l'occasione a B. BONCOMPAGNI a dissertare dottamente sopra le edizioni anteriori; oggi si ritiene necessaria una nuova edizione fatta mediante un più ampio corredo di mss. (J. L. HEIBERG a p. 410 dell'articolo *Exakte Wissenschaften und Medizin* nel T. II dell'*Einleitung in die Altertumswissenschaft* di GERIKE e NORDEN. Leipzig, 1911). Noi nelle citazioni ci riferiremo alla traduzione inglese

DRINO (1) e i *Commenti* di EUTOCIO (o EUTOZIO, come altri scrive) ad alcuni libri di ARCHIMEDE (2) e APOLLONIO (3); a questi possono unirsi le *Vite* scritte da PLUTARCO (40-120) e da DIOGENE LAERZIO (III sec. dell'E. v.), il *Lessico* composto dal bizantino SUIDA nel IX o X sec. dell'E. v. e gli scritti del grammatico TZETZE (XII sec.).

In particolare, vi è nel primo dei citati commenti un *intermezzo* storico — che PROCLO tolse probabilmente nel suo insieme dalla grande composizione storica che, come vedremo, è fama scrivesse il peripatetico EUDEMO da Rodi (4) — il quale contiene una così ricca collezione di nomi e una tal copia di notizie, che crediamo sia prezzo dell'opera presentarne qui, come preludio di quanto seguirà, quella parte che descrive le vicissitudini della geometria prima dell'apparizione di EUCLIDE (5).

È ora conveniente di parlare dell'origine della geometria nel periodo attuale; perchè, come disse il sovrumano ARISTOTELE, le medesime idee sono venute agli uomini a più riprese secondo certi determinati periodi dell'universo, e non è già che

---

fattane da T. TAYLOR (1758-1835), non avendo a nostra disposizione alcun originale; essa fu pubblicata col seguente titolo: *The philosophical and mathematical Commentaries of Proclus, on the first Book of Euclid's Elements, to which are added, A History of the Restoration of Platonic Theology by the latter Platonist: and a translation from the Greek of Proclu's Theological Elements.* 2 vol. London, 1792.

(1) Ci serviremo in seguito dell'ottima edizione recente intitolata: *Pappi Alexandrini quae supersunt e libris manuscriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit* F. HULTSCH. Berolini, 1876-77-78.

(2) *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii.* Edit. HEIBERG, 3 vol. Lipsiae, 1880-81; 2ª ed., vol. I. Lipsiae, 1910.

(3) *Apollonii Pergaei quae Grece exstant cum commentariis antiquis.* Ed. HEIBERG, 2 vol. Lipsiae, 1891-93.

(4) È questo un personaggio che incontreremo più volte; i dati biografici e bibliografici relativi si trovano adunati nell'articolo (di C. ROBERT) che lo concerne, in PAULY-WISSOWA, *Real-Encyklopädie der klass. Alterthumwiss.*

(5) V. PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 98-101. - BRETSCHNEIDER, l. c., p. 27-30. - ALLMAN, p. 3-5. - TANNERY, *Géom. grecque*, p. 66-69. A migliore intelligenza di ciò che segue osserviamo col BRETSCHNEIDER (p. 15), che quando PROCLO "così spesso vanta i Geometri

nel nostro tempo o nei tempi che la storia ci fa conoscere che le scienze siansi costituite per la prima volta; ma esse appariscono e successivamente scompaiono in base ai periodi delle rivoluzioni celesti, delle quali non ci è dato assegnare il numero nè nel passato nè nell'avvenire. È dunque unicamente per quanto concerne il periodo presente che bisogna considerare le origini delle arti e delle scienze. Seguendo la tradizione generale diremo che gli Egiziani furono i primi inventori della geometria e che essa nacque dalla misura dei campi, la quale essi dovevano sempre rinnovare in causa delle innondazioni del Nilo, che cancellavano tutti i confini delle proprietà. Non deve recar meraviglia se un bisogno pratico sia stato l'occasione della scoperta di questa come di altre scienze, dal momento che qualunque cosa soggetta a generazione procede dall'imperfetto al perfetto; dalla sensazione al ragionamento, da questo all'intelligenza pura havvi dunque un progresso naturale. Ora poi, nella stessa guisa che presso i Fenici, a cagione del traffico e delle operazioni commerciali a cui si dedicavano, ebbe principio l'esatta conoscenza dei numeri, così per la ragione anzidetta la geometria venne inventata dagli Egiziani.

Talete per primo, essendo stato in Egitto, trapiantò la detta dottrina da questo paese in Grecia; egli stesso fece parecchie scoperte e mise i suoi successori sulla via di molte altre, con i suoi tentativi aventi ora un'indole più generale, ora più rivolta alle applicazioni. Dopo di lui Mamerco (1), fratello del

---

precedenti Platone perchè hanno *generalizzato e concepito in modo più intellettuale* i teoremi della loro scienza, ciò si riferisce indubbiamente, non soltanto alla sostituzioue di dimostrazioni rigorose al posto delle verificazioni sperimentali usate prima, ma altrettanto spesso alla riunione in un'unica proposizione generale di un intero gruppo di teoremi distinti ma affini, colla modificazione del relativo metodo di dimostrazione, in modo che questo abbracciasse la totalità di quei casi particolari „.

(1) Secondo altri, Meri, Mamertino, Mamerzio o Ameristo. Riguardo a tale incertezza, nota il Friedlein, *Beiträge* cit. II, p. 14: " Die Münchener Handschrift, welche ich zu einer neuen Ausgabe des Proklus benützte, löst leider diesen Zweifel nicht. Vor erster Hand scheint dort ἀμεριστ gestanden zu haben, was eine spätere in μάμοερ d. i. Mamerkos und da eben diese ändernde Hand an anderen Stellen wirklich eine *verbessernde* ist, so glaube ich, dass letztere Form aus älteren guten Handschriften stammt und die eigentlich richtige ist. Mit Sicherheit lässt sich hierüber Nichts sagen „.

poeta STESICORO, viene citato per essersi innamorato della geometria, e IPPIA d'Elea riferisce che egli col mezzo di questa acquistossi una riputazione.

Dopo di essi, PITAGORA trasformò questo studio e ne fece un insegnamento liberale, risalendo ai principi generali e studiando i teoremi astrattamente e colla pura intelligenza; gli è a lui che si deve la scoperta delle quantità irrazionali e la costruzione delle figure cosmiche (1). In seguito ANASSAGORA da Clazomene si occupò di varie questioni geometriche e così fece OINOPIDE da Chio, che è un po' più giovane di ANASSAGORA: PLATONE li ricorda ambedue come famosi geometri nei suoi *Rivali* (2).

Dopo questi ebbero celebrità nella geometria IPPOCRATE da Chio, scopritore delle quadrature delle lunule, e TEODORO da Cirene. IPPOCRATE fu il primo compositore di Elementi.

PLATONE, il quale venne dopo di questi, diede alla geometria, come alle altre scienze, una spinta immensa, col grande amore che egli dimostrò per essa, dal quale a sufficienza fanno fede i suoi scritti, ripieni di considerazioni matematiche, le quali ad ogni momento risvegliano l'ardore per queste scienze in coloro che si consacrano alla filosofia.

Allo stesso periodo appartengono LEODAMANTE da Taso, ARCHITA da Taranto e TEETETO d'Atene, i quali accrebbero il numero e resero più scientifica la forma dei teoremi di geometria.

A LEODAMANTE tien dietro NEOCLIDE ed il di lui discepolo LEONE, i quali aggiunsero molto a quanto avevano ricevuto, di modo che LEONE potè anche scrivere degli Elementi molto superiori per il numero ed il valore delle dimostrazioni. Egli scoperse anche il *diorisma* (cioè la distinzione) di quando un problema è possibile da quando non lo è.

EUDOSSO da Cnido, un po' più giovane di LEONE e camerata dei discepoli di PLATONE, aumentò il numero dei teoremi generali, aggiunse tre nuove proporzioni alle tre antiche e, servendosi dell'analisi, fece progredire quanto PLATONE aveva intrapreso sulla sezione.

AMICLA d'Eraclea, discepolo di PLATONE, e MENECMO, discepolo di EUDOSSO e di PLATONE, perfezionarono ancora più la geometria nel suo complesso. TEUDIO di Magnesia si conquistò una rinomanza eccezionale nelle matematiche quanto nelle altre parti della filosofia; egli compose anche degli eccellenti Elementi e generalizzò parecchie cose (3) particolari. Parimente

---

(1) Poliedri regolari.

(2) Per misurare il valore di questa testimonianza occorre tenere presente che questo dialogo (che porta anche il titolo di ἐρασταὶ cioè *Amanti*) viene annoverato fra gli scritti a torto attribuiti a PLATONE.

(3) Definizioni o proposizioni?

ATENEO da Cizico (1), che visse nello stesso tempo, divenne celebre come matematico e particolarmente come geometra. Tutti questi convenivano nell'Accademia ed istituirono in comune queste ricerche. ERMOTIMO da Colofona sviluppò quanto prima di lui avevano trovato EUDOSSO e TEETETO, scoperse molte proposizioni relative agli elementi, e scrisse qualche cosa su i luoghi. FILIPPO da Mende (2), discepolo di PLATONE e da lui iniziato nella matematica, fece delle ricerche seguendo le indicazioni del suo maestro, ma si propose anche tutte le questioni che egli pensava potessero contribuire allo sviluppo della filosofia di PLATONE. Gli è fino a questo FILIPPO che narrarono lo sviluppo della geometria coloro che hanno scritto la storia prima di noi.

4. - Questo schizzo della storia della geometria greca da TALETE a EUCLIDE ci assegna il programma che dobbiamo svolgere per dare un'idea, almeno approssimativa, delle vicende che attraversò la geometria prima di venire codificata negli *Elementi* del grande Alessandrino. Ma nel far ciò, sarà nostra cura di completare il catalogo di autori e di opere compilato da PROCLO, ricorrendo ad altre autorità. Ciò è necessario perchè questi, lungi dall'essere uno storico spassionato, era un così ardente propugnatore delle idee di PLATONE da lasciarsi talora acciecare dalla venerazione per il divino filosofo. Così egli tacque perfino il nome di DEMOCRITO di Abdera (del quale PLATONE avrebbe voluto distrutte le opere) quantunque questi, come vedremo (n. 35), si occupasse con successo di matematiche; e parlò soltanto alla sfuggita di IPPIA d'Elea, perchè questi apparteneva alla setta dei sofisti, benchè il fatto solo che PROCLO stesso lo scelga come giudice dei meriti di MAMERCO, dimostri come egli fosse buon matematico. Per questi preconcetti che ottenebravano nel commentatore citato la facoltà di rettamente giudicare e per altre ragioni, è opportuno stare in guardia di non accettare senza discuterle le sue asserzioni e in generale adottare il sistema di considerarle, non già come teoremi da dimostrare, ma come proposizioni problematiche, di cui è mestieri verificare l'esattezza.

---

(1) O CIZICENO d'Atene? La prima lezione è adottata dal NATORP nel corrispondente articolo della *Real-Enciklopädie der class. Alterthumswiss.* di PAULY-WISSOWA.

(2) O Medma, città della Magna Grecia?

CAPITOLO II.

Talete e la scuola Jonica

5. - TALETE (1) — la persona per merito della quale la prima volta, per quanto sappiamo, in Grecia la lampada della scienza si accende e agitata vampeggia — nacque in Mileto da una famiglia emigrata dalla Fenicia o più probabilmente dalla Beozia (2). L'epoca precisa della sua esistenza non si può determinare, ma l'essere egli stato annoverato fra i saggi sotto l'arconato di DAMASO (585-583 a. C.) (3) e

(1) Cfr., oltre alle opere generali già citate: F. DECKER, *De Thalete Milesio*, Halae, 1865, ove a p. 65 si trovano enumerate le varie ortografie del nome del nostro filosofo, per concludere essere la preferibile Θαλῆς, e P. TANNERY, *Thalès et ses emprunts à l'Egypte* (*Revue philosophique*, T. V, 1880, p. 229-318).

(2) Cfr. ZELLER, vol. cit., I, p. 180 e segg. Secondo DIOCENE L., TALETE nacque nel primo anno della 35ª Ol. e morì a 70 o 90 anni. ALLMAN assume come periodo della vita di TALETE 640-546, BRETSCHNEIDER e CANTOR 640-548. — Riguardo ai genitori di TALETE, v. DECKER, l. c., p. 9.

(3) Per indicare le date ci serviremo promiscuamente della numerazione basata sull'Era volgare e di quella in olimpiadi (di 4 anni ciascuna). Il passaggio da un sistema all'altro si eseguisce facilmente come segue (cfr. IDELER, *Lehrbuch mathematischen und technischen Chronologie*, II Aufl., Berlin, 1883, I Bd., p. 375-77):

I. Per trovare l'anno dell'Era nostra, nella cui estate cominciò un dato anno olimpico, si supponga che questo sia l'*m*^{mo}

l'essere la sua vita connessa ad un celebre fenomeno astronomico (v. n. 6) accaduto nel 610 o nel 597 o nel 585 a. C. autorizza a ritenere TALETE contemporaneo di SOLONE e di CRESO. Perciò la sua giovinezza, essendo di pochi decenni posteriore al momento in cui PSAMMETICO schiuse l'Egitto al traffico coll'estero, cade nel periodo di massima floridezza del commercio fra Mileto e questo paese. Niuna meraviglia deve, quindi, recare se, per consenso universale, si ammette che egli abbia fatto vela verso il paese fecondato dal Nilo. Benchè sembri che il precipuo movente di tale viaggio sia stata la speranza di guadagno o che almeno il commercio non vi fosse totalmente estraneo, pure il giovane viaggiatore seppe così ben profittare di tutto che gli offriva un paese di civiltà vetusta ed avanzata, che più tardi i soli Egiziani vennero considerati come suoi maestri. Ritornato in patria sembra continuasse a occuparsi di cose pratiche (1) e per un certo tempo di politica, finchè poi, verso il tramonto della sua esistenza, si rivolse alle speculazioni scientifiche e queste, ponendolo a capo di quel gruppo di filosofi, o meglio di fisici, che composero la Scuola Jonica, gli assicurarono un posto nella storia delle scienze,

---

dell'n^{ma} olimpiade. Si formi la differenza

$$\delta = 777 - \{4(n-1) + m\};$$

se questa è positiva l'anno cercato è il δ^{mo} a. C. Se invece è $4(n-1) + m > 777$ si formi la differenza

$$d = 4(n-1) + m - 776;$$

l'anno cercato sarà il d^{mo} dell'E. v.

II. Per trovare invece l'anno olimpico che corrisponde a un dato anno a. C., per esempio al d^{mo}, si formi la differenza $777 - d$ e la si divida per 4. Se $n-1$ è il quoziente della divisione di questa per 4 ed m il resto, l'anno cercato sarà l'm^{mo} della n^{ma} olimpiade; se però $m = 0$ esso è il quarto della $(n-1)^{ma}$ olimpiade.

III. Finalmente per trovare l'anno olimpico corrispondente a un dato anno dell'Era nostra si aggiunga a quest'anno 776 e si operi come nel caso precedente.

(1) Ciò spiega il seguente giudizio pronunciato su di lui da PLATONE nelle *Leggi*: " Uomo dotto, di cui si raccontano molte invenzioni comode nelle arti e negli affari pratici, come si fa anche per TALETE il Milesio ed ANACARSI lo Scita „.

posto che venne giudicato da chi più da chi meno elevato, ma che nessuno gli ha contestato nè gli contenda.

6. - Tale rinomanza non si restrinse alla cerchia assai limitata dei dotti di professione, ma all'opposto si estese a tutto il mondo ellèno grazie specialmente alla predizione di un'eclisse (1) che, essendosi poi verificata in un momento solenne, diffuse nel popolo greco la convinzione che l'astronomia avesse confidato a TALETE i suoi più riposti segreti. Il momento a cui alludiamo (2) è quello in cui gli eserciti di Media e Lidia stavano schierati l'uno contro l'altro nella vallata dell'Ali pronti alla battaglia che doveva decidere delle sorti dell'Asia Minore; la conseguenza di quel fenomeno celeste fu, secondo gli storici, la pace immediata fra i due eserciti, i quali, ripugnanti ad opporsi alla consuetudine delle stirpi iraniche di combattere soltanto alla luce del sole, deposero le armi e scesero agli accordi.

L'avere TALETE predetto che in un certo anno avrebbe avuto luogo un'eclisse solare, la quale in seguito si verificò, presenta allo storico più di un problema importante.

Il primo è la determinazione dell'epoca in cui questo fatto astronomico accadde, problema questo che interessa tanto la biografia di TALETE, quanto la storia greca in generale. Ora è stato dimostrato che il giorno del fenomeno non può essere stato se non uno dei 3 seguenti: il 30 settembre 610, il 31 luglio 597 e il 28 maggio 585. Quale di queste date devo accogliersi per vera? La maggioranza degli storici giudica come tale la terza (3), quantunque ricerche recenti di

---

(1) L'autenticità di questa predizione fu combattuta da Th. H. MARTIN nella *Revue archéologique* del 1874. Le relative testimonianze si trovano raccolte nella nota di L. HUGO, *Sur quelques passages anciens relatifs à Thales et à la Géométrie des Egyptiens*, Comptes rendu, T. 108, 1889, p. 767-8. Sono anche da consultarsi i lavori di H. GELZER, *Das Zeitalter des Gyges*, Rheinisches Museum für Philologie, Neue Folge, T. XXX, 1875, p. 264-8 e H. DIELS, *Chronologische Untersuchungen über Apollodors Chronika*, Ib., T. XXXI, p. 15-19).

(2) Cfr. CURTIUS, *Storia Greca*, trad. di MÜLLER e OLIVA, T. I, p. 592-3.

(3) BRETSCHNEIDER, l. c., p. 39 (ove è riprodotto il passo di ERODOTO che contiene la più antica testimonianza della predizione); CURTIUS, op. cit., T. I, p. 593; ZELLER, l. c., p. 181; R. WOLF, *Ge-*

Assirologi abbiano fornito nuovi argomenti a sostegno della terza delle surriferite date (1). Ma l'ultimo che si occupò della questione (2) ha fatto notare come la segnalata diversità di opinioni degli scienziati sia inevitabile nello stato attuale della scienza degli astri (3); questa, infatti, è abbastanza progredita per determinare, non soltanto la data esatta, ma anche l'ora precisa delle ecclissi totali avvenute in un dato periodo del passato; ma, per un'epoca tanto lontana, essa è impotente a determinare con sufficiente esattezza la località ove una data eclisse apparve come totale, perchè su uno degli elementi del calcolo che bisognerebbe eseguire per compiere questa determinazione — cioè l'accelerazione del movimento lunare medio — regna un'incertezza che potrebbe venir dissipata soltanto conoscendo le circostanze dell'eclisse, circostanze che si tratta appunto di determinare; gli astronomi, adunque, invece di potere decidere se una data eclisse sia stata quella predetta da TALETE, dovrebbero chiederlo agli storici per correggere in conseguenza le loro tavole.

---

schichte der Astronomie. München, 1877, p. 9-10, le cui conclusioni sono accettate da M. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I, III. Aufl., Leipzig, 1907, p. 137; DIELS, l. c.; BOLL, articolo *Finsternisse* nella *Real-Encyklopädie* di PAULY-WISSOWA.

(1) Vedi G. MILHAUD, *Leçons sur les origines de la science grecque.* Paris, 1893, p. 66 nota, ove è riferito il parere più recente del TANNERY favorevole alla data 28 maggio 585.

(2) P. TANNERY, *Science hellène,* p. 38-9. La data 30 sett. 610 è pure accettata da IDELER, *Lehrbuch* cit., I Bd., p. 209. Probabilmente la stessa opinione aveva il DECKER, ma forse per un *lapsus calami* asserì (l. c., p. 18) come data probabile il 30 settembre **610** a. C.

(3) Il lettore desideroso di conoscere con precisione quali questioni astronomiche siano legate all'eclisse di TALETE e alle altre quattro così dette *eclissi cronologiche,* che cosa siasi tentato per risolverle, che cosa rimanga a fare per esaurirle, ricorra alle *Notice sur la lune et son accélération séculaire par* M. F. TISSERAND inserita nell'*Annuaire pour l'année 1892 publié par le Bureau des Longitudes.* Dalla quale si apprende, fra l'altro, come un altro eminente astronomo, il NEWCOMB, ritenga dai dati che si possiedono risulti soltanto con certezza: 1° che una battaglia fra i Lidi e i Medi finì in causa di un'improvvisa oscurità: 2° che il 28 maggio 585 a. C. l'ombra della luna è passata sull'Asia Minore; 3° che TALETE ha predetto un'eclisse.

Il secondo problema che offre il vaticinio di TALETE è questo: come potè egli pronunciarlo? A una soluzione di tale questione si giunge subito ammettendo che egli conoscesse il periodo di 223 lunazioni (cioè di 15 anni solari ed 11 giorni) dopo il quale le eclissi si riproducono approssimativamente nello stesso ordine (1), al che si è indotti ricordando che tale periodo era noto ai Cinesi ed ai Babilonesi contemporanei del nostro filosofo. Ma ad averlo egli appreso per questa via si oppone il fatto chè rapporti storicamente provati TALETE ebbe con gli Egiziani, non con altri popoli, e benchè si possa essere inclini ad ammettere che anche questi conoscessero quel periodo od altro analogo (2), pure nulla autorizza a ritenere che i sacerdoti Egiziani fossero disposti a rivelare ad uno straniero un segreto di tale importanza. Onde non resta che ammettere o essere TALETE giunto mediante osservazioni proprie alla legge generale dianzi citata, oppure finalmente (3) avergli qualche astrologo, incontrato nel corso de' suoi viaggi, predetto un certo numero di eclissi ed essersi egli, dopo avere verificato parzialmente l'esattezza di queste predizioni, avventurato a pubblicarne una come cosa propria.

Del resto la soluzione del problema ora trattato non c'interessa direttamente, perchè esso appartiene alla storia dell'astronomia: se di tale problema abbiamo fatto cenno è perchè i vari modi con cui venne risolto sono già indizii di due correnti opposte, percepibili in coloro che si proposero di valutare l'opera scientifica di TALETE, seguendo le quali gli uni pervennero a farne il capostipite della grande famiglia di scienziati greci, gli altri a negargli qualsia con-

(1) BRETSCHNEIDER, l. c., p. 51-52, WOLF, l. c., p. 10.

(2) Infatti un antico scrittore racconta che " se presso qualche popolo furono accuratamente osservate le posizioni ed i movimenti delle stelle, ciò accadde presso gli Egiziani: essi conservano memoria scritta delle singole osservazioni da un numero di anni incredibilmente grande, poichè presso di loro in tutti i tempi fu a ciò consacrata la massima cura. I moti e la durata delle rivoluzioni e le stazioni dei pianeti e persino l'influenza di ciascuno sullo sviluppo degli esseri viventi e tutti i loro influssi buoni e cattivi, vennero da essi accuratamente osservati ... DIODORO SICULO, *Storia*, lib. I., c. 81.

(3) TANNERY, op. cit., p. 61.

cetto originale (1); correnti che si manifestarono nel valutare tanto la sua azione come filosofo, la quale esce dalla cornice del nostro quadro, quanto la sua azione come geometra, che ora passiamo a delineare.

7. - Se è estremamente probabile che TALETE non abbia lasciato alcuno scritto filosofico (2), è pressochè certo che egli non compose alcuna opera di matematica pura, sicchè, per avere qualche informazione su quanto fece, bisogna ricorrere ad altri che a lui. Ora PROCLO ne parla cinque volte: una nel brano storico riprodotto nel n. 3, di un'altra verrà detto tra poco (n. 8), nei tre casi rimanenti si esprime come segue:

I. Egli (TALETE) è menzionato per avere per primo dimostrato che il cerchio è dimezzato dal suo diametro (*Proclo-Taylor*, T. I, p. 165).

II. Si dice che egli abbia dimostrato per primo l'eguaglianza degli angoli alla base di qualsiasi triangolo isoscele (*L. c.*, T. II, p. 51).

III. EUDEMO gli attribuisce il teorema: quando due rette si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono eguali (*L. c.*, T. II, p. 76).

Da questi dati emerge che TALETE si occupò di preferenza delle proprietà degli angoli (3); ciò si accorda col fatto che, secondo PANFILA — storica del tempo di NERONE citata da DIOGENE LAERZIO — TALETE avrebbe imparato geometria dagli Egiziani e sarebbe stato il primo ad inscrivere in un cerchio un triangolo rettangolo (4). Poggiandosi sopra siffatte notizie si giunse a fare di TALETE il fondatore di

---

(1) ALLMAN — il quale fece propria l'opinione di Augusto COMTE (v. *Cours de philosophie positive*, T. II, p. 300), secondo cui TALETE è colui che pose i primi fondamenti dell'algebra — e TANNERY sono forse gli autori ove è più chiaramente percepibile questa diversità di direzione.

(2) Forse scrisse qualche cosa in versi per diffondere le nozioni astronomiche: v. ZELLER, vol. cit., p. 188, DECKER, p. 41-48, BRETSCHNEIDER, p. 55.

(3) Cfr. FRIEDLEIN, *Beiträge* citati II, p. 13.

(4) DIOGENE LAERZIO avverte però nel l. c., che secondo alcuni, fra cui il calcolatore APOLLODORO (personaggio del resto totalmente ignoto, cfr. PAULY-WISSOWA, *Real-Enciklopädie der class. Alterthumwiss.*, I Bd., Stuttgart, 1893, col. 2895), questa scoperta apparterrebbe ai Pitagorici.

quella geometria che, avendo per fine lo studio delle proprietà delle linee, è radicalmente diversa da quella degli Egiziani, la quale ha per fine la misura delle aree e dei volumi; e si completò il quadro delle sue cognizioni geometriche, attribuendogli, fra l'altro, la conoscenza del teorema sulla somma degli angoli di un triangolo (1) e — contrariamente ad un'opinione del MONTUCLA (2) accettata dallo CHASLES (3) — la nozione di luogo geometrico (4).

Ora, riguardo alla fiducia da accordarsi alle attestazioni di PROCLO, si ricordi (v. n. 3) essere opinione generale che egli di regola ripeta ciò che il peripatetico EUDEMO da Rodi scrisse nella sua grande opera storica. Ma secondo alcuni (5), neppure EUDEMO era in grado di discernere con precisione ciò che TALETE aveva scoperto da sè, da quanto aveva trapiantato dall'Egitto, onde a quei dati fa mestieri attribuire un valore abbastanza esiguo: sicchè si giunse (6) ad ascrivere in generale agli Egiziani la conoscenza delle proposizioni surriferite e a TALETE quella di molte altre che ad esse si collegano (teoremi sulle parallele e sui triangoli). È chiaro che così la questione di misurare la originalità di TALETE riesce subordinata a quella più generale di determi-

(1) H. HANKEL. *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*. Leipzig, 1874, p. 91. In particolare HANKEL dubita che TALETE sapesse dimostrare il suscitato teorema I, che, come è notorio, EUCLIDE credè a torto di potere includere in una definizione. (Lib. 1, p. 17).

(2) ALLMAN, l. c., p. 10-13 (cfr. anche CANTOR, I, p. 141). Se non condivido le opinioni di questo storico gli è che trovo essere desse inconciliabili con l'attribuzione ai Pitagorici del teorema in questione, della quale parleremo nel Cap. seguente. Questa inconciliabilità sembra essere sfuggita all'ALLMAN per avere egli interpretate, in occasioni diverse, in modo differente le stesse parole di PROCLO: infatti una volta (p. 11) egli dice che "we are informed by Proclus, on the authority of Eudemus, that the theorem (Euclid I, p. 32) was first proved in a general way by the Pythagoreans" ed un'altra (p. 21) che "the Peripatetic Eudemus ascribes to the Pythagoreans the discovery of the theorem...." (Euclid I, p. 32).

(3) *Histoire des Mathématiques*, 2ª ed. Paris, 1799. T. I, p. 171.

(4) *Aperçu historique*, II ed., 1875, p. 5.

(5) L. c., p. 13.

(6) V. il IV Libro della presente opera.

nare l'attendibilità delle notizie riferite da PROCLO. Ora (ciò osserviamo anticipando sopra quanto esporremo nel IV Libro della presente opera) le indagini più recenti (1) sull'argomento, eseguite con la scorta di una severa analisi dei testi esistenti, portano a ritenere che le storie dell'aritmetica, della geometria e dell'astronomia nel periodo pre-euclideo, furono scritte soltanto da EUDEMO; esse furono sfruttate più tardi da GEMINO (I s. a. C.) e quindi da PORFIRIO (III s. dell'E. v.) e PAPPO (1); gli è da queste opere, oggidì perdute, e non direttamente da EUDEMO, che nel V sec. dell'E. v. PROCLO estrasse le citazioni che si leggono nel suo commento; per ciò il loro valore deve ritenersi per esiguo e si deve dichiarare che noi ignoriamo quello che TALETE sapeva di matematiche; probabilmente, in generale, gli si attribuisce riguardo a certe cose più di quanto emerge dalle testimonianze di EUDEMO, meno in altre, ma nulla accerta che egli abbia sorpassati gli Egiziani o dato prova di genio inventivo (3).

8. - A complemento delle notizie intorno all'opera geometrica di TALETE osserveremo che a lui vengono attribuite le soluzioni di due problemi di geodesia elementare, di cui è nostro dovere parlare come di cosa di cui non sembra ragionevole contendergli il possesso.

I problemi in questione sono:

I. Determinare la distanza di una nave dal porto.

II. Determinare l'altezza di una piramide conoscendo l'ombra da essa projettata.

Del primo parla PROCLO (l. c., T. II, p. 143) nel commento alla proposizione (XXVI del 1.° Libro di EUCLIDE) « se due triangoli hanno due angoli dell'uno eguali a due angoli dell'altro ed un lato dell'uno eguale ad un lato dell'altro, sia questo adiacente od opposto ad angoli eguali, allora essi avranno eguali gli altri lati nonchè i terzi angoli ». Il commentatore citato attesta che:

EUDEMO, nelle sue Narrazioni geometriche, attribuisce a TALETE il presente teorema. Perchè egli dice essere desso neces-

(1) BRETSCHNEIDER, l. c., p. 42.

(2) P. TANNERY, *Géométrie grecque*, I Partie, *passim*; cfr. *Science Hellène*, p. 16.

(3) *Science Hellène*, p. 64-65.

sario nel determinare le distanze dei vascelli in mare, secondo il metodo usato da TALETE in questa ricerca.

Riguardo a tale notizia notiamo in primo luogo lo strano ragionamento ivi fatto per attribuire a TALETE il citato teorema di EUCLIDE, ragionamento che, applicato in tutti i casi analoghi, condurrebbe ad ammettere come opera di uno scienziato qualunque teoria di cui egli indicò anche una sola applicazione (1). Osserviamo ciò per rilevare come questo nuovo dato possa essere di ben piccola utilità per dissipare le fitte tenebre che ravvolgono le scoperte geometriche del saggio di Mileto. In secondo luogo notiamo come le parole e di PROCLO impongano l'obbligo di trattare la questione: *quale è stato il metodo usato da Talete per risolvere il problema I?* E poichè PROCLO non dà alcuna indicazione in proposito, nè è stato fino ad ora rinvenuto alcuno che sopperisca al di lui silenzio, così già da tempo si avvertì la necessità di sciogliere la questione enunciata mediante congetture.

Così si suppose (2) che la distanza cercata si determinasse misurando (fig. 1) gli angoli che le visuali condotte alla nave N da due punti A e B della costa fanno colla congiungente di questi, di cui la distanza potevasi facilmente misurare: oppure che si scegliesse (fig. 2) un punto H della riva elevato sul livello del mare dal quale si potesse osservare la nave N e misurare l'angolo che la visuale HN fa con la verticale HA. In entrambi questi procedimenti era necessario sapere: 1.° misurare un angolo, 2.° costruire sul terreno un triangolo eguale a un dato (3) (cioè eguale ad ABN nella prima soluzione ad AHN nella seconda).

Ma una terza soluzione del problema esonera dalla prima

---

(1) " Non si ha mai diritto di attribuire agli antichi le conseguenze dei principii da loro ammessi, nè i principii delle conseguenze a cui giunsero ". BATTEUX.

(2) BRETSCHNEIDER, l. c., p. 43.

(3) Le difficoltà pratiche di questo problema indussero l'ALLMAN a supporre (l. c., p. 14-15) che TALETE costruisse un triangolo non eguale ma simile all'obbiettivo: per questo bisogna ammettere, con lo storico inglese, che il filosofo greco conoscesse la similitudine, il che è per lo meno assai dubbio (vedi più avanti, n. 9).

operazione: e siccome essa era adoperata dagli agrimensori romani (1) e d'altronde è un'applicazione di proposizioni la cui conoscenza è esplicitamente attribuita a TALETE, così essa ci sembra, meglio di ogni altra, potersi considerare come quella citata da EUDEMO. Ecco come si esegue (fig. 3): Per misurare la distanza un punto A (della riva del mare) un punto inaccessibile ma visibile B (nave), si conduce da A

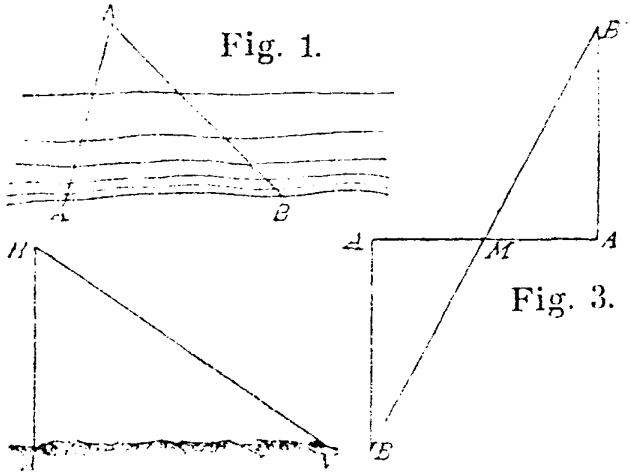


Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 2.

una perpendicolare AA', di lunghezza arbitraria, alla retta AB e la si divide per metà in M; la retta MB incontra la perpendicolare condotta da A' alla retta AA' in un punto B'. $A'B'$ è eguale alla distanza cercata. Infatti, poichè (come TALETE sapeva) sono eguali fra loro gli angoli AMB e $A'MB'$, essendo opposti al vertice, i due triangoli AMB e $A'MB'$ hanno eguali due angoli e un lato dell'uno risponde a due angoli ad un lato dell'altro e quindi, pel teor. XXVI del I Libro degli *Elementi* (che, per attestazione di PROCLO, era pur noto a TALETE), sono eguali; in particolare e $AB = A'B'$.

9. - Riguardo al secondo dei problemi di geometria pratica che è fama TALETE insegnasse a sciogliere, cioè alla misura dell'altezza delle piramidi mediante l'ombra da esse

(1) Cfr. *Gromatici veteres ex recensione* CAROLI LACHMANNI. Berlin, 1848, p. 285-86: citato da P. TANNERY (*Géométrie grecque*, p. 90), che per primo emise l'ipotesi che essa fosse la soluzione di TALETE.

projettata, vi fu chi (1) ritenne favolosa questa misura perchè, essendo le piramidi alte e per conseguenza di gran base ed essendo piccola la latitudine dell'Egitto, l'ombra non poteva uscir fuori dalla base stessa. Tale dubbio si ripresenta notando che quella misura esigeva, in ultima analisi, la determinazione, tutt'altro che facile, dell'altezza di un oggetto sul piano orizzontale nell'ipotesi dell'inaccessibilità del piede della verticale passante per esso. Ma è agevole dissiparlo ammettendo (2) che chi riferiva quel ritrovato di TALETE adoperasse la parola *piramide* per indicare un edificio elevato, dimenticando la condizione che questo avesse una base di dimensioni trascurabili rispetto all'altezza, che adoperasse, ad esempio, la parola piramide invece di quella di *obelisco.* Ciò è tanto più verosimile perchè le notizie concernenti tale questione sono indirette, non solo, ma anche contradditorie. Infatti se, da un lato, al dir di DIOGENE LAERZIO, un tale « GEROLAMO » [da Rodi, discepolo di ARISTOTELE] « riferisce avere egli » [TALETE] « misurata l'altezza delle piramidi mediante l'ombra, osservando il momento in cui la nostra ombra è della stessa altezza di noi », d'altro lato PLUTARCO nel *Banchetto de' sette saggi* fa NILOSSENO parlare a TALETE del re egiziano AMASI nel modo seguente: « Benchè egli ti ammiri anche per altre cose, pure egli pregia sopra tutte la misura delle piramidi, giacchè tu, senza fatica alcuna e senza ricorrere ad istrumenti, ma col solo infiggere il bastone all'estremo dell'ombra projettata dalla piramide, hai dimostrato, servendoti dei due triangoli risultanti dai contatti col raggio luminoso, che un'ombra ha all'altra lo stesso rapporto che ha la piramide al bastone ».

Come si vede queste due informazioni sono sostanzialmente discordi: in base alla prima basta ammettere che TALETE avesse osservato che, nell'istante in cui l'altezza di un determinato oggetto è eguale alla lunghezza della propria ombra, tutti gli oggetti circostanti si trovano nelle stesse condizioni: poggiandosi sulla seconda invece bisognerebbe

(1) *Notizie istoriche dei matematici e filosofi del regno di Napoli scritte da* MATTEO BARBIERI. Napoli. 1778. p. 26.

(2) Cfr. BRETSCHNEIDER, l. c., p. 45.

ammettere che avesse notizia della similitudine; ora, mentre nelle notizie di DIOGENE LAERZIO, biografo che attingeva a fonti abbastanza prossime a TALETE, devesi in generale avere fede, per converso non bisogna prendere troppo sul serio le parole di PLUTARCO che, nello scrivere opera non istorica e in un punto in cui voleva estollere TALETE, non avrà avuto scrupolo alcuno nell'attribuire a questo cognizioni e metodi noti a' suoi tempi (I e II s. dell'E. v.).

Nulla dunque, a parer nostro, autorizza a ritenere per nota a TALETE la teoria della similitudine (1) e come opera sua la seconda, invece della prima, delle riportate soluzioni (2).

10. - TALETE in nessun periodo della sua esistenza ebbe l'abitudine di riunire attorno a sè un gruppo di persone per esporre o discutere i risultati delle sue meditazioni: tuttavia è consuetudine invalsa il ritenerlo capo di una scuola composta da quelli che, vuoi per l'epoca ed il luogo in cui vissero, vuoi per le dottrine che professarono, si possono riguardare in qualche maniera collegati al saggio di Mileto.

Primo tra questi è un tal MANDRIATO da Priene, di cui però non si conosce che il nome, ricordato da APULEJO (3).

Nè molto più si sa intorno MAMERCO (4); chè, prescindendo da una frase di SUIDA e da uno scolio a ERONE (5), tendenti a farlo ascrivere fra gli aderenti alle idee dei fisici jonici, non si sa altro se non che egli ebbe per fratello

---

(1) E tanto meno la proposizione affermante la similitudine delle due punteggiate prodotte in due rette concorrenti da un fascio di rette parallele, che, in Italia, molti si ostinano a chiamare *teorema di Talete*.

(2) L'opinione da noi accettata è quella di BRETSCHNEIDER (l. c., p. 46), a cui sembra accostarsi il CANTOR (l. c., p. 145), e che fu abbracciata dal TANNERY (*Géométrie grecque*, p. 91-92). Il parere opposto fu sostenuto tanta dal MONTUCLA, l. c., T. I, p. 103 — il quale pensa essere la prima soluzione frutto dell'ignoranza del relatore, che non riuscì a comprendere la seconda se non in un caso speciale — quanto dall'ALLMAN, l. c., p. 14.

(3) BRETSCHNEIDER, l. c., p. 53.

(4) Cfr. *Vite inedite di matematici italiani scritte da Bernardino Baldi, pubblicate da Enrico Narducci* (*Bull. di Bibl. e St.*, T. XIX, 1886, p. 358).

(5) BRETSCHNEIDER, l. c., p. 56.

STESICORO, il celebre poeta nato ad Imera (Sicilia) e vissuto fra il 632 e il 560 a. C. (1).

11. - In condizioni migliori ci troviamo riguardo ad ANASSIMANDRO (2) compatriota, discepolo e poi successore di TALETE, il quale inaugurò la letteratura filosofica dei Greci (verso il 547 a. C.) col comporre a sessantaquattr'anni un'opera *Sulla natura* (περὶ φύσεως). Chi sa come a base delle dottrine di ANASSIMANDRO fosse l'idea d'infinito, potrebbe credere che a lui, non ad ARCHIMEDE, si dovesse far risalire questo concetto fondamentale di tutta la matematica; ma tale opinione svanisce ben presto notando che ANASSIMANDRO parla sempre, non dell'infinito matematico, ma dell'infinito fisico (cioè della materia infinita) sicchè per lui infinito è non soggetto ma predicato (3). Del resto ANASSIMANDRO sembra avere dato nessun contributo alla matematica pura, ma essersi limitato alle applicazioni. Vero è che un tempo si era creduto (4) una frase di SUIDA (5) significasse avere egli scritto una specie di trattato elementare di geometria, ma poi fu avvertito l'errore dell'interpretazione (6); e gli uni (7) ammisero che ANASSIMANDRO sotto il nome di ὑποτύποσις avesse composto una raccolta di costruzioni geometriche utili in pratica, non accompagnate da alcuna giustificazione teorica, mentre altri (8) volle che tale opera si riferisse alla rappresentazione della terra su un mappamondo. La prima interpretazione si giustifica colla tendenza di ANASSIMANDRO verso la scienza applicata, la quale è attestata, fra l'altro, dalla costruzione di un gnomone che gli attribuisce DIOGENE LAERZIO. La seconda poggia sul fatto che lo scienziato di cui ci occupiamo si ritiene autore di una carta della terra;

(1) Cfr. SMITH, *Storia di Grecia*, trad. cit., p. 145.

(2) Cfr. DIOGENE LAERZIO, p. 81; ZELLER, p. 211 e seg.; P. TANNERY, *Anaximandre de Milet* (*Revue philosophique*, T. XIII, 1882, p. 500-529) e *Science Hellène*, p. 81-118.

(3) ZELLER, vol. cit., p. 197.

(4) MONTUCLA, op. cit., T. I, p. 104.

(5) Riprodotta dal BRETSCHNEIDER, p. 59.

(6) FINGER, l. c., p. 23. Vedi anche la prima della *Bemerkungen zur Geschichte der altgriechischen Mathematik* di A. STURM (*Abh. zur Gesch. der Mathem.*, IX Heft, 1899).

(7) BRETSCHNEIDER, l. c., p. 62.

(8) P. TANNERY, *Géom. grecque*, p. 74-75 e *Science Hell.*, p. 86.

non già che a lui si faccia merito del primo tentativo di tal natura, perchè anzi è noto (1) come, anche prima, nelle sedi degli oracoli si registrassero accuratamente i risultamenti di nuovi viaggi e in genere tutte le notizie attinenti alle peregrinazioni dei naviganti e si cercasse di dichiarare, col mezzo di rappresentazioni gratiche, la postura dei littorali diggià occupati e di quelli che ancora erano liberi ed acconci allo stabilimento di colonie: ma si ritiene che ANASSIMANDRO abbia data forma scientifica a siffatti tentativi e aggiunto ai loro scopi civili e politici quello di contribuire alla conoscenza delle condizioni fisiche del globo che abitiamo.

12. - Se — come emerge dal fin qui detto — è assai secondaria la parte rappresentata da ANASSIMANDRO nella storia della matematica, che cosa diremo di quella di ANASSIMENE, terzo degli scienziati che ebbero culla in Mileto? (2) Dimostrato ingiusto l'attribuire a lui, con CICERONE, la costruzione di un gnomone (3), non ci resta che citarlo siccome colui che segna il definitivo distacco dalla matematica della scuola Jonica, distacco già preparato da ANASSIMANDRO ed al quale, d'altronde, non si opponevano le tendenze che essa aveva avuto fin dal momento della sua fondazione. Giacchè in TALETE non si trova una persona che coltivasse la matematica pel suo valore intrinseco, ma sibbene un uomo spesso, per non dir sempre, preoccupato delle applicazioni a cui egli era convinto si prestasse alla spiegazione dei fenomeni naturali. In tale convinzione egli probabilmente trovò la spinta a trasportare in Grecia le nozioni di geometria teorica e pratica possedute dagli Egiziani, ad aggiungervi talora qualche cosa di suo, quando ne vide la necessità, ed a porre in luce la base scientifica di alcuni procedimenti pratici in uso sulle rive del Nilo (4). Perciò egli ed i suoi se-

(1) CURTIUS, l. c., T. I, p. 527.

(2) Della sua vita non si sa nulla di sicuro: se per lo più lo si dice amico, discepolo e successore di ANASSIMENE, ciò dipende soltanto dall'avere con questo comuni la patria ed alcune dottrine. Cfr. ZELLER, vol. cit., p. 239 e P. TANNERY, *Science Hellène*, p. 146 e seg.

(3) BRETSCHNEIDER, l. c., p. 63 e CANTOR, T. I, p. 123.

(4) Cfr. il cenno storico di PROCLO: ciò è confermato da PLATONE, il quale poneva il carattere distintivo dei Greci nello

guaci, non devono venir venerati per un contributo diretto dato alle nostre cognizioni geometriche, ma sibbene per avere poste all'ordine del giorno certe questioni che dianzi non eransi affacciate alla mente dei Greci; la Scuola jonica, adunque, non segna il principio della matematica greca, ma rappresenta quel periodo di non regolata preparazione o meglio di inconscio fermento intellettuale che precede la vera ricerca scientifica.

---

spirito scientifico e quello degli Egiziani (e dei Fenici) nell'amore al guadagno e se lodò gli Egiziani fu piuttosto per le invenzioni pratiche che per le scoperte filosofiche.

CAPITOLO III.

Pitagora e la scuola Italica

13. - Gli stati ellenici situati al di qua del mare concentravano ancora tutta la loro attività nei negozi concernenti il benessere materiale, quando gli Jonii avevano già cominciato a speculare intorno a soggetti un po' più lontani dall'utile immediato, e, indotti probabilmente dagli esempi che offrivano loro le civiltà egiziana e babilonese, si erano dati ad indagare le cause dei fenomeni che percepivano nel mondo circostante. Il primo di tali investigatori di cui siasi conservato il nome è, come già sappiamo, TALETE MILESIO; egli, sospinto da quel tormentoso desiderio — comune a tutti i popoli e che in particolare nei Greci è attestato da ESIODO — di sciogliere l'enigma della potenza regolatrice dell'universo e dalla brama, così caratteristica dello spirito ellenico, di scoprire ordine ed armonia dell'universo dei fenomeni, designò (per ragioni che non ci furono rivelate) l'*acqua* come elemento primitivo di tutte le cose, elemento dal quale tutto ciò che fu ed è aveva tratto la propria origine e dal quale doveva trarre origine tutto ciò che fosse per essere. Il valore di questo concetto devesi misurare, non tanto in base al pregio intrinseco e alla verosimiglianza di esso, quanto per essere il primo tentativo di ricondurre ad una causa unica gli infinitiformi fatti naturali. A tale tentativo un altro ne tenne dietro a breve distanza, quando, cioè, ANASSIMANDRO, spogliando il concetto del suo grande concittadino di quanto esso aveva di eccessivamente determi-

nato, insegnò che quell'elemento primitivo pensato da TALETE era, non una particolare sostanza, ma la *materia* non specificata, la quale, dovendo dare origine ad infiniti esseri, era di necessità infinita e capace di svolgere dal proprio seno i singoli elementi. Se non che la *materia* di ANASSIMANDRO apparve ai più di troppo difficile concepimento; in conseguenza vediamo il terzo dei filosofi di Mileto, ANASSIMENE, sentenziare esser l'*aria* l'elemento primigenio e creatore, elemento in movimento incessante e sempre attivo a produrre nuove cose mediante due processi, di rarefazione l'uno, di condensazione l'altro.

A questi magnanimi sforzi per determinare l'elemento unico capace di formare tutto ciò che esiste, fanno riscontro quelli aventi per intento di determinare la legge da cui è governato l'universo dei fenomeni. Mentre i primi ebbero per patria la Jonia, la Magna Grecia vide compiersi i secondi, dopo che Elea (città fondata dai Focesi sulla costa del Mar Tirreno) divenne soggiorno di SENOFANE DA COLOFONE (che fiorì nella seconda metà del VI sec. a. C.) epperò stanza del sapere e Crotone (città fondata dagli Achei nel Golfo di Taranto) lo diventò il giorno in cui vi approdò PITAGORA DA SAMO (1).

Le spiegazioni dell'organamento del cosmo escogitate da SENOFANE e da PITAGORA hanno questo di comune, che in entrambe la causa dei fenomeni viene cercata fuori del mondo dei sensi; ma, mentre gli Eleati la facevano risiedere in un essere immutabile increato ed eterno ma inqualificato, PITAGORA attribuiva al *numero* la parte di regolatore del mondo intero; anzi per PITAGORA il numero non era soltanto la forma che governa la combinazione delle cose, ma la materia stessa delle cose. Queste due spiegazioni non sono tra loro in aperto contrasto, chè anzi si può ritenere la seconda inclusa nella prima. Ma qui accade che quanto cede per generalità vince per intrinseco valore. E,

(1) Riguardo a questo filosofo, oltre alle citate opere di DIOGENE LAERZIO e di ZELLER, vol. cit., p. 279-199, a cui attingemmo largamente, si vegga: CHAIGNET, *Pythagore et la philosophie pythagoricienne, contenant les fragments de Philolaus et d'Archytas.* Paris, 1873 e S. FERRARI, *La scuola e la filosofia pitagoriche* vista italiana di Filosofia, anno V, 1890).

invero, il sistema cosmologico di PITAGORA mostra, a tacere di altri pregi, come nella scuola di Crotone si avesse notizia, indubbiamente incompleta e forse nebulosa, dell'essere di regola i fenomeni fisici governati da leggi tanto esatte da potersi tradurre in formole aritmetiche (1); onde in esso devesi rintracciare il primo germe del nostro indirizzo scientifico, seguendo il quale si cerca in ogni fenomeno l'elemento numerico e si ritiene, con LEONARDO DA VINCI, che le scienze siano tanto più vere quanto più s'informano ai metodi della matematica (2).

14. - Tale superiorità della filosofia pitagorica sulle precedenti non deve fare chiudere gli occhi dinnanzi alle doti di queste, non deve spingere a negare come essa sia stata preparata dagli investigatori di Mileto e di Elea, non deve persuadere a ritenerla come un frutto esotico trapiantato da paesi lontani. Si deve certamente ammettere che sulla educazione intellettuale di PITAGORA abbiano esercitata una certa influenza le dottrine che avevano corso in Egitto e in Oriente e che molti viaggiatori avevano fatto conoscere in Grecia; ma noi crediamo assolutamente priva di solida base l'opinione di coloro che trasformano PITAGORA in un viaggiatore disonesto, facente apparire come sua legittima proprietà il frutto di bottino raccolto in lontani paesi. Lo crediamo perchè l'argomento fondamentale usato da chi giunse a tale conclusione risiede nell'avvertire certi punti di contatto fra le dottrine di PITAGORA ed altre: ora è noto che in condizioni di sviluppo fra loro analoghe si

---

(1) A tale concezione aritmetica del mondo i Pitagorici giunsero probabilmente partendo dalla legge fondamentale dell'acustica che essi scopersero e che li indusse a porre la musica fra i rami della matematica: cfr. P. TANNERY, *Du rôle de la musique grecque dans le developpement de la mathématique* (Bibl. math., III ser., T. III, 1892) e M. C. P. SCHMITH, *Kulturhistorische Beiträge zur Kentnisc des griechischen und römischen Alterthums.* I Heft. Leipzig, 1906, p. 75-84.

(2) Si vegga a questo proposito quanto scriveva KANT (1796) nel lavoro: *Von einem vornehemen Ton in der Philosophie* (Ges. Werke, T. I, Leipzig, 1839): donde appare che egli pure, dinnanzi ai prodigi della matematica, arrestossi compreso dalla stessa ingenua meraviglia di PITAGORA. (Cfr. FINK, *Kant als Mathematiker.* Frankfurt a. M., 1889).

vede sempre, specialmente fra popoli di origine comune, prodursi un gran numero di coincidenze (1); perciò bisognerebbe provare, in base alla considerazione di legami storici, come PITAGORA potè procacciarsi una nozione precisa delle dottrine orientali; or a ciò si opponeva fra l'altro la lingua, perchè rarissima era fra i Greci la conoscenza di lingue straniere e di poca utilità per gli scienziati potevano essere gl'interpreti i quali, erano bensì in grado di rendere possibile il commercio e illustrare un paese, ma di regola incapaci di comprendere e spiegare i concetti filosofici.

Abbiamo osservato questo perchè intorno alle origini del Pitagorismo furono emesse, anche da persone eminenti, ipotesi strane e disparatissime, le quali vennero e vengono tuttora gagliardamente sostenute e strenuamente combattute. Per tacere di chi con SCIPIONE MAFFEI sostenne che PITAGORA fu etrusco (2) e di chi, con G. B. VICO (3), opinò essere egli venuto in Italia per apprendervi la filosofia indigena, sorta dapprima in Etruria e trasferita poscia nella Magna Grecia, diremo essere stato dal RÖTH (4) fatto energicamente valere l'avviso che PITAGORA trasportasse in Grecia dall'Egitto il suo completo sistema filosofico. Il GLADISCH (5), all'opposto, trovò che le dottrine di PITAGORA non hanno nulla di comune con quelle professate in Egitto e che invece esse coincidono con quelle professate in Cina; ma gli fu obbiettato, fra l'altro, che tale coincidenza è imperfetta e che, d'altronde, siamo completamente all'oscuro ri-

---

(1) Ad es. VIOLET-LE-DUC nella sua *Storia dell'abitazione umana*, narra che nelle valli del Thibet e del Cachemir situate ai piedi dell'Hymalaja le case sono costruite, in tutti i più minuti particolari, con gli identici sistemi usati su vari versanti del Monte Rosa.

(2) Tale strana opinione venne vittoriosamente combattuta dal TIRABOSCHI nella sua *Storia della letteratura italiana*, T. I, Venezia, 1795, p. 28-29.

(3) Cfr. L. FERRI, *Sguardo retrospettivo alle opinioni degli italiani intorno alle origini del Pitagorismo* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 15 giugno 1890).

(4) *Geschichte unserer abendländischen Philosophie*, II Bd., Mannheim, 1858.

(5) *Die Aegyptische Entstehung dss Pythagoras. Eine historische Untersuchung* (Philologus, vol. 39, 1879, p. 113-130).

guardo al valore delle fonti cinesi a cui possiamo attingere. Nè mancò chi scoperse delle relazioni fra il Pitagorismo e le dottrine semitico-ebraiche (1). E finalmente, in questi ultimi tempi venne sostenuta (2) ed accolta con favore (3) la tesi che pone sulle rive del Gange le scaturigini del Pitagorismo.

15. - Da che cosa proviene questo gran numero di opinioni disparatissime e l'impossibilità di giungere finora ad un accordo fra coloro che le emisero o sostennero?

Le principali cause di ciò sono: 1.° il non avere Pitagora nè alcun suo discepolo, prima di FILOLAO (che fu contemporaneo di SOCRATE), consegnate le proprie idee ad uno scritto, 2.° la deficienza di altre autorità meritevoli di una fede assoluta. Percorrendo, infatti, l'antica letteratura greca si nota che, prima di ARISTOTELE, PITAGORA è menzionato assai di rado e che lo Stagirita parla in genere *dei Pitagorici* (4); alle scarse notizie da lui offerte i Peripatetici ne aggiungono alcune che, benchè non molto numerose, sono però sufficienti a rivelare il germe di una leggenda formantesi attorno a PITAGORA. E gli scrittori più recenti mostrano come questo seme siasi sviluppato rapidamente, giacchè all'epoca dei Neo-Pitagorici la pianta è così ricca di frondi, fiori e frutti che PORFIRIO e GIAMBLICO di Calcide (IV sec. dell'E. v.) credono potere scrivere delle vite del nostro filosofo piene di particolari di ogni genere. La tradizione ci dà, dunque, tante

---

(1) Cfr. B. BALDI in *Bull. di Bibliografia, ecc.*, T. XX, p. 200-205; e A. VON THIMUS. *Die Harmonicale Symbolik des Alterthums.* Köln, 1862 e 1876. Notisi a questo proposito che gli Arabi facevano di PITAGORA uno scolaro di re SALOMONE: cfr. HEIBERG, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid.* Leipzig, 1882, p. 6.

(2) L. v. SCHROEDER. *Pythagoras und die Inder. Eine Untersuchung über Herkunft und Abstammung des pythagoraischen Lehren.* Leipzig, 1884.

(3) Cfr. S. COGNETTI DE MARTIIS. *L'istituto pitagorico* (Atti dell'Accademia di Torino, vol. XXIV, 1888, p. 208-225 e 270-291).

(4) La spiegazione di questo modo di esprimersi "del maestro di color che sanno„ sta nell'abitudine dei Pitagorici di considerare ogni scoperta fatta nella Scuola come opera, non di questo o di quello, ma di tutti i membri di essa. Nessuna meraviglia quindi se, anche dopo ARISTOTELE, assai spesso si sia costretti a parlare di ritrovato *dei Pitagorici.*

più informazioni sopra il Pitagorismo ed il suo fondatore quanto più ci allontaniamo dall'epoca in cui i fatti sono accaduti (1); ma quale fede devesi prestare a racconti indubbiamente fantastici, nei quali è evidente il desiderio del narratore di trasfondere nei lettori il proprio entusiasmo per grande filosofo? (2)

16. - Tuttavia, per quanto siasi scettici a questo proposito, sembra essere forzati ad ammettere come PITAGORA fosse figlio di un MNESARCO (3) e avesse visto la luce in Samo (4) circa nella 49ª Ol. Le antiche notizie sui suoi maestri sono destituite di solido fondamento storico (5) e così quelle intorno ai suoi viaggi, eccettuate tutt'al più quelle concernenti la sua visita all'Egitto. In Samo stesso forse egli insegnò; ma, sia per non avere trovato presso i suoi concittadini sufficiente considerazione, sia per sottrarsi alla tirannia di POLICRATE (6), si traslocò a Crotone nella 59ª o 60ª Ol.

---

(1) A conferma di tale asserzione riportiamo la seguente notizia data sul soggiorno di PITAGORA in Egitto da DOM. PERNETY: " Pythagore, toujours avide de s'instruire, consentit même à souffrir la circoncision pour être admis aux nombre des initiés. Il puisa au moins dans ce pays les principes des sciences, et son système de métempsycose „ (*Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres*, MDCCLXXIII, Berlin, 1775, pag. 504).

(2) A queste fonti più o meno torbide e senza analizzarne la purezza, attinse BERNARDINO BALDI (1553-1617) nello scrivere quella *Vita di Pitagora* che fu di recente (1887) da ENRICO NARDUCCI tratta dall'autografo, annotata e pubblicata nel T. XX p. 197-308) del *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*. Ad essa, non meno che alle postille del dotto editore, rinviamo il lettore desideroso di formarsi un concetto di quanto l'antichità credeva di conoscere intorno al nostro matematico.

(3) Oriundo di Fliunte, secondo PAUSANIA (cfr. CURTIUS, T. I, p. 158): da un'isola d'onde gli Ateniesi cacciarono i Tirreni, secondo DIOGENE LAERZIO.

(4) Riguardo all'opinione secondo cui PITAGORA sarebbe italiano vedi F. DE LUCA, *Memoria per rivendicare alla scuola italica tutta l'antica geometria*. Napoli, 1845, p. 11.

(5) La maggioranza ammette però che egli ebbe delle relazioni con TALETE: v. BRETSCHNEIDER, p. 71 e ALLMAN p. 19-20.

(6) CURTIUS, l. c., T. I, p. 662.

(cioè verso l'epoca della cacciata dei Tarquini da Roma ove fondò quell'associazione, in parte scientifica ma specialmente politico-religiosa, detta da poi la *Scuola italica*, che, se la fama non mente, riunì una folla di discepoli di ambo i sessi, accorsi da ogni parte d'Italia, e che, divenuta il centro del partito aristocratico, fu la prima esposta all'urto del movimento democratico che in quel tempo sconvolse tutti gli stati Greci. Ma in qual modo abbia avuto luogo in conseguenza la dissoluzione della Scuola pitagorica, in qual misura siano stati perseguitati i suoi membri, quale sorte abbia toccato al suo capo, non è noto con certezza: tantochè vi è chi fa morire PITAGORA durante un tumulto a Crotone, mentre vi è chi gli fa finire la vita a Metaponto in un tranquillo esiglio; certo è soltanto che egli si è spento verso la 69ª Ol. e che poi le sue dottrine si sparsero per tutta la Grecia.

17. - Da queste ultime parole il lettore è reso edotto dell'essere credenza universale che uno dei canoni regolatori dell'associazione pitagorica fosse il segreto intorno alle dottrine ivi insegnate e alle questioni ivi dibattute. Ora, quanto questa credenza è fondata sul vero (1), quanto contiene di ingrediente leggendario? (2) A prima vista si potrebbe pensare che la prescrizione del segreto, supposta vera, dovesse applicarsi piuttosto ai dogmi filosofici che alle verità geometriche; ma, al contrario, mentre quelli furono ben presto conosciuti da SENOFANE, da ERACLITO e da altri, vien presentata come empia la rivelazione fatta più tardi di una scoperta matematica; si è dunque forzati di ammettere che l'insegnamento privato di PITAGORA fosse essenzialmente matematico e filosofico quello pubblico. Si può ritenere di più che egli da principio non volesse tenere celate nè le sue dottrine filosofiche nè la sua scienza geometrica; che pre-

(1) Ne dubitano tanto l'HANKEL (l. c., p. 111) quanto il CANTOR (T. I, p. 129).

(2) Per quanto segue si vegga P. TANNERY, *Histoire du concept de l'infini au VI Siècle avant J. C.* (*Revue philosophique*, vol. XII. 1882, p. 618-636) e più esplicitamente *Sur le secret dans l'école de Pythagore* (*Archiv für Gesehichte der Philosophie*. Berlin, 1887. I Bd., p. 28-36), *Science Héllene*, p. 113-121 e *Géométrie Grecque*, p. 81-89.

ferisse, per sue ragioni particolari, l'insegnamento orale al diffondere le sue idee col mezzo di scritti; ma che, quando un suo discepolo propalò le più elevate cognizioni matematiche acquistate nel seno della scuola e si fece un merito d'un risultato che era frutto di lavori compiuti in comune (1), PITAGORA si sia sentito offeso da tale indebita appropriazione e la maggioranza de' suoi discepoli abbia condiviso il suo risentimento. Le discordie conseguenti furono forse uno dei motivi alla dissoluzione della scuola; e vi è ragione per credere che ad un gruppo di Pitagorici esiliati e privi di risorse alludesse GIAMBLICO, quando nella *Vita di Pitagora* scriveva: « Ecco come i Pitagorici dicono che la geometria fu resa pubblica. Il denaro dei Pitagorici venne smarrito da uno di essi; in seguito a questa disgrazia venne accordata a questi la facoltà di battere moneta con la geometria, e la geometria venne detta *Tradizione concernente Pitagora* ».

18. - Si ammetta o non la testè indicata riduzione a proporzioni tanto modeste del silenzio imposto ai Pitagorici, purchè si accetti come vera l'or riferita interpretazione per le parole di GIAMBLICO (2), si deve ammettere essere esistita (sotto il titolo composto dalle parole sottolineate che chiudono il n.° precedente) un'opera geometrica, che EUDEMO da Rodi avrà probabilmente avuto sotto mano e dalla quale avrà estratte le notizie intorno al sapere matematico dei Pitagorici che vennero trasmesse più tardi a noi da PROCLO. In conseguenza la storia della geometria per quanto concerne PITAGORA sembra trovarsi in condizioni assai più favorevoli della storia della filosofia; cosicchè, se ci è ignoto su quale autorità si fondasse, ad esempio, ARISTOTELE nell'attribuire una dottrina ai Pitagorici, per converso, quando EUDEMO (PROCLO) attribuisce ad essi una proposizione mate-

(1) Quale fosse tale scoperta è dubbio: secondo GIAMBLICO (*De Pythagorica Vita*, Cap. 88) essa sarebbe l'iscrizione del dodecaedro della sfera e l'infedele sarebbe IPPASO: mentre, secondo uno scolio agli *Elementi di Euclide* attribuito a PROCLO, essa sarebbe la scoperta degli irrazionali (cfr. KNOCHE, *Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euklid's Elementen*. Herford, 1865, p. 17-28).

(2) Essa non lo fu dall'ALLMAN, l. c., p. 221.

matica, dobbiamo a buon diritto pensare che egli riproducesse quanto aveva letto in quel trattato composto dagli esiliati di Crotone verso la metà del V sec. a C.

Queste spiegazioni erano indispensabili, chè, in loro assenza, come conciliare l'incredulità con cui dicemmo doversi in genere accogliere le informazioni che gli antichi autori ci porgono intorno alla scuola di Crotone, con la fede che riponiamo nelle notizie somministrateci da PROCLO, le quali ci porgono il materiale con cui ora tenteremo ricostruire l'edificio geometrico di cui il capò di quella scuola fu l'architetto?

10. - Quello che differenzia una raccolta di proposizioni matematiche da un sistema scientifico propriamente detto è l'esistenza di definizioni capaci di dare un'idea completa ed esatta degli enti da studiarsi. Perciò le parole, con cui PROCLO fa merito PITAGORA di avere elevata la geometria alla maestà di scienza, trovano conferma, non soltanto nelle concordi attestazioni di antichi scrittori (1), ma eziandio dalle definizioni, che è forza ammettere avessero corso nella scuola, quando apprendiamo dal citato commentatore che ivi il punto era detto « unità avente posizione » (2), veniva dato alla matematica il nome che oggi porta (3) ed era stata proposta una divisione di questa scienza in aritmetica, musica, geometria ed aritmetica, che fu adottata quasi alla lettera da PLATONE e poi — sotto il nome di *quadrivio* con cui la designò Severino BOEZIO (470 circa-526) — durante tutto il Medio Evo. Quale fosse tal divisione e quali siano state le ragioni che la consigliarono a quei filosofi è dichiarato da PROCLO medesimo in un passo importante (4) che crediamo opportuno di riferire:

---

(1) Esse vennero raccolte da ALLMAN, l. c., p. 22 e seg.

(2) Proclo-Taylor, T. I, p. 121. Benchè questa definizione sia stata abbandonata dai moderni, non si può non ravvisare in essa qualche pregio: chè essa fa apparire il punto come un ente avente un esistenza propria, non composto di parti e dotato dell'unica proprietà di occupare una certa posizione; e non sono queste le proprietà del punto che s'invocano ordinariamente in geometria?

(3) L. c., T. I, p. 81.

(4) L. c., T. I, p. 74.

I Pitagorici, quindi, pensavano che tutta la scienza matematica dovesse venir divisa in quattro parti, attribuendo una di queste parti al *quanti?* (τὸ πόσον) e un altra al *quanto?* (τό πηλίκον) ed assegnando poi a ciascuna di queste parti a sua volta due parti. Perchè essi dicevano che la quantità discreta, ovvero il *quanti?*, può essere considerata o in sè stessa oppure in relazione con qualche altra: ma che la quantità continua, o il *quanto?*, è o stabile o in movimento. Quindi affermavano che l'*aritmetica* contempla la quantità discreta in quanto esiste in sè, mentre la *musica* quella che è in relazione con altra; e che la *geometria* considera la quantità continua in quanto è stabile: ma l'*astronomia* (ἡ σφαιρική) contempla la quantità in quanto è di natura sua mobile.

20. - Oltre a queste notizie, le quali bastano a dimostrare come nella scuola di Crotone la matematica venisse considerata nel suo insieme, da un punto di vista elevato ed ivi fossero state ravvisate le analogie e le differenze fra le discipline che la compongono, altre PROCLO ci trasmise; dalle quali si trae la conferma di quanto già accennammo, dell'avere cioè PITAGORA introdotto quella scienza nel suo sistema filosofico, di essersene inoltre servito per chiarire le sue idee cosmologiche e perfino per esprimere sotto forma precisa i suoi concetti teologici. Così il commentatore precitato afferma che i Pitagorici scopersero certe analogie fra punto ed unità, fra linea e diade, fra superficie e triade (1), che essi ascrissero le tre specie di angoli rettilinei (acuti, retti, ottusi) e varie specie di divinità (2), che affermavano essere il triangolo il principio della generazione (3) e che trovarono essere la figura quadrilatera quella che meglio conveniva a porgere un'imagine dell'essenza divina (4). Tali fantastici ravvicinamenti sembrano oggi, e sono in gran parte, sogni di menti ammalate, nè certo meritano pel loro intrinseco valore un posto nella storia della scienza (5); se, ciò non ostante, abbiamo creduto di farne qui un rapido

(1) L. c., T. II, p. 123 e 136.
(2) L. c., T. I, p. 148.
(3) L. c., T. I, p. 174.
(4) L. c., T. I, p. 178.
(5) Il recente volume di H. A. NABER, *Das Theorem des Pythagoras, wiederhergestellt in seinen ursprünglichen Form und betrachtet als Grundlage der ganzen Pythagorischen Philosophie*, Haarlem, 1908, sta a provare che, a distanza di venticinque se-

cenno, gli è che pensiamo che essi, in un'epoca in cui la scienza era ancora in fasce e non era comune l'abito della ricerca scientifica, avranno valso a dirigere lo sguardo delle persone intelligenti verso un campo di ricerche dianzi poco coltivato e a fare giudicare più gustosi i frutti che si potrebbero cavare dalla coltura di esso, dal momento che questi si collegavano a questioni così vitali che furono già, tuttora sono e saranno in ogni tempo quelle che destano nelle masse intelligenti il più vivo interesse.

21. - Riassunte così le notizie concernenti nelle sue linee generali la matematica pitagorica, dopo avere aggiunto che si fa risalire a PITAGORA il concetto geometrico di spazio (come ente continuo ed illimitato (1)), cominceremo l'enumerazione delle ricerche compiute nella Scuola italica, con l'occuparci della teoria delle proporzioni (2).

Questa teoria, nella matematica greca, funge da anello di congiunzione fra l'Aritmetica e la Geometria; se i teoremi che la costituiscono appartengono senza dubbio alla scienza del numero, il metodo con cui sono dimostrati (fondato sulla rappresentazione dei numeri mediante linee e dei loro prodotti mediante rettangoli) e le continue applicazioni che ricevono a questioni geometriche, vietano che si rimandi all'ultimo Libro della presente opera l'indicazione delle sue origini e dei suoi primi stadi di sviluppo. Ora gli è appunto nella scuola di PITAGORA che se ne avvertono le prime traccie. Infatti, un aritmetico di cui ci occuperemo nel V Libro, NICOMACO da Gerasa, attesta che PITAGORA conosceva le tre proporzioni, aritmetica, geometrica e armonica; d'altronde GIAMBLICO accerta che nella sua Scuola si consideravano tre medie: l'aritmetica, la geometrica e quella allora chiamata ὑπεναντία e designata più tardi da ARCHITA e IPPASO col nome di armonica, ed aggiunge che PITAGORA trasportò da Babilonia in Grecia la proposizione più perfetta:

$$a : \frac{a+b}{2} : : \frac{2\,ab}{a+b} : b\,;$$

---

coli, si avverte ancora potente quel fascino che PITAGORA sapeva esercitare sopra le persone con cui veniva a contatto.

(1) P. TANNERY a p. 621 dell'*Histoire* citata.

(2) Sembra che in origine la proporzione geometrica fosse chiamata ἀναλογία e le altre proporzioni μεσότητες; ma poi

mentre finalmente da altra fonte ricaviamo che ai discepoli di PITAGORA siamo debitori delle progressioni aritmetiche.

Riguardo all'origine delle tre proporzioni, si osservi che il confronto fra due numeri può farsi o per differenza o per quoziente: da ciò nascono i concetti di rapporto aritmetico e di rapporto geometrico; considerando poi due coppie di numeri aventi il medesimo rapporto aritmetico o geometrico, tosto si arriva all'idea di proporzione aritmetica o geometrica. Notando finalmente, che se a, b, c sono tre numeri in proporzione aritmetica o geometrica, si ha:

$$a - b : b - c :: a : a$$

o

$$a - b : b - c :: a : b,$$

nasce l'idea di considerarne tre numeri tali che sia:

$$a - b : b - c :: a : c$$

e si giunge così alla proporzione armonica. Tale ipotesi sull'origine di questa terza proporzione (1) trova un appoggio nel fatto che ad alcuni matematici posteriori, di cui dovremo ben presto occuparci - IPPASO, ARCHITA e forse EUDOSSO (2) - vengono attribuite alle tre proporzioni le quali sono definite dalle relazioni:

$$b - c : a - b :: a : c$$
$$b - c : a - b :: b : c$$
$$b - c : a - b :: a : b$$

di forma analoga alle precedenti.

Finalmente sulla vastità delle nozioni possedute dai Pitagorici intorno alle proporzioni non si hanno notizie sicure, ma è assai verosimile che essi ne conoscessero le proprietà soltanto per numeri interi e che il Libro VII degli *Elementi*

---

questa distinzione non fa rigorosamente conservata. Cfr. NESSELMANN, *Die Algebra der Griechen*. Berlin. 1843, p. 212 nota.

(1) ALLMAN, l. c., p. 45.

(2) È probabile, come pensa BRETSCHNEIDER (l. c., p. 164), che il nome di EUDOSSO si trovi qui per avere egli diffuso nella Grecia la conoscenza delle tre proporzioni insegnategli dal suo maestro ARCHITA.

di *Euclide* sia la riproduzione della teoria delle proporzioni quale aveva corso nella scuola di Cotrone (1).

23. - PROCLO, dopo il commento alla proporzione (2) « due linee rette che si tagliano formano quattro angoli eguali a due retti », osserva (3):

> Il presente corollario, benchè c'insegni che lo spazio attorno ad un punto è distribuito in angoli eguali a quattro retti, è subordinato a quel mirabile teorema secondo cui soltanto i tre poligoni seguenti possono riempire lo spazio attorno ad un punto, cioè il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare. Però il triangolo equilatero dev'essere preso sei volte; perchè sei volte due terzi fa quattro angoli retti. E l'esagono deve essere preso tre volte; perchè l'angolo di qualsia esagono è un retto ed un terzo di retto. E il quadrato deve essere preso quattro volte: perchè l'angolo di qualunque quadrato è retto. In conseguenza, sei triangoli equilateri riuniti per gli angoli formano quattro retti, e così tre esagoni e quattro quadrati. Ma tutti gli altri poligoni, per quanto siano complicati riguardo agli angoli, sono deficienti di quattro retti o eccedenti, e quelli soltanto, presi gli anzidetti numeri di volte, dànno quattro retti. E questo teorema è pitagorico.

Ecco dunque una proposizione di geometria attribuita a Pitagorici; ma per misurare il valore di questa notizia conviene rammentare che, come già osservammo, EUDEMO, da cui per fermo PROCLO tolse questa notizia, non era in grado di distinguere l'elemento esotico esistente nelle verità matematiche possedute dai suoi connazionali; per ciò non si può escludere che quella proposizione fosse ignota agli Egiziani, anzi il genere delle cognizioni geometriche che questi avevano fa inclinare verso l'opinione opposta (4); tutt'al più si può ragionevolmente congetturare che, mentre gli Egiziani avevano riconosciuto sperimentalmente il fatto

---

(1) Cfr. HANKEL, l. c., p. 390 e L. F. OFTERDINGER, *Ueber den Zusammenhang der Euclidischen Lehre von den geometrischen Verhältnissen mit den Anfängen der Exhaustions-Methode* (Jahresheften des Ver. für Math. u. Naturwiss. in Ulm, 1889).

(2) Probabilmente interpolata; v. *Euclidis Opera Omnia*, ed. Heiberg I. Lipsiae, 1883, p. 42.

(3) PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 100-101.

(4) Cfr. BRETSCHNEIDER, l. c., p. 77, ALLMAN, l. c., p. 28.

enunciato da quella proposizione, PITAGORA od i suoi discepoli lo avranno rigorosamente dimostrato.

23. - La questione di dividere il piano in poligoni regolari congruenti, la cui soluzione vedemmo ora ascriversi fra i ritrovati dei Pitagorici, è collegata all'altra scoperta che, come vedemmo, PROCLO attribuisce a PITAGORA, quella cioè della costruzione dei poliedri regolari (1). Ora è da notare che della costruzione del cubo, del tetraedro e dell'ottaedro, difficilmente si potrebbe negare la conoscenza agli Egiziani; sicchè probabilmente PITAGORA si sarà limitato a farla conoscere ai propri compatriotti. Ma un genio inventivo qual era PITAGORA non avrà mancato di domandarsi se essi fossero gli unici poliedri regolari; ed osservando come si cominciasse la costruzione del tetraedro riunendo per un vertice tre e quella dell'ottaedro riunendo quattro triangoli equilateri, abbia tentato di costruirne un nuovo col riunirne cinque ed abbia così, non solo ottenuto un nuovo poliedro regolare, ma sia giunto alla conoscenza del pentagono regolare (come poligono formato dalle basi dei cinque triangoli ausiliarii) e ad una costruzione per tentativi dello stesso. Sei triangoli equilateri riuniti in modo analogo dànno il piano (come PITAGORA sapeva), sicchè questo procedimento non può continuarsi. Si può tentare però di applicarlo partendo dal quadrato; ora tre quadrati congiunti per un vertice conducono al cubo e quattro dànno un piano, onde dal quadrato non si può ottenere nulla di nuovo. Ma, invece, tre pentagoni regolari riuniti al solito modo dànno origine ad un nuovo solido regolare, il dodecaedro, mentre non è possibile riunirne un maggior numero. E poichè, finalmente, tre esagoni riuniti nel modo consueto formano un piano, il metodo di costruzione indicato non è più applicabile e la determinazione dei poligoni regolari convessi è esaurita.

Nessun documento sta a provare che questa sia stata la via battuta da PITAGORA per giungere ai cinque poliedri regolari connessi; anzi, nel 1885 fu scoperto sul Monte Loffa

(1) Proclo li chiama *figure cosmiche* perchè i Pitagorici facevano corrispondere il tetraedro, l'ottaebro, l'icosaedro e il cubo ordinatamente al fuoco, all'aria, all'acqua e alla terra; finalmente il dodecaedro al cosmo.

(Colli Euganei) un dodecaedro regolare di origine etrusca, sulle cui facce stanno incise cifre arabiche, il quale appartiene ad un'epoca la cui esatta determinazione presenterebbe il massimo interesse. Accettando le conclusioni a cui condusse (1), uno studio profondo della questione, esso apparterrebbe alla prima metà del primo millennio a. C.; e siccome la notizia di rapporti fra il filosofo di Samo ed i sacerdoti etruschi è giunto sino a noi attraverso ad una lunga ed ininterrotta tradizione, così il merito di lui dovrebbe ridursi alla scoperta del più facettato dei poliedri regolari.

A conforto di questa tesi stanno i rapporti che egli ebbe (pure secondo una tradizione attendibile) con i Galli ed il fatto che esistono ancora non meno di ventisei oggetti dodecaedrici di origine celtica (2). Si sarebbe, quindi, tentati a ridurre il merito di PITAGORA all'avere completata la serie dei poliedri regolari e trasportatane la considerazione dalla vita sociale nell'ambito della pura geometria; ora non corrisponde ciò forse alla fisonomia che di quello scienziato risulta nel quadro tracciato da PROCLO?

24. - Mentre dalla costruzione dell'icosaedro regolare PITAGORA fu probabilmente indotto a notare l'esistenza del pentagono regolare, per quella del dodecaedro regolare gli era indispensabile conoscere una costruzione di questo poligono esente da tentativi, giacchè questi repugnavano al concetto della geometria che egli aveva; esaminiamo quindi se tale cognizione gli si può attribuire (3). Si osservi a tale scopo che se si congiunge (fig. 4) un vertice di un pentagono regolare *ABCDE* con i due vertici (*C* e *D*) ad esso opposti si ottiene un triangolo isoscele avente gli angoli

---

(1) Veggasi l'importante memoria di F. LINDEMANN, *Zur Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichnen* (Sitzungs bei der K. Bayer. Akad. des Wiss., XXVI Bd., 1896).

(2) Cfr. L. HUGO, *Note sur deux dodecaèdre antiques du Musée da Louvre* (Comptes rendus, T. LXIII, 1873, p. 420-421), nonchè altre comunicazioni dello stesso autore (Id., T. LXVII, 1875, p. 433 e 472 e T. LXXXI, 1879, p. 332) ove son segnalati altri oggetti congeneri esistenti nei Musei di Francia e d'Inghilterra.

(3) S. GÜNTHER, *Bull. di Bibliografia, ecc.*, T. VI, 1873, p. 313-324 e H. HANKEL (p. 95 nota) ne dubitano.

alla base doppi dell'angolo al vertice (1), onde la descrizione del pentagono regolare poggia sulla costruzione di un triangolo di tal fatta (cfr. EUCLIDE, *Elementi*, Lib. IV, prop. 10). Ma se si divide per metà uno (*C*) dagli angoli alla base di que-

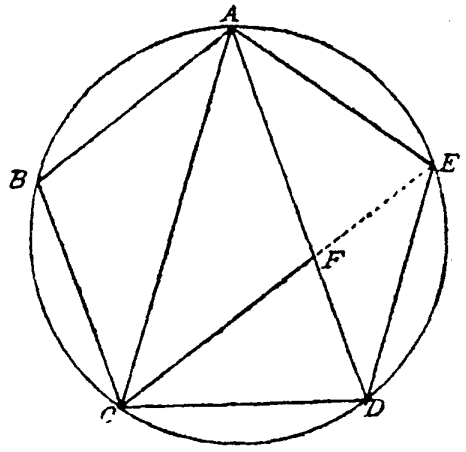


Fig. 4.

sto triangolo, questo risulterà decomposto in due triangoli entrambi isosceli, uno dei quali (*CDF*) è simile all'intero triangolo *ACD*. Sarà quindi:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{DF},$$

ossia (poichè è $CD = CF = AF$, $AC = AD$)

$$AD \times DF = \overline{AF}^2;$$

ne viene che, dato uno (*AD*) dei lati eguali dell'anzidetto triangolo, per trovare la base, basta dividere *AD* in due parti *AF* e *FD* tali che il rettangolo di *AD* per una (*DF*) delle parti eguagli il quadrato dell'altra parte (2) (cfr. EUCLIDE, *Elem.*, Lib. II, prop. 11). Che tale questione non sor-

(1) Questa proprietà è evidente quando siasi delineato il cerchio circoscritto al pentagono.

(2) Il lettore vedrà subito che *AD* è in *F* divisa in media ed estrema ragione, cioè in quel rapporto che nel periodo prepericleo ebbe parte così importante nell'architettura: CANTOR, *Vorles.*, T. I, p. 178.

passasse le forze dei Pittagorici è senz'ambiguità dichiarato da PROCLO, nelle postille alla 44.ª prop. del I Libro di EUCLIDE con le parole seguenti:

Secondo EUDEMO, le invenzioni concernenti l'applicazione (παραβάλλειν), l'eccesso (ὑπερβάλλειν) e il difetto (ἐλλείπειν) delle aree sono antiche e dovute ai Pitagorici. I moderni prendendo a prestito questi nomi li trasferirono alle così dette linee coniche, parabola, iperbola ed ellisse: invece l'antica scuola nella sua nomenclatura relativa alla descrizione delle aree *in plano* su una retta finita prendeva i termini in questo senso. Un'area è detta *applicata* ad una data retta quando una area eguale in superficie ad una cert'area data è descritta su di essa: ma, quando la base dell'area è maggiore della data linea, allora l'area è detta essere *in eccesso;* e quando la base è minore, cosicchè una parte della data linea resta fuori dell'area descritta, allora l'area è detta *in difetto.* EUCLIDE adopera in questo senso nel IV Libro (1) le parole eccesso e difetto (2).

Queste parole di PROCLO non riusciranno per fermo molto chiare per un lettore moderno e l'oscurità in cui sono ravvolte non può venir dissipata ricorrendo agli *Elementi* di EUCLIDE; siccome, d'altronde, esse toccano un argomento di capitale importanza per l'intelligenza delle opere greche, così crediamo dover nostro corredarle del seguente commento (3).

Il problema dell'*applicazione semplice*, ridotto alla sua più semplice espressione, consiste nel costruire un rettangolo di area conosciuta ed avente per lato un dato segmento. Secondo EUCLIDE (Lib. 1, prop. 44) lo si risolve mediante il *teorema del gnomone* (4) come segue: Sia (fig. 5)

---

(1). V. prop. 27 e seg.

(2) PROCLO-TAYLOR, II, p. 198.

(3) Cfr.: E. F. AUGUST, *Zur Kentniss der geometrischen Methode der Alten.* Berlino, 1843 e più diffusamente P. TANNERY, *De la solution géométrique des problèmes du second degrè avant Euclide* (*Mém. de la Soc. de Bordeaux,* 2.e Série, T. IV, 1881, p. 396-416) e ZEUTHEN, *Die Lehre der Kegelschnitte im Alterthum.* Kopenhagen, 1886, p. 27-31.

(4) Γνώμων significa:

1) In senso astratto: criterio o norma su cui regolarsi.

2) In senso concreto: *squadra* (strumento per verificare se un angolo dato è retto) donde il nome antico di gnomone dato alla perpendicolare.

3) In senso geometrico: la figura che resta sopprimendo

AB il lato dato; l'area data si trasformi in un rettangolo $BCDE$ avente il lato BC sul prolungamento di AB; si compia il rettangolo $ABEF$ avente per lati AB e BE, e poi il rettangolo $DFGK$ avente per un suo lato FD e una sua diagonale stesa lungo FB. Se il quarto lato GK di questo rettangolo è incontrato da EB in H, $ABHG$ sarà il rettangolo cercato.

Il problema dell'*applicazione in eccesso*, pure ridotto alla

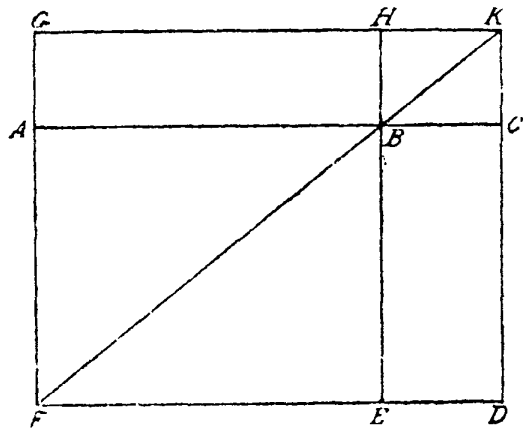


Fig. 5.

sua forma più semplice, consiste nel costruire su una data retta AB prolungata (fig. 6) un rettangolo $AXYZ$ di data area e tale che la differenza fra esso ed il rettangolo di eguale altezza avente per base AB sia un quadrato. Se dunque b^2 è la data area ed a la lunghezza di AB, il problema proposto equivale alla ricerca dell'altezza x del rettangolo da costruirsi, x dovendo soddisfare l' equazione $ax + x^2 = b^2$. Seguendo EUCLIDE esso si scioglie in sostanza

---

da un parallelogrammo il parallelogrammo nascente dal condurre da un punto di una diagonale le parallele ai lati: donde la ragione del nome di *teorema del gnomone* da molti dato alla prop. 43 del Libro I di EUCLIDE (cfr. ALLMAN, *On the name of the so-called "theorem of gnomon"*, Bibl. mathematica, 1887, p. 22), proposizione di cui non conosciamo lo scopritore.

4) In aritmetica: la differenza finita d'una funzione intera di una variabile suscettibile soltanto di valori interi corrispondente ad un aumento eguale ad 1 di tale variabile.

5) Nella gnomonica: lo stilo della meridiana, strumento di cui ANASSIMANDRO insegnò l'uso ai Greci.

nel modo che l'algebra suggerisce per risolvere questa equazione ; infatti, se si aggiunge $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ ai due membri di quell'equazione, si ottiene $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, la quale dà subito $x + \frac{a}{2}$ e quindi x ; traducendo in costruzioni geometriche queste operazioni, si ottiene la fig. 6, che è quella adoperata da EUCLIDE per dimostrare il teorema 6° del II Libro. — Importa osservare che il problema dell'applicazione in eccesso equivale alla ricerca di un rettangolo di cui si conosca l'area e la differenza dei lati ; assumendo come incognita principale il lato minore del rettangolo, esso equivale alla risoluzione dell'equazione precedente; ma, se invece si prende per incognita principale il lato maggiore, esso mena all'equazione $x^2 - ax = b^2$, la cui soluzione è, quindi, implicitamente insegnata dall'applicazione in eccesso.

Da ultimo il problema dell'*applicazione in difetto*, esso pure enunciato nella maniera più semplice, consiste nel costruire su una porzione di una data retta AB (fig. 7) un rettangolo $AXYZ$ di data superficie e tale che la differenza fra

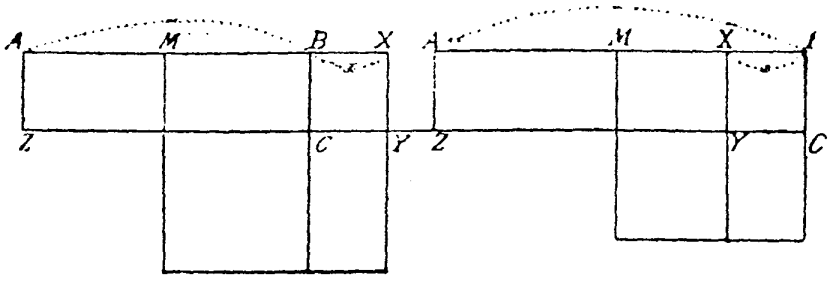


Fig. 6.

Fig. 7.

esso e il rettangolo di eguale altezza e di base AB sia un quadrato. Riguardo al quale noteremo la sua equivalenza con la risoluzione dell'equazione quadratica $ax - x^2 = b^2$; EUCLIDE lo scioglie in modo non sostanzialmente diverso dal nostro: infatti togliendo i due membri di quest'equazione da $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ si ottiene $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2$, da cui traesi la differenza fra x e $\frac{a}{2}$ e quindi x stessa; traducendo in

costruzioni geometriche queste operazioni si ottiene la fig. 7, la quale è quella che serve ad EUCLIDE nella prop. 5ª del II Libro degli *Elementi* (1).

Da ciò emerge che i tre problemi delle applicazioni, nelle ipotesi dianzi indicate, sono sufficienti a risolvere geometricamente ogni equazione di 2° grado della forma:

$$x^2 + px + q = 0\,, \tag{1}$$

in tutti i (tre) casi in cui essa ha radici reali; mentre se l'equazione ha la forma più generale:

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \tag{2}$$

fa mestieri invocare il VI Libro degli *Elementi* (2).

Ma intanto da quanto precede risulta che (ritornando ora al problema della costruzione del pentagono da cui per questa lunga digressione ci dipartimmo) facendo $AD = l$ e $DF = x$, la condizione a cui deve soddisfare x traducesi nell'equazione $3lx - x^2 = l^2$, la quale, essendo della forma $ax - x^2 = b^2$, può risolversi con una applicazione in difetto: tale operazione è dunque sufficiente per costruire un pentagono regolare.

25. - Assodato questo punto, si osservi che, nel raziocinio esposto in principio del n. prec., si supposero implicitamente due cose.

La prima è che PITAGORA conoscesse abbastanza il metodo di analisi geometrica per potere compiere le successive riduzioni del problema che abbiamo indicate. Orbene, quan-

---

(1) Si noti anche come un documento recentemente pubblicato porti ad attribuire a PITAGORA anche la scoperta della prop. 10 dello stesso libro (v. F. HULTSCH. *Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonale von Quadranten und ihre Umbildung zu einen Doppelreihen ganzen Zahlen.* Bibl. mathem., 3ª Ser., T. I, 1900).

(2) Si avverta che la distinzione delle equazioni (1) dalle (2) si è conservata a lungo nella scienza: essa ritrovasi ancora in LUCA PACIUOLO (XV sec.), il quale enunciò in versi le regole di risoluzione delle equazioni (1) nei tre casi dianzi indicati

$$ax = x^2 = b^2\,,\ x^2 - ax = b^2\,,$$

regole ottenute da lui appunto con metodo geometrico. Cfr. KÄSTNER, *Geschichte der Mathematik*, T, I. Göttingen, p. 70-71.

tunque quel metodo venga da molti attribuito a PLATONE (v. n. 57), pure noi non esitiamo a considerarlo assai più antico, antico anzi quanto la ricerca geometrica, come quello che è il più naturale e spontaneo, specialmente quando venga invocato per risolvere i problemi ; riteniamo, pertanto, che il filosofo Ateniese non l'avrà, tutt'al più, che enunciato sotto forma generale capace di comprendere i vari modi in cui egli l'aveva visto atteggiato negli studi geometrici anteriori (1). Aggiungiamo che l'applicazione di tal metodo che noi attribuiamo a PITAGORA è verosimile per le seguenti ragioni : 1.° le costruzioni ausiliarie (fig. 4 a p. 41) (condurre le rette AC e AD e la AF che non differisce dalla diagonale AE) si dovevano presentare spontaneamente a chi aveva famigliarità col pentagono stellato (πένταλφα), segno di riconoscimento dei Pitagorici, dai quali era riguardato come *salute* (ὑγίεια); 2.° la decomposizione dei poligoni regolari in triangoli era cosa usitatissima fra i Greci (2); 3.° il triangolo isoscele speciale che interviene nella soluzione precedente è soggetto di studio speciale da parte di EUCLIDE (*Elem.*, Lib. IV, prop. 10).

La seconda osservazione da farsi sull'argomentazione attribuita a Pitagora, è che essa suppone nota la proporzionalità dei lati omologhi di due triangoli equiangoli. Ora, noi non esitiamo ad ammettere nei Pitagorici la conoscenza delle prime proposizioni concernenti la teoria della similitudine, in particolare di quella citata che è fra le primissime. Siamo indotti a ciò dalle cognizioni che essi avevano sulle proporzioni, dalla somma delle cognizioni geometriche possedute da IPPOCRATE da Chio (v. Cap. V), che di poco è posteriore a Pitagora, e più di tutto dalla testimonianza di PLUTARCO, secondo il quale i Pitagorici avrebbero offerto un sagrifizio agli Dei per la gioia di avere trovato il modo di costruire una figura simile ad una seconda ed eguale (in superficie) ad una terza.

---

(1) Cfr. ALLMAN, l. c., p. 41 nota.

(2) Così PLATONE nel *Timeo*, trattando della generazione dei triangoli equilateri e dei quadrati, dice che queste figure risultano sempre da triangoli rettangoli, e precisamente o da triangoli isosceli o da triangoli aventi un angolo acuto doppio dell'altro.

26. - Un'altra notizia che abbiamo sulla geometria pitagorica è così completa da non lasciare nulla a desiderare; è la seguente:

Il Peripatetico EUDEMO ascrive ai Pitagorici la scoperta di questo teorema, che gli angoli interni d'un triangolo sono eguali a due retti, ed asserisce che essi dimostravano questo teorema come segue: Sia (fig. 8) ABΓ un triangolo; per A si conduce ΔE parallela a BΓ. Ora siccome BΓ e ΔE sono parallele così gli angoli alterni interni sono fra loro eguali; ΔAB eguale a ABΓ e EAΓ a AΓB. Si aggiunga l'angolo comune BAΓ. Saranno allora gli angoli ΔAB, BAΓ, ΓAE, cioè ΔAB e BAE, cioè due retti. eguali ai tre angoli del triangolo. I tre angoli di qualunque triangolo sono dunque eguali a due retti. Questo modo di dimostrazione appartiene ai Pitagorici (1).

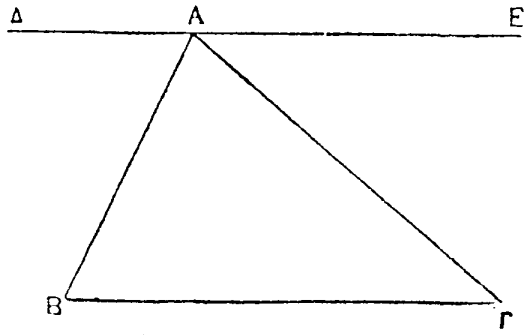


Fig. 8.

Una sola cosa bisogna notare a questo proposito, ed è che i Pitagorici ai quali si deve la scoperta del teorema non sono per fermo gli stessi che inventarono questo ragionamento, chè altrimenti non si saprebbe comprendere come EUTOCIO, in un passo del commento al I Libro delle *Coniche* di APOLLONIO, dica (2):

Similmente gli antichi dimostrarono il teorema dei due retti a parte per ogni specie di triangolo, prima per l'equilatero, poi per l'isoscele, e finalmente per lo scaleno, mentre quelli che vennero dopo dimostrarono il teorema generale: *i tre angoli interni di ogni triangolo sono eguali a due retti.*

---

(1) PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 164.
(2) *Apollonio*, ed. HEIBERG, II vol. Lipsiae, 1893, p. 170.

27. - Un'altra scoperta sarebbe stata fatta da PITAGORA, al dire di PROCLO; questi, infatti, comincia la chiosa al teorema del quadrato dell'ipotenusa, con le parole:

Se ricorriamo agli storici dell'antichità (EUDEMO) troveremo che essi attribuiscono questo teorema a PITAGORA e asseriscono avere egli sagrificato un bue per tale invenzione (1).

Egli poi continua così:

Per parte mia, ammiro coloro che per primi scopersero la verità di questo teorema: ma sento maggiore ammirazione per l'istitutore elementare (EUCLIDE), che, non soltanto ne ha stabilita la verità con dimostrazioni evidenti, ma parimente ci convince nel suo VI Libro (2), mediante argomentazioni scientifiche che non possono venir confutate, di un teorema più generale di questo.

E queste parole, se da una parte dànno una notizia sicura — quella cioè dell'originalità della dimostrazione esposta da EUCLIDE pel teorema di PITAGORA — ci sottopongono la questione di divinare i metodi di scoperta e di dimostrazione adoperati dal filosofo di Samo. Riguardo alla prima questione, sembra che concordemente si ammetta essere PITAGORA arrivato al suo teorema generalizzando una proprietà del triangolo avente lati di lunghezza 3, 4, 5 (3), triangolo che sembra essere stato conosciuto dai popoli che precor-

---

(1) Riguardo a tale sagrificio, v. A. J. H. VINCENT, *Lettre sur le théorème de Phytagore* (Nouvelles Annales de Mathématiques, T. XI, 1852).

(2) Prop. 31.

(3) Quest'opinione fu espressa per la prima volta, se non erriamo, dal CLAVIO, *Euclides Elementorum libri XV*. Francofurti, 1607: indipendentemente da lui nel 1833 da F. WURM, nel 1863 da M. CANTOR, *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*, Halle, 1863, p. 105-110, nel 1874 da H. HANKEL (l. c., p. 98) e nel 1876 da S. GÜNTHER, *Lo sviluppo storico della teoria dei poligoni stellati nell'antichità e nel medio evo*. Bull. di Bibl., ecc., T. VI, 1873, p. 319. Non dissimili da questa sembrano essere le opinioni dell'OFTERDINGER, *Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik*. Ulm, 1860, p. 6 e dello ZEUTHEN, op. cit., p. 26 e *Théoréme de Pythagore, origiue de la géométrie scientiphique* nei Comptes-rendus du II Congrès intern. de philos., 1904.

sero i Greci sulla via della civiltà (1). All'opposto sulla seconda gli avvisi sono discordi. Secondo noi nulla prova falsa l'ipotesi secondo cui PITAGORA avrebbe dimostrato il suo teorema col mezzo di triangoli simili (calando la perpendicolare dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa); essa non lo è dal fatto che quel teorema è posto da EUCLIDE molto prima della teoria della similitudine, mentre è confermata dallo sviluppo che ammettemmo (v. p. 46) avere ricevuto tale teoria nella scuola di Crotone. Però altri (2), che pensava diversamente, suggerì come dimostrazione originale quella ben nota (3) che ha la sua essenza nell'osservare l'eguaglianza degli spazi non tratteggiati nelle fig. 9 e 10. Vero è che a questa congettura venne mossa l'obbiezione (4) che la dimostrazione in-

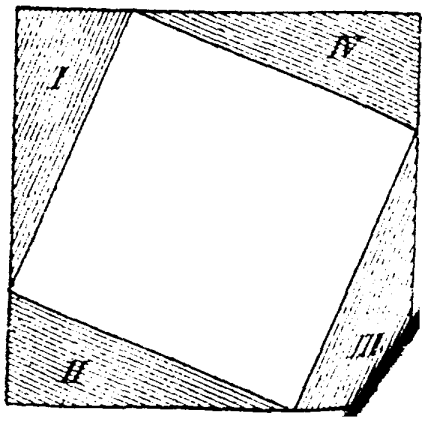


Fig. 9.

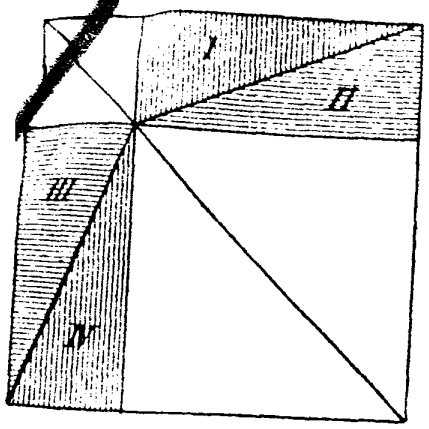


Fig. 10.

dicata ha un carattere troppo indiano; ma essa non ci sembra avere valore decisivo, perchè chi assicura che quelle doti che noi diamo caratteristiche della geometria greca,

(1) Quanto gli Egiziani e i Cinesi. Quanto a questi ultimi (cfr. BUPP. 65-66), mi sia lecito osservare che questa coincidenza (cfr. WOLF, op. cit., p. 7), potrebbero essere invocati (da V. p. 55) che le dottrine pitagoriche siano di origine cinese.

(2) BRETSCHNEIDER, l. c., p. 81.

(3) Ma di autore incerto.

(4) HANKEL, l. c., p. 98.

dopo che le abbiamo riscontrate nelle opere del periodo greco alessandrino, fossero da essa possedute sino dall'origine, cioè sino dal momento in cui i geometri greci percorrevano una strada che era stata loro additata da' popoli con cui nei loro viaggi erano venuti a contatto?... Altre e non meno ingegnose supposizioni vennero fatte per rispondere all'anzidetta questione (1), ma nessuna ci sembra degna di raccogliere l'approvazione universale (2); crediamo anzi che una tale soluzione ideale sia impossibile, nella deficienza in cui ci troviamo di dati capaci di completare le notizie di PROCLO.

28. - Alla scoperta della proprietà specifica del triangolo rettangolo (3) è probabilmente collegata quella delle quantità irrazionali, della quale PROCLO (EUDEMO) fa merito a PITAGORA in un passo che abbiamo citato (pag. 9) (4). Tale scoperta ha un cosi straordinario valore teorico, tanto grande dev'essere stato lo stupore che destò in chi la fece ed in coloro che per primi la conobbero, che naturalmente sorge il desiderio di avere qualche particolare sul modo in cui venne compiuta. Ma tale desiderio non può oggi soddisfarsi; nemmeno gli *Elementi* di EUCLIDE gettano qualche luce intorno al modo con cui dagli antichi venivano considerate tali quantità, chè il grande maestro dà di esse dei caratteri negativi, cioè afferma o dimostra l'inesistenza in esse di certe qualità possedute dai numeri, il che è tanto più da deplorarsi inquantochè le difficoltà che la teoria di esse presenta sono tali che anche ai nostri giorni le vediamo spesso dare origine ad importanti dibattiti.

---

(1) Fra le più cospicue cito quella che si legge nel lavoro di P. TREUTLEIN, *Ein Beitrag zur Geschichte der griechischen Geometrie* (Zeitschrift f. Matb. u. Phys, 1883. *Hist. lit. Abth.*, p. 209-226), e quelle esposte da A. MARRE nell'articolo intitolato *Thèorème du carré de l'hypothénuse* (Bull. di Bibl., ecc., T. XX, 1887, p. 404-406).

(2) La dimostrazione originale doveva a nostro credere essere divisa in varie parti, applicabili ciascuna ad una specie di triangoli: cfr. l'ultimo periodo del seguente n. 27.

(3) Oppure alla divisione di una retta in media ed estrema ragione come vuole l'ALLMAN, l. c., p. 42?

(4) La medesima attribuzione si legge in un ms. arabo di cui parleremo nel Libro II (n. 20).

Un semplice relitto delle indagini dei Pitagorici sopra la teoria degli irrazionali è la dimostrazione dell'incommensurabilità della diagonale al lato di qualunque quadrato, cioè la dimostrazione della irrazionalità di $\sqrt{2}$, riferita da ARISTOTELE nell'*Anal. prior.* (1), la quale consiste nel dimostrare assurda l'ipotesi della commensurabilità come equivalente all'ammettere che un numero possa essere ad un tempo pari e dispari. Altrettanto si deve probabilmente (2) dire della proposizione che afferma essere irrazionali i numeri $\sqrt{3}, \sqrt{5}, .., \sqrt{17}$, che PLATONE sembra ritenesse proprietà del maestro suo TEODORO DA CIRENE, dal momento che egli (nel *Teeteto*) presentò questi nell'atto di insegnarla ai propri discepoli (3). Ammessa l'esattezza di tale notizia, è presumibile che l'irrazionalità anzidetta venisse stabilita dagli antichi con un ragionamento analogo a quello usato per dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt{2}$, cioè all'incirca nel seguente modo:

Sia N uno qualunque dei numeri 3, 5,... e si supponga $\sqrt{N} = \frac{m}{n}$, ove m, n sono numeri interi fra loro primi; sarà quindi $m^2 = N \,.\, n^2$. Tale relazione mostra che m^2 è divisibile per N; perciò m sarà multiplo di N. Sia ad es.:

$$m = \mu \,.\, N \tag{1}$$

Per conseguenza la relazione precedente diviene $n^2 = N \,.\, \mu^2$ e questa prova che n è multiplo di N. Sia ad es.:

$$m = \nu \,.\, N. \tag{2}$$

Ora la coesistenza delle relazioni (1) e (2) è assurda, perchè per ipotesi m e n non hanno alcun fattore comune; as-

(1) Si trova anche in un scolio anonimo al libro degli *Elementi di Euclide* (*Euclidis Opera* ed. HEIBERG, T. III, p. 408).

(2) ALLMAN, op. c., p. 213-14.

(3) " Le radici quadrate ci vennero illustrate da Teodoro mediante disegni (geometrici), dimostrando egli che i lati dei quadrati contenenti 3 e 5 piedi quadrati sono incommensurabili con la lunghezza di un piede. Inoltre egli si propose il medesimo problema per ciascuno dei quadrati seguenti, sino a quelle contenente 17 piedi, al di là del quale però egli non si è spinto ". Vedi *Dialoghi di Platone* tradotti da R. BONGHI, T. VI, 1891, p. 30-31.

surdo è dunque che N sia un numero intero e frazionario, dunque è irrazionale (1).

È necessario ora avvertire, che col raffinarsi ed afforzarsi degli strumenti di analisi filologica e di critica delle fonti e col diffondersi del loro uso, anche l'origine delle dottrine pitagoriche venne sottoposta a nuove investigazioni (2), le quali condussero di recente taluni (3) a conseguenze che, ove venissero generalmente accolte, necessiterebbero radicali modificazioni alle vedute sinora generalmente accettate, in particolare diminuirebbero la considerazione di cui gode il filosofo di Samo. Giacchè, in conformità di esse, si dovrebbe negare a PITAGORA la conoscenza del *concetto* d'irrazionale e si dovrebbe trasportare all'epoca di TEODORO DA CIRENE (450 a. C.) la fondazione della relativa teoria; se poi, come viene suggerito, si leggesse nel *Catalogo di geometri* redatto da PROCLO (v. n. 3) ἀναλόγων invece di ἀλόγων, si sarebbe indotti a cancellare un numero importante (scoperta degli irrazionali) dall'elenco dei ritrovati pitagorici, perchè allora ivi non si ritroverebbe che una conferma del fatto che nella scuola di Crotone furone studiate le proporzioni. Va esplicitamente notato che a favore di tale cambiamento, fecondo di così radicali mutamenti, milita soltanto una variante alla comune lezione suggerita da uno degli editori di EUCLIDE (l'AUGUST), onde prudenza consiglia di adottare a tale riguardo il contegno di aspettativa, di cui un autore recente ci dà l'esempio (4). Tale attitudine non venne assunta da un posteriore investigatore delle fasi di sviluppo delle dottrine

---

(1) Osservazioni e commenti al citato passo sono dovuti a F. FRIEDLEIN, *Zu Platon's Theatetos.* (Neues Jahrb. f. Phil. u. Pedag., T. CVII, 1873) e F. HULTSCH. *Nährungswerthe irrationaler Quadratwurzel bei Archimede,* in Götting. Nachr., 1893 e *Die ägyptische Theilungsrechnung,* I Abh., in Abh. der K. sächs. Ges. der Wiss., T, XVIII, 1895.

(2) Gli inizi di questo movimento si possono fare risalire ad un mezzo secolo fa, e furono determinati da E. ZELLER, tosto seguito da una falange di filosofi e filologi.

(3) Per ciò che segue vedi la pregevole memoria di G. JUNGE, *Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?* (Novae Symbolae Joachimae, Halle a. S., 1907).

(4) Th. L. HEATH, *The thirtheen Books of Euclids Elements,* T. I. Cambridge, 1908, p, 351.

pitagoriche (1), il quale giunse alla scoraggiante conclusione che intorno alle cognizioni geometriche di PITAGORA non possediamo alcuna notizia sicura; che, però, quanto sappiamo intorno all'evoluzione della geometria greca ci autorizza ad affermare che certe scoperte (quali la teoria degli irrazionali, la costruzione dei poliedri regolari, la costruzione di una figura simile ad una seconda ed equivalente ad una terza) non possono essere state fatte da PITAGORA. Precisando ancor più tali proposizioni (2) si giunse a sostenere che gli ultimi Pitagorici riconobbero, come fatto isolato, prima del 419 a. C., l'incommensurabilità della diagonale e del lato di un quadrato, che TEODORO DA CIRENE, circa nel ventennio 410-390, si pose il problema dell'inversione dell'elevazione a quadrato, generalizzando l'argomentazione applicata dianzi a $\sqrt{2}$; la teoria generale degli irrazionali quadratici sarebbe stata fondata, come vedremo (n. 64) da TEETETO (circa negli anni 390-370) e posta sotto forma definitiva, da EUCLIDE, con l'aggiunta dell'analoga degli irrazionali biquadratici (v. Lib. II, n. 19). Ma poichè tali conclusioni furono ottenute adoperando soltanto considerazioni d'ordine filologico, venne a ragione osservata la necessità di usare anche argomenti di natura storica, i quali le modificano sostanzialmente (3); d'altronde anche le ragioni desunte dallo studio microscopico degli antichi testi, contengono assunzioni non dotate d'inoppugnabile valore, onde non tutti le considerarono per convincenti (4). Ci sembra pertanto che non sia ancora giunto il momento per abbattere il piedestallo su cui i matematici concordemente collocarono PITAGORA e per dare un assetto completamente nuovo al concetto che generalmente si aveva intorno alle prime fasi di sviluppo della geometria greca.

---

(1) H. VOGT, *Die Geometrie des Pythagoras* (Bibliotheca mathem., 3 Ser., T. VII, 1908).

(2) H. VOGT, *Die Entdeckungsgeschichte der Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrunderts*, Id. T. X, 1909)

(3) H. G. ZEUTHEN, *Sur la constitution des Livres arithmétiques des Eléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité* (Bull. de l'Ac. de Danemarque, 1910).

(4) T. L. HEATH, *Osservazioni storiche sopra la teoria degli irrazionali* (Bollettino di bibliogr. e storia, ecc., T. XIII, 1911). Ad esse replicò il VOGT, nel T. XIV, 1912, dello stesso periodico.

29. - Esaurita così l'enumerazione delle cognizioni matematiche che a ragione sono generalmente attribuite ai Pitagorici, fa d'uopo citare rapidamente quelle che vennero loro attribuite a torto (1). Osserveremo pertanto, in primo luogo, che, interpretando nel senso moderno la parola usata dagli antichi per indicare l'applicazione delle aree, vi fu chi volle che essi conoscessero le sezioni coniche e in particolare la quadratura della parabola (2). Ed in secondo luogo che DIOGENE LAERZIO dice essere opinione dei Pitagorici che fra le figure solide la sfera sia « la più perfetta » e fra le piane il circolo; evidentemente tale convinzione era fondata sulla regolarità che essi trovarono nella sfera e nel circolo, sia per la loro uniforme curvatura, sia per essere i loro punti equidistanti dal centro; il MONTUCLA (3) invece fraintese le parole del LAERZIO, e credette che PITAGORA avesse inaugurata la teoria degli isoperimetri, col dimostrare che di tutte le figure piane di egual perimetro il cerchio ha la superficie massima e di tutte le figure solide di egual superficie la sfera ha il volume massimo; e l'imponente autorità dello storico francese fece condividere senza discussione da molti questa credenza (4), la quale oggidì non dovrebbe più trovare sostenitori (5).

30. - Prima di abbandonare la Scuola italica ci sia lecito invitare il lettore a volgere assieme a noi uno sguardo al-

---

(1) Non a torto, ma in modo così impreciso da riuscire insignificante, ad un Pitagorico (certo SESTO) viene attribuito qualche contributo al problema della quadratura del circolo; ma la relativa testimonianza, che risale al VI sec. dell'E. v. (vedi Libro V, n. 33), non è tale da dissipare ogni dubbio sopra la fede da prestarsi; v. P. TANNERY, *Pour l'histoire des lignes et des surfaces combes dans l'antiquiié* (Bulletin des sc. math. et astron., II Ser., T. VIII, 1884).

(2) Cfr. FINGER, l. c., p. 32, BRETSCHNEIDER, p. 79 nota e ALLMAN, p. 25 nota 27.

(3) T. I, p. 113.

(4) Ad es. DILLING, l. c., p. 10; CHASLES, *Aperçu historique*, 2e ed., 1875, p. 4 e 5; ANTON, *Geschichte des isoperimetrischen Problems.* Dresden, 1988, p. 6 e 8.

(5) Già il FINGER aveva dubitato dell'interpretazione data dal MONTUCLA alle parole di DIOGENE LAERZIO, l. c., p. 32; ma il BRETSCHNEIDER per primo la mostrò errata, l. c., p. 89-91.

l'indietro per determinare con precisione il posto che ad essa è dovuto nella storia della geometria.

Il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo e i problemi delle *applicazioni* bastano a dimostrare quanto i Pitagorici fossero famigliari con le principali proprietà degli angoli e delle linee parallele, dei triangoli e dei parallelogrammi; famigliarità la quale riceve nuove conferme dal teorema che di PITAGORA reca il nome e dalla decomposizione a lui nota di un piano in poligoni regolari. La costruzione dei poliedri regolari prova ad evidenza, tanto la facoltà che possedevano d'intuire le figure nello spazio, quanto la capacità che avevano di ridurre la costruzione di esse a quella di figure piane, nè è sragionevole citarla siccome indizio di loro cognizioni sulla sfera, solido di cui, se non altro, avevano percepite le qualità estetiche! Se le cognizioni sul cerchio che, come vedremo, possedeva uno dei Pitagorici posteriori (IPPOCRATE DA CHIO), inducono a ritenere favolosi i loro contributi alla scoperta della quadratura di questa figura, per converso si debbono ad essi due passi memorabili compiuti dalla matematica, cioè: la scoperta delle quantità irrazionali e la metodica introduzione delle proporzioni. Ove ancora si tenga conto delle definizioni di cui essi avvertirono la necessità, per assicurare la solidità dell'edificio geometrico, e delle considerazioni elevate su i fini e la divisione delle matematiche e si ricordi il valore permanente della risoluzione geometrica ad essi dovuta di tutte le equazioni della forma $x^2 + px + q = 0$, si concluderà con noi che nessuno può contrastare a PITAGORA il nome di capostipite della grande famiglia composta dei coltivatori della geometria per la geometria.

CAPITOLO IV.

Eleati, Atomisti, Sofisti

Zenone d'Elea.

31. - In principio del Cap. precedente abbiamo accennato alla fondazione in Italia di una Scuola filosofica contemporanea a quella di PITAGORA; quella, cioè, che ebbe per capo SENOFANE, per sede Elea, per principio fondamentale l'unità (indivisibilità) e l'immutabilità dell'essere. Dopo SENOFANE tale principio fu spogliato della forma teologica, di cui questi l'aveva rivestito, da PARMENIDE (1), il quale lo presentò sotto aspetto prettamente filosofico e così giunse a dare alle dottrine eleatiche il massimo sviluppo del quale si possono ritenere capaci. Sicchè gli Eleati posteriori — fra i quali spiccano ZENONE e MELISSO (2) — non trovarono altro modo di esercitare la loro azione se non quello di combattere gli oppositori delle idee di PARMENIDE, che numerosi e gagliardi essi vedevano pullulare attorno a sè.

ZENONE (3), nato verso il principio del V secolo a. C., intorno alla metà di questo secolo rappresentò una parte im-

(1) Visse nel V sec. a. C. e fu avviato alla filosofia da alcuni Pitagorici, il che indusse taluno ad ascriverlo fra costoro. È noto che da lui s'intitola un dialogo di PLATONE, che PROCLO ha citato (v. trad. cit., T. I, p. 124 e 138). Per altre notizie relative v. ZELLER, vol. cit., p. 553 e segg.

(2) ZELLER, id., p. 606 e segg.

(3) Cfr. ZELLER, id., p. 584 e segg.

portante come uomo e come scrittore; non fu vero matematico, ma uno di quegli uomini che maggiormente contribuirono all'assodamento dei principi, agitando le questioni che vi si riferiscono. Amico e discepolo di PARMENIDE, sembra che egli si sia strettamente attenuto alle opinioni da questo propugnate e abbia scelto quale proprio còmpito di far toccar con mano le contraddizioni a cui andava incontro chi le combatteva, chi cioè asseriva la possibilità di concepire l'essere come divisibile e variabile; la singolare abilità colla quale egli applicò questo metodo indiretto di dimostrazione (1) è ad evidenza provata dal fatto che, a partire da ARISTOTELE, ZENONE viene generalmente designato come inventore di tale metodo, cioè della dialettica.

32. - PLATONE e SIMPLICIO conobbero l'opera con cui ZENONE difese il suo maestro (2); da essi e da ARISTOTELE noi apprendiamo quegli argomenti di natura matematica che aprono a ZENONE le porte della storia delle discipline esatte. Quantunque parecchi siano assai noti (3), pure crediamo di accennare rapidamente a tutti quelli che ci furono tramandati e che si riferiscono alla matematica, osservando prima come quelli contro la pluralità servano a stabilire la *unità dell'essere* (primo principio della dottrina eleatica), e quelli contro il movimento a stabilire la *immutabilità dell'essere* (secondo principio della dottrina stessa).

I. *Argomenti contro la pluralità.*

1.° Se l'essere fosse multiplo dovrebbe essere ad un tempo infinitamente piccolo ed infinitamente grande. Infatti, ogni pluralità è una serie di unità ed una unità propriamente

---

(1) Alcune parole di PROCLO, l. c., T. I, p. 120, farebbero credere che di questo si fosse già servito PARMENIDE: il che, del resto, si accorderebbe coll'indole del metodo e delle applicazioni fattene.

(2) I passi di SIMPLICIO riguardanti ZENONE si trovano tradotti nel § II della memoria di P. TANNERY intitolata *Le concept scientiphique du continu, Zénon d'Élée et Georg Cantor* (*Revue philosophique,* T. XX, 1885, p. 385-410), in base alla edizione di SIMPLICIO recentemente fatta dal DIELS. Berlin, 1882.

(3) Cfr., fra gli altri, i lavori: GERLING, *De Zenonis eleat. paralogismis motum spect.* Marburg, 1825. E. RAAB. *Die Zenonischen Beweise.* Schweinfurt, 1880 e FRONTERA, *Études sur les arguments de Zenon d'Élée contre le mouvement.* Paris, 1891.

detta non può essere che un'ente indivisibile; perciò ogni elemento della pluralità dev'essere un'unità indivisibile, oppure composto d'unità indivisibili. Ora, ciò che è indivisibile non può avere grandezza, perchè tutto ciò che ha grandezza è divisibile all'infinito. Dunque gli elementi della pluralità non hanno grandezza. Essi dunque non aumentano la pluralità se vengono aggiunti ad essa, non la diminuiscono se ne vengono tolti. Ma ciò che, aggiunto o tolto, non influisce sulla grandezza delle cose è nullo. Dunque la pluralità, essendo composta di elementi nulli, è infinitamente piccola. — Ma, d'altronde, gli elementi della pluralità devono essere infinitamente grandi. Infatti quello che non ha grandezza non esiste; onde le pluralità, per esistere, devono avere una grandezza, epperò le loro parti devono essere discoste l'una dall'altra, cioè fra le loro parti devono essere situate delle cose dotate di grandezza; a queste cose si potrà applicare lo stesso ragionamento e così continuando si troveranno infinite grandezze il cui insieme è una grandezza infinita (1).

2.° Similmente Zenone dimostra che, considerato rispetto al numero, ciò che è multiplo deve essere ad un tempo limitato ed illimitato. È infatti limitato, contenendo un numero determinato di unità. Dev'essere poi illimitato, perchè due cose distinte devono essere separate da qualche cosa; questa terza cosa combinata con le due prime dà luogo ad altre coppie, su cui si potrà ragionare nello stesso modo, e così via (2).

II. *Argomenti contro il movimento.*

1.° Prima che il corpo arrivi al termine della sua corsa

---

(1) Si noti qui l'apparizione delle grandezze infinitesime e delle infinite; nè si manchi di rilevare come la contraddizione a cui arriva Zenone dipenda dall'avere ignorato come infinite quantità infinitesime possano formare una quantità finita.

(2) Zenone giunge così all'idea di *numero infinito:* però vi arriva per una strada attestante come egli non sapesse concepire il numero astrattamente, cioè come il residuo che rimane dall'idea di complesso di individui quando si prescinda da tutte le loro proprietà specifiche, nonchè dalla loro posizione relativa, quando, cioè, si tenga conto unicamente dell'essere ciascun individuo distinto da tutti gli altri e dell'essere essi considerati contemporaneamente.

deve necessariamente arrivare a metà della strada; prima d'arrivare a questa metà deve arrivare alla metà della prima metà. E così via. Dunque per andare da un punto ad un altro ogni corpo sarebbe costretto a percorrere un'infinità di spazi. E siccome ciò è impossibile così il movimento non può aver luogo (2).

2.° Analoga alla precedente è l'argomentazione ben nota tendente a dimostrare che ACHILLE non può raggiungere la tartaruga, benchè egli avanzi più rapidamente; argomentazione che consiste nell'osservare che ACHILLE deve raggiungere prima la posizione che occupava l'animale nell'istante in cui l'eroe partì, quindi la posizione che esso occupava quando questi raggiunse l'anzidetta posizione, e così via.

3.° Una cosa, finchè rimane in una posizione, è in riposo. Ora, una freccia che vola è in ogni istante in una posizione determinata, onde è in ogni istante in riposo, epperò il movimento non è che apparente (1).

4.° I più son d'accordo nell'ammettere che l'ultimo degli argomenti contro il movimento addotto da ZENONE sia il meno felice di tutti. In esso il filosofo d'Elea immagina di avere tre file di quattro corpi ciascuna, ad es. A, B, C, disposti come indica la fig. 11 e suppone la prima fissa, le due altre mobili nei sensi indicati dalle freccie e con la medesima velocità. Arriverà un istante in cui quei corpi saranno disposti come indica la fig. 12. Allora C_1 sarà passato dinnanzi a tutti i quattro corpi B, mentre si sarà trovato

---

(1) Ognun vede dov'è il punto debole di questo ragionamento: ZENONE non si è accorto che uno spazio infinitesimo vien percorso in un tempo infinitesimo, e che, come una linea di lunghezza finita può risultare da un'infinità di parti infinitesime, così un tempo finito (ad es. quello necessario a percorrere quella retta) può risultare da un'infinità di tempuscoli infinitesimi; la stessa fonte di debolezza risiede nell'argomento successivo.

(2) Qui il vizio del ragionamento ha la sua radice nell'avere ZENONE trascurata una distinzione sottile, ma ai moderni famigliarissima: quella cioè della quantità assolutamente nulla dalla quantità infinitesima. Infatti per concludere che la freccia è in riposo bisognerebbe dimostrare che essa occupa la stessa posizione in una serie di *tempuscoli infinitesimi*, non già

davanti due soli degli A ; dunque la velocità di C sarà una certa o doppia secondo il modo in cui si considera il movimento: il che, agli occhi di ZENONE appariva assurdo. Ma non lo sembra a noi che sappiamo distinguere *moto assoluta* da *moto relativo* e siamo in grado di valutare la velocità di un movimento in base alla sua natura specifica. Se, pertanto, possiamo essere propensi a scusare ZENONE

Fig. 11.

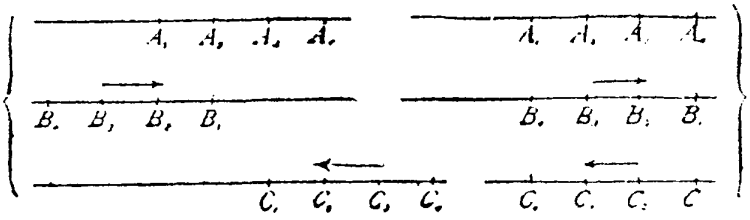


Fig. 12.

per l'errore commesso considerando che egli viveva in un'epoca in cui la scienza dei moti era tuttora in gestazione, non possiamo negare che egli lo abbia effettivamente commesso.

In ciò dissentiamo da uno dei più fortunati e geniali cultori della storia scientifica (1). Il quale partì dall'ipotesi che, con le sue argomentazioni, ZENONE intendesse, non già di rassodare i fondamenti dell'edificio eleatico, ma di svelare le imperfezioni delle teorie sostenute da chi ne dissentiva. In base a questa congettura, egli sostenne che ZENONE avesse diretti di preferenza i suoi strali contro i Pitagorici, ed in particolare avesse combattuta la definizione, che già citammo, di punto come unità avente posizione (μονας ἐχουσα θεσιν) ; secondo lui i discepoli di PITAGORA avrebbero dedotto da questa definizione essere ogni corpo geometrico una somma di punti, nella stessa guisa che ogni numero è una somma di unità; e questa proposizione sarebbe stato il bersaglio a cui ZENONE mirava nell'inventare i suoi ra-

---

di *istanti,* chè dire che è in riposo in un istante (quantità di tempo assolutamente nulla) può equivalere ad asserire che essa è allora in una fase di movimento. Del resto, l'assenza della distinzione anzidetta è visibile anche nel primo dei ragionamenti contro la pluralità.

(1) P. TANNERY, nella memoria precitata, nonchè *Science hellène,* p. 247-261.

gionamenti. Ora, se è vero che ZENONE nelle sue argomentazioni contro il moto, viene, in ultima analisi, ad abbattere la concezione dello spazio come somma di punti, chi fa fede che i Pitagorici abbiano realmente dedotta la proposizione citata dalla definizione di punto da essi prescelta? Come, d'altronde, rendersi ragione del silenzio di PROCLO su tale pretesa di deduzione? In quale maniera spiegare che egli, nel riferire ed in senso benevolo commentare quella definizione, non abbia fatto alcun cenno di chi per demolirla usò di mezzi così illeciti che meritarono di venire poco dopo annoverati fra i paralogismi proverbiali?

Comunque si risponda a queste domande, qualunque sia il giudizio che si pronunci sull'ultima delle argomentazioni zenoniane, il significato dell'opera matematica del filosofo d'Elea rimarrà sostanzialmente il medesimo. Giacchè tutti converranno che a lui spetta il gran merito di avere per la prima volta trattate le quantità infinitesime e le infinite, nonchè i numeri infiniti; e di avere, prima di qualunque altro, fissata l'attenzione dei filosofi e dei matematici su questioni che, variamente enunciate, si ripresentarono ogni qualvolta venne escogitato qualche nuovo espediente per giustificare l'uso dell'infinito nelle scienze esatte; questioni il cui studio fu e continua ad essere tuttora fertile di ingegnose ricerche e risultati importanti (1).

Oinopide, Anassagora, Democrito.

33. - OINOPIDE DA CHIO, che PLATONE e PROCLO annoverano fra coloro che pei primi si occuparono in Grecia di questioni geometriche, si deve ritenere per appartenente alla Scuola di PITAGORA? Così fanno un notissimo polistorico del sec. XVII (2) e coloro che ne accettano senza discussione le affermazioni (3), mentre, tenendo conto delle no-

(1) Cfr. i §§ IV e VII della testè richiamata memoria di P. TANNERY.

(2) FABRICIUS, *Bibl. graeca*, T. IV, p. 85.

(3) G. CRAMER, *Dissertation sur Hippocrate de Chio* (inserita nell' *Histoire de l' Académie des Sciences et Belles-Lettres.* MDCCXLVIII, Berlin, 1750), p. 493. IDELER lo dice " *einen pythagorisirenden Philosophen* „, op. cit., T. I, p. 302.

tizie che si hano intorno alle idee che egli professava, sarebbe più ragionevole collegarlo con i fisici Jonii (1). Ad una conclusione definitiva sembra difficile arrivare in base ai dati che abbiamo, tanto più che l'epoca in cui fiorì OINOPIDE (2) (500 a. C. circa) si accorda tanto coll'una ipotesi quanto coll'altra; ma (e ciò è per noi assai peggio!) neppure sui meriti di OINOPIDE come matematico si può pronunciare sicuro giudizio, giacchè coerenza storica esige che la diffidenza, con la quale accogliemmo le informazioni che EUDEMO ci trasmise col mezzo di PROCLO sulle scoperte di TALETE, ci sia compagna anche nel valutare quelle che dalla stessa sorgente e per lo stesso canale ci giungono intorno a OINOPIDE. Tali informazioni sono:

I. A proposito del problema (*Elementi*, Lib. I, prop. 12) « Dati di posizione una retta indefinita ed un punto esterno condurre da questo la perpendicolare alla retta », PROCLO dice:

> OINOPIDE risolse per primo questo problema, avendolo riscontrato utile per l'astronomia. Egli chiama poi, secondo il costume antico, la perpendicolare un gnomone, perchè, come questo, cade ad angolo retto sull'orizzonte, ecc. (Proclo-Tailor, T. II, p. 83).

II. E, a proposito del problema « su una retta data ed in un punto dato su di essa formare un angolo eguale ad un dato angolo rettilineo », egli osserva che « anche questo è un problema la cui invenzione, secondo EUDEMO, è un acquisto piuttosto di OINOPIDE che di EUCLIDE ». (PROCLO-TAYLOR, T. II, 126).

Queste notizie, le uniche che possediamo intorno allo scienziato in questione, non c'inducono a far eco agli antichi quando lo vantavano tanto quale grande matematico (3),

---

(1) FINGER, l. c., p 45.

(2) Cfr. DILLING, l. c., p. 10.

(3) Gli è per conciliare questo sentimento coi dati certi da noi posseduti che MONTUCLA, T. I, p. 151 e CANTOR, T. I, p. 190 ammettono avere egli fatta qualche altra scoperta di cui non abbiamo notizia. — Quanto all'attribuzione ad OINOPIDE delle *lunule* (cfr. Cap. seg.) essa poggia sopra un errore incorso nella 1.ª edizione del *Commento di Proclo*, il quale venne corretto da CRAMER nella dissertazione dianzi citata. Tale attribuzione

quanto per grande astronomo (1); e siccome è inammissibile che gli Egiziani abbiano ignorato qualche metodo per risolvere quei problemi (2), così è (3) probabile si debba ridurre il merito di OINOPIDE ad avere — forse in vista delle applicazioni astronomiche che egli aveva in animo di farne — inventato quelle soluzioni che tutti conosciamo, avendo EUCLIDE creduto di accordare loro un posto negli *Elementi.* Per noi, dunque, il vantato valore geometrico di OINOPIDE resta problematico; a meno che non vogliamo misurarlo in base alla sua azione come insegnante, poichè è fama che il celebre IPPOCRATE DA CHIO (v. n. 40) avesse ricevuta la propria istruzione matematica appunto nella scuola fondata dal suo conterraneo (4).

34. - PROCLO, nel riassunto storico che riproducemmo nel Cap. 1, cita, prima di OINOPIDE DA CHIO, di cui ci siamo occupati testè, un altro scienziato di poco anteriore e i cui metodi geometrici sono, secondo lui, di importanza non molto differente: cioè ANASSAGORA DI CLAZOMENE. Questo nome non riuscirà certo nuovo al lettore, il quale ravviserà tosto in lui quel celebre pensatore, maestro ed amico di PERICLE (493-420 a. C.), che, nato verso il 500 (5) da parenti facoltosi, abbandonò ogni suo avere per dedicarsi alla filosofia, e che, avendo fondata in Atene una scuola ove professò idee discrepanti da quelle che avevano allora corso, venne accusato di empietà e potè a stento mutare la pena di morte, a cui venne condannato, in quella di perpetuo esiglio da Atene. Riparò allora in Lampsaco (città della Misia) ed ivi morì verso il 428 a. C.

---

spinse perfino taluno a fare una sola persona di OINOPIDE e di IPPOCRATE: (si vegga la *Dissertation sur Oenopides de Chio* par M. MENIUS inserita nell'*Histoire de l'Académie des Sciences et Belles Lettres*, MDCCXLIV, Berlino, 1748, p. 401-424).

(1) Un celebre grammatico romano, il CENSORINO, lo fa autore del ciclo astronomico di 59 anni (v. IDELER nel l. c.).

(2) HANKEL, l. c., p. 92.

(3) BRETSCHNEIDER, l. c., p. 65.

(4) PROCLO, T. I, p. 110, cita anche certo ZENODOTO fra coloro che erano famigliari con le dottrine di OINOPIDE. Cfr. FINGER, l. c., p. 46-47.

(5) ZELLER, *Die Philos. der Griechen*, I Tl., II Hälfte, 3. Aufl. Leipzig, 1892, p. 968 e segg.

ANASSAGORA sembra avere conosciuta la maggior parte delle dottrine degli antichi filosofi, eccezion fatta per quelle di PITAGORA, ed averle sfruttate nel comporre il proprio sistema; egli subì l'influenza della Scuola jonica non meno che dell'eleatica, di ANASSIMANDRO e ANASSIMENE quanto di ERACLITO e PARMENIDE. Nulla quindi giustifica coloro (e sono molti) (1) che a capo della Scuola jonica pongono ANASSAGORA dopo TALETE, ANASSIMANDRO e ANASSIMENE.

Quali siano le scoperte matematiche, in base a cui PROCLO lo menzionò onorevolmente nella sua storia, ci è ignoto, chè delle sue occupazioni matematiche (2) non sappiamo altro se non che, al dir di PLUTARCO (3), egli scrisse in carcere sulla quadratura del cerchio e, al dir di VITRUVIO (4), perfezionò i procedimenti per dipingere le scene dei teatri, i quali erano stati escogitati, all'epoca delle prime rappresentazioni delle tragedie di ESCHILO (470 a. C. circa), dal pittore AGATARCO da Samo (5). Per quanto incerti, discutibili e discussi siano questi dati, essi sono sufficienti a connettere il nome del filosofo di Clazomene ad un problema teorico, che, per rinomanza, vince ogni altro e che ora incontriamo per la seconda volta (v. p. 54), e ad un problema pratico, la cui esistenza attesta che fin da quegli antichissimi tempi si era visto come la geometria dovesse venir invocata quando si volesse porre la pittura sopra una base razionale; e la soluzione, che ricevette fin d'allora quest'ultima questione, non dimostra forse che si avevano in quel tempo cognizioni geometriche abbastanza estese?

---

(1) MONTUCLA, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle.* Nouv. ed. Paris, 1831, p. 34 nota; FINGER, l. c., p. 42; G. SMITH, *Storia di Grecia.* Firenze, 1868, p. 150; BRETSCHNEIDER, l. c., p. 63; ALLMAN, l. c., p. 17 e 54; WOLF, op. cit., p. 9.

(2) Alle quali, secondo il parere del BRETSCHNEIDER, egli vi sarebbe stato eccitato dai Pitagorici.

(3) Il passo relativo è riferito da BRETSCHNEIDER, l. c., p. 63-64.

(4) Nella Pref. al VII libro alla sua opera *De Architectura.*

(5) È noto che questi sviluppò pure i principi dell'ottica ed in base ad essa ordinò le decorazioni sceniche (*Agatarchus primum Athenis Aeschylo docente tragoediam scenam fecit et de ea commentarium reliquit* dice VITRUVIO nella pref. al lib. VII; cfr. anche CURTIUS, *Storia greca,* T. II, 293); l'epoca in cui egli visse si ritiene essere stata fra il 460 ed il 410 a. C.

35. - Ma questo secondo problema, per attestazione dello stesso VITRUVIO, fu studiato anche da un altro celebre filosofo, cioè DEMOCRITO d'Abdera (1). Ciò prova come questi non fosse ignaro di geometria — il che s'accorda con la tradizione di un suo viaggio in Egitto e coll'essersi egli vantato nel proprio sapere matematico (2) —, come anzi sapesse coltivarla, così da ottenere frutti sufficienti e dargli diritto di essere menzionato in una storia della geometria. Se tale non fu l'avviso di PROCLO, gli è che in questo la serenità dello storico era siffattamente ottenebrata dai preconcetti di scuola che egli volle infliggere a DEMOCRITO la condanna alla dimenticanza per la colpa di essersi ascritto fra i discepoli di LEUCIPPO ed essere divenuto uno dei più caldi fautori della teoria atomistica ed uno dei più efficaci contributori del suo sviluppo (3).

Il valore di DEMOCRITO come geometra emerge anche dalla lista delle opere che gli vengono attribuite da DIOGENE LAERZIO, delle quali più d'una è d'argomento matematico. Fra queste troviamo, in primo luogo, una, il cui titolo non fu ancora spiegato in modo definitivo: traducendolo *Sulla differenza del gnomone ossia sul contatto del circolo e della sfera*, si arriva naturalmente a supporre (4) che essa trattasse del tracciamento di una tangente a un circolo o ad una sfera coll'aiuto di un gnomone, un lato

---

(1) Cfr. DIOGENE LAERZIO e ZELLER, *Die Philosophie der Griechen*, I Tl., II Hälfte, 5. Aufl. Leipzig, 1892, p. 839 e segg.

Democrito nacque nel 460 a. C. o qualche anno prima ed ebbe vita assai lunga.

" DEMOCRITO intraprese insieme ad Anassagora delle ricerche sul piano prospettico e la disposizione delle scene dei teatri, e fu egli specialmente che fece nascere negli artisti uno spirito filosofico adatto a guidarli „. O. MÜLLER nel *Manuel d'Archéologie* citato dallo CHASLES (*Journal de Mathématiques*, T. XX, 1855, p 307).

(2) Cfr. CANTOR, T. I, p. 104 e 191 e Appendice I al presente libro.

(3) Il che è tanto più da biasimarsi perchè, come nota lo ZELLER, EUDEMO, il quale in tante occasioni servì di guida a PROCLO, si è molto occupato di DEMOCRITO.

(4) ALLMAN, p. 80.

del quale passasse pel centro; traducendo invece *Su una divergenza d'opinioni ossia sul contatto*, ecc. sembra (1) riferirsi ad una discussione sollevata da PROTAGORA e che ARISTOTELE (*Metaf.*, Lib. II, prop. 2) ricorda con le seguenti parole: « Le linee sensibili non sono quali le dice il geometra, perchè fra le cose sensibili non ve n'è alcuna che sia rigorosamente retta o rotonda; e non è in un solo punto che il cerchio tocca la riga, ma la verità sta in quello che diceva PROTAGORA (v. n. 36) contro i geometri ». Ne troviamo, in secondo luogo, un'altra *sulla geometria* in cui forse si trovava il rapporto fra una piramide ed un prisma o fra un cono ed un cilindro di basi ed altezze eguali che ARCHIMEDE attribuisce a DEMOCRITO (v. Lib. II, n. 44). Una terza trattava *Dei numeri*; una quarta probabilmente *Sulla prospettiva*; infine un'ultima concerneva *Le linee ed i solidi incommensurabili* e si congetturò che scopo ne fosse di chiarire la teoria degli irrazionali mediante le teorie atomistiche (2); da essa forse (3) EUCLIDE tolse la definizione di *ragione* che si legge nel V Libro degli *Elementi*.

Finalmente PLUTARCO ci fa sapere (4) che DEMOCRITO sollevò la seguente questione: « Se un cono è segato da un piano parallelo alla base » (e ad essa infinitamente vicino?) « che cosa dobbiamo dire delle superficie delle sezioni, che sono eguali o diseguali? Perchè, se sono diseguali, il cono mostrerebbe delle irregolarità, che lo farebbero apparire dotato come di gradini o denti; e, se sono eguali, tutte le sezioni risulterebbero fra loro eguali ed il cono sembrerebbe possedere la proprietà del cilindro, quella cioè di essere composto di circoli eguali, non fra loro diseguali, il che è assurdo ». Come l'Abderitano risolvesse tale questione, indubbiamente suggeritagli dallo studio delle dottrine atomistiche da lui professate, non ci è noto; non è pertanto lecito affermare con sicurezza, come fa taluno (5), che egli giungesse a dimostrare l'impossibilità di considerare un

(1) P. TANNERY nella *Revue philosophique*, T. XX, p. 397.
(2) Ib., p. 56-57; cfr, J. L. HEIBERG, *Philologus*, vol. 43, p. 335.
(3) ALLMAN, l. c., p. 143.
(4) In un passo riportato dall'ALLMAN, l. c., p. 81.
(5) Cfr. P. TANNERY, *Revue philosophique*, T. XX, p. 396.

cono come somma di circoli ; tuttavia a lui spetta un posto fra i precursori remoti dell'analisi infinitesimale (1).

Ippia.

36. - Oltre che di DEMOCRITO, Abdera fu patria di un altro uomo, che a buon diritto gode di grande celebrità, cioè di PROTAGORA. Egli, nato intorno al 480 a. C., all'età di circa trent'anni cominciò a percorrere le città della Grecia offrendo lezioni a pagamento, a chiunque aspirasse acquistare abilità pratica ed alta coltura intellettuale ; e la gioventù, che accorse numerosa ad ascoltarlo in Abdera e quindi in Sicilia, nella Magna Grecia e sopratutto in Atene, offrendo a PROTAGORA la propria ammirazione e ricchi doni, attestava colla propria presenza come l'insegnamento salariato fosse quasi una necessità dei tempi. PROTAGORA assunse il nome di *sofista*, ed i contemporanei designarono in generale sotto questo nome un uomo che, non pago di esercitare la propria influenza sui suoi conoscenti in ogni propizia occasione, andava di città in città ad offrire il proprio sapere a coloro che ne avevano bisogno ed erano disposti a rimunerarlo (2). L'esempio di lui venne anche seguito, per non citare che i più cospicui, da GORGIA da Lentini, da PRODICO di Ceo e da IPPIA d'Elea. Ora, benchè lo studio metodico della sofistica esca dai limiti naturalmente imposti ad una storia della matematica, pure la constatazione della comparsa di essa deve trovar posto nella storia di qualunque disciplina; perchè, in primo luogo, l'essere essa sorta e l'avere per un secolo circa prosperato è segno che le cognizioni scientifiche allora possedute avevano levato già tanto rumore da destare nelle masse il desiderio di conoscerle ; perchè, in secondo luogo, il diffondersi della scienza oltre alla cerchia dei suoi consueti cultori e fuori della propria sede di svolgimento sarà stato per fermo causa non ul-

(1) Cfr. la seconda delle *Bemerkungen zur Geschichte der altgriechischen Mathematik* di A. STURM (Abh. zur Gesch. der Mathem., IX Heft, 1899).

(2) Per quanto concerne la sofistica v. ZELLER, *Die Philos. der Griechen*, I Tl. II Hälfte, 5. Aufl. Leipzig, 1892, p. 1038 e segg.

tima del vivace moto intellettuale a cui si deve se la Grecia arrecò alle nostre cognizioni un contributo di tanto rilievo.

37. - Uno dei caratteri comuni all'insegnamento sofistico è la grande varietà di coltura di chi lo impartiva; ma questa varietà sembra abbia raggiunto il suo massimo grado in IPPIA d'Elea (nato nella prima metà del IV sec. a. C.) (1) del quale, come di ANTIFONTE (v. Cap. V), deve essere tenuto parola nella presente narrazione; da ciò la necessità di trattare le questioni spinose collegate ad IPPIA il matematico.

Nel riassunto storico che riportammo nel n. 3 IPPIA d'Elea è citato come testimonio dell'abilità di MAMERCO. Inoltre un IPPIA vien citato dallo stesso commentatore in altri due passi che ora riferiremo:

I. Nel commento al problema (*Elem.*, L. I, prop. 9) della bisezione di un angolo rettilineo, PROCLO allude alla generalizzazione di quel problema ed in particolare alla trisezione dell'angolo; e, al cenno della soluzione che ne diede NICOMEDE col mezzo della concoide, aggiunge: « Altri risolvettero lo stesso problema mediante la quadratrice d'IPPIA e di NICOMEDE, che sono linee del pari (cioè come la concoide) miste ». (PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 73).

II. Nel preludio alla prop. I, p. 27 degli *Elementi*, lo stesso commentatore nota che: « È del resto costume generale dei matematici, quando trattano delle linee, di assegnare la proprietà caratteristica (τὸ σύμπτωμα) di ciascuna specie. Così APOLLONIO diede la proprietà caratteristica di ciascuna delle coniche; NICOMEDE fece altrettanto per le concoide; IPPIA per la quadratrice, PERSEO per le spiriche ». (PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 174).

Non si può revocare in dubbio che l'IPPIA di cui si parla in questi due ultimi passi sia la stessa persona (2); ma era desso IPPIA *d'Elea?* Tale lo ritenne il MONTUCLA (3), perchè egli credeva che l'antichità non presentasse altro matematico di questo nome; ma ognuno vede non essere tale di-

(1) ZELLER, op. cit., p. 1064 e segg.

(2) Queste parole ci sembrano così chiare che non sappiamo come il DILLING abbia potuto (l. c., p. 28) esprimere dei dubbî sulla legittimità dell'attribuzione dell'invenzione della quadratrice allo stesso che ne determinò le proprietà.

(3) Op. cit., T. I, p. 181.

mostrazione conclusiva, nè crebbe di valore per un tentativo, ormai giudicato fallito, di esumare un altro IPPIA (1). Tale lo ritennero il BRETSCHNEIDER tacitamente (2) e M. CANTOR (3) osservando essere costume di PROCLO di citare ogni autore la prima volta indicando il nome suo e quello della sua patria e le successive più brevemente; essere, quindi, probabile che l'IPPIA citato nei due passi sia l'IPPIA d'Elea già incontrato nel noto (n. 3) riassunto storico. Queste ragioni, per quanto eccellenti, non tolgono ogni dubbio, chè chi può garantire che (ammesso pure che il testo del *Commento* ci sia arrivato sotto forma perfetta) PROCLO non abbia mai trasgredito la regola sul modo di far le citazioni che egli aveva adottata? Alla identificazione di IPPIA inventore della quadratrice col sofista, si oppose C. BLASS (4), il quale ritenne l'IPPIA nominato da PROCLO posteriore al sofista, e nello stesso modo si comportò H. HANKEL (5), senza però addurre le ragioni di tale attitudine. In ciò fu seguito dall'ALLMAN (6) a cui sembrò strano che IPPIA, a cui devesi una scoperta così memorabile come quella della quadratrice, non fosse incluso da PROCLO nel novero di quelli a cui la geometria deve progressi decisivi; ma egli dimenticò così che PROCLO era, non storico imparziale, sibbene un filosofo spregiatore di tutto che non appartenesse all'Academia; perciò, come negò un posto onorevole all'*atomista* DEMOCRITO, può avere fatto lo stesso pel *sofista* IPPIA.

Pesando dunque gli argomenti pro e contro l'identificazione, sembra a noi che i primi vincano per valore i secondi (7). Tuttavia essa non ci sembra definitivamente as-

(1) ALLMAN, p. 92 e 191.
(2) L. c., p. 194-196.
(3) Op. cit., T. I, p. 165 e seg.
(4) Citato da FRIEDLEIN, *Beiträge*, III, p. 8.
(5) Op. cit., p. 151 nota.
(6) Ivi, p. 92-94 e 189-193.
(7) Oltre che di M. CANTOR, tale è pure l'opinione di P. TANNERY (v. *Notes pour l'histoire des lignes et des surfaces courbes dans l'antiquité* inserite nel T. VIII, 1881 della 2ª Serie del *Bull. des Sc. math. et astr.*; p. 4 dell'estratto) e di J. L. HEIBERG, *Griechische und Römische Mathematik*, Philologus, T. 43, 1884, p. 335. Anche ALLMAN finì per accettarla; v. anche P. TANNERY, *Géométrie grecque*, p. 108 e 131.

)data, perchè quanto ci viene riferito intorno al carattere el sofista non è tale da farlo ammettere come matematico riginale; egli, infatti, si distingueva per la sua vanità e aspirazione ad essere ritenuto come possessore di una ienza illimitata (1), non già come persona capace di investigazioni originali; nulla di strano che PROCLO lo citi)rse in base a un passo allora noto di qualche sua celebre azione) come attestante l'abilità di MAMERCO (2), mentre vece nulla autorizza a ritenerlo capace dell'invenzione di ia curva notevole in sè e notevole anche per essere la ima che sia stata definita per via cinematica e costruita r punti.

38. - Quale fosse la generazione della quadratrice è insegnato da PAPPO con le parole seguenti: (3)

Per quadrare il circolo da DINOSTRATO, NICOMEDE e parecchi tri più moderni, viene adoperata una certa linea, la quale ende il nome appunto da questa proprietà. Giacchè da essi chiamata quadratrice (τετραγωνίζουσα) e generata come segue: Dato un quadrato ΑΒΓΔ (fig. 13) si descriva col centro in Α la rconferenza ΒΕΔ, e si faccia muovere la retta ΑΒ in modo che punto Α resti fisso mentre Β descrive la circonferenza ΒΕΔ; retta ΒΓ poi rimanga sempre parallela a ΑΔ mentre il suo unto Β percorre ΒΑ; ed inoltre la retta ΒΑ descriva con moto niforme l'angolo ΑΒΔ cioè il punto Β la circonferenza ΒΕΔ, e stesso faccia la retta ΒΓ cioè il punto Β sulla retta ΒΑ. Accada poi che ΑΒ e ΒΓ coincidano ad un tempo colla retta ΑΔ. pposti i due movimenti così regolati, le rette ΑΒ e ΒΓ si seeranno in ogni loro posizione in un punto mobile insieme esse, punto che descrive nello spazio limitato dalle rette ΒΑ, e dalla circonferenza ΒΕΔ una certa linea ΒΗΖ tutta concava lla stessa parte, la quale si mostra conveniente alla ricerca

(1) Cfr. ZELLER, T. I, p. 743 (ove in una nota è citato un passo ll'*Hippias major* in cui PLATONE fa dire a SOCRATE con una mirazione *ironica* che IPPIA sapeva l'astronomia, la geomea, l'aritmetica, ecc.); MAHLY, *Der Sophist Hippias von Elis* nei XV (1860) e XVI (1861) del *Philologus* (specialmente T. XV, 517, 519-20, 525, 528 e 629, p. 45); GOW, *A short History of Greek thematics*. Cambridge, 1884, p. 163.

2) Si noti poi che non è chiaro se PROCLO citi IPPIA come torità suffragrante un proprio giudizio, oppure come autore cui egli toglie a prestito la notizia su MAMERCO.

3) Ed. HULTSCH, p. 350 e 252.

dî un quadrato eguale ad un dato circolo. Ma la sua principale proprietà è questa, che, condotta una retta qualunque AZE alla circonferenza, tutto il quadrante BEΔ sta all'arco bE, come la retta BA alla ZΘ; il che è evidente pel modo di generazione della linea.

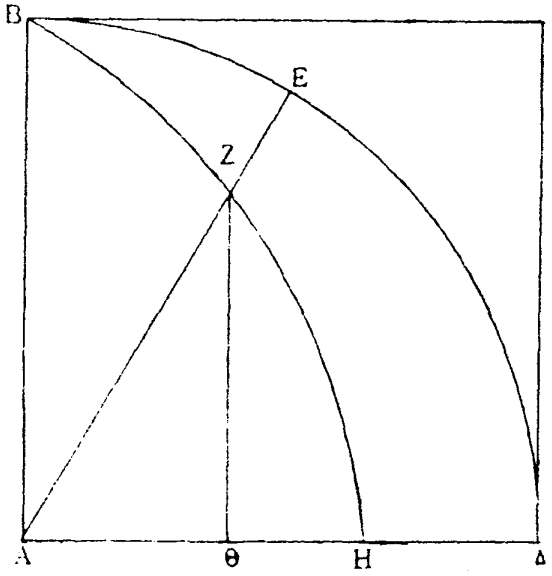


Fig. 13.

Da questo modo di generazione emerge: 1.° che la curva si può costruire per punti colla massima facilità (1); 2.° che, delineata la curva, si ha un mezzo facile per dividere un angolo (od un arco circolare) in parti aventi dati rapporti (in particolare in tre parti eguali) (2). Ma le parole di PAPPO, fra cui si cerca invano il nome di IPPIA, fanno nascere la questione di scoprire la ragione di tale silenzio. Una spiegazione che si presenta spontanea (3) è questa: alla curva di IPPIA fu dato il nome di *quadratrice* da quelli che l'applicarono al problema della quadratura del cerchio, prima essa non aveva ricevuto alcun nome; e PAPPO che ne discorre a proposito di quel problema credette inutile citare chi se n'era servito con altro scopo. Tale spiegazione, mal-

(1) P. es. dividendo in 2^n ($n = 1, 2, ...$) parti eguali il lato AB e l'angolo BAΔ (o l'arco BEΔ).

(2) Infatti così si riduce tale problema all'analogo sulla retta.

(3) Fu proposta per la prima volta dal CANTOR. Opera cit., T. I, p. 197.

grado certe obiezioni che furono mosse ad essa (1), ci sembra quella che meglio concilia le notizie di PROCLO con quelle di PAPPO, mentre, d'altronde, concorda pienamente con le parole di quest'ultimo: noi dunque consideriamo che sul matematico IPPIA resti ancora da risolvere in modo definitivo, una sola questione, quella, cioè, se egli sia o meno da identificarsi col sofista (v. p. 70).

(1) V. le citate *Notes* di P. TANNERY.

CAPITOLO V.

Pitagorei e Pitagoristi

39. - Il partito democratico vincitore nella Magna Grecia, se ebbe il potere di dissolvere la scuola di PITAGORA, condurre, forse, a morte il maestro e cacciare in esiglio i discepoli; se valse ad abbattere per sempre un ordinamento politico-religioso non conforme allo spirito de' tempi e delle popolazioni; fu, per converso, incapace di spegnere l'ammirazione che veniva tributata al filosofo di Samo e di impedire alle idee, che egli aveva così validamente sostenute, di fare il loro corso; in particolare il moto in avanti che egli aveva impresso alla geometria non si spense con lui, al contrario continuò, talora rivelando la propria origine, talora in modo latente: la prova della prima forma di progresso è offerta dai lavori geometrici di coloro che furono discepoli dei discepoli di PITAGORA od ammiratori delle sue idee (1), di cui ci occuperemo in questo Capitolo; la prova della seconda è somministrata dall'opera geometrica di PLATONE e de' suoi discepoli, che tenteremo di delineare nel Capitolo successivo.

(1) Secondo SUIDA — del quale per convenienza accettiamo senza discuterle le asserzioni — quelli si dicevano *Pitagorei* e questi *Pitagoristi*, mentre il nome di *Pitagorici* era riserbato agli immediati aderenti alla scuola di PITAGORA.

Ippocrate da Chio.

40. - Narrasi da un commentatore di ARISTOTELE (GIOVANNI FILOPONE) che il negoziante IPPOCRATE DA CHIO, essendo caduto nelle mani dei pirati ed avendo in conseguenza perduto ogni suo avere, venne ad Atene per ottenere giustizia contro quei malandrini, e che, durante il lungo soggiorno fattovi, frequentò le scuole dei filosofi e divenne eccellente geometra (1). Anzi, tanta fu la riputazione che egli si acquistò in tal modo, che ARISTOTELE, nella sua *Etica*, lo scelse come esempio del fatto che persone sciocche per certi rispetti non lo sono affatto per altri, giacchè IPPOCRATE fu abile geometra, quantunque siasi lasciato defraudare di una grande somma dai ricevitori della dogana di Bisanzio.

I legami intellettuali di IPPOCRATE con i Pitagorici sono dimostrati dal fatto (riferito da ARISTOTELE) che i suoi discepoli parlavano delle comete in un modo simile ai Pitagorici, e dalla fama di avere egli, divulgandone gli arcani geometrici, contribuito indirettamente all'avanzamento delle scienze esatte. Ma che egli sia quel Pitagorico che, nell'intento di riparare alla rovina delle proprie finanze, insegnò per denaro le dottrine della scuola di Crotone, divenendo così prototipo degli insegnanti di matematica pagati dai loro discepoli, non si può dire con certezza (2): la cosa non si può escludere, è forse anche probabile, visto che l'esempio dei sofisti suoi contemporanei può avere ridestato in IPPOCRATE le antiche consuetudini di trafficante, ma non si può ascriverla fra le certe, come non si può asserire che IPPOCRATE, in causa del suo insegnamento venale, sia stato espulso da una scuola di Pitagorici (3).

Si è cercato di determinare esattamente l'epoca in cui visse IPPOCRATE, tenendo conto delle avventure e sventure toccategli; ma le conclusioni a cui si venne non sono fra

(1) I passi di antichi scrittori che servono di riprova alle nostre asserzioni sulle vicende di IPPOCRATE si trovano raccolti dal BRETSCHNEIDER (op. cit., p. 93, 97-8) e dall'ALLMAN (op. cit., p. 58-59).

(2) ALLMAN, l. c., p. 60.

(3) Cfr. MONTUCLA, op. cit., T. I, p. 152.

loro in pieno accordo. Se vi fu chi (1) — ricordando che i Bizantini verso il 440 a. C. presero parte alla guerra di Samo contro Atene — ammise IPPOCRATE fosse stato saccheggiato da corsari Ateniesi, contro i quali egli sarebbe venuto a reclamare in Atene; altri (2) — osservando che nel primo quarto del V secolo non vi poteva essere molto commercio nel Mare Egeo e che le notizie date concordano meglio coll'ipotesi di un'epoca ove Atene avesse l'egemonia sulla Grecia — concluse che IPPOCRATE non potè consacrarsi alla geometria dopo il 450 a. C. Si adotti l'una o l'altra opinione, si deve ammettere che IPPOCRATE fiorì nella seconda metà del V sec. a. C.; di questo dato possiamo appagarci, visto che altrettanto si deve fare in moltissimi altri casi analoghi.

41. - I contributi dati da IPPOCRATE alla geometria sono di due specie; gli uni indiretti, essendo di natura metodologica, gli altri diretti.

Fra i primi vi è la più antica redazione di un libro di elementi di geometria; come già sappiamo (n. 3), PROCLO gliela attribuisce, ma su di essa egli non ci dà sgraziatamente alcun particolare, e questo silenzio venne troppo fedelmente osservato dagli altri scrittori. Vi è poi l'invenzione del metodo di riduzione (ἀπαγωγή), di quel metodo cioè che trasforma un problema od un teorema in altro, risolto o dimostrato il quale resta in conseguenza risolto o dimostrato il primitivo. Che realmente nessun geometra anteriore ad IPPOCRATE siasi mai servito di un metodo così naturale e spontaneo che sembra quasi inseparabile da qualsia ricerca geometrica un po' elevata, ci sembra difficile ammettere; sicchè, probabilmente, il merito di IPPOCRATE si deve restringere ad avere messo a nudo il substrato logico comune a molti metodi di soluzione o dimostrazione usati dianzi e di averlo applicato a nuovi esempi. Se la prima parte di quest'induzione è puramente ipotetica, la seconda si trasforma in verità indiscutibile, studiando le altre scoperte a cui è attaccato il nome d'IPPOCRATE, cioè i suoi studi concernenti i due celebri problemi della dupli-

(1) BRETSCHNEIDER, l. c., p. 98.
(2) ALLMAN, l. c., p. 61-62.

cazione del cubo e della quadratura del circolo, studi dei quali fa mestieri che ora ci occupiamo.

42. - Il primo di questi problemi ha un'origine favolosa, la quale, assieme ai primi tentativi che vennero fatti per risolverlo, forma il tèma di una lettera che ERATOSTENE (geometra del periodo che segue quello che ora ci occupa) diresse a TOLOMEO III, nell'inviargli la propria soluzione meccanica di detto problema (1). Ivi si legge:

ERATOSTENE a TOLOMEO salute.

Narrano che uno degli antichi poeti tragici (2) facesse apparire sulla scena MINO (3) nell'atto di far costruire una tomba a GLAUCO (4); e che MINO, accorgendosi che questa era lunga da ogni lato cento piedi, dicesse: " piccolo spazio invero accordasti ad un sepolcro di re; raddoppialo, conservandolo sempre di forma cubica, raddoppia subito tutti i lati del sepolcro ". Or è chiaro che egli s'ingannava. Infatti, duplicandone i lati, una figura piana si quadruplica, mentre una solida si ottuplica. Allora anche fra i geometri fu agitata la questione in qual modo si potesse duplicare una data figura solida qualunque, conservandone la specie. E questo problema fu chiamato dublicazione del cubo. Dopo che tutti furono per lungo tempo titubanti, per primo IPPOCRATE da Chio trovò che se fra due linee rette, delle quali la maggiore sia doppia della minore, si inscrivono due medie in proporzione continua, il cubo sarà duplicato, e così tramutò una difficoltà in altra non minore. Si narra poi che più tardi i Delii, spinti dall'oracolo (5) a duplicare una certa ara, caddero nello stesso imbarazzo (6). Ed alcuni legati vennero spediti ai geometri che convenivano con PLATONE nell'Accademia, per eccitarli a cercare quanto era

---

(1) V. *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii,* ed. HEIBERG. Lipsiae, 1881. Vol. III, p. 102-106.

(2) Secondo alcuni sarebbe EURIPIDE (480-406 a. C.); v. REIMER, *Historia problematis de cubi duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continuae proportionalibus inter duas datas.* Gottingae, 1798, p. 20. Altri lo negano: v. HEIBERG, p. 105 del vol. citato nella nota precedente.

(3) Leggendario re di Creta.

(4) Suo figlio; cfr. PAULY-WISSOVA, *Real-Enciklopädie der class. Alterthumswiss.,* T. VII, col. 1415.

(5) È noto che in Delo, piccola isola del Mar Egeo, APOLLO aveva altare e culto speciali.

(6) Donde il nome di *problema di Delo,* sotto cui spesso designasi la questione di c è parola.

richiesto. Essi se ne occuparono con diligenza e si dice che, avendo cercato d'inserire due medie fra due rette, ARCHITA TARANTINO vi riuscisse col semicilindro ed EUDOSSO invece mediante certe linee curve (καμπύλαι γραμμαι). Questi furono seguiti da altri, nel rendere più perfette le dimostrazioni, non però nell'effettuare la costruzione ed accomodarla alla pratica, eccettuato forse MENECMO e con gran fatica.

Ammesse per vere le due circostanze in cui del problema della duplicazione era stato discorso in pubblico, non bisogna nascondersi che, se un poeta e la Pizia se ne occuparono, esso deve essersi prima presentato alla mente di qualche geometra. Nasce quindi la questione di determinare la via per la quale i geometri arrivarono ad enunciarlo. Per risolverla si ricordi che, fra le scoperte che sono attribuite a PITAGORA, vi è tanto la costruzione di una figura piana simile ad una seconda ed eguale (cioè equivalente) ad una terza, quanto il teorema dell'ipotenusa. Ora, la prima di queste scoperte non eccita forse subito alla ricerca di una figura solida simile ad una seconda ed eguale ad una terza, ricerca di cui la duplicazione del cubo è caso particolare? (1) Ed il teorema di PITAGORA (di cui è caso particolarissimo l'altro « il quadrato costruito sulla diagonale di un quadrato ha un'area doppia di questo quadrato ») non suggerisce subito la ricerca di un teorema analogo che insegni quale sia la lunghezza del lato di un cubo doppio di un altro? (2) Se da ultimo si tien conto del fatto che il primo scienziato, che abbia studiato con successo la questione della duplicazione del cubo fu un discepolo di PITAGORA (cioè IPPOCRATE), non appare forse come estremamente verosimile che questa questione siasi in origine agitata fra coloro che in PITAGORA salutavano il proprio maestro e che nelle sue dottrine trovavano il codice su cui regolare la propria vita intellettuale?

L'avere IPPOCRATE ridotto il problema della duplicazione del cubo a quello di « inserire fra due rette date due medie proporzionali » è attestato, come vedemmo, da ERATOSTENE ed è confermato da PROCLO. Ciò, d'altronde, non ha nulla d'improbabile; infatti IPPOCRATE potè essere indotto a cercare un legame fra quelle due questioni dal

(1) REIMER, l. c., p. 18.
(2) BRETSSHNEIDER, l. c., p. 97.

fatto che il problema della duplicazione del quadrato è incluso in quello di « inserire fra due rette date una media proporzionale » (1); inoltre, per uno che viene detto inventore dell' ἀπαγωγή e considerato come discepolo di PITAGORA (al quale, come sappiamo, debbonsi estesi studi sulle proporzioni) non doveva riuscir difficile il notare come dalle proporzioni:

$$a : x :: x : y :: y : b$$

risulti $a^3 : x^3 = a : b$ (2). Osserviamo da ultimo che l'importanza della surriferita riduzione (importanza che sembra negata da ERATOSTENE), è dimostrata a noi dalle molteplici e feconde ricerche che essa ha provocate e di cui ci occuperemo più avanti; tuttavia non si può disconoscere che, coll'avere trasformato un problema di geometria solida in altro di geometria piana, IPPOCRATE avrà involontariamente deviato i geometri dallo studio della stereometria (cfr. n. 56), impedendo così che questa progredisse con velocità comparabile a quella che manifestò la planimetria dei Greci.

43. - Per misurare il contributo arrecato da IPPOCRATE all'altro dei problemi che investigò, cioè al famoso problema della quadratura del cerchio, abbiamo una copiosa ed ottima fonte di notizie in un brano del Commento di SIMPLICIO alla *Physica auscultatio* di ARISTOTELE, nel quale sono letteralmente riprodotti alcuni passi dalla storia di EUDEMO. L'importanza di tale brano sfuggì al MONTUCLA ed agli storici immediatamente posteriori, finchè il BRETSCHNEIDER nel 1870 attrasse su di esso l'attenzione dei geometri, ripubblicando (3) con correzioni, chiose e spiegazioni. Ma SIMPLICIO non si limitò a copiare EUDEMO, al contrario vi aggiunse parecchio del suo. Siccome il BRETSCHNEIDER non seppe sceverare il testo primitivo dalle aggiunte, così arrivò a conclusioni che ven-

(1) REIMER, l. c., p. 24.

(2) Per altre congetture intorno al come IPPOCRATE sia stato condotto all'indicata riduzione, v. ALLMAN, l. c., p. 84.

(3) In base all'edizione *Simplicii comment. in octo Aristotelis physicae auscultationis libros.* Venetiis, 1526. — Il brano in questione si trova anche a p. 113-137 dell'opera: EUDEMI RHODII PERIPATETICI, *Fragmenta quae supersunt coll.* L. SPENGEL. Berolini, 1865; 2ª ed., 1870.

nero accettate soltanto da alcuni. Undici anni dopo l'ALLMAN, applicando certi suoi criteri filologici (1), riuscì a compiere tale separazione; finalmente nel 1882 apparve l'edizione critica di SIMPLICIO (2), con un testo assai migliorato ed un saggio di separazione delle interpolazioni fatte al frammento di EUDEMO. Nel prepararla l'editore DIELS chiese ed ottenne l'aiuto dell'USENER, e questi, procedendo con metodo somigliante a quello dell'ALLMAN, giunse a risultati che in parte coincidono con quelli del dotto inglese, ma in parte ne discordano. Il TANNERY, dopo avere esposte alcune osservazioni critiche sull'argomento (3), nel 1883 diede in luce il testo di EUDEMO con traduzioni e commenti (4); e tale restituzione venne poco dopo sottoposta ad una critica minuta da parte dell'HEIBERG (5). Per circa vent'anni la questione fu abbandonata; la riprese F. RUDIO dedicandovi alcune pubblicazioni (6), che ne provocarono altre da parte di P. TANNERY (7) e W. SCHMIDT (8); egli coronò degnamente le

(1) Oltre alla regola di sopprimere tutte le citazioni di EUCLIDE, noto quella che emerge dall'osservazione seguente. Da EUCLIDE in poi tutti i geometri Greci, per indicare la retta *AB*, il punto *K*, scrivono ἡ AB, τὸ K, mentre (come avvertì BRETSCHNEIDER, l. c., p. 114) nel frammento di SIMPLICIO si trovano le designazioni ἡ ἐφ' ἧAB, τὸ ἐφ' οὗ K usate anche da ARISTOTELE; la loro presenza può quindi intendersi come indizio che il passo ove si trovano è tolto da SIMPLICIO e EUDEMO.

(2) *Simplicii in Aristotelis physicorum libros quattuor priores Commentaria,* edit HERMANUS DIELS. Berlin, 1882.

(3) V. la pref. dell'ed. testè citata, p. XXVI-XXXI.

(4) P. TANNERY, *Le fragment d'Eudème sur le quadrature des lunules* (*Mém. de la Société de Bordeaux,* T. V della 2ª Serie, p. 211-236). Cfr. dello stesso autore *Hippocrate de Chio et le quadrature des lunules* (ib., T. II, 1878).

(5) *Griechische und Römische Mathematik* (*Philologus,* T. XLIII, 1884, p. 337-344).

(6) *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates* (Bibl. mathem., 3ª Serie, T. III, 1902); *Zur Rehabilitation des Simplicius* (Id., T. IV, 1903); *Die Möndchen des Hippokrates* (Vierteljahrsschrift d. naturf. Gesell. in Zürich, T. 50, 1905); *Notizen zu dem Berichte des Simplicius* (Ivi).

(7) *Simplicius et la quadrature du cercle* (Bibl. math., 3ª Serie, T. III, 1902).

(8) *Zu dem Berichte des Simplicius über die Möndchen des Hippokrates* (Bibl. math., 3ª Serie, T. IV, 1903).

sue assidue e coscienziose ricerche pubblicando in apposito volume (1) il testo critico di quel lavoro.

Malgrado tutti questi lavori, la questione del punto di vista filologico non si ritiene ancora completamente esaurita (2); ma, per lo storico della matematica, può dirsi completamente chiarita, giacchè le eventuali future modificazioni al testo Eudemiano non potranno alterare il concetto che oggi si può formarsi e intorno al valore delle ricerche di IPPOCRATE e intorno allo stato della geometria al suo tempo.

44. - Per giungere a tale risultato presenteremo le argomentazioni e le conclusioni del geometra di Chio sotto forma un po' diversa da quella usata da EUDEMO e SIMPLICIO e che ci sembra farne meglio metterne in luce la sostanza matematica.

Sembra che IPPOCRATE, riusciti vani i suoi sforzi per quadrare il cerchio, siasi posta la questione: *esistono porzioni di piano limitate ciascuna da due archi di cerchio contermini ed equivalenti ad un poligono rettilineo?* Ad esso egli rispose nel modo più persuasivo e pienamente conforme allo spirito della geometria greca (quale risulta dagli *Elementi* di EUCLIDE): cioè costruendo effettivamente alcuni di siffatti biangoli, da lui denominati *menischi* e che noi chiameremo *lunole*. Per rispondere a quella questione sarebbe bastata una sola di quelle figure; egli invece insegnò la costruzione di tre, caratterizzate rispett. dall'avere per arco esterno (maggiore) un arco eguale, maggiore o minore di una circonferenza.

a) La prima e più nota si costruisce come segue (fig. 14): Dato un semicerchio di diametro AB e centro Δ, si conduca il raggio ΓΔ perpendicolare a AB, e sulla corda AΓ come diametro si descriva un semicerchio AEΓ: la lunola AEΦΓ (v. anche fig. 15) è esattamente quadrabile.

(1) *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates, Griechisch und Deutsch* Leipzig, 1907. Nella posteriore *Notiz zur Griechischen Terminologie* (Vierteljahrss. der nat. Ges. in Zürich, T. 53, 1908) il RUDIO espose alcune nuove osservazioni intorno al significato della parola τμῆμα.

(2) Cfr. p. 424 dell'articolo *Exakte Wissenschaften un Medizin* di J. L. HEIBERG in A. GERCKE und E. NORDEN, *Einleitung in die Alterthumswissenschaft.* Leipzig, 1910.

Infatti essa equivale a:

semicerchio AEΓ — segmento AΦΓ

ossia

semicerchio AEΓ — (settore ΔAΦΓ — triangolo AΓΔ)

cioè

(semicerchio AEΓ — settore ΔAΦΓ) + triangolo AΓΔ.

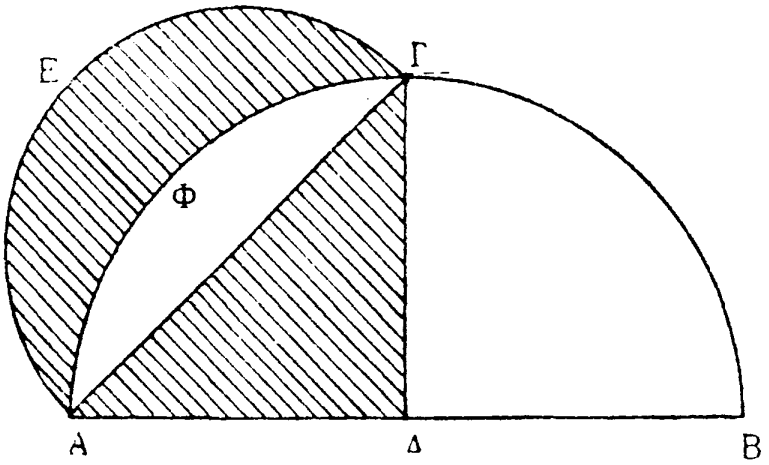


Fig. 14.

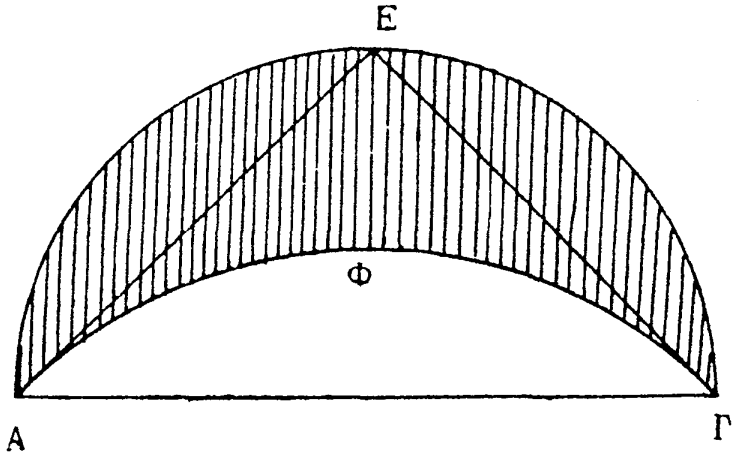


Fig. 15.

Ora il semicerchio AEΓ può riguardarsi come un settore circolare di angolo π ed il settore ΔAΦΓ ha per angolo $\frac{\pi}{2}$; di più il quadrato del raggio del secondo è evidentemente eguale al doppio del quadrato del raggio del primo; onde

semicerchio e settore sono equivalenti epperò :

lunola $AE\Gamma\Phi$ = triangolo $A\Gamma\Delta$.

b) Più riposta è la costruzione delle altre due lunole. Nella prima si parte (fig. 16) dalla considerazione di un

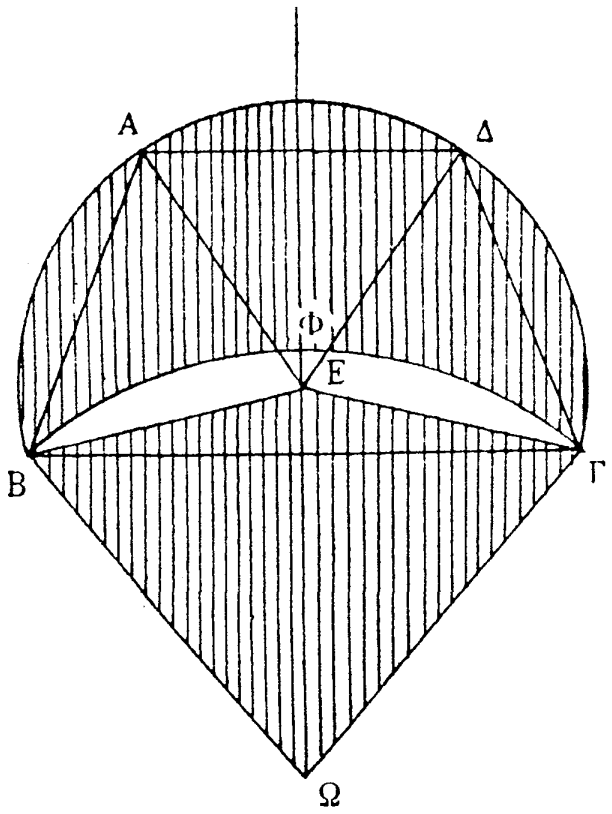


Fig. 16.

trapezio $AB\Gamma\Delta$ avente tre lati AB , $A\Delta$, $\Gamma\Delta$ fra loro eguali ed il rimanente $B\Gamma$ maggiore degli altri tre e tale che :

$$(1) \qquad \overline{B\Gamma}^2 = 3\,\overline{AB}^2,$$

esso è inscritto in un cerchio di cui E sia il centro. Se ora si descrive sopra $B\Gamma$ ed entro il trapezio un arco $B\Phi\Gamma$ di centro Ω simile ai tre archi AB , $A\Delta$, $\Gamma\Delta$, esso, assieme all'arco $BA\Delta\Gamma$ determinerà una lunola pure esattamente quadrabile.

Per dimostrarlo in modo analogo a quello tenuto per la lunola precedente, si osservi che l'area dell'anzidetta lunula vale :

segmento $BA\Delta\Gamma$ — segmento $B\Phi\Gamma$

ossia (settore EBAΔΓ + triangolo BΓE) —
— (settore ΩBΦΓ — triangolo BΓΩ),

cioè (settore EBAΔΓ — settore ΩBΦΓ) +
+ (triangolo BΓE + triangolo BΓΩ).

Ma

$$\text{settore } EBA\Delta\Gamma = \frac{1}{2}\,\overline{EA}^2 \text{ ang. } \Gamma EB$$

$$\text{settore } \Omega B\Phi\Gamma = \frac{1}{2}\,\overline{\Omega B}^2 \text{ ang. } B\Omega\Gamma;$$

e per costruzione,

$$\text{ang. } \Gamma EB = 3 \text{ ang. } B\Omega\Gamma;$$

essendo poi simili i due triangoli ΩBΓ, EAB della relazione (1) si trae:

$$\overline{\Omega B}^2 = 3 \cdot \overline{EA}^2.$$

Dunque quei due settori sono equivalenti, epperò:

$$\text{lunola } BA\Delta\Gamma\Phi = \text{quadrilatero } \Omega B\Phi\Gamma.$$

Giunto a questo punto IPPOCRATE si arresta a dimostrare che l'arco esterno della lunola in questione è *superiore* ad una semicirconferenza.

c) Per costruire l'ultima delle sue lunole, il nostro geometra parte dalla considerazione di un semicerchio, di diametro AB e centro K (fig. 17), e dalla retta bisecante ortogonalmente (in Γ) il raggio BK. Fra tale retta e la circonferenza si inserisca una retta EZ diretta verso B e tale che sia:

$$(2) \qquad 2\,\overline{EZ}^2 = 3\,\overline{AK}^2.$$

Si conduca poi la retta KZ e se ne determini la intersezione H con la parallela condotta dal punto E al diametro AB. I punti E, Z, H appartengono ad un arco di cerchio col centro Ω sopra la retta ΓZ; così i punti E, K, B, H stanno sopra un arco circolare col centro Θ sopra la stessa retta. Tali due archi limitano la terza delle lunole ippocratiche.

Per dimostrare che essa è quadrabile serve un ragionamento simile a quello usato nei casi precedenti. Osserveremo cioè che la lunola in questione è equivalente a

segmento EMH — segmento EZH ,

ossia (settore ΘEMH — triangolo ΘEH) —
— (settore ΩEZH — triangolo ΩEZH) ,

cioè (settore ΘEMH — settore ΩEZH) +
+ (triangolo ΩEZH — triangolo ΘEH).

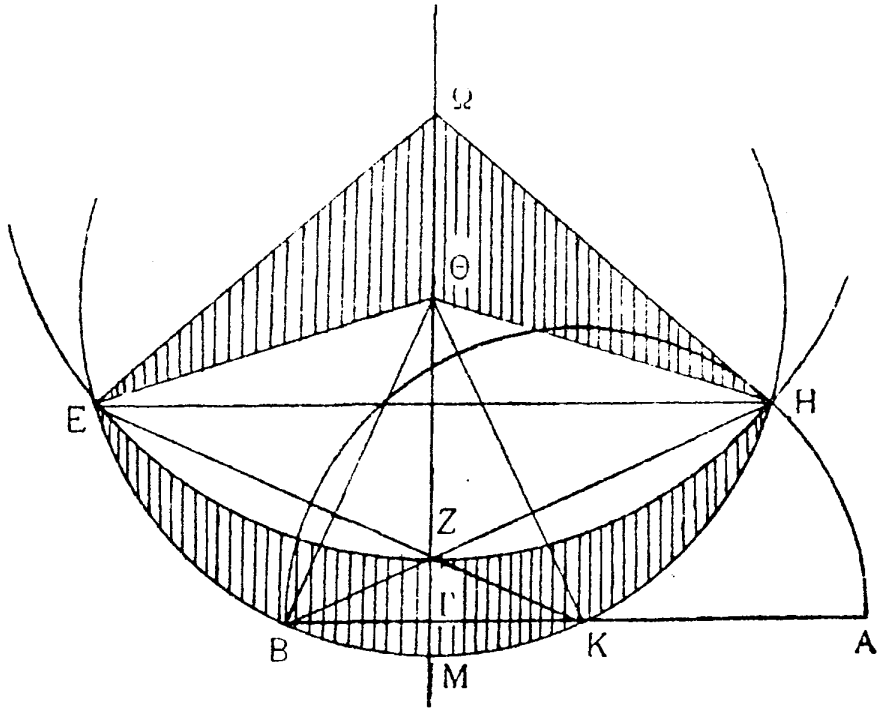


Fig. 17.

Dimostreremo che questi due settori sono fra loro equivalenti ed allora risulterà essere la detta lunola equivalente al quadrilatero EΘHΩ.

A tale scopo chiamiamo φ la comune ampiezza degli angoli EHZ , HEZ , ZBK , ZKB. Sarà allora:

$$E\Omega Z = H\Omega Z = E\Theta K = B\Theta H = 2\varphi$$

perchè se due angoli, uno al centro e l'altro alla circonferenza insistono sopra lo stesso arco, il primo è doppio del secondo. Inoltre per costruzione EB = BK = KH, onde anche ang. BΘ = 6 φ. Ne viene:

$$\text{ang. } E\Omega H = 4\varphi \text{ , ang. } E\Theta H = 6\varphi .$$

Inoltre i due triangoli isosceli ΩEZ e ΘKB, avendo gli angoli al vertice eguali entrambi a 2φ sono simili, onde:

$$\frac{\Omega E}{\Theta K} = \frac{EZ}{KB} = \sqrt{\frac{3}{2}};$$

è dunque

$$3 \text{ ang. } E\Omega H = 2 \text{ ang. } E\Theta H,$$

e

$$2 \cdot \overline{\Omega H}^2 = \overline{\Theta K}^2,$$

relazioni di cui subito si trae che i due sopraindicati settori sono equivalenti, epperò che la lunola in questione è quadrabile (1).

(1) Le considerazioni che abbiamo esposte per dimostrare la quadrabilità delle lunule ippocratiche hanno un elemento comune, che risulta evidente dalla loro attenta lettura e su cui vale la pena di soffermarsi un istante.

Sia AB (fig. 18) la corda comune ai due archi $AE'B$, $AE''B$ che limitano una lunula quadrabile, C' e C'' i centri di tali archi, r' e r'' i loro raggi, $2\omega'$ e $2\omega''$ i loro angoli al centro. Si ha evidentemente:

$$\begin{aligned} \text{Lunola } AE'BE'' &= \text{segmento } AE''B - \text{segmento } AE'B \\ &= (\text{settore } C''AE''B - \text{triangolo } C''AB) - \\ &- (\text{settore } C'AE'B - \text{triangolo } C'AB) = \\ &= (\text{settore } C''AE''B - \text{settore } C'AE'B) + \\ &+ (\text{triangolo } C'AB - \text{triangolo } C''AB). \end{aligned}$$

Ora se i punti C' e C'' si scelgono in modo che risulti:

$$(*) \qquad \text{settore } C'AE'B = \text{settore } C''AE''B$$

risulterà:

$$\text{Lunola } AE'BE'' = \text{quadrilatero } C'AC''B$$

e la lunola sarà quadrabile.

La condizione (*) può evidentemente scriversi:

$$r'^2 \omega' = r''^2 \omega''$$

ossia

$$r''^2 = k r'^2, \omega' = k \omega''$$

k essendo un numero che Ippocrate suppone razionale; attribuendovi i valori $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ si ottengono le tre lunole esposte nel testo.

Th. Clausen nell'articolo *Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrinbar ist* (Journ. f. Math., T. XXI, 1840), rias-

Del cui arco esterno IPPOCRATE non manca di dimostrare la proprietà di essere *inferiore* ad una semicirconferenza.

---

sunto a p. 304-307 del II vol. (Leipzig, 1907) dell'opera di F. ENRIQUES, *Fragen der Elementargeometrie, deutsch von* FLEISCHER, partendo dalla prima delle lunole di IPPOCRATE, ha ritrovate le altre due e ve ne aggiunse due altre corrispondenti ai valori $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$ di k. — M. SIMON ha rilevato (*Geschichte der Mathem. im Alterthum.* Berlin, 1909, p. 174). che le cinque lunole quadrabili si trovano già nella Dissertazione di Laurea (1766) di

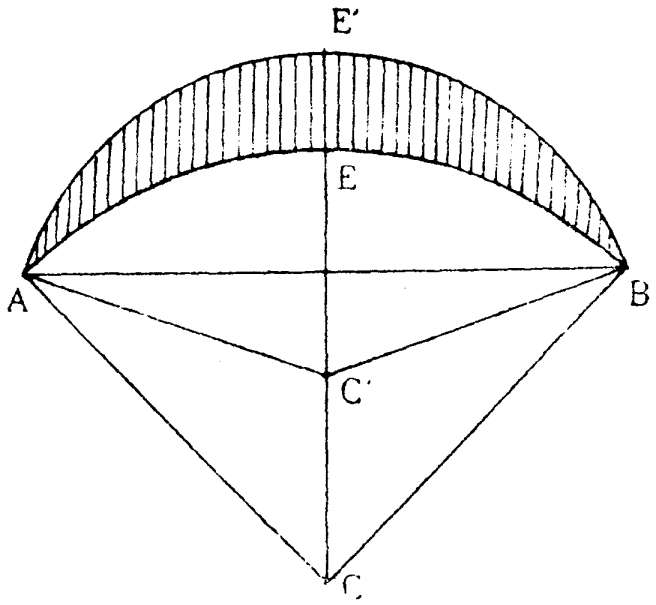


Fig. 18.

J. WALLERIUS. — Di recente E. LAUDAU, *Ueber quadrirbare Kreisbogen zweiecke;* Sitzungsber. der Berliner mathem. Ges., II Iahr, 1903, ha notato che per ottenere lunule quadrabili non è *necessario* supporre nulla la differenza $r'^2\omega' - r''^2\omega''$, ma è *sufficiente* supporla eguale ad un'area quadrabile e giunse così a risultati che toccano il lato algebrico della questione, giacchè portarono, non a nuove lunole quadrabili, ma a stabilire la inesistenza di infinite altre. — Aggiungiamo che, sino dal 1687, E. W. TSCHIRNHAUSEN (1651-1708) ha notata la esistenza di infinite porzioni quadrabili della prima delle lunole ippocratiche, dando così lo stimolo ad una serie di curiose ricerche, che il LACROIX ha lucidamente compendiate nella nota che si trova a p. 41-44 della II ed. (Paris, 1831) dell'*Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* del MONTUCLA.

45. - Il nostro matematico ha poi osservato che esistono altre lunole, che non sono quadrabili ma che differiscono dall'area di una frazione di circolo per un'area quadrabile, dimodo-

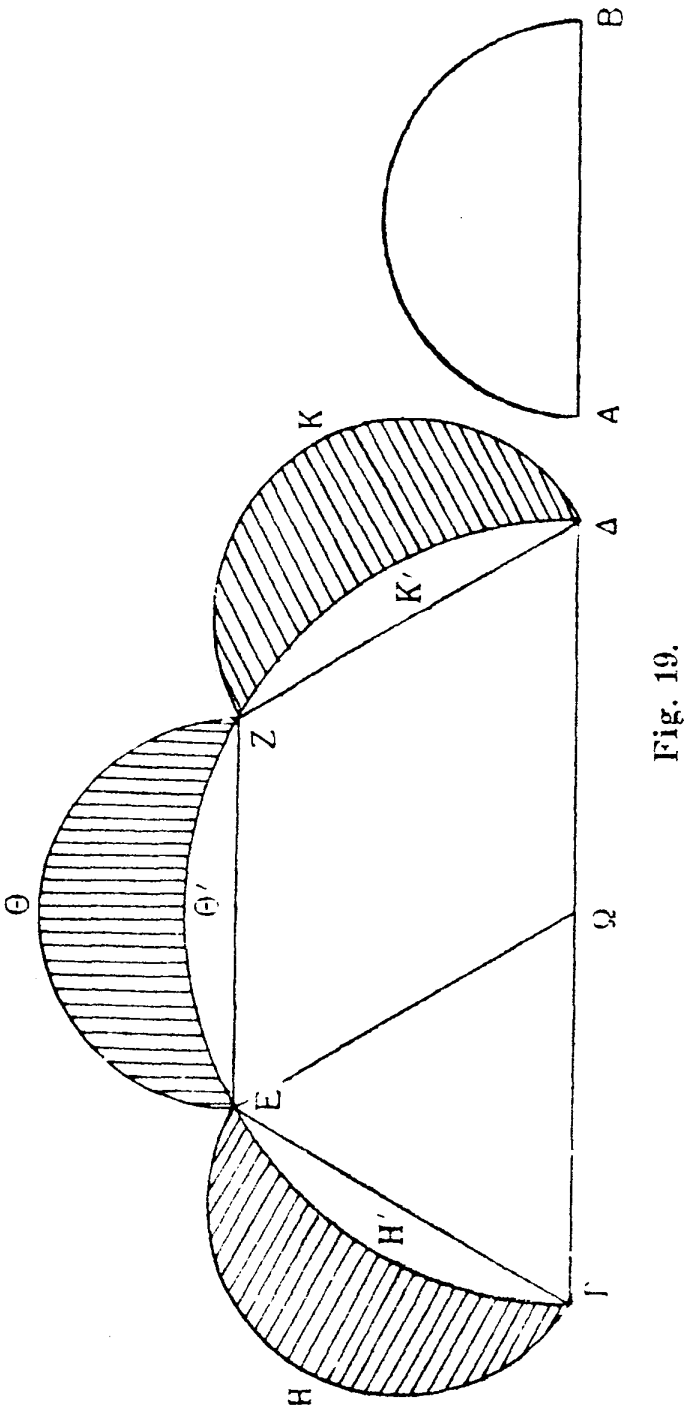


Fig. 19.

chè il problema di quadrarla non differisce da quello di quadrare il circolo. Di tali figure egli ha offerto due esempi interessanti.

a) Una si ottiene così. Dato (fig. 19) un semicerchio di dia-

metro AB, se ne costruisce una secondo ΓΔ di centro Ω e diametro doppio, sul quale s'inscrive il semiesagono regolare ΓEZΔ ; sopra ciascuno dei suoi lati come diametro si descrive un semicerchio e così si determinano tre lunole fra loro eguali. Ora si ha:

$$\begin{aligned}\text{semicerchio } \Gamma\Delta &= 4 \text{ semicerchio AB}\\ &= \text{semicerchio AB} + 3 \text{ semicerchio } \Gamma E\\ &= \text{semicerchio AB} + 3 \text{ segm. } \Gamma H'E +\\ &\qquad + 3 \text{ lunola } \Gamma HEH',\end{aligned}$$

onde

$$\text{semic. } \Gamma\Delta - 3 \text{ segm. } \Gamma H'E = \text{semic. AB} + 3 \text{ lun. } \Gamma HEH',$$

cioè

$$\text{semiesagono } \Gamma\Delta ZE = \text{semic. AB} + 3 \text{ lun. } \Gamma HEH',$$

donde

$$\text{lunola } \Gamma HEH' + \frac{1}{3} \text{ semic. AB} = \text{triangolo } \Omega\Gamma E,$$

relazione che evidentemente riduce la quadratura della considerata lunola a quella del cerchio o viceversa.

b) Un'altra relazione dello stesso tipo si ottiene partendo (fig. 20) da un esagono regolare ABΓΔEZ di centro K e descrivendo un cerchio concentrico il cui raggio al quadrato sia sestuplo del quadrato del lato dell'esagono. Supposto che i raggi KA , KB , KΓ taglino la periferia di questo cerchio nei punti H , Θ , I, si conduca la retta HI e su di essa si descriva un arco HΘ'I simile all'arco HΘ : nasce così la lunola HΘI'Θ', che è appunto quella considerata da IPPOCRATE. Per stabilirne una proprietà si noti che evidentemente:

$$\overline{HI}^2 = 3\,\overline{H\Theta}^2$$

epperò $\qquad 3$ segmenti HΘ = segmento HΘ'I.

Ora per costruzione:

$$\overline{H\Theta}^2 = 6\,\overline{AB}^2$$

onde

$$\text{segm. } H\Theta = 6 \text{ segm. AB} = \text{segm. AB} + \ldots + \text{segm. ZA}$$

e

$$\begin{aligned}\text{segm. HI} &= \text{segm. H}\Theta + \text{segm. }\Theta\text{I} +\\ &\quad + \text{segm. AB} + \ldots + \text{segm. ZA}.\end{aligned}$$

Ora

lun. HΘIΘ′ = triang. HIΘ + segm. HΘ + segm. ΘI — segm. HΘ′I

onde

lun. HΘIΘ′ = triangolo HIΘ — (segm. AB + . . . + segm. ZA)

= triang. HIΘ + esag. ABΓΔEZ — circ. ABΓΔEZ.

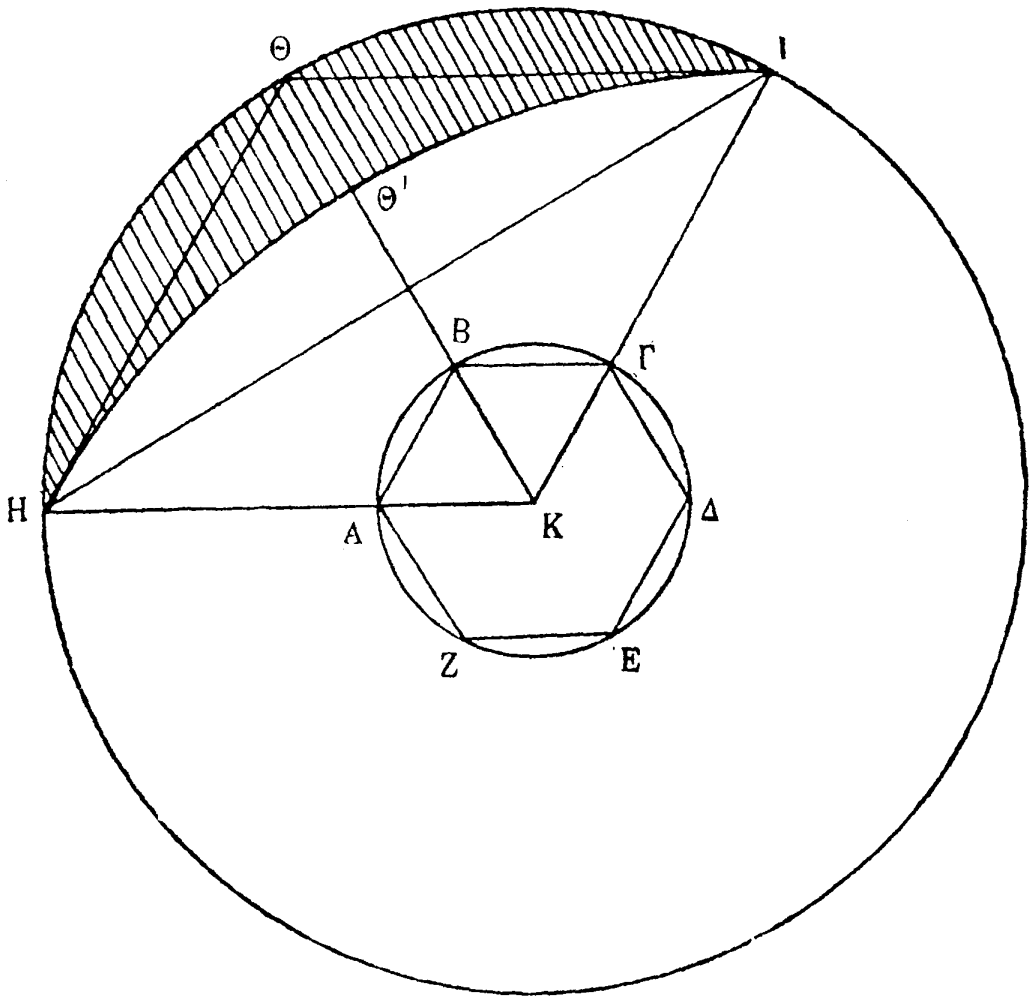


Fig. 20.

Da ciò la relazione:

lunola + circolo = triangolo + esagono

che è quella che trattavasi di stabilire.

46. - Esaminando accuratamente la parte che appartiene ad IPPOCRATE del succitato brano del *Commento* di SIMPLICIO (brano che deve oggi ritenersi come il *primo docu-*

mento scritto della geometria greca pervenutoci), si trova in essa esplicitamente o implicitamente fatto uso delle proposizioni seguenti:

TEOREMI. (*a*) Segmenti circolari simili contengono angoli uguali. (*b*) Questi angoli sono retti in tutti i semicircoli; mentre i segmenti che sono maggiori o minori di semicircoli contengono angoli che sono minori o maggiori di angoli retti. (*c*) Il lato dell'esagono regolare inscritto in un cerchio è eguale al raggio. (*d*) In qualunque triangolo il quadrato di un lato opposto ad un angolo acuto è minore della somma dei quadrati dei lati di quest'angolo. (*e*) In un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è maggiore della somma dei quadrati dei lati di questo angolo. (*f*) Se un triangolo isoscele ha l'angolo al vertice doppio dell'angolo del triangolo equilatero, il quadrato della base è triplo del quadrato di uno dei lati eguali. (*g*) I lati omologhi di due triangoli equiangoli sono proporzionali. (*h*) I circoli stanno fra loro come i quadrati dei loro diametri (1). (*i*) Due segmenti circolari simili stanno fra loro come i quadrati delle loro basi.

PROBLEMI. (α) Costruire un quadrato equivalente ad una data figura rettilinea. (β) Trovare un quadrato triplo del quadrato di una data retta. (γ) Trovare una linea il cui quadrato raddoppiato eguagli il triplo del quadrato di una data retta. (δ) Costruire un trapezio avente un lato eguale ad una data retta e gli altri tre eguali ad un'altra che sia minore della precedente. (ε) Circoscrivere un cerchio a questo trapezio. (ζ) Circoscrivere a un triangolo un cerchio. (η) Dato un semicerchio e la perpendicolare a un suo raggio nel punto medio, condurre per l'estremo di questo raggio una retta tale che la sua parte inscritta fra la circonferenza e la perpendicolare sia di data lunghezza. (ϑ) Su una data retta descrivere un segmento simile ad un segmento dato.

Se paragoniamo la totalità delle cognizioni geometriche rivelate da questo catalogo di proposizioni col sapere geometrico dei Pitagorici, vedremo subito che la differenza è,

(1) Riguardo al metodo di dimostrazione usato da IPPOCRATE si vegga il n. 72, ove si troveranno delle osservazioni atte a collegare il geometra di cui ci stiamo occupando alla scoperta del metodo di esaustione.

in generale, molto notevole, e che, in particolare, essa vale a colmare la lacuna che la geometria di PITAGORA presenta per quanto concerne il cerchio. Vale poi la pena di notare come strano il fatto che i teoremi (*d*, *e*), i quali completano il teorema di PITAGORA, non abbiano ottenuto l'accesso negli *Elementi* di EUCLIDE. Se ciò può destare una ragionevole meraviglia, altrettanto non ci sembra potersi ripetere riguardo all'assenza negli *Elementi* stessi delle lunole di IPPOCRATE: le relative ricerche, per quanto benevolmente vengano giudicate, non possono ritenersi che come un conato geniale, ma infruttuoso, oppure come eleganti applicazioni di proposizioni fondamentali; in un modo o nell'altro non entravano nel piano degli *Elementi*. In conseguenza noi non troviamo in tale esclusione un solido punto d'appoggio per concludere che le ricerche di IPPOCRATE non facessero parte degli elementi geometrici che gli sono attribuiti (secondo taluni, se vi fossero entrate, EUCLIDE le avrebbe conservate nella sua opera); tuttavia noi incliniamo ad ammettere che esse formassero un trattato speciale, e lasciamo irrisoluta la questione se la redazione di questo abbia preceduto o seguito la compilazione degli elementi attribuiti al geometra di Chio.

Prima di trarre dal brano di SIMPLICIO le nostre ultime conclusioni, è necessario dire come mai quel commentatore abbia creduto necessario diffondersi sopra siffatte considerazioni matematiche.

ARISTOTELE in un passo della sua *Fisica* (ed. BECKER, T. I, p. 185) combatte la concezione del mondo ammessa nella Scuola Eleatica, secondo cui l'essere è « uno ed immutabile » e dichiara che non sono da confutare tutte le proposizioni false, ma soltanto quelle che *non* urtano contro i principi e chiarisce come segue la differenza fra queste due specie di proposizioni: « così, per esempio, è compito del geometra il confutare la quadratura col mezzo di lunole, mentre non ispetta a lui il confutare quella di ANTIFONTE ». Il senso di tali esempi non essendo evidente per tutti SIMPLICIO credette suo dovere di chiarirlo con un passo che comincia con le frasi seguenti:

Mentre molti cercavano la quadratura del circolo (il che significa costruire un quadrato eguale ad un circolo), ANTIFONTE ed IPPOCRATE da Chio credettero averla trovata. Ma il porre

in luce lo sbaglio di ANTIFONTE non è compito da geometri, perchè egli, come vedremo, non è partito da principi geometrici: spetta invece ai geometri il confutare IPPOCRATE, dal momento che egli ha errato, benchè abbia proceduto con la scorta di principi geometrici.

SIMPLICIO si occupa subito di ANTIFONTE (v. n. 48), passa poi ad IPPOCRATE, riferendo tanto la quadratura della lunola avente per arco esterno una semicirconferenza (fig. 14) quanto la relazione a cui dà luogo la lunola avente per arco interno la sesta parte della circonferenza (fig. 20). E' chiaro che se tali due lunole fossero della medesima specie, il celebre problema sarebbe subito risoluto; orbene SIMPLICIO (o forse ARISTOTELE) attribuisce ad IPPOCRATE quella erronea identificazione, e così ha collocato IPPOCRATE nella troppo numerosa schiera costituita da coloro che si illusero di avere quadrato il cerchio. Da notarsi che SIMPLICIO fa anche cenno di tentativi per quadrare un cerchio col decomporlo in lunole quadrabili, paternamente ammonendo che essi non possono condurre allo scopo.

47. - Ora quanto si riferì nei nn. 44-45 fa fede, oltre che di vaste cognizioni geometriche, del genio inventivo di IPPOCRATE e della pratica che egli aveva nel combinare le proposizioni geometriche per raggiungere un determinato scopo. Una sola frase erronea — quella cioè che asserisce esser quadrabile la lunola avente per base il lato dell'esagono perchè lo è quella avente per base il lato del quadrato — fece sì che i più (1) seguirono ARISTOTELE nel collocare IPPOCRATE nella coorte degli infelici che s'illusero di avere quadrato il circolo; ma a partire dal 1870 (2) è nata e si è sviluppata una corrente favorevole al geometra di Chio; quanto ciò sia ragionevole è dimostrato da un esame accurato del testo.

---

(1) Anche EUTOCIO; v. l'ed. cit. di ARCHIMEDE, vol. III, p. 255.

(2) Ci esprimiamo così perchè, soltanto quindici anni dopo. il pubblico matematico conobbe il giudizio che in principio del nostro secolo il LEONELLI (1776-1846) pronunciava su IPPOCRATE scrivendo: " Se un uomo verbioso e semplice ripetitore, avesse fatto tale sofisma, non lo troverei straordinario; ma che sia stato fatto da chi diede prove di genio, e senza secondo fine, io non lo credo „. (*Bullettino di Bibl. e St. delle Scienze mat. e fis.*, T. XVIII, 1885, p. 667).

Come infatti, dopo averlo letto attentamente, si può pensare che IPPOCRATE identificasse due lunole di natura differente, egli che aveva tanta famigliarità con tali figure da proporsi la questione di costruire delle lunole quadrabili con archi esterni sia maggiori sia minori di una semicirconferenza, e anche delle lunole quadrabili assieme ad un circolo? (1) Non si dimentichi poi che ad IPPOCRATE viene attribuito il metodo di riduzione; che a lui si fa merito di averlo applicato con successo al problema di Delo: qual cosa adunque di più naturale di ammettere che lo scopo che egli si propose sia stato di *ridurre* il problema della quadratura del circolo a quella della quadratura di una lunola? che, non potendo servisi utilmente della lunola sul lato del quadrato, si sia rivolto a quella sul lato dell'esagono, e poi ad altre più generali, ma che, vista la vanità di tali tentativi, abbia pensato a quadrare, se non il circolo od una lunola presi separatamente, almeno l'insieme di due tali figure? Vero è che ad ammettere queste conclusioni sembra opporsi il giudizio che *si dice* avere ARISTOTELE pronunciato su IPPOCRATE; ma si noti che questo giudizio ci arrivò pel tramite di ALESSANDRO d'Afrodisia (Caria), commentatore appartenente alla fine del II sec. dell'E. v. (2), e di SIMPLICIO, vissuto tre secoli dopo, della cui intelligenza matematica non possediamo alcuna prova; è dunque ammissibile (secondo noi, anzi, probabile) che essi abbiano frainteso il loro maestro, applicando a certi paralogismi parole che ARISTOTELE dirigeva contro altri (3).

Per queste ragioni — pur senza dimenticare che vi furono altri geometri eminenti (ad. es. GREGORIO DI S. VINCENZO) che si ingannarono credendo di avere raggiunta la mèta cui

---

(1) Si noti eziandio l'analogia di questo concetto con quello che guidò i geometri che, non potendo rettificare un arco di ellisse, si proposero di trovare delle coppie di tali archi la cui differenza fosse eguale ad un segmento rettilineo.

(2) Discepolo di ARISTOTELE, egli ne insegnò le idee da una cattedra che occupò circa nel periodo 198-211 dell'E. v. e si fece editore delle sue opere, spiegandone i passi oscuri; il suo commento alla *Fisica* aristotelica andò sgraziatamente perduto. Per ulteriori notizie si ricorra a ZELLER, *Die Philos. der Griechen*, III Tl., I Abt., 4. Aufl. Leipzig, 1909, p. 817 e segg.

(3) Cfr. HEIBERG, *Philologus*, T. 43, p. 343-4.

tendeva il matematico di cui ci occupiamo — noi, fino a prova contraria, ci schieriamo fra gli oppositori di coloro che, col MONTUCLA, non considerano IPPOCRATE se non come l'autore di « un tour de passe-passe géométrique » (1).

Antifonte e Brissone.

48. - Il frammento di SIMPLICIO, in base a cui tentammo misurare il valore del contributo arrecato da IPPOCRATE al problema della quadratura del circolo, ci dà eziandio notizia degli sforzi fatti nello stesso intento da quell'ANTIFONTE che per professione interpretava i pronostici e per diletto sosteneva con SOCRATE dispute filosofiche. Tali sforzi sono nel citato frammento ascritti fra i conati infruttuosi, e l'epiteto di paralogismo dato da SIMPLICIO al modo di argomentare di ANTIFONTE fu ripetuto da altri (2). Ma a questa severa condanna ci è impossibile fare eco, per ragioni che diremo dopo di avere riferite le parole di SIMPLICIO:

Ora ANTIFONTE descrisse un circolo (v. fig. 21) e vi disegnò dentro un poligono, uno di quelli che possono inscriversi. Sia p. es. inscritto un quadrato. Dimezzando poi ognuno dei lati del quadrato, elevò dai punti di divisione perpendicolari ai lati sino agli archi circolari corrispondenti; ognuna delle quali evidentemente biseca il corrispondente segmento circolare. Poi tracciò le congiungenti dei punti di divisione con gli estremi dei lati del quadrato, cosicchè nacquero quattro triangoli sopra i lati, e tutta la figura inscritta divenne un ottagono. E proseguendo poi con lo stesso metodo, bisecò ciascun lato dell'ottagono, condusse dai punti di divisione perpendicolari ai lati e, dai punti in cui incontravano gli archi di cerchio, congiungenti agli estremi

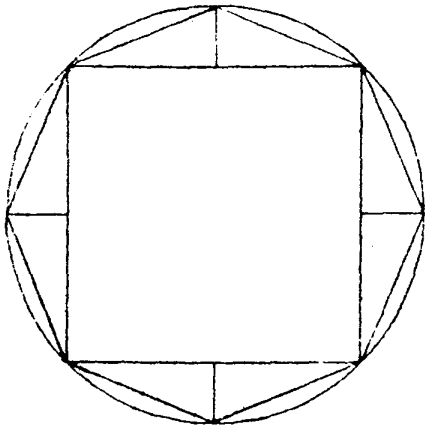


Fig. 21.

(1) *Hist. des math.*, 2ª ed., T. I, p. 152.

(2) V. il passo del commento di TEMISTIO ad ARISTOTELE riportato da BRETSCHNEIDER, l. c., p. 125.

delle rette divise, e così trasformò il poligono iscritto in uno di sedici lati e condusse congiungenti e così raddoppiò il numero dei lati del poligono inscritto, e così continuando egli credeva che finalmente fosse esaurita la superficie e che in questo modo sarebbe inscritto nel cerchio un poligono i cui lati, stante la loro piccolezza, sarebbero venuti a coincidere con il contorno del cerchio. Ora, siccome per qualunque poligono si può costruire un quadrato eguale, come è dimostrato negli *Elementi*, così, dal momento che il poligono coincidendo col cerchio è da considerarsi ad esso eguale, noi saremo in grado di costruire un quadrato eguale ad un cerchio. Ebbene è chiaro che questo ragionamento è in opposizione ai principii geometrici; ma non, come dice ALESSANDRO (d'Afrodisia) " perchè il geometra assume come principio che una retta incontra un cerchio in punti, mentre ANTIFONTE ammette il contrario „. Giacchè il geometra (EUCLIDE) non ammette ciò, ma lo dimostra nel III Libro (degli *Elementi*). Ma è meglio dire dunque che in generale è impossibile che una retta coincida con un arco circolare, ma incontrerà in un solo punto il circolo esterno, in due e non più uno interno. E se si divide continuamente la superficie compresa fra le rette e gli archi circolari non si arriverà mai ad esaurirla, nè si giungerà mai agli archi circolari, chè d'altronde una superficie è divisibile sino all'infinito e se vi si giungesse, sarebbe soppresso un principio geometrico, quello cioè che dice che le grandezze sono divisibili all'infinito. E che tale principio sia stato soppresso da ANTIFONTE, è detto anche da EUDEMO (1).

Ora non si deve dissimulare che l'idea d'inscrivere nel cerchio una serie di poligoni regolari, i cui numeri di lati formano una progressione geometrica di ragione 2, ha condotto nelle mani di ARCHIMEDE alla misura del circolo (2) ed in quelle del VIETA ad una notevolissima espressione in prodotto di infiniti fattori del valore del rapporto della circonferenza al diametro (3). E il considerare, come fa ANTI-

(1) Concorda con questa relazione quelle date da GIOVANNI FILOPONE nel suo Commento alla *Fisica* di ARISTOTELE e da TEMISTIO (vissuto a Costantinopoli circa fra il 317 ed il 387) nel suo congenere lavoro; però i dati che si attingono da quest'ultima differiscono da quelli forniti dagli altri in ciò che il primo poligono di partenza è, invece che un quadrato, un triangolo equilatero.

(2) V. il Libro II.

(3) Cfr.: CANTOR, *Vorlesungen*, II Bd., 2. Aufl., 1900, p. 595 e F. RUDIO, *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung*. Leipzig, 1892, p. 33-35.

FONTE, il circolo per un poligono infinitilatero è cosa oggimai accettata da tutti; ciò che si può imputare ad ANTIFONTE è di avere *identificato* il circolo ad un poligono, invece di considerarlo *come limite* di un tal poligono; ma il pretendere che egli possedesse la moderna precisione di idee e di linguaggio è cosa sragionevole, mentre invece è doveroso essergli grati di avere precorsi i suoi tempi, adoperando coraggiosamente l'infinito nella geometria.

49. - In questo egli ebbe compagno BRISSONE — il sofista figlio dello storico ERODORO da Eraclea, vissuto verso la metà del V sec. a. C. (1) — il quale però ebbe a considerare, non soltanto i poligoni regolari inscritti, ma eziandio i circoscritti e da tale considerazione simultanea credette far scaturire la quadratura del circolo. Per ciò BRISSONE ha diritto ad un posto nella storia della matematica; giacchè la considerazione simultanea dei poligoni inscritti e circoscritti ad una linea è una delle più importanti e feconde nella teoria metrica delle curve. Vi ha, secondo noi, diritto anche quando le notizie intorno ai suoi studi date da GIOVANNI d'Alessandria e ALESSANDRO d'Afrodisia (2) vengano interpretate come segue (3): « al circolo (fig. 22) C si circoscriva un quadrato Q_1; si inscriva in esso un altro quadrato Q_2 e quindi fra i due se ne segni un terzo Q_3; ora Q_3 è compreso fra Q_1 e Q_2, altrettanto dicasi di C, dunque C è eguale a Q_3 ». Infatti queste notizie sono così monche che da esse non emerge come si costruisca il quadrato Q_3; esse non inducono a concludere che BRISSONE commettesse l'errore di credere che, comunque si inserisca il quadrato Q_3 fra

---

(1) Ricordato anche da DANTE nei seguenti versi della *Divina Commedia:*

. . . . . .
Chi pesca per lo vero e non ha l'arte:
E di ciò sono al mondo aperte prove
Parmenide, Meliso, *Brisso* e molti
Li quali andavan, e non sapevan dove.

Paradiso, XIII, 123-126.

(2) BRETSCHNEIDER, l. c., p. 126-7.

(3) V. HEIBERG, *Philologus,* vol. 43, p. 336; ove, però, leggesi: " in der Geschichte der Mathematik verdient Bryson also kaum ein Platz „. Cfr. anche HEIBERG, *Revue critique,* T. XI, 1881, p. 380.

Q_1 e Q_2, sempre si ottenga una figura equivalente a C, ma solo che egli vedesse come un quadrato equivalente a C potesse inserirsi fra Q_1 e Q_2. Ove poi, seguendo l'esempio di un filosofo bizantino dal X sec., PSELLO (cfr. Lib. V, n. 65),

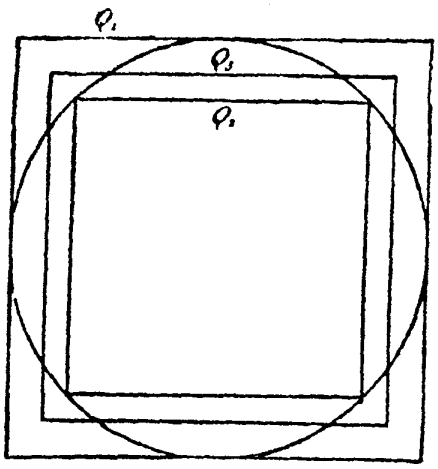


Fig. 22.

si attribuisce alle parole di BRISSONE il senso che l'area di Q_3 sia media proporzionale fra Q_1 e Q_2, allora si arriva ad una conclusione equivalente all'ammettere:

$$\pi = 2\sqrt{2} = 2{,}8284272\ldots$$

valore ben poco approssimato; ma se, mantenendo intatto tale concetto, lo si applica, invece che ad un quadrato, ad un poligono di un numero qualunque n di lati, si ottiene:

$$\pi = n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$$

ossia

$$\pi = \pi \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$$

relazione che sussiste al limite per $n = \infty$. Ora noi certamente non attribuiamo a BRISSONE siffatta argomentazione; ma nel fatto che il germe di essa si trova in quanto ci viene riferito come opera sua, troviamo una nuova ragione per

ritenere che il giudizio benevolo che le generalità dei matematici moderni (1) pronunciarono su di lui, sia da accettarsi come conforme a giustizia.

Archita di Taranto.

50. - Che i nobili germi diffusi dalle dottrine di PITAGORA non siano andati totalmente distrutti durante gli orrori di una feroce guerra civile (p. 73), è chiaramente dimostrato dal fatto che persino la voluttuosa Taranto potè venir governata mediante la disciplina delle virtù civili predicate dai Pitagorici, da un uomo uscito da quella scuola — l'*ultimus Pithagoreorum* — cioè ARCHITA (2). L'arte musica e la matematica, ispirate a precetti apollinei, una sapienza pratica della vita, fondata sul dominio dei sensi e indirizzata verso un perfetto ed armonico svolgimento di tutte le attitudini morali e fisiche, facevano di quell'uomo un'ideale dell'uomo elienico, in mezzo ad una stirpe degenerata (3). Per sette volte ei venne scelto da' suoi concittadini come στρατηγός e dalla confederazione delle città elleniche della Magna Grecia gli venne accordato, col titolo di comandante in capo, un potere autocratico. Generale abilissimo, non subì mai l'onta di una sconfitta; filosofo insigne, ebbe la gloria di annoverare PLATONE fra i propri discepoli; astronomo e geodeta stimato (4),

(1) BRETSCHNEIDER, CANTOR, ALLMAN. Un'attitudine diametralmente opposta viene assunta invece da F. RUDIO (v. il già citato volume *Der Bericht des Simplicio, ecc.* Leipzig, 1907, p. 108) e Bibliotheca mathematica, 3ª Serie, T. VII, 1907, p. 373.

(2) Cfr. J. NAVARRUS, *Tentamen de Archytae Tarentae vita atque operibus,* Hafniae, 1819, e *Vite inedite di matematici italiani scritte da* BERNARDINO BALDI *e pubblicate da* ENRICO NARDUCCI (*Bullettino di Bibl. e St. delle sc. Mat. e Fis.,* T. XIX, 1886, p. 359-373). — ZELLER, vol. cit., p. 341. Il *Cod. Ambros. D. 27* contiene un'opera apocrifa di ARCHITA (v. ELTER, *Analecta Graeca,* Parigi, Brun, 1899). Egli fu contemporaneo, forse un po' più vecchio, di PLATONE. Secondo BRETSCHNEIDER, l. c., p. 149 e CANTOR, T. I, p. 235 egli sarebbe vissuto fra il 430 e il 365 a. C.

(3) CURTIUS, *Storia greca,* T. I, p. 576-7.

(4) WOLF, *Gesch. d. Astr.,* p. 166. Si crede che ARCHITA sia stato il primo che abbia studiato i fenomeni celesti col sussidio della geometria.

attrasse sopra di sè l'attenzione di ORAZIO, che ne celebrò il valore in una delle sue *Odi* (1); i precetti morali che vanno sotto il suo nome o gli appartengono, e allora sono testimoni dell'elevatezza delle sue idee, o, come sembra più probabile (2), gli sono a torto attribuiti e dimostrano l'alta considerazione in cui era tenuto da chi si nascose sotto la di lui imponente autorità per agevolare la diffusione delle proprie idee (3).

51. - Il suo valore come matematico è attestato in termini non dubbi, benchè troppo vaghi, da PROCLO nel frammento riportato nel n. 3 (4); è provato dalle sue ricerche sulle proporzioni (n. 21) (5); è confermato in modo più preciso da ERATOSTENE, il quale, nella lettera a TOLOMEO, di cui la prima parte venne riportata qualche pagina addietro (p. 77), lo pone fra i primi che si occuparono della duplicazione del cubo. Ma, ricorrendo ad EUTOCIO, siamo in grado di determinare completamente il contributo arrecato da ARCHITA alla soluzione del problema di Delo. Infatti, fra le soluzioni di questo problema che egli fa conoscere nel commento al II Libro di ARCHIMEDE *Sulla sfera ed il cilindro*, si legge la seguente (6):

Metodo di ARCHITA, come viene riferito da EUDEMO. Siano (fig. 22) date due linee AΔ, Γ. Bisogna dunque fra AΔ, Γ trovare

(1) La 28ª del I Libro; ove è narrato come ARCHITA morisse durante un naufragio.

(2) Cfr. CANTOR, *Math. Beiträge zur Kulturleben der Völker.* Halle, 1863, p. 179-180, e le autorità ivi citate.

(3) Il lettore, desideroso di conoscere le opere attribuite ad ARCHITA ricorra all'articolo relativo de *Gli scrittori d'Italia* di G. MAZZUCHELLI, vol. I, p. II. Brescia, 1753, p. 961.

(4) GIAMBLICO, *De communi mathematica,* ed. FESTA, p. 41, gli attribuisce un'opera περὶ μαθηματικῶν.

(5) Accettando un'ingegnosa ipotesi di P. TANNERY (v. l'articolo *Un traité grec d'aritmétique antérieur à Euclide*, Bibl. math., III Serie, T. VI, 1905) un brano dell'opera di BOEZIO, *De institutione musica*, sarebbe tolto da un trattato di ARCHITA oggi perduto; è il brano ove è dimostrato la impossibilità di decomporre un numero della forma $\frac{n+1}{n}$ in altri due analoghi.

(6) *Archimedis Opera omnia,* ed. HEIBERG, vol. III, p. 98 e seg. Le lettere in parentesi servono di richiamo al catalogo di proposizioni note ad ARCHITA che si trova nel n. seguente.

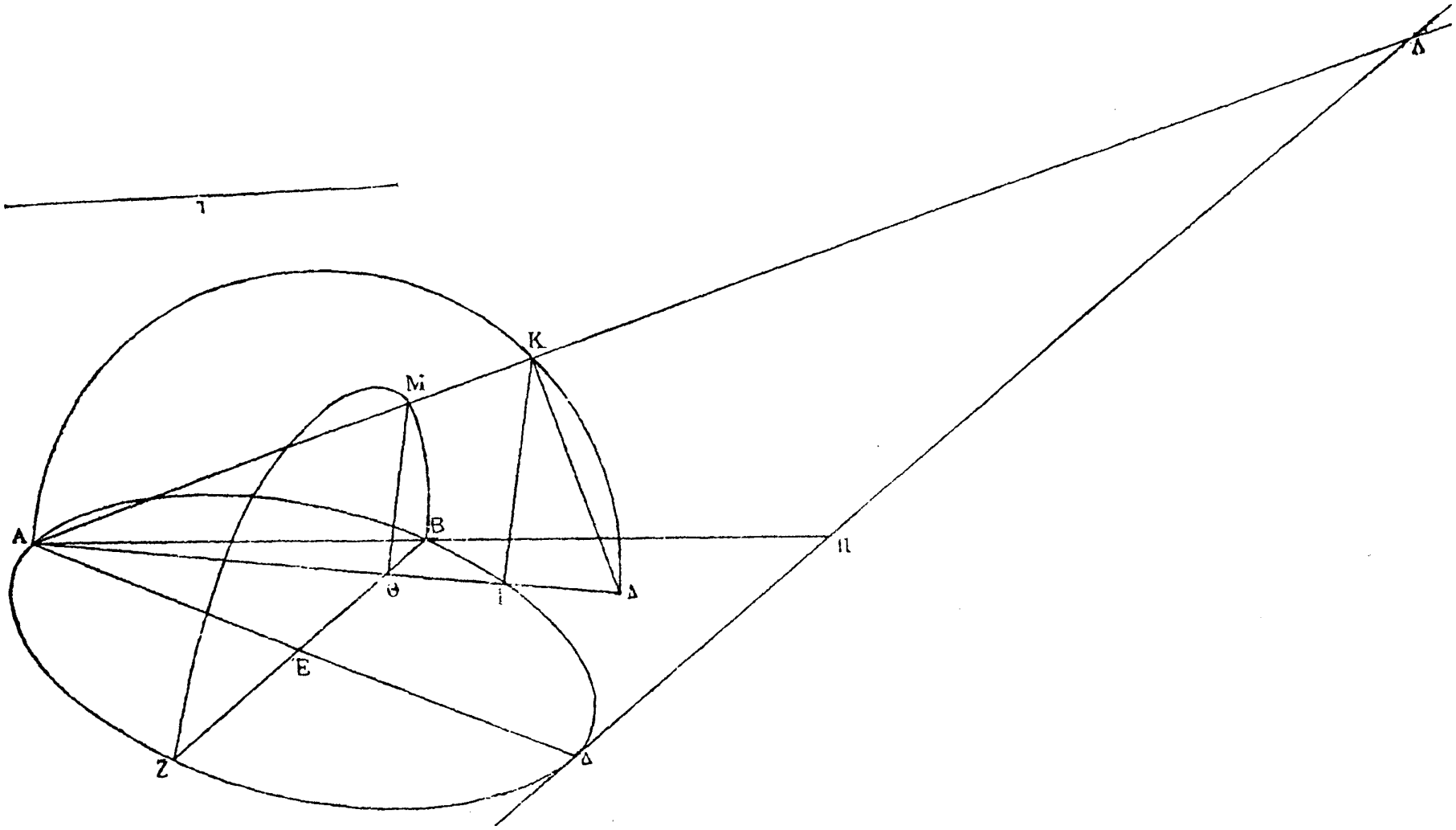


Fig. 23.

due medie proporzionali. Si descriva sulla retta maggiore AΔ (come diametro) un circolo ABΔZ nel quale si adatti una retta AB eguale alla Γ; questa prolungata incontri in Π la retta tangente in Δ al circolo. Alla retta ΠΔΘ si conduca la parallela BEZ e si immagini eretto perpendicolarmente sul semicircolo ABΔ un semicilindro e sulla retta ΔΔ descritto un semicircolo pure perpendicolare e posto nel parallelogramma del semicilindro. Questo semicircolo, fatto girare da ΔΔ verso B, tenendo fissa la estremità Δ del diametro, nel muoversi secherà la superficie cilindrica e traccerà su questa una certa linea. Inoltre se tenendo fissa la retta ΔΔ si fa girare il triangolo ΔΠΔ in senso contrario del semicircolo, la retta ΔΠ genererà una superficie conica e ruotando incontrerà in un certo punto la linea cilindrica. Nello stesso tempo il punto B descriverà una semicirconferenza sulla superficie del cono. Nella posizione in cui quelle linee s'incontrano, il circolo mobile abbia la posizione ΔΔK, e il triangolo mobile in senso opposto la posizione ΔΔΔ, ed il punto in cui concorrono sia K, ed il semicerchio descritto per B sia BMZ, e l'intersezione di questo e del circolo BΔZΔ sia BZ. Si conduca da K la perpendicolare al piano del semicircolo BΔΔ: questa cadrà sul contorno del circolo, perchè il cilindro è retto. Cada e sia KI; e la retta condotta da I ad Δ incontri in Θ la retta BZ, e la linea ΔΔ incontri il semicerchio BMZ nel punto M. Si conducano pure le rette KΔ, KI, MΘ. Ora, siccome i due semicircoli ΔKΔ, BMZ sono entrambi perpendicolari al piano dato, anche la loro intersezione MΘ è perpendicolare a qnesto piano (*e*). Poichè quindi MΘ è anche perpendicolare a BZ (*e'*) sarà ΘB × ΘZ cioè (*c*, *d*) ΘΔ × ΘI = $M\Theta^2$ (*b*). Pertanto il triangolo AMI è simile ai due triangoli MIΘ, MΔΘ e l'angolo IMΔ è retto (*b'*). Ma è retto anche l'angolo ΔKΔ. In conseguenza anche le rette KΔ e MI sono parallele e sarà ΔΔ : ΔK cioè (*a*) KΔ : ΔI = IΔ : ΔM per la simiglianza dei triangoli. Dunque le quattro rette ΔΔ, ΔK, ΔI, ΔM sono in proporzione continua. E ΔM è eguale a Γ essendo AB = Γ. Perciò fra le due rette ΔΔ, Γ si sono trovate due medie proporzionali ΔK, ΔI (1).

52. - Superfluo il richiamare l'attenzione del lettore sul concetto di luogo geometrico, di cui in questa soluzione è fatto largo uso (2) e sulla eccezionale genialità di

(1) Una divinazione verosimile dell'*analisi* della soluzione di ARCHITA fu esposta dal BRETSCHNEIDER, l. c., p. 152-3.

(2) Riguardo all'esistenza di un nome per tale concetto si confronti CANTOR, T. I, p. 229, con ALLMAN, p. 115-119; v. anche F. HULTSCH, *Bibl. math.*, 1889, p. 90.

essa (1); essa, non solo è prova indiscutibile della grande famigliarità che ARCHITA aveva colle figure nello spazio (2)

---

(1) Preso il punto A per origine, la retta AΔ per asse delle x, per asse della z la generatrice del cilindro passante per A e per asse dello y la retta che forma con le due prime un triedro trirettangolo; dette poi a e b ($< a$) le rette date, le equazioni delle tre superficie ausiliari sono risp.:

$$x^2 + y^2 = ax$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2} x^2.$$

Ora, se poniamo:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ , \ v = \sqrt{x^2 + y^2}$$

esse divengono:

$$v^2 = ax \ , \ u^2 = av \ , \ u = \frac{a}{b} x.$$

Dalle prima e terza emerge:

$$v^2 = bu$$

ossia: $$u : v = v : b;$$

d'altronde la seconda equivale a:

$$a : u = u : v,$$

onde $$a : u = u : v = v : b,$$

e $u =$ AK e $v =$ KI sono le due medie proporzionali fra $a =$ AΔ e $b =$ Γ.

(2) Aveva ARCHITA costruito un modello dichiarativo della sua costruzione? Per rispondere affermativamente, a parer nostro, non basta invocare la testimonianza di DIOGENE LAERZIO, secondo cui " ARCHITA per primo trattò la meccanica metodicamente, servendosi di principi geometrici; egli introdusse anche per primo il movimento organico nella costruzione delle figure geometriche quando per duplicare il cubo cercò due medie proporzionali secando il semicilindro „. Ma a dimostrare possibile che egli l'abbia fatta sta questa notizia di PLUTARCO: " I geometri pongono innanzi ai fanciulli che ancora non possono iniziarsi da sè agli aspetti intelligibili delle essenze incorporee ed insensibili, forme tangibili a visibili, che imitano le sfere, i cubi, i dodecaedri „. (*Amatorio*, Cap. XIX, p. 14).

(in particolare colla generazione dei più semplici solidi di rivoluzione (1) e colle linee che essi generano intersecandosi), ma porge il primo esempio noto di applicazione della geometria dello spazio alla soluzione di problemi di geometria piana; se, dunque, la riduzione di IPPOCRATE del problema di Delo a quello dell'inserzione di due medie potè essere biasimata come fattore di ritardo nel progresso della stereometria, la soluzione di ARCHITA, all'opposto, aprendo a questa nuovi e splendidi orizzonti, deve essere quasi equiparata ad un antidoto contro la ripugnanza dei Greci verso tale parte della geometria.

Essa poi attesta che ARCHITA era in possesso dei seguenti TEOREMI: (*a*) In un triangolo rettangolo, condotta la perpendicolare dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa, ogni cateto è medio proporzionale fra tutta l'ipotenusa ed il segmento adiacente. (*b*) In ogni triangolo rettangolo l'altezza calata dal vertice dell'angolo retto è media proporzionale fra i segmenti che essa determina sull'ipotenusa; (*b'*) viceversa, ove ciò accada il triangolo è rettangolo. (*c*) Due corde di un cerchio si tagliano in parti inversamente proporzionali. (*d*) Tutti gli angoli inscritti in uno stesso segmento circolare sono fra loro eguali. (*e*) L'intersezione di due piani perpendicolari ad un terzo è perpendicolare a questo; (*e'*) essa lo è, in particolare, alle rette in cui questo è tagliato dai due primi.

Se i pregi teorici della soluzione di ARCHITA non furono revocati in dubbio da alcuno, per converso la sua traduzione in pratica fu da taluno recisamente negata (2). E infatti, come ci è presentata da EUDEMO, non può certo condurre ad alcun risultato pratico; si noti, però che una semplice applicazione dei metodi della geometria descrittiva (doppia projezione di MONGE) la trasforma in una completamente eseguibile (3): quest'applicazione riposa sulla considerazione delle projezioni sui piani coordinati delle inter-

(1) Si noti fra queste un particolare *toro*.

(2) " ... quelque ingénieux que soit ce procédé, il est tout pour l'esprit, la pratique n'en saurait tirer aucun secours ". MONTUCLA, *Hist. des recherches*, etc., 2ª ed., p. 224.

(3) Questo fu osservato per la prima volta da F. FLAUTI, *Geometria di sito piano e nello spazio*. 2ª ed., Napoli, 1821, p. 173-5.

sezioni mutue delle tre superficie ausiliarie (1); ora, siccome le nozioni di prospettiva che presumibilmente avevansi ai tempi di ARCHITA (2) erano assai sviluppate, così nulla vieta supporre che fin d'allora i geometri avessero considerate le projezioni anzidette. D'altronde queste si possono costruire abbastanza agevolmente (3): perciò si è stati condotti a dichiarare probabile che ARCHITA abbia dato alla sua soluzione teorica anche questo complemento che esigeva la pratica (4). Lasciamo il lettore libero di adottare o respingere questa opinione; quanto a noi, pure ritenendo che il Tarantino fosse in grado di immaginare quel complemento, non possiamo tacere che non ci sentiamo costretti ad ammettere che vi abbia realmente pensato, rammentando che a' suoi tempi si dava non grande valore all'effettuabilità di una costruzione, sicchè si criticava piuttosto l'eccesso di *praticità* che l'eccesso di *teoricità* di una soluzione, come è largamente dimostrato dallo spregio in cui PLATONE teneva le soluzioni meccaniche (v. n. 62).

---

(1) Ritenendo le notazioni usate nella nota (1) a p. 102, queste projezioni hanno per equazioni:

$$\text{nel piano } xz: z^2 = \frac{a^2}{b^2} x^2 - ax$$

$$z = \frac{ax}{b^2} \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$z^2 = a\sqrt{x}\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)$$

$$\text{nel piano } xy: x^2 + y^2 = ax$$

$$y = \frac{x}{b^2} \sqrt{a^2x^2 - b^4}.$$

Cfr. P. TANNERY, *Sur les solutions du problème de Délos par Archytas et par Eudoxe.* Mém. de la Soc. Bordeaux, T. II, della 2ª serie, 1878, p. 279-281.

(2) V. quanto disse (n.i 34 e 35) intorno ad AGATARCO, ANASSAGORA e DEMOCRITO.

(3) Vedi P. TANNERY nella memoria testè citata e ALLMAN, l. c., p. 120-121.

(4) ALLMAN, l. c., p. 121-123.

La soluzione riferita del problema di Delo è l'unico frammento che ci sia stato serbato dell'opera geometrica di ARCHITA (1). I suoi contributi alla meccanica pratica escono dal nostro quadro ed inoltre non sono indiscutibilmente assodati. Finalmente delle sue ricerche aritmetiche e di una questione storica che vi si connette verrà tenuto parola in più opportuno momento (Libro V).

---

(1) Il DILLING (l. c., p. 42) dice ARCHITA " in regularium corporum theoria versatus „ ; non so a che cosa alluda.

CAPITOLO VI.

Da Socrate ad Euclide

53. - Gli scienziati di cui ci resta ad esaminare le opere in questo Libro, appartengono a quell'intervallo di tempo che ha per origine il momento in cui Atene, abbattuto il governo dei Trenta tiranni, risorge a vita novella, e per estremo la caduta dell'indipendenza della Grecia e la susseguente fondazione della celebre Scuola d'Alessandria. Esso ha termine coll'entrata di EUCLIDE sulla scena scientifica; e, volendo dare il nome di un uomo anche al principio di esso, indubbiamente devesi scegliere SOCRATE (n. 470, m. 399 a. C.) perchè questi, quantunque non fosse matematico, nè della matematica estimatore (1), pure coll'insegnare un suo particolare metodo di sviluppare la facoltà del raziocinio (*metodo induttivo*) e col fondare il principio della determinazione scientifica dei concetti (*principio della definizione*) contribuì possentemente ad addestrare i Greci nella difficile

(1) Si ascrive infatti, fra i placiti di SOCRATE, il seguente: " lo studio della geometria si deve spingere soltanto fino al punto di saper dividere e misurare un pezzo di terreno „. SENOFONTE inoltre dice sapere (*Memor.*, L. IV, c. 7) che " SOCRATE raccomandava d'imparare tanto d'astronomia da poter conoscere l'istante della notte, il mese e l'anno, in caso di viaggio, di navigazione o di guardia.... Ma quanto all'imparare l'astronomia fino a conoscere anche ciò che non segue lo stesso movimento rotatorio, le stelle erranti e senza regola, ed allo stancarsi a ricercar le cause di tutto questo, egli dissuadeva vigorosamente „.

arte del ben ragionare, arte da cui le scienze esatte più di tutte le altre dipendono (1).

Il focolare della cultura, acceso per la prima volta a Mileto, dopo essere andato ramingo di terra in terra, arrestandosi ove trovava ambiente più propizio al proprio svolgimento, fissa durante il tempo di cui or dobbiamo occuparci — per merito specialmente di SOCRATE — la propria sede in Atene, ove, spento questo famoso pensatore, PLATONE continuò ad insegnare col precetto e coll'esempio il sano filosofare. Tuttavia sarebbe commettere grave ingiustizia il seguire la via additata da PROCLO e intitolare quest'epoca da *Platone e l'Accademia* da lui fondata; perchè in quest'epoca medesima fiorirono un altro uomo e un'altra scuola (*Eudosso e la Scuola di Cizico*) a cui la scienza nostra deve assai maggiore riconoscenza che a PLATONE. Ma, d'altronde, sarebbe chiudere gli occhi dinnanzi alla luce del vero il porre EUDOSSO come unico duce della schiera di matematici che vissero tra SOCRATE ed EUCLIDE; tanto più che sia le relazioni di tali matematici fra loro e con quei due sommi, sia la scambievole influenza di questi uno sull'altro, non sono conosciute senza ambiguità e lacune. Meglio è dunque considerare gl' investigatori di cui stiamo per occuparci siccome pianeti e trabanti di un grande sistema avente due astri principali, PLATONE ed EUDOSSO, dal primo dei quali si diffuse gran luce sulla filosofia in genere e dal secondo di preferenza sulla matematica.

Platone (2).

54. - Si ammette generalmente che PLATONE sia nato nell'anno terzo dell'87ª Olimpiade (429 a. C.) (3) da una famiglia ricca e nobile (4), e che sia morto a ottantun anno nel giorno anniversario della propria nascita. Egli crebbe in

(1) Cfr. CURTIUS, *Storia greca*, T. III, p. 106.

(2) E. ZELLER, *Die Philos. der Griechen*, II Tl., I Abth., IV Aufl. Leipzig, 1889, p. 389 e segg.

(3) Secondo il calcolo dell'IDELER (l. c., T. I, p. 337) nella notte dal 21 al 22 o nel giorno 22 maggio del 429 a. C.

(4) CODRO e SOLONE vengono annoverati fra gli antenati di PLATONE.

condizioni di grande agiatezza, le quali lo misero in grado di fruire di tutti i mezzi d'istruzione che la sua patria offriva alla gioventù studiosa. Fra le varie persone eminenti che si citano quali suoi maestri tengono il primo posto SOCRATE, che PLATONE per riconoscenza introdusse poi così spesso come interlocutore ne' suoi dialoghi, e FILOLAO, che — secondo alcuni — lo mise a parte dei segreti dei Pitagorici, sia a viva voce, sia vendendogli tre libri, nei quali erano esposte le dottrine del filosofo di Samo.

Vuoi per seguire il costume generale, vuoi per completare la propria coltura scientifica coll'acquisto delle cognizioni matematiche che SOCRATE non era in grado di somministrargli, dopo la morte di questo, PLATONE intraprese parecchi viaggi. Se si presta fede a CICERONE egli veleggiò anzitutto verso l'Egitto ed ebbe così l'opportunità di ascoltare a Cirene (importante città fondata dai Greci sulla riva Africana del Mare Mediterraneo) le lezioni del matematico TEODORO (1); ancora meno dubbio del viaggio in Egitto è quello di PLATONE nella Magna Grecia, ove ebbe relazioni amichevoli ed intime con ARCHITA ed EURITO Tarantini, con TIMEO da Locri e con altri ancora, e fece la personale conoscenza di FILOLAO. — Questo secondo viaggio (assai più del primo) esercitò su le idee e su tutta la carriera scientifica di PLATONE una influenza decisiva e permanente: se anche si può essere ripugnanti ad ammettere che egli abbia publicati come propri alcuni scritti da lui comperati in Italia dai Pitagorici e che quindi egli si debba considerare come un saccheggiatore del Pitagorismo, non v'ha dubbio che molti passi delle sue opere sono di origine prettamente pitagorica: a dimostrarlo è sufficiente citare la celebre frase θεὸς ἀεὶ γεωμετρεῖ, che viene a lui attribuita da PLUTARCO, ma che potrebbe benissimo ritenersi come espressione sintetica delle idee cardinali della Scuola di Crotone.

55. - Ritornato in patria PLATONE si diede a tutt'uomo a svolgere ed esporre dalla cattedra che egli occupava nel Ginnasio di ACCADEMO i germi di dottrina raccolti special-

---

(1) Quanta stima PLATONE professasse pel sapere matematico di questo suo maestro rilevasi, fra l'altro, del celebre dialogo *Teeteto*.

mente in Italia e, in particolare, a raccomandare lo studio e vantare i pregi delle matematiche: ed è appunto in quest'influenza indiretta che risiede il più solido titolo di benemerenza di PLATONE come matematico. Egli non compose alcuna opera originale su le scienze esatte (1); ma ha sparso ne' suoi scritti filosofici un gran numero di considerazioni matematiche, intese a stabilire quell'aristocrazia dell'intelligenza che era, secondo le sue idee, il cardine dello stato (2). Una collezione di tali passi matematici venne fatta da C. BLASS (3), ma è merito di B. ROTHLAUF di averle per primo ordinate, tradotte ed interpretate (4). Le considerazioni anzidette, se da un lato servono a PLATONE a rendere più vivaci i suoi *Dialoghi* e a presentare le idee filosofiche sotto forma più concreta e perspicua, possono sfruttarsi da noi per valutare qual culto egli professasse per i vari rami della matematica, ed avranno senza dubbio servito ad eccitare parecchi lettori a coltivare una disciplina, la cui conoscenza appariva come indispensabile per penetrare nell'intimo pensiero del divino filosofo.

56. - PLATONE considerava l'aritmetica e l'astronomia come scienze aventi caratteri di necessità, non soltanto umana, ma eziandio divina; poneva la matematica tutta a base delle

(1) Ci esprimiamo così perchè sembra dovuta ad un equivoco l'attribuzione a PLATONE di *Elementi di Geometria* fatta da un poligrafo arabo: cfr. *Das Mathematiker - Verzeichniss im Fihirst des Ibn Abî Ia kûb an - Nadîm. Zum ersten Mal vollständig ins Deutsche übersetzt und mit Anmerkungen versehen* von H. SUTER. (*Abh. z. Geschichte der Mathematik*, VI Heft, 1892, p. 8).

(2) Alcuni dei passi relativi trovansi anche in H. HANKEL, op. c., p. 128-9 e nel Cap. X del T. I delle *Vorlesungen* di M. CANTOR.

(3) Nella dissertazione *De Platone mathematico*. Bonn, 1861.

(4) *Die Mathematik zu Platons Zeiten und seine Beziehungen zu ihr*. München, 1878; cfr. anche dello stesso autore *Die Physik Platos. Eine Studie auf Grund seiner Werke*, I Tl. München, 1887, II Tl., München. 1888: nella seconda delle quali memorie sono indicati fra l'altro i cenni di PLATONE alla parte teorica della pittura. Si veggano inoltre: F. C. WEX, *Platons Geometrie im Menon und die Parabole des Phythagoras bei Plutarch* (*Archivio di Grunert*, T. 47, 1867, p. 131-163); H. COHEN, *Platons Ideenlehre und die Mathematik*. Marburg, 1884; R. EBELING, *Mathematik und Philosophie bei Plato* (Progr. Gymn., München, 1909).

scienze (1), tanto che, se prestiamo fede a GIOVANNI TZETZE, egli avvertiva: « Nessuno ignaro della geometria entri sotto il mio tetto » (2). E poichè l'*Epinomide*, anche se non fu scritto da PLATONE, ne rispecchia però senza dubbio fedelmente il pensiero, così da esso apprenderemo come egli opinasse che « tosto che uno ci rapisse la scienza dei numeri, tutte le altre arti (e scienze) che noi ora percorriamo non potrebbero più reggere nemmeno in parte » e che « questa scienza, mentre è fonte di tutti i beni, non produce verun male ».

D'altronde, in opere che indiscutibilmente gli appartengono, leggiamo essere « la geometria un metodo per dirigere l'anima verso l'essere eterno, una scuola preparatoria per una mente scientifica, capace di rivolgere le attività dell'anima verso le cose sovrumane », essere « perfino impossibile arrivare a una vera fede in Dio se non si conosce la matematica e l'astronomia e l'intimo legame di quest'ultima con la musica ».

Nessuno più vigorosamente di PLATONE si è fatto sostenitore dell'opinione che le scienze esatte esercitino una benefica influenza educatrice sulla mente. Egli osservò che nel capire le cose « esiste una celestiale differenza fra uno che sia occupato di geometria ed uno che non lo ha fatto »;

---

(1) Ad esempio egli assegnava il complesso delle cognizioni necessarie ad un astronomo nei seguenti termini: " Anzitutto e prima di tutto la scienza dei numeri puri ed astratti, ossia la dottrina del pari e dispari in generale, in base alla sua genesi e al significato che ha per spiegare la natura di tutte le cose. Appresa che abbia l'alunno l'aritmetica pura, egli deve volgersi a quella scienza che vien detta impropriamente geometria, perchè essa è piuttosto l'arte di rendere simili quei numeri che non lo sono per lor natura riferendoli alla superficie, arte che chiunque abbia intelletto considererà non come ritrovato umano, ma come meraviglia divina. La terza è la conoscenza di quei numeri che rappresentano un prodotto di tre fattori e quindi hanno una natura simile a quella dei corpi, e poi di quelli dissimili ad essi; conoscenza questa che si acquista con un'altra arte, analoga a quella che come dicemmo fu detta geometria da quelli a cui si presentò per la prima volta „.

(2) μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τὴν στέγην.

di più che coloro, i quali sono « abituati fin dalla nascita all'aritmetica, possiedono una facoltà di capire più sviluppata, e le teste più tarde acquistano il potere di intendere con maggiore facilità », ed estese poi all'astronomia questo magico potere dell'aritmetica e della geometria. In conseguenza egli, assai prima del grande NAPOLEONE (1), sostenne essere necessario che lo stato promuova con ogni sua possa lo studio delle matematiche, che esiga ne siano istruite tutte le persone destinate ad occupare degli uffici governativi, ed imponga, anzi, l'insegnamento di esse a tutti i fanciulli sian dessi maschi o femmine, liberi o schiavi. Sembra però che egli incontrasse qualche difficoltà a fare trionfare queste idee, giacchè TEONE SMIRNEO riferisce, attribuendole a PLATONE, le parole seguenti: « Del resto non è soltanto a certe intelligenze mediocri, ma bensì a tutti gli uomini, che riesce difficile il persuadersi che gli è con questi studi, quasi fossero strumenti, che si purifica l'occhio dell'anima e si fa brillare di nuova luce quest'organo che era oscurato e pressochè spento dalle tenebre delle altre scienze, organo la cui conservazione ha maggior valore di quello di dieci mila occhi, poichè è col suo mezzo che noi contempliamo le verità » (2).

Ed importa notare che le ragioni che facevano di PLATONE uno strenuo propugnatore dell'istruzione matematica non risiedevano nelle innumerevoli applicazioni delle scienze esatte all'arte della guerra o al governo della cosa pubblica, chè all'opposto egli non si lasciò sfuggire occasione alcuna gli si presentasse per scagliarsi contro coloro che coltivano la scienza in grazia del guadagno da essa sperato; egli non negava l'utilità pratica delle nostre scienze, ma attribuiva

(1) È noto come questi pensasse che " l'avancement, le perfectionnement des mathématiques son liés à la prospérité de l'état ".

(2) THÉON DE SMIRNE. *Des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon; traduit pour la première fois du grec en français* par J. DUPUIS Paris, 1892, p. 6. Il medesimo commentatore ci apprende poi (l. c., p. 24) che " PLATONE stesso non vuole si continui fino all'estrema vecchiaia a tracciare delle figure geometriche e a cantare delle canzoni, cose che sono destinate a preparare e purificare il loro spirito, per renderlo atto a capire la filosofia ".

ad essa un'importanza secondaria e voleva che la scienza venisse coltivata esclusivamente nell'intento di sapere (1).

A questi eccitamenti generici di occuparsi delle matematiche (ai quali può riattacarsi l'interpretazione che, secondo TEONE SMIRNEO (2), PLATONE avrebbe dato dell'oracolo a cui la leggenda fa risalire le origini del problema della duplicazione del cubo), egli aggiungeva quello speciale di curare l'incremento della stereometria (3), scienza che egli riteneva destinata a divenire, assieme all'aritmetica e alla geometria, la terza scienza di preparazione a la contemplazione e la ricerca del vero ; a tale scopo egli dipingeva con foschi colori lo stato delle cognizioni stereometriche de' suoi conterranei, e precisamente diceva che i Greci « riguardo al misurare tutto ciò che ha lunghezza, larghezza e profon-

(1) Un altro aspetto sotto cui si presenta il medesimo concetto è la distinzione dell'aritmetica teorica (teoria dei numeri, *aritmetica* in senso stretto) dalla geometria pratica (*logistica*), e della geometria teorica (*geometria* in senso stretto) dalla geometria pratica (*metretica*).

(2) " ERATOSTENE, nel libro intitolato il *Platonico*, riferisce che i Delii avendo interrogato l'oracolo sul mezzo con cui liberarli dalla peste, il Dio ordinò di costruire un altare doppio di quello che già esisteva. Tale problema pose gli architetti in un grave imbarazzo. Essi si domandavano come mai si potesse costruire un solido doppio d'un altro. Ed interrogarono PLATONE sopra tale difficoltà. Egli rispose che il Dio aveva reso quell'oracolo, non perchè avesse bisogno di un altare doppio, ma per rimproverare i Greci di trascurare lo studio delle matematiche e di considerare poco la geometria „. V. p. 4 della citata ed. del DUPUIS.

(3) Giova avvertire che le parole con cui PLATONE raccomanda lo studio della geometria solida vennero interpretate diversamente da P. TANNERY. Il quale, considerando che PLATONE non poteva eccitare i Greci alla costruzione dei solidi geometrici perchè i Pitagorici se ne erano già occupati; non allo studio della (geometria) sferica, chè questa faceva parte della astronomia (cfr. il III Libro del presente lavoro); non alla misura dei volumi, perchè ciò apparteneva alla parte pratica della geometria: concludeva che probabilmente al filosofo Ateniese stava a cuore la scoperta di metodi per risolvere i problemi solidi (cioè cubici e biquadratici) ed in particolare il problema di Delo (P. TANNERY, *L'éducatione platonicienne, Revue philosophique*, T. X, 1880, p, 523-527).

dità sono di un'ignoranza, che è bensì insita in tutti gli uomini, ma è tanto ridicola quanto vergognosa.... Io stesso mi sono stupito del modo in cui vengono impartiti i relativi insegnamenti, cioè, a mio avviso, come s'addice non ad uomini, ma piuttosto a majali, della qual cosa arrossisco, non soltanto per me, ma anche per tutti i Greci ».

57. - Forse per lastricare la via che mena alla scoperta di nuove verità geometriche, PLATONE espose sotto forma generale ed accessibile a tutti il *metodo analitico* (1); ne mise in chiaro il carattere eminentemente scientifico e ne promosse forse le applicazioni: dal fatto che egli lo comunicò a LEODAMANTE di Taso (2), vi fu anzi chi fu indotto ad attribuirgliene l'invenzione, ma a ciò si oppone quanto conosciamo delle ricerche dei geometri anteriori (3), sicchè, tutto al più, si può ritenere che egli abbia per primo avvertita la necessità di completare qualunque ricerca compiuta con l'analisi geometrica, mediante la relativa sintesi (4).

Le cose precedentemente esposte (v. specialmente quanto concerne ARCHITA) si oppongono altresì a che si ammetta (5) essere l'Accademia fondata da PLATONE la patria della *teoria dei luoghi geometrici.*

Del resto, tanto questa teoria, quanto il metodo analitico sono ritrovati che io sono riluttante a considerare come dovuti ad una sola persona. Per converso, mi figuro i primi geometri come procedenti in ogni speciale questione come consigliava il loro naturale genio inventivo; soltanto in un'epoca posteriore, quando la geometria si trovò ricca di un buon numero di risultamenti particolari, si saranno scoperte le analogie fra i vari procedimenti e si sarà giunti a concepire una norma costante,

---

(1) Crediamo superfluo esporre una nuova volta l'essenza di questo metodo, il quale è famigliare a chiunque siasi occupato di geometria; del resto vegga il lettore ad es.: MONTUCLA, T. I, p. 164-166, HANKEL, p. 137-150 e CANTOR, T. I, p. 220-222.

(2) Lo attesta PROCLO (PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 25).

(3) Cfr. ALLMAN, op. cit., p. 41 nota 02, 88, 97 e 123; TANNERY, *Géom. grècque,* p. 176, nonchè HANKEL, op. cit., p. 149.

(4) P. TANNERY, *L'éducation platonicienne,* 2e Article (*Revue philosophiques,* T. XI, 1880, p. 297).

(5) Come fa ad es. CHASLES (*Aperçu hist.,* T. II, p. 5) seguendo il MONTUCLA.

che servisse di guida nella ricerca delle verità, e a distinguere come migliore di tutti il metodo analitico. E durante quel primo periodo di genesi della geometria non si sarà tardato a discernere l'esistenza di serie continue di infiniti punti soddisfacenti a una condizione comune, a constatarne la fondamentale importanza per l'avvenire della scienza, ad accordare quindi ad esse un posto eminente ed un nome speciale: tanto più che, non appena inaugurato lo studio matematico dei movimenti naturali, si sarà visto come in molti casi quelle serie di punti fossero suscettibili di generazione organica.

58. - Nei molteplici cenni di questioni matematiche, nelle incessanti raccomandazioni di coltivare le discipline esatte, nel suggerimento del metodo migliore da usarsi per ottenere buoni frutti, si compendia, come già accennammo, la parte più essenziale dell'opera matematica di PLATONE, giacchè i contributi diretti da lui arrecati alla nostra scienza sono scarsi per numero ed esigui per valore. Se ora citeremo *seriatim* i punti principali delle sue opere che concernono la geometria (e nel Libro V faremo lo stesso per l'aritmetica), gli è più per formarci un'idea approssimativa dell'entità delle cognizioni matematiche nel periodo che immediatamente precede la comparsa di EUCLIDE, che per presentare un quadro dei miglioramenti ed incrementi che essa deve a lui, giacchè, senza dubbio, non sempre, anzi soltanto in via di eccezione, il nostro filosofo parla ed agisce matematico originale.

Osserviamo, anzitutto, che a PLATONE, o almeno alla sua Scuola, siamo debitori di alcune definizioni che vennero di poi in generale adottate, per merito specialmente di EUCLIDE. Egli non si accordava coi Pitagorici nel definire il punto come unità avente posizione e nel far corrispondere il punto, la linea, la superficie ed il solido rispettivamente all'unità, alla binità, alla trinità, alla quadrinità; sosteneva invece essere il concetto di punto *una finzione geometrica* e diceva spesso, invece di punto, « principio della retta » o « linea indivisibile ». Di più ARISTOTELE ricorda che nell'Accademia il punto solevasi considerare come limite della linea, questa come limite della superficie e quest'ultima come limite del corpo; ed era costume di definire la linea come una lunghezza senza larghezza e in particolare la retta

come quella linea la cui parte media nasconde gli estremi, la superficie come quella che ha lunghezza e larghezza, il corpo come quello che ha tre dimensioni.

A PLATONE non isfuggì il sostanziale divario che corre fra la linea geometrica e la linea fisica (p. es. la traccia lasciata da una matita sulla carta). Erano a lui note: le tre specie di angoli rettilinei (acuti, retti, ottusi); la decomposizione di ogni triangolo in due triangoli rettangoli col mezzo di una altezza; l'esistenza di triangoli rettangoli isosceli e di infinite spesie di triangoli rettangoli scaleni. Fra questi ultimi veniva da PLATONE considerato per il più bello di tutti quello che nasce conducendo un'altezza in un triangolo equilatero; di tal triangolo egli conosceva la proprietà caratteristica, di avere, cioè, cateti tali che il quadrato del maggiore è triplo del quadrato del minore; e se nel *Pseudo-Timeo* sono determinati gli angoli di questo triangolo, nel *Timeo* è avvertita la decomponibilità (mediante le tre altezze) di ogni triangolo equilatero in sei triangoli di quella specie, come analoga alla scomposizione di ogni quadrato in quattro triangoli isosceli rettangoli (mediante le due diagonali).

59. - La conoscenza da parte di PLATONE del teorema di PITAGORA, almeno in casi particolari, è ad evidenza dimostrata dalla proprietà da lui avvertita (v. n. prec.) nel più bello dei triangoli rettangoli; essa è confermata da un passo del *Menone* che crediamo opportuno riportare come documento atto a chiarire il modo con cui PLATONE usava illustrare mediante considerazioni geometriche le proprie idee filosofiche.

Nel dialogo testè citato SOCRATE sostiene l'idea che insegnare altro non sia che risvegliare dei ricordi (1). MENONE a prima giunta non afferra il concetto di SOCRATE ed esige che questi glielo dimostri, e SOCRATE replica allora:

A dir vero non è facile provarlo, tuttavia per amor tuo voglio sforzarmivi. Chiamami uno qualunque dei tuoi famigli affinchè io lo dimostri a lui.

MEN. Benissimo; (*a uno schiavo*) tu!.., accostati.

SOC. È greco? Parla greco?

(1) Il procedimento didattico di PLATONE è in sostanza il metodo detto *euristico*.

Men. Perfettamente, fu allevato in casa mia.

Soc. Dunque bada, quale delle due cose ti sembri esser giusta, se egli ricordi o se impari da me.

Men. Starò attentissimo.

Soc. Giovinotto, dimmi, sai tu che cosa sia un quadrangolo? è una figura come questa (*ABDC*)? (1)

Sch. Sì.

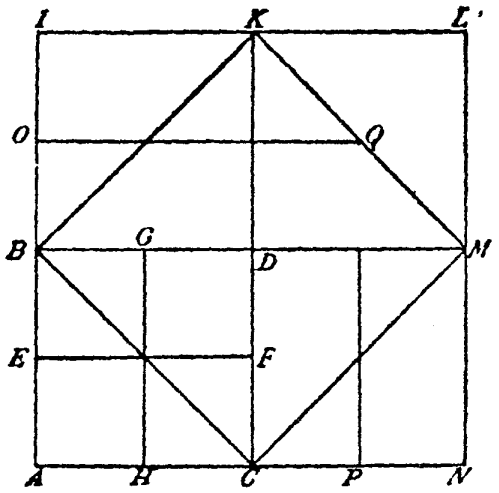


Fig. 24.

Soc. È dunque una figura quadrangolare che ha i quattro lati *AB, BD, CD, AC* eguali?

Sch. Certamente.

Soc. Non ha dessa eguali anche le rette *EF* e *GH* condotte pei punti di mezzo?

Sch. Sì.

Soc. Non è vero, questa figura potrebbe essere anche più grande o più piccola?

Sch. Certamente.

Soc. Supposto ora che il lato *BD* fosse lungo due piedi, quanti piedi quadrati conterrebbe il tutto? Considera un po' la cosa così: Se quì (*BD*) vi fossero due piedi di lunghezza, là (*BA*) invece un piede solo, non conterrebbe la figura una volta due piedi (quadrati)?

Sch. Di certo.

Soc. Ora, dal momento che anche questo (*BA*) ha due piedi, non si ha in tutto necessariamente due volte due piedi (quadrati)?

---

(1) Bisogna immaginare che Socrate tracci con un bastone sull'arena la figura. Seguendo l'esempio di Rothlauf aggiungemmo nella nostra traduzione delle lettere per chiarire il testo mediante opportuni richiami alla fig. 24.

Sch. Sì.

Soc. Si ha dunque una figura di due per due piedi (quadrati)? Fa il calcolo e dimmi poi il risultato.

Sch. Quattro.

Soc. Non si potrebbe ora disegnare un altra figura doppia di quella (*ABDC*), ma ad essa eguale, come avente pure tutti i suoi lati eguali?

Sch. Sì.

Soc. E di quanti piedi (quadrati) sarà dessa?

Sch. Otto.

Soc. Benissimo. Prova ora a dirmi quale lunghezza avrà ogni lato di questa figura. Nel primo quadrangolo ogni lato è di due piedi. Ora quanti se ne avrà in questo quadrangolo che è doppio dell'altro?

Sch. Evidentemente, Socrate, il doppio.

Soc. (*a Men.*) Vedi Menone se io non insegni niente, ma domandi tutto? E per fermo egli crede di conoscere la lunghezza del lato del quadrato contenente otto piedi quadrati. Non ti sembra forse così?

Men. Sì.

Soc. Lo sa egli veramente?

Men. No.

Soc. Egli crede sia il doppio. Fa ora attenzione, e vedrai che, dopo una cosa, egli ne ricorderà un'altra come deve ricordarsi. (*Allo schiavo*). Dimmi adesso, hai detto che da una linea *IA* doppia di *BA* nasca una figura doppia? Ma io non intendo parlare di una figura *AIKC* avente *AI* lunga a *AC* corta, ma di una che abbia tutti i lati eguali proprio come questa (*ABDC*) e che contenga il doppio di questa, cioè otto piedi (quadrati) Guarda ora un po' se tu non sei d'avviso che questa nasca dal lato doppio *AI*.

Sch. Ma sì.

Soc. Ora questo lato non diventa forse di lunghezza doppia unendovene un secondo *CN* eguale in lunghezza?

Sch. Certamente.

Soc. Tu dunque dici che da questa *AN* risulta una figura di otto piedi (quadrati) facendo fra loro eguali i lati *AN, NL, LI, IA*. È dunque questa la figura che tu asserisci essere un quadrato contenente esattamente otto piedi (quadrati)?

Sch. Sì.

Soc. Qual grandezza avrà dunque la figura *ANLI*? Non è vero, il quadruplo?

Sch. Come potrebbe essere diversamente?

Soc. Ora il quadruplo è lo stesso del doppio?

Sch. No, per Giove!

Soc. Ma dunque qual multiplo è?

Sch. Il quadruplo.

Soc. Dunque, mio caro giovinotto, da un lato doppio si ottiene un quadrato, non doppio, ma quadruplo.

Sch. Benissimo.

Soc. Perchè quattro per quattro fa sedici, non è vero?

Sch. Sì.

Soc. Ma allora da qual lato nasce il quadrato di otto piedi (quadrati)? Non certo, è vero, da questo (*AN*) perchè nasce da esso il quadrato quadruplo *ANLI*?

Sch. Lo ammetto.

Soc. Ma da questo (*AC*), il quale non è che la metà di *AN* nasce quello di quattro piedi (quadrati).

Sch. Sì.

Soc. Ma il quadrato di otto piedi (quadrati) è il doppio di questo (*ACDB*) e metà di quello *ANLI*?

Sch. Sicuramente.

Soc. Nascerà esso forse da una linea maggiore di *AC* e minore di *AN*? O no?

Sch. Io credo di sì.

Soc. Rispondi soltanto quello che ti sembra. E dimmi: non era questa linea *AC* di due piedi e questa *AN* di quattro?

Sch. Sì.

Soc. Il lato della figura di otto piedi (quadrati) deve essere adunque maggiore di questa *AC* lunga due piedi, ma minore di quella *AN* lunga quattro piedi?

Sch. Necessariamente.

Soc. Provati ora a dirmi quanto credi sia lunga.

Sch. Tre piedi.

Soc. Ora, se dev'essere di tre piedi, aggiungeremo a questa *AC* la metà *CP* ed otterremo una retta di tre piedi. Perchè questo *AC* è di due piedi e questa *CP* di uno. Similmente per il lato *AB*; questo *AB* di due piedi e questo *BO* di uno. E questa *APQO* sarà ora la figura che tu pensi?

Sch. Sì.

Soc. Ma se tutta questa figura *APQO* ha qui in *AP* e qui in *AO* tre piedi, non conterrà essa tre volte tre piedi quadrati?

Sch. Evidentemente.

Soc. Ma quanto fa tre volte tre metri quadrati?

Sch. Nove.

Soc. E la figura doppia di *ACDB* quanti piedi quadrati doveva contenere?

Sch. Otto.

Soc. Dunque neppure col lato di tre piedi si ottiene un quadrato di otto piedi.

Sch. Invero no.

Soc. Con quale dunque? Provati a dirlo giusto, e non puoi esprimerlo in numeri, indicalo con quale linea.

Sch. Ma, per Giove, io proprio non lo so.

Soc. (*a Men.*). Non osservi tu ancora come costui sia andato innanzi sulla via del ricordarsi? Dapprima non sapeva qual fosse il lato del quadrato avente una superficie di otto piedi (quadrati), cosa che egli non sa ancora adesso. Ma prima credeva di saperlo e rispondeva con disinvoltura come un dotto, senza sentirsi in alcun modo perplesso. Ora invece si sente già nell'incertezza, e siccome non sa, così non s'illude neppure di sapere. Sta ora attento come, da questa incertezza egli col mio aiuto cercherà e troverà, mentre io interrogherò e non insegnerò. Fa bene attenzione se tu trovi che io gli insegni o gli spieghi, o se non piuttosto gli chiegga i suoi modi di vedere. (*Allo schiavo*). Non è questa *ABDC* la nostra figura di quattro piedi? Capisci?

Sch. Sì.

Soc. Possiamo unirvene una eguale, questa *BDKI*?

Sch. Sì.

Soc. Ed ancora una terza qui (*KLMD*) eguale a quelle due?

Sch. Sì.

Soc. Per completare la figura non possiamo noi segnarne nell'angolo (*DM* una *CDMN*?

Sch. Benissimo.

Soc. Non si otterranno così proprio quattro figure eguali?

Sch. Sì.

Soc. Ebbene? Il tutto *ANLI* quante volte sarà la figura *ADCB*?

Sch. Quattro volte.

Soc. Ma noi volevamo divenisse soltanto due volte più grande. Non ricordi?

Sch. Certamente.

Soc. Ora queste linee *CR, BK. KM, MC* condotte da un angolo all'altro, non dividono in due metà ciascuno di questi quadrati?

Sch. Sì.

Soc. Non si ottengono così queste quattro linee *CB, BK, KM, MC* che limitano questa figura *CBKM*?

Sch. Sì.

Sos. Ed ora, guarda un po' quanto è grande questa figura *CBKM*?

Sch. Non lo so.

Soc. Di questi quattro quadrangoli *ACDB, BDKI, DMLK, CDMN* queste quattro rette *CB, BK, KM, MC* non hanno tagliate la metà? O no?

Sch. Sì.

Soc. Ora quante metà vi sono in questa figura *CBKM*?

Sch. Quattro.

Soc. Ed in questa *ABDC*?

Sch. Due.

Soc. Che cos'è quattro rispetto a due?

Sch. Quattro è il doppio.

Soc. Quanti piedi (quadrati) contiene dunque questa figura *CBKM*?

Sch. Otto piedi (quadrati).

Soc. E da quale linea nasce?

Sch. Da questa *CB*?

Soc. Da quella dunque che va da un angolo *ACD* del quadrangolo *ABDC* di quattro piedi (quadrati) all'altro angolo *ABD*?

Sch. Sì.

Soc. Ora gli scienziati chiamano questa linea *BC* diagonale (διάμετρος); in conseguenza, detta questa *diagonale*, dalla detta diagonale, o schiavo di Menone, si otterrà il triangolo doppio (1).

60. - Lo stesso dialogo di Platone presenta, un po' più avanti, un secondo passo matematico di importanza non minore di quella che ha il brano riportato nel n. precedente, ma di fama assai maggiore: è quello conosciuto sotto il nome di *ipotesi geometrica di Menone*. L'intelligenza delle frasi di cui esso consta presenta a' nostri giorni delle gravissime difficoltà, non essendo noto il significato preciso di certi termini ivi adoperati, sicchè, nelle parole, se non nel pensiero, di Platone esistono delle lacune che il lettore è chiamato a riempire. Quanto sia difficile tale operazione complementare, risulta dal gran numero di dotti che vi si provarono; quanto discutibili siano i risultati a cui essa conduce, si può misurare dalle interpretazioni che ricevettero le parole di Platone, interpretazioni, che già erano numerose alla fine dello scorso secolo (2), e di cui trenta conosceva nel 1861 il Blass (3), alle quali fa d'uopo oggi

(1) A questo passo che, fra l'altro, conferma avere Platone conosciuto il teorema di Pitagora in casi particolari, si potrebbe connettere la costruzione dei triangoli rettangoli in numeri che gli è attribuita (v. Libro V) la quale prova averlo egli conosciuto anche in generale.

(2) Cfr. J Trembley, *Observations sur un passage du Dialogue de Platon intitulé MÉNON* (*Mém. de l'Académie royale*, MDCCXCIX et MDCCC; Berlin, 1803; *Classe de Belles Lettres*, p. 242-263).

(3) *De Platone mathematico*, p. 19. Le interpretazioni più antiche sono enumerate da Wex, *Commentatio de loco mathematico in Platonis Menone*, Halis Sax., 1825 e Patz, *Commentatio de loco mathematico In Platonis Menone*, Susati, 1832; ad esse vanno aggiunte quelle di E. F. August, *Zur Kenntniss der geometrischen Methoden der Alten. In besonderer Beziehung auf die*

aggiungere quella di A. BENECKE (1) — che, dopo essere stata accolta con molto favore per quindici anni (2), fu di recente gagliardamente combattuta (3) —, quella proposta (4) e poi abbandonata (5) da P. TANNERY, una suggerita da J. DUPUIS (6) e subito criticata da C. HENRY (7), finalmente quella di C. DEMME (8).

Un'analisi minuta delle difficoltà che offre l'intelligenza delle parole di PLATONE e dei modi suggeriti per sormontarle ci trascinerebbe nel campo della filologia; onde non la intraprenderemo; e ci limiteremo a dire quanto può interessare i matematici cominciando col presentarne la traduzione che di esso propose persona competente (9):

Ma almeno rimetti qualche poco del tuo imperio sovra di me, e permetti che per via d'ipotesi consideriamo se ella (la virtù) si possa insegnare o per quall'altro modo s'acquisti. E quand'io dico per via d'ipotesi, dico al modo che spesso praticano i geometri, quando si domanda loro per esempio d'una figura, se sia possibile in un dato circolo iscriverla come trian-

---

Platonische Stelle in Meno 22 d., Berlin, 1843, e dell'HOFFMANN, *Ueber eine Stelle die Menon im Platon.* Berlin, 1853; nonchè le altre ricordate nel testo.

(1) *Ueber die geometrische Hypothesis in Platon's Menon.* Elbing, 1867.

(2) G. FRIEDLEIN, *Beiträge zur Geschichte der Mathematik,* III, p. 14-15, Hof, 1873; A. FAVARO, *Sulla ipotesi geometrica nel Menone di Platone.* Padova, 1875 (questo lavoro mi è noto soltanto dietro il resoconto che se ne legge nel *Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik,* I Bd., Leipzig, 1877, p. 414-416); CANTOR, T. I, p. 217.

(3) F. SCHULTZ, *Ueber die zweite mathematische Stelle in Platons Menon* (*Neue Jahrbücher f. Phil. u. Päd.,* vol. 125, 1882, p. 19-32).

(4) *L'hypothèse géométrique du Menon* (*Revue philosophique,* T. II, 1876, p. 285).

(5) Cfr. HEIBERG, *Philologus,* T. 43, 1884, p. 469.

(6) *Note sur un passage géomé rique du Menon de Platon* (*Bullettino di Bibliografia,* ecc., T. XIX, 1886, p. 643-650).

(7) *Lettre à M. le Prince D. B. Boncompagni sur divers points d'histoire des mathématiques* (*Bullettino* cit., T. XX, 1887, p. 389-391). Ivi è sostenuta un'antica interpretazione proposta da WOEPCKE nella *Zeitscrift für das Gymnasial-Wesen.* X. Jahrgang 1856.

(8) *Die Hypothesis in Platons Menon.* Dresden, 1888.

(9) Il Prof. FERRAI: cfr. il *Repertorium* dianzi citato, p. 415.

golo: un d'essi in tal caso ci risponderebbe: io non so se questo sta: ma io la prendo per un'ipotesi in quanto giova alla soluzione presente. Se questa figura è tale che su le sue linee date descrivendo un cerchio avanzi tanto spazio quanto sia quello della figura inscritta, parmi si ottenga un risultato e oppostamente un altro, se ciò non sia possibile, accada: posta questa ipotesi adunque, voglio dirti quanto risulta dalla inscrizione della figura nel cerchio, e se sia possibile o meno.

Ora, secondo il BENECKE e quelli che ne adottarono il modo di vedere, PLATONE avrebbe immaginato che SOCRATE si giovasse per chiarire il proprio concetto di un esempio tratto dalla geometria, e, mantenendosi nell'ordine d'idee tracciato nel colloquio con lo schiavo di MENONE (v. n. 59), continuasse a ragionare sulla figura (fig. 24) che era delineata sulla sabbia; in conseguenza PLATONE avrebbe, con le parole in esame, fatto allusione alle condizioni d'inscrittibilità in un cerchio dato di un triangolo rettangolo di area data, e le avrebbe enunciate esattamente. Tale interpretazione, come dicemmo, non è accettata da tutti, e la divergenza nelle opinioni è specialmente dovuta alla diversità di forma che si attribuisce al triangolo da inscriversi; ora la determinazione di tale forma sembra a noi questione storica di secondaria importanza: infatti, comunque la si risolva, rimarrà sempre posto in sodo dal passo che ci occupa la dimestichezza di PLATONE con le questioni relative: 1° alla possibilità o meno di risolvere un problema proposto, 2° alla trasformazione delle aree; queste ultime questioni non sono evidentemente che il frutto dell'ulteriore svolgimento delle idee pitagoriche (nn. 22-28), mentre le prime preludono alla scoperta del *diorisma* che ben presto (n. 63) vedremo fatta da LEONE.

61. - PROCLO asserisce (1) che PLATONE *compose* tutte le linee mediante rette e circoli, senza però chiarire il senso del vocabolo *comporre*. Inoltre, dal frammento storico che togliemmo dallo stesso commentatore (n. 3) apprendiamo che egli cominciò degli studi *sulla sezione* i quali vennero poi completati da EUDOSSO: a che cosa miravano essi? Ci occuperemo di tale questione quando (n. 70) esamineremo le produzioni scientifiche di EUDOSSO; pel momento basti ri-

(1) PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 100.

levare come il passo medesimo abbia indotto taluno ad ammettere che a PLATONE non fossero ignote le sezioni coniche, e come questa interpretazione, benchè sia dimostrata erronea da quanto diremo fra poco (n. 78) intorno alla scoperta di queste celebri curve (1), ricomparve di recente in opere giustamente pregiate (2). PLATONE sembra poi aver avuta notizia del modo di determinare i centri dei cerchi inscritto e circoscritto a un triangolo; mentre, riguardo alle sue nozioni intorno alla costruzione ed alle proprietà del pentagono regolare, il giudizio dev'essere più riservato. D'altronde, l'esistenza nel *Pseudo-Timeo* delle parole ἕλικα ha indotto a credere che l'elica (spirale) fosse già nota ai tempi di PLATONE, ad attribuirne anzi la scoperta ad ARCHITA (3); ed un passo delle *Leggi* farebbe supporre che egli abbia avuto, forse in istato ancora rudimentale, l'idea della cicloide (4). Da ultimo PAPPO attribuisce a PLATONE un'esposizione della teoria dei corpi regolari (5), la quale non è pervenuta sino a noi; però noi conosciamo qualche passo delle opere del nostro filosofo concernenti la costruzione di questi poliedri, i quali rappresentavano una parte importante nelle sue dottrine fisiche: per quest'unica ragione vengono tuttora designati col nome di *figure di Platone* (σχημάτων τῶν Πλατωνος) (6), quantunque sia certo che l'autore del *Menone* apprese da PITAGORA tutto quanto sapeva relativamente ad essi.

Va da ultimo notato come, da un passo delle definizioni di ERONE (7) risulti che PLATONE avrebbe aperto ad ARCHIMEDE l'adito alla determinazione dei poliedri semiregolari convessi con l'offrire l'esempio di una (e forse di due) fra siffatte figure di quattordici facce (8).

---

(1) Cfr. REIMER, *Historia* citata: p. 38-42.

(2) WOLF, *Geschichte der Astronomie,* p. 31; cfr. anche DILLING, op. cit., p. 18.

(3) F. ROSENBERGER, *Die Geschichte der Physik.* Braunschweig, 1882, T. I, p. 15.

(4) ROTHLAUF, *Die Physik Platos,* Parte II, p. 21.

(5) PAPPO, ed. HULTSCH, T. I, p. 353.

(6) HERONIS ALEXANDRINI *Op. omnia,* T. III, Lipsiae, 1903, p. 133.

(7) Id., T. IV, Lipsiae, 1912, p. 66-67.

(8) Cfr. una nota dell'autore *Sulle origini della teoria dei poliedri semiregolari* in corso di stampa nella *Bibliotheca mathematica.*

62. - Detto così, con quanta brevità e completezza ci fu possibile, delle nozioni matematiche del divino filosofo quali risultano dalle sue opere o dalle testimonianze dei commentatori, passiamo ad occuparci dell'unico contributo diretto a noi noto dato da lui all'incremento della geometria, cioè del procedimento da lui immaginato per inserire due medie proporzionali fra due rette date. Esso viene riferito da EUTOCIO nel seguente modo (1):

Date due rette trovare due medie proporzionali in proporzione continua. Le due rette AB, BΓ (fig. 25) fra le quali bisogna trovare due medie proporzionali siano fra loro perpendico-

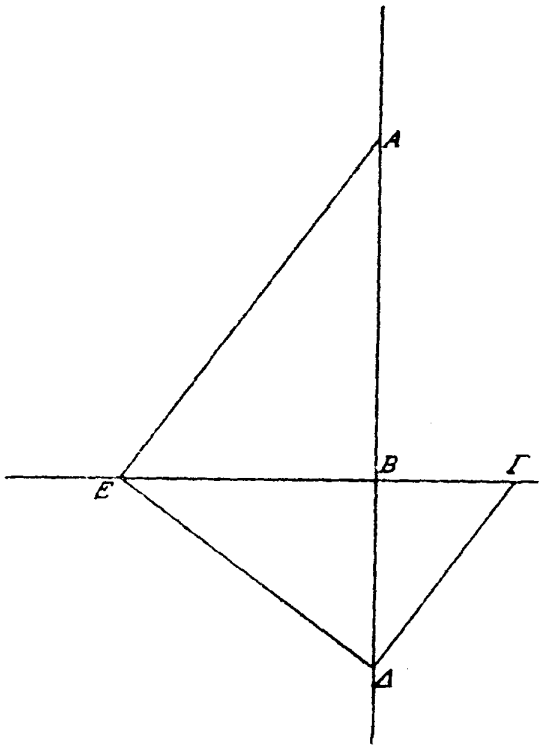


Fig. 25.

lari Si prolunghino verso Δ, E e si costruisca un angolo retto (fig. 26) ZHΘ e su uno qualunque dei suoi lati, per esempio ZH, si faccia muovere una riga KΛ entro una scanalatura fatta in ZH cosicchè essa resti sempre parallela a HΘ. Ciò accadrà se noi immaginiamo una seconda riga connessa a ΘH e parallela a ZH, come sarebbe ΘM. Infatti se le superficie anteriori delle due righe ZH, ΘM sono munite di scanalature conformate a in-

(1) ARCHIMEDE. ed. HEIBERG, T. III, p. 66-70.

castro, e in queste scanalature penetrano delle chiavi connesse alla riga KΛ, nel suo moto la riga KΛ si conserverà sempre parallela a HΘ. Fatto ciò si ponga uno dei lati dell'angolo, per esempio HΘ, in contatto col punto Γ (fig. 25), e si muova l'angolo e la riga sinchè il punto H cada sulla retta BΔ, mentre il lato HΘ tocchi il punto Γ, e la riga KΛ tocchi nel punto K la retta BE, dall'altra parte di A, cosicchè, come mostra la figura, un an-

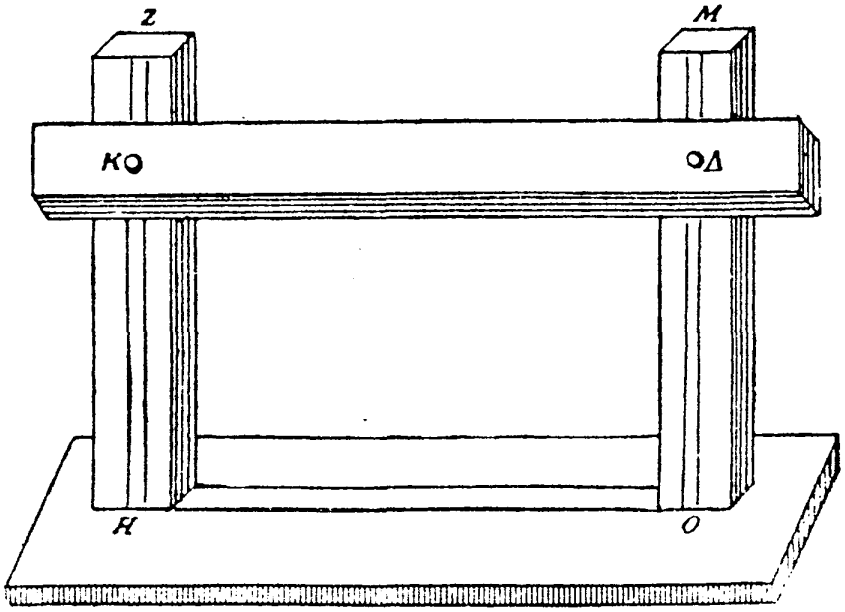


Fig. 26.

golo retto è disposto nel modo dell'angolo ΓΔE, mentre la riga KΛ ha la posizione EA. Allora si sarà ottenuto quello che si voleva. Essendo infatti gli angoli in Δ, E retti si avrà:

$$\Gamma B : B\Delta = \Delta B : BE = EB : BA.$$

Questa soluzione è semplice e non manca di eleganza; essa non è che un'applicazione del teorema « la perpendicolare condotta dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo sull'ipotenusa è media proporzionale fra i segmenti dell'ipotenusa stessa », teorema che, come sappiamo (p. 103), era già noto ad ARCHITA. Nulla si oppone dunque ad ammettere che quella soluzione sia dovuta a PLATONE; però essa è meccanica, onde sembrerebbe impossibile attribuirla a colui che biasimava chi risolveva con mezzi meccanici i problemi geometrici « perchè così le prerogative della geometria

vengono oscurate e tolte, essa è ricondotta allo stato pratico, invece di fare come obbietti di essa le figure eterne ed incorporee » (1); per ciò taluno ritiene apocrifa la soluzione di PLATONE e trova una conferma di tale congettura nel fatto che il solo EUTOCIO ne tenga parola, mentre, ad esempio, ERATOSTENE non ne parli affatto nell'epistola storica relativa al problema di Delo (n. 42) (2). Si può, tuttavia, conciliare il biasimo con la soluzione di PLATONE, vuoi ammettendo che egli, per screditare le soluzioni meccaniche abbia dimostrato col fatto quanto fosse facile immaginarne (3), vuoi supponendo che PLATONE siasi limitato a ridurre il problema della costruzione delle due medie fra le rette AB, BΓ alla inserzione fra i prolungamenti di queste rette di una retta ΔE che riesca perpendicolare alle AE e ΓΔ, mentre qualche commentatore, svisando il concetto del filosofo, abbia congegnato per conto suo quel semplicissimo strumento che permette di effettuarla.

Leodamante, Teeteto e loro discepoli.

63. - Quali geometri contemporanei di PLATONE vengono citati LEODAMANTE di Taso (isola del Mare Tracio) e TEETETO d'Atene.

Le notizie relative al primo sono estremamente scarse; si può dire che si riducano all'essere egli designato (come già sappiamo; v. p. 113) per la persona a cui PLATONE fece conoscere il metodo d'analisi geometrica e all'avere egli saputo utilizzarlo tosto nel risolvere buon numero di problemi geometrici (4). Si deve inoltre giudicare il suo insegnamento

(1) Si veggano i passi di PLUTARCO riferiti da ALLMAN, l. cit., p. 158-9.

(2) V. P. TANNERY, *Notes pour l'histoire des lignes et des surfaces courbes dans l'antiquité* (p. 2 dell'estratto) e *Géométrie grecque*, p. 79-80.

(3) Cfr. ALLMAN, l. c., p. 172-6. L'apparecchio ideato da PLATONE sarebbe il primo strumento conosciuto per risolvere una questione geometrica.

(4) PROCLO, nel riassunto storico che conosciamo, connette a LEODAMANTE il nome di NEOCLEIDE, geometra del resto assolutamente ignoto.

come molto efficace se un suo discepolo — LEONE —, non soltanto compose degli *Elementi* ritenuti più pregevoli di quelli d'IPPOCRATE, ma per primo rilevò la necessità di determinare, per ogni problema, le circostanze nelle quali esso può risolversi e diede, per tal modo, l'essenziale complemento di ogni soluzione che è la discussione di essa. Questa aggiunta ci prova, in primo luogo, come uno spirito filosofico aleggiasse sulle ricerche geometriche dell'epoca di cui stiamo occupandoci e, in secondo luogo, come numerose ed importanti dovessero essere le questioni di geometria già risolute, perchè la necessità del *diorisma* non può essere percepita che in seguito a una esperienza lunga e moltiforme.

64. - Meno monche, ma ancor sempre assai scarse, sono le informazioni che si hanno intorno a TEETETO (1), protagonista di un celebre dialogo di PLATONE. Discepolo di SOCRATE e di TEODORO da Cirene, egli (al dir di PROCLO) si accinse ad investigazioni che EUCLIDE portò a compimento negli *Elementi* (2), e (per attestazione di un anonimo commentatore di EUCLIDE, che forse era lo stesso PROCLO) egli scoperse il teorema (*Elementi*, X, prop. 9): « I quadrati di due rette commensurabili in lunghezza stanno fra loro come un numero quadrato ad un altro; e viceversa. Ma i quadrati di due rette non commensurabili in lunghezza non stanno fra loro come un numero quadrato ad un altro; e viceversa (3) ». Secondo SUIDA, egli avrebbe insegnato in Eraclea e per primo avrebbe scritto *su i cinque solidi*. In base a questi dati e ad un passo (4) del dialogo di PLATONE testè citato, sembra ragionevole (5) concludere che i contributi arrecati da TEETETO alla scienza dell'estensione si debbano rintracciare nei Libri X e XII degli *Elementi* di EUCLIDE; ma il determinare esattamente a quanto essi ammontino è questione tanto importante quanto eccedente i

(1) Cfr. ALLMAN, op. cit., p. 206-215.

(2) PROCLO-TAYLOR, T. I. p. 101.

(3) KNOCHE, *Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euclids Elementen.* Herford, 1865, p. 24. Si vegga anche un ms. arabo di cui parleremo nel II Libro (n. 20).

(4) Il quale trovasi riportato dall'ALLMAN, l. c., p. 208-210.

(5) ALLMAN, l. c., p. 212.

mezzi di cui oggi dispone lo storico della scienza: giova però rilevare che in uno scolio all'ultimo Libro di EUCLIDE pubblicato dall'HEIBERG (1) è detto che l'ottaedro e l'icosaedro furono scoperti da TEETETO, mentre l'invenzione degli altri tre poliedri regolari appartiene alla Scuola di PITAGORA.

Come continuatore di TEETETO (nonchè di EUDOSSO) vien da PROCLO nominato ERMOTIMO da Colofone, il quale perfezionò le produzioni anteriori ed accrebbe il numero delle proposizioni elementari (2). Del contenuto del suo scritto *Su i luoghi*, ricordato da PROCLO, nulla si può asserire con sicurezza; ci sembra però fondata la congettura (3) che ivi la retta e la circonferenza venissero studiate come luogo di un punto soddisfacente a certe condizioni, che pertanto ERMOTIMO abbia preparati i materiali che si trovavano elaborati e completati nell'opera di APOLLONIO PERGEO sui *Luoghi piani*, di cui ci occuperemo nel Libro veniente (n. 66). Ma ammesso anche come vera quest'ipotesi, la personalità di ERMOTIMO, quanto quella di TEETETO, resta tuttora ravvolta in una nebbia fitta, che nessun sole è capace di diradare.

I geometri dell'Accademia.

65. - Le indagini matematiche non cessarono nell'Accademia, con la morte di PLATONE. Lo dimostra il fatto che SPEUSIPPO, nipote ed immediato successore di PLATONE (4), dopo avere studiate a fondo le opere dei Pitagorici ed in particolare quelle di FILOLAO, scrisse un libro *Su i numeri Pitagorici*, ove trattò, in una prima parte, delle varie specie di numeri, dei poliedri regolari e delle proporzioni ed in una seconda della decade.

L'esempio di SPEUSIPPO fu seguito da chi gli succedette nel governo dell'Accademia, cioè ZENOCRATE, al quale, come

(1) *Euclidis Opera omnia*, T. V, p. 654.

(2) Scrisse anche egli un libro di elementi? È ciò che PROCLO non dice chiaramente.

(3) P. TANNERY, *La géométrie grecque*, p. 134.

(4) Esso è nominato da PROCLO in modo assai vago (PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 108-9.

attesta DIOGENE LAERZIO, si debbono due libri *Su i numeri* ed inoltre una *Teoria dei numeri.* Ma, mentre questa e quelli andarono completamente perduti, dell'opera di SPEUSIPPO sopravvisse un brano, perchè venne ospitato in una anonima compilazione scritta nel IV sec. dell'Era nostra e intitolata *Theologumena arithmetica* (1), brano che fa parte eziandio dei *Fragmenta philosophorum graecorum* (2), ed il di cui valore venne segnalato recentemente da P. TANNERY (3). Esso contiene l'enumerazione delle importanti proprietà che i seguaci di PITAGORA credettero scorgere nel numero 10, epperò può utilizzarsi nel valutare le cognizioni aritmetiche possedute da SPEUSIPPO. Ma il legame intimo che nella scuola di Crotone era stato stretto fra l'aritmetica e la geometria, fa si che quel brano possa servire anche come fonte di notizie interessanti per lo storico della geometria; e fra queste merita speciale menzione la seguente.

PLATONE nel *Timeo* enumera *tre* specie di triangoli, cioè: il triangolo equilatero, il triangolo isoscele rettangolo (semiquadrato) e il triangolo che si ottiene conducendo un'altezza di un triangolo isoscele (semitriangolo equilatero). Orbene, SPEUSIPPO dà, per analogia, *quattro* specie di piramidi; vale a dire: il tetraedro regolare, la piramide a base quadrata e con gli spigoli uscenti dal vertice fra loro eguali, quella che nasce dalla precedente conducendo un piano pel vertice ed una diagonale della base, l'ultima finalmente ha per base un semitriangolo equilatero e gli altri tre spigoli fra loro eguali (4). — Mentre si può osservare che SPEUSIPPO non tenne la strada migliore per estendere allo spazio la classificazione dei triangoli piani indicata dal suo maestro, non v'ha dubbio che il tentativo da lui fatto non è totalmente destituito d'importanza, potendosi interpretare come

(1) V. p. 61 dell'ed. AST. Lipsia, 1817.

(2) V. p. 63, nota 59, del III vol. nell'ed. DIDOT. Paris, 1881.

(3) *Un fragment de Speusippe* (*Annales de la Faculté de Lettres de Bordeaux,* T. V, 1883, p. 375-382).

(4) Come quei tre triangoli possono considerarsi siccome le immagini risp. della monade, della diade e della triade; così, seguendo SPEUSIPPO, queste quattro piramidi si possano fare corrispondere ordinatamente alla monade, alla diade, alla triade e alla tetrade.

prima manifestazione del desiderio di estendere allo spazio le proprietà note nel piano, desiderio al quale la geometria è debitrice di non pochi e decisivi progressi; non è certo che SPEUSIPPO lo abbia prima d'ogni altro avvertito, ma vi è ragione per ritenere che egli lo abbia per primo manifestato esplicitamente. Da ultimo in quel passo si trovano traccie di una nomenclatura delle figure geometriche (triangoli e piramidi in particolare) la quale, benchè venga presentata come classica, tuttavia non si trova più in EUCLIDE.

L'influenza benefica esercitata sulle scienze esatte dal fondatore dell'Accademia non potrebbesi meglio misurare che enumerando e analizzando le opere geometriche di coloro che lo riconobbero come maestro. Ma queste opere, tranne poche eccezioni, non si sottrassero all'ingiuria del tempo, e i nomi stessi de' loro autori sarebbero andati dimenticati ove non ne avessero serbato ricordo alcuni commentatori, fra i quali devesi prima d'ogni altro, e con riconoscenza, ricordare PROCLO. Così di ATENEO da Cizico non conosciamo (e anche imperfettamente!) che il nome; mentre TEUDIO da Magnesia ci è ricordato soltanto come nuovo compilatore di elementi. AMICLA da Eraclea è a dir vero rammentato, non solo da PROCLO, ma anche da DIOGENE LAERZIO, il quale, dopo averlo ascritto fra i seguaci di PLATONE, ce lo dipinge come Pitagorico e come associato a CLINIA nell'impedire che il suo maestro distruggesse le opere di DEMOCRITO (1). E quanto a FILIPPO incerta ne è la patria (2), come incerto è il modo in cui egli seguì i cenni di PLATONE nel coltivare la geometria (3); sappiamo però che si consacrò di preferenza all'astronomia (4) e delle numerose

(1) Tali notizie non sembrano degne di fede a P. TANNERY, *Géométrie grecque,* p. 130.

(2) Sarebbe egli Opunzio come vuole il TANNERY (o. c., p. 130)? Secondo B. BALDI fiorì intorno alla 100ª Olimpiade (v. *Bullettino di Bibl.*, ecc, T. XX, 1887, p. 374).

(3) PROCLO cita due volte FILIPPO; una volta come proponitore di questioni matematiche (PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 101) ed un'altra per le sue obbiezioni alla Prop. 16ª del I Libro di EUCLIDE.

(4) GEMINO (Matematico di cui ci occuperemo in principio del IV Libro) conservò certe date determinate da FILIPPO concernenti il sorgere ed il tramontare di alcune stelle.

sue opere SUIDA conservò i titoli dai quali deduciamo che dieci fra esse toccavano, più o meno da vicino, le scienze esatte; sono quelle che recano i titoli: *Aritmetica; Medietà; Sui numeri poligonali; Ciclica; Ottica; Enottrica* (sugli specchi); *Sulla distanza fra il sole e la luna; Sull'eclisse lunare; Sulle grandezze del sole, della luna e della terra; Sui pianeti.*

66. - L'unico dei filosofi dell'Accademia, di cui possiamo esattamente misurare le cognizioni geometriche, è il più celebre fra essi, ARISTOTELE (1). Nato a Stagira (piccola città della Macedonia, non discosta dal monte Athos) nel 384 a. C., egli ascoltò PLATONE ad Atene (2), e poi, accettanto l'invito di re FILIPPO, andò ad insegnare al giovane ALESSANDRO. Per tre anni gli fu maestro e sembra gli fosse anche compagno in parecchie spedizioni; ma, salito al trono il suo discepolo (nel 360 a. C.), egli ritornò ad Atene, ove, colle celebri lezioni da lui impartite nel Liceo, si pose a capo della setta dei Peripatetici. Ad Atene, però, non trovò sicuro asilo, perchè le sue opinioni filosofiche o le sue relazioni coi sovrani di Macedonia lo resero presto sospetto, tanto che egli, per sfuggire alle minacciate persecuzioni, credè opportuno riparare con alcuni fidi discepoli a Calcide nell'isola di Eubea. Ma, secondo certuni, neppure qui si sentì sicuro; onde, preferendo la morte al cadere in potere dei reggitori di Atene, finì col veleno (3) la propria esistenza (322 a. C.).

(1) Fra le innumerevoli edizioni di ARISTOTELE limitiamoci a ricordare quella, in *cinque* volumi, curata dall'Accademia di Berlino (1831-50) e destinata a venire completata dalla raccolta, in *trentacinque* volumi, dei suoi commentatori Greci.

(2) Come discepolo di PLATONE lo rivelano, fra l'altro, le seguenti parole della sua *Metafisica:* " È dunque a torto che i geometri vengono accusati di non insegnare che delle chimere e di non avere nella loro scienza nulla di buono e di bello. Io invece sostengo cho essi, senza farne pompa, insegnano delle cose che sono ad un tempo buonissime e bellissime. Giacchè ogni bontà ed ogni bellezza non risulta forse da l'ordine e la proporzione? ora di che cosa si occupano i geometri se non di ordine e proporzione? „

(3) Riguardo alla causa della morte di ARISTOTELE, le opinioni sono discordi.

67. - Le benemerenze del « maestro di color che sanno » riflettono specialmente le scienze naturali (1) essendo egli stato il primo grande biologo ed avendo, oltrechè proposta la più antica terminologia scientifica conosciuta, prima di ogni altro alzata la voce contro la speculazione astratta, che PLATONE propugnava, e sostenuta la necessità di fare precise osservazioni e raccoglierne in buon ordine i risultati (2). Noi matematici non dobbiamo tuttavia dimenticare che, col sistematizzare la logica deduttiva, egli entrò in un campo che ha infiniti punti di contatto con quello che coltiviamo; di più, la semplice indicazione con lettere dei numeri, delle rette, ecc., di cui in ARISTOTELE si trova il più antico esempio (3), piacque ad EUCLIDE, che ne fece largo uso ne' suoi libri aritmetici e geometrici, ed è forse il primo passo verso il calcolo algebrico. ARISTOTELE compose poi un'opera matematica Περὶ ἀτόμων γραμμῶν e DIOGENE LAERZIO ne cita un'altra dal titolo Μαθηματικόν.

Inoltre era costume di ARISTOTELE di inserire (similmente a quanto faceva PLATONE) considerazioni geometriche fra le sue ricerche fisiche e filosofiche (4) (come emerge in parte

(1) Ciò spiega perchè gli storici della matematica abbiano generalmente dedicato a lui poche parole; fa eccezione M. SIMON di cui la *Geschichte der Mathematik in Alterthum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte.* Berlin, 1909, contiene un considerevole squarcio (p. 214-228) sopra ARISTOTELE, ove sono accuratamente segnalati i punti di contatto fra lui ed i moderni.

(2) " I fenomeni non furono ancora abbastanza studiati: ma quando lo saranno, all'esperienza si dovrà prestare maggior fede che alla speculazione, e a quest'ultima solo sin tanto dia risultati che concordino con i fenomeni „.

(3) *Phys. Auscult.*, Lib. VII, Cap. 6°.

(4) Cfr. PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 98, 107 e 129; T. II, p. 13, 84 e 158. Una ricca raccolta di passi matematici nelle opere di ARISTOTELE venne fatta con una pazienza da benedettino da GIUSEPPE BIANCANI (1566-1624) (v. *Aristothelis Loca mathematica ex universis ipsius Operibus collecta et explicata Authore Josepho Blancano.* Bononiae, 1615) e sostanzialmente riprodotta da I. C. HEILBRONNER nella sua *Historia matheseos universae.* Lipsiae, MDCCXLII. p. 172-236. Con altrettanta diligenza ma con maggiore spirito critico fece altrettanto di recente J. L. HEIBERG, *Mathematisches zu Aristoteles* (Abh. zur Gesch. der Mathematik, XVIII Heft, 1904). Ben diverso è lo scopo della coscienziosa

da quello che dicemmo a proposito dei tentativi fatti da IPPOCRATE, ANTIFONTE e BRISSONE per quadrare il circolo). Così è in ARISTOTELE che per la prima volta s'incontra la *geodesia* come contrapposto pratico della *geometria* e la seguente definizione di continuo (1): « una cosa è continua quando due parti contigue di essa hanno gli stessi confini ». Superfluo rilevare che ARISTOTELE conobbe come retti gli angoli inscritti un una semicirconferenza e la divisibilità di un piano in poligoni regolari (di 3, 4 o 6 lati). Importante è invece additare in due passi di una delle sue opere (*Anal. Post.*) tracce del teorema: « se si prolungano nello stesso senso tutti i lati di un poligono piano, la somma degli angoli esterni risultanti è eguale a quattro retti », e l'osservazione « quando si sviluppa un cilindro su un piano, una sua sezione retta si muta in una retta od in una curva secondochè il piano segante è parallelo od obliquo alla base », osservazione questa che forse è la prima concernente le modificazioni che produce lo sviluppo di una superficie su di un piano nelle curve tracciate su di essa (2). A complemento di un teorema pitagorico (n. 22) egli (nella *Fisica*) ha poi

---

opera di A. GÖRLAND, *Aristoteles und die Mathematik.* Marburg, 1889, giacchè ivi sono accuratamente esaminati i contributi dati dallo stagirita alla " filosofia delle matematiche „, cioè alle investigazioni intorno all'essenza dei concetti e dei metodi in uso nelle scienze esatte. Un paragone dello schema logico degli *Elementi* di EUCLIDE con le massime aristoteliche risulta da molti passi dell'opera di T. L. HEATH, *The thirtem books of Euclid's Elements,* Cambridge, 1908, passi che il lettore troverà agevolmente servendosi dell'indice dei nomi posta al termine di essa (articolo *Aristotele*). Aggiungiamo che, accettando l'interpretazione proposta dall'HEATH per un passo di ARISTOTELE (*On an allusion in Aristotle to a construction for parallels ;* Abh. zur Gesch. der Math., IX Heft, 1899), si giunge ad attribuirgli la più antica critica della teoria delle parallele fondata sopra il concetto di direzione.

(1) Cfr. W. K. CLIFFORD, *The philosophy of the pure science* in *Lectures and Essays,* vol. I, London, 1879, p. 307.

(2) Il BURJA dopo averla riferita (nel lavoro *Sur les connaissances mathématiques d'Aristote* inserito fra i *Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres depuis l'avènement de Guillaume II au thrône,* MDCCXC et MDCCXCI, Berlin, 1791, p. 257 e seg.) raccomanda ai geometri lo studio di quella curva, che,

osservato che lo spazio si può dividere soltanto in cubi ed in tetraedri regolari, mentre il piano si può riempire di quadrati, di triangoli equilateri e di esagoni regolari. Nè va taciuto come in altra sua opera (*Metereologica*) si trovi risolto il problema di « determinare il luogo dei punti di un piano le cui distanze da due punti fissi hanno fra loro un dato rapporto »: e noto che tale luogo è un circolo, detto, con discutibile proprietà di linguaggio, *circolo d'Apollonio*, perchè come vedremo nel seguente Libro (n. 66), si trova in un'asse, oggi perduta, del grande geometra di Perga (1).

68. - Esce dal nostro quadro lo studio delle questioni riflettenti la *Meccanica* di ARISTOTELE, benchè alcune tocchino i confini che separano la scienza dei moti e delle forze da quella del numero e dell'estensione (2). Riteniamo inutile arrestarci su un passo di ARISTOTELE che si riferisce alla duplicazione del cubo, perchè non ha alcuno interesse per noi e d'altronde incerto ne è il senso (3); e preferiamo additare una dimostrazione da lui accennata (*Anal. prior.*,

---

a suo credere, presenta forse qualche proprietà importante. Ora, se $x^2 + y^2 = 1$ è l'equazione del cilindro che si considera e $z = ax + by + c$ quella del piano secante, facendo in questa $x = \cos\varphi$ e $y = \operatorname{sen}\varphi$ si otterrà $z = a\cos\varphi + b\operatorname{sen}\varphi + c$, la quale è l'equazione cartesiana della curva dopo lo sviluppo, supposto questo fatto tagliando il cilindro lungo la generatrice corrispondente a $\varphi = 0$. Determinando due nuove costanti ρ e γ mediante le equazioni:

$$a = \rho\cos\gamma\,,\quad b = \rho\operatorname{sen}\gamma\,,$$

si avrà

$$z - c = \rho\cos(\varphi - \gamma):$$

onde, fatto

$$z - c = \eta\,,\quad \varphi - \gamma = \pi - \xi\,,$$

si otterrà l'equazione

$$\eta = \rho\operatorname{sen}\xi\,,$$

che rappresenta una curva affine ad una sinusoide. Le proprietà della curva in questione si possono quindi considerare per notissime.

(1) Cfr. APOLLONIO ed. HEIBERG, T. II, p. 180.

(2) Cito a mo' d'esempio quella che si riferisce alla così detta *ruota d'Aristotele:* cfr. CANTOR, *Vorlesungen,* T. I, p. 255-6.

(3) V. BLANCANUS, l. c., p. 52 e REIMER, l. c., p. 73 e seg.

Lib. I, p. 24), della eguaglianza degli angoli alla base di un triangolo isoscele: essendo differente da quella che si legge negli *Elementi* di EUCLIDE, serve a gettare qualche luce sopra i più antichi trattati di geometria oggi perduti (1).

Tracciata la fig. 27, partendo dal triangolo isoscele che ivi compare, i due angoli mistilinei E + Γ e Z + Δ sono fra loro eguali; lo stesso dicasi dei due angoli mistilinei Γ e Δ; quindi i due angoli rettilinei E e Z ossia A e B sono pure eguali.

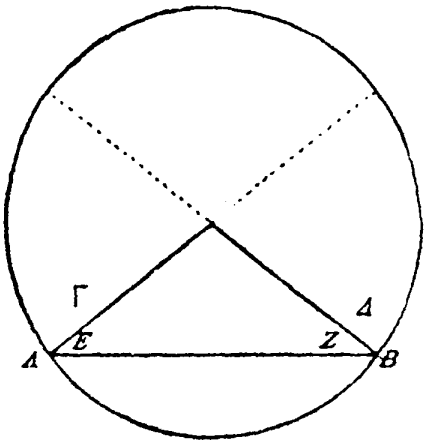


Fig. 27.

Esaminando questo breve ragionamento vedremo tosto che esso poggia sopra i due seguenti *teoremi:* « Sono fra loro eguali 1.° gli angoli mistilinei nei semicerchi, 2.° gli angoli mistilinei di un segmento circolare » e sull'*assioma* « se da cose eguali si tolgono cose eguali, si ottengono resti eguali ». D'altronde, il modo con cui ARISTOTELE parla di quel ragionamento fa credere che esso non fosse opera sua, ma si trovasse nei manuali di geometria che erano in uso a' suoi tempi; ne segue che degli angoli mistilinei avevasi notizia prima di EUCLIDE (il che emerge d'altronde anche dal commento di PROCLO), che anzi erano stati studiati più a fondo di quanto potrebbe credersi percorrendo gli *Elementi* (2),

(1) V. per quanto segue HEIBERG, *Et mathematisk Sted hos Aristoteles* (Kjöbenhavn, Vidensk. Sclsk., Oversigt, 1888, p. 1-6).

(2) Donde una prova che non bisogna prendere troppo alla lettera l'asserzione (v. Libro II, n. 4) che EUCLIDE abbia seguito fedelmente coloro che prima di lui composero degli elementi.

nei quali non trovarono posto le due proposizioni citate. Quanto poi al dedurre, dall'uso del succitato assioma, che anche i trattatisti precedenti EUCLIDE abbiano avvertita la necessità di porre a fondamento della geometria una collezione di assiomi (1), noi non ci sentiamo di farlo perchè quell'assioma si presenta così spontaneo che può darsi benissimo che ARISTOTELE ed i suoi contemporanei se ne siano serviti senza enunciarlo, mentre l'enunciazione esplicita appartenga all'epoca in cui lo stile geometrico raggiunse la sua massima perfezione.

Con questo cenno chiudiamo la non ricca serie di notizie sopra ARISTOTELE come matematico. Vogliamo però aggiungere che furono suoi discepoli EUDEMO da Rodi e TEOFRASTO da Lesbo, dei quali il primo compose una storia della matematica e il secondo fu forse a torto fatto autore di grandi opere di storia scientifica (2). Tali lavori non si sottrassero alla rovina che colpì la biblioteca di Alessandria; tuttavia ne vennero conservati molti frammenti (3) e numerose importanti notizie vennero ad esse attinte, direttamente o meno, dai commentatori, a cui deve ricorrere chiunque voglia seguire l'evoluzione del pensiero matematico nell'antica Grecia (4).

Eudosso da Cnido.

69. - L'epoca dell'attività intellettuale e didattica di PLATONE non differisce sensibilmente da quella in cui fiorì uno scienziato eminente il quale, dopo essere stato fatto segno nell'antichità della più elevata ammirazione (5), vide per un

(1) HEIBERG, l. c.

(2) P. TANNERY. *Sur les fragments d'Eudème de Rhodes relatifs à l'histoire des mathématiques* (Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux. T. IV, 1882, p. 70-76).

(3) Vennero raccolti dallo SPENGEL, *Eudemi Rhodii peripatetici fragmenta quae supersunt,* Berlino, 1870) e dal MULLACH, *Fragmenta philosoporum graecorum,* T. III, Paris, 1881.

(4) Per es., da EUDEMO, PROCLO desunse, come dicemmo, la materia del brano che noi riportammo nel n. 3.

(5) Lo prova, fra l'altro, il qualificativo di ἔνδοξος (illustre) con cui veniva designato dagli antichi e quello di θεσυδής (divino) di cui lo onora ERATOSTENE, *Archimedis Opera omnia* ed. HEIBERG V, T. III, p. 112.

certo tempo la propria fama offuscata, per poi risplendere di più vivida luce, grazie alle fatiche dei più recenti studiosi delle sue opere (1). I quali restituirono la posizione che gli spetta nella storia della scienza greca all'uomo in cui sembra rispecchiarsi più chiaramente il carattere multiforme di quel tempo, a un ingegno che le scienze dell'Oriente e dell'Occidente insieme riuniva e che seppe in sè medesimo far convergere tutta quanta la coltura ellènica come era venuta maturando nell'Asia, ad Atene, in Italia (2): intendiamo parlare di EUDOSSO (3).

Nacque questi da ESCHINE (4), probabilmente verso il 408 a. C., nella piccola città dorica di Cnido, appartenente alla Carie e sita sulla costa dell'Asia Minore. Benchè provveduto di scarzi mezzi di fortuna, gli fu dato di usufruire degli insegnamenti delle più spiccate individualità del suo tempo — quali i sofisti, ARCHITA, i sacerdoti Egiziani — grazie alla liberalità de' suoi amici i quali, avvedutisi dell'eccellenza delle sue facoltà intellettuali, provvidero a che queste avessero il loro pieno svolgimento. Gli è per tal modo che egli potè, all'età di circa trent'anni, intraprendere col medico CRISIPPO un viaggio in Egitto. Quanti e quali attrattive presentasse una tale peregrinazione per un uomo di scienza contemporaneo di PLATONE, si riconoscerà facilmente quando si ricordi l'alta e meritata fama di cui in tutto il mondo go-

---

(1) Si debbono citare come particolarmente benemeriti l'IDELER (per le due letture *Ueber Eudoxus* inserite nelle *Abh. der k. Akad. d. Wiss. zu Berlin* 1828 e 1830) e lo SCHIAPPARELLI (pel memorabile scritto *Le sfere omocentriche di Eudosso, di Callippo e di Aristotile.* Milano, 1875). Altre numerose scritture che lo concernono si trovano citate nel pregevole lavoro di H. KÜNSSBERG, *Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos,* pubblicato in due parti. Dinkelsbühl, 1888-1890, che citeremo brevemente come KÜNSSBERG I e KÜNNSBERG II.

(2) Cfr. CURTIUS, op. c., T. III, p. 531.

(3) La più antica fonte di attendibili informazioni sulla vita è DIOGENE LAERZIO.

(4) Importa tener conto del nome del padre del nostro EUDOSSO, per distinguerlo da altri quattro greci dello stesso nome e che furono medico l'uno, storico un secondo, un terzo viaggiatore e poeta comico un quarto e dei quali la patria fu ordinatamente Cnido, Rodi, Cizico e la Sicilia.

devano i sacerdoti Egiziani e si rifletta che allora non era più vietato ad essi, come in tempi più antichi, di comunicare agli stranieri le cognizioni scientifiche di cui erano depositari (1): ed infatti si accerta che EUDOSSO, coll'aiuto di una lettera di presentazione per NECTANABI datagli da AGESILAO, il famoso re di Sparta, ottenne di essere messo a parte delle dottrine professate e delle osservazioni astronomiche fatte sulle rive del Nilo (2).

Completata così, mediante lo studio dell'astronomia, l'istruzione matematica che egli si era procacciata a Taranto sotto la direzione di ARCHITA e ad Atene (ove per due mesi aveva soggiornato) in contatto con PLATONE (3) ed i sofisti, EUDOSSO ritornò in Europa e verso il 368 a. C. fondò a Cizico (in Misia) una scuola, da cui diffuse nella Propontide le scienze con cui erasi famigliarizzato. Di tale scuola egli tenne il governo per pochi anni; infatti, non molto dopo che egli ne aveva gettate le fondamenta, lo troviamo nuovamente in Atene assieme ad uno stuolo di discepoli (fra cui spiccano i matematici MENECMO, DINOSTRATO, ATENEO ed ELICONE) atteggiato, secondo alcuni, ad oppositore dell'indirizzo scientifico di PLATONE: tale attitudine è però ben lungi dall'essere storicamente provata, chè essa mal si concilia col viaggio fatto poco appresso insieme in Sicilia dai due valentuomini per apprendervi la medicina.

EUDOSSO, ritornato in patria, vi fu festosamente accolto; ivi morì verso il 353, dopo avere date a' suoi concittadini (o fors'anche agli abitanti di Mileto) savie leggi, lasciando

---

(1) Giova ricordare che sotto il regno di DARIO II l'Egitto riuscì ad emanciparsi dal protettorato persiano che su esso gravitava fin dai tempi di CAMBISE e, coll'aiuto dei Greci, fruì di una certa indipendenza per circa sessantaquattro anni; allora ebbe luogo fra gli Ellèni e gli Egiziani un più vivace scambio d'idee, sicchè quelli poterono togliere in parte il velo di mistero che avvolgeva le costumanze di questi.

(2) Riguardo all'epoca di questo viaggio le opinioni degli storici non sono concordi: Cfr. ALLMAN, l. c., p. 128-132, TANNERY, *Géom. grecque*, p. 132.

(3) Alle relazioni con PLATONE devesi forse che EUDOSSO venga spesso collocato fra i geometri dell'Accademia: v. CURTIUS, T. III, p. 554, BRETSCHNEIDER, p. 163; non lo pone fra essi lo ZELLER, *Die Phil. d. Griechen*, 1875, T. II, nota 1 p. 890.

tre figlie, una delle quali vuolsi arrivasse ad una fama non minore di quella raggiunta da suo padre (1).

70. - La straordinaria versatilità di EUDOSSO è concordemente attestata dagli antichi che lo dicono astronomo, geografo, matematico, filosofo, medico e legislatore: ma delle sue opere scritte non ci rimasero (e non di tutte) che i titoli (2), sicchè per formarsi un'idea dei progressi di cui a lui sono debitrici le scienze esate è forza, come abbiamo fatto per quasi tutti gli scienziati precedenti, rivolgerci per informazioni a scrittori coevi.

La prima notizia su EUDOSSO esiste nel frammento storico di PROCLO (n. 3), dal quale si apprende avere egli sviluppato quelle cose intraprese da PLATONE sulla sezione (περὶ τὴν τομήν) servendosi per ciò del metodo analitico. A quali ricerche si allude in questo passo? Per lungo tempo si credette trattarsi delle sezioni di solidi mediante piani, senza però rendersi conto di qual natura fossero i solidi tagliati. Ma nel 1870 il BRETSCHNEIDER (3) propose un'altra interpretazione, che incontrò il favore dei competenti (4), secondo la quale i problemi che occuparono PLATONE ed EUDOSSO avrebbero toccata la divisione di una retta in media ed estrema ragione. Per rendersi ragione di questa spiegazione si ricordi che tale divisione non era ignota probabilmente ai Pitagorici e che la costruzione con cui essi la eseguivano sembra risultare dalla prop. 11 del II Libro di EUCLIDE e forse anche dalle prop. 10-14 del IV, passi nei quali evidentemente EUCLIDE ha seguito lo sviluppo storico della geometria. Ora, è ammissibile che PLATONE siasi nuovamente occupato dalla *sectio aurea* e abbia cercate nuove relazioni metriche fra i segmenti di una retta divisa in tal modo: gli è in tali ricerche che, secondo il BRETSCHNEIDER, sarebbe stato seguito da EUDOSSO, e i risultati a cui essi

(1) Più recenti ricerche portarono il SUSEMIHL, *Die Lebenszeit des Eudoxos von Knidos* (Rhein. Museum, LIII Bd., 1898) a trasportare al 390 l'anno di nascita di EUDOSSO ed al 358 o 357 quello del suo viaggio in Egitto.

(2) Fra esse trovavasi forse una esposizione degli elementi della matematica: v. REIMER, l. c., p. 52. KUNSSBERG, T. I, p. 16.

(3) Op. cit., p. 167.

(4) Cfr. CANTOR, ALLMAN, KÜNSSBERG.

pervennero sarebbero consegnati nelle prime cinque proposizioni del XIII Libro degli *Elementi*. Adottando questo modo di vedere, a PLATONE e al geometra di Cnido apparterrebbero le proposizioni seguenti: 1.° Se una retta è divisa in media ed estrema ragione, il quadrato della parte maggiore aumentata della metà della retta data eguaglia il quintuplo del quadrato di questa metà (1); 2.° Se il quadrato di una retta è il quintuplo del quadrato di una sua parte, e se si divide il doppio di questa parte in media ed estrema ragione, il segmento maggiore è la parte residua della retta data (2); 3.° Se una retta è divisa in media ed estrema ragione, il quadrato del segmento minore aumentato della metà del segmento maggiore è eguale a cinque volte il quadrato della metà del segmento maggiore (3); 4.° Se una retta è divisa in media ed estrema ragione, il quadrato di tutta la retta aumentato del quadrato della parte minore dà il

---

(1) Infatti, dall'uguaglianz

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

se uono queste altre

$$x^2 + ax = a^2 \; ; \; \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2 .$$

(2) Infatti, se

$$a^2 = 5\,x^2 \, , \, y^2 = 2\,x\,(2\,x - y),$$

sarà

$$y + x = a \, ,$$

epperò

$$y = a - \frac{a}{\sqrt{5}} .$$

(3) Infatti, dalla relazione

$$x^2 = a\,(a - x)$$

si trae l'altra

$$\frac{5\,x^2}{4} = \left(a - \frac{x}{2}\right)^2 ,$$

ossia

$$\left\{(a - x) + \frac{x}{2}\right\}^2 = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2 .$$

triplo del quadrato della parte maggiore (1); 5.° Se ad una retta divisa in media ed estrema ragione si aggiunge la parte maggiore, la retta intera sarà divisa in media ed estrema ragione e il segmento maggiore sarà la retta primitiva (2). — A sostegno della propria tesi il BRETSCHNEIDER osservò che, mentre in tutta la sua opera EUCLIDE non fa cenno di analisi e sintesi, in seguito a quelle cinque proposizioni egli insegna la distinzione dell'una dall'altra, nonchè la definizione di analisi; tal fatto egli interpreta come conferma della notizia data da PROCLO, dell'avere EUDOSSO adoperata l'analisi per compiere gli studi di PLATONE sulla sezione, epperò conclude che ivi EUCLIDE riproduce una parte almeno del lavoro di EUDOSSO. Ora è da notare che le analisi e sintesi testè menzionate sembrano dovute, non ad EUCLIDE stesso, ma ad uno scoliasta (3), onde l'argomento ora riferito non ha grande valore. Ma, d'altronde, l'uso fatto ivi del gnomone (n. 24) e l'essere tre dei teoremi citati conseguenze immediate del problema 11 del II Libro, fanno credere alla loro antichità (4), onde nulla seriamente si oppone ad ammettere che (non EUCLIDE, ma lo scoliasta anzidetto) le abbia tolte da EUDOSSO; rimane però sempre da decidere se lo scrittore, chiunque esso sia, le abbia in-

---

(1) Infatti, la relazione

$$x^2 = a^2 - ax$$

equivale all'altra

$$2\,a^2 - 2\,ax = 2\,a^2,$$

ossia

$$a^2 + (a - x)^2 = 3\,x^2.$$

(2) Infatti da

$$x^2 = a\,(a - x)$$

risulta

$$x^2 + ax = a^2$$

ossia

$$\frac{a + x}{a} = \frac{a}{x}.$$

(3) HEIBERG, *Revue critique d'histoire et de littérature*. Nouv. Série, T. XI, 1881, p. 380; e *Euclidis Opera omnia*, ed. HEIBERG, T. IV, 1885, p. 250 e seg. e p. 364 e seg.

(4) ALLMAN, l. c., p. 136.

ventate oppure si sia limitato a mettere del suo quelle doppie dimostrazioni che si leggono negli *Elementi*.

Come dicemmo, l'ingegnosa interpretazione delle parole sibilline di PROCLO che il BRETSCHNEIDER ha proposto venne da molti storici accettata; da molti, ma non da tutti; chè G. FRIEDLEIN (1) e P. TANNERY (2) non cedettero alle seduzioni delle doti che essa possiede ed invece preferirono riaccostarsi all'antica supposizione che ivi PROCLO (3) alludesse ai lavori sulle sezioni dei solidi (poliedri e sfera) che prepararono la teoria delle coniche, la quale teoria appunto nella scuola di Cizico ebbe il suo cominciamento (v. n. 74 e seg.).

71. - Se fra questi due modi di considerare il lavoro di EUDOSSO *sulla sezione* ognuno può scegliere quello che più gli appare verosimile, se, quindi, nel modo di giudicare questo lavoro regna grande incertezza, vi è, per converso, un importante contributo arrecato dallo stesso scienziato alla costituzione degli *Elementi*, il cui valore non è lecito revocare in dubbio e di cui fa d'uopo dire qualche parola.

Un anonimo scoliasta, che probabilmente era PROCLO stesso, attribuisce il V Libro degli *Eleme ti* a « EUDOSSO il quale fu maestro a PLATONE » (4); e siccome è certo (n. 21) che già i Pitagorici conoscevano la teoria dei rapporti pei numeri razionali, così spetterebbe al geometra di cui ci occupiamo il merito grandissimo di averle dato tale generalità da abbracciare ogni sorta di grandezze (5).

---

(1) *Beiträge* citati III, p. 18.

(2) *Le géom. grecque*, p. 76.

(3) È notevole che questo passo fece, da qualcuno, attribuire a PLATONE la teoria delle coniche; è forse in base a questa attribuzione che DILLING scrisse (l. c., p. 21) che EUDOSSO " in sectionum conicarum disciplina incubuit „ ?

(4) KNOCHE, *Untersuchungen* citate, p. 10; *Euclidis Opera omnia*, ed. HEIBERG, T. V. Lipsiae, 1885, p. 280-2.

(5) " Le rôle d'Eudoxe semble avoir été surtout d'établir d'une façon irréfutable pour les grandeurs en général, commensurables ou non, une théorie qui à l'origine ne supposait de rapport qu'entre nombres. Jusqu'à son travail, l'incommensurabilità demeurait en géométrie une pierre d'achoppement, et ses precurseurs bannirent systématiquement, en consequénce, la notion de rapport des démonstrations des quatre premiers livres „ (d'EUCLIDE). P. TANNERY, *L'éducation platonicienne*, 2e article (*Revue philosophique*, T. XI, 1881, p. 249).

Non meno chiaramente si esprime ARCHIMEDE nella lettera che precede il I Libro della sua celebre opera *Su la sfera e il cilindro*; ivi, dopo avere citate le principali proprietà da lui scoperte in quelle figure, continua dicendo:

Queste proprietà essendo inerenti alla natura stessa delle figure, esistevano fin dalle origini: rimasero però ignote a coloro che studiarono la geometria prima di me. Ma quando siano comprese, non si dubiterà essere desse proprie a quelle figure e si porranno allo stesso livello di quelle avvertite prima nei solidi, che si considerano come teoremi dimostrati da saldissimi documenti, e che EUDOSSO ha fatto conoscere, cioè che qualunque piramide è la terza parte del prisma avente la stessa base ed eguale altezza della piramide e qualunque cono è la terza parte del cilindro avente la stessa base ed eguale altezza del cono. Essendo infatti anche queste proprietà inerenti alla natura stessa di quelle figure, pure accadde che rimanessero ignorate e non fossero nemmeno supposte da tutti i geometri precedenti EUDOSSO (1), benchè siano stati molti e abilissimi (2).

Alle medesime proposizioni di EUDOSSO allude ARCHIMEDE nella prefazione, in forma epistolare, del suo libro sulla *Quadratura della parabola*, nella quale enuncia il risultato da lui ottenuto e dà la seguente importante notizia intorno al proprio metodo di dimostrazione:

Giacchè noi dimostriamo che qualunque segmento compreso fra una retta ed una parabola è di un terzo maggiore del triangolo avente la stessa base ed eguale altezza, assumendo come lemma nella dimostrazione che dati due spazi diseguali l'eccesso del maggiore sul minore addizionato a sè stesso un certo numero di volte può sorpassare uno spazio dato finito. Però anche i geometri precedenti si sono serviti di questo lemma; giacchè che i circoli abbiano fra loro ragione duplicata dei loro diametri vien dimostrato appunto mediante questo lemma e così dicasi dell'essere due sfere in un rapporto triplicato di quello in cui stanno i loro diametri: inoltre che qualunque piramide sia la terza parte del prisma avente la

(1) In altro scritto (v. Libro II, n. 44) ARCHIMEDE afferma che erano note a DEMOCRITO.

(2) ARCHIMEDE, ed. HEIBERG, T. I, p. 4-6.

stessa base ed eguale altezza e che qualunque cono sia la terza parte del cilindro avente la stessa base cono ed eguale altezza, si dimostra pure assumendo un lemma simile al suddetto (1).

72. - Ora questo secondo brano, nel quale per la prima volta ci viene sotto una forma particolare presentata quella celebre proposizione, che sotto il nome improprio di *assioma d'Archimede*, rappresenta oggi una parte così importante nella teoria generale delle grandezze (2) e che funge da chiave di volta a quel metodo — *metodo di esaustione* (3) — che per gli antichi surrogava il nostro calcolo integrale (4), dà origine a parecchie importanti questioni storiche, dalla cui soluzione dipende il posto che si deve assegnare ad Eudosso nella storia della matematica.

Le questioni anzidette sono: I. *Ha Eudosso dimostrati i teoremi sulla piramide ed il cono attribuitigli da Archimede col mezzo di un lemma somigliante a quello da questi invocato per quadrare la parabola?* La cosa appare probabile, visto che Euclide, propenso a conservare intatte le opere dei suoi predecessori, ha dimostrato il teorema della piramide in un modo che sembra corrispondente alle indicazioni archimedee (5) e ne a dedotto poi il teorema sul cono *con un passaggio al limite* (per esprimerci con una

(1) Id., T. II, p. 276. In senso analogo si esprime Erone (*Opera* ed. Schöne, III vol., p. 3).

(2) Com'è noto esso enunciasi in generale così: data una grandezza, ne esiste sempre un multiplo superiore ad una grandezza omogenea data.

(3) Secondo il nome proposto nel 1669 da A. Tacquet: cfr. L. F. Oefterdinger, *Ueber den Zusammenhang der Euclidischen Lehre der Verhältnissen mit den Anfängen der Exhaustions-Methode.* Ulm, 1889.

(4) Esso riesce utile specialmente per paragonare fra loro due linee, due votumi, due solidi, e consiste nel confrontare le singole parti di una grandezza ignota con due grandezze conosciute, variabili con date leggi, fra cui essa è costantemente compresa e che tendono a differire dalla stessa meno di ogni quantità assegnabile.

(5) Poichè, come notò il Künssberg (l. c., II, p. 38), la prop. 7ª del XII Libro degli *Elementi di Euclide* scaturisce dalla 5ª, nella quale è usata la prop. 1ª del X Libro, che equivale all'assioma d'Archimede.

locuzione moderna); visto, d'altronde, che oggi si sa non essere possibile alcuna dimostrazione di quei due teoremi che sia indipendente dal concetto di limite. II. *Ha Eudosso trovato egli stesso il lemma di cui aveva bisogno?* Le parole di ARCHIMEDE ne fanno dubitare; esse fanno, invece, pensare che l'origine di quel lemma debbasi far risalire a colui che per primo dimostrò la più elementare delle citate proposizioni, quella, cioè, concernente il rapporto di due circoli; ora, siccome questa proposizione era conosciuta da IPPOCRATE da Chio (p. 90), noi ci troviamo in questo bivio: o di ammettere che questi si sia limitato a percepire la verità di quel teorema vuoi sperimentalmente — cioè mediante il calcolo (1) — vuoi notandone l'analogia con quello che assegna il rapporto di due poligoni simili inscritti in due circoli (2), o di supporre che egli l'abbia dimostrato con un ragionamento del genere di quello a cui allude il Siracusano. Orbene, quanto sappiamo intorno ad IPPOCRATE non ci autorizza ad ascriverlo fra quelli che si tengono paghi di una semplice induzione quando possono surrogarla con un ragionamento conclusivo; d'altra parte il lemma in questione si concepisce e si ammette con grande facilità: onde ci sembra che a ragione l'HANKEL (3) faccia risalire ad IPPOCRATE il primo germe del metodo di esaustione. Ciò non toglie che (accettata la risposta da noi data alla I questione) ad EUDOSSO rimanga il merito di avere visto come l'espediente usato da IPPOCRATE in un caso specialissimo fosse suscettibile di altre applicazioni epperò meritevole di assurger a dignità di metodo: a ragione dunque, a parer nostro, EUDOSSO vien designato siccome il fondatore del metodo di esaustione (4). III. *Ha Eudosso scoperto e dimostrato il teorema sul rap-*

(1) CANTOR, *Vorlesungen*. T. I, p. 207.

(2) Ipotesi di OEFTERDINGER, secondo cui IPPOCRATE sarebbe induttivamente passato dalla 1ª alla 2ª delle prop. del XII Libro di EUCLIDE: v. KÜNSSBERG, l. c., p. 35.

(3) Op. cit., p. 122. ALLMAN, l. c., p. 94-96, ha combattuta questa opinione.

(4) ALLMAN, l. c., p. 96; KÜNSSBERG, II, p. 36; P. MANSION, *Esquisse de l'histoire du Calcul infinitésimal* (estratto dal *Résumé du Cours d'Analyse infenitésimale*), p. 3.

porto di due sfere? Quanto all'averlo scoperto non è lecito di recisamente affermarlo, chè qualcuno può averlo enunciato per induzione in base all'analogia che esso presenta con quello relativo al rapporto di due circoli; ma è probabile che EUDOSSO, al quale si ascrivono dimostrazioni generali dei teoremi sui rapporti fra grandezze qualsivogliano noti ai Pitagorici per i soli numeri, il quale sapeva così abilmente servirsi del metodo di esaustione, abbia fatta una nuova applicazione di questo coll'assodare logicamente un risultato empirico.

73. - Lasceremo ora queste questioni che abbiamo piuttosto enunciate e chiarite che risolte in modo definitivo e completo, per occuparci di un ultimo soggetto di ricerche scelto da EUDOSSO, cioè de' suoi tentativi per risolvere il problema di Delo. La esistenza di tali indagini ci è nota dalla lettera di ERATOSTENE riportata parzialmente a p. 76-7; ma in che cosa consistessero non possiamo dire; sfortuna volle che il manoscritto in cui esse trovavansi esposte pervenisse nelle mani di EUTOCIO sotto forma così scorretta, da indurlo a pronunciare contro EUDOSSO un giudizio tanto severo da indurlo a cancellare la soluzione di EUDOSSO dalla collezione di di quelle che vennero suggerite pel problema dell'inserzione di due medie proporzionali fra due rette date (1); egli, infatti, nel commento alla I prop. del II Libro di ARCHIMEDE *Su la sfera ed il cilindro*, scrisse:

Noi abbiamo esaminati gli scritti di molti uomini illustri, nei quali è insegnata la soluzione di questo problema; ci siamo però dispensati dal riportare quella di EUDOSSO da Cnido, perchè, mentre nell'introduzione egli dice di averla ottenuta mediante linee inflettute (καμπύλαιν γραμμαίν), nella dimostrazione poi, non solo egli non si serve di linee inflettute, ma inoltre, avendo incontrato una proporzione discreta, la tratta come fosse continua; cosa che non soltanto doveva apparire assurda ad

(1) Un altro modo di conciliare il biasimo di EUTOCIO con la considerazione in cui EUDOSSO è tenuto da tutti e in particolare da ERATOSTENE, è di supporre col REIMER (l. c., p. 54) la esistenza di due soluzioni del problema in questione, una geometrica esatta, l'altra meccanica approssimata, la prima conosciuta da ERATOSTENE e la seconda da EUTOCIO; ma questa supposizione è completamente gratuita.

Eudosso, ma lo deve a chiunque sia anche solo un po' versato nella geometria (1).

Ammesso che Eudosso venisse a torto accusato di avere peccato contro la logica, rimane da sciogliere il quesito di determinare come egli procedesse per risolvere la questione delle due medie; ora, per ciò non si ha alcun mezzo sicuro, non si può che formulare qualche ipotesi; fra queste una è oltremodo seducente, lo è tanto che non possiamo resistere al desiderio di farne qui almeno un rapido cenno (2).

Il termine con cui sono designate le curve usate da Eudosso dà l'idea che esse fossero curve simmetriche rispetto ad un asse e aventi ciascuna un'inflessione da ogni parte di quest'asse; tenuto conto del problema in cui trovavano applicazione, è naturale congetturare fossero curve di quarto grado, analoghe alla cissoide ed alla concoide, simili di forma a quest'ultima, ma aventi inflessioni più palesi. Si ricordi, d'altronde, che Eudosso, come discepolo di Archita, doveva conoscere la soluzione che questi aveva suggerito pel problema di Delo, doveva naturalmente cercare di perfezionarla rendendola eseguibile in pratica, per il che gli si offriva spontaneo l'espediente di ricondurla a costruzioni nel piano. Tale riduzione poteva ottenersi (v. p. 102) servendosi delle proiezioni sui piani dati dalle linee d'intersezione a due a due delle tre superficie ausiliarie nella soluzione di Archita; fra tali proiezioni havvene forse taluna che possieda i caratteri generali che, come dicemmo, dovevano avere le curve di Eudosso? Conservando le notazioni usate parlando di Archita (n. 52), è facile vedere che la proiezione dell'intersezione del cono e del toro sul piano di base del cilindro ha per equazione polare:

$$\varrho = \frac{b^2}{a \cos^2 \omega}$$

e soddisfa tutte le condizioni volute: la sua intersezione col cerchio base del cilindro dà la soluzione del problema.

(1) Archimede ed. Heiberg, T. III, p. 66.

(2) Per quanto segue v. P. Tannery, *Sur les solutions du problème de Delos par Archytas et par Eudoxe* (Mém. de le Société des Sciences de Bordeaux, 2e Série, T. II, 1878, p. 773-283). Cfr. Künssberg, II, p. 52-56.

Ora dall'equazione precedente segue tosto che la curva può costruirsi per punti nel seguente modo semplicissimo: se (fig. 28) $AD = a$, $AB = b < a$ sono le due rette date e BE è perpendicolare a AD, si conduca ad arbitrio per A una retta che incontri BE in G, si porti, su AD, $AP = AG$ e si innalzi da P la perpendicolare ad AD: il punto I ove essa incontra AG prolungata appartiene alla curva (1). I punti in cui questa taglia il circolo di diametro AD (la cui equazione

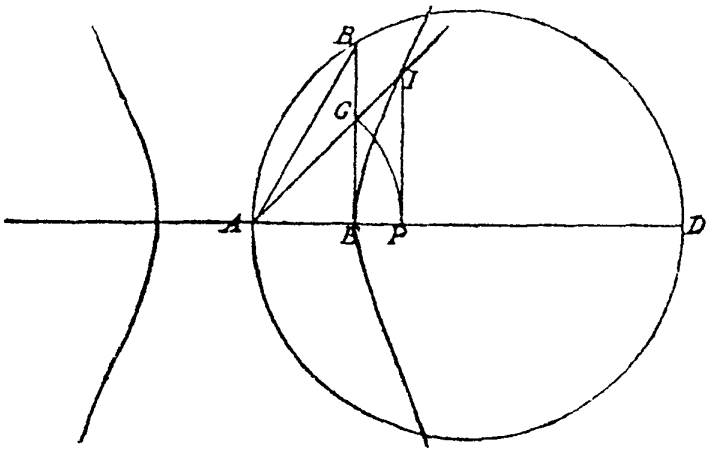


Fig. 28.

polare è $\varrho = a \cos \omega$) dànno subito una e quindi l'altra delle medie cercate. Si ha così una soluzione abbastanza semplice del problema di Delo, la quale, con gli scarsi dati storici da noi posseduti, sembra quella godente maggiori diritti per essere ritenuta siccome quella di Eudosso.

Se a queste notizie intorno alle produzioni geometriche di Eudosso si unisce quella di essersi egli occupato delle proporzioni (v. n. 21), non si sarà ancora completata la collezione dei suoi contributi dati alla geometria; ma gli altri, essendo stati da lui ottenuti nel mentre si occupava di astronomia, verranno studiati nel Libro III della presente opera.

---

(1) Questo luogo, secondo i concetti moderni, è una curva di quarto ordine, circolare e simmetrica rispetto al punto A, il è un punto isolato della curva.

Origine e primo stadio di sviluppo della teoria delle coniche. - Menecmo ed Aristeo.

74. - Il più famoso degli alunni di EUDOSSO, il membro più importante della Scuola di Cizico, è MENECMO (1), a cui si attribuisce la scoperta delle sezioni coniche e che fu uno dei successori del Cnidiano nella direzione di quella celebre scuola. E' assai probabile, se non inconfutabilmente dimostrato, che lo scopritore delle sezioni coniche sia lo stesso MENECMO che SUIDA ed EUTOCIO dicono filosofo di Alopeconneso (città del Chersoneso Tracio) o di Proconneso (isola della Propontide) e vogliono autore di tre libri intorno alla *Repubblica* di PLATONE (2). Non vi è ragione di giudicare come assolutamente apocrifo un aneddoto che lo concerne, riportato dal compilatore STOBEO (circa 500 dell'E. v.), in base a una notizia del grammatico SERENO; esso consiste nella seguente risposta, che sarebbe stata data al Macedone, il quale chiedeva a MENECMO di essere istruito in poco tempo nella geometria: « o Re, sulla terra esistono delle vie private e delle vie regie, ma nella geometria vi è una sola strada per tutti » (3). Dal primo di questi dati emerge che MENECMO fu uno degli accademici; donde la ragione per

---

(1) Oltre alle opere generali già citate si vegga l'articolo di MAX C. P. SCHMIDT, *Die Fragmente des Mathematikers Menaechmus* (Philologus, T. XLII, 1884, p. 72-79).

(2) Quest'identificazione, proposta da T. H. MARTIN (*Theonis Smirnaei Platonici Liber de Astronomie,* Paris, 1849, p. 59), fu accettata da BOECKH, SCHIAPARELLI, ZELLER, ALLMAN e, con qualche riserva, dal BRETSCHNEIDER, al quale noi ci associamo; essa fu respinta dallo SCHMIDT.

(3) La ragione per cui si dubita dell'autenticità di questo racconto è che uno simile viene attribuito ad EUCLIDE e al re TOLOMEO EVERGETE; a me pare però che, se esso deve venir posto in dubbio, è piuttosto nella sua forma più recente, non nella più antica e riflettente un matematico assai meno noto; tanto più che una terza volta esso ci si ripresenta avendo per personaggi (v. GALILEO GALILEI nella prefazione a *Le operazioni del compasso geometrico et militare.* Ed. nazionale delle *Opere di G. Galilei,* T. II, Firenze, 1891, p. 369) ARCHIMEDE e GELONE cfr. Libro II, n. 32).

cui taluno fece risalire alla scuola di PLATONE l'invenzione delle coniche; ma ciò non ci par conforme a giustizia, dal momento che PROCLO stesso (n. 3) fa MENECMO discepolo di EUDOSSO; dal secondo sembra risultare che MENECMO sia stato maestro di ALESSANDRO Magno (1), ma tale induzione sgraziatamente non è confermata da alcuno.

75. - Poche, dunque, ed incerte sono le notizie che abbiamo intorno alla vita di MENECMO; non molto più numerose e sicure sono quelle in nostro possesso che concernono la sua opera scientifica.

Per merito di PROCLO sappiamo che egli si occupò di *filosofia delle matematiche.*

Anzitutto (2) rilevando il doppio significato della parola *elemento*, avvertendo, cioè, che una proposizione dalla quale scaturisca una seconda funge da *elemento* rispetto a questa, ma che *elemento* è eziandio tutto che entra come ingrediente di qualche altra cosa (gli è appunto in questo secondo significato che fa d'uopo intendere il titolo del grande trattato di EUCLIDE, il quale contiene i fondamenti di tutte le teorie matematiche).

In secondo luogo (3) prendendo parte alle ingegnose ricerche (istituite dai seguaci di PLATONE, probabilmente dietro invito di questo), sulle mutue relazioni fra *problema* e *teorema*, e sostenendo che le proposizioni geometriche sono tutti problemi, ma si dividono in due categorie secondochè hanno per iscopo di condurre a qualche cosa di nuovo, oppure di determinare che cosa sia un certo ente, o a quale specie appartenga, o quali qualità possieda, o quali siano le sue relazioni con altri enti conosciuti.

Da ultimo (4) trattando l' importantissima questione della invertibilità di un teorema ed insegnando a' suoi famigliari le condizioni nelle quali essa è possibile.

76. - Lo stesso commentatore ascrive a MENECMO la scoperta delle tre sezioni coniche (5), basandosi sull'asserzione

(1) Conviene però distinguere il nostro matematico da MENECMO da Sicione, storico delle gesta di ALESSANDRO.

(2) PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 105.

(3) PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 105. Cfr. HEIBERG, *Litterargeschitliche Studien über Euklid.* Leipzig, 1882, p. 67-63.

(4) PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 56.

(5) PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 134.

contenuta in un verso di quell'epistola di ERATOSTENE (1) la quale già ci apprese le origini favolose del problema di Delo (n. 43) e ci insegnò essere MENECMO uno dei più antichi risolutori di questo problema. Che la soluzione di MENECMO poggiasse sulla considerazione di quelle curve, dice PROCLO stesso nel suo commento al *Timeo* di PLATONE; in che cosa consista precisamente apprendiamo da EUTOCIO, il quale l'espose sotto due forme diverse nel prezioso commento al II Libro di ARCHIMEDE *Su la sfera ed il cilindro*, dal quale estragghiamo quanto segue (2):

Sono date due rette A, E (fig. 29). Bisogna cercare fra A e E due medie proporzionali. Supponiamo di averle trovate e siano

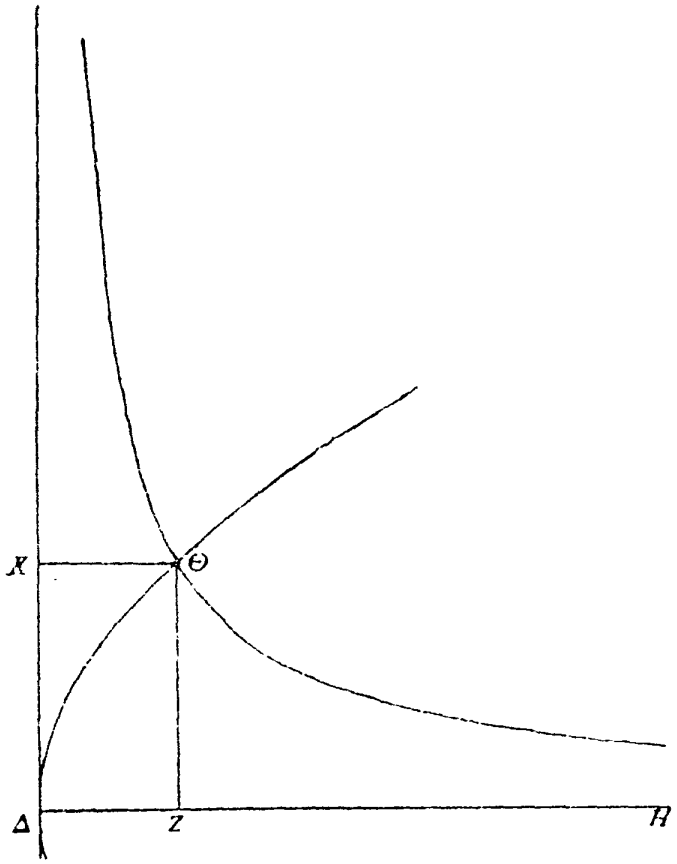


Fig. 29.

B, I. Si immagini data di posizione una retta ΔH terminata in Δ e a partire da Δ si prenda su essa ΔZ = Γ, si conduca la ΘZ

(1) ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. III, p. 112.
(2) Ivi, p. 92-98.

perpendicolare a questa e si supponga $Z\Theta = E$. Ora, essendo proporzionali le tre rette A, B, Γ avremo $A \times \Gamma = B^2$. Perciò il rettangolo compreso dalla retta A e dalla retta Γ ossia ΔZ eguaglia il quadrato della retta B cioè il quadrato della retta $Z\Theta$. Dunque il punto Θ sta in una parabola passante per Δ. Si conducano le parallele ΘK e ΔK. Essendo dato il rettangolo $B \times \Gamma$ (perchè è eguale al rettangolo $A \times E$), anche il rettangolo $K\Theta \times \Theta Z$ è dato. Quindi il punto Θ appartiene all'iperbola avente per asintoti $K\Delta$, ΔZ. Il punto Θ è dunque dato; perciò anche il puto Z è dato.

Per conseguenza il problema si risolve così: Siano date le rette A, E e di posizione la retta ΔH terminata in Δ; per Δ si descriva una parabola avente per asse ΔH e per parametro A. Le perpendicolari condotte (dai punti della parabola) a ΔH sono lati di quadrati eguali ai rettangoli applicati ad A ed aventi per larghezza i segmenti intercetti da quelle perpendicolari su ΔH a partire da Δ. Sia $\Delta\Theta$ la parabola e ΔK perpendicolare a ΔH. Presi $K\Delta$, ΔZ come asintoti si descriva una iperbola tale che, condotte le parallele alle rette $K\Delta$, ΔZ, esse formino un rettangolo eguale a $A \times E$. Si sechi con questa la parabola. Sia Θ l'intersezione: si conducano le perpendicolari $\Theta K, \Theta Z$. Ora essendo $\overline{Z\Theta}^2 = A \times \Delta Z$ sarà $A : Z\Theta = \Theta Z : \Delta Z$. Inoltre essendo $A \times E = \Theta Z \times Z\Delta$ sarà $A : Z\Theta = Z\Delta : E$. Ma si aveva $A : Z\Theta = \Theta Z : \Delta Z$, dunque sarà $A : Z\Theta = \Theta Z : Z\Delta = Z\Delta : E$. Facendo adunque $B = \Theta Z$ e $\Gamma = \Delta Z$, si avrà $A : B = B : \Gamma = \Gamma : E$, cioè A, B, Γ, E saranno in proporzione continua, il che appunto volevasi ottenere.

Altrimenti.

Siano date due linee $AB, B\Gamma$ fra loro perpendicolari (fig. 30). Fra di esse siano medie $\Delta B, BE$, onde si abbia $\Gamma B : B\Delta = B\Delta : BE = BE : BA$. Essendo pertanto $\Gamma B : B\Delta = \Delta B : BE$, il rettangolo $\Gamma B \times BE$, cioè il rettargolo della retta data e di BE, è eguale a $\overline{B\Delta}^2$ ossia a $\overline{EZ}^2$. Essendo dunque il rettangolo di una retta data e di BE eguale a $\overline{EZ}^2$, il punto Z apparterrà ad una parabola avente per asse BE. Inoltre essendo $AB : BE = BE : B\Delta$, il rettangolo $AB \times B\Delta$, cioè il rettangolo di una retta data e di $B\Delta$, sarà eguale a $\overline{EB}^2$, cioè a $\overline{\Delta Z}^2$. Quindi il punto Z appartiene ad una parabola avente per asse $B\Delta$. Ma appartiene anche a una parabola (di asse) BE. Perciò esso punto Z è dato. E le linee $Z\Delta, ZE$ sono perpendicolari (rispettivamente a BA e $B\Gamma$). Dunque sono dati i punti Δ, E.

Il problema adunque risolvesi come segue: Date due rette fra loro perpendicolari $AB, B\Gamma$ si prolunghino indefinitamente oltre B. Si descriva una parabola di asse BE e parametro $B\Gamma$; poi una seconda di asse ΔB e parametro AB. Le due parabole si taglino in Z e da Z si conducano le perpendicolari $Z\Delta, ZE$.

Essendo allora ZE cioè ΔB una ordinata di parabola sarà ΓB × BE = $\overline{BΔ}^2$ onde ΓB : BΔ = ΔB : BE. Inoltre essendo ZΔ cioè BE una ordinata di parabola sarà ΔB × BΔ = $\overline{EB}^2$ epperò ΔB : BE = BE : BA. Ma si aveva prima ΔB : BE = ΓB : BΔ, perciò ΓB : BΔ = ΔB : BE = EC : BA. Come bisognava ottenere.

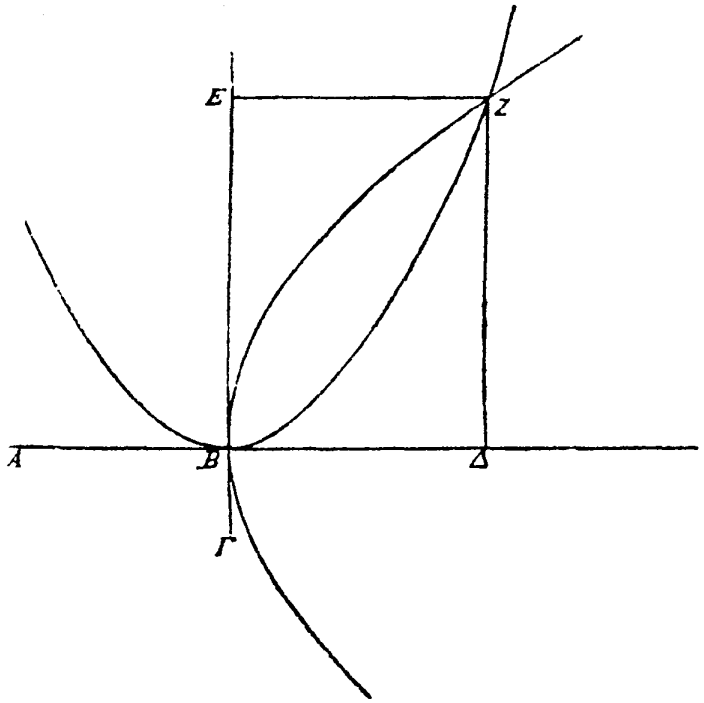


Fig. 30.

La parabola si descrive poi mediante il διαβήτης (1) inventato dal maestro ISIDORO da Mileto meccanico e da lui descritto nel commento che compose alle καμαρικὰ (arte di costruire gli archi) di ERONE.

77. - I passi or citati insegnano o da chi furono trovate le sezioni coniche o in qual modo queste curve siano state applicate alla inserzione di due medie proporzionali fra due rette date (2); ma non ci dànno alcuna indicazione intorno alla via che menò alla scoperta di queste curve. Qualche

(1) Strumento di forma simile alla lettera greca λ.

(2) Il BRETSCHNEIDER (l. c., p. 161) pensava EUTOCIO avesse riprodotto nel passo citato le parole stesse di MENECMO, solo adoperando le moderne denominazioni per le coniche; ma l'ALLMAN (op. cit., p. 165-166) combattè questa tesi con buoni argomenti.

notizia a questo proposito viene fornita da GEMINO (v. L. IV) in un passo che EUTOCIO conservò nel suo commento al I Libro delle *Coniche* di APOLLONIO: ivi infatti si legge ciò che segue (1):

Ma quello che riferisce GEMINO è vero, che cioè gli antichi, definito il cono come generato dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno a uno de' suoi cateti, supposero, non solo, come è naturale, che tutti i coni fossero retti, ma che in ciascuno esistesse una sola sezione, cioè nel rettangolo quella che oggi si chiama parabola, nell'ottusangolo l'iperbola e nell'acutangolo l'ellisse. Questa è l'origine dei nomi con cui troviamo queste curve designate da essi. Ora gli antichi, come dimostravano il teorema dei due retti a parte per ogni specie di triangoli, prima per l'equilatero, poi per l'isoscele e finalmente per lo scaleno, mentre i moderni dimostrano il teorema generale " gli angoli interni di un triangolo sono insieme eguali a due retti „; così considerarono delle coniche la sezione del cono rettangolo esclusivamente nel cono rettangolo conducendo il piano segante sempre perpendicolare a un lato del cono, mentre la sezione del cono ottusangolo ottenevano nel cono ottusangolo, e la sezione del cono acutangolo nell'acutangolo, conducendo sempre i piani seganti perpendicolarmente ai lati del cono. Donde hanno evidentemente origine gli antichi nomi delle coniche. Ma più tardi APOLLONIO di Perga dimostrò con tutta generalità che in qualunque cono, retto od obliquo, nascono tutte le sezioni, a seconda del modo in cui conducesi il piano segante. I suoi contemporanei, meravigliati, per l'entità delle proprietà che egli scoperse nelle sezioni del cono lo dissero il *grande* geometra. Ciò dunque vien riferito da GEMINO nel sesto libro della sua μαθημάτων θεωρία „.

78. - Compendiando in poche frasi le informazioni somministrate da questi frammenti (informazioni di cui non ci sentiamo in diritto di mettere in dubbio l'attendibilità (2)), noi vediamo: 1.° che MENECMO ha scoperto le tre sezioni coniche (donde il nome di *triadi di Menecmo* con cui gli antichi designavano queste celebri curve), 2.° che della parabola e dell'iperbola egli conobbe così bene le proprietà

(1) APOLLONIO ed. HEIBERG, vol. II, p. 170 e segg.

(2) Come fa il TANNERY, *Géom. grecque*, p. 77, il quale sembra titubante ad ammettere che le soluzioni riportate appartengano realmente a MENECMO.

espresse dalle notissime equazioni cartesiane $x^2 = px$ e $xy = k^2$ da sfruttarle per ottenere due soluzioni del problema di Delo tanto eleganti che di pochissimo bisogna trasformarle per farle arrivare all'apice della semplicità (1), 3.° che gli antichi ottenevano le tre specie di coniche tagliando un cono retto soltanto con piani perpendicolari ad una generatrice.

Ora, per formare con questi tre dati un tutto organico, donde emerga una chiara idea del modo in cui si giunse a scoprire le proprietà più essenziali delle sezioni coniche e l'applicabilità di esse alla soluzione del detto problema, si è forzati ad introdurre qualche elemento ipotetico. Bisogna, anzitutto, decidere se fu questo problema che portò allo studio delle coniche o se, studiando le proprietà di tali curve, si avvertì la loro applicabilità ad esso (2).

Scegliendo il primo punto di partenza, bisogna osservare (v. p. 77) come IPPOCRATE riducesse il problema di Delo (usando per semplicità il linguaggio moderno) alla ricerca di due linee x, y tali che si avesse $a : x = x : y = y : b$, a e b essendo le rette date; ora quest'equazione a tre membri equivale a due delle seguenti $ay = x^2$, $bx = y^2$, $xy = ab$: se si combina l'ultima con una delle precedenti e s'interpretano x, y come coordinate cartesiane di un punto nel piano, si arriva alla prima delle soluzioni di MENECMO, mentre se si combinano le due prime si arriva alla seconda. Bisogna però, per concludere come il geometra greco, sapere che la curva $ay = x^2$ può ottenersi come sezione di un cono rettangolo e la $xy = ab$ come sezione di un cono ottusangolo; l'arrivare a queste conclusioni esige uno sforzo intellettuale assai considerevole, anche dopo avere riconosciuto che quelle linee non sono rette nè circolari, anche ammettendo che fin dai tempi di DEMOCRITO (p. 66) (3) fosse stato inaugurato lo studio delle sezioni del cono e

(1) Si allude qui alla possibilità di risolvere il problema di Delo con una sola conica, combinata ad una circonferenza.

(2) Al primo partito si appigliò lo ZEUTHEN (*Die Lehre der Kegelschnitte in Alterthum*. Kopenhagen, 1886, p. 455-465) e al secondo il BRETSCHNEIDER (op. cit., p. 56-59) e quindi l'ALLMAN (op. cit., p. 166-169).

(3) Cfr. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I, p. 244.

che l'ellisse fosse già nota come sezione di un cilindro retto (1).

Meno gravi ostacoli s'incontrano scegliendo il secondo punto di partenza, chè allora tutta la difficoltà si riduce a mostrare come, partendo dalle definizioni delle coniche riferite da GEMINO, si potessero ottenere le proprietà della parabola e dell'iperbola adoperate nella soluzione di MENECMO. Ebbene il BRETSCHNEIDER ha osservato che quella proprietà della parabola può essersi presentata spontaneamente come generalizzazione del teorema « la perpendicolare a un diametro di un cerchio è media proporzionale fra i segmenti del diametro », e può dimostrarsi con un ragionamento il quale presumibilmente non eccedeva le forze di un geometra del valore di MENECMO, e che, lievemente modificato, mena alle analoghe proprietà delle altre due coniche. Ottenuta così (come si direbbe oggi) l'equazione dell'iperbola riferita a l'asse e la tangente nel vertice, si può ottenere agevolmente (tanto più quando si tratti soltanto di un' iperbola equilatera) l'equazione riferita agli assi e quindi agli asintoti (bisettrice degli angoli degli assi).

Lasciando il lettore arbitro della scelta fra queste due spiegazioni, osserveremo: 1.° che da quanto precede non risulta che MENECMO conoscesse la proprietà caratteristica degli asintoti dell'iperbola, giacchè questi compaiono nella sua soluzione unicamente come certe rette ausiliari; 2.° che non sappiamo in qual modo egli ottenesse nel piano le curve da lui usate; le costruiva per punti? o col mezzo di un meccanismo? o secando effettivamente un cono materiale? (2).

---

(1) ZEUTHEN, l. c., p. 467.

Sembra che C. TAYLOR, nell'articolo intitolato *The discovery and the geometrical treatment of the conic sections* (Association for the Improvement of Geometrical Teaching, X General Report, 1884, p. 43-55), non abbia tenuto abbastanza conto di quanto riferisce GEMINO (v. p. 154). Egli, infatti, ammette che la parabola e l'iperbola equilatera venissero scoperte da MENECMO come curve risolutrici del problema di Delo, e definite in conseguenza nel piano mediante le loro equazioni; l'elisse sarebbe stata introdotta più tardi: in ciò il citato geometra trova la ragione dell'essere in APOLLONIO le coniche enumerate e studiate sempre nell'ordine: *parabola, iperbola, ellisse.*

(2) Ipotesi di P. TANNERY, *Géom. grecque,* p. 80.

La frase di EUTOCIO (v. p. 77) che fra i risolutori del problema di Delo, il solo MENECMO era capace forse di eseguire e con fatica la sua soluzione, è così vaga e indeterminata, che non porge il mezzo di risolvere definitivamente questi interessanti problemi storici (1).

79. - L'esistenza di un così grande numero di questioni relative a MENECMO, che, benchè importanti, rimangono irrisolute, dipende in gran parte dal fatto che tutte le sue opere (anche quelle che gli procacciarono la fama di valente astronomo) sono andate completamente ed irremissibilmente pardute, tanto che non sappiamo nemmeno quante fossero e di che cosa trattassero. E' lecito però congetturare che nessuna trattasse *ex professo* delle coniche, dal momento che non è MENECMO colui che viene designato come autore della esposizione delle proprietà di queste curve anteriore a quella che vedremo (nel Libro seguente) attribuirsi ad EUCLIDE, ma sibbene ARISTEO il Vecchio (2) (Ἀρισταῖος ὁ πρεσβύτερος). Di qual valore fosse questo geometra emerge dalle parole con cui comincia la prefazione al VII Libro della *Collezione* di PAPPO; ivi infatti si legge:

> Quello che si denomina ὁ ἀναλυόμενος τόπος è, per dirlo in breve, una certa materia speciale preparata per quelli che, avendo percorso gli elementi, desiderano acquistare la facoltà di risolvere i problemi loro proposti relativi alla costruzione di linee; ed è utile unicamente per questo scopo. Essa fu trattata da tre persone, cioè da EUCLIDE, autore degli *Elementi*, APOLLONIO di Perga e ARISTEO il Vecchio, e procede col metodo di analisi e sintesi (3).

---

(1) Riguardo al nome usato in origine per designare l'ellisse v. L. III, n. 28.

(2) Ha esistito un ARISTEO *il Giovane*? Fu desso un matematico?

Mettiamo in guardia il lettore di non cader nell'errore, che altri commise, di identificare ARISTEO il Vecchio con il genero e successore di PITAGORA; chè da quanto segue risulta essere il nostro ARISTEO anteriore di EUCLIDE soltanto per circa un trentennio.

Riguardo al nostro ARISTEO si vegga la prefazione all'opera *De Locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libros iniuria temporum amissos Aristaei Senioris geometrae, auctore* VINCENTIO VIVIANI. Florentiae, 1701, della quale ci occuperemo nell'*Appendice II.*

(3) PAPPO ed. HULTSCH, p. 634.

L'opera più cospicua di ARISTEO sembra essere stata una *Sui luoghi solidi* (1), ancora esistente a' tempi di PAPPO, e che fungeva da complemento alla teoria delle coniche. Inoltre egli pubblicò per la prima volta cinque libri *Sulle coniche* « scritti succintamente ad uso dei già provetti », ove introdusse per tali curve i nomi di *sezione del cono rettangolo*, *sezione del cono ottusangolo* e *sezione del cono acutangolo* (2), perchè non avvertì l'esistenza in ogni cono di tutte le specie di coniche (3): da queste opere trasse gran profitto EUCLIDE nel trattare la teoria di queste famose curve (4). — Tali informazioni, che si attingono tutte alla *Collezione matematica*, non tutte provengono da PAPPO, ma alcune da scoliasti posteriori (5); onde alcune di esse furono giudicate inaccettabili e da ciò si concluse che ARISTEO non scrisse sulle coniche, ma soltanto sui luoghi solidi (6): tale tesi sostenuta con argomenti filologici, con argomenti filologici venne vigorosamente combattuta (7), e d'altronde, la soluzione di essa non sembra possedere una decisiva importanza storica, dal momento che delle opere di ARISTEO, fossero esse in cinque od in dieci libri, non è rimasta alcuna vestigia sicura. Neppure i temi ivi trattati si possono ritenere noti, a meno che non si accettino come degne di fede assoluta alcune informazioni d'ignota provenienza offerte da un celebre geometra (8), o un'ipotesi di recente

(1) Cfr. PAPPO ed HULTSCH, p. 56. A p. 284 sono segnalati alcuni teoremi sulle coniche che sarebbero tolti dall'opera di ARISTEO.

(2) Ib., p. 672. Tale merito è revocato in dubbio dallo ZEUTHEN (l. c., p. 468-9).

(3) PAPPO, ed. HULTSCH, p. 674.

(4) Ib., p. 676.

(5) Veggasi l'ed. citata.

(6) HEIBERG, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*, p. 85.

(7) ALLMAN, l. c., p. 200-201.

(8) " Le second livre „ (delle *Coniche* di MYDORGE) " est destiné à la description des coniques par points, sur le plan; objet dont Apollonius ne s'était pas occupé, mais qui avait dû être compris dans les *Lieux solides* d'Aristée; car cet ouvrage traitait des coniques considérées dans le plan, et devait rouler sur celles de leurs propriétés qui ne font point partie des *Éléments des coniques* d'Apollonius, puisque Aristée lui-même avait écrit un pareil traité, différent de ses *Lieux solides* „. CHASLES, *Ap. hist.*, 2e éd., Paris, 1875, p. 89.

formulata (1), o finalmente non si consideri come divinazione riuscita il tentativo di VINCENZO VIVIANI (1622-1703) fece di restituire i *Luoghi solidi* del nostro geometra (2).

80. - Si suole dagli storici ammettere che il geometra di cui ci stiamo occupando sia lo stesso che — come rilevò per primo P. DE LA RAMÉE (1515-1572) (3) — viene citato da IPSICLE (geometra del periodo seguente quello su cui ci tratteniamo ora) nell'opera volgarmente conosciuta come *XIV Libro degli Elementi di Euclide* (4); ma questa identificazione è ben lungi dal possedere una solida base. Infatti IPSICLE, riguardo al teorema: « lo stesso circolo è circoscritto al pentagono del dodecaedro ed al triangolo dell'icosaedro inscritti nella stessa sfera », osserva « ciò fu esposto da ARISTEO nel libro intitolato *Confronto dei cinque solidi* e poi da APOLLONIO nella seconda edizione del suo *Confronto dell'isocaedro e del dodecaedro* (5), senza aggiungere nulla che autorizzi a concludere che ivi parlasse dell'autore dei *Luoghi solidi*. Tenuto poi conto dell'incertezza che regna intorno all'epoca in cui visse IPSICLE, ci sembra non potersi concludere di sicuro altro che l'ARISTEO da questi citato fu un geometra anteriore ad APOLLONIO. Quanto alla sua opera sui poliedri, tracce sicure di essa non si trovano se non nel citato scritto di IPSICLE; tuttavia non ci sembrano prive di verosimiglianza la congettura che il XIII Libro degli *Elementi* sia un parziale riassunto del lavoro di ARISTEO (6) e che (7) da questo sia tolta altresì l'iscrizione dei poliedri regolari in una sfera esposta da PAPPO

(1) Alludiamo all'opinione dello ZEUTHEN (op. cit., p. 469) che ARISTEO trattasse ne' *Luoghi solidi* delle coniche, come luoghi di punti nel piano, opinione che a noi sembra abbastanza conforme ai dati di PAPPO, epperò accettabile; cfr. anche l'*Appendice II* al presente Libro.

(2) Cfr. la citata *Appendice II.*

(3) Cfr. CHASLES, l. c., p. 513-14.

(4) *Euclidis Opera omnia,* éd. HEIBERG et MENGE, T. IV, Lipsiae, 1888, p. 6.

(5) Ib., Vol. V, p. 6.

(6) BRETSCHNEIDER, l. c., p. 171.

(7) P. TANNERY, *L'arithmétique des Grecs dans Pappus* (Mém. de la Soc. de Bordeaux, 2e Serie, T. III, 1880, p. 351) e, con maggiori riserve, *Géom. grecque*, p. 159.

nel III Libro della *Collezione* (1): ma l'industriarsi a persuadere della verità di queste tesi, col segnalare le proposizioni invocate nella dimostrazione che conosciamo del teorema di ARISTEO (2), non ci sembra metodo rigoroso e concludente, dal momento che IPSICLE ivi si atteggia piuttosto ad autore che ad espositore di cose altrui (3), sicchè nulla autorizza a considerare quella dimostrazione come produzione di ARISTEO.

Forza è pertanto concludere che la personalità e le opere dell'ARISTEO di IPSICLE sono oscure ed incerte, non meno di quelle di ARISTEO il Vecchio, onde, in particolare, nulla costringe a identificare l'uno con l'altro.

Dinostrato.

81. - Se l'autore dei *Luoghi solidi* è legato a MENECMO da parentela intellettuale, per consanguineità è connesso a questo il geometra DINOSTRATO che vien detto fratello di MENECMO (4). Dei perfezionamenti di cui gli è debitrice la geometria (l'esistenza dei quali viene attestata da PROCLO in un passo a noi noto (v. n. 3), uno solo è giunto fino a noi; ne è fatta menzione in un brano della *Collezione* di PAPPO del quale già riferimmo la parte che concerne la generazione della quadratrice di IPPIA (v. n. 38), mentre la parte che concerne l'applicazione di questa curva alla quadratura del circolo merita qui un posto (5):

Se (fig. 31) ABΓΔ è un quadrato e sono descritte la circonferenza BEΔ di centro Γ e la quadratrice BHΘ nel modo più sopra indicato, si dimostra che il quadrante circolare BEΔ sta alla retta BΓ, come la retta BΓ sta a ΓΘ. Infatti, se ciò non accade, il quadrante circolare BEΔ starà alla retta BΓ, come BΓ sta ad una retta maggiore o minore di ΓΘ. Stia dapprima, se è possibile, ad una maggiore, ad esempio ΓK; si descriva una

(1) Ed. cit., p. 142 e seg.
(2) ALLMAN, l. c., p. 201-2.
(3) Cfr. il Cap. II del Libro II.
(4) DINOSTRATO visse dunque nel IV secolo a. C.; egli viene ascritto fra i membri della scuola di Cizico.
(5) PAPPO, ed. HULTSCH, p. 256-8.

circonferenza ZHK di centro Γ, la quale sechi la quadratrice nel punto H (*a*) (1), si conduca la perpendicolare HΛ e, condotta ΓH, la si prolunghi finchè incontri in E la circonferenza BEΔ. Ora, poichè per ipotesi l'arco BEΔ sta a BΓ come BΓ cioè ΓΔ a ΓK e come il quadrante BEΔ sta al quadrante ZHK (perchè due circonferenze stanno fra loro come i diametri (*c*), così è chiaro che il quadrante ZHK è eguale alla retta BΓ. E siccome, in causa della proprietà della quadratrice (*f*) gli ar-

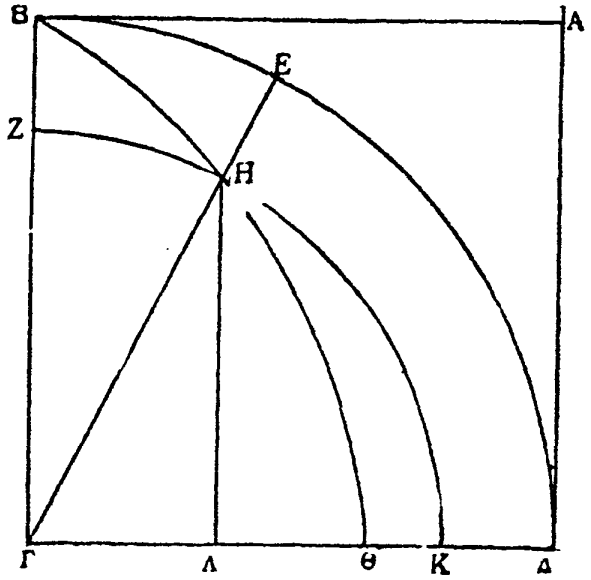


Fig. 31.

chi BEΔ e EΔ staranno fra loro come le rette BΓ, HΛ, così anche gli archi ZHK e HK stanno fra loro come le rette BΓ, HΛ (*β*). Ma dimostrammo eguali la retta BΓ e l'arco ZHK; dunque l'arco HK è eguale alla retta HΛ, il che è assurdo (*b*). Dunque l'arco BEΔ sta alla retta BΓ non come BΓ sta ad una retta maggiore di ΓΘ.

Ma nego anche che ciò si verifichi per una retta minore. Accada infatti, se è possibile, per ΓK (fig. 32); col centro in Γ si descriva la circonferenza ZMK e da K si conduca KH perpendicolare a ΓΔ la quale sechi la quadratrice in H, e condotta ΓH la si prolunghi in E. In modo simile al precedente si dimostra che il quadrante ZMK è eguale alla retta BΓ e che gli archi BEΛ e EΔ ossia gli archi ZMK e ΓK stanno fra loro come le rette BΓ e HK. Da ciò segue che l'arco MK è eguale alla retta KH, ciò che pure è assurdo (*c*). Dunque l'arco BEΔ sta alla retta BΓ non

(1) Le lettere in parentesi servono a indicare, come in casi analoghi, i luoghi ove sono adoperate le proposizioni che fra poco enumereremo.

come BΓ sta ad una retta minore di ΓΘ. Ma neppure ad una maggiore, come dimostrammo; dunque come alla retta ΓΘ stessa.

Da questo risulta inoltre che, se si determina la terza proporzionale rispetto alle rette ΘΓ, ΓB, si ottiene l'arco BEΔ, il

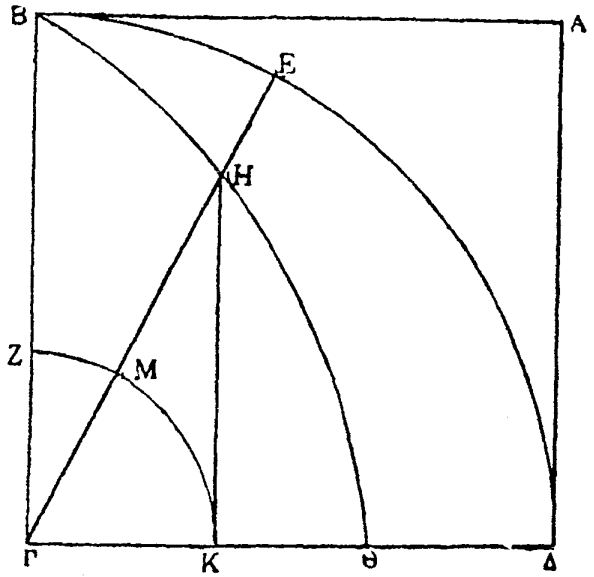


Fig. 32.

cui quadruplo eguaglia l'intera circonferenza. E si giunge così ad una retta eguale alla circonferenza.

Si può poi costruire facilmente un quadrato eguale al circolo; giacchè il rettangolo avente per lati la periferia del circolo ed il raggio è doppio del circolo, come ha dimostrato ARCHIMEDE.

Prescindendo da questi due ultimi periodi, evidentemente dovuti a PAPPO, nulla vieta di supporre che la parte rimanente del brano riportato contenga il ragionamento originale di DINOSTRATO: ammesso ciò, si avrebbe ivi il più antico esempio autentico di una dimostrazione per assurdo. Fa però mestieri ricordare (n. 28) che l'irrazionalità della diagonale rispetto al lato di un quadrato venne dimostrata dai Pitagorici con un'argomentazione di natura apogogica, fondata sull'impossibilità che un numero sia ad un tempo pari e dispari; onde le prime tracce del suddetto metodo di dimostrazione si dovrebbero sempre far risalire all'epoca in cui fioriva la Scuola di Crotone (1).

Si noti, inoltre, che i teoremi invocati nella dimostrazione

(1) ALLMAN, l. c., p. 43.

di DINOSTRATO sono i seguenti: (α) le periferie di due circoli stanno fra loro come i rispettivi diametri; (β) gli archi sottesi in due circoli concentrici da angoli eguali stanno fra loro come i raggi dei circoli stessi; (γ) in circoli eguali due angoli stanno fra loro come gli archi da essi sottesi. Non meno importante è il rilevare che ivi viene assunto come evidente senza bisogno di dimostrazione che (*a*) il quadrante circolare ZHK (fig. 31) taglia la quadratrice e che — usando il linguaggio moderno — ogni arco di un quadrante (*b*) è maggiore del suo seno e (*c*) minore della sua tangente; la qual cosa fa pensare che al tempo di DINOSTRATO le proprietà geometriche non venissero ancora dimostrate con quel perfetto rigore che giustamente si ammira nel periodo greco-alessandrino.

PAPPO dice che DINOSTRATO si servì della quadratrice per *quadrare il circolo*, ma in realtà quanto egli espone induce a credere che il ragionamento di DINOSTRATO tendesse unicamente a *rettificare la circonferenza*; vero è che il passaggio dall'un problema all'altro si opera facilmente mediante il teorema di ARCHIMEDE citato da PAPPO nella chiusa del passo surriferito (1); ora questo teorema era forse noto prima che il Siracusano lo dimostrasse rigorosamente? La cosa è probabile, come non è impossibile che DINOSTRATO ne ammettesse senza discussione la verità, come fece per altri teoremi (v. sopra). Ove si neghi a DINOSTRATO la conoscenza di quel teorema, non rimane altro che supporre avere questi parlato soltanto di rettificazione e PAPPO aggiunto di suo quanto concerne la quadratura; in tal caso DINOSTRATO avrebbe per primo fra i Greci (2) affrontato, in un caso speciale, il problema importantissimo della rettificazione di una curva.

Riguardo al valore del metodo di rettificazione proposto, è forza riconoscere che esso è esclusivamente teorico; la proprietà dalla quadratrice avvertita da DINOSTRATO è indubbiamente notevole, ma, per poterla utilizzare in pratica, bisognerebbe sapere descrivere la curva con movimento con-

(1) Questo teorema funge quasi da lemma nella *Misura del cerchio* (cfr. il Libro seguente).

(2) Cfr. l'*Appendice I* al presente Libro, donde si rileva che altrove tale questione venne trattata prima.

tinuo; fino a che non si sappia che costruirla per punti, per determinarne l'intersezione colla base del quadrato ausiliario bisogna già conoscere una retta lunga quanto un quadrante, cioè, avere risolto appunto il problema che volevasi sciogliere coll'aiuto della curva di IPPIA. Le obbiezioni mosse dal geometra SPORO da Nicea (1) e riportate da PAPPO al metodo suggerito da DINOSTRATO per risolvere il problema della quadratura del circolo, hanno dunque un indiscutibile fondamento (2).

82. - MENECMO, DINOSTRATO ed ARISTEO formano la retroguardia della schiera dei geometri greci precursori di EUCLIDE. Intorno alle loro persone e alle loro opere, non meno che intorno a quanto concerne coloro che li precedettero, si avvolge un fitto velo, il quale fa si che di tutta la geometria greca pre-euclidea siano mal sicuri i contorni e sbiadite le tinte. Tuttavia un esame attento di quanto racchiudono le pagine precedenti consente di formarsi un concetto generale abbastanza preciso del periodo ora studiato, sufficiente almeno per misurare e valutare le cognizioni geometriche che si avevano prima di EUCLIDE, a sradicare in conseguenza il pregiudizio che gli *Elementi* del grande insegnante alessandrino siano opera completamente originale.

Infatti, tale esame rivela l'esistenza di un uomo e di una scuola — TALETE e la Scuola Jonica — donde proviene il bagliore antelucano che annunzia l'alba della matematica greca. A TALETE si deve il trasporto in Europa dei germi delle scienze esatte ed i primi tentativi di coltivarle; e se ai suoi seguaci non siamo debitori di qualche importante scoperta matematica, gli è che la di lui tendenza alle ricerche fisiche si accentua siffattamente ne' suoi discepoli e continuatori da far porre da essi in non cale le investigazioni di matematica pura.

Ma, scomparsa la setta dei fisici Joni, appare un altro uomo e vengono gettate le basi di un'altra scuola — PITAGORA e la Scuola italica — nella quale sembra ragionevole collocare le scaturigini del maestoso fiume delle investigazioni geometriche. Ivi, con lo svilppo della dottrina dei rap-

(1) V. Libro III, n. 32 dell'opera presente.
(2) Il BRETSCHNEIDER (l. c., p. 96) sembra pensare l'opposto.

porti e delle aree e con l'introduzione delle quantità irrazionali, vengono approntati gli strumenti che magistralmente usarono EUCLIDE ed APOLLONIO e ai quali deve sempre chiedere aiuto chiunque voglia seguire le luminose loro traccie. Lo sfacelo della comunità pitagorica non spegne l'entusiasmo per la matematica degli ammiratori e seguaci del filosofo di Samo: tanto vero noi che troviamo in IPPOCRATE da Chio e ARCHITA da Taranto, tardi discepoli di PITAGORA, due strenui combattenti per la ricerca del vero geometrico. Nè le altre sette filosofiche, che da poi pullularono in Grecia, stettero indifferenti al progresso delle scienze esatte: lo dimostra quanto sappiamo intorno a ZENONE e DEMOCRITO, ad ANASSAGORA ed IPPIA, a PLATONE e ARISTOTELE, e alla falange di studiosi che da questi vennero istruiti e diretti.

Grazie al concorso di tanti elevati ingegni, vengono gettate così solide basi dell'edificio geometrico, che parecchi credono giunto l'istante di organizzare in un corpo di dottrina i risultati delle investigazioni compiute; vengono inoltre studiati a fondo i tre importanti problemi della quadratura del circolo (1), della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo (2), e ciò porge l'occasione per aggiungere, a la linea retta e la circonferenza, altre linee più complicate, piane e a doppia curvatura; sono poi determinate le proprietà e fatte notevoli applicazioni di quelle celebri curve che KEPLERO doveva più tardi ravvisare come le trajettorie degli astri; e il concetto d'*infinito* fa timidamente il suo ingresso nella matematica, ove era destinato ad occupare ben presto una posizione di eccezionale importanza.

Nello stesso tempo anche i metodi di ricerca e di esposizione delle verità geometriche vengono fatti oggetto di studio;

---

(1) Parecchi storici (MONTUCLA, TANNERY, ALLMAN), per dimostrare l'antichità della fama di questa questione citarono il fatto che ARISTOFANE, nel 414 a. C. rappresentò negli *Uccelli* il celebre astronomo METONE nell'atto di porgerne una pretesa soluzione. Ma F. RUDIO (*Die angebliche Kreisquadraten bei Aristophanes;* Bibl. mathem., 3ª Serie, T. VIII, 1907), ha fatto notare che in realtà il celebre commediografo greco ha fatto cenno, non della quadratura del cerchio, ma della divisione di un cerchio in quattro quadranti.

(2) Come si sa, questi due ultimi abbracciano la trattazione geometrica di tutte le equazioni determinate del terzo grado.

si arrivava così al *metodo di riduzione*, dovuto ad IPPOCRATE, al *metodo analitico*, formulato da PLATONE, al *metodo di esaustione*, così brillantemente applicato da EUDOSSO. D'altra parte, coll'introduzione del diorisma, LEONE segnala un importante complemento che esige la soluzione di ogni problema, mentre, colla determinazione delle condizioni di invertibilità di un teorema, MENECMO porge un mezzo potente per far scaturire certe proposizioni da altre. Di più la logica, che da tanti intimi legami è congiunta alla matematica, subisce potenti impulsi dalla dialettica, dalla sofistica e dall'insegnamento di SOCRATE, e riceve in conseguenza tali perfezionamenti che ARISTOTELE crede giunto il momento di esporne i canoni in un'opera destinata a rimanere classica per lungo volgere di secoli.

Se si aggiunge che l'insegnamento dei sofisti spargeva per la Grecia tutte le nozioni scientifiche; che da tempo era stata vinta l'innata avversione dei Greci verso la scrittura, con la quale un tempo sembrava loro che la parola s'irrigidisse; che le opere scritte, le quali si cominciarono a raccogliere ad Atene (3) sotto l'arcontato di EUCLIDE, furono da poi serbate con religiosa cura e notevolmente accresciute per merito specialmente di EURIPIDE ed ARISTOTELE, talchè offrivano probabilmente, prima della caduta dell'indipendenza greca, un ricco materiale a chiunque aspirasse a dedicarsi alla scienza; che finalmente il commercio librario era venuto tanto in voga durante la guerra del Peloponneso che era sorto un numeroso ceto di amanuensi e librai, provveditori discreti del mercato librario d'Atene: si vedrà che tutto sembrava cospirare a che sorgesse un periodo di singolare floridezza per la scienza in genere e per la geometria in ispecie. Questo periodo non si fece attendere; esso cade nell'epoca greco-alessandrina, e, per l'analogia che offre col tempo in cui le lettere latine raggiunsero la loro massima perfezione, vien da noi riguardato come *il periodo aureo della geometria greca*. Lo studio delle opere che ad esso appartengono è appunto l'oggetto del Libro seguente.

---

(3) Si vuole anche che una vistosa biblioteca costituisse una delle principali ricchezze di POLICRATE, tiranno di Samo nel IV secolo a. C.

APPENDICE I.

Cenno delle ricerche geometriche compiute nell'antichità da gli Egiziani ed i Babilonesi.

Affinchè il lettore possa facilmente valutare l'elemento esotico esistente nelle geometria greca, crediamo opportuno riassumere brevemente i contributi recati alla scienza dell'estensione dai popoli che precorsero i Greci nella via della civiltà. Non parleremo però degli Etruschi in primo luogo perchè le notizie sul sapere geometrico di un popolo il cui linguaggio è tuttora un enigma per i filologi sono, se non nulle, certamente infinitesime e in secondo luogo perchè sembra che essi non abbiano esercitata qualche influenza che sui Romani, i quali furono da essi avviati e diretti alle ricerche geodetiche. Se altrettanto facciamo per gl'Indiani gli è che, non potendosi con esattezza determinare le origini delle notizie che sono giunte a noi, nulla autorizza a parlare di un geometria indiana più antica della geometria greca. E in modo non dissimile ci comporteremo rispetto ai Cinesi, perchè, chi assicura che le cognizioni geometriche da essi possedute (del resto assai scarse) non siano state importate dal di fuori e poi considerate come proprietà nazionale da un popolo, il cui orgoglio era tale che si vantava di essere giunto nella più remota antichità a ritrovati a cui gli altri popoli giunsero a mala pena in tempi a noi vicini?

1. - Diremo anzitutto di quanto si fece sulle rive del Nilo, perchè l'Egiziano è il popolo a cui gli Elleni maggiormente dichiaravano di avere i più stretti legami intellettuali.

ERODOTO, che viaggiò in Egitto verso il 460 a. C., asserisce che la geometria ebbe origine in quel paese allorquando il re SESOSTRI divise tutte le terre in parti eguali fra' suoi sudditi; mentre, verso il 393, ISOCRATE accertava che lo studio della geometria veniva raccomandato ai giovani Egiziani. In senso non dissimile da ERODOTO si esprimono PLATONE ed ARISTOTELE, DIODORO SICULO (il noto storico contemporaneo di GIULIO CESARE), ERONE ALESSANDRINO e STRABONE. Anzi DEMOCRITO, per vantare la propria abilità geometrica, non trova di meglio che asserire: « Nel costruire linee in base alle conclusioni tratte dalle ipotesi, nessuno mi ha sorpassato, neppure i cosidetti Αρπεδονάπαι degli Egiziani ». Chi fossero questi arpedonatti, non si sa, ma è assai verosimile l'ingegnosa ipotesi di M. CANTOR (1), secondo la quale il loro nome (tenditori di corde) avrebbe origine dell'essere loro principale ufficio quello di costruire in pratica un angolo retto, col tendere a forma di triangolo rettangolo una corda divisa in tre parti, aventi lunghezze rispettivamente eguali a 3, 4, 5 misure lineari (2).

L'origine pratica assegnata alla geometria da ERODOTO, questa speciale operazione e l'esistenza in Egitto di colossali opere architettoniche ed idrauliche, fanno sospettare che la geometria degli Egiziani avesse una spiccata tendenza alle applicazioni (3). Ora questo sospetto, se non si cambia in certezza, si rafforza però assai esaminando un prezioso documento scritto, che intorno ad essa possediamo. Infatti il *Papiro Rhind*, ossia quel celebre *Manuale del calcolatore* (4) scritto da AHMES 1700 o 2000 anni a. C. (5), se da

(1) *Vorlesungen*, T. I, p. 106.

(2) Chi accetta questa congettura implicitamente attribuisce agli Egiziani la conoscenza del teorema dell'ipotenusa, almeno in un caso speciale classico.

(3) Un'incisione esistente sopra una pietra dissotterrata in Egitto nel 1878, mostra che gli Egiziani sapevano usare la *pianta* e l'*alzata*, onde M. SIMON (*Geschichte der Mathematik in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte*. Berlin, 1909) li considera come i più remoti precursori di MONGE.

(4) A. EISENLOHR, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (I Aufl., Leipzig, 1877; II Aufl., 1891). CANTOR, T. I, p. 57 e segg.

(5) Secondo M. SIMON, *Ueber die Mathematik der Aegypter* (Verh

un lato offre larga messe di notizie intorno al metodo con cui si calcolava nell'antico Egitto, porge invece insufficienti informazioni intorno alle cognizioni geometriche che ivi si avevano; giacchè in esso la geometria non è trattata *ex professo*, ma viene incidentalmente invocata per ottenerne applicazioni dei procedimenti di calcolo. Ivi si scorge, quindi, soltanto qualche traccia di geometria di misura, trovandovisi applicate alcune regole per valutare superficie e volumi; ma queste regole non sono dimostrate, nè tampoco enunciate, sicchè si deve ricostruirle generalizzando la catena logica che unisce le varie parti di ogni calcolo.

L'attento esame dei calcoli eseguiti da AHMES e delle figure che li accompagnano prova come in Egitto si sapesse calcolare l'area di un quadrato di dato lato; forse ivi si sapeva far altrettanto per l'area di un rettangolo, ma la cosa non è sicura; per asserirlo fa mestieri ammettere esista un errore materiale nell'esempio che vi si riferisce. Riguardo al calcolo dell'area di un triangolo, discordi sono le opinioni (1): vi è chi (2), interpretando una figura del papiro come quella di un triangolo isoscele, volle che gli Egiziani ritenessero l'area di questo misurata dal semiprodotto della base pel lato e scusò questo sbaglio osservando che esso induceva errori insignificanti nei triangoli considerati da AHMES, ove la base è piccolissima rispetto al lato; altri invece (3), interpretando quella figura come rappresentatrice di un triangolo rettangolo, attribuirono agli Egiziani la regola per calcolare l'area di un triangolo di questa specie e si spinsero fino a fare lo stesso per quella che dà l'area di un triangolo qualunque. I primi, interpretando come rappresentatrice di un trapezio isoscele un'altra figura del papiro,

---

des III intern. Mathematikerkongresses, Heidelberg, 1904), esso non sarebbe che un quaderno scolastico di un mediocrissimo alunno.

(1) La causa del disaccordo risiede nella pessima esecuzione delle figure geometriche considerate.

(2) EISENLOHR e CANTOR nelle op. cit.

(3) E. et V. REVILLOUT, *Note sur l'équerre égyptienne et son emploi d'après le Papyrus mathématique* (Revue égyptologique, T. II, 1881, p. 304-314); EM. WEYR, *Ueber die Geometrie der alten Aegypter.* Wien, 1884.

ritennero nota agli Egiziani la regola (inesatta) per calcolarne l'area che consiste nel moltiplicare la semisomma delle basi per uno dei lati eguali e la spiegarono come conseguenza logica della formola (inesatta) per calcolare l'area di un triangolo isoscele (1); i secondi invece, ritenendo che quella figura rappresenti un trapezio rettangolo, fecero merito agli Egiziani di avere saputo esattamente calcolare la superficie di questa figura.

Per trovare l'area di un cerchio gli Egiziani lo eguagliavano ad un quadrato avente per lato $\frac{8}{9}$ del diametro del cerchio; questo procedimento è assai notevole per la facilità di applicarlo e per l'approssimazione che porge, la quale equivale a quello che si otterrebbe assumendo come rapporto

---

(1) La dipendenza fra le due formole citate si può dimostrare rigorosamente come segue. Sia $M_1 N_1 N_2 M_2$ il trapezio isoscele avente per basi b_1 e b_2, ed i lati eguali a. $M_1 M_2$ e $N_1 N_2$ prolungate s'incontrino in V. Si ponga $VM_1 = a_1$, $VM_2 = a_2$. La regola per calcolare l'area di un triangolo isoscele e l'essere

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

dà successivamente:

$$\text{trapezio } M_1 N_1 N_2 M_2 = \text{triang. } VM_1 N_1 - \text{triang. } VM_2 N_2$$

$$= \frac{1}{2} a_1 b_1 - \frac{1}{2} a_2 b_2 = \frac{1}{2} (a + a_2) b_1 - \frac{1}{2} (a_1 - a) b_2$$

$$= \frac{a}{2} (b_1 + b_2) + \frac{1}{2} (a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

$$= \frac{b_1 + b_2}{2} a .$$

Ma questo ragionamento non si può certo attribuire a AHMES, onde resta a sapersi come questi avvertisse il legame fra queste due formole. L'esistenza di tale questione, che non riusciamo a risolvere, è una delle ragioni che ci consigliano a preferire la seconda alla prima delle interpretazioni indicate nel testo.

della circonferenza al diametro:

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604\ldots. (1);$$

in qual modo siasi ottenuta quella regola ci è ignoto; onde dobbiamo limitarci a segnalare al lettore alcune congetture escogitate nell'intento di colmare la conseguente lacuna che esiste nel quadro della matematica egiziana (2).

Nel *Manuale* non mancano calcoli di volumi. Ma è impossibile giudicare quelli che trattano la determinazione della capacità di certi granai, non essendo dichiarata la forma di questi. Difficile è anche interpretare un gruppo di problemi sulle piramidi; tuttavia sembra (3) che la loro soluzione si eseguisca mercè un calcolo speciale il quale offre un'indiscutibile analogia coi nostri calcoli trigonometrici, avendo per intento la determinazione di un angolo col mezzo del suo seno o della sua tangente.

Concludendo diremo che: finchè non siasi dissotterrata o almeno provata l'esistenza di un'opera egiziana, ove le regole applicate da AHMES sian dimostrate assieme alle verità geometriche su cui riposano (4), siamo autorizzati a negare

(1) S. GÜNTHER nella sua memoria *Antike Nährungsmethode im Lichte moderner Mathematik* (Abh. d. k. Böhm. Ges. d. Wiss., VI Folge, IX Bd., 1878) cercò di porre in relazione questo valore di π con quelli dati dalle ridotte della frazione continua in cui si sviluppa $\frac{314159}{100000}$.

(2) C. DEMME, *Bemerkungen zu den Regeln des Ahmes und des Baudhâyana über die Quadratur des Kreises* (Zeitschrift für Math. u. Phys, XXXI, 1886. *Hist.-Lit. Abth.*, p. 132); G. VACCA, *Sulla quadratura del circolo secondo l'egiziano Ahmes* (Bollett. di bibl. e storia, ecc., T. XI, 1908).

(3) M. CANTOR, *Ueber den sogenannten Seqt der ägyptischen Mathematiker* (Sitzungsberichte d. k. Ak. d. Wiss., XC Bd., II Abt., 1884, p. 474).

(4) Il " papiro d'Akhmîm „ recentemente interpretato dal BAILLET (cfr. la mia nota su *Un nuovo documento relativo alla logistica greco-egiziana* inserita nella *Bibliotheca mathematica*, 1893), è del tipo del " papiro Rhind „. ma ancora più povero di notizie sulla geometria antica. Per altri analoghi documenti v. CANTOR, l. c., p. 59 e 95.

al complesso delle cognizioni geometriche degli Egiziani i carattere di vera scienza.

2. - Mentre il popolo che abitava le rive del Nilo ebbe nell'antichità fama di avere per primo coltivata la geometria, a quello che aveva per propria sede le rive del Tigri e dell'Eufrate fu attribuito il merito di essersi dedicato prima d'ogni altro all'aritmetica e all'astronomia (1). Tuttavia anche fra gli Assiri ed i Babilonesi si possono trovare tracce di considerazioni geometriche e non è tolta la speranza che in avvenire venga scoperto qualche documento che getti sulla matematica dei Babilonesi tanta luce quanta su quella degli Egiziani proiettò il papiro Rhind. Sembra, intanto, che la geometria fosse studiata dagli Assiri nella speranza di potere applicarla a trarre i presagi dell'avvenire, fatto questo che concorda col misticismo di cui è imbevuta anche la loro aritmetica. Ed è appunto forse al loro studio della *geomanzia* che devonsi le nozioni che essi ebbero su le parallele, i triangoli ed i quadrangoli, la conoscenza di metodi per costruire in pratica gli angoli retti (presumibilmente coll'aiuto della proprietà di essere rettangolo posseduta dal triangolo avente per lati 3, 4, 5 unità di misura) e per dividere la circonferenza prima in 6 (ai Babilonesi era pertanto nota l'eguaglianza del raggio di un circolo al lato dell'esagono regolare inscritto) e poi in 360 parti eguali (gradi). Nè è impossibile che essi abbiano adoperato il valore $\pi = 3$ per trovare la lunghezza della circonferenza (2), offrendo così il primo esempio di rettificazione (approssimata) di una curva.

---

(1) Che i Babilonesi fossero assai più esperti nel calcolare che nel disegnare risulta da un documento recentemente decifrato e pubblicato, il quale risale al 2400 a. C. Veggasi: *Ein altbabylonischen Feldplan, nach Mittheilungen von* F. V. Scheil *herausgegeben und bearbeitet von* A. Eisenlohr. Leipzig, 1896.

(2) Questo valore si ritrova nel *Talmud,* ove, in conseguenza, si dice essere $\frac{3}{4}$ il rapporto dell'area di un cerchio all'area del quadrato circoscritto. Cfr. Mahler, *Beitrag zur Geschichte der Mathematik* (Zeitschr. f. Math. u. Phys, XXVII Jahrg., 1882, *Hist.-Lit. Abth.,* p. 207-210).

Essi poi conobbero e comunicarono a PITAGORA (v. n. 21) la celebre proposizione:

$$a : \frac{a+b}{2} :: \frac{2ab}{a+b} : b .$$

Tutto sommato adunque i Babilonesi non possono avere somministrato ai Greci molte cognizioni geometriche.

APPENDICE II.

Aristeo e Viviani.

È stato accennato nel testo (p. 157) che i dati su la vita e le opere di ARISTEO SENIORE non sembrarono a VINCENZO VIVIANI (1622-1703), celebre discepolo di GALILEO, così poveri da rendere impossibile una restituzione dei *Luoghi solidi*; egli anzi vi si accinse ventiquattrenne e la condusse a termine due anni prima di morire (1). Ora l'esame delle divinazioni di opere perdute, effettuate da persone aventi speciale competenza, è importante perchè indica il modo con cui queste concepivano lo stato della scienza nell'epoca alla quale appartengono le opere originali. Crediamo, in conseguenza, sia prezzo dell'opera arrestarci un istante a descrivere il contenuto del lavoro del VIVIANI (2), per poi dedurne se ed in qual misura esso sia da riguardarsi siccome surrogato di quello di ARISTEO.

La prima delle cinque sezioni, di cui si compone il I Libro della restituzione vivianea, consta di trentaquattro proposizioni concernenti le sezioni coniche, qui raccolte a sussidio delle investigazioni seguenti. Scopo di queste è la determinazione di certi luoghi derivati da una curva di secondo

---

(1) *De Locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libros iniuria temporum amissos Aristaei Senioris geometrae.* Auctore VINCENTIO VIVIANI. Florentiae, 1701.

(2) Tanto più che in generale gli storici della matematica a noi noti sono a questo riguardo assai laconici.

ordine, e di cui i più notevoli sono definiti nel modo seguente:

a) *In un punto* M *di una sezione conica si conduce la normale alla curva, che incontra in* N *uno degli assi della curva; da* M *si conduce la perpendicolare a quest'asse e dal suo piede* P *si porta su di essa un segmento eguale ad* MN. *Luogo dell'altro estremo di questo segmento.*

Per esporre brevemente i risultati ottenuti dal VIVIANI studiando questo problema locale, ci serviremo di procedimenti moderni. Supporremo quindi che la conica fondamentale sia data mediante l'equazione:

$$y^2 = 2px + qx^2 \tag{1}$$

e ricorderemo che questa è un'elisse, una parabola o un'iperbola secondochè q è negativo, nullo o positivo, e di più che, nel primo caso, secondochè $q + 1$ è negativo, nullo o positivo l'ellisse è allungata (cioè ha per asse minore quello steso sull'asse della x), circolare o accorciata. E' facile vedere che l'equazione del luogo proposto ha per equazione:

$$y^2 = q\,(1 + q)\,x^2 + 2p\,(1 + q)\,x + p^2, \tag{2}$$

onde esso luogo è un'altra conica bitangente alla data. Con maggiore precisione diremo che la (2) rappresenta una coppia di rette parallele se la data conica è un circolo (VIVIANI, Libro I, prop. 37), è una parabola se anche la data è una parabola (ib., prop. 38) è un'ellisse o un'iperbola se la data conica è un'ellisse allungata o accorciata (prop. 39 e 41), finalmente è un'iperbola se anche la curva data è iperbolica (prop. 40 e 42);

b) *Se nella costruzione indicata nel problema precedente, si sostituisce il segmento* PN *al segmento* MN, *quale luogo si ottiene?*

Ritenendo le stesse notazioni, si arriva facilmente alla seguente equazione del luogo:

$$\pm y = p + q\,x; \tag{3}$$

il luogo stesso consta, quindi, di due rette passanti pel centro della conica se questa è ellittica o iperbolica, di due rette parallele se questa è parabolica (prop. 35);

c) *E' data una sezione conica ed un punto fisso* F *di un suo asse. Si congiunge* F *ad un punto qualunque* M *della curva, si abbassa da* M *la perpendicolare* MP *al detto asse, sulla quale si prende a partire da* P *un segmento eguale a* FM. *Luogo dell'altro estremo di questo segmento.*

Conservando le notazioni precedenti e chiamando ζ l'ascissa di F, l'equazione del luogo è:

$$(4) \qquad y^2 = (1 + q)\, x^2 + 2\,(p - \zeta) + \zeta^2;$$

esso è dunque una conica pure bitangente alla data negli estremi della corda condotta da F perpendicolarmente all'asse. Tale proprietà non è rilevata da VIVIANI, il quale però osserva che se F è un fuoco della data conica (e solo allora, possiamo aggiungere) il luogo si spezza in due tangenti di questa (prop. 52). Se la conica è un circolo, comunque si scelga F, si ha per luogo una parabola (prop. 44, 50, 52); se è una parabola il luogo è un'iperbola equilatera (prop. 45, 54, 56, 58); se è un'elisse allungata il luogo è un'iperbola (prop. 46, 59, 62); se è un'ellisse accorciata il luogo è un'elisse (prop. 47, 63, 66, 68); se è un'iperbola, il luogo è un'altra iperbola (prop. 48, 49, 69, 79); se, finalmente, è una coppia di rette concorrenti il luogo è pure un'iperbola.

d) *Se nel problema* a) *si sostituisce alla normale* MN *la tangente* MT, *quale luogo si ottiene?*

Nei soliti simboli, l'equazione di questo luogo è:

$$(5) \qquad y^2 = \left(\frac{2\,p + qy}{p + qx}\right)^2 [x^2 + (p + qx)^2];$$

onde il luogo stesso è una curva di quart'ordine. Il VIVIANI però non lo considera in generale, restringendosi al caso in cui la data curva è una parabola: in tale ipotesi ($q = 0$) il luogo è un'iperbola (prop. 81).

Di altri luoghi analoghi collegati ad una parabola considerati da VIVIANI, crediamo inutile tener parola, perchè quanto precede basta a porgere un'idea del contenuto del I Libro.

I problemi trattati nel II si possono enunciare complessivamente come segue: *Sia dato un segmento* AB *di una*

retta r *e sia* N *il piede della perpendicolare condotta a* r *da un punto qualunque* M *di un piano passante per essa. Determinare in questo piano il luogo di* M *quando il quadrato di* MN *è una data funzione di secondo grado dei segmenti* AN, BN, AB. Presa r come asse delle ascisse di un sistema cartesiano ortogonale e chiamata a la lunghezza del segmento AB, l'equazione del luogo è della forma:

$$(6) \qquad y^2 = k_0 a^2 + k_1 ax + k_2 x^2$$

onde il luogo stesso è una conica. Il VIVIANI, non adoperando l'analisi cartesiana, servendosi invece dei procedimenti antichi, ha bisogno d'invocare, oltre ai teoremi che esistono nei primi libri delle *Coniche* d'APOLLONIO, alcune proposizioni di *algebra geometrica* (1) (Lib. II, prop. 17, 39, 45, 52, 54, 62, 68, 70), una nuova proprietà dell' iperbola (prop. 11) ed una relazione segmentaria cui dà luogo la divisione di una retta in media ed estrema ragione (prop. 66): tutte egli dimostra come lemmi. E col loro mezzo arriva a determinare in ogni caso il luogo cercato, il quale in diciotto casi è piano (2) ed in quarantaquattro solido (3). Si noti, però, che VIVIANI considera di ogni luogo soltanto la metà situata da una parte della retta r: in particolare, quando esso si spezza in due rette, egli non considera che una delle rette componenti.

Il Libro III, « in quo loci variarum dispositionum limites assignantur », non ha un fine schiettamente determinato come i due precedenti; ma in esso spesseggiano i problemi locali, ai quali fanno corona teoremi che sono o ausiliari nella loro soluzione o corollari di questa; e accanto a proposizioni oggi notissime relative a particolari maniere di

(1) Per usare la felice denominazione suggerita dallo ZEUTHEN, op. cit., p. 7.

(2) Cioè un circolo (prop. 1, 7, 15, 27, 30, 31, 35, 37, 49, 50, 63, 65), una coppia di rette parallele (prop. 13 e 26) o una coppia di rette concorrenti (prop. 14, 24, 25, 36).

(3) Cioè un'elisse (prop. 47 e 55), un'iperbola equilatera (prop. 4, 6, 12, 16, 20, 21, 28, 32, 34, 33, 61, 64, 67, 69, 71), un'iperbola scalena (prop. 19, 2r, 23, 46, 48, 53) o una parabola (prop. 2, 3, 5, 8, 9, 10, 18, 29, 33, 40-44, 56-60).

generare una conica, accanto a problemi più volte trattati (basti come esempio citare l'inserzione di due medie geometriche fra due rette date), s'incontrano teoremi originali e nuove questioni. Non è soltanto il desiderio di esser brevi che c'impedisce di diffonderci nell'enumerarle; è piuttosto il convincimento che sia impossibile affermare essere questo III Libro dell'opera di VIVIANI rispondente nella sua totalità all'opera perduta di ARISTEO. Vi sarà infatti, chi riterrà che questa contenesse alcune od altre delle verità esposte da VIVIANI nel detto Libro, ma come asserire le contenesse tutte, dal momento che queste non hanno fra loro una salda concatenazione logica, ma sembrano per converso riunite dal capriccio dell'autore?

In condizioni ben diverse ci troviamo di fronte ai primi due Libri, ognuno dei quali ha uno scopo dichiarato senza ambiguità o reticenza.

Ora, se esaminiamo nel suo insieme il I Libro, ci accorgeremo che esso poggia sopra un grande numero di proprietà assai riposte delle sezioni coniche; ciò rende malagevole l'accettare l'ipotesi che in esso si rispecchi tutta o parte l'opera perduta di ARISTEO, la quale si ergeva sopra la *più antica* redazione della teoria delle sezioni coniche, cioè sopra una redazione che, dopo almeno due rimaneggiamenti, ci si presenta nei primi libri delle *Coniche* di APOLLONIO. In secondo luogo, come spiegare che di tutti i notevoli luoghi ivi considerati siasi completamente perduta la memoria, che neppure PAPPO o qualche altro commentatore ne faccia la più fugace menzione? Perciò noi, pur riconoscendo che il I Libro della restituzione vivianea racchiude delle indagini degne di non piccola considerazione, pure pensiamo che esso non abbia nulla di comune coi *Luoghi solidi* di ARISTEO.

Per converso, ci sembra che nulla scriamente si opponga a che si ammetta i *Luoghi solidi* racchiudessero l'essenza del II Libro della *Divinatio*. Infatti, se si esaminano attentamente le proposizioni ivi dimostrate ed invocate, si vedrà che le prime per la maggior parte si ottengono invertendo (1)

(1) Qui per " inversione „ intendiamo l'operazione di dedurre dal teorema " Tutti i punti A di una sezione conica godono la proprietà $\mathfrak{L}$ „, l'altra " Il luogo dei punti A aventi la proprietà $\mathfrak{L}$ è una sezione conica „.

certe proprietà delle sezioni coniche che nulla si oppone a dichiarare per conosciute da ARISTEO. Ora, un'opera in cui le più salienti proprietà delle coniche venissero presentate sotto forma di teoremi locali, non possiede forse quel carattere di supplemento ad una teoria delle coniche, che PAPPO (p. 158) trovava nei *Luoghi solidi* di ARISTEO? Perciò noi propendiamo ad ammettere che il II Libro dell'opera vivianea corrisponda all'opera perduta di ARISTEO, senza però tacere che questa poteva contenere altre proposizioni (ad esempio alcune di quelle che si leggono nei libri I e III della *Divinatio*), ottenibili invertendo altri teoremi concernenti le sezioni coniche (1).

Questo per quanto concerne la *sostanza* del lavoro del VIVIANI. Riguardo poi alla *forma*, osserveremo che esso è scritto nello stile divenuto classico *dopo* EUCLIDE ed APOLLONIO. Ora che tale forma corretta e precisa fosse adoperata anche prima del periodo aureo della geometria greca, è questione che attende ancora una soluzione; epperò, anche per quanto concerne l'apparenza esterna, è dubbio se l'opera del nostro connazionale debba considerarsi siccome una riproduzione dell'antica, dubbio questo che, sotto questo secondo aspetto, non ha ragione di ripresentarsi riguardo alle divinazioni (di cui ci occuperemo nei Libri seguenti) di opere scritte in tempi in cui lo stile geometrico aveva già assunte le parvenze che possono considerarsi per definitive (2).

---

(1) È chiaro che quest'opinione non è in disaccordo con quella dello ZEUTHEN citata nel testo (p. 159), ma è più determinata.

(2) Chi volesse ritentare la divinazione dell'opera di ARISTEO dovrebbe tener conto dei suggerimenti dati da P. TANNERY [in una recensione pubblicata nel *Bulletin des Sciences mathém.* (II Sér., T. XVII, 1891, I Partie, p. 8)], secondo cui quel geometra avrebbe trattato più o meno completamente il problema delle *tre o quattro rette*, di cui parleremo nel Libro seguente (vedine l'enunciato nel n. 58).

Libro Secondo

IL PERIODO AUREO DELLA GEOMETRIA GRECA

Osservazioni generali

1. - Il secondo periodo della storia della geometria greca differisce sostanzialmente da quello che diede materia al I Libro dell'opera presente, sia per la natura e l'entità dei documenti che vi si riferiscono, sia per la fisonomia intellettuale e le abitudini scientifiche dei personaggi che appartengono, sia finalmente per la dimora che ebbero coloro ai quali la nostra scienza è debitrice dei più rilevanti progressi che in allora compì.

Mentre le notizie intorno alle produzioni scientifiche dell'epoca pre-euclidea devono venir raggranellate qua e là, attingendo a fonti di seconda o terza mano e di attendibilità che varia e non sempre si può precisare, dei corifei dell'epoca di cui ora intraprendiamo lo studio ci fu conservato un gran numero di opere, delle quali è quindi agevole valutare con esattezza il valore intrinseco (1). E se non sempre siamo in grado di misurare con precisione l'entità del progresso che esse segnano, gli è che le informazioni intorno ai matemateci precedenti sono esigue e mal sicure: ragione per cui la storia della matematica greca non può sempre raggiungere lo scopo supremo della storia scientifica che è quello di rivelare il logico concatenamento, il carattere quasi di necessità delle varie scoperte.

---

(1) Perciò coloro che con ARAGO, pensano che " il n'y a qu'une manière rationelle et juste d'écrire l'histoire des sciences, c'est de s'appuyer exclusivament sur des publications de date certaine „, dovrebbero far cominciare almeno dal periodo che comincia con la morte di ALESSANDRO di Macedonia lo studio della matematica presso i Greci.

Mentre gli scienziati anteriori ad EUCLIDE non erano di regola specialisti, ma risolvevano questioni di geometria come prendevano parte ad una disputa filosofica o facevano osservazioni di fenomeni naturali, da quelli di cui stiamo per occuparci (1) trae origine la numerosa serie di coloro che avvertirono essere la matematica capace e degna di assorbire da sola l'attività intellettuale di un'intera esistenza (2). Essi furono i fondatori della letteratura matematica dei Greci e debbono essere venerati siccome i nostri progenitori scientifici: onde il conoscerne le opere ha, non solo un valore storico, ma eziandio, in un certo senso, un valore pratico.

Mentre, finalmente, nell'epoca precedente il centro della coltura, dopo essere andato ramingo per tutta la Grecia, trovò da ultimo, per qualche tempo, in Atene un asilo sicuro, nell'epoca verso cui ora ci volgiamo è in Alessandria che fa d'uopo rintracciare il centro di attrazione intellettuale: donde la ragione per cui questa nuova epoca (che, come la precedente, dura all'incirca tre secoli) suole da molti designarsi col nome di *periodo greco-alessandrino*.

2. - Tale mutazione del centro della coltura non è dovuta — come gran parte delle trasmigrazioni analoghe che rilevammo nel Libro precedente — alla causale presenza di qualche grande personalità, raccogliente attorno a sè una coorte di ammiratori o discepoli, ma bensì al cambiamento radicale che la morte di ALESSANDRO il Macedone produsse nell'immenso impero che egli seppe ridurre sotto il proprio scettro. Spento, infatti, questo grande capitano e terminate le terribili lotte che subito si accesero fra i suoi generali aspiranti a raccoglierne l'eredità, il mondo conquistato dal valoroso discepolo di ARISTOTELE (cfr. p. 131) venne diviso in varie parti. E siccome ALESSANDRO, nella vittoriosa sua corsa attraverso l'Asia, soleva condurre seco uno stuolo di letterati, scienziati ed artisti, così i suoi eredi, am-

(1) Eccezion fatta per ERATOSTENE (v. più avanti n. 48) e forse per lui solo.

(2) In generale si può dire che soltanto nel periodo greco-alessandrino le scienze cessano di costituire un tutto (la filosofia) ed assumono ciascuna esistenza propria e procedere autonomo.

maestrati dal suo esempio, vollero avere costantemente a lato, forse per consiglieri e maestri, alcune persone eminenti. Donde la spiegazione del fatto che i Seleucidi diffusero la coltura ellenica fino nell'interno dell'Asia, gli Attalidi si sforzarono di raccogliere in Pergamo ricche biblioteche, e perfino i signori di Atene, malgrado la loro variabilità ed i tormenti di guerre incessanti, non mancarono di incoraggiare e sovvenire chi si consacrava ai lavori della mente. Però in nessuna corte la scienza potè fiorire con tanta tranquillità e sicurezza quanto sotto i Lagidi di Alessandria.

Le benemerenze di questa grande dinastia cominciano col fondatore di essa, giacchè TOLOMEO SOTERO, non appena salito al trono dei Faraoni, raccolse attorno a sè un circolo di dotti e, dal ben noto peripatetico ateniese DEMETRIO FALEREO, fece in Alessandria gettare le basi di una grande biblioteca (1); siccome però egli ebbe a sostenere durante i suoi quarant'anni di regno molte sanguinose guerre, a fine di consolidare il proprio trono, così era riserbato al suo successore, TOLOMEO FILADELFO, di consacrare i trentasette anni di pacifico governo che la sorte gli concesse esclusivamente a far fiorire tutte le arti della pace, a raccogliere immensi tesori letterari, ad assicurarsi il primo posto fra i sovrani fautori delle scienze e protettori degli scienziati.

3. - A quale dei due principi testè citati spetti il nome di fondatore del Museo d'Alessandria (2) non si può affermare con certezza (3); però la bilancia pende dalla parte del padre, mentre d'altronde, non v'ha dubbio che è sotto

(1) Questa — che sorse circa nel momento della morte di ARISTOTELE — fu modellata sulla biblioteca raccolta e ordinata dal celebre filosofo di Stagira (cfr. p. 166); essa in origine fu allogata in un locale attiguo alla Reggia; ma quando, sotto TOLOMEO EVERGETE, lo spazio disponibile si trovò tutto occupato, i libri si depositarono nel tempio di Serapide ed altrove. A questa biblioteca pubblica se ne aggiunsero ben presto in Alessandria alcune private.

(2) Riguardo al Museo si vegga il T. I, p. 180-198 dell'*Histoire de l'École d'Alexandrie* par M. J. SIMON. Paris, 1845.

(3) Nel dubbio taluno colloca la creazione del Museo negli anni 284-282 a. C. durante i quali i due primi Tolomei tennero insieme le redini del governo.

il governo di TOLOMEO FILADELFO che, per numero di dotti ed entità di materiale scientifico, il Museo raggiunse l'apice della grandezza. — Quale fosse l'organizzazione di questo celebre istituto è impossibile dire con qualche precisione: non è noto, anzi è poco probabile, che agli studiosi ivi accolti (fra cui venivano scelti i precettori dei principi) fosse imposto l'obbligo del pubblico insegnamento; per converso veniva ad essi agevolata con ogni mezzo la ricerca scientifica, ed è presumibile fosse ad essi fatto invito di comunicare i propri ritrovati ai giovani che la loro grande rinomanza chiamava attorno ad essi. Era, dunque, uno stabilimento *sui generis* in cui forse è vano cercare delle profonde somiglianze con qualche istituzione moderna (1); esso è meritevole di studio e di venerazione da parte dei dotti per la grande durata che ebbe (circa nove secoli) (2), pei personaggi che ivi rappresentarono parti importanti (3), e per i grandi progressi che le scienze (specialmente le scienze esatte) vi compirono. La sua influenza fu incomparabilmente superiore a quella che esercitarono gli antichi istituti congeneri, quali sarebbero le scuole di Atene, di Pergamo, di Antiochia; ad esso è dovuta la conservazione e la diffusione

(1) G. PARTHEY a pag. 60 della sua pregevole memoria *Das Alexandrinische Museum*. Berlin, 1838 — a cui attingemmo largamente — cita parecchie istituzioni moderne a cui venne paragonata quella di cui ci occupiamo: sono l'Accademia di Parigi e la Società Reale di Londra, il Collegio di Oxford ed il Ginnasio di Zweibrück. Sembra però che ad istituire dei paragoni verosimili manchino dati abbastanza copiosi e sicuri: cfr. F. SUSEMIHL, *Geschichte der griechischen Litteratur in der Alexandrinerzeit*, I Band. Leipzig, 1891, p. 7.

(2) Si possono distinguere nei Museo tre fasi. La prima va dall'incoronazione di LAGO sino ad AUGUSTO e comprende i tre secoli (332 — 30 a. C.) in cui l'Egitto fu indipendente; la seconda da AUGUSTO a COSTANTINO (30 a. C. — 324 E. v.), tre secoli, in cui l'Egitto fu provincia romana; la terza da COSTANTINO a AMRU BEN ALAS (324-640 E. v.) ed abbraccia altri tre secoli, in cui ferve la lotta del Cristianesimo con l'elemento pagano indigeno. Durante la prima fase il Museo, sotto la protezione dei Lagidi, arriva all'apogeo della grandezza; durante la seconda decade: durante la terza è il teatro di dispute teologiche.

(3) Il loro numero era variabile, ma doveva probabilmente arrivare a cento quando il Museo era fiorente.

di scritti importanti che altrimenti sarebbero andati perduti o rimasti ignorati; in esso le matematiche arrivarono ad una grandezza comparabile soltanto a quella che raggiunsero nel periodo della scoperta del calcolo infinitesimale.

Ed è di somma importanza per noi il rilevare come, dopo le conquiste d'ALESSADDRO, non si avverta nelle scienze esatte una alterazione d'indirizzo somigliante a quello percepibile nelle filosofiche ed in altre discipline; esse conservano e accentuano quei caratteri eminentemente scientifici di genialità e generalità che si cercano invano nelle produzioni degli Egiziani, anzi di tutti gli antichi popoli: sicchè la matematica di cui stiamo per occuparsi è essenzialmente greca, benchè essa siasi sviluppata su terra egiziana. Se noi includeremo nel nostro racconto anche le gesta di uomini che vissero fuori di Alessandria, è perchè gli investigatori del Museo, col tenere vive corrispondenze con i più cospicui pensatori stranieri, riuscirono a coordinare e far convergere verso un fine comune gli sforzi fatti da questi per accrescere il nostro patrimonio intellettuale; laonde, benchè non pochi filosofi del periodo greco-alessandrino abbiano insegnato o vissuto lungi dalla terra fecondata dal Nilo, con pieno diritto Alessandria dà il nome alla nobile famiglia di pensatori che essi formano e della quale tenteremo ora di descrivere l'opera matematica.

CAPITOLO I.

Euclide

4. - Fra i geometri del periodo greco-alessandrino, primo forse per ordine di tempo e certamente per popolarità, se non per originalità ed elevatezza d'investigazioni (almeno se lo si giudica in base alle produzioni superstiti), è EUCLIDE (1). Ce ne occuperemo ora, riferendo anzitutto il giudizio che su di lui pronunciò il commentatore PROCLO nella continuazione del brano che ci servì (L. I, n. 3) quasi di piattaforma su cui erigere la ricostruzione che tentammo della geometria dell'epoca precedente.

EUCLIDE, l'autore degli *Elementi*, non è molto più giovane (di ERMOTIMO da Colofone e FILIPPO da Medma); egli ha messo in ordine vari lavori di EUDOSSO (2), migliorati quelli di TEETETO (3) ed inoltre date dimostrazioni indiscutibili di quanto i suoi predecessori non avevano provato con sufficiente rigore. EUCLIDE fiorì (4) sotto TOLOMEO I, perchè è citato da ARCHIMEDE (5), il quale nacque verso il termine del regno di questo sovrano, ed inoltre si narra come TOLOMEO chiedesse un giorno ad Eu-

(1) L'articolo relativo nella *Real-Encyklopädie* di PAULY-WISSOWA è di F. HULTSCH.

(2) V. L. I, n. 70-71.

(3) V. L. I, n. 64.

(4) Cfr. RHODE in *Rhein. Museum*, 2. Reihe, XXXIII Bd., p. 161.

(5) Nella II propos. del I Libro *Su la sfera ed il cilindro* (vedi più avanti n. 39).

CLIDE se per apprendere la geometria non esistesse una via più breve degli *Elementi* e ne ricevesse per risposta: *In geometria non esistono cammini fatti pei re* (1). EUCLIDE è adunque posteriore ai discepoli di PLATONE, ma anteriore ad ERATOSTENE ed ARCHIMEDE, i quali erano contemporanei, come afferma ERATOSTENE in qualche luogo. EUCLIDE era di opinioni platonico e molto famigliare con la filosofia del Maestro tanto che pose per iscopo finale de' suoi *Elementi* la costruzione delle figure platoniche (corpi regolari).

Si hanno di lui molte altre opere matematiche scritte con singolare precisione e piene di scienza teorica. Tali sono l'*Ottica,* la *Catottrica,* gli *Elementi di musica* (2) ed anche i libri *Sulle divisioni.* Ma si ammirano specialmente i suoi *Elementi di geometria* per l'ordine che vi regna, per la scelta dei teoremi e problemi assunti come fondamentali giacchè egli non ha inseriti tutti quelli che era in grado di dare, ma bensì quelli soltanto che sono capaci di fungere da elementi, e anche per la varietà dei ragionamenti i quali sono condotti in tutti i modi possibili e convincono ora partendo dalle cause, ora risalendo dai fatti, ma sono sempre inconfutabili, esatti e dotati del carattere più scientifico. Si aggiunga che egli adopera tutti i procedimenti della dialettica: il metodo di *divisione* per determinare le specie, quello di *definizione* per i ragionamenti essenziali, l'*apodittico* nel procedere dai principi alle cose ignote, l'*analitico* nel procedere inversamente dall'ignoto ai principi. Lo stesso trattato ci presenta anche esattamente distinte le varie sorte di proposizioni reciproche, ora più semplici ed ora più complicate, potendo le reciprocità aver luogo o fra il tutto ed il tutto, o fra il tutto e una parte, o fra questa e quello, o infine fra una parte ed una parte. Che diremo poi dei metodo di ricerca, dell'economia e dell'ordine da quello che precede a ciò che segue, della forza con cui è assodato ogni punto? Se tu vuoi aggiungervi o togliervi alcuna cosa, riconoscerai che ti allontani dalla scienza e ti lasci trascinare verso l'errore e l'ignoranza. - In realtà molte cose hanno l'apparenze di essere verità e scaturire dai principi della scienza, mentre in fatto si scostano da questi principi ed ingannano gli spiriti superficiali. Perciò EUCLIDE ha esposti anche i metodi adoperati dalla mente chiaroveggente e coi quali devono famigliarizzarsi coloro che intraprendono lo studio della geometria, per ravvisare i paralogismi ed evitare gli errori. È nello scritto

(1) Cfr. l'aneddoto analogo concernente MENECMO riferito a p. 149.

(2) V. *Musici scriptores graeci. Aristoteles. Euclides. Nichomacus. Bacchius. Gaudentius.* Ed. C. JANUS. Lipsiae, 1895.

intitolato Ψευδάρια (*Sofismi*) (1) che egli ha fatto questo lavoro, enumerando partitamente e con ordine i varii generi di ragionamenti erronei, esercitando su ciascuno la nostra intelligenza col mezzo di teoremi di ogni specie, ove oppone il vero al falso e fa concordare la dimostrazione della verità con la confutazione dell'errore. Questo libro ha pertanto siccome scopo di purificare ed esercitare l'intelligenza, mentre gli *Elementi* sono una guida sicura e completa per la contemplazione scientifica delle figure geometriche (2).

Alle notizie intorno alla vita ed alle tendenze scientifiche di EUCLIDE somministrate da questo brano importante, ben poche siamo in grado di aggiungerne ricorrendo ad altri autori greci (3); l'unica anzi che questi sono in grado di porgerci si legge in un passo della *Collezione matematica* di PAPPO; questo commentatore conferma, infatti, che EUCLIDE visse in Alessandria, e ce lo dipinge modesto, di carattere dolce, pieno di benevolenza verso chiunque fosse in grado di far progredire le matematiche ed avente per principio di apportare il minimo numero possibile di cambiamenti in quello che i suoi predecessori avevano scritto (4).

5. - A queste informazioni di origine greca si potrebbero

---

(1) Lo si considera per irremissibilmente perduto. L'HEIBERG però ossserva (*Litterargeschichtliche Studien über Euklid.* Leipzig, 1882, p. 38 nota) che ALESSANDRO d'Afrodisia lo conobbe e citò nel suo *Commento* ad ARISTOTELE. In conseguenza il TANNERY congettura (*Bull. de Sc. math. et astr.*, 2e Série, T. VI, 1882, Ire Partie, p. 147) che è da quell'opera di EUCLIDE che il commentatore citato tolse le quadrature del circolo di ANTIFONTE e BRISSONE (L. I, n. 45, 48, 49), nonchè le notizie sulle lunole di IPPOCRATE (L. I, n. 44-47).

(2) PROCLO-TAYLOR, I, p. 101-103.

(3) G. JUNGE (Bibl. Mathem., 3 Reihe, T. X, 1910, p. 155) ha asserito che EUCLIDE non può essere nato dopo il 360 a. C. e che gli *Elementi* debbono avere esistito sino dal 320, rimandando ad altra occasione l'esposizione delle ragioni su cui fonda tali opinioni.

(4) PAPPO ed. HULTSCH, p. 676-8. Per valutare la fede che si deve attribuire a queste informazioni, bisona tener conto dell'esser desse contenute in un passo che l'HULTSCH considera come un'interpolazione posteriore a PAPPO. Cfr. anche HEIBERG in *Revue critique*, T. XI, 1881.

aggiungerne altre di fonte araba (1), secondo le quali EUCLIDE sarebbe figlio di NAUCRATE e nipote di ZENARCO, greco di origine ma nativo di Tiro e domiciliato a Damasco; ma come prestar fede a tali notizie in cui la ricchezza nei particolari stranamente contrasta con l'ignoranza di PROCLO, che, pure, come greco ed erede delle tradizioni scientifiche della scuola d'Alessandria, doveva essere assai meglio informato degli Arabi di molto posteriori? Ed inoltre chi ignora come fosse consuetudine degli Arabi di completare arbitrariamente, dove erano deficienti, poetizzare e talora svisare le informazioni attinte dai Greci, come fosse loro aspirazione costante di collegare in qualche modo le produzioni greche alla coltura dell'Arabia od almeno a quella dell'Oriente (2)? Comunque, sarebbe indubbiamente interessante venisse decifrata e pubblicata quella biografia di EUCLIDE che il persiano KĀDI-ZÂDEH AR-RÛMÎ (morto nel 1412 o nel 1413) scrisse *dopo aver attinto a fonti greche*, e che si dice esistere tuttora manoscritta (3). — Frattanto non sarà giudicato inopportuno che noi togliamo da una delle raccolte più importanti per la storia letteraria degli Arabi (4) l'articolo con-

(1) Cfr. NESSELMANN, *Die Algebra der Griechen.* Berlin, 1842, p. 184-85 note. Inoltre HEIBERG, citate *Studien,* Cap. I; ove sono riferiti i passi originali contenenti i dati più importanti, di cui il più antico è di un autore che morì nel 1249.

(2) Tuttavia ci sembra che a ragiona il SUTER avverta (*Einiges aus Nassir ed-Dins Euklidausgabe;* Bibl. Math., 1892, p. 6) nulla opporsi ad ammettere essere EUCLIDE nativo di Tiro.

(3) Cfr. CANTOR, *Vorlesungen über Gesch. der Mathem.,* I Bd., 3 Aufl. Leipzig, 1897, p. 780.

(4) Alludo al *Kitâb-al-Fihrist* (Libro degli indici) di ABÛ 'L-FARADSCH MUHAMMED BEN ISAKAK noto sotto il nome di IBN ABÌ IA'KUB AN NADÌM, la cui parte principale fu scritta nel 987 dell'E. v. e che venne edito a Lipsia negli anni 1871-72. Questo manuale — di cui G. FLÜGEL ha pubblicato un riassunto fedele nel T. XIII (1859), p. 559-650, della *Zeit. d. deutsch. morgenländ. Gesellsch.* — è, come dice la prefazione, " il catalogo dei libri di tutti i popoli, cioè arabi e non arabi, come sono trascritti in lingua e scrittura araba, sulle varie scienze, le notizie sui loro autori, la loro genealogia, le date di loro nascita, la durata della loro vita, il tempo della loro morte, i luoghi relativi, le loro qualità buone e cattive, dalle origini fino al nostro tempo, cioè sino all'anno 377 (987-988) „. Per la storia della

cernente EUCLIDE (1), articolo che rappresenta il più antico documento del genere da noi posseduto:

EUCLIDE geometra; figlio di NAUCRATE figlio di BERENICE (?); insegnò la geometria e si atteggiò ad autore in questo campo prima di ARCHIMEDE e di altri: egli apparteneva ai filosofi esatti. — *Sul suo libro* " Degli elementi di geometria „. Il titolo di esso è στοιχεῖα, vale a dire Elementi di Geometria.... Questo venne poi commentato da ERONE il quale cercò di snodarne le difficoltà..... AL-KINDÌ nel suo libro *Intorno agli scopi del libro di Euclide* ricorda che questo libro era stato scritto da un uomo di nome APOLLONIO (?) il Carpentiere e diviso in 15 sezioni, ma che col tempo era divenuto antiquato ed aveva bisogno di miglioramenti; allora uno dei re d'Alessandria si decise a studiare la geometria; appunto in quest'epoca viveva EUCLIDE ed a lui venne commesso di rifondere il libro e commentarlo: una cosa e l'altra egli fece, epperò è a lui che quel libro viene oggi attribuito. Più tardi IPSICLE, discepolo di EUCLIDE, trovò due altri libri, il XIV ed il XV, e li portò al re; essi vennero aggiunti all'opera. Tutto questo accadde in Alessandria.

Fra gli scritti di EUCLIDE si trovano poi: Il libro dei Fenomeni (celesti). Il libro sulle diversità delle immagini (Ottica). Il libro delle quantità date (Dati). Il libro dei toni, conosciuto sotto il nome di Musica: *falso*. Il libro della divisione, migliorato da TÂBIT. Il libro delle aggiunte (porismi): *falso* (2). Il li-

---

scienza ha una speciale importanza la sezione VII, onde molto opportunamente H. SUTER la tradusse e pubblicò nel VII Fascicolo delle *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*. Leipzig, 1882. Da esso abbiamo già tolta una notizia (veramente poco degna di fede) su PLATONE (p. 109); in seguito verrà più volte utilizzato e citato coll'abbreviatura: *Suter-Fihrist*.

(1) Sopprimendovi però quanto si riferisce alle traduzioni ed ai commenti che di EUCLIDE fecero gli Arabi.

(2) Il SUTER ha rilevato (*Zeitschrift für Math. und Phys.*, Hist.-Litt. Abth., 1893, p. 194) come gli Arabi si servissero di due distinti vocaboli per rendere i due sensi che i Greci attribuivano alla parola *porisma*; uno di essi significa " scoperta di ciò che si cerca „ e l'altro " frutto „ o " utilità „; il primo corrisponderebbe quindi a quei porismi che assomigliano ai problemi e il secondo ai corollari; è il primo che viene usato nel testo. L'epiteto *falso* di cui viene decorata l'opera relativa di EUCLIDE significa che gli Arabi ritenevano [come vedremo (nn. 27-28), senza ragione] che quell'opera a torto fosse stata attribuita ad EUCLIDE.

bro del canone (musicale) (1). Il libro della composizione (sintesi): *falso*. Il libro della risoluzione (analisi): *falso* (2).

Ci mancano i mezzi che sarebbero necessari per discutere a parte le asserzioni contenute in questo squarcio: vogliamo soltanto osservare che quelle relative alla mancanza di originalità degli *Elementi* non contraddicono a quanto sappiamo intorno ai geometri greci precursori di EUCLIDE, e che non vi è ragione di rifiutarvi fede in base all'osservazione che ivi APOLLONIO è considerato come anteriore ad EUCLIDE, dal momento che l'esame accurato di tutto il *Kitâb al-Fihrist* mostra che chi lo scrisse non confondeva (3) l'ignoto APOLLONIO *il Carpentiere* e col grande APOLLONIO *Pergeo*.

6. - Con ciò resta esaurita la disamina dei documenti intorno ad EUCLIDE che gli antichi ci trasmisero: essi sono così scarsi ed insignificanti che è vano tentare di ricostruire col loro aiuto la biografia di questo scienziato; soltanto ci abilitano a ritenere che la sua esistenza cada fra i primi discepoli di PLATONE e ARCHIMEDE; quindi egli fiorì verso il 300 a. C. Educato probabilmente ad Atene, dove tuttora era accesa la fiaccola della ricerca scientifica, egli in Alessandria fondò una scuola ed ivi passò una vita tranquilla all'ombra del trono dei Lagidi. Il nostro EUCLIDE non deve, adunque, scambiarsi col filosofo EUCLIDE da Megara, contemporaneo di PLATONE e costante ammiratore di SOCRATE (4), vissuto, quindi, circa un secolo prima. Tale avvertimento può sembrare superfluo a più d'un lettore: se non l'abbiamo taciuto è che ricordiamo come, a partire da VALERIO MASSIMO (contemporaneo di TIBERIO) persone per sapere eccel-

(1) κατατομὴ κανόνος.

(2) SUTER-FIHRIST, p. 16-17.

(3) Ivi, p. 49, nota 46. L'opinione opposta ha il KLAMROTH: si vegga il lavoro *Ueber die Auszüge der griechischen Schristellern bei al-Jac' qûbî* (Zeitschr. d. deut. morg. Gesch., T. XLI, p. 419, nota), dal quale si possono anche ricavare dei dati interessanti intorno allo stato in cui gli Arabi conobbero gli *Elementi*.

(4) Cfr. ZELLER, *Die Philosophie der Griechen*, II Tl., I Abth., IV Aufl. Leipzig, 1889, p. 102.

lenti — fra esse basti il ricordare il PETRARCA (1) e il REGIOMONTANO (2) — non abbiano saputo evitare questa fantastica identificazione; la quale è visibile anche in molte edizioni degli *Elementi*, specialmente in quelle che nel secolo XVI (3), vennero fatte in base ai lavori di CAMPANO (1482) e ZAMBERTI (1516); essa scomparve soltanto più tardi, per merito del COMMANDINO (4) e del CLAVIO (5), i quali per primi rilevarono quel grave errore.

7. - La celebrità mondiale di EUCLIDE è in massima parte dovuta ai suoi *Elementi* (στοιχεῖα) (6), opera che, per la diffusione che ebbe — nell'originale e mediante traduzioni in tutte le lingue conosciute (7) —, trova rivali soltanto nell'*Antico e*

---

(1) Il quale nel *Commento alla Divina Commedia* scrisse: " EUCLIDE geometra onde si fosse nè di che parenti disceso non so, ma assai appare per VALERIO MASSIMO nel suo VIII libro, capitolo XII, lui essere stato contemporaneo di PLATONE, e perciocchè ne' nostri dì è perseverata la fama sua puote assai essere manifesto lui avere in geometria ogni altro filosofo trapassato „.

(2) Cfr. CANTOR, *Vorlesungen*, T. II, 2 Aufl. Leipzig, 1900, p. 261.

(3) Citiamo, ad esempio, le edizioni italiane del TARTAGLIA, di cui la più antica è del 1543 ed ha per titolo *Euclide Megarese reassettato, et alla integrità ridotta;* altre sono registrate da P. RICCARDI nel *Saggio di bibliografia euclidea* che citeremo fra poco.

(4) *Euclidis Elementorum libri XV una cum scholis antiquis.* Pisauri, 1572.

(5) *Euclidis Elementorum libri XV Accessit XVI de regulari solidorum comparatione.* Romae, 1574.

(6) Intorno al significato di questa parola v. L. I, n. 75. Si aggiunga che secondo il dotto editore di PAPPO, sotto l'appellativo di στοιχεῖα gli antichi comprendevano una serie di opere fondamentali pei vari rami delle matematiche — quali sarebbero le *Coniche* di ARISTEO e forse quelle di APOLLONIO, i *Luoghi piani* di questo, i *Fenomeni* di EUCLIDE e via dicendo; per distinguerle dall'opera di EUCLIDE designarono questa col nome di τὰ πρῶτα στοιχεῖα (PAPPO ed. HULTSCH, *Index graecitatis*, p. 103; v. anche *Repertorium der litterarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angew. Math.*, T. II, Leipzig, 1879, p. 323).

(7) Basti dire che fin dalla prima metà del sec. XVII ne venne fatto un riassunto in cinese: v. *Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero, ecc. con G. A. Mangini, pubblicato ed illu-*

Nuovo Testamento e forse nella *Divina Commedia*, opera a cui si deve se per molti *Euclide* sia sinonimo di *Geometria* come *Vignola* è sinonimo di *Architettura*. In essa EUCLIDE non adunò tutto il sapere geometrico de' suoi tempi (cfr. il brano di PROCLO riferito nel n. 4), ma soltanto quelle proposizioni che si debbono considerare siccome ingredienti, diretti o indiretti, di tutte le verità geometriche, il cui ufficio può, quindi, equipararsi a quello delle lettere dell'alfabeto nella formazione delle parole (3). Egli divise la sua opera in tredici libri, contenenti in totale 465 proposizioni, cioè 93 problemi e 372 teoremi. I primi quattro libri e il sesto si riferiscono esclusivamente alla geometria del piano, mentre gli ultimi tre quasi completamente (4) alla geometria dello spazio: nel libro V è esposta la teoria delle proporzioni e nel X quella di un'importante classe di linee irrazionali; finalmente i libri VII-IX concernono l'aritmetica dei numeri razionali. Alla geometria a due dimensioni appartengono 163 proposizioni e 60 alla geometria a tre dimensioni; 25 alle proporzioni, 102 all'aritmetica e 115 alle linee razionali anzidette. Malgrado questa varietà d'argomenti l'opera di EUCLIDE è, a parer nostro, un tutto organico e di indole essenzialmente geometrica: ivi, infatti, mentre la geometria ci si presenta siccome una disciplina autonoma, indipendente anche dalla scienza dei numeri, per converso (non soltanto la teorie delle proporzioni (5) e quella degli irrazionali, ma anche) l'aritmetica fa appello alla geometria per avere da essa a prestito parte della sua nomenclatura e degli ausiliari per le dimostrazioni; noi crediamo, pertanto, priva di solido fondamento l'opinione (4) secondo cui i libri VII-X degli *Elementi* avrebbero in origine costituito un'opera a

---

strato da A. FAVARO. Bologna, 1886, p. 108, nota 4. Cfr. anche *Journal asiatique,* V Serie, T. XV, p. 279.

(1) Come nota giustamente P. TANNERY, *Le géométrie grecque,* Paris, 1887, p. 136; il quale rileva eziandio che le lettere dell'alfabeto venivano dai Greci pure denominate στοιχεῖα.

(2) Eccettuate cioè le prop. 1, 2 e 16 del Libro XII e le prime dodici del XIII.

(3) Cfr. L. I, n. 21, introduzione.

(4) V. FLAUTI, *Preliminare agli Elementi di Euclide.* Napoli, 1816, p. XXXIII.

sè, testo di aritmetica nelle scuole greche, che posteriori commentatori si sarebbero arbitrati di inserire nel posto in cui oggi la troviamo.

8. - Il testo degli *Elementi* è giunto sino a noi completo, ma non senza avere sofferto molte modificazioni e ricevuto aggiunte per parte dei ricopiatori greci, dei traduttori arabi, dei commentatori dell'una nazione e dell'altra; l'entità di queste alterazioni venne giudicato in modo variabile e non sempre conforme al vero, come ora brevemente esporremo (1).

TEONE ALESSANDRINO (IV sec. dell'E. v.), in un passo del parziale commento di cui corredò l'*Almagesto* di CLAUDIO TOLOMEO (2), si dice autore di una *redazione* degli *Elementi di Euclide*, asserzione che viene confermata da un gran numero di manoscritti degni di fede. Ora questa notizia fece credere, tanto a BOEZIO quanto ai primi editori di EUCLIDE, che negli *Elementi* gli enunciati delle varie proposizioni appartenessero ad EUCLIDE e le dimostrazioni a TEONE: donde la ragione di certe edizioni degli *Elementi* ove i teoremi sono esenti da dimostrazioni, edizioni che vengono presentate quasi come una restituzione dell'opera originale; donde anche la ragione della libertà con cui molti editori modificarono i ragionamenti contenuti negli *Elementi*, essendo convinti che così facendo non alzavano su EUCLIDE una mano sacrilega; e quest'opinione fu esagerata al punto che molti — fra cui basterà citare il celebre P. DE LE RAMÉE (1515-1572) — si credettero in diritto di asserire che TEONE nella sua redazione degli *Elementi* utilizzò il lavoro di EUCLIDE in misura analoga a quella in cui EUCLIDE si servì dei trattati

(1) Cfr. HEIBERG, citate *Studien*, p. 174 e seg.: GOW, *A short History of greek Mathematics*. Cambridge, 1884, p. 199 e seg. Per giudicare lo stato attuale del testo degli *Elementi* il migliore sistema consisterebbe nel paragonare le proposizioni ivi contenute con le citazioni letterali che delle stesse fecero antichi scrittori; ma i risultati che così si ottengono sono di mediocre entità, perchè i casi in cui si può fare un confronto della detta specie sono poco numerosi.

(2) *Commentaire de Théon d'Alexandrie sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée;* trad. HALMA. Paris, 1822-25, T. I, p. 201.

anteriori (1). Ma, l'esame del *Commento* di PROCLO ed il confronto della redazione di TEONE con altre anteriori (2) dimostra che tutti questi apprezzamenti sono infondati; ed è merito di GIOVANNI BUTEO (1492-1572) di avere per primo sostenuto e dimostrato (3) che TEONE non può avere arrecato agli *Elementi* se non modificazioni di secondaria importanza, deve anzi essersi limitato ad aggiungere qualche piccola spiegazione, nell'intento forse di rendere quell'opera più adatta a servire di testo alle proprie lezioni.

Per quanto poi concerne l'entità delle modificazioni arrecate dagli Arabi (4), ben poco di attendibile se ne sapeva sino a poco fa; ma di recente un distinto orientalista (M. KLAMROTH) studiò a fondo la questione e si credette autorizzato a concludere (5) che non meno di ventisei proposizioni e molte definizioni del testo pervenutoci a mezzo dei Greci furono interpolate e che, specialmente nei libri XI-XIII, le dimostrazioni originali vennero sostituite con altre più complicate. Sembra però (6) che questo giudizio si debba

(1) " Sic enim Pytagorae Hippocrates, Hippocratis Leo, Leonis Theudius, Theudii Hermotimus, Hermotimi Euclides, Euclidis Theon στοιχείωσιν retexuit et emendavit ". *Schol. mathem.* Basil., 1569, p. 77.

(2) La più celebre fra esse è contenuta nel Ms. Vat. 190 ed ha servito di base all'edizione di F. PEYRARD, *Les Oeuvres d'Euclide en grec, en latin et en français d'après un manuscrit très-ancien qui avait resté inconnu jusqu'à nos jours.* I vol., Paris, 1814; II, 1816; III, 1818.

(3) IOAN. BUTEONIS, *De quadratura circuli. Eiusdem annotationum opuscola in errores Campani, Zamberti, Orontij, Peletarii, Io. Penae interpretum Euclidis.* Lugduni Bat., 1559, p. 209-212.

(4) Com'è noto, le più riputate versioni arabe di EUCLIDE sono quella di HAǦǦÂǦ IBN JÛSUF IBN MATAR e quella di ISHÂQ IBN HUNEIN, fatte la prima in principio e la seconda in fine del I sec. dell'E. v. La traduzione che porta il nome di NASÎR-ED DÎN (morto nel 1273) è piuttosto un rimaneggiamento che una versione.

(5) Nell'importante lavoro intitolato *Ueber den arabischen Euklid* (Zeitschrift d. deut. morgenl. Gesell., T. XXXV, p. 270-326).

(6) HEIBERG, *Die Arabische Tradition der Elemente Euklid's* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., 1884, Hist.-Lit. Abth., p. 1-22), inoltre *Philologus*, T. XLIII, 1884, p. 477-8); le cui conclusioni vennero più tardi accettate nel loro complesso dal KLAMROTH stesso: cfr. Zeitschr. d. deut. morg. Ges., T. XLII, 1888, p. 4 nota.

accogliere con qualche riserva, perchè: 1.° nulla assicura che gli Arabi non abbiano mutilato il testo di EUCLIDE, sospetto questo che vien rafforzato osservando che nei manoscritti arabi non si rinvengono proposizioni citate da PROCLO; 2.° la tradizione di questi manoscritti risale ad un'epoca non più antica di quella a cui giungono i mss. greci. Non si hanno dunque finora decisive ragioni di preferenza per le redazioni di fonte orientale; per concludere se tali ragioni esistano, sarebbe opportuno che anche i matematici non orientalisti giungessero a conoscerne le principali, onde è degna di encomio la pubblicazione e traduzione della più antica fra esse, che venne ai dì nostri intrapresa (1).

A queste poche notizie intorno alla storia del testo degli *Elementi* (storia che, si può dire, abbia oggidì una letteratura sua propria) dobbiamo qui limitarci e rimandiamo il lettore desideroso di maggiori particolari all'eccellente edizione critica che di essi possediamo (2) e specialmente ai *Prolegomena* con cui si apre l'ultimo volume di essa. — Nè crediamo di doverci diffondere ad enumerare e descrivere le principali edizioni e versioni di EUCLIDE perchè, così facendo, abbandoneremmo la storia per la bibliografia (3)

---

(1) BESTHORN et HEIBERG, *Codex Leidensis* **399,1** *Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschhadschii cum commentariis, Al-Narizii. Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt,* I, 1 (Hauniae, 1893). I, 2 (Id., 1897), II, 1 (Id., 1900), II, 2 (Id., 1905) III, 1 (1910). Dal primo fascicolo di questa pubblicazione rese conto H. KÜNSSBERG in *Göttingische gelehrte Anzeigen,* 1893, p. 828-846; dei due primi H SUTER in *Zeitschr. für Math. und Phys.,* T. XXXVIII, 1893, p. 191-194 e T. XLIV, 1899, p. 58-60.

(2) *Euclidis Opera Omnia ediderunt,* I. L. HEIBERG et H. MENGE, Lipsiae, Vol. I, 1883, Vol. II, 1884, Vol. III, 1886, Vol. IV, 1885, Vol. V, 1888. Una parte degli *Elementi* fu tradotta in tedesco da M. SIMON servendosi della lezione heiberghiana (v. *Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Mit Benutzuug der Texausgabe von Heiberg.* Abh. zur Gesch. der Math., XI Heft, 1901); la intera opera fu tradotta in inglese da T. L. HEATH (*The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with Introduction and Commentary,* Cambridge, 1908), ed in danese da THYRA EIBE (*Euklids Elementer,* Köbenhavn, 1897-1912).

(3) Chi desiderasse sopperire al nostro silenzio ricorra alle opere seguenti (oltre a quelle dianzi citate): KÄSTNER, *Geschichte*

o saremo trascinati a trattare un tema, per fermo assai interessante, ma che ci allontanerebbe dall'assunto nostro, a descrivere cioè gli sforzi fatti dai vari popoli civili per passare dal Mare Morto dell'ignoranza in fatto di geometria al Giordano purificatore della verità (1).

Premesse queste notizie intorno al modo ed allo stato nei quali ci pervenne il testo degli *Elementi*, passeremo ad esaminare partitamente i tredici libri in cui quest'opera si divide. Nell'intraprendere questa disamina ci si affaccia il ricordo delle lodi sconfinate (2) e dei vituperi non rari di cui quell'opera venne fatta segno, delle opinioni disparatissime che vennero emesse sul suo valore intrinseco e didattico (3);

---

der Mathematik. Göttingen 1796-1800. GARTZ, *De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis schediasma historicum.* Halae 1823; WENRICH, *De auctorum graecorum versionibus et commentariis syriacis, arabicis, persicisque commentatio.* Lipsiae, 1842; WÜSTENFELD, *Die Uebersetzungen arabischer Werke in das Lateinische* (Abh. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1877, Hist.-phil. Klasse, XXII Bd.); WEISSENBORN, *Die Uebersetzungen des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische durch Adelard von Bath* (Abh. zur Gesch. der Math., III Heft, 1880); ENESTRÖM, *Notice bibliographique sur les versions en suédois des Eléments d'Euclide* (Bullettino di Bibliografia, ecc., T. XVIII, 1885); HEIBERG, *Ein Palimpsest der Elemente Euklids* (Philologus, XLIV, 1885); STEINSCHNEIDER, *Euklid bei den Arabern* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., 1886, Hist.-Lit. Abt., p. 81-110); RICCARDI, *Saggio di una Bibliografia Euclidea* (Mem. dell'Accademia di Bologna, Serie IV, T. VIII e IX, Serie V, T. I e III); STEINSCHNEIDER, *Mischellen zur Geschichte der Mathematik* (Bibl. math., 1889, p. 36); HEIBERG, *Beiträge zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, II (Zeitschrift f. Math. u. Phys., 1890, Hist.-Lit. Abth., p. 48-58 e 81-100); SUTER, *Der V Band der arabischen Bücher der vice-königlichen Bibliothek in Kairo* (Zeitschrift f. Math. u. Phys., Hist.-Cit. Abth., 1893, p. 1-24 e 42-57); M. SIMON, *Ueber die Entwickelung der Elementen-Geometrie im XIX Jahrhundert.* Leipzig, 1906; S. A. CHRISTENSEN, *Studiet of Euclids Elementer in Danemark* (Festskrift til H. G. ZEUTHEN, Köbenhovn, 1909).

(1) Un gran numero di dati su questo importante argomento si trovano nel II Vol. delle *Vorlesungen* di M. CANTOR.

(2) Cfr. le prefazioni alle edizioni degli *Elementi* fatte da CLAVIUS, KEILL, GREGORY, FLAUTI, ecc.

(3) Si vegga il mio articolo *A. I. G. T.* nel T. V (1889) del *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario* e l'altro

siamo quindi assaliti dal timore che, nel nostro pur che sia giudizio, venga a nostra insaputa ad introdursi qualche elemento personale sufficiente ad offuscare l'imparzialità che è dote indispensabile in qualunque storico; epperò sentiamo il bisogno d'appoggiarci ad un codice per redigere qualunque opera matematica, da tutti accettato per tale, in grazia della sua indiscutibile eccellenza, quello cioè che B. PASCAL fece conoscere in alcune pagine del suo celebre saggio che tratta *De l'esprit géométrique* (1). Tenendone sempre presente gli articoli, passiamo a descrivere e criticare il contenuto degli *Elementi*.

9. - EUCLIDE dà principio al proprio insegnamento geometrico esponendo una serie di proposizioni, alcune delle quali servono a dichiarare il significato dei termini tecnici, altre lo autorizzano a compiere certe operazioni geometriche, di altre infine il lettore deve percepire la verità senza il sussidio di alcuna dimostrazione. Tale serie decomponesi, in conseguenza, in tre gruppi, di cui il primo comprende le

---

più esteso lavoro *Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell'insegnamento geometrico ele nentare* facente parte dell'VIII vol. (1893) della stessa raccolta.

(1) " *Règles pour les définitions:* 1. N'entreprendre jamais de définir aucune des choses tellement connues d'elles mêmes, qu'on n'ait point de termes plus clairs pour les expliquer. 2. N'omettre aucun des termes un peu obscurs et équivoques, sans définitions. 3. N'employer dans la définition des termes que de mots parfaitement connus, on déjà expliqués. — *Règles pour les axiomes:* 1. N'omettre aucun des principes nécessaires sans avoir demandé si on l'accorde, quelque clair et évident qu'il puisse être. 2. Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes d'elles mêmes. — *Règles pour le démonstrations:* 1. N'entreprendre de démonstrer aucune des chose qui sont tellement évidentes d'elles mêmes qu'on n'ait rien de plus clair pour les prouver. 2. Prouver toutes les propositions un peu obscures, et n'employer à leur preuve que des axiomes très-évidents ou des propositions déjà accordées ou démontrées. 3. Substituer toujours mentalement les définitions à la place des définis, pour ne pas se tromper par l'equivoque des termes que les définitions ont restreint „. *Oeuvres complètes de B. Pascal,* T. III, Paris, 1889, p. 178. È da notarsi che PASCAL aggiunge non essere strettamente necessario osservare la prima delle regole di ciascuna di queste tre categorie.

definizioni (Ὅροι), il secondo i *postulati* (Αἰτήματα) ed il terzo le *nozioni comuni* (Κοιναὶ ἔννοιαι).

Al primo gruppo si possono muovere alcune critiche che, essendo di qualche gravità, non possiamo passare sotto silenzio: I. Parecchie definizioni mancano di chiarezza e precisione; tali sono quelle (1ª, 2ª, 4ª, 14ª) di punto, linea in generale (1), linea retta e figura; sembra anzi che EUCLIDE stesso lo abbia avvertito, giacchè le def. 3ª e 6ª, non potendo considerarsi per definizioni di punto e retta, dal momento che dell'uno e dell'altra parlano già le def. 1ª e 4ª, devono riguardarsi come ulteriori chiarimenti necessari all'intelligenza di queste ultime. Resta così nello stesso tempo avvertito che EUCLIDE — al pari di alcuni suoi contemporanei, cultori di altre discipline — non era sempre in grado di discernere la vera natura logica delle proposizioni assunte come fondamentali. II. Alcune definizioni furono giudicate superflue (2), mentre altre includono certi teoremi o ne esigono la conoscenza. Ad es. la def. (10ª) di angolo retto presuppone la costruzione della perpendicolare (prop. 10ª e 11ª del I Libro), chè altrimenti non si è certi dell'esistenza di un tale angolo; invece la 17ª abbraccia il teorema — di TALETE (L. I, n. 7) — che afferma ogni diametro bisecare un cerchio e la circonferenza; similmente dicasi della definizione (23ª) di rette parallele; d'altronde la classificazione dei triangoli in base alla grandezza degli angoli, affinchè abbia valore e sia riconosciuta per esauriente, esige la previa conoscenza di non pochi teoremi. III. La forma in cui vengono enunciate le definizioni è scelta con criteri variabili e non è sempre pregevole; così, mentre il centro di un circolo è definito (def. 16ª) separatamente dal circolo stesso (def. 13ª) e dal semicircolo (def. 18ª), una sola definizione (la 20ª) include le tre specie di triangoli in base alla lunghezza dei lati, un'altra (la 21ª) le tre specie di triangoli in base alla grandezza degli angoli, ed una terza (la 22ª) tutte

(1) Siccome tale definizione (" lunghezza senza larghezza ") venne criticata da ARISTOTELE (*Top.*, V, 5), vissuto un secolo prima di EUCLIDE, così è indiscutibilmente dimostrato che essa è pre-euclidea.

(2) Le def. 8ª e 13ª furono infatti soppresse da uno dei più reputati editori, R. SIMSON (1687-1768), e dai suoi imitatori.

le varie specie di quadrangoli (1). Si avverta di più (2) che EUCLIDE definisce il ῥόμβος, del quale non si occupa più in seguito, e il ῥομβοειδὲσ, quadrangolo che egli indicherà poi col nome di παραλληλογράμμον (3). — Tutto ciò induce a supporre che il testo da noi posseduto delle definizioni abbia più del resto subita l'influenza modificatrice dei ricopiatori, in generale più audaci nel ritoccare i preliminari che nel modificare i ragionamenti e le costruzioni, e consiglia di essere cauti nell'imputare ad EUCLIDE le imperfezioni che vi si trovano e non soverchiamente timidi nel toglierle. In particolare, nulla assicura che a ragione venga a lui fatto colpa (4) di avere raccolti in principio degli *Elementi* tutte le definizioni invece di distribuirle nel corso dell'opera (cfr. n. 20).

Questa circospezione, che riteniamo indispensabile nel pronunciarci intorno al primo gruppo di proposizioni preliminari, deve esserci compagna anche nell'esame degli altri due, chè, altrimenti, come non far discendere EUCLIDE dal piedestallo, su cui lo collocarono i suoi fautori, trovandosi di fronte a gravi incongruenze? Come, infatti, giustificarlo altrimenti di avere ascritto fra gli assiomi — dopo le tre proposizioni che accordano la facoltà di congiungere due punti con una retta, di prolungare indefinitamente una retta limitata e di descrivere un cerchio datine il centro ed

---

(1) Le necessità di modificare questo punto degli *Elementi* fu avvertita, come vedremo, fino dai tempi di ERONE Alessandrino.

(2) P. TANNERY, *Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide* (Bull. des Sc. math., Serie II, Vol. VIII, 1884, 1ère Partie, p. 162-175).

(3) Possiamo aggiungere a questo proposito che del *trapezio* — figura notissima agli antichi Egiziani (v. L. I, App. II) — EUCLIDE non parla; ma designa col nome di τραπέζια tutti i quadrangoli non aventi alcuna regolarità. Cfr.: PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 176; WEISSENBORN, *Das Trapez bei Euklid, Heron und Bhramegupta* (Abh. zur Gesch. der Mathematik, II Heft, 1879); HEIBERG, *Philologus,* XLIII, 1884, p. 480.

(4) " Neque enim natura initio sylvae omnium arborum radices praeposuit, nec architectus initio civitatis omnium aedificiorum fundamenta collocavit, sed suis arboribus suas radices natura, suis edificiis sua fundamenta architectura subjecit. Itaque debuerat Euclidis definitiones trianguli triangulorum doctrinae praeponere; eamque viam in caeteris principiis servare „. P. RAMUS, *Schol. mathem.,* Basil., 1569, p. 98.

il raggio, proposizioni che determinano completamente le operazioni geometriche lecite (1) — l'eguaglianza di tutti gli angoli retti e poi il celebre postulato delle parallele? Per ragioni già addotte, non insisteremo nel criticare EUCLIDE di avere equiparate queste due proposizioni alle tre precedenti; ma è possibile non rilevare che egli pose al medesimo livello uno scoglio, contro cui vennero a urtare i più esperti piloti — la celebre *crux geometrica* degli *Elementi* (2) — ed uno che ogni principiante è capace di evitare, come, quindi, non sentirsi trascinati ad accettare l'ipotesi di D. GREGORY (1661-1710) secondo cui EUCLIDE in origine avrebbe messo il postulato delle parallele come corollario alla proposizione 28ª del I libro? — Importa da ultimo rilevare (3) come EUCLIDE, oltre alle tre operazioni dianzi indicate nel corso delle sue ricerche ritenga lecito di determinare i punti (dato che esistano) comuni o a due rette, o a una retta

---

(1) EUCLIDE ritenne doveroso di enumerarle completamente perchè, come opina lo ZEUTHEN (*Die Lehre der Kegelschnitte im Alterthum,* Kopenhagen, 1886, p. 271) prima erano ammesse ancora altre operazioni? Senza pronunciarci al riguardo osserviamo che la riduzione a due (riga e compasso) degli istrumenti concessi al geometra si dovrebbe ritenere dovuta a PLATONE, se si accetta l'interpretazione data da H. HANKEL (*Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter,* Leipzig, 1874, p. 156) per le parole (cfr. L. I, n. 62) con cui egli condanna le soluzioni meccaniche dei problemi geometrici. Riguardo all'invenzione del compasso, OVIDIO afferma (*Metam.,* VIII, p. 247-249), che DEDALO, il mitico rappresentante di ogni sorta di strumenti,

> Anch'ei primier due ferree lastre in nodo
> Giunse; onde egual fatto del raggio in metro,
> Stesse una punta: e dasse l'altra il cerchio.

La versione metrica adoperata qui è quella di GIUSEPPE SOLARI, Genova, 1814.

(2) " Se una retta, cadendo su due altre, forma gli angoli interni dalla stessa parte minori in somma di due retti, queste rette prolungate s'incontreranno dalla parte in cui gli angoli stessi sono in somma minori di due retti „.

(3) Cfr. H. SCHUBERT, *Die Quadratur des Zirkels in berufenen dun unberufenen Köpfen.* Hamburg, 1889, p. 12-13.

e una circonferenza o a due circonferenze (1); ma a torto egli si credette dispensato dall'enunciarli accanto ai tre surriferiti.

Nelle stesse, se non in peggiori, condizioni ci troviamo di fronte al terzo gruppo di proposizioni preliminari (2). Nella prima di esse è enunciata la proprietà fondamentale dell'eguaglianza (se $a = b$ e $a = c$, è pure $b = c$) e nelle due successive l'univocità dell'addizione e della sottrazione (se $a = b$ e $c = d$ è pure $a \pm c = b \pm d$); ad esse tien dietro una che si sospetta essere stata interpolata (se $a \gtrless b$, $c = d$ sarà $a + c \gtrless b + d$), poi l'affermazione dell'eguaglianza dei doppi di cose uguali, a cui un commentatore aggiunse (desumendola forse da un passo di una dimostrazione ove era applicata) l'eguaglianza della metà di cose uguali. Dopo questa collezione di verità, il cui scambievole legame è evidente (3), si trovano due altre proposizioni una geometrica (che, secondo G. VERONESE, sarebbe una definizione (4) affermante l'eguaglianza di due cose coincidenti (cfr. anche più avanti p. 209), l'altra generale affermante essere differenti il tutto ed una parte. Sono anch'queste interpolate? Non si può affermarlo; solo è opportuno rilevare sino da ora che, in uno scritto attribuito ad ERONE Alessandrino, ne è propugnata la soppressione. Ancor più probabile è che un commentatore abbia estratto dalla dimostrazione della prop. 4ª del Libro I quella che dice « due rette non comprendono uno spazio » e, introducendola fra le nozioni comuni, abbia dato un complemento necessario alla definizione di retta (5): ammesso ciò EUCLIDE avrebbe

(1) Notiamo col KEMPE, *How to draw a Straight Line?* Londo 1877, p. 47 e seg., che la seconda si può ridurre alla prima se vendosi della terza.

(2) Ricordiamo al lettore che noi ci riferiamo sempre all'e dell'HEIBERG, dalla quale sono soppresse non poche nozio comuni che altri editori ritennero invece per euclidee.

(3) Certe edizioni contengono altre nozioni che sembrano a giunte " per analogia „ da ricopiatori.

(4) *Fondamenti di geometria*, ecc. Padova, 1892, p. 54 nota.

(5) Perchè così resta assodato che due punti individuano u retta.

posta in non cale la prima delle regole di PASCAL sugli assiomi (1).

10. - I tre postulati di costruzione richiesti da EUCLIDE impongono al geometra di ricondurre ad una combinazione delle tre uniche operazioni lecite tutte le altre costruzioni geometriche. Le più semplici fra queste consistono nel condurre, a partire da un punto dato, una retta di lunghezza conosciuta e nel tagliare da una data retta limitata una parte eguale ad una retta data, minore della precedente; e siccome se ne ha bisogno continuamente, così di esse si occupa EUCLIDE in principio degli *Elementi*, dopo avere insegnata la costruzione di un triangolo equilatero di dato lato, che gli è necessaria nel corso della soluzione de' citati problemi. Nel seguito del I Libro EUCLIDE espone una serie di proprietà dei parallelogrammi e dei triangoli, intercalando fra essi la soluzione di alcuni problemi, col mezzo dei quali egli si pone in grado di non adoperare alcuna costruzione che non abbia dianzi insegnato ad eseguire. Le proprietà citate si riferiscono o a triangoli speciali (5^a e 6^a) (2) o a triangoli qualunque (16^a-18^a, 20^a, 21^a e 32^a); trattano del confronto fra triangoli (7^a, 24^a e 25^a) o in particolare dei casi di eguaglianza (4^a, 8^a e 26^a) (3); riflettono gli angoli adiacenti od opposti al vertice (13^a-15^a), le parallele (27^a-30^a), i parallelogrammi (32^a-34^a) ed aggiungeremmo il *gnomone* (43^a) ove non ricordassimo che questa figura è definita soltanto nel Libro II degli *Elementi*. Dell'uguaglianza di due

(1) La questione dell'autenticità dei prolegomeni agli *Elementi*, che noi abbiamo soltanto sfiorata, venne trattata diffusamente da P. TANNERY (nella memoria citata a p. 202), dall'HEIBERG (ed. cit., T. V, p. LXXXIX) e da P. MANSION, *Sur les postulats et les axiomes d'Euclide* (Annales de la Soc. scient. de Bruxelles, T. XIV, II Partie, p. 35-45). Il primo di questi scienziati sostenne l'impossibilità di attribuire ad EUCLIDE le *nozioni comuni* e l'ultimo che i sei *postulati* ed i nove *assiomi* debbono attribuirsi a lui. Per altre osservazioni sullo stesso tema si vegga poi: W. K. CLIFFORT, *The postulates of the Science of space* in *Lectures and Essays*, Vol. I, London, 1875, p. 295-340; F. LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie* von A. CLEBSCH, II Bd., I Thl., Leipzig, 1891, p. 540-558; H. G. ZEUTHEN, *Forelaesnig over Mathematikenshistorie*, Kjobenhavn, 1893, p. 100-122 (trad. ted., 1896, p. 115-138; tr. franc. 1902, p. 94-114).

(2) Come sappiamo la prima è dovuta a TALETE (L. I, n. 7).

(3) L'ultima è forse dovuta a TALETE (L. I, n. 8).

parallelogrammi trattano le prop. 35ª e 36ª, dell'equivalenza di due triangoli le 37ª-40ª e del confronto di un parallelogramma con un triangolo la 41ª. Invece i problemi citati (di due dei quali la soluzione era già nota ad OINOPIDE; v. L. I, n. 33) hanno per iscopo di bisecare un angolo o una retta limitata (9ª, 10ª), di tracciare per un punto dato la perpendicolare o la parallela ad una retta data (11ª, 12ª, 31ª), di costruire un triangolo di dati lati (22ª), o un angolo di cui sia conosciuto il vertice e un lato (23ª), o un quadrato di dato lato (46ª) o finalmente di costruire un triangolo o un parallelogramma soggetti a certe condizioni.

Questo riassunto di un libro così conosciuto potrà sembrare superfluo a taluno; se non lo abbiano soppresso è perchè esso ci permette di osservare che, siccome detto libro ha l'aspetto piuttosto di una puddinga che di un cristallo, così è spontanea la domanda: quali criteri diressero EUCLIDE nello sceglierne e ordinarne la materia? *Quanto all'ordine*, è facile vedere che EUCLIDE si attenne fedelmente al precetto contenuto nella seconda delle regole per le dimostrazioni enunciate da PASCAL; è agevole convincersene esaminando una specie di tavola genealogica delle proposizioni del I Libro degli *Elementi*, compilata da uno strenuo campione del metodo euclideo (1). *Quanto alla materia*, è stata emessa l'ipotesi (2) che EUCLIDE siasi proposto nel I Libro degli *Elementi* di dimostrare rigorosamente ed in generale il teorema di PITAGORA, al quale dianzi si era giunti per induzione, attraverso a casi particolari; a sostegno di quest'ipotesi si osservi, anzitutto, che l'importanza eccezionale di quel teorema fu avvertita dai Greci, i quali (similmente a quanto facciamo noi) lo designarono ben presto con un nome speciale (3); si aggiunga che il I Libro degli *Elementi* chiudesi appunto con il teorema testè citato (4) ed il suo inverso (47ª-48ª) e che, tentando di appli-

(1) DODGSON. *Euclid and his modern Rivals* (II ed. London, 1885).

(2) Cfr. i pregevoli *Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik* von L. F. OFTERDINGER, Ulm, 1860, p. 2-3.

(3) Θεώρημα τῆς νύμφης: v. P. TANNERY, *La géom. gr.*, p. 105. La designazione *pons asinorum* era in uso fra i Romani.

(4) Ricordiamo (L. I, n. 26) che la dimostrazione che si legge negli *Elementi* appartiene ad EUCLIDE.

care ad esso il metodo di analisi geometrica, si ritrovano successivamente tutti i problemi e i teoremi (e persino le definizioni) esposte da EUCLIDE (1), distribuiti in tanti gruppi, ognuno formato di proposizioni fra loro strettamente legate, mentre i vari gruppi apparirebbero estranei fra loro ove non si tenesse conto della loro qualità comune di ausiliari nella dimostrazione del teorema di PITAGORA. A sostegno e complemento di questa ingegnosa congettura aggiungiamo (2) che se ne possono emettere di analoghe per mettere in evidenza la struttura intima dei libri successivi; si può, infatti, ritenere che il II Libro abbia per intento di generalizzare il teorema di PITAGORA a triangoli obliquangoli, mentre i quattro seguenti cospirerebbero a dimostrare la possibilità di sostituire, nel teorema stesso, ai quadrati sui lati, tre figure qualunque purchè fra loro simili (*Elementi*, VI, 31).

Quali metodi di dimostrazione abbia preferiti EUCLIDE riesce evidente leggendo gli *Elementi*, quelli, cioè, che con maggiore rapidità e rigore menano allo scopo (3). Fra essi spiccano il metodo di sovrapposizione e la riduzione all'assurdo; quello purgato da qualunque ingrediente meccanico, questo applicato quando era, per naturalezza e semplicità, superiore a qualunque altro; rileviamo anche, come affine a quest'ultimo, il *procedimento per esclusione*, col quale si costringe chi ascolta a riconoscere che la cosa non può essere diversa da quella che si è enunciata. Nè è da tacersi che le prime ventisei proposizioni sono indipendenti dal postulato sulle parallele e che parecchi teoremi del I Libro son collegati fra loro dalla legge delle reciproche (4).

---

(1) Escluse le prop. 42^a-45^a, a cui spetterebbe un posto nel II Libro.

(2) Queste osservazioni ci sembrano avere anche qualche valore didattico.

(3) Coloro che, per spiegare il procedere serrato delle argomentazioni di EUCLIDE, ripetono con CLAIRAUT, *Élements de Géométrie*, Paris, 1741, Pref. p. X-XI, che " ce géomètre avait à convaincre des Sophistes obstinés qui se faisaient une gloire de se refuser aux verités les plus évidentes; il falloit donc qu'alors la Géométrie eût, comme la Logique, le secours des raisonnements en forme, pour fermer la bouche à la chicane „, commettono un grave errore storico, chè due secoli circa separano i Sofisti da EUCLIDE.

(4) EUCLIDE non insegna però per ogni proposizione tutte

11. - La sostanza del I Libro d'EUCLIDE doveva essere nota nella scuola di Crotone. Altrettanto può ripetersi pel II Libro, che alcuni considerano per un commento al teorema di PITAGORA; tale libro, che è assai più breve del I, comincia con due definizioni alle quali seguono dieci proposizioni — che taluno (1) ammette per note agli Egiziani — di grande importanza come quelle che servono di base a quello speciale algoritmo (oggi denominato *algebra geometrica*) (2) mediante cui i Greci riuscirono a risolvere, senza il calcolo letterale, quei problemi che si traducono oggi in equazioni di primo e secondo grado, e battendo una via che ha il suo perfetto riscontro nei nostri procedimenti algebrici. Se si conviene di indicare con a, b, ... delle rette, con ab il rettangolo avente per lati le due rette a e b e con a^2 il quadrato di lato a, le proposizioni succitate si possono enunciare simbolicamente come segue:

$$m(a+b+c+\ldots)=ma+mb+mc+\ldots\ ;\ (a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2\ ;$$

$$(a+b)a=a^2+ab\ ;\ (a+b)^2=a^2+b^2+2ab\ ;\ ab+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\ ;$$

$$(2a+b)b+a^2=(a+b)^2\ ;\ (a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2\ ;$$

$$4(a+b)a+b^2=\left\{(a+b)+a\right\}^2\ ;\ a^2+b^2=2\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2\right\}\ (3);$$

$$(2a+b)^2+b^2=2\left\{a^2+(a+b)^2\right\}\ (4).$$

A suo tempo (L. V) vedremo come di esso TEONE SMIRNEO abbia fatto uso frequente nelle sue ricerche aritmetiche;

---

quelle che ad essa sono per tal modo collegate: v. cfr. lo squarcio del *Commento* di PROCLO citato al n. 4.

(1) G. J. ALLMAN, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublin, 1889, p. 37.

(2) Cfr. il n. 1 dell'*Appendice* al presente Libro.

(3) L'esplicita attribuzione di questa proposizione a PITAGORA ci è già nota (Lib. I, n. 24).

(4) Il primo che abbia ravvisato il substrato algebrico del II Libro degli *Elementi* è G. OUGHTRED (1574-1660), il quale nella sua *Clavis mathematica*, London, 1631, ne enunciò i teoremi mediante formole equivalenti a quelle da noi usate nel testo.

ma, intanto, rileviamo che il geometra del Museo le applica nelle quattro ultime proposizioni del II Libro degli *Elementi*, dalle quali s'impara un primo modo per dividere una retta in media ed estrema ragione (1) (14ª), o per trovare la media proporzionale fra due rette date (11ª), o per esprimere il quadrato del lato di un triangolo qualunque in funzione degli altri due lati (12ª e 13ª) (2).

12. - Nel III Libro EUCLIDE imprende lo studio dell'unica linea che ebbe accesso negli *Elementi*: la circonferenza. La materia di esso devesi, probabilmente, ai geometri del V sec. a. C. i quali, sforzandosi di determinare l'area del circolo, sopperirono alla mancanza di cognizioni su una figura a cui nella Scuola di PITAGORA erasi prestata poca attenzione (v. L. I, n. 52). Esso si apre con una serie di definizioni concernenti il circolo, le sue parti e le linee ad esso attinenti, definizioni di cui alcune non sono esenti da mende, che ora segnaleremo. Anzitutto la proposizione « due circoli aventi i diametri od i raggi eguali sono eguali » non merita il nome di definizione essendo corollario dell'assioma 7° del I Libro « due cose coincidenti sono eguali »; la sua presenza potrebbe però considerarsi come una conferma dell'ipotesi (v. n. 9) che quest'ultimo assioma sia stato aggiunto dopo di EUCLIDE. In secondo luogo la definizione (4ª e 5ª) di *corde egualmente* o *diseguamente distanti dal centro*, potevano venire soppresse introducendo la fondamentale nozione di distanza di un punto da una retta, che (il lettore lo apprenderà con meraviglia!) manca negli *Elementi*. In terzo luogo il definire per « simili » i segmenti circolari che contengono angoli eguali è lecito soltanto dopo avere dimostrata l'eguaglianza di tutti gli angoli inscritti in un medesimo segmento.

Il III Libro insegna le proprietà delle corde di un circolo

(1) Questo modo di divisione non è però designato con un nome speciale che nel IV Libro degli *Elementi*.

(2) A partire dal II Libro i manoscritti recano, per certe proposizioni, doppie dimostrazioni di origine incerta (cfr. HEIBERG nei *Prolegomena* della sua ediz. di EUCLIDE p. LXXIX del T. V), le quali sono registrate nelle migliori edizioni degli *Elementi*. Le propos. del II Libro che sono in tale condizione recano i numeri 4, 7, 8 e 9.

(2^a-4^a, 14^a-15^a, 28^a-29^a), le relazioni di posizione fra due cerchi (5^a-6^a, 10^a-13^a), il modo di confrontare le lunghezze delle congiungenti un punto con i vari punti della periferia di un cerchio posto con quel punto in un piano (7^a-9^a) e a risolvere in conseguenza dei problemi di massimo e minimo. Alle tangenti si riferiscono le prop. 16^a, 18^a e 10^a, di cui la prima ha dato origine, nel periodo di preparazione al calcolo infinitesimale, a discussioni interminabili sull'*angulus contingencie* (1); degli angoli col vertice nel centro o sulla periferia o formati da una tangente ed una corda si occupano le prop. 20^a-21^a, 26^a-27^a e 31^a-32^a, di segmenti circolari le 23^a-24^a, mentre dalla 22^a si apprende la proprietà caratteristica del quadrangolo inscritto in un cerchio. Termina il III Libro un gruppo di tre teoremi, che formano oggi la base della *teoria della potenza di un punto rispetto ad un cerchio;* EUCLIDE li dimostra applicando le proposizioni di algebra geometrica esposti nel Libro precedente ed alcune precedenti proposizioni del III Libro. Da ciò si potrebbe essere indotti a pensare che EUCLIDE abbia riunite in questo tutte le proposizioni necessarie per giungere alla suddetta terna di teoremi; noi però preferiamo ritenere che ivi EUCLIDE abbia esposte tutte le proprietà del circolo, che sono indipendenti dalla teoria delle proporzioni (2).

Nel III Libro EUCLIDE si serve non di rado, come nel I, del metodo apodittico quando (prop. 2^a-4^a, 5^a-6^a, 10^a-13^a, 16^a-22^a) si tratti di porre in luce la verità di proposizioni negative o di assodare col ragionamento teoremi di verità intuitiva. Nè egli manca di insegnare a trovare il centro di un dato cerchio (1^a), a tracciare la tangente in un punto di un dato cerchio (17^a), a determinare il cerchio di cui fa parte un dato segmento (25^a), a bisecare un arco (30^a) e a costruire un segmento circolare soddisfacente a date condizioni (33^a-34^a).

13. - I medesimi metodi adoperati nel III Libro servono al nostro autore nel successivo per risolvere alcuni problemi relativi all'inscrizione (sottinteso *in un cerchio*) e alla cir-

(1) CANTOR, *Vorlesungen,* T. II passim. G. VIVANTI, *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica.* Mantova, 1894, p. 20-28.

(2) Sono munite di doppia dimostrazione le prop. 10^a 11^a e 31^a.

coscrizione (sottinteso *ad un cerchio*) di poligoni. Da tutto il contesto emerge che EUCLIDE sapeva esistere per ogni poligono regolare un cerchio inscritto ed uno circoscritto, ma egli non dimostra in generale nè una cosa nè l'altra; similmente il corollario alla prop. 15ª mostra come a lui non fosse sfuggito che le tangenti ne' vertici di un poligono regolare incritto formano un altro poligono regolare, ma neanche questa proposizione viene da lui dimostrata in generale. Prescindendo dai problemi 1° e 10°, che sono veri lemmi, i problemi trattati nel IV Libro concernono l'inscrizione e la circoscrizione di un triangolo avente dati angoli (prop. 2ª e 3ª) — in particolare di un triangolo equilatero (4ª-5ª) —, di un quadrato (6ª-9ª), di un pentagono, di un esagono o di un pentedecagono (1) (11ª-16) regolari. Delle molteplici conseguenze che si potrebbero trarre dalle costruzioni esposte — costruzioni che probabilmente non erano tutte ignote ai Pitagorici, che si occuparono con amore di poligoni e di poliedri regolari (2) — gli *Elementi* contengono due sole: una, la quale insegna che il centro del cerchio circoscritto a un triangolo è esterno, appartenente al perimetro od interno secondochè il triangolo è ottusangolo, rettangolo o acutangolo, l'altra donde si apprende essere il lato dell'esagono regolare inscritto eguale al raggio (cfr. L. I, Appendice I, p. 2). Giova anche notare qui che, secondo un antico scolio (3), in questo Libro — che sarebbe invenzione dei Pitagorici — si dimostra che « la periferia del circolo è maggiore del triplo del diametro » e che « il cerchio non è i tre quarti del triangolo (regolare) ad esso circoscritto » (4).

14. - Esaurita, così, tutta la parte della geometria elementare che è indipendente dal concetto di misura, nel V Libro degli *Elementi* EUCLIDE getta le basi di una teoria delle quantità proporzionali, *per grandezze qualunque* (5);

---

(1) In base all'identità

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{15}.$$

(2) L. I, n. 22-24.

(3) *Euclidis Opera omnia,* Vol. V, p. 272, n. 2.

(4) Chi lo credeva?

(5) Cfr.: HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum u. Mittelalter.* Leipzig, 1874, p. 689-98; OFTERDINGER, *Ueber den Zu-*

quanta circospezione fosse necessaria nell'esporre tale teoria con pieno rigore e completa generalità, sì da potersi applicare anche a grandezze irrazionali, non fa mestieri dimostrare; quanto felicemente abbia vinte le difficoltà relative Eudosso da Cnido, al quale, come sappiamo (L. I, n. 71) si deve la primitiva redazione del V Libro degli *Elementi*, si desume osservando che, malgrado le critiche acute e reiterate a cui venne sottoposto (1), malgrado gl'innumerevoli sedicenti miglioramenti che furono ad esso proposti (2), la generalità dei dotti fa eco alle seguenti parole del Simson: « nihil extare in toto elementorum operae proportionali doctrina subtilius inventum, solidius stabilitum, accuratius pertractatum » (3).

Come è facile immaginare, il Libro V si apre con una serie di definizioni degli enti da studiare. Oltre a quelle di grandezza *parte* (μέρος) o *multipla* (πολλαπλάσιον) *di un'altra*, troviamo la definizione di *ragione* (λόγος) fra due grandezze della stessa specie (4) e poi quella di grandezze aventi fra

---

sammenhang der Euclidischen Lehre von den geometrischen Verhältnissen mit den Anfängen der Exhaustions-Methode. Ulm, 1889; Peano, *Les propositions du cinquième Livre d'Euclide reduites en formules.* Mathésis, T. X; Zeuthen, *Forelaesning* citate.

(1) V, ad es. I. Barrow, *Lectiones Mathematicae XXIII in quibus principia matheseos generalia exponuntur,* 1653 (The Mathematical Works of Isaac Barrow, edited by the Trinity College by W. Whewell, Cambridge, 1860, p, 15-23).

(2) I più rinomati, se non i più radicali, sono quelli esposti nel *Quinto Libro degli Elementi di Euclide ovvero Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo da* Vincenzo Viviani. Firenze, 1674.

(3) " Si ammette „, osserva M. Simon a p. 256 della sua *Geschichte der Mathematik im Alterthum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte,* Berlin, 1909, " che gli Ellèni non abbiano visto nell'irrazionale alcun numero, ma dal V Libro degli *Elementi* di Euclide emerge indiscutibilmente che essi possedevano il concetto di numero in modo completo (e che quasi raggiunse la precisione che si trova in Weiertrass) e che Eudosso, come Euclide, nel rapporto di due grandezze omogenee scorgeva niente altro che un numero „.

(4) Tolta forse a Democrito (v. L. I, n. 35) ed aspramente criticata dal Ramus, che la giudicò " insignificantem et satis ineptam „ (*Schol. mathem.*, Basil., 1569); Camerer (nella sua edizione di Euclide, Berlino, 1825) e Hankel (op. c., p. 359) la considerano per interpolata.

loro una ragione (1). E poichè il concetto di « ragione » è da EUCLIDE esposto in modo tanto nebuloso che non potrebbe condurre ad alcun risultato esatto, così egli si affretta a renderne possibile l'applicazione alla matematica col definire (def. 5ª) l'eguaglianza di due ragioni (2). L'eguaglianza di due ragioni guida alle nozioni di grandezze *proporzionali* (ἀνάλογα) e di *proporzione* (ἀναλογία); ora è notevole che questa non viene definita, solo si osserva (def. 8ª) che essa non può aver luogo fra meno di tre grandezze. Definite poi le ragioni *duplicata* (διπλάσιος) e *triplicata* (τριπλάσιος) *rispetto a una data* e le grandezze *corrispondenti* (ὁμόλογα), si considerano le ragioni *permutata* (ἐναλλὰξ) ed *inversa* (ἀνάπαλιν) di una data e quindi le operazioni di *composizione* (σύνθεσις), *sottrazione* (διαίρεσις) e *conversione* (ἀναστροφὴ); e la serie delle definizioni si chiude con quelle di *eguaglianza in ragione ordinata* (δι' ἴσου λόγος) o *perturbata* (τεταραγμένη ἀναλογία), cui dà luogo la considerazione di parecchi rapporti.

Tali definizioni vengono applicate nel corso del V Libro a far conoscere le proprietà più essenziali delle ragioni (3), le modificazioni che è lecito far subire ai termini di una ragione senza alterarla, le ulteriori conclusioni che si possono trarre dall'eguaglianza di due ragioni, quando siano già note relazioni fra alcune delle grandezze considerate, i procedimenti per dedurre una proporzione da altre, le più salienti proprietà delle grandezze proporzionali, e simili (4). Per dimostrare queste proposizioni EUCLIDE rappresenta le grandezze considerate col mezzo di segmenti

---

(1) Questa ha per effetto di restringere a grandezze omogenee il confronto necessario per determinare una ragione.

(2) Indicando con $r(a, b)$ la ragione di a a b, EUCLIDE dice essere

$$r(a, b) = r(c, d)$$

se, qualunque siano i numeri M e N, da $Ma \lessgtr Nb$ segue in corrispondenza $Mc \lessgtr Nd$.

(3) Notiamo, ad esempio, che EUCLIDE (od EUDOSSO) avvertì la necessità di dimostrare come dalla definizione di eguaglianza di due ragioni risultasse essere eguali due ragioni eguali ad una terza.

(4) La prop. 19ª ha due dimostrazioni.

rettilinei, ma le sue argomentazioni sono tanto generali che possono applicarsi a qualsivoglia classe di grandezze geometriche (1), quali sarebbero i rettangoli di data altezza, gli angoli di dato vertice o gli archi di una data circonferenza (2).

15. - Le teorie esposte nel Libro V ricevono subito una importantissima applicazione nel successivo, destinato a far conoscere i rudimenti di una teoria che, benchè costituita in gran parte di verità che saranno state intuite non appena si ebbe il concetto di forma di un oggetto indipendente della sua grandezza e che, quindi, saranno state note ai primi geometri greci, TALETE e PITAGORA (3), tuttavia, per venire solidamente stabilita, ebbe bisogno del genio di EUDOSSO da Cnido: intendiamo parlare della teoria della similitudine di figure piane. Com'è naturale il Libro VI comincia con una definizione di *figure simili:* definizione che lascia molto a desiderare, perchè non tutte le condizioni ivi enumerate per la similitudine di due figure sono fra loro indipendenti (4); segue ad essa la definizione della divisione in media ed estrema ragione (5), e finalmente una di *altezza di una figura*, nella quale è dimenticata la terza delle regole di PASCAL, perchè ivi è usata la nozione di *base di una figura*, non esposta prima nè poi (6).

Le proposizioni estreme (1ª e 33ª) del libro in discorso hanno fra loro una certa analogia, facendo conoscere l'una la proporzionalità alle basi di triangoli o parallelogrammi aventi la stessa altezza, l'altra la proporzionalità degli an-

---

(1) " In libro quinto „, osserva infatti il GREGORY, " quantitates literis designatae non magis debent esse lineae, quam aliae quaevis magnitudines „.

(2) Di tale circostanza ha tratto profitto assai opportunamente E. BERTINI nell'opuscolo: *Euclide, libro quinto.* Torino e Roma, 1880.

(3) Cfr. L. I, n. 9 e 21.

(4) LEGENDRE, *Eléments de géométrie,* note I (XV ed., Paris, 1862, p. 275-76).

(5) Come questa divisione si possa eseguire, fu già insegnato, una prima volta, nel II Libro.

(6) Alcuni codici contengono una quinta definizione, ma essa sembra un'aggiunta posteriore: cfr. le ed. di SIMSON e di HEIBERG, nonchè HANKEL, l. c., p. 399.

;oli al centro agli archi intercetti. Fondamentale è la 2ª a torto attribuita spesso a TALETE; v. L. I. n. 9) ed importantissima è la generalizzazione del teorema di PITAGORA contenuta nella prop. 31ª di cui abbiamo già fatto cenno a pag. 207. Le condizioni di somiglianza di due triangoli si apprendono dalle prop. 4ª-7ª e 32ª, le relazioni fra parallelogrammi equivalenti ed equiangoli dalle 14ª e 15ª, mentre le 16ª-17ª e 22ª insegnano relazioni geometriche fra quattro rette proporzionali e le 19ª-11ª la decomponibilità di due poligoni simili in un egual numero di triangoli simili e l'essere simili due poligoni simili ad un terzo; finalmente (per tacer d'altro) le 24ª-26ª possono designarsi per un complemento al teorema del gnomone (*Elementi*, L. I, p. 42), e la 27ª come risolutrice di un problema di massimo, di quello, cioè, in cui si cerca il massimo dei parallelogrammi isoperimetri ed equiangoli (1).

Delle proprietà delle figure simili dimostrate nel VI Libro, EUCLIDE fa nello stesso applicazione ad alcuni problemi, quali sarebbero la divisione di una retta in parti aventi dati rapporti (9ª-10ª), la ricerca (11ª, 12ª, 13ª) della terza, quarta o media (cfr. *Elem.*, II, p. 11) proporzionale, la costruzione su una data retta di una figura simile ad una data (15ª) e la divisione (30ª) di una retta in media ed estrema ragione (cfr. *Elem.*, II, p. 14). Ancora più importanti sono le questioni (provenienti tutte dalla scuola di PITAGORA) 25ª, 28ª e 29ª (2), di cui la prima insegna a « costruire una figura simile ad una seconda ed equivalente ad una terza » mentre le due altre sono i *problemi di applicazione di aree*, sotto la loro forma più generale; esse hanno per iscopo di « applicare ad una retta data un parallelogrammo equivalente ad una data figura rettilinea e deficiente o eccedente di un parallelogramma simile ad un parallelogramma dato »;

---

(1) Riguardo alla forma del VI Libro, si può notare che ivi EUCLIDE ritenne lecito di riunire in un solo enunciato una proposizione e la sua inversa, cosa che aveva evitato dianzi.

(2) Cfr.: V. FLAUTI, *Gli Elementi di Euclide*, XI ed., Napoli, 1827, p. 512-526; L. MATTHIESSEN, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen*. Leipzig, 1878, p. 928-930; A. FAVARO, *Notizie storico-critiche sulla teoria delle equazioni* Mem. della R. Acc. di Modena, vol. XVIII, 1878, p. 132-33).

data, dunque, una retta $AB = a$ si tratta di trovare un punto X di essa o del suo prolungamento tal che, condotti tre segmenti equipollenti AA', BB', XX' risulti il parallelogramma $AXX'A'$ di data area e il parallelogramma $BXX'B'$ simile ad uno dato. Se, quindi, di quest'ultimo si indica con λ il rapporto dei lati BB' e BX e con φ l'angolo $B'BX$, mentre con S s'indica la superficie data, i problemi citati si traducono nell'equazione di secondo grado:

$$\lambda\, x\,(a \pm x)\,\text{sen}\,\varphi - S = 0\,:$$

si vede, pertanto, che essi porgono la soluzione geometrica delle equazioni quadratiche generali (1).

16. - I tre libri seguenti trattano l'aritmetica razionale, ossia gli elementi dell'aritmetica superiore, della chimica dei numeri (per usare la bellissima espressione del KUMMER). Le proposizioni dimostrate da EUCLIDE non furon certo trovate tutte da lui, anzi è probabilissimo che la loro scoperta si debba fare risalire a PITAGORA od ai suoi discepoli: ma il seguire passo passo lo sviluppo dell'aritmetica dei Greci da PITAGORA ad EUCLIDE è un'impresa che non si può oggi tentare con probabilità di riuscita; in conseguenza ci è forza restringerci a riassumere brevemente il contenuto dei tre libri citati (2), dopo avere ricordato che i metodi di dimostrazione si fondano sulla stessa rappresentazione dei numeri mediante segmenti della quale il geometra Alessandrino seppe (cfr. p. 208) già profittare nel Libro II.

Per *numero* (ἀριθμός) EUCLIDE intende una collezione di *unità* (μονὰς), onde per lui un numero è un intero positivo;

---

(1) Cfr. L. I, n. 24 ove sono esposte le soluzioni analoghe delle equazioni di secondo grado, in cui il quadrato dell'incognita ha per coefficiente l'unità.

Le prop. 20ª, 27ª, 30ª, 31ª, 33ª sono dimostrate in due modi.

(2) Cfr. sullo stesso argomento: E. S. UNGER, *Kurzer Abriss der Geschichte der Zahlenlehre von Pythagoras bis auf Diophant.* Erfurt, 1843, p. 7-9; I. H. T. MÜLLER, *Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker.* Wiesbaden, 1860; H. HANKEL, op. cit., p. 392 e seg.; F. MÜLLER, *Historisch-etymologische Studien über mathematische Terminologie,* Berlin, 1887; P. PEANO, *Sommario dei Libri VII, VIII e IX di Euclide* (Rivista di Matematica, T. I, 1891, p. 10-12); ecc.

dati, quindi, due numeri qualunque, o uno è un multiplo dell'altro o il loro rapporto è una frazione; se, in particolare, si confronta un numero qualunque, col numero 2, si arriva alle nozioni di numero *pari* (ἄρτιος) e numero *dispari* (περισσὸς) (1). Fra i numeri dispari sono notevoli quelli che non hanno divisori, sono i numeri *primi* (πρῶτος) detti anche *lineari*; tutti gli altri si dicono composti (σύνδετος). Confrontando, poi, fra loro due numeri qualisivogliano si arriva al concetto di numeri *primi relativi*. La moltiplicazione di due numeri (operazione di cui EUCLIDE dimostra la proprietà commutativa nella prop. 16ª del libro VII) genera i numeri *piani* (ἐπίπεδος) ed in particolare i *quadrati* (τετράγωνος), i numeri *solidi* (στερεός) ed in particolare i *cubi* (κύβος); il confronto di due numeri piani o solidi mena all'idea di numeri *simili* (ὅμοιοι) (2) ed il confronto di un numero con la somma dei suoi divisori a quella di numero *perfetto* (τέλειος) (3).

Tutte queste definizioni e le altre con cui si apre il VII Libro sono necessarie e sufficienti allo svolgimento delle due teorie a cui questo si può ritenere consacrato: teoria della divisibilità (compresa quella del massimo comun divisore e del minimo multiplo) e teoria delle proporzioni. Riguardo alla prima teoria ci limitiamo a osservare come, tanto i teoremi esposti da EUCLIDE, quanto la sostanza de' suoi ragionamenti, passarono senza modificazione nei trattati moderni e ricevettero in parte notevoli estensioni (4). Riguardo alla seconda rileviamo che essa comprende proposizioni sui numeri, le quali sono incluse in altre dimostrate nel V Libro per grandezze qualisivogliano; per ispiegare questa ri-

---

(1) Prima di EUCLIDE si definiva come *dispari* un numero differente di 1 da un numero *pari;* tale definizione fu combattuta da ARISTOTELE nella *Topica.*

(2) Le proprietà dei numeri quadrati, cubi, piani, solidi, ecc. appartengono a quella disciplina che ZEUTHEN chiama (*Forelaesning*, p. 35-38) *aritmetica geometrica.*

(3) È *perfetto* un numero che sia eguale alla somma de' suoi divisori escluso sè stesso.

(4) Valga come esempio la ricerca del massimo comune divisore, che fu estesa al caso di due quantità qualunque da EUCLIDE stesso (*Elementi,* Libro X, prop. 3ª-4ª) e al caso di due funzioni algebriche razionali intere dai matematici moderni.

petizione si è invocata da taluno la ripugnanza di EUCLIDE all'arrecare mutazioni alle opere altrui (v. n. 4, chiusa), la quale si sarebbe manifestata a proposito dei Libri VII-IX dovuti per la massima parte ai Pitagorici (1); si è invocata da altri la tendenza di EUCLIDE ad evitare l'uso di principi generali, la quale lo avrebbe sconsigliato dal dedurre dal V Libro molte poposizioni dei tre successivi colla semplice osservazione — di cui fa cenno ARISTOTELE (*Anal. post.* I) — che « un numero è una particolare grandezza »; comunque si spieghi il fatto indicato, non si può per fermo asserire che ad EUCLIDE sia sfuggito l'intimo legame esistente fra il V Libro degli *Elementi* ed il VII (2).

17. - Chi percorre l'VIII Libro degli *Elementi* non penerà a riconoscere che naviga in un mare comunicante per molteplici stretti con quello in cui trovavasi veleggiando nel VII. Esso, infatti, contiene una buona collezione di teoremi sulle serie di numeri proporzionali (o, per dirla alla moderna, sulle progressioni geometriche). Siccome sono scomparsi dalle moderne trattazioni di tale argomento, così, per chiarirne l'indole, citiamo i seguenti:

Se quantisivogliano numeri sono successivamente proporzionali ed i loro estremi sono fra loro primi, essi sono i minimi aventi fra loro la stessa ragione; e se il primo non misura il secondo, nessuno di essi misurerà il consecutivo (proposizioni 1ª e 7ª). Se fra due numeri cade un certo numero *N* di numeri successivamente proporzionali, altrettanti ne cadranno fra due numeri aventi la medesima ragione (prop. 8ª). Nelle stesse ipotesi e se di più i due numeri considerati sono fra loro primi, fra l'unità e ciascuno cadranno pure *N* numeri successivamente proporzionali (prop. 9ª); e se viceversa fra 1 e *a*, e 1 e *b* cadono *N* numeri successivamente proporzionali, altrettanti ne cadranno fra *a* e *b* (prop. 10ª).

Che fra due numeri piani o solidi simili (in particolare fra due quadrati o due cubi) esistano una o due medie proporzionali risulta dalle proposizioni 11ª-12ª e 18ª-19ª, ove viene determinato il rapporto di due numeri simili piani o solidi, in particolare quello di due quadrati o due cubi; in-

(1) HANKEL, op. cit., p. 390.

(2) Osserviamo che della prop. 31ª di questo Libro si conoscono due dimostrazioni.

vece, la condizione di similitudine di due numeri piani o solidi si impara nelle prop. 2ª-31ª e quella per l'esistenza di una comune misura fra due quadrati o due cubi nelle prop. 14ª-17ª. Altre proprietà analoghe, importanti soltanto per chi voglia fare dell'aritmetica razionale, troverà il lettore nell'opera originale.

18. - Il Libro IX, ultimo dei libri aritmetici, è un naturale proseguimento dei due precedenti. Troviamo ivi stabilite le condizioni affinchè il prodotto di due numeri sia un quadrato (prop. 1ª, 2ª, 3ª, 6ª) o quello di tre un cubo (4ª, 5ª), poi parecchie nuove proprietà delle serie di numeri proporzionali (1), e finalmente il modo di comportarsi rispetto a 2 del numero che si ottiene combinando per addizione, sottrazione, moltiplicazione o bisezione dei numeri di data parità (21ª-34ª) (2). Ma incontriamo poi anche tre proposizioni di eccezionale importanza su cui val la pena di fermarsi. La prima (prop. 20ª) asserisce essere illimitata la serie dei numeri primi; essa viene dimostrata con un ragionamento tuttora in uso ed estremamente notevole (3) come quello che, non solo guida facilmente alla conclusione voluta, ma ancor insegna un modo semplice per ottenere successivamente infiniti numeri primi. La seconda (prop. 35ª) dà la somma dei termini di una progressione geometrica, avendo per propria tesi l'eguaglianza

$$\frac{ar - a}{a} = \frac{ar^n - a}{a + ar \ldots + ar^{n-1}}.$$

La terza (prop. 36ª) finalmente insegna la costruzione dei numeri perfetti, perchè asserisce che, se un certo valore

---

(1) Notisi la doppia dimostrazione della prop. 22ª.

(2) Come il lettore sa, questo ragionamento consiste nel dimostrare che, se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono numeri primi consecutivi, $a_1 a_2 \ldots a_n + 1$ è un nuovo numero primo.

(3) Nella dimostrazione della prop. 8ª (" Se gli interi $a_0, a_1, a_2, \ldots$ continuamente proporzionali e $a_0 = 1$, i termini $a_2, a_4, \ldots$ sono quadrati ") ed in quella della successiva, G. Vacca, (*Boll. di bibl. e storia delle scienze matem.*, T. XII, 1910, p. 33-35) ha riconosciuto, sotto forma embrionale il principio d'induzione completa, enunciato per la prima volta da F. Maurolico (1494-1575).

di n il numero $2^n - 1$ è primo, il prodotto

$$N = (2^n - 1)\, 2^{n-1}$$

sarà perfetto (1). Facendo n successivamente eguale a 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61 e 89 si ottengono in tal modo i 9 numeri perfetti conosciuti (2); se altri analoghi ne esistano dipende dalla questione, non ancora risolta, dell'esistenza di altri numeri primi della foma $2^n - 1$ ove $N > 89$ (3); ma, intanto, giova notare che la regola di EUCLIDE porge tutti i numeri perfetti che sono o il prodotto di due numeri primi (l'unico è 6), o il prodotto delle potenze di due primi, o più generalmente il prodotto di un numero primo per un numero composto, ma primo con quello (4); se esistono altri numeri perfetti (necessariamente non primi), in particolare numeri perfetti dispari, è una questione (5) che malgrado gli sforzi anche recentemente ripetuti da egregi analisti (6), attende tuttora la propria soluzione.

---

(1) È facile verificarlo osservando che, escluso N, i divisori questo numero sono:

$$2^n - 1,\ (2^n - 1)\, 2, \ldots,\ (2^n - 1)\, 2^{n-2},\ 2^{n-1},\ 2^{n-2}, \ldots,\ 2,\ 1;$$

ora la somma di questi è

$$(2^n - 1)(1 + 2 + \ldots + 2^{n-2}) + (1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}) =$$
$$= (2^n - 1)(2^{n-1} - 1) + (2^n - 1) = (2^n - 1)\, 2^{n-1},$$

cioè appunto N.

(2) Il nono venne scoperto da P. SEELHOFF (*Die neunte vollkommene Zahl*, Zeitschrift f. Mathematik und Physik, XXXI, 1886, p. 174-178) e verificato poi da E. LUCAS (*Sur le neuvième nombre parfait*, Mathésis, VII, 1887, p. 44-46). Il decimo dal POWERS (*Bull. of the Americ. Math. Society*, T. XVIII, 1912, p. 162).

(3) Tale questione sarebbe risolta se fosse dimostrato il seguente *teorema empirico* di E. CATALAN: Se $2^n - 1$ è un numero primo p, saranno numeri primi anche:

$$p' = 2^p - 1,\ p'' = 2^{p'} - 1, \text{ ecc.}$$

(*Mélanges mathématiques*, Mem. de la Soc. de Liège, 2e Série, T. XII, p. 376).

(4) Cfr. SEELHOFF, l. c.

(5) LEBESGUE e WANTZEL nel T. III, 1844, delle *Nouvelles Annales de Mathém.*

(6) Veggansi parecchie note di J. J. SYLVESTER nel T. CVI (1888) dei *Comptes rendus* e le successive di E. CATALAN (*Mé-*

19. - Non pochi problemi di geometria elementare e l'inversione di una fra le prime operazioni aritmetiche (cioè l'elevamento a quadrato) rivelano l'esistenza di quantità che sono per loro natura essenzialmente differenti dagli ordinari numeri interi e frazionali: sono gl'irrazionali (*quadratici*, cioè) radici di equazioni quadratiche. E siccome in molti facili modi si può persuadersi che, all'infuori degl'irrazionali quadratici, esistono altre quantità di natura affine, così s'impone lo studio generale delle quantità irrazionali. Per compiere tale ricerca si presentano due strade. O partire da una definizione che abbracci tutte le possibili quantità irrazionali e dedurne le proprietà: è il sistema oggidì un uso, come quello che per generalità e rigore nulla lascia a desiderare, e che presenta, come unico inconveniente, di fare perdere di vista le proprietà speciali di ogni singola classe di irrazionali. Oppure si possono applicare le note operazioni aritmetiche (sino all'estrazione di radice inclusivamente) ai numeri interi e frazionari, poi ai numeri così risultanti e così via; è il sistema che scelsero gli antichi, come quello più conforme alle loro abitudini intellettuali e che, d'altronde, corrisponde al procedere dal semplice al composto, epperò meriterebbe di essere adottato anche oggi in una prima trattazione dell'argomento. L'unico documento autentico (1) degli studi fatti dai Greci su tale argomento è il X Libro degli *Elementi di Euclide* (2), il libro più lungo

---

langes mathématiques, Mémoires de la Soc. de Liège, 2e Série, T. XV, 1888, p. 205-7), C. SERVAIS (*Mathésis*, VII, p. 228-230 e VIII p. 92-93 e 135), E. CESÀRO (Id., VII, p. 245-46), ed E. LUCAS (Id., X, p. 74-76).

(1) Cfr. più innanzi, n. 67.

(2) Cfr. STEVIN, *Traité des incommensurables grandeurs en laquelle est sommairement declaré le contenu du Dixiesme Livre d'Euclide* (Oeuvres mathématiques, Leyde, 1634, p. 219 e seg.); P. COSSALI, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra*. T. II, Parma, 1793, p. 242 e seg.; NESSELMANN, O. c., p. 165-184; CHASLES, *Comptes rendus*, T. 37, Paris, 1853, p. 555-562; T. TANNERY, *De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide* (Mém. de Bordeaux, 2e Série, T. IV), p. 401-4; GOW. *A Short History of Greek Mathematics*, Cambridge, 1884, p. 78-86; PEANO, *Sommario del Libro X d'Euclide* (Rivista di Matematica, T. II, 1892), p. 7-11; CHRISTENSEN, *Ueber Gleichungen*

e difficile (1), uno de' più ammirabili, se si tien conto della sottigliezza delle argomentazioni (2) e del numero delle gravi difficoltà vinte, ma il meno letto, perchè i risultati principali di esso si possono oggi ottenere con poche righe di algebra e d'altronde sono estremamente particolari (3). Ivi infatti (come sarà dimostrato da ciò che segue) EUCLIDE si occupa delle quantità irrazionali che risultano risolvendo le equazioni biquadratiche (4); che a tale studio egli sia stato spinto dal desiderio di gettare qualche luce intorno alla natura del rapporto della circonferenza al diametro, è ipotesi (5) che invano si tenterebbe di suffragare con qualche argomento intrinseco o storico; più probabile è invece, secondo noi, che il movente a tali ricerche sia stato nello studio di problemi risolubili mediante la riga ed il compasso (6), in particolare nelle indagini sui poliedri regolari; infatti, se si vuol determinare il rapporto del lato di uno di questi al raggio della sfera circoscritta s'incontrano appunto

---

vierten Grades in X Buch der Elemente des Euklids (Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. 34, 1889, Hist.-Lit. Abth., p. 201-217).

(1) Che riuscisce difficile anche agli antichi risulta dalle molte dilucidazioni che si leggono nei manoscritti: cfr. il III vol. dell'ed. di HEIBERG.

(2) Si vegga l'eloquente difesa tessuta da KEPLERO contro RAMUS nel Proemio al I Libro dell'*Harmonices mundi* (*Kepleri Opera,* ed. FNISCH, T. V, p. 80-84.

(3) " La difficulté du dixiesme Livre d'Euclide est à plusieurs devenue en horreur, voire jusque à l'appeler, la croix des mathématiciens, matière trop dure à digérer, et en la quelle n'aperçoivent aucune utilité ". STEVIN, *Le premier Livre d'Arithmétique,* def. XXXI. In senso analogo si esprime BENEDETTO CASTELLINI in una lettera diretta a GALILEO il 1° aprile 1607, ove confessa di essere giunto alla prop. XL " et di lì, suffocato dalla multitudine (per confermar il peccato mio) de' vocaboli, profondità delle cose e difficultà di demonstrationi, mi son trasferito al' XI, XII e XIII (Libro) "; tale lettera fu pubblicata per la prima volta da A. FAVARO (*Galileo Galilei e lo studio di Padova,* T. II, Firenze, 1883, p. 267) e poi inserita nell'edizione nazionale delle *Opere di G. Galilei,* T. X, Firenze, 1900, p. 169.

(4) Equazioni di quarto grado riducibili al secondo.

(5) Emessa dal DE MORGAN; cfr. GOW, l. c., p. 85.

(6) Cfr. le prop. 2ª e 3ª del IV Libro della *Collezione matematica* (PAPPO ed. HULTSCH, p. 178-180).

le irrazionalità di cui ora — seguendo l'antico geometra, ma utilizzando il linguaggio algebrico — esporremo le proprietà più salienti.

Si supponga data un'unità lineare U arbitraria ma fissa; allora un'altra lunghezza qualunque L può essere commensurabile (1) od incommensurabile con l'unità; nel primo caso è della forma $\alpha\, U$ ove α è un numero intero o frazionario, e si dice *commensurabile in lunghezza* con U; nel secondo caso può accadere che L^2 sia commensurabile con U^2 o può succedere l'opposto: nella prima ipotesi L si dirà *commensurabile a potenza* (2) con U e sarà della forma $\sqrt{\alpha}\, U$, α essendo ancora un numero intero o frazionario. Come *razionali* (ῥηταὶ) si considerano le lunghezze commensurabili con U in lunghezza o a potenza (3); come *irrazionali* le altre.

Queste nozioni, con cui si apre il X Libro degli *Elementi*, inducono subito a domandare: esistono effettivamente lunghezze delle specie considerate? Tutto il libro, e in particolare la prop. 10ª (4), possono servire come risposta affermativa a tale questione; tuttavia sarebbe desiderabile avere un modo di calmare sin dal principio le apprensioni di coloro che avessero dei dubbi intorno all'esistenza di lunghezze incommensurabili presentandone un esempio semplice. Per offrire tale esempio EUCLIDE aveva a propria disposizione un risultato classico nello studio del rapporto fra il lato e la diagonale di un quadrato; ed infatti, esaminando molte reputate edizioni di EUCLIDE, lo si trova nel Libro in discorso, dimostrato anzi nel modo che (cfr. L. I, n. 81) si afferma venisse usato nella scuola di Crotone; esso, però, si trova in fine del Libro X, cioè, in un punto ove non ha

(1) Commensurabili = σύμμετρα.

(2) Commensurabili a potenza = δυνάμει σύμμετρα.

(3) L'opportunità di fondere in un'unica categoria di grandezze le lunghezze commensurabili in lunghezza ed a potenza emerge da tutto il Libro X degli *Elementi*, senza ricorrere per spiegarne l'origine a una congettura, indubbiamente ingegnosa, ma artificiosissima, suggerita da M. CHASLES (*Comptes rendus*, T. XXXVI, p. 556-7).

(4) Con la quale si determinano due lunghezze incommensurabili, uno in lunghezza l'altra a potenza, con una data.

ragione di essere, onde dal più reputato e recente editore di EUCLIDE (l'HEIBERG) venne escluso dal testo autentico. A noi però sembra che nulla vieti di ammettere che ci troviamo di fonte, non ad un'interpolazione, ma ad uno spostamento; nè è escluso che EUCLIDE, avvertita tardi l'opportunità di quell'esempio, lo abbia registrato in fine, riserbandosi di assegnargli la più opportuna sede nel rivedere definitivamente il testo.

La prima proposizione del Libro in questione afferma che « date due grandezze diseguali, se si toglie dalla maggiore più della sua metà, dal resto più della sua metà e così via si finirà per ottenere una grandezza minore della più piccola fra le grandezze date »; EUCLIDE la deduce molto semplicemente dal celebre assioma che dice: « date due grandezze omogenee, esiste sempre un multiplo della minore superiore alla maggiore ». Da quella proposizione scaturisce un procedimento (prop. 2^a) per riconoscere se due lunghezze date siano o non commensurabili (1). I metodi insegnati da EUCLIDE nei libri aritmetici per trovare la massima comune misura di due o tre numeri (razionali) vengono poi estesi (prop. 3^a e 4^a) alle ricerche analoghe per due grandezze commensurabili: la ragione di questa generalizzabilità si trova nelle proposizioni successive (5^a-9^a) (2), dalle quali si apprende che due grandezze sono commensurabili o incommensurabili secondochè stanno o non come un numero ad un numero e sono poi commensurabili a potenza soltanto quando i loro quadrati stanno come due numeri. Analoghe a queste sono le proposizioni che vengono dopo e dalle quali si apprende quanto segue: « se, in una proporzione, i due antecedenti sono commensurabili, lo saranno anche i conseguenti (prop. 11^a); se a e b sono entrambi commensura-

(1) Risulta da tale procedimento che le definizioni di quantità commensurabili ed incommensurabili sono *logiche* ma non *algebriche* (secondo la distinzione fatta dal KRONECKER), perchè non esiste un numero finito di operazioni razionali, mediante le quali si possa riconoscere se due date grandezze siano fra loro commensurabili o meno. Cfr. J. MOLK, *Acta mathematica*, T. VI, p. 8.

(2) Esse, come sappiamo (Libro I, n. 64), furono scoperte da TEETETO.

bili con c, lo saranno anche fra loro (prop. 12ª), ma, se lo è uno solo, essi saranno fra loro incommensurabili (pr. 13ª); se sussiste la proporzione $a : b :: c : d$ e se $a^2 - b^2$ è un quadrato, lo sarà anche $c^2 - d^2$ (prop. 14ª); la somma o la differenza di due grandezze commensurabili è commensurabile con entrambe (prop. 15ª), ma se a e b sono incommensurabili, $a - b$ lo sarà con ambedue (prop. 16ª) ».

Da questi enunciati emerge che, con le proposizioni citate, EUCLIDE non volle che far conoscere alcune generalità sulle quantità irrazionali qualunque. Di esse egli fa tosto un'applicazione studiando (prop. 17ª-18ª) le condizioni di razionalità delle radici dell'equazione $x(a - x) = \frac{b^2}{4}$, e trova che tale condizione è l'essere $a^2 - b^2$ un quadrato.

In seguito egli prepara l'introduzione di nuove quantità irrazionali, dimostrando essere irrazionale il prodotto (prop. 19ª) o il quoziente (prop. 20ª) di due quantità razionali e fra loro commensurabili in lunghezza. All'opposto il rettangolo di due rette commensurabili soltanto a potenza è irrazionale; il lato del quadrato equivalente ad esso è del pari irrazionale e dicesi *media* (μέση), mentre quel rettangolo si dice *mediale* (prop. 21ª). Le irrazionabilità così ottenute sono, pertanto, radici di equazioni di quarto grado binomie, epperò possono esprimersi algebricamente mediante una delle formole seguenti:

$$\sqrt[4]{lm} \ , \ l\sqrt[4]{m} \ , \ \sqrt[4]{m} :$$

allo studio di esse è consacrata la seconda parte del L. X. Dalla quale si apprende anzitutto (prop. 22ª) che « se si trasforma un rettangolo mediale in altro equivalente avente un lato razionale, l'altro suo lato non sarà razionale » e che « non è razionale un numero commensurabile con una media » (23ª). Come due lunghezze qualunque, così due medie possono essere fra loro commensurabili in lunghezza o a potenza, nella prima condizione sarebbero:

$$l_1\sqrt[4]{m} \text{ e } l_2\sqrt[4]{m} \ ,$$

nella seconda:

$$\sqrt{l_1}\sqrt[4]{m} \text{ e } \sqrt{l_2}\sqrt[4]{m} \ ;$$

nel primo caso il loro rettangolo è mediale (24ª), ma nel secondo può anche essere razionale (25ª); la differenza di due medie invece non è mai razionale (26ª). Nelle proposizioni seguenti EUCLIDE insegna a costruire coppie di medie o di rette aventi fra loro determinate relazioni; sono problemi importanti non tanto in sè, quanto perchè conducono alla creazione di nuove quantità irrazionali. Nelle due prime delle proposizioni citate le medie devono essere commensurabili soltanto a potenza e comprendere un rettangolo razionale (27ª) o mediale (28ª); si ottengono, in corrispondenza, le due copie seguenti:

$$\text{(I)} \qquad \sqrt[4]{lm} \,,\ \sqrt{l\sqrt{\frac{l}{m}}}$$

$$\text{(II)} \qquad \sqrt[4]{lm} \,,\ \sqrt{k\sqrt{\frac{l}{m}}}\,.$$

Determinate poi (29ª e 30ª) due rette commensurabili soltanto a potenza e di cui la differenza dei quadrati sia commensurabile colla maggiore in lunghezza o soltanto a potenza rispetto alla prima (1), EUCLIDE si volge alle due questioni seguenti (che in realtà ne riassumono quattro): « Trovare due medie che siano commensurabili soltanto a potenza, comprendano un rettangolo razionale (31ª) o mediale (32ª) e di cui la differenza dei quadrati sia commensurabile alla prima in lunghezza o soltanto a potenza ». Le soluzioni che egli trova sono espresse in linguaggio algebrico, dalle formole:

$$\text{Prop. 31ª} \begin{cases} \sqrt[4]{l}\,\sqrt[4]{l-k^2} \,,\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{l}}\,\sqrt[4]{(l-k^2)^3} \\ \sqrt[4]{l}\,\sqrt[4]{l-k} \,,\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{l}}\,\sqrt[4]{(l-k)^3} \end{cases};$$

(1) Come soluzioni generali si possono assumere risp.:

$$\sqrt{l} \,,\ \sqrt{l-k^2}$$

$$\sqrt{l} \,,\ \sqrt{l-k}\,.$$

$$\text{Prop. } 32^{a} \begin{cases} \sqrt[4]{lm} \ , \ \sqrt[4]{\frac{m}{l}}\sqrt{l-k^2} \\ \sqrt[4]{lm} \ , \ \sqrt[4]{\frac{m}{l}}\sqrt{l-k} \end{cases}$$

Nei tre problemi venienti si tratta di determinare due rette incommensurabili a potenza sapendo che la somma dei loro quadrati sia razionale ed il loro rettangolo mediale (33ª), o che sia mediale quella e razionale questo (34ª), o finalmente l'una e l'altro mediali e fra loro incommensurabili (35ª). I risultati a cui si arriva sono compendiati nelle espressioni che seguono:

$$\text{(III)} \qquad \sqrt{\frac{l \pm \sqrt{kl}}{2}} \ ,$$

$$\text{(IV)} \qquad \sqrt{\frac{\sqrt{l-k}\,(\sqrt{l} \pm \sqrt{k})}{2}} \ ,$$

$$\text{(V)} \qquad \sqrt{\frac{\sqrt{m}\,(\sqrt{l} \pm \sqrt{k})}{2}} \ .$$

Combinando per addizione o sottrazione gli irrazionali ottenuti si giunge a nuovi irrazionali che vengono designati con nomi speciali; vale a dire la somma (prop. 36ª) e la differenza (prop. 73ª) di due quantità incommensurabili in lunghezza sono quantità irrazionali che si chiamano (nella nomenclatura degli antichi algebristi italiani) risp. *binomi* e *recisi*; e con tali nomi si designano anche gli irrazionali analoghi ottenuti dalle quantità (I) (prop. 37ª e 74ª), (II) (prop. 38ª e 75ª), (III) prop. 30ª e 76ª) (IV) (prop. 40ª e 77ª) e (V) prop. 41ª e 78ª). Tutti questi nuovi enti aritmetici sono radici di equazioni biquadratiche; le loro espressioni algebriche assieme ai loro nomi in greco (1), alle lettere con

(1) La lunghezza di questi nomi corrisponde al costume dei Greci di adottare delle perifrasi piuttosto che introdurre dei nuovi vocaboli.

cui per brevità le indicheremo in seguito e alle equazioni biquadratiche cui soddisfanno, sono raccolte nel quadro seguente:

A) $x = \sqrt{m} \pm \sqrt{n}$ (1) { ἐκ δύο ὀνομάτων / ἀποτομή }

$$x^4 - 2(m+n)x^2 + (m-n)^2 = 0$$

B) $x = \sqrt[4]{lm} \pm \sqrt[4]{\frac{l}{m}}$ { ἐκ δύο μέσων πρώτη / μέσης ἀποτομὴ πρώτη }

$$mx^4 - 2(l+m)\sqrt{lm}\,x^2 + l(l-m)^2 = 0$$

C) $x = \sqrt[4]{lm} \pm \sqrt[4]{\frac{l}{m}}$ { ἐκ δύο μέσων δευτέρα / μέσης ἀποτομὴ δευτέρα }

$$mx^4 - 2(k+m)\sqrt{lm}\,x^3 + l(k-m)^2 = 0$$

D) $x = \sqrt{\frac{l+\sqrt{kl}}{2}} \pm \sqrt{\frac{l-\sqrt{kl}}{2}}$ { μείζων / ἐλασσον }

$$x^4 - 2lx^2 + kl = 0$$

E) $x = \sqrt{\frac{\sqrt{l-k}\,(\sqrt{l}+\sqrt{k})}{2}} \pm$

$\pm \sqrt{\frac{\sqrt{l-k}\,(\sqrt{l}-\sqrt{k})}{2}}$ { ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη / ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα }

$$x^4 - 2\sqrt{l(l-k)}\,x^2 + (l-k)k = 0$$

---

(1) Una almeno delle quantità m, n non è un quadrato; se si prende il segno —, deve supporsi $m > n$.

$$\text{F)}\quad x = \sqrt{\frac{\sqrt{m}\,(\sqrt{l}+\sqrt{k})}{2}} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{\sqrt{m}\,(\sqrt{l}-\sqrt{k})}{2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{δύο μέσα δυναμένη} \\ \text{η μετά μέσου το ὅλον ποιοῦσα} \end{array} \right\}$$

$$x^4 - 2\sqrt{lm}\,x^2 + km = 0.$$

Ognuna di queste linee irrazionali è rappresentabile in un solo modo nella forma indicata (prop. 42ª-47ª e 79-84ª). Arrestiamoci specialmente sulla prima: essa ha la forma

$$\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$$

ove $m > n$ ed uno almeno dei numeri m, n non è un quadrato; si presenta quindi naturale la distinzione dei tre casi: m quadrato, n quadrato, nè m nè n quadrato; ciascuno si suddivide in tre secondochè $\sqrt{m-n}$ è commensurabile in lunghezza o soltanto a potenza con $\sqrt{m}$. Si arriva così a sei coppie di irrazionali:

$$a \pm \sqrt{a^2 - d^2}\ ,\ \frac{a}{\sqrt{1-k^2}} \pm a\ ,\ \sqrt{a} \pm \sqrt{a - k^2 a}\ ,$$

$$a \pm \sqrt{a^2 - d}\ ,\ \sqrt{a^2 + d} \pm a\ ,\ \sqrt{a} \pm \sqrt{a - d}\ ;$$

prendendo il segno + si hanno *sei specie di binomi*, linee EUCLIDE insegna a fabbricare nelle prop. 48ª-53ª, prendendo il segno — *sei specie di recisi*, di cui pure EUCLIDE insegna la costruzione nelle prop. 85ª-90ª. Fra le proprietà di questi irrazionali meritano un posto eminente quelle espresse dalle prop. 54ª-59ª e 91ª, 96ª: esse dicono che estraendo la radice quadrata da uno de' sei binomi o de' sei recisi si ottengono irrazionali di specie già conosciute, anzi esse porgono altrettanti casi particolari della notissima identità:

$$\sqrt{\sqrt{m} \pm \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sqrt{m} + \sqrt{m-n}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{m} - \sqrt{m-n}}{2}}$$

applicandola infatti ai casi più sopra enumerati si trovano le seguenti relazioni:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - d^2}} = \sqrt{\frac{a+d}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-d}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{\sqrt{1-k^2}} \pm a} = \sqrt{\frac{a}{2}} \left(\sqrt[4]{\frac{1+k}{1-k}} \pm \sqrt[4]{\frac{1-k}{1+k}} \right)$$

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - k^2 a}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a}\,(1+k)}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a}\,(1-k)}{2}}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - d}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{d}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{d}}{2}}$$

$$\sqrt{\sqrt{a^2+d} \pm a} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+d} + \sqrt{d}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+d} - \sqrt{d}}{2}}$$

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-d}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{d}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{d}}{2}},$$

donde emerge che la radice quadrata di un binomio o di un reciso di 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª specie è ordinatamente un irrazionale della forma A, B, C, D, E, F. Le prop. 60ª-65ª e 37ª-102ª si possono considerare per le inverse di quelle ora citate.

Tutti gli irrazionali definiti godono anche la proprietà che una quantità commensurabile ad uno di essi è un irrazionale analogo (prop. 66ª-70ª e 103ª-107ª). Che combinando per addizione e sottrazione uno spazio razionale e uno mediale o due spazi mediali si possano ottenere tutte dodici quantità irrazionali A, ... , F, si apprende dalle prop. 71ª-72ª e 108ª-110ª (1); e finalmente dalla 111ª che un binomio è di natura differente da un reciso.

---

(1) **Perciò queste proposizioni porgono un mezzo semplice per costruire le quantità irrazionali anzidette.**

Le ultime quattro proposizioni del Libro X vengono sospettate di essere false dall'editore a cui noi ci atteniamo: senza entrare in una discussione delle ragioni filologiche che condussero l'HEIBERG a questo risultato, ci limitiamo ad osservare che non esiste alcun argomento intrinseco per negare ad EUCLIDE la conoscenza delle proposizioni anzidette; ed invero, le tre prime, nel linguaggio nostro, si esprimono col mezzo delle identità seguenti:

$$\frac{c^2}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{c^2}{a-b}\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right),$$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \cdot m\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = m\,(a-b),$$

mentre l'ultima dice che, oltre a quelle considerate, esistono infinite altre categorie di irrazionali; sono quelli deducibili con estrazioni di radici dagli irrazionali già definiti.

Tale è per sommi capi il contenuto del X Libro degli *Elementi di Euclide* (1). Aggiungiamo che, come si rileva dalle citazioni fatte nel precedente riassunto, le proposizioni ivi contenute si possono in gran parte distribuire a coppie; l'ipotesi e la tesi di ciascuna di queste proposizioni nascono dall'ipotesi e dalla tesi dell'altra — per esprimerci modernamente — mutando il segno di un radicale, sicchè il Libro in questione si potrebbe assai opportunamente stampare in due colonne ponendo di fronte due proposizioni analoghe; orbene, quantunque EUCLIDE non rilevi in generale questa dipendenza, pure nessuno che abbia letto gli *Elementi* può negargliene la conoscenza.

20. - Se il fin qui detto è forse sufficiente a porgere una idea delle ricerche su gli irrazionali esposte da EUCLIDE, non basterà certamente per formarsi un concetto dell'importanza storica che possiede il X Libro degli *Elementi*, la quale deriva da ciò che, col suo mezzo, si è in grado di comprendere come i Greci poterono istruire e compiere ricerche che, a noi moderni, sembrano di pertinenza dell'algebra, di misurare, pertanto, la potenza di quell'algoritmo le cui prime linee sono tracciate nel II Libro degli *Elementi*,

(1) Varianti alle dimostrazioni delle prop. 1ª, 6ª, 9ª e 115ª si leggono nell'ed. dell'HEIBERG.

di seguirlo anzi nei suoi più minuti particolari. Favorisce questo studio la forma, meno regolare, compassata e perfetta di quella che ammirasi in altre parti degli *Elementi*, la quale farebbe credere di essere in presenza di una prima redazione: infatti, i numerosi lemmi di algebra geometrica elementare (1), intercalati qua e là (mentre sarebbe stato più estetico aggregarli ai teoremi del II Libro, dei quali sono in gran parte semplici corollari) fanno vedere come essi disimpegnassero per gli antichi il medesimo ufficio di certe identità algebriche che oggi gli abili analisti invocano per rendere il loro procedere più spedito e sicuro; essi fanno, quindi, percepire nel modo più chiaro quanto profonde siano le somiglianze fra i metodi degli antichi e l'algebra, quando si limiti il campo delle operazioni lecite a le quattro prime operazioni e l'estrazione di radice; noi pensiamo, pertanto, che il X Libro degli *Elementi* sia fra i più importanti documenti autentici che dovrebbe sfruttare chi volesse accingersi al difficile compito di ricostruire ne' suoi più minuti particolari gli antichi procedimenti d'indagine delle verità matematiche.

La presenza di lemmi di « algebra geometrica » non è l'unica caratteristica di forma posseduta dal Libro in discorso, perchè altri lemmi di esso contengono piccole osservazioni atte a cementarne le varie parti (2); si aggiunga poi che ivi EUCLIDE non ha riunite al principio tutte le definizioni, ma per converso le ha esposte nei punti più opportuni; ciò potrebbe porgere una conferma all'ipotesi che il sistema opposto sia opera di posteriori rimaneggiatori (cfr. p. 202), oppure far credere che EUCLIDE vi si sia attenuto negli altri libri unicamente per seguire l'esempio dei

(1) Fra essi possiedono una speciale importanza quelli (interposti fra le prop. 28ª e 29ª) che insegnano a costruire due numeri i cui quadrati diano per somma un numero quadrato o non; il metodo di costruzione riposa sull'identità

$$\left(\frac{b^2 + c^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{b^2 - c^2}{2}\right)^2 + b^2 c^2 .$$

(2) Probabilmente le osservazioni analoghe per gli altri libri furono lasciate, come per ovvie, da EUCLIDE al lettore intelligente o al provetto istitutore.

predecessori, ma lo ha abbandonato nel momento in cui più schiettamente metteva in mostra le proprie idee.

Quest'ultimo argomento poggia sull'opinione generale che il Libro che stiamo esaminando sia quello in cui EUCLIDE mise più del proprio; sappiamo, tuttavia (L. I, n. 64), che nel redigerlo egli utilizzò le opere di TEETETO; in quanta misura lo abbia fatto si apprende dallo schizzo storico che prelude ad un commento del Libro in esame, del quale un dotto orientalista scoperse, circa sessant'anni fa, una traduzione in Arabo (1) e vennero in seguito trovati alcuni brani nell'originale (2); ivi (3) si leggono alcune notizie che ci sembrano abbastanza importanti per servir di coronamento a quanto precede.

Lo scopo del X Libro del trattato di EUCLIDE sopra gli *Elementi* è l'esame delle quantità commensurabili ed incommensurabili, razionali ed irrazionali. Questa teoria nacque nella Scuola di PITAGORA e venne considerevolmente svolta da TEETETO Ateniese il quale mostrò in questa parte delle matematiche ed in altre una sagacia che gli valse una meritata ammirazione. Egli era inoltre uno degli uomini più felicemente dotati, come PLATONE attesta nell'opera che intitolò dal suo nome. Le distinzioni precise delle quantità suddette e la dimostrazione rigorosa delle proposizioni appartenenti a questa teoria, io credo siano state stabilite per la maggior parte da questo matematico; più tardi il grande APOLLONIO, il cui genio arrivò al massimo grado di altezza nelle matematiche, aggiunse altre teorie ammirabili dopo molti sforzi e non poco lavoro. Giacchè TEETETO aveva distinto le potenze commensurabili in lunghezza dalle incommensurabili e aveva classificate le specie conosciutissime delle linee irrazionali corrispondentemente

---

(1) F. WOEPCKE, *Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités Irrationelles* (Mém. des Savants étrangers, T. XIV, Paris, 1856, p. 657-720). Il manoscritto che contiene il commento in questione porta la data: Marzo-Aprile 969.

(2) HEIBERG, *Studien* citate, p. 170-171. L'autore di questo commento non è determinato in modo definitivo; mentre il WOEPCKE tenterebbe ad identificarlo con l'astrologo VEZIO VALENTE rammemorato dal FABRICIUS (*Bibl. graeca*, ed. HARLESS. Hamburg, 1795, T. IV, p. 144), l'HEIBERG (l. c., p. 169) preferisce ritenere sia PAPPO d'Alessandria.

(3) Cfr. anche *Euclidis Opera Omnia*, Vol. V, scolio n. 1, p. 414-17.

alle diverse proporzioni, assegnando la media alla proporzione geometrica, il binomio all'aritmetica ed il reciso all'armonica, come narra Eudemo Peripatetico. Quanto ad Euclide, egli si propose di dare regole generali intorno alla commensurabilità ed all'incommensurabilità e le dimostrò in generale: egli precisò le definizioni e la classificazione delle quantità razionali ed irrazionali, e fece conoscere un gran numero di classi di quantità irrazionali, e finalmente diede un'idea di tutta la loro estensione. Da ultimo Apollonio distinse le specie degli irrazionali *ordinati* e scoperse la dottrina degli irrazionali detti *non ordinati* (ἄλογοι ἀτακτοι), dei quali egli costruì un numero grandissimo con procedimenti esatti (1).

21. - Con gli ultimi tre libri degli *Elementi* si ritorna in un campo più schiettamente geometrico, essendo essi dedicati allo studio dei rudimenti della geometria dello spazio (2).

Il Libro XI si apre con una serie di definizioni concernenti le scambievoli posizioni di rette e piani e i più semplici solidi da studiarsi, riguardo alle quali si può notare ciò che segue: I. Le definizioni di rette e piani perpendicolari esigono, per essere legittime, alcuni teoremi esposti solo più avanti; II. La sfera viene considerata come un solido di rivoluzione, senza che si rilevi che qualunque diametro può fungere da asse; III. Per cilindro e cono si considerano solidi finiti generati dalla rivoluzione di un parallelogramma o di un triangolo rettangolo.

Queste definizioni non sono seguite da alcun postulato, mentre ciò sarebbe stato necessario, giacchè le operazioni concesse da Euclide abilitano ad eseguire qualunque ope-

---

(1) Notizie più particolareggiate potrebbersi dedurre da un altro passo, tuttora inedito, del detto commento; nel passo cioè (indicato col n. 6 dal Woepcke a p. 715 della memoria citata) ove è fatto un " esame comparato della teoria di Teeteto e di quella di Euclide „; anche per questo motivo è pertanto desiderabile una versione completa del commento scoperto da Woepcke.

(2) Un antico scoliasta (*Euclidis Opera Omnia*, Vol. V, p. 592, scolio 1) avverte che in origine geometria e stereometria formavano due scienze distinte, che certi geometri, da lui indicati come " i moderni „, riunirono in una sola; ciò porterebbe a fare risalire ai Greci le origini del " metodo fusionista „, su cui tanto si discusse in Italia sullo scorcio del sec. XIX.

razione nel piano, ma non tutte quelle dello spazio (1). Mende non lievi si trovano, pertanto, nell'esordio del Libro in questione; non meno gravi si avvertono nel seguito (2), ove, con poco ordine, è esposta una collezione incompleta e variopinta di teoremi sulla posizione rispettiva di un piano ed una retta (prop. 1ª-3ª), su piani e rette perpendicolari (4ª-10ª, 13ª-16ª, 18ª-19ª) [i quali dovevano essere noti fino dai tempi di ARCHITA (L. I, n. 52)] sui parallelepipedi [24ª-25ª (3), 28ª-36ª, 38ª (4)], gli angoli triedri (20ª-22ª) e gli angoli solidi in generale: si aggiunga la proprietà che possiede un fascio di piani paralleli, di determinare, su due rette qualunque, punteggiate simili (17ª) e quella, che ha qualunque proporzione, di non alterarsi quando se ne elevino a cubo i termini (37ª); nè si dimentichino i problemi (11ª-12ª, 23ª, 27ª-28ª) che si riferiscono alla figure anzidette. Tutte queste proposizioni sembrano riunite, non già nell'intento di porgere una base solida e completa per lo studio delle proprietà plastiche dello spazio, ma col fine unico di adunare gli elementi necessari per compiere le ricerche consegnate nei due seguenti; perciò nel Libro XI risiede, a parer nostro, il più solido argomento a favore della tesi che gli *Elementi* avessero per iscopo, come dice PROCLO (nel brano riferito nel n. 4) e ripete KEPLERO (5), la «costru-

(1) A questa mancanza, segnalata da G. HAUCK nella memoria *Ueber die constructiven Postulate der Raumgeometrie in ihren Beziehungen zu den Methoden der darstellenden Geometrie* (Katalog der mathematischen und mathematisch-physikalischen Modelle, Apparate und Instrumenten. München, 1892, p. 40-53), si può por riparo col sostituire ai postulati Euclidei i seguenti: "Sia lecito: congiungere, nello spazio, due punti con una retta; prolungare una retta: trasportare un segmento rettilineo; descrivere un circolo di centro, raggio e piano determinati: di ogni punto dello spazio si possa trovare la projezione su un piano dato e determinare la distanza da questo.

(2) Deriva ciò dal fatto che i Greci tardarono molto (v. L. I, n. 56) a studiare la geometria dello spazio?

(3) Delle prop. 22ª e 23ª l'HEIBERG riferisce due dimostrazioni.

(4) Notisi che quest'ultima è enunciata pel solo cubo mentre varrebbe per un parallelepipedo qualunque.

(5) "Euclidei operis ultimum finem, ad quem referrentur omnes omnino propositiones omnium librorum (exceptis quae ad numerum perfectum ducunt) esse quinque corpora regularia „.

zione dei poliedri regolari » (1). D'altra parte lo stile meno perfetto in cui è scritto questo Libro, in confronto a quello dei precedenti, sembra favorevole alla congettura emessa da un profondo conoscitore dell'antica geometria, DE MORGAN (2), secondo cui gli *Elementi* sarebbero un'opera senile, che EUCLIDE non potè assoggettare ad una revisione definitiva.

22. - Il XII Libro ha, a differenza del precedente, un fine esplicitamente determinato, cioè quello di gettare le basi della stereometria in senso stretto (3). Ora, siccome nella misura dei volumi il tetraedro rappresenta una parte analoga a quella che nelle misure delle aree piane rappresenta il triangolo, così EUCLIDE deve anzitutto determinare il volume di una piramide a base triangolare o a base qualunque, cioè stabilire il *primo dei teoremi di Eudosso* (L. I, n. 71-72); gli è quello che egli ottiene nella prop. 7ª e nel relativo corollario servendosi delle precedenti proposizioni 3ª-6ª. Così egli può istituire il confronto fra due piramidi (8ª-9ª) e, applicando il teorema 1° del Libro X, dedurre il rapporto fra un cono e un cilindro della stessa base e della stessa altezza, vale a dire giungere al *secondo dei teoremi di Eudosso* (prop. 10ª); ottenuto tale rapporto egli è in grado di confrontare (prop. 11ª-15ª) coni fra loro e coni con cilindri. Al paragone di due sfere (dovuto pure forse al geometra di Cnido) serve il teorema ultimo del libro, teorema che asserisce essere il rapporto di due sfere eguale a quello

---

(*Harmonices Mundi,* Praef. *Kepleri Opera* ed. FRISCH, Francfurti et Erlangae, 1864, p. 82).

(1) Quest'asserzione venne combattuta osservando che un trattato elementare è fine a sè stesso (cfr. CANTOR, *Vorlesungen,* I, p. 274); ma tale argomento non ci sembra decisivo, perchè nessuno assicura che EUCLIDE, vissuto in prossimità del periodo più splendido della filosofia greca, abbia saputo completamente emanciparsi dall' influenza delle dottrine platoniche; è già molto se egli riuscì a segnare il distacco della matematica dalla filosofia!

(2) Cfr. W. W. ROUSE BALL, *A short Account on the History of Mathematics,* IV ed., London, 1908, p. 56.

(3) Si noti, però, che in EUCLIDE non si trova mai una vera misura: di ogni superficie e di ogni volume egli si limita a determinare il rapporto con un'altra superficie od un altro volume conosciuti.

dei cubi dei loro diametri: era riserbata ad ARCHIMEDE (v. n. 38) la scoperta del rapporto fra un cilindro o un cono ed una sfera.

Prima di lasciare il Libro XII degli *Elementi* importa fare alcune osservazioni. La prima è che le prop. 1ª, 2ª e 16ª di esso appartengono alla planimetria; se le incontriamo qui è che la determinazione del rapporto di due poligoni simili o di due circoli (1) ha stretta analogia con le ricerche testè riassunte. Lo stesso può ripertersi dei problemi 16 e 17: la loro presenza sembra quindi mostrare come EUCLIDE non escludesse la possibilità di riunire la geometria piana con la solida, almeno nei casi in cui dal riavvicinamento delle proprietà analoghe nel piano e nello spazio si riuscisse a spargere più luce su le une e le altre. — La seconda osservazione è che il Libro ora esaminato offre i primi esempi di applicazione di quel procedimento (che vedremo usato magistralmente da ARCHIMEDE) con cui gli antichi senza invocare considerazioni infinitesimali riuscirono a risolvere tante importanti questioni che i moderni considerano come di pertinenza dei nuovi calcoli. Nell'intento di porgere fin d'ora al lettore un'idea di questo procedimento le cui origini, come sappiamo (L. I, n. 72), risalgono ad IPPOCRATE ed EUDOSSO, — riporteremo qui, riassumendone le dimostrazioni, due dei teoremi del Libro anzidetto.

Prop. 2ª. — *Due circoli stanno fra loro come i quadrati dei loro diametri.*

Siano C_1 e C_2 i circoli, D_1 e D_2 i loro diametri. Dico che:

$$C_1 : C_2 = D_1^2 : D_2^2 .$$

Infatti, se ciò non accade, esisterà uno spazio $C \gtrless C_2$ tale che

$$D_1^2 : D_2^2 = C_1 : C .$$

(1) La determinazione del rapporto delle aree di due circoli è il primo esempio offerto da EUCLIDE del metodo di esaustione. Notisi ancora, con O. STOLZ (*Math. Annalen*, T. XV, 1879, p. 269), che siccome per EUCLIDE hanno rapporto soltanto due grandezze tali che vi sia un multiplo dell'una maggiore dell'altra (L. V, def. 3), così, prima di parlare del rapporto fra due circoli, sarebbe stato necessario dimostrare l'esistenza di un multiplo del circolo minore, che fosse più grande del circolo maggiore.

Supponiamo, anzitutto, che sia $C < C_2$. Si potrà inscrivere in C_2 un poligono regolare I_2 di 2^n lati tale che risulti

$$C_2 - I_2 < C_2 - C;$$

sarà allora $I_2 > C$. Se in C_1 inscriviamo un poligono I_1 pure regolare e di 2^n lati si avrà $D_1^2 : D_2^2 = I_1 : I_2$. Ma $D_1^2 : D_2^2 = C_1 : C$ dunque $C_1 : C = I_1 : I_2$ epperò $C_1 : I_1 = C : I_2$. Ora $C_1 > I_1$, dunque $C > I_2$ il che è in contraddizione colla relazione $C > I_2$ dedotta dall'ipotesi $C < C_2$. Dunque non può essere $C < C_2$.

Sia invece, se è possibile, $C > C_2$. Osserviamo che dalla $D_1^2 : D_2^2 = C_1 : C$ risulta viceversa $D_2^2 : D_1^2 = C : C_1$; ed essendo $C > C_2$ esisterà uno spazio $C' < C_1$ tale che $C : C_2 = C_2 : C'$. Sarà allora $D_2^2 : D_1^2 = C_2 : C'$, il che è assurdo per quanto precede. Dunque non può essere neppure $C > C_2$. Ne segue $C = C_2$ epperò $C_1 : C_2 = D_1^2 : D_2^2$. c. d. d.

Prop. 18ª. — *Due sfere stanno fra loro come i cubi dei loro diametri.*

Siano S_1 e S_2 le sfere, D_1 e D_2 i loro diametri. Dico che:

$$S_1 : S_2 = D_1^3 : D_2^3.$$

Infatti, se ciò non accade, esisterà una sfera $S \gtrless S_2$ tale che:

$$D_1^3 : D_2^3 = S_1 : S.$$

Supponiamo, anzitutto, sia $S < S_2$ e immaginiamo che queste due sfere abbiano il medesimo centro. Si potrà allora inscrivere nella maggiore una figura (generata dalla rotazione di un poligono parilatero attorno alla congiungente due vertici opposti) I_2 la cui superficie non tocchi S. In S_1 s'inscriva una figura I_1 simile a I_2. Sarà $I_1 : I_2 = D_1^3 : {}_2^3$; ma è anche $S_1 : S = D_1^3 : D_2^3$; dunque $S_1 : S = I_1 : I_2$, ossia $S_1 : I_1 = S : I_2$. Ora $S_1 > I_1$, dunque anche $S > I_2$, il che è assurdo, perchè la figura I_2 contiene la sfera S. È dunque assurda la supposizione $S > S_2$. E similmente dimostrerebbesi che se S' è una sfera minore di S_1 non può essere $S_2 : S' = D_2^3 : D_1^3$.

Sia, invece, se è possibile, $S > S_2$. Essendo $S_1 : S = D_1^3 : D_2^3$, sarà pure $S : S_1 = D_2^3 : D_1^3$; ed essendo $S > S_2$ esisterà una sfera S' tale che $S : S_1 = S_2 : S'$. Verrà allora $S_2 : S' = D_2^3 : D_1^3$, il che è impossibile, come ci è osservato più sopra. Dunque non può essere neppure $S > S_2$. Ne segue $S = S_2$, epperò $S_1 : S_2 = D_1^3 : D_2^3$. c. d. d.

Su questo uniforme andamento di dimostrazione ritorneremo con maggiore agio, dopo avere studiate le memorabili applicazioni che ne fece ARCHIMEDE. Qui però vogliamo osservare come le questioni, nelle cui soluzioni esso viene

invocato, sono quelle che implicano in qualche modo l'idea d'infinito; ora, di questo importante concetto noi vedemmo (nn. 48 e 49) fatto uso, poco felicemente, nell'epoca anteriore a quella che attualmente ci occupa, mentre durante il periodo aureo della geometria greca lo troviamo scrupolosamente bandito. Sembra, quindi, che i matematici precedenti Eudosso, dopo essersi invano sforzati di porlo a base di argomentazioni rigorose, abbiano finito col cercare e scoprire un artificio logico conducente ai medesimi risultati, ma dal quale quel concetto fosse bandito. In qual modo e per opera di chi sia accaduto il passaggio dall'uno stadio all'altro, è un problema storico del più alto interesse, ma la cui soluzione non può fondarsi su alcun documento a noi noto (1); quel passaggio, però, è per fermo una delle prove più convincenti dello spirito eminentemente scientifico da cui il popolo greco fu animato sin dai tempi più remoti.

23. - Delle cinque proposizioni con cui si apre il L. XIII trattammo diffusamente nel Libro precedente (n. 70); esse sono ivi esposte perchè la *sectio aurea*, a cui si riferiscono, ha una parte importantissima nello studio delle proprietà metriche dei poliedri regolari convessi, studio che è il fine precipuo del detto libro. Ad esse tengono dietro un teorema che dice essere irrazionali *recisi* (cfr. n. 19) le due parti di una retta divisa in media ed estrema ragione, e poi alcune proposizioni metriche analoghe (7^a-82^a), fra le quali ci basti notare quella (11^a) da cui si apprende la natura dell'irrazionalità del lato del pentagono regolare inscritto. Le cinque proposizioni 13^a-17^a insegnano a inscrivere in una sfera i cinque poliedri convessi regolari; dalle costruzioni indicate si deducono i rapporti dei lati di questi poliedri al raggio della sfera circoscritti, il che abilita (prop. 18^a) (2) a confrontare fra loro i lati stessi. Il risultato di questo paragone è assai notevole, eppure è poco conosciuto perchè il XIII Libro si suole escludere dalle edizioni scolastiche degli *Elementi*; per tale ragione e perchè le investigazioni in discorso vennero svolte ulteriormente e completate in lavori

(1) Presenta molta verosimiglianza l'ipotesi che quel passaggio sia opera precipua di Eudosso da Cnido.

(2) Di questa proposizione nell'edizione dell'Heiberg sono registrate due dimostrazioni.

di cui fra breve dovremo occuparsi, crediamo necessario indicare rapidamente un modo per ottenere facilmente le espressioni dei lati (l_4, l_6, l_8, l_{12}, l_{20}) dei cinque poliedri regolari convessi in funzione del diametro D della sfera ad essi circoscrittai

TETRAEDRO. — Sia $PQRS$ il tetraedro dato; si conduca il diametro PP' della sfera circoscritta, il quale incontri in H il piano QRS: condotte QH e QP', sarà $PQ = l_4$ (lato del tetraedro), $PP' = D$ e per conseguenza:

$$QP' = \sqrt{D^2 - l_4^2} \ , \ QH = \frac{l_4\sqrt{D^2 - l_4^2}}{D};$$

e siccome l_4 non è che il lato del triangolo regolare inscritto nel cerchio di raggio QH, così avremo

$$l_4 = QH \cdot \sqrt{3} = \frac{l_4\sqrt{D^2 - l_4^2}}{D}\sqrt{3}$$

e quindi

$$[1] \qquad l_4 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,D.$$

CUBO. — Essendo la semidiagonale del cubo raggio della sfera circoscritta, si ha subito

$$[2] \qquad l_6 = \frac{D}{\sqrt{3}}.$$

OTTAEDRO. — Gli spigoli del tetraedro uscenti da un vertice hanno per estremi i vertici di un quadrato, a cui è circoscritto un circolo massimo della sfera di diametro D, onde

$$[3] \qquad l_8 = \frac{D}{\sqrt{2}}.$$

ICOSAEDRO. — Consideriamo un vertice A dell'icosaedro ed i cinque spigoli AA_1, ..., AA_5 uscenti da esso. I loro estremi sono i vertici di un pentagono regolare avente i lati eguali a quelli dell'icosaedro; conduciamo il diametro

AA' della sfera e determiniamone l'intersezione H col piano di quel pentagono. Condotte le rette A_1H e A_4A', otterremo un triangolo rettangolo avente per altezza il raggio r del cerchio circoscritto a quel pentagono; si avrà quindi (ragionando come nel caso del tetraedro)

$$r = \frac{l_{20}\sqrt{D^2 - l_{20}^2}}{D}.$$

E siccome l_{20} è il lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio di raggio r così

$$l_{20} = r\,\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}.$$

Eliminando r si ottiene un'equazione, da cui si trae

[4] $$l_{20} = D\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$$

o anche

[4'] $$l_{20} = D\left\{\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}} - \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{20}}\right\}.$$

Inoltre

$$r = \frac{D}{\sqrt{5}}.$$

DODECAEDRO. — Similmente, detto B un vertice di un dodecaedro e BB_1, BB_2, BB_3 i tre spigoli uscenti da esso, B_1, B_2, B_3 saranno vertici di un triangolo equilatero avente i lati eguali alle diagonali δ di un pentagono regolare di lato l_{12} (lato del dodecaedro), onde

$$\delta = l_{12}\,\frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

D'altronde δ è anche lato di un triangolo equilatero $B_1\,B_2\,B_3$ inscritto in un cerchio il cui raggio r è dato (come nei casi

del tetraedro e dell'icosaedro) dall'equazione

$$r = \frac{l_{12}\sqrt{D^2 - l_{12}^2}}{D},$$

onde

$$\delta = r\sqrt{3}.$$

Eliminando δ e r fra le tre equazioni scritte se ne trova una quarta fra D e l_{12} dalla quale si desume

$$[5] \qquad l_{12} = D\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{12}}$$

o anche

$$[5'] \qquad l_{12} = D\left\{\sqrt{\frac{5}{24}} - \sqrt{\frac{1}{24}}\right\}.$$

Le espressioni [1] ... [5] dei lati dei cinque poliedri regolari compendiano tutte le proprietà rilevate da EUCLIDE nella penultima proposizione degli *Elementi*. L'ultima stabilisce che si è così esaurito lo studio dei poliedri regolari (sottinteso *convessi*), non essendovene altri all'infuori dei cinque anzidetti.

24. - Qual grado di originalità posseggano gli *Elementi* emerge da quanto dicemmo nelle pagine precedenti e nel Libro I della presente storia. Ad EUCLIDE non appartengono i primi due libri, nè il IV, che dovevano esser noti nel loro insieme ai Pitagorici; non il III, che con ogni probabilità è opera dei geometri del V secolo a. C., nè il V che sappiamo essere frutto delle ricerche di EUDOSSO; nel VI forse egli contribuì a rendere rigorose le dimostrazioni di verità intuitive e nei tre seguenti a coordinare e completare le verità aritmetiche note ai seguaci di PITAGORA (1); nel comporre il X sfruttò i lavori dl TEETETO e dei tre ultimi trovò i materiali già preparati da ARCHITA e dai geometri suoi contemporanei, da TEETETO, da ARISTEO e da coloro che proseguirono le ricerche sui poliedri regolari, inaugu-

(1) Cfr. *Euclidis Opera Omnia*, T. V, p. 365, scolio n. 8.

rate da PITAGORA e PLATONE (1). La geometria non uscì, dunque, dal capo di EUCLIDE, come Minerva da quello di Giove (2), onde a ragione il TARTAGLIA scrisse: « che l'altezza delle cose di che ha trattato EUCLIDE non sono quelle che vi abbiano dato si gran nome perchè la maggior parte di quelle erano note a cadaun Philosopho, perchè molti altri anciani havevano di tal materie abbondantemente trattato avanti di EUCLIDE, ma solamente per haverle così con tanto mirabil ordine raccolte, assettate et ordinate » (3).

Nè a EUCLIDE spetta il merito di avere per primo avuto l'idea di riunire in un corpo di dottrina i risultati delle ricerche anteriori, perchè sappiamo che egli fu preceduto da IPPOCRATE, LEONE e TEUDIO; epperò gli *Elementi*, lungi dal presentare l'aspetto di un picco isolato in una vasta pianura, appaiono siccome uno dei costituenti una lunga catena di montagne. E, a parer nostro, non è lecito nemmeno asserire che EUCLIDE ne rappresenti la cima più elevata, perchè la sua posizione ufficiale avrà contribuito per fermo assai efficacemente a che il suo manuale venisse considerato, prima dai suoi immediati discepoli e poi dai sistematici laudatori del Museo di Alessandria, siccome la Bibbia dei geometri, che esso, quindi, facesse trascurare, dimenticare e perdere le antiche opere rivali. Tuttavia, non v'ha dubbio che, con piena ragione, gli *Elementi* furono assunti come prototipo dei trattati sintetici, cioè di quelle esposizioni scientifiche in cui l'autore procede costantemente dal noto all'ignoto, dal particolare al generale, sfruttando ad ogni passo le nozioni già acquisite, per stabilirne altre da utilizzare più tardi.

La questione di originalità si ripresenta quando dalla sostanza si passa a considerare la forma degli *Elementi* (4).

---

(1) Per altre notizie sulle proposizioni degli *Elementi* note prima di EUCLIDE, v. L. III, n. 24.

(2) Questo erroneo apprezzamento informa un curioso dialogo fra PAPPO ed EUCLIDE immaginato da W. R. HAMILTON e pubblicato da R. P. GRAVES nell'Appendice al vol. I (1882) della *Life of Sir William Rowan Hamilton*.

(3) *Opere*, Venezia, 1606, p. 273.

(4) Altre osservazioni al riguardo ci accadrà di fare nel Libro III, n. 27.

La rigida uniformità dello stile euclideo è nota a tutti (1): per ogni teorema, dopo l'enunciato (*protasi*), vengono subito indicate le condizioni da imporsi ai dati, quando sia necessario limitarne l'arbitrarietà; segue la ripetizione dell'enunciato sulla figura (*ectesi*) e poi la *costruzione*, cioè l'enumerazione di tutte le linee che fa mestieri tracciare per dimostrare il teorema proposto; a cui tien dietro la *dimostrazione:* questa si chiude con la protasi o l'ectesi invertita e le sacramentali parole *come dovevasi dimostrare* (2). Tale chiusa uniforme, che venne abbandonata subito dopo EUCLIDE, ha forse le sue scaturigini nei ritornelli in uso nelle poesie didascaliche (3), e serviva ad EUCLIDE, a caratterizzare la natura della proposizione trattata, perchè tutto induce a credere che le intestazioni di *problema* e *teorema* siano dovute a posteriori amanuensi o commentatori (4). Ora questa regolarità, così fedelmente osservata, sembra contrastare col genio del popolo greco, geloso conservatore di ogni forma di libertà; onde è naturale cercarne le origini sotto altro cielo: e poichè nel *Manuale del calcolatore* egiziano (cfr. App. I al L. I) la soluzione di ogni problema comincia colle medesime parole, così si è supposto che la forma euclidea rappresenti lo stadio più evoluto di uno stile geometrico, nato in Egitto e perfezionatosi successivamente per opera di vari geometri greci (5). È questa un'ipotesi che ha molta verosimiglianza, benchè non si possa stabilirne la verità con un alcun dato di fatto (6). Coll' indicazione di tale congettura chiudiamo il nostro studio su gli *Elementi di Euclide*, chiedendo venia al lettore per esserci tanto dif-

---

(1) Cfr. le *Definizioni* di ERONE (*Heronis Alex. Opera*, T. IV, Lipsiae, 1912, p. 120-122).

(2) Un analogo andamento costante hanno i problemi.

(3) P. TANNERY, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne.* Paris, 1893, p. 24.

(4) Cfr. PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 24.

(5) CANTOR, *Vorlesungen,* I, p. 270; HEIBERG, *Studien* cit., p. 35

(6) A coloro che pensano essere la rigorosa forma euclidea opera di EUCLIDE, si può replicare con HANKEL (op. cit., p. 385 che la logica scientifica, quale si trova insegnata da ARISTOTELE, non si saprebbe concepire ove già prima la matematica non avesse offerto l'esempio di una scienza rigorosamente dimostrativa.

fusi su quest'opera; e speriamo che egli ci scuserà, considerando che siccome da essa trae origine la letteratura matematica greca, così fa d'uopo conoscerla a fondo per invocarla quale punto di riferimento in qualunque investigazione sulla storia della geometria; d'altronde, qual'altra produzione matematica può vantare un'influenza più ampia, costante, benefica?

25. - Quantunque dalla maggioranza EUCLIDE sia conosciuto esclusivamente come autore degli *Elementi*, pure questi rappresentano la più importante e voluminosa, ma non l'unica delle sue opere da noi possedute: havvene un'altra, di cui è possibile formarsi un concetto esatto e su cui è lecito formulare un giudizio, benchè non si presenti a noi sotto forma identica a quella che ebbe in origine (1); è quella intitolata *Dati* (2).

EUCLIDE dicendo che una cosa è *data* intende che è *determinata* (non necessariamente in modo unico) virtualmente dalle condizioni che egli assegna, e distingue tre modi in cui ciò può accadere: la cosa, cioè, può essere *data di specie* (p. es. un poligono simile a un poligono dato) (3), o *data di posizione* (p. es. il punto comune a due linee concorrenti conosciute), o *data di grandezza* (p. es. un circolo di dato raggio). Col nome di *dati* egli designa, poi, le proposizioni in cui una o più delle cose di cui si parla non hanno nell'enunciato la determinazione di posizione e grandezza che ad esse deriva in fatto dalle ipotesi e che si troverebbe nell'enunciato di un teorema ordinario (completo); la tesi da dimostrare consiste appunto nell'affermazione che la determinazione anzidetta è conseguenza necessaria delle

(1) Ciò emerge esaminando la *Collezione* di PAPPO; i punti di disaccordo fra il testo ed il commento sono da noi additati in alcune delle note seguenti.

(2) *Euclidis Data.* CLAUDIUS HARDY *graece nunc primum edidit, latine vertit, scholiisque illustravit.* Lutetia Parisiorum, 1625; PEYRARD, *Les oeuvres d'Euclide*, T. II, Paris, 1818; BUCHBINDER *Euclids Porismen und Data.* Naumburg, 1866, p. 29-43; *Euclidis opera omnia*, Vol. VI, 1896, ed. H. MENGE. Altre edizioni sono registrate nella precitata *Bibliografia euclidea* del RICCARDI.

(3) Forse per un *lapsus calami* nella prop. 39ª egli dice *dato di specie* un triangolo del quale si conoscono i lati.

ipotesi, cioè implicitamente compresa in questa (1). Molti teoremi di geometria si possono facilmente trasformare in *Dati:* così dai teoremi 35° e 36° del Libro I degli *Elementi* — teoremi che formano la base della teoria della potenza di un punto rispetto ad un circolo — si ottengono le proposizioni 91ª e 92ª dei *Dati*, le quali affermano che, « dato in un piano una circonferenza ed un suo punto, è dato in conseguenza il rettangolo dei segmenti compresi fra quel punto e le intersezioni di quella circonferenza con una retta arbitraria passante per esso ». Similmente molte proposizioni di geometria descrittiva si possono opportunamente trasformare in altrettanti dati (2). Viceversa, non ogni *dato* si può trasformare in un *teorema completo:* ad es. il teorema « dato un polinomio qualunque $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, è dato (determinato) in conseguenza un valore di x che lo annulla » è un *dato*, il quale si potrebbe mutare in un teorema ordinario, soltanto se si conoscesse l'espressione esplicita di x in funzione dei coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

PAPPO d'Alessandria (3) e MARINO da Neapoli (4) pongono il trattato di EUCLIDE fra quelli destinati a spianare la strada a coloro che intendono addestrarsi nell'arte di risolvere i problemi di geometria; quale ne fosse la materia è in breve dichiarato dal primo dei citati commentatori con le parole seguenti (5):

Il primo libro, che è quello dei *Dati*, contiene in tutto novanta teoremi (6). Dei quali i primi ventitrè trattano tutti di grandezze, mentre il 24° si riferisce alfe linee proporzionali senza posizione assegnata. Ne seguono quattordici sulle rette date di posizione. I dieci seguenti parlano di triangoli dati di

(1) I moderni, che rifuggono dal distinguere le proposizioni in molte catogorie, hanno bandito dai trattati la considerazione dei *dati;* ciò che ora diremo mostra però che la scomparsa del nome non è in questo caso sinonimo della scomparsa della cosa.

(2) V. FLAUTI, *Geometria di sito sul piano e nello spazio*, II ed., Napoli, 1821.

(3) Nella prefazione al VII Libro della *Collezione matematica.*

(4) In un commento allo scritto di EUCLIDE che l'HARDY ed il MENGE hanno inserito nelle edizioni citate a pagina prec.

(5) PAPPO ed. HULTSCH, p. 630-40.

(6) O 95 se si presta fede alle edizioni dell'HARDY e del PEYRARD, 94 secondo il MENGE.

specie, ma non di posizione; i sette successivi di certi spazi rettilinei dati di specie, ma non di posizione; ed i sei seguenti di parallelogrammi e di applicazioni di spazi dati di specie. Dei cinque (1) che s'incontrano in seguito, il primo tratta di linee e gli altri del rapporto fra l'area di un triangolo ed il prodotto di due lati. I sette (2) che vengono poi, fino al 73° (3), si riferiscono a due parallelogrammi, e mostrano che questi paralelogrammi, in forza delle ipotesi fatte sui loro angoli, hanno rapporti dati; alcuni hanno tesi simili a quelle già dimostrate per triangoli. Delle figure considerate nei sei (4) successivi sino al 79° (5), due sono triangoli e quattro sono linee proporzionali; nei tre (6) seguenti si parla poi di coppie di rette comprendenti un dato spazio e finalmente gli ultimi otto sino al 90° (7) riflettono un circolo, dato tanto di grandezza quanto di posizione.

Dalle osservazioni di cui corredammo questo brano emerge che il testo dei *Dati*, quale risulta dai manoscritti sfruttati nelle citate edizioni, non coincide perfettamente con quello che aveva sott'occhio PAPPO; però le divergenze riflettono più la forma che la sostanza (8); anzi si può ritenere che esse derivino esclusivamente dal modo in cui le verità esposte sono distribuite in proposizioni, perchè probabilmente la 64ª e 65ª ne formavano in origine una sola mentre le 71ª e 72ª erano ritenute per corollari della 70ª, come le 75ª e 76ª della 74ª.

Le prededenti notizie che PAPPO diede (e MARINO ripetè) intorno all'origine ed all'utilità dei dati, benchè capaci di agevolare l'uso del trattato euclideo, sono evidentemente assai monche; non è difficile però sopperire alla loro deficienza. Si osservi, infatti (9), che, volendo applicare il me-

---

(1) O sei c. s.
(2) O gli undici c. s.
(3) O 78°, c. s.
(4) Cinque.
(5) O 83°.
(6) Quattro.
(7) O 95°.
(8) Cfr. anche HEIBERG citate *Studien*, p. 221-227. L'opera di tardi rimaneggiatori è visibile anche nelle molteplici dimostrazioni di cui sono munite le prop. 19ª, 21ª, 27ª, 33ª, 34ª, 45ª 46ª, 54ª, 55ª, 67ª, 68ª, 80ª, 92ª e 94ª.
(9) V. HANKEL, l. c., p. 141-42.

todo analitico alla costruzione di una figura soggetta a certe condizioni, si cerca di sostituire queste con altre equivalenti, che permettano di ottenere separatamente le varie parti di quella figura; a tale scopo s'immagina trovata una figura che soddisfaccia a tutte le date condizioni e su di essa si ragiona sinteticamente — applicando teoremi ed eseguendo costruzioni — finchè si arrivi ad una relazione fra i dati e le incognite, che abiliti a costruire una parte della figura (che, giova ricordarlo, per comodità si è tracciata, ma che realmente è ignota): da questo istante quella parte della figura si può porre nella categoria delle cose date; proseguendo in tale via si giungerà a conoscere tutte le varie parti della figura cercata. Ma, per ottenere che la soluzione raggiunga la semplicità e l'eleganza massime, fa d'uopo eliminare da questo procedimento tutto che non ne sia ingrediente indispensabile: come tale non è certamente da considerarsi ogni costruzione che insegni il modo di trovare certe parti della figura domandata, quando sia sufficiente sapere che questo modo esiste. Orbene ogni proposizione che accerti dell'esistenza di tali parti è un *dato;* una raccolta di dati è quindi di grande aiuto per chiunque voglia risolvere problemi di geometria: EUCLIDE l'ha somministrata (per primo forse) col trattato di cui ci stiamo occupando, il quale è, pertanto, un vero supplemento agli *Elementi*, e, secondo NEWTON, porge mezzi bastanti per dimostrare qualunque proposizione geometrica *senza calcolo*, cioè nel modo che quel grande geometra considerava siccome l'unico che un matematico dovesse adoperare in pubblico (1).

A meglio chiarire la natura e l'importanza delle proposizioni esposte da EUCLIDE, trascriviamo le seguenti:

45-46. Se di un triangolo si conosce un angolo ed il rapporto al terzo lato alla somma dei lati che comprendono questo, oppure un altro angolo, il triangolo è dato di specie. — 66. Se di un triangolo si conosce un angolo, sarà dato il rapporto dell'area del rettangolo compreso dai lati di quest'angolo

(1) Per maggiori particolari intorno all'ufficio dei dati si ricorra a L. F. OFTERDINGER, *Beiträge zur Geschichte des griechischen Mathematik,* Ulm, 1860, p. 13.

all'area del triangolo. — 80. Se di un triangolo si conosce un angolo ed il rapporto del rettangolo dei lati che lo comprendono al quadrato del terzo lato, il triangolo è dato di specie. — 94. Se in un circolo dato di grandezza si conduce una retta che limiti un segmento capace di un angolo dato e si biseca l'angolo in questo inscritto, la somma dei lati di quest'angolo avrà un rapporto dato con la bisettrice di esso e sarà anche dato il rettangolo della detta somma e della porzione di bisettrice esterna al segmento (1).

Accenniamo da ultimo alle prop. 58ª 59ª ove l'algebra geometrica viene applicata a dimostrare la risolvibilità dei due sistemi di equazioni

$$\frac{x}{y} = \lambda,\ (a \pm x)\, y = k^2,$$

(1) Per verificare l'esattezza, ad es., di quest'ultima proposizione si chiami $BC = a$ la retta data, A il vertice dell'angolo considerato; si ponga $AB = c$ e $AC = b$ e si indichi con d la bisettrice AD dell'angolo A e con d' la porzione esterna. Si trova facilmente:

$$d = \frac{2bc \cos \frac{1}{2} A}{b + c}$$

$$BD = \frac{ac}{b + c}\ ,\quad CD = \frac{ab}{b + c}$$

$$d' = \frac{BD \,.\, CD}{d} = \frac{a^2}{2(b + c) \cos \frac{1}{2} A}$$

$$d + d' = \frac{b + c}{2 \cos \frac{1}{2} A}$$

Se ne deduce

$$\frac{b + c}{d + d'} = 2 \cos \frac{1}{2} A\ ,\ (b + c)\, d' = \frac{a^2}{2 \cos \frac{1}{2} A}\ ,$$

eguaglianze i cui secondi membri sono dati, dal momento che si conoscono a e A, come appunto asserisce EUCLIDE.

ed alle 84ª-87ª, ove viene similmente dimostrata l'esistenza di due quantità x, y formanti un dato prodotto e soddisfacenti una seconda equazione, avente una delle forme seguenti:

$$x \pm y = a\ ,\ x^2 - y^2 = l^2\ ,\ x^2 - c^2 = \mu y^2\ (1).$$

26. - Come ci apprendono i passi riferiti nei nn. 4 e 5 del presente libro, oltre a gli *Elementi* ed i *Dati*, fa parte della collezione dei lavori geometrici euclidei un'opera che tratta *Della divisione delle figure* (περὶ διαιρέσεων βιβλίον) (2); in essa, se si presta fede a PROCLO (3), EUCLIDE insegnò a dividere il circolo e delle figure rettilinee in parti alcune

(1) Cfr. COSSALI, op. cit., p. 88-91; CHASLES, *Aperçu historique*, 2ᵉ éd., Paris, 1875, p. 11; P. TANNERY, *De la solution géométrique*, etc., p. 400-440. Si osservi a questo proposito come il primo libro dell'opera *De numeris datis* di GIORDANO NEMORARIO, matematico del secolo XIII, si possa intendere una continuazione od un commento del lavoro di EUCLIDE; infatti le proposizioni ivi trattate sono tutte casi speciali della seguente: *se sono date due equazioni di 2° grado con due incognite, saranno date anche le incognite.* Aggiungiamo ancora che EUCLIDE trovò seguaci anche fra gli Arabi; sta a dimostrarlo il celebre ALHAZEN (950-1038) che imitò il geometra greco con un importante lavoro *Sulle cose conosciute*, contenente teoremi eleganti, che vennero tradotti in francese da A. M. SÉDILLOT e pubblicati nel T. I, Paris, 1845, p. 378-400, dei *Matériaux pour servir à l'histoire des sciences mathém. chez les Grecs et les Orientaux.*

(2) Per la bibliografia dell'argomento rimandiamo alle *Notizie storico-critiche sulla divisione delle aree* pubblicate da A. FAVARO nel T. XXII, 1882, p. 129-154 delle *Memorie del R. Istituto Veneto.*

(3) Si noti anche essere opinione di M. CANTOR (*Vorlesungen*, T. II, 2 Aufl., Leipzig, 1900, p. 37 e 75) che a qualche rimaneggiamento arabo dello scritto euclideo attingessero LEONARDO PISANO, nello scrivere quella parte della *Pratica geometriae* che si riferisce alla divisione delle figure (v. *Scritti inediti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo pubblicati da* B. BONCOMPAGNI, T. II, 1962, p. 110-148), e GIORDANO NEMORARIO nel redigere il secondo libro dell'opera *De triangulis* (pubblicata da M. CURTZE nel VI fascicolo, 1887, delle *Mittheilungen des Coppernicusvereins f. Wiss. und Künste zu Thorn*); è noto che quanto scrisse FIBONACCI passò poi nella celebre *Summa de arithmetica, geometriae*, etc., di LUCA PACIUOLO.

simili a delle figure date e altre dissimili. Intorno a quest'opera non si avevano altre notizie che quelle somministrate dal citato commentatore (1), quando, intorno al 1563, GIOVANNI DEE (1527-1605), il profeta favorito di ELISABETTA d'Inghilterra e del Conte di LEICESTER, tradusse dall'arabo in latino un breve trattato di un tal MAOMETTO da BAGDAD (personaggio del tutto ignoto) nel quale credette ravvisare lo scritto di EUCLIDE; egli, coll'aiuto di F. COMMANDINO (2), ne pubblicò la sua versione che, con qualche riserva, venne accolta più tardi (1703) da D. GREGORY nella sua famosa edizione di EUCLIDE.

Tali riserve, nonchè il congenere sospetto di E. SAVILE (1549-1622) (3) che la traduzione non riproducesse integralmente lo scritto di EUCLIDE, sono avvalorate, sia dalla presenza di inesattezze, delle quali l'autore degli *Elementi* era per fermo incapace, sia dal fatto che, mentre nell'opera del geometra greco era considerato anche il cerchio (v. sopra), in quella giuntaci pel tramite del geometra orientale sono studiate esclusivamente figure rettilinee. Perciò è da ritenersi per un caso singolarmente avventuroso che un dotto orientalista, verso la metà del secolo decorso, scoprisse nella Biblioteca Nazionale di Parigi un altro manoscritto arabo, contenente gli enunciati di una serie di teoremi sullo stesso argomento; egli ne pubblicò una traduzione francese, emettendo l'ipotesi che esso riproducesse la sostanza del trattato euclideo (4), e questo avviso, fondato su ragioni intrinseche, rivelate dal confronto del testo con le informazioni di PROCLO,

---

(1) PROCLO-TAYLOR, I. p. 157.

(2) *De superficierum divisionibus liber Machometo Bagdadino adscriptus, nunc primum Joannis Dee Londinensis et Federici Commandini Urbinatis in lucem editus.* Pisauri, 1570. Nello stesso anno ne apparve una traduzione italiana dovuta a F. VIANI DE' MALATESTI DA MONTEFIORE (*Libro del modo di dividere le superficie attribuito a Machometo Bagdadino.* Pesaro, 1570).

(3) *Praelectiones tredecim in principium Elementorum Euclidis.* Oxon., 1621, p. 17-18.

(4) WOEPCKE, *Notices sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide* (*Journal Asiatique,* 4ª Serie, T. XVIII, 1851, p. 217-247); cfr. anche le posteriori *Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux d'après des traités inédits arabes et persans* (Id., V Serie, T. V, 1855, p. 220 e 238) del medesimo autore.

è oggidì generalmente adottato (1). Chi lo accetta deve dunque ritenere che questa terza opera di EUCLIDE, a somiglianza della seconda, servisse, di complemento alla prima, avendo essa per iscopo di risolvere in casi particolari il problema (suggerito forse dai bisogni della pratica) di « dividere una figura racchiusa da linee rette o circolari, mediante una o più rette, in parti aventi relazioni prestabilite fra loro o con altre figure date ».

Le figure considerate sono: il triangolo (prop. 1^a, 2^a, 3^a, 19^a, 20^a, 26^a, 27^a, 30^a, 31^a), il parallelogrammo (6^a, 7^a, 10^a, 11^a), il trapezio (4^a, 5^a, 8^a, 9^a, 12^a, 13^a, 32^a, 33^a), un quadrilatero piano rettilineo qualunque (14^a-17^a, 34^a-36^a), un triangolo di cui un lato è un arco circolare (28^a) e un cerchio (29^a). Le rette da condursi devono: o essere parallele ad un lato (1^a, 2^a, 4^a, 30^a-33^a), o passare per un punto dato del perimetro (3^a, 6^a-9^a, 16^a, 17^a, 28^a, 36^a), in particolare per un vertice (14^a, 15^a, 34^a, 35^a), o passare per un punto dato fuori del perimetro (10^a-13^a, 19^a, 20^a, 26^a, 27^a) o essere semplicemente fra loro parallele (29^a). Le proposizioni 18^a e 21^a-25^a fungono da lemmi e sono soltanto enunciate; soltanto enunciate sono pure, in generale, le costruzioni, eccezion fatta per quelle contenute nelle prop. 19^a, 20^a, 28^a e 29^a, che sono giustificate col mezzo di ragionamenti rigorosi, eleganti e fondati su verità insegnate negli *Elementi* (2).

27. - Gli *Elementi*, i *Dati* ed il lavoro che tratta *Della divisione delle figure* sono gli unici scritti di EUCLIDE, di pertinenza della matematica pura, che ci furono conservati sotto una forma che almeno permetta di pronunciare un giudizio sul loro contenuto ed il loro valore: ma essi non sono i soli e nemmeno i più originali che egli abbia composti! Fra i lavori di cui antichi scrittori ci conservarono

---

(1) M. CANTOR, *Vorlesungen* I, p. 287. HEIBERG citate *Studien*, p. 12-16 e 36-38 (ivi, p. 15, si legge: " die von Woepcke herausgegebene Abhandlung ist die Schrift Euklids περὶ διαιρέσεων und zwar vollständig „), STEINSCHNEIDER, *Euklid bei den Arabern* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., XXXI Thl., 1886, Hist.-lit.-Abth., p. 102).

(2) Riguardo alle divinazioni dell'opera discorsa, si vegga il n. 2 dell'*Appendice* al presente Libro; e riguardo ad una congenere opera di ERONE, il n. 75 del Libro seguente.

memoria, quello di cui più si lamenta la perdita è il trattato in tre libri sui *Porismi* (Πορίσματα), pel quale gli antichi professavano tale e tanta stima, che MONTUCLA credette di poter asserire che esso « était le plus profond de tous les ouvrages d'Euclide et celui qui lui ferait le plus honneur s'il nous était parvenu » (1).

Prima d'accingerci a radunare le notizie che ad esso si riferiscono rileveremo come il vocabolo *porisma* avesse assai spesso nella letteratura matematica dei Greci il significato di *corollario:* ma esso ne aveva un altro più recondito, nel quale venne appunto adoperato da EUCLIDE, nell'opera di cui stiamo per occuparci (2). Per determinare questo secondo significato l'unico scrittore del quale si può invocare l'aiuto è PAPPO. Ma, sgraziatamente, le parole del com-

(1) *Histoire des mathématiques*, 2e ed., T. I, p. 215.

(2) " *Porismi* si chiamano certi problemi analoghi ai *porismi* di EUCLIDE. Ma si dice in particolare quando dalle cose che furono dimostrate scaturisce qualche teorema che non si aveva in vista e che perciò si chiama *porisma*, come una specie di guadagno che si unisce a quello che ci si era proposti di dimostrare „. " Porisma è un vocabolo di geometria; ma ha due significati. Infatti si chiamano *porismi* i teoremi che scaturiscono dalla dimostrazione di altri teoremi come un guadagno inaspettato del quale profitta il geometra: e si chiamano anche *porismi* delle proposizioni che non hanno per oggetto nè una semplice costruzione, nè una semplice dimostrazione, ma in cui bisogna ottenere qualche cosa. Se si dimostra l'eguaglianza degli angoli alla base di un triangolo isoscele, si giungerà a conoscere ciò che è. Se si divide un angolo in due parti uguali, o si costruisce un triangolo, o si aggiunge o toglie una linea, ciò esige una costruzione. Ma se si tratta di trovare il centro di un dato cerchio, o la massima comune misura di due grandezze date, queste questioni e tutte le analoghe stanno in certo modo fra i teoremi ed i problemi: giacchè non si tratta della costruzione, nè della considerazione esclusivamente teorica delle cose cercate, ma bensì di ottenerle, perchè bisogna presentarle alla vista, porle sotto gli occhi. Tali sono i porismi composti da EUCLIDE e che egli ha riuniti nei libri intitolati *Porismi*. Ma noi non diremo niente dei porismi di tal fatta. Quanto ai porismi esistenti negli *Elementi* di EUCLIDE, essi si presentano come conseguenza delle dimostrazioni di altri teoremi, benchè non siano stati il tema delle dimostrazioni stesse „. PROCLO-TAYLOR, II, p. 98-99.

mentatore alessandrino sono ben lungi dall'essere un modello di chiarezza; a dimostrarlo basti citare il fatto che EDMONDO HALLEY, che fu un profondo conoscitore della geometria greca, candidamente confessò di non afferrarne il senso (1). Ciò, forse, poteva ritenersi dovuto al non essere la traduzione della *Collezione* da F. COMMANDINO fatta e pubblicata (Pisa, 1588, e Bologna, 1660) così fedele da permettere si giungesse ad un'interpretazione del testo accettabile da tutti: donde il movente dei numerosi tentativi che vennero fatti in passato da egregi ellenisti-geometri, per chiarire completamente il significato delle parole di PAPPO, e dei lunghi dibattiti che essi provocarono (2); tuttavia neppure l'edizione completa del testo greco, di cui F. HULTSCH arricchì la letteratura geometrica, ha posto fine a tutte le discussioni (3); sicchè noi, nel presentare ora una versione italiana del passo della *Collezione* che concerne i *Porismi* di EUCLIDE (versione fatta con l'intendimento che sia uno specchio fedele delle opinioni oggidì più diffuse) non ci lusinghiamo che, anche in tutti i particolari, essa possa riscuotere l'approvazione generale:

---

(1) APOLLONII PERGAEI *De Sectione rationis*, ecc. Oxonii, 1706, p. XXXVII.

(2) Si veggano gli articoli seguenti: P. BRETON (de Champ) *Recherches nouvelles sur les porismes d'Euclide* (*Journal de Mathématiques*, I Série, T. XX, 1855, p. 209-305; cfr. *Comptes rendus* 29 Octobre 1849 e 6 Juin 1853); Ch. HOUSEL, *Les porismes d'Euclide* (*Journ. de Math.*, II Série, T. I, 1856, p. 193-209), a cui rispose il BRETON (Ib. id., T. II, p. 185-205); VINCENT, *Notice sur les porismes* (in *La Science*, 1er Fevrier, 1857); essendo questa stata confutata dal BRETON (ib., 2, 5 et 9 Avril), il VINCENT la fece seguire da una *Seconde Notice sur les porismes* (ib., 17 et 21 Mai), che provocò il *Deuxième supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* dallo stesso BRETON (*Journ. de Math.*, II Série, T. III, 1858, p. 89-142); da ultimo, alle *Considérations sur les porismes en général et sur ceux d'Euclide en particulier* (*Journ. de Math.*, II Série, T. IV, p. 9-46) del VINCENT, rispose il BRETON (*Journ., de Math.*, II Série, T. IV, p. 153-154; *La Science*, n. 27-29). — Cfr. anche F. BUCHBINDER, *Euclids Porismen und Data* (Einladungs-Programm der k. Landes-Schule Pforta, Naumburg, 1866).

(3) Cfr. HEIBERG, *Studien über Euklid*, p. 64 e seg.

Dopo i *Contatti* s'incontrano i *Porismi* di EUCLIDE in tre libri, llezione ingegnosa di una quantità di cose utili per risolvere roblemi più difficili, dei quali porismi la natura presenta ı numero illimitato di specie (1). [Nulla fu aggiunto a quello .e EUCLIDE scrisse in origine, se si eccettuano alcuni mate-atici senza gusto del tempo anteriore al nostro che aggiun-ro ad alcuni di essi una nuova redazione secondaria. Benchè ascuno di essi sia suscettibile di una certa quantità di di-ostrazioni, come faremo vedere, pure EUCLIDE ne da per ascuno una sola, che è sempre la più chiara. I *Porismi* rac-liudono una materia sottile, ma naturale e necessaria e so-ratutto generale e di uno studio estremamente gradevole a uelli che hanno la facoltà di percepire e di ragionare]. I di-ersi generi di porismi non sono teoremi nè problemi, ma ıppresentano in un certo senso una forma intermedia [di ıodo che si possono enunciare tanto come teoremi quanto ome problemi]; ne risultò che fra i molti geometri alcuni li onsiderano per teoremi ed altri per problemi, gli uni e gli ltri badando soltanto alla forma degli enunciati. Ma le defi-izioni date dagli antichi dimostrano che essi hanno capite ıeglio le differenze che intercedono fra questi tre generi di roposizioni. Infatti essi dicevano che il teorema è una pro-osizione in cui si domanda di dimostrare ciò che è enunciato, l problema una proposizione in cui si domanda di costruire iò che è indicato, ed il porisma una proposizione in cui si lomanda di procurarsi ciò che è proposto. [Questa definizione li porisma fu cambiata dai geometri moderni, i quali non po-erono trovare tutto e conservarono soltanto i principi di que-sta dottrina, limitandosi a dimostrare che quello che è cercato è possibile senza procurarselo effettivamente. E questi geo-metri, benchè fossero condannati tanto dalla definizione quanto dal contesto, basandosi sopra una circostanza secondaria die-dero questa definizione: " quello che costituisce il porisma è ciò che manca all'ipotesi di un teorema locale „ (2). I luoghi geometrici costituiscono una classe di porismi: essi abbondano nei libri sul metodo analitico. Ma questa classe viene riunita, denominata e trattata a parte essendo più variata delle altre

(1) Le parentesi quadre designano i passi che l'HULTSCH giu-dica interpolati.

(2) Secondo M. CHASLES il senso di questa frase estremamente concisa sarebbe che il porisma è inferiore al teorema locale per quanto concerne l'ipotesi; in altre parole, quando un teo-rema locale non ha in certe parti dell'enunciato tutta la de-terminatezza che gli competerebbe, quella proposizione perde la qualità di teorema per acquistar quella di porisma.

perchè dei luoghi alcuni sono piani, altri solidi, altri lineari ed altri ancora si riferiscono alle medie proporzionali[. Accade poi ancora riguardo ai porismi che i loro enunciati vengano presentati in modo assai compendioso, sottintendendovi molte cose; ne derivò che molti geometri considerandoli soltanto sotto una parte dei loro aspetti non intesero quanto vi è di più essenziale del loro contenuto. [È pressochè impossibile riunire in un enunciato unico parecchi di questi porismi, non avendone EUCLIDE dati molti di ciascun genere, ma soltanto uno o qualcuno a mo' d'esempio. Tuttavia egli, in principio del primo libro, ha recato alcune proposizioni fra loro analoghe; sono dieci di numero ed appartengono al genere più abbondante di tutti, cioè ai luoghi]. Noi però avvertimmo che esse si potevano riassumere in un enunciato unico e scrivemmo: " Se si considerano quattro rette secantesi a due a due, e si suppone che tre dei punti d'intersezione situati sopra una di esse [o due soltanto se due delle rette date sono parallele] siano dati, mentre tutti gli altri, uno eccettuato, percorrono delle rette date di posizione, anche quest'uno descriverà una retta data di posizione (1) „. Si tratta qui di quattro rette soltanto, tre qualunque delle quali non passino per lo stesso punto; ma generalmente si ignora essere la proposizione vera per un numero qualunque di rette; si enuncia così: " Se quantesivogliano rette s'incontrano due a due, ma tre qualunque di esse non passano pel medesimo punto, se inoltre tutti i punti d'intersezione situati su una di esse sono dati e ciascuno di quelli appartenenti ad un'altra si trovi sopra una retta data di posizione „; o più generalmente così: " Se quantesivogliano rette s'incontrano a due a due, ma tre qualunque di esse non passano pel medesimo punto, se inoltre sono dati tutti i punti d'intersezione situati su una di queste rette e se finalmente fra i punti d'intersezione delle altre formanti un numero triangolare, ve ne sia un numero espresso dal lato di questo numero triangolare di soggetti a rimanere ciascuno su una retta data di posizione, purchè tre qualunque di questi non formino un triangolo (2), anche ciascuno degli altri punti descriverà una retta data di posizione „ (3).

---

(1) In altri termini: se si deforma un triangolo per modo che i suoi lati ruotino attorno a tre punti in linea retta e che due suoi vertici percorrano due rette date di posizione, anche il terzo vertice percorrerà una retta.

(2) Avente per lati tre delle rette date.

(3) In altre parole: " se si deforma un n — latero completo per modo che i suoi lati ruotino attorno ad n punti in linea retta e che $n-1$ dei suoi $\frac{n(n-1)}{2}$ vertici percorranno ciascuno

È inverosimile che l'autore degli *Elementi* abbia ignorata questa generalizzazione, ma egli avrà voluto porne soltanto i fondamenti, perchè sembra che in tutti i suoi porismi egli abbia inteso soltanto di spargere quasi i principi ed i germi [di molte e importanti cose]. I vari generi di porismi si differenziano fra loro, non tanto per le diversità delle ipotesi, quanto piuttosto per le accidentalità e le differenze delle cose cercate. [Infatti le ipotesi sono tutte fra loro differenti essendo specialissime; ma uno stesso risultato, una stessa delle cose cercate, può derivarsi da molte ipotesi differenti].

Nel I Libro dei *Porismi* si deve adunque procurarsi cose appartenenti ai generi seguenti. In principio del libro si trova la seguente proposizione: *se da due punti dati si conducano due rette a segarsi sopra una retta data di posizione, una delle quali tagli su una retta data di posizione un segmento a partire da un punto dato, anche l'altra taglierà su un'altra retta data di posizione un segmento avente col primo un rapporto dato* (1). In seguito poi: I. Questo punto sta sopra una retta data di posizione (2). II. Il rapporto di queste due rette è dato. III. Il rapporto di questa retta ad un certo segmento è dato. IV. Questa retta è data di posizione. V. Questa retta prolungata passa per un punto dato. VI. Il rapporto di questa retta ad una retta compresa fra questo punto ed un punto dato è dato. VII. Il rapporto di questa retta ad una retta abbassata da questo punto è dato. VIII. Il rapporto di questo rettangolo al rettangolo formato da questa e da una retta data è dato. IX. Di questo rettangolo è data una parte, mentre un'altra parte ha

---

una retta, gli altri $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ suoi vertici percorreranno altrettante rette: bisogna però che con quegli $n-1$ vertici non si possa formare alcun triangolo avente per lati i lati del poligono „. Avvertiamo che il significato preciso di questa proposizione fu scoperto da R. Simson e fatto conoscere in un lavoro che citeremo fra breve (p. 261).

(1) La prima delle rette date di cui qui si parla è data ad arbitrio; l'altra, come pure l'origine del relativo segmento, è determinata in conseguenza. Notiamo che lo Chasles, l'Hultsch ed altri indicano questa proposizione col n. 1 ritenendola per rappresentante del *primo genere* di porismi: il sistema opposto, da noi seguito, fu suggerito dall'Heiberg.

(2) Per intendere il significato di questa e delle frasi ellittiche congeneri, fa d'uopo tener presente che Pappo enuncia soltanto le *tesi* dei porismi; quando egli parla di *queste* rette *questi* punti, ecc. intende di indicare le rette, i punti, ecc. dei quali si parla nelle *ipotesi* (taciute) dei relativi porismi.

un dato rapporto con un dato spazio (1). X. Nello stesso tempo è dato questo spazio ovvero questo assieme ad un altro e quello ha ad un segmento un dato rapporto. XI. La retta, con la quale congiunta questa retta ha con essa un dato rapporto, è in un dato rapporto con la retta congiungente questo punto con un altro punto dato. XII. Il rettangolo di questa retta e di una retta data è eguale al rettangolo di una retta data e della congiungente di questo punto con un punto dato. XIII. Il rapporto della somma di queste rette alla congiungente di questo punto con un punto dato è dato. XIV. Questa retta seca da due rette date di posizione due segmenti formanti un dato rettangolo.

Nel II Libro le ipotesi sono differenti, ma le cose cercate sono per la maggior parte le medesime; s'incontrano inoltre le seguenti:

XV. Questo spazio o questo assieme ad uno dato ha con un dato spazio un rapporto assegnato. XVI. Il rettangolo formato da queste rette ha un dato rapporto con un dato spazio. XVII. Il rettangolo della somma di queste due rette e dalla somma di queste due altre rette ha un dato rapporto con un dato spazio. XVIII. Il rettangolo formato da questa retta e dalla somma di essa e di quella che ha con essa un dato rapporto, assieme al rettangolo di questa e di quella avente con essa un dato rapporto, ha con un certo spazio un dato rapporto. XIX. La somma di queste rette ha un dato rapporto alla congiungente questo punto con un punto dato. XX. Queste rette formano un dato rapporto.

Nel III Libro la maggior parte delle ipotesi si riferiscono al semicerchio, poche altre ai circoli ed ai segmenti circolari, invece le cose cercate sono per lo più identiche alle precedenti. Vi sono inoltre le seguenti:

XX. Il rettangolo di queste due rette ha un dato rapporto col rettangolo di queste altre due rette. XXII. Il rapporto del quadrato di questa retta ad un dato quadrato è dato. XXIII. Il rettangolo di queste rette è eguale al rettangolo di una retta data e della congiungente di questo punto con un punto dato. XXIX. Il quadrato di questa retta è eguale al rettangolo formato da una retta data e da quella determinata da una perpendicolare a partire da un dato punto. XXV. Questa retta assieme a quella che ha ad essa un dato rapporto ha un dato rapporto con un segmento dato. XXVI. Vi è un punto tale che le rette condotte da esso a questo cerchio formano un triangolo dato di specie. XXII. Vi è un punto tale che le rette condotte da esso a questo cerchio tagliano archi eguali. XXVIII. Que-

(1) Il significato di questa frase è uno dei più controversi.

sta retta è parallela ad una data di posizione o forma un dato angolo con una retta che prolungata passa per un dato punto. Nei tre Libri dei *Porismi* si trovano 38 lemmi e 171 teoremi (1).

28. - Due sono le questioni fondamentali che riflettono la dottrina dei porismi e che le parole di PAPPO non risolvono immediatamente, cioè:

I. Scoprire il significato del vocabolo *porisma;*

II. Determinare completamente e con precisione il contenuto dell'opera di EUCLIDE e possibilmente ricostruirla.

La loro importanza per la conoscenza della geometria greca è tale che, sin dal momento in cui si risvegliò il gusto per le investigazioni matematiche, molti egregi geometri si accinsero a risolverle e dei frutti che essi raccolsero è nostro dovere fare qui un cenno, restringendoci però a quegli scienziati che ottennero dei risultati di valore indiscutibile (2).

Prescinderemo da ALBERTO GIRARD (1590-1634) perchè egli, dopo avere studiato così a fondo la questione da potere asserire di essere in possesso di una completa divinazione dell'opera di EUCLIDE (3), non mise mai a parte il

---

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 648-660.

(2) Gli altri a noi noti sono: A. ANDERSON, *Animadversiones in Franciscum Vietam*. Parigi, 1617; ISMAELIS BULLIALDI, *Exercitationes geometricae tres* (id., 1657); FRANCISCI SCHOOTEN, *Exercitationum mathematicarum*, etc. Lugd. Bat., 1657 (ivi, p. 484, è usata la parola *porisma* senza dichiararne il significato); C. RENALDINI, *De resolutione et compositione mathematica*. Pataviae 1668; LAWSON, *Treatise concerning Porisms*, 1777; W. WALLACE, *Some Geometrical Porisms, with examples of their application to the solution of problems* (Trans. of the Edin. Society, T. IV, 1798); LORD BROUGHAM, *General Theorems, chiefly Porisms, in the higher Geometry* (Phil. Transactions, London, 1798); S. LHUILLIER, *Élémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique*, Genève, 1809; CARNOT, *Géométrie de position*. Paris, 1802, p. 484; EISEMANN, *Pappi Alexandrini Collec. math. Libri V pars altera*. Parigi, 1824; prefazione; NESSELMANN, *Die Algebra der Griechen*, Berlin, 1842, p. 439; nonchè alcuni che avremo occasione di citare fra breve e nell'Appendice al presente Libro.

(3) " Le tout, quand il n'y a que deux lignes qui passent par un poinct, comme jadis estoyent les Porismes d'Euclide, qui sont perdus, lequels j'espère de mettre bien tost en lumiere les ayant restituez il y a quelques années en ça ... *Tables de sinus, tangentes et secantes, etc. par* ALBERT GIRARD *samielois*. La

pubblico matematico di quanto egli aveva compiuto. A lui segue in ordine cronologico, FERMAT (1601-1665) (1), il quale verso il 1655 (2) definì il porisma con alcune parole che ci sembra opportuno di riferire testualmente: « Quum locum investigamus, lineam rectam aut curvam inquirimus nobis tantisper ignotam, donec locum ipsum inveniendae lineae designaverimus; sed quum ex supposito loco dato et cognito alium locum venamur, novus iste locus porisma vocatur ab Euclide: qua ratione locos ipsos porismatum unam speciem et esse et vocari verissime Pappus subjunxit (3) »: e per chiarire meglio il suo pensiero, che da queste parole non emerge con tutta la limpidezza desiderabile, egli enunciò cinque proposizioni che egli opinava potessero considerarsi come facenti parte dell'opera perduta (4), promettendone poi una divinazione completa, ove le persone competenti avessero accordato a tale saggio la loro approvazione. Ma, sia che questo giudizio favorevole non venisse pronunciato, sia che egli stesso avvertisse di non meritarlo, sia per altre ragioni che ci sfuggono, FERMAT non tradusse in atto il suo disegno e lasciò a ROBERTO SIMSON (1687-1768) la gloria di muovere il passo veramente decisivo verso la soluzione del famoso enigma dei porismi. Infatti questo eminente mate-

---

Haye, 1626. " Mais il est à estimer qu'il (EUCLIDE) eu plus escrit en ses trois livres de Porismes qui sont perdus, lesquels, Dieu aidant, j'espère de mettre en lumière, les ayant inventez de nouveau „. *Oeuvres mathématiques de* SIMON STEVIN, *etc. Le tout reveu, corrigé et augmenté par* ALBERT GIRARD. Leyde, 1634.

(1) *Porismatum Euclideorum renovata doctrina et sub forma isagoges recentioribus geometris exhibita* in *Oeuvres de Fermat*, ed. P. TANNERY et CH. HENRY, T. I, Paris, 1891, p. 76-84.

(2) Questa data si desume dall'essere state le ricerche di FERMAT comunicate al BULLIAUD due anni prima della redazione delle *Exercitationes* succitate.

(3) Il BRETON (p. 253 della prima fra le memorie citate) commenta queste parole come segue: " Concevons que l'on ait formé une première équation d'un lieu géométrique. Cette équation pourra être transformée d'une infinité de manières, en rapportant le point du lieu, soit à des droites fixes, soit à des points fixes, etc. Ce sont les nouvelles équations ou propositions ainsi obtenues que Fermat appelle des Porismes „.

(4) Vedine gli enunciati nell'*Appendice* (n. 3).

matico da prima riuscì a dichiarare il senso di alcune fra le proposizioni riferite da PAPPO (1) ed in seguito (2) fissò il senso della parola porisma mediante le frasi seguenti: « Porisma est Propositio in qua proponitur demonstrare rem aliquam, vel plures datas esse, cui, vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris, non quidem datis, sed quae ad ea quae data sunt eandem habent relationem, convenire ostendendum est affectionem quandam communem Propositionem descriptam (3). Porisma etiam in forma Problematis enuntiari potest, si nimirum ea quae data demostranda sunt, invenienda proponitur ». Risoluta in tal modo la prima delle questioni fondamentali che enunciammo a pag. 259 il SIMSON si è volto alla seconda, dimostrando alcune delle proposizioni che leggonsi nella *Collezione* di PAPPO e suggerendone altre, che, a suo avviso, dovevano far parte dell'opera perduta (4).

Il lavoro del SIMSON ebbe in Inghilterra parecchi continuatori e la definizione di porisma da lui suggerita fu adot-

---

(1) *Pappi Alexandrini Propositiones duae generales, quibus plura ex Euclidis Porismatibus complexus est.* (Philos. Transactions. London, 1723).

(2) *De Porismatibus tractatus: quo doctrinam porismatum satis explicatam, et in posterum ab oblivione tutam fore sperat auctor* in *Roberti Simson Opera quaedam reliqua.* Glasguae, 1776, p. 315-594.

(3) Questa definizione fu espressa in francese come segue da M. CHASLES: " Le porisme est une proposition das laquelle on demande de démontrer qu'une chose on plusieurs choses sont donnés, qui, ainsi que l'une quelconque d'une infinité d'autre choses non données, mais dont chacune est avec les choses donnés dans une même relation, ont une certaine proprieté commune, décrite dans la proposition ".

Per esempio la seguente proposizione è un porisma: " Data una retta di posizione ed una circonferenza di grandezza e posizione, esiste un punto tale che ogni retta condotta per esso tagli la retta e la circonferenza in due punti le cui distanze dal punto in questione formino un rettangolo dato ". Le cose che si devono dimostrare date sono il punto fisso ed il rettangolo costante, mentre le infinite cose non date sono le coppie di punti.

(4) Il lettore le troverà riferite nel n. 4 dell'Appendice al presente Libro.

data generalmente anche nel continente (1); anzi questa definizione venne scelta da M. CHASLES (1796-1880) come punto di partenza delle memorabili sue indagini intorno al problema storico che ora ci occupa (2). Egli, infatti, ha, in ultima analisi, svolte e completamente spiegate le idee del matematico inglese, enumerando tutte le ragioni che inducono a pensare che questi abbia divinato i pensieri degli antichi geometri. A tale scopo ha fatto vedere come la definizione del SIMSON possa venire surrogata dalla seguente, per certi riguardi (3) preferibile all'altra: « I porismi sono dei teoremi incompleti che esprimono certe relazioni esistenti fra enti variabili secondo una legge comune; relazioni indicate nell'enunciato del porisma, ma che bisogna completare determinando la grandezza o la posizione di certe cose che sono le conseguenze dell'ipotesi e che sarebbero determinate nell'enunciato di un teorema propriamente detto o teorema completo ». Inoltre ha con insuperabile chiarezza giustificata l'asserzione di PAPPO, che i luoghi sono porismi di specie particolare, e si è industriato a cercare una spiegazione del fatto che porisma e corollario venivano dai Greci indicati con lo stesso nome e la trovò nell'essere un porisma una conseguenza di un problema o di un teorema (4). L'utilità dei porismi si avverte nella ricerca dei luoghi quando si tratti di trasformare l'enunciato di un problema locale in altro equivalente, ma da cui emerga

---

(1) Fanno eccezione: J. PLAYFAIR, *On the origin and investigation of Porismes* nelle *Trans. of the R. Society of Edimburgh*, T. III, 1794: J. LESLIE, *Geometrical Analysis*, Edimburg, 1809 e 1821; H. WRONSKI, *Introduction à la philosophie des mathématigues et technie de l'algoritmie*, Paris, 1811, p. 127 e BRETON (memorie cit.).

(2) V. *Aperçu historique*, Note III. e più completamente l'opera *Les trois livres des Porismes d'Euclide rétablis pour la première fois d'après le notices et les lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de* R. SIMSON *sur le forme des énoncés de ces propositions.* Paris, 1860; inoltre *Rapport sur les progrès de la géométrie.* Paris, 1870, p. 233-242.

(3) Se non altro perchè fa vedere chiaramente la stretta parentela esistente fra la nozione di *porisma* e quello di *dato.*

(4) Questa spiegazione e l'analoga del BRETON non furono ritenute soddisfacenti dall'HEIBERG (v. citate *Studien*, p. 58).

con maggior agevolezza la natura ignota del luogo: al dire dello CHASLES l'opera di EUCLIDE sarebbe stata appunto una collezione di proposizioni, le quali, nell'antica geometria, surrogavano quelle trasformazioni algebriche, mediante le quali noi passiamo dall'equazione di un luogo riferito ad un sistema di coordinate alla sua equazione rispetto a un altro.

Ammesso ciò, non è necessario uscire dal campo della matematica propriamente detta per rintracciare il movente alla concezione del porisma e alla costruzione del relativo trattato. Tuttavia è stato acutamente osservato (1) essere possibile di collegare la dottrina che stiamo studiando ad alcune discussioni di filosofia matematica di cui si è discorso nel Libro precedente (n. 75). È noto, infatti, che gl'immediati discepoli di PLATONE si occuparono, forse per consiglio del maestro, delle somiglianze e delle differenze fra problema e teorema; PROCLO ha serbato notizia di queste indagini (2), e dalle sue parole si apprende come SPEUSIPPO ed un certo AMFINOMO asserissero esservi in realtà soltanto dei teoremi, perchè nelle cose eterne che sono l'oggetto della matematica non vi è alcuna γένεσις come esige ogni problema. MENECMO all'opposto, come sappiamo (p. 150), concepiva tutto sotto l'aspetto di problema, pur convenendo esservi due classi di problemi, in una delle quali si deve costruire qualche cosa e nell'altra mettere in chiaro qualche proprietà. Qui i porismi non fanno ancora il loro ingresso; ma è probabile che essi siano stati poi fabbricati quali armi di difesa contro SPEUSIPPO, nell'intento di porre in disparte quei problemi in cui non c'è una vera *genesi*, ma in cui si deve dimostrare, mediante una certa operazione, l'esistenza di qualche cosa, ai quali, quindi, è applicabile l'osservazione di SPEUSIPPO, dal momento che essi sono indiscutibilmente di natura teorematica. Ammesso ciò, la creazione di porismi apparterrebbe all'epoca che immediatamente precede EUCLIDE, e questi, dopo averne inseriti alcuni negli *Elementi* (L. III, prop. 25; VI, 11-13; VII, 35-36;

(1) HEIBERG, op. cit., p. 62-63. Le idee di questo erudito furono in gran parte accolte ed ulteriormente sviluppate da P. TANNERY: v. *Bulletin des Sc. math., et astr.*, II Série, T. VI, 1882, I Partie, p. 150-152; cfr. anche p. 140.

(2) PROCLO-TAYLOR, I. p. 105.

VIII, 4; X, 10; XIII, 18) — senza però designarli con un appellativo speciale —, più tardi ne avrebbe fatta una raccolta, a sussidio di ricerche più elevate.

Di una terza congettura per spiegare l'origine del concetto e del nome di porisma, non meno ingegnosa delle precedenti (1), è bene far qui cenno. L'autore di essa ha notato come un accurato esame della restituzione tentata da CHASLES dimostri che questi assai spesso pensava a teoremi generali sulle sezioni coniche, ma (per attenersi alle notizie di PAPPO) si limitò ad enunciarli per curve particolari o in modo tale che non vi comparissero se non rette e circonferenze; orbene, accettando per vera l'ipotesi citata, le stesse idee avrebbero guidato il sommo alessandrino: i suoi *Porismi* sarebbero in parte prodotti secondari della fabbricazione della teoria delle sezioni coniche ed in parte mezzi ausiliari per lo studio di queste, ed EUCLIDE, col chiamare le proposizioni da lui esposte con lo stesso nome col quale indicava i corollari, avrebbe voluto far noto che esse erano corollari *rispetto* alla teoria delle sezioni coniche.

Rileveremo ancora che M. CHASLES opina, conformemente ad un'idea di PONCELET (2), essere i porismi di EUCLIDE proposizioni appartenenti all'odierna teoria delle trasversali (ad es. fra essi avrebbe trovato posto il ben noto teorema di MENELAO), anzi, più generalmente, quelle a cui conduce la teoria della projettività (3); onde essi, ben lungi dall'essere scomparse dalla scienza, formerebbero il midollo spinale del gran corpo della geometria moderna (4). Ci sia concesso da ultimo ricordare qui che gli è nel corso delle

---

(1) Essa fu emessa dallo ZEUTHEN nel Cap. VIII della sua opera sulla teoria delle coniche.

(2) *Traité des propriétés projectives des figures* (T. I, II éd., Paris, 1865), p. XXV.

(3) Si vegga a p. 68-71 dell'opera *Les porismes d'Euclide* la traduzione in linguaggio moderno dei generi enumerati da PAPPO.

(4) È poi da notarsi che molti teoremi della geometria moderna possono enunciarsi sotto forma porismatica. Taccio di quelle due proposizioni che M. CHASLES fece conoscere nelle sue prime pubblicazioni concernenti i porismi (*Ap. hist.*, II ed., p. 279) e che L. CREMONA pose più tardi (1862), a fondamento della sua *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (v. n. 36-37) chiamandoli appunto "Porismi di CHASLES„: taccio

sue indagini sulla dottrina dei porismi che lo CHASLES fu condotto al concetto di rapporto anarmonico, a quel concetto, cioè, che gli servì più tardi di base per tutte le sue ricerche geometriche; quindi, anche se qualche critico arcigno dovesse giudicare quelle indagini dotate di scarsa originalità, dal momento che non aggiunsero alcun concetto importante e veramente originale alle idee schizzate dal SIMSON e non fecero che porne in luce tutta la portata, tuttavia esse conserverebbero sempre un posto non ispregevole nella storia della moderna geometria; tanto più che esse ebbero per ultimo risultato una completa ricostruzione dello scritto perduto (1), la quale, anche se non può da tutti riguardarsi per un surrogato di questo, è senza dubbio un lavoro scientifico degno di colui al quale fu attribuito l'onorevole epiteto di ARCHIMEDE del secolo XIX.

29. - Oltre ai *Porismi* un'altra opera di EUCLIDE scomparve dalla letteratura matematica lasciando vestigia debolissime e incerte. È quella che s'intitola *Luoghi superficiali* (Τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν); si divideva in due libri (2) e, secondo uno storico illustre (3), sarebbe stata una di quelle che abilitarono ARCHIMEDE a usare (come vedremo a suo tempo) con tanta disinvoltura certi procedimenti, che equivalgono alla nostra geometria analitica a tre coordinate. Per facilitarne l'intelligenza, PAPPO, nel VII Libro della sua *Collezione*, fece conoscere quattro lemmi (4), tre dei quali, riferendosi a proprietà delle coniche considerate come luoghi dei punti di un piano soddisfacenti a certe condizioni me-

---

pure di altre che s'incontrano nella geometria descrittiva, perchè ne scrissi altrove (v. *Vorlesungen über darstellenden Geometrie*, I Teil, Leipzig, 1907). Ma, anche l'esistenza del pentaedro di una superficie cubica si può affermare mediante un porisma dicendo: "Data una qualunque superficie di terzo ordine, esistono cinque piani e cinque numeri tali che i cubi delle distanze di un punto qualunque della superficie, moltiplicati ordinatamente per quei numeri, dànno una somma nulla". Di altre proposizioni porismatiche esistenti nelle opere di ARCHIMEDE e di DIOFANTO verrà detto altrove.

(1) Per maggiori particolari intorno a questa ricostruzione, si ricorra al n. 5 dell'*Appendice* al presente Libro.

(2) PAPPO ed. HULTSCH, p. 636.

(3) ZEUTHEN, Op. cit., p. 423.

(4) Ib., p. 1004-1014.

triche, possono prestare un sussidio molto scarso alla divinazione dell'opera perduta, mentre il senso da attribuirsi al quarto è così ambiguo che gli ellenisti non si sono ancora messi d'accordo nel fissarlo (1). Per iscoprire il tema di questa quarta opera di EUCLIDE fa mestieri, adunque, industriarsi a congegnare delle ipotesi, ispirandosi allo studio di lavori antichi superstiti. Il primo (2) che vi si provò fu CHASLES (3), il quale emise la supposizione che EUCLIDE avesse ivi studiate le quàdriche rotonde e le loro sezioni piane; a sostegno di questa opinione egli fece notare che, nella chiusa della prop. 11ª del celebre libro *Su le conoidi e le sferoidi*, ARCHIMEDE enunciò certe proprietà di queste superficie, soggiungendo τούτων δὲ πάντων φανεραί ἐντι αἱ ἀποδείξιες (4), e questa frase egli interpretò come significante *la dimostrazione di ciò è nota*, vale a dire come un richiamo ad un'opera anteriore sullo stesso soggetto e che sarebbe stata appunto quella di EUCLIDE. Ma fu obbiettato (5) che quella frase, significando invece *la dimostrazione di ciò è evidente*, non induce in alcun modo a contestare ad ARCHIMEDE i suoi diritti di priorità nello studio delle superficie di secondo grado rotonde. E, ricordando le ampie cognizioni stereometriche che si avevano prima di EUCLIDE — delle quali fa splendida testimonianza la soluzione suggerita da ARCHITA (p. 99-105) per il problema di Delo —, si preferì ritenere che uno studio delle superficie, conside-

(1) La più recente interpretazione è dovuta a P. TANNERY: v. *Bulletin des Sciences math.*, 2e Sér., T. VI, 1882. I Partie, p. 149-150; cfr. ZEUTHEN, op. cit., p. 423-430; la riferiremo nel Lib. IV (n. 20).

(2) Mi esprimo così perchè le opinioni del MONTUCLA su questo argomento erano così vacillanti che, mentre a p. 172 del T. I della sua *Histoire* citata disse che per " luoghi superficiali „ EUCLIDE intendeva " superficie in generale „, a p. 215 asserì all'opposto che con quel nome EUCLIDE intendeva designare le linee a doppia curvatura. Invece il REIMER (nelle note alla sua versione tedesca dell'*Essai sur l'hist. gén. des math.* del BOSSUT; Vol. I, Hamburg, 1804, p. 130) manifestò l'opinione che i detti tuoghi fossero curve tracciate su una superficie.

(3) Nella II Nota all'*Aperçu historique.*

(4) *Archimedis Opera omnia*, ed. HEIBERG, Vol. I, Lipsia, 1880, p. 342.

(5) HEIBERG. citate *Studien*, p. 79 e seg.

rate come luoghi di punti, fosse il principale argomento dell'opera di EUCLIDE (1); nella quale, però, avrebbero trovato posto anche il cono, il cilindro, la sfera e forse, secondo noi, il toro di ARCHITA, nonchè le quàdriche come luoghi che nascono estendendo allo spazio i tre lemmi di PAPPO dianzi citati. Ma tutte queste sono mere congetture, a cui non si può accordare un posto stabile nei fasti della scienza, il quale si deve riserbare all'opera originale od almeno alla desiderata restituzione dello scritto di EUCLIDE, alla quale si arriverà probabilmente, più con lo studio di altri nuovi documenti, che col semplice aiuto delle parole di PAPPO.

In condizioni non molto migliori ci troviamo di fronte ad un'altro scritto di EUCLIDE che, come il precedente, era scomparso fino dal secolo (VI dell'E. v.) nel quale visse EUTOCIO e che è dubbio esistesse ancora al tempo di PAPPO (2): è quello che, in quattro libri, trattava delle *Sezioni coniche* (κωνικά), e, stando a quanto dice il commentatore ora citato (3), era un rimaneggiamento di quella di ARISTEO (L. I, n. 79) e servì di base al trattato di APOLLONIO che esamineremo fra non molto (n. 55-63); si può dunque designarla come l'anello di congiunzione fra l'una e l'altra, epperò è soltanto storico l'interesse che presenterebbe il conoscerla. Per formarsi un concetto approssimativo del suo contenuto non v'ha miglior sistema che esaminare accuratamente le opere di ARCHIMEDE e segnalare le proprietà delle sezioni coniche ivi presupposte, epperò attinte da scrittori più antichi, chè tali proprietà, di regola, dovevano essere contenute nel lavoro euclideo (4). Da tale studio si trae il convincimento che EUCLIDE assumesse per proprietà fonda-

(1) Cfr. V. FLAUTI, *Soluzioni geometriche di alcuni principali problemi sulla piramide triangolare* (Atti della R. Acc. di Napoli, T. I, 1819, p. 22), e *Geometria di sito sul piano e nello spazio* (II ed., Napoli, 1821), Cap. XIV.

(2) HEIBERG, citate *Studien*, p. 89. È anche (cfr. ivi, p. 8) incerto se i tre lavori di EUCLIDE di cui parliamo nel presente n. fossero conosciuti dagli Arabi.

(2) PAPPO ed. HULTSCH, p. 672. Le notizie ivi contenute sono d'altronde confermate dalla prefazione generale alle *Coniche* di APOLLONIO (v. più innanzi n. 55).

(4) HEIBERG, *Zeit. f. Math. u. Phys.*, T. XXV, 1881, *Hist.-lit. Abth.*, p. 241 e seg.; e citate *Studien*, p. 86 e seg.

mentale delle curve da lui studiate quella espressa dalla nota equazione cartesiana $y^2 = 2px + qx^2$, che egli conoscesse alcune proprietà degli asintoti ed avesse istituite ricerche intorno alla similitudine delle coniche o dei loro segmenti; ma le tre curve erano da lui per fermo considerate a parte ed è improbabile che egli ne dimostrasse il legame con gli antichi problemi delle applicazioni di aree (1).

Tali sono i lavori di matematica pura che indubbiamente appartengono ad EUCLIDE; lo scritto Ψευδάρια (*Sofismi*), che abbiam visto (p. 190) descritto da PROCLO, si connette ad essi, essendo un lavoro didattico utile per addestrarsi a distinguere i ragionamenti esatti dai paralogismi; ma non si è sottratto all'ingiuria del tempo (2). Altre sue scritture superstiti appartengono alle applicazioni delle matematiche alle scienze naturali, onde verranno studiate da noi nel Libro veniente (nn. 28 e 51-55); esse però non sono capaci di modificare il giudizio che sin d'ora si può pronunciare su EUCLIDE: egli aveva una mente eminentemente organizzatrice, intenta più ad assodare che ad ampliare l'edificio geometrico, sollecita piuttosto a preparare futuri cultori della geometria, che a contribuire direttamente all'avanzamento di questa scienza.

---

(1) Cfr. M. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I, p. 291.

(2) È pertanto da ritenersi come un prodotto della fantasia del DE MORGAN (cfr. GOW, l. c., p. 85) l'opinione che nei Ψευδάρια fossero studiate certe classi di quantità irrazionali.

CAPITOLO II.

I pretesi continuatori degli *Elementi di Euclide.*

30. - Ai tredici libri dianzi discorsi degli *Elementi di Euclide* la generalità degli editori ne aggiunse due altri, aventi per tema lo studio dei poliedri regolari; che dessi non siano opera d'EUCLIDE emerge dal fatto che nessun manoscritto degno di fede li attribuisce senza riserve al grande maestro d'Alessandria (1) ed è confermato dalla dichiarazione di MARINO da Neapoli, il quale dice che gli *Elementi* si componevano di tredici libri soltanto (2). Essi vennero spesso attribuiti ad IPSICLE d'Alessandria (3) e considerati per un proseguimento dell'ultimo libro del celebre trattato euclideo: ma già da tempo si è avvertito che in realtà fra questo e quei due libri non esiste altro intrinseco legame, all'infuori dell'analogia dell'argomento, e che anche tali due libri devono considerarsi separatamente (4), se si segue la tradi-

(1) Cfr. le intitolazioni di mss. riportati da G. KLUGE in principio della sua dissertazione *De Euclidis Elementorum Libris qui feruntur XIV et XV*. Lipsiae, 1891.

(2) *Euclidis Data*, ed. HARDY. Parigi, 1625, p. 14.

(3) Di questo scienziato trattano SUTER-FIHRIST (p. 18) ed altri scritti citati dal KLUGE, l. c., p. 1, nota.

(4) Ciò fu osservato per la prima volta da PEYRARD (v. *Oeuvres d'Euclide*. T. III, Préf., p. II) e poi da G. FRIEDLEIN, *De Hypsicle mathematico* in *Bull. di Bibl.* ecc., T. VI, 1873, p. 193-529.

zione dei manoscritti, della quale gli antichi editori, in maggioranza, non tennero il debito conto.

Che il cosidetto *XIV Libro degli Elementi di Euclide* sia, come affermano i codici più degni di fede, opera di quell'IPSICLE il quale, prima di IPPARCO, scrisse un'opera astronomica ('Αναφορικός) di cui ci occuperemo nel Libro seguente (n. 29); il quale, per attestazione di DIOFANTO ALESSANDRINO, si occupò di numeri poligonali (v. L. V, n. 39); il quale, se si presta fede al noto romanziere alessandrino ACHILLE TAZIO (che visse nel III sec. dell'E. v.), scrisse sull'armonia delle sfere: non vi è ragione di contestarlo. Infatti, ciò farebbe vivere l'autore di quel libro fra il 150 ed il 120 a. C., il che si accorda col fatto che il libro stesso sarebbe stato scritto in Alessandria, poco dopo la morte di APOLLONIO PERGEO, e ciò risulta, tanto dallo stesso stile geometrico adoperato, il quale si attaglia allo stato della scienza nel II secolo a. C. (1), quanto dalla Prefazione di quel libro, che noi riferiremo:

Mio caro PROTARCO, quando BASILIDE da Tiro venne in Alessandria fu raccomandato a mio padre, perchè sì l'uno che l'altro erano versati nelle scienze matematiche, ed ebbe con lui molte conversazioni per tutto il tempo del suo soggiorno fra noi. Avendo discorso una volta insieme del libro di APOLLONIO concernente il confronto fra il dodecaedro e l'icosaedro inscritti nella stessa sfera ed il loro rapporto, essi si trovarono d'accordo nel ritenere che, trattando tale questione, APOLLONIO fosse caduto in errore e, come seppi da mio padre, lo corressero. Più tardi però mi venne fra mano un altro libro pubblicato da APOLLONIO medesimo, nel quale si trovava una solu-

(1) Questa opinione intorno all'epoca in cui fiorì IPSICLE è quella generalmente adottata: ciò emerge dalle dichiarazioni di M. CHASLES (*Ap. hist.*, 2e éd., p. 10), di C. A. BRETSCHNEIDER (*Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, Leipzig, 1870, p. 182), di G. FRIEDLEIN (mem. cit., p. 496), di T. H. MARTIN (*Sur l'époque et l'auteur du prètendu XV Livres des Èléments d'Euclide* in *Bull. di Bibl.* ecc., T. VII, 1874) e di M. CANTOR (*Vorlesungen*, I, p, 358). Ci dispensiamo dal discutere le opinioni discordanti di scrittori più antichi, quali il MONTUCLA (che fa IPSICLE contemporaneo di CLAUDIO TOLOMEO: *Histoire des Math.*, T. I, p. 315) ed il NESSELMANN (che lo pone nel II sec. dell'E. v.: *Die Algebra des Griechen*, p. 246-47), perchè crediamo che queste idee non meritino di trovare oggi alcun sostenitore.

zione esatta della questione anzidetta, e lo studio di esso mi procurò grande piacere. Ora tutti possono esaminare l'opera di APOLLONIO, la quale passa per lavoro accurato. Ma quanto vi aggiunsi io credo doverlo dedicare a te, a cagione della tua perfetta conoscenza di tutte le scienze e specialmente della geometria, come a giudice esperto di quanto scrissi: nella fiducia che tu, vuoi a cagione dell'amicizia per mio padre, vuoi a cagione dell'affetto per me, accoglierai benevolmente questa mia dissertazione. Ma è ormai tempo che io chiuda questo proemio ed entri in materia (1).

Ed IPSICLE « entra in materia » determinando gli apotemi del pentagono regolare e del triangolo equilatero inscritti in un cerchio, dimostrando che il primo è la semisomma del raggio e del lato del decagono regolare inscritto, mentre il secondo non è che la metà del raggio; dimostra poi che la somma dei quadrati del lato e della diagonale del pentagono regolare inscritto in un cerchio eguaglia il quintuplo del quadrato del raggio e ne deduce che « lo stesso circolo è circoscritto alle facce del dodecaedro e dell'icosaedro regolari inscritti nella medesima sfera », ed a proposito di questo teorema cita ARISTEO (cfr. p. 159) ed APOLLONIO (2). Con due differenti ragionamenti fa poi vedere che « il lato del cubo incritto in una sfera sta al lato dell'icosaedro, come la superficie o il volume del dodecaedro sta alla superficie o al volume dell'isosaedro ».

Tutto ciò IPSICLE dimostra in modo rigoroso ed elegante, ed in una forma non certo meno pregevole dell'euclidea, ma che è meno compassata e più snella, per l'assenza di intitolazioni ad ogni proposizione e la presenza di osservazioni per cementare le varie verità. Dei teoremi ivi dimostrati (se si prescinde da quelli che, appartenendo alla planimetria, fungono da lemmi e d'altronde sono ovvii) è facile persuadersi ricordando le espressioni (in funzione del diametro D della sfera circoscritta) dei lati dei poliedri regolari da noi esposte nel n. 21; infatti, dicendo in genere V_k

(1) *Euclidis Opera omnia*, ed. HEIBERG, T. V, Lipsiae, 1888, p. 2-4.

(2) Una proposizione analoga sussiste per molti altri poliedri: v. E. FEDEROFF, *Un théorème des Éléments d'Euclide, exprimé en forme très-générale* (Bull. des Sc. mathém. et astr., 2e Série, T. XVIII, 1894, I Partie, p. 59-64).

il volume e S_k la superficie del poliedro regolare di k facce ed R_k il raggio del cerchio circoscritto ad una sua faccia, si trova:

$$V_3 = \frac{D^3}{9\sqrt{3}}, \quad V_6 = \frac{D^3}{3\sqrt{3}}, \quad V_8 = \frac{D^3}{3},$$

$$V_{12} = \frac{D^3}{6}\sqrt{\frac{5(3+\sqrt{5})}{6}}, \quad V_{20} = \frac{D^3}{12}\sqrt{2(5+\sqrt{5})};$$

$$S_4 = \frac{2D^2}{\sqrt{3}}, \quad S_6 = 2D^2, \quad S_8 = \sqrt{3}D^2,$$

$$S_{12} = \frac{D^2}{2}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}, \quad S_{20} = \sqrt{3}\,\frac{5-\sqrt{5}}{2}D^2;$$

$$R_4 = \frac{D\sqrt{2}}{3}, \quad R_6 = \frac{D}{\sqrt{6}}, \quad R_8 = \frac{D}{\sqrt{6}},$$

$$R_{12} = \frac{D}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}, \quad R_{20} = \frac{D}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

Emerge da queste espressioni essere $R_{12} = R_{20}$, come trovò IPSICLE, e inoltre $R_6 = R_8$; poi

$$\frac{l_6}{l_{20}} = \frac{S_{12}}{S_{20}} = \frac{V_{12}}{V_{20}},$$

come scoprì IPSICLE, ed inoltre

$$\frac{V_6}{V_8} = \frac{S_4}{S_6}, \quad \frac{S_6}{S_8} = \frac{l_4}{l_8};$$

finalmente, dette x, y le due parti di una retta di lunghezza 1 divisa in media ed estrema ragione, si vede che, come pure dimostrò IPSICLE,

$$\frac{l_6}{l_{20}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}}.$$

31. - Il cosidetto *XIV Libro degli Elementi* consta di tre parti distinte, in ciascuna delle quali sono trattate questioni fra loro affini, concernenti la teoria dei poliedri regolari.

La *prima parte* tratta dell'iscrizione di tali poliedri in altri; ma qui la parola *inscrizione* è usata in un senso più ristretto dell'ordinario, che varia da proposizione a proposizione e si determina soltanto percorrendo la soluzione di ciascun problema. Perciò si sarebbe tentati di congetturare

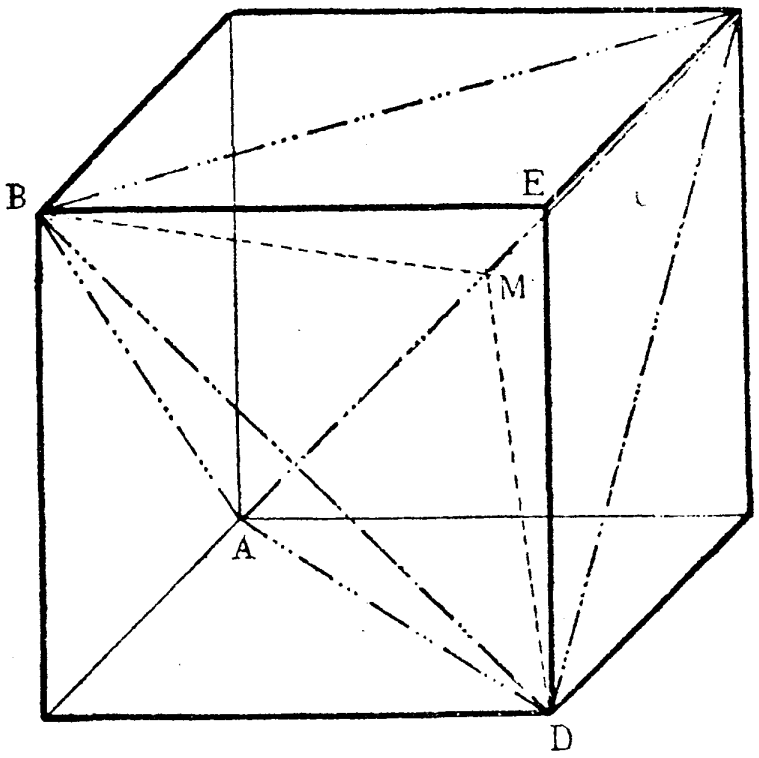


Fig. 33.

che l'autore, esaminando la struttura dei cinque poliedri regolari, si sia persuaso della verità delle proposizioni seguenti: « In un cubo gli estremi B, C, D di tre spigoli uscenti da uno stesso vertice E ed il vertice A opposto a questo sono vertici di un tetraedro regolare (fig. 33); i punti di mezzo degli spigoli di un ottaedro sono vertici di un cubo; mentre i centri delle facce di un cubo (fig. 34), di un ottaedro regolare (fig. 35) o di un icosaedro regolare sono vertici rispettivamente di un ottaedro regolare, di un cubo o di un dodecaedro regolare »: che egli, considerando come,

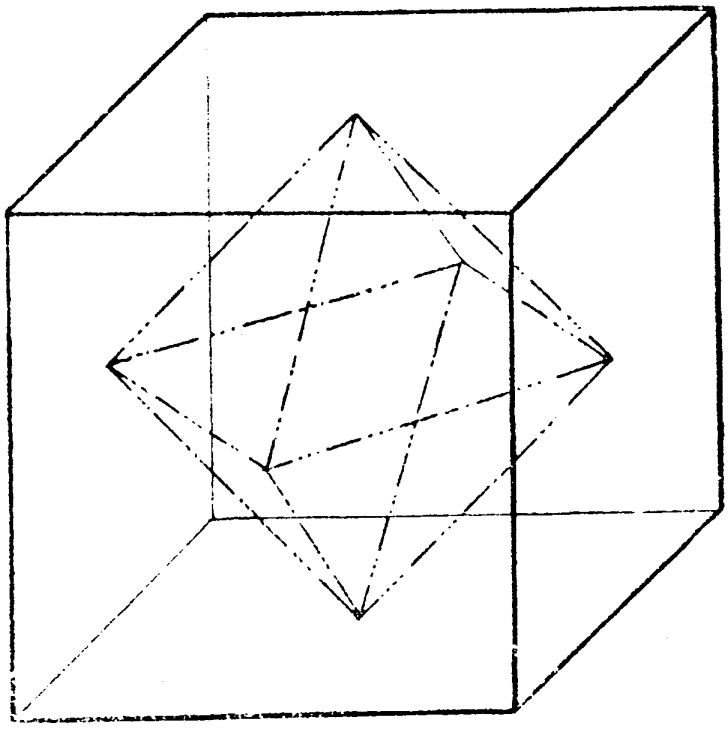


Fig. 34.

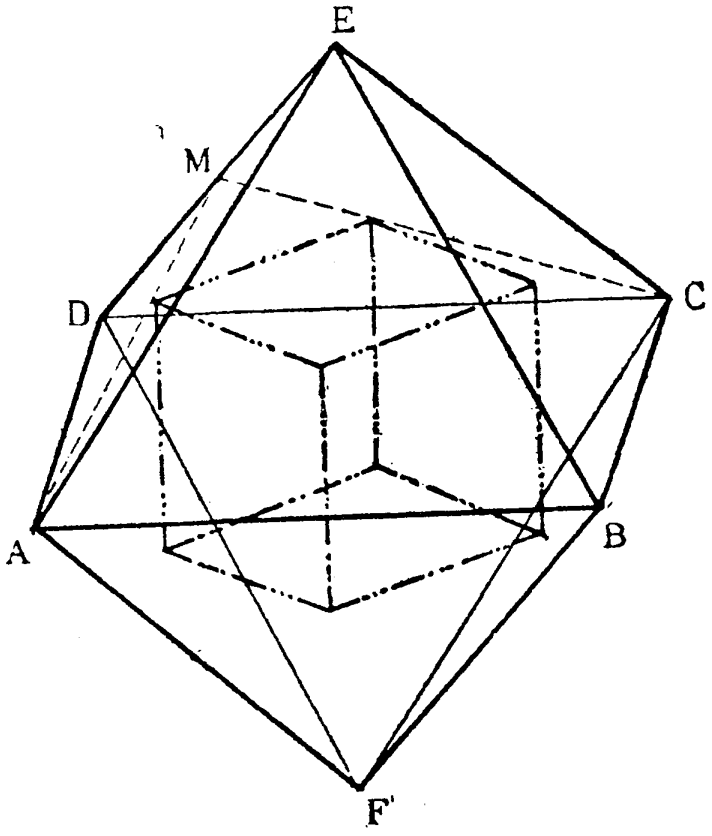


Fig. 35.

pertanto, in ogni caso da un poliedro regolare un altro ne derivasse in esso *contenuto*, siasi creduto in diritto di trasformare quelle proposizioni in altrettanti problemi su poliedri *inscritti*, le soluzioni dei quali erano implicitamente contenute nelle citate proposizioni e che si possono considerare come condensati nel seguente enunciato: « Inscrivere un tetraedro regolare, un cubo, un ottaedro regolare, un cubo e un dodecaedro regolare rispettivamente in un cubo, in un ottaedro regolare, in un cubo, in un ottaedro ed in un icosaedro ». Alle soluzioni esposte si giunge facendo tacitamente l'ipotesi che la parola « inscrizione » venga usata in ogni singolo caso in un senso speciale: epperò, pare a noi, che imperitamente l'autore abbia scelta la forma problematica per le proposizioni che aveva in vista, forma alla quale, non meno che alla imprecisione, anzi scorrettezza del dettato (1), si deve il giudizio poco favorevole che, come vedremo fra breve, molti pronunciarono sull'opera in esame.

Nella *seconda parte*, che è la più breve di tutte, vien risolto il problema: « determinare il numero degli spigoli e delle facce che ha ciascuno dei poliedri regolari ». La soluzione è esposta per l'icosaedro ed il dodecaedro, ma si avverte come similmente si farebbe per gli altri tre poliedri più semplici; ed, infatti, essa è affatto generale perchè consiste nell'osservare che il numero cercato degli spigoli è il semiprodotto del numero delle facce del poliedro pel numero dei lati di ciascuna faccia, mentre il numero dei vertici è il quoziente della divisione, pel numero delle facce di ogni angolo solido, del prodotto del numero delle facce del poliedro e del numero dei vertici di ogni faccia. Si conclude quindi che i poliedri regolari convessi di 4, 6, 8, 12, 20 facce hanno rispettivamente 6, 12, 12, 30, 30 spigoli e 4, 8, 6, 20, 12 vertici.

La *terza parte* ci sembra la più importante di tutte, ed ha per iscopo la « determinazione delle ampiezze degli angoli diedri dei cinque poliedri regolari »; ivi è, in sostanza, insegnato un procedimento semplice per segnare gli angoli rettilinei di questi diedri, dal quale è poi facile dedurre una linea trigonometrica di ciascuno. Per la soluzione lo scrittore si

(1) A conferma di ciò osserveremo che la parola πυραμίς è adoperata a significare tetraedro regolare.

confessa debitore al proprio maestro ISIDORO, del quale — per dichiarazione sua — egli espone le costruzioni (1). E queste sono, per la maggior parte, applicazioni della proprietà che hanno le mediane di un triangolo equilatero di esserne anche le altezze: sono così semplici che meritano venir qui brevemente descritte (naturalmente prescindendo dal cubo, di cui tutti i diedri sono retti).

TETRAEDRO. Si segni (fig. 33) il punto di mezzo M di uno spigolo AC di questo solido e si congiunga con gli estremi B, D dello spigolo opposto; l'angolo formato dalle due rette congiungenti è il rettilineo di uno dei diedri.

OTTAEDRO. Si segni (fig. 35) il punto di mezzo M di uno spigolo DE e si congiunga ai due vertici A, C dell'ottaedro che non sono opposti nè all'uno nè all'altro degli estremi di quello spigolo; l'angolo che così nasce misura un diedro dell'ottaedro.

ICOSAEDRO. Sia A un vertice dell'icosaedro e $AA_1,\ldots,AA_5$ gli spigoli uscenti da esso; le congiungenti il punto medio M di uno di questi spigoli, per es. di AA_2, con i punti A_1 e A_3 determinano il rettilineo cercato.

DODECAEDRO. Si considerino due facce aventi un lato comune $ABC'D'E'$ e $ABC''D''E''$; le diagonali $C'E'$ e $C''E''$ sono parallele allo spigolo AB; congiungendo il punto medio di questo ai punti medi di quelle diagonali si ottengono due rette, il cui angolo misura il diedro cercato (2).

Da questo breve riassunto il lettore trarrà (lo speriamo) elementi sufficienti per giustificarci se noi non ci uniamo a coloro i quali trovano il Libro XV degli *Elementi* tanto inferiore al XIV, che ritengono sarebbe recare oltraggio ad IPSICLE l'attribuirglielo (3). Certamente la forma imperfetta, e talvolta

---

(1) ἡ δὲ εὕρεσις, ὡς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατσ μέγας διδάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τούτον. *Euclidis Opera omnia*, T. V, pag. 50.

(2) Più semplicemente: si unisca il punto medio del segmento AB ai due vertici D', D'' e si otterranno due rette che servono allo scopo.

(3) " Je ne veux pas dire que le premier livre (sur les corps reguliers) ne soit un monument précieux de la Géométrie ancienne. Quant au second, il en est tout autrement, les démonstrations de ce livre sont incomplètes, sans rigueur et sans élégance: ce qui me porte à croire que non seulement ces

errata, e i ragionamenti incompleti, epperò non sempre conclusivi, collocano il XV Libro al disotto del precedente; tuttavia i problemi ivi trattati sono di quelli (specialmente per quanto concerne le ultime due parti) che devono necessariamente presentarsi ed imporsi a chiunque voglia erigere una completa teoria dei poliedri regolari, onde che cosa vieta di ammettere che IPSICLE non abbia sdegnato di occuparsene? Ed è soltanto il paragone dello stile del XV Libro con quello del XIV che somministra argomenti d'inoppugnabile saldezza per negare ad IPSICLE stesso la proprietà di esso libro (1). Anzi un'analisi microscopica del testo di questo induce ad ammettere che le tre parti del Libro in discorso siano state scritte in epoche differenti, epperò fa sorgere la questione di determinarne gli autori, almeno per quanto concerne le parti estreme, chè la media per la sua brevità mal si adatta a tale studio. Ora, per quanto concerne la terza parte, il PEYRARD la ritiene assai più recente del Libro XIV, il FRIEDLEIN la fa nascere nel secolo IV o nel V dell'E. v. e T. H. MARTIN l'attribuisce a DAMASCIO di Damasco, che fu discepolo di ISIDORO d'Alessandria e fiorì verso il 510 dell'E. v. (2); ma siccome questo personaggio non è noto come matematico (v. L. IV, n. 30), così il TANNERY (3) e l'HEIBERG (4) preferirono ritenere che l'ISIDORO nominato più sopra fosse ISIDORO da Mileto che, oltre ad essere stato l'architetto della chiesa di Santa Sofia a Costantinopoli, fu editore di un'opera di ARCHIMEDE e commentatore di ERONE. Ammesso ciò, la terza parte del XV Libro degli *Elementi* sarebbe dovuta ad un condisce-

---

deux livres ne sont pas du même auteur, mais encore que l'un est beaucoup plus ancien que l'autre ... PEYRARD, *Oeuvres d'Euclide*, T. III, préface, p. IV.

" Dagegen ist das XV Buch eine dürftige Zusammenstellung von ziemlich ungleichartigen Dingen, selbst nicht ohne positive Fehler ... HEIBERG, *Studien* cit., p 155.

(1) Per quanto segue v. KLUGE l. c., *passim*.

(2) Veggansi i lavori di PEYRARD, FRIEDLEIN e MARTIN dianzi citati.

(3) V. l'articolo *À quelle époque vivait Diophante?* (Bull. des Sc. math. et astr., 2e Série, T. III, 1879, I Partie, p. 263).

(4) *Revue critique d'histoire et de littérature*. 1881, p. 381; *Studien* citate, p. 156.

polo di EUTOCIO, onde apparterrebbe al VI secolo dell'E. v. Quanto poi alla prima parte, siccome in essa non vi è traccia di alcun nome, così per determinare l'epoca in cui venne scritta, fa d'uopo ricorrere esclusivamente a considerazioni intrinseche basate sullo stile geometrico in cui è redatta; e queste inducono a ritenere che essa sia stata composta dopo il XIV Libro e prima della terza parte del XV: e precisamente — paragonandola con le opere di EUCLIDE, ARCHIMEDE, ERONE, CLAUDIO TOLOMEO, TEONE SMIRNEO, PAPPO, TEONE ALESSANDRINO, PROCLO ed EUTOCIO, le quali tutte appartengono al periodo così definito — si è indotti ad ammettere come probabile che l'autore cercato fosse contemporaneo e forse discepolo di PAPPO.

Così, adunque, resta dimostrata leggendaria l'esistenza di geometri che vollero atteggiarsi a continuatori degli *Elementi* di EUCLIDE. Esiste, bensì, una non spregevole collezione di memorie che completano la teoria dei poliedri regolari, della quale EUCLIDE, nell'ultimo libro degli *Elementi*, adunò i fondamenti. Ma essa deve la vita in parte ad un lavoro di APOLLONIO PERGEO (v. più avanti n. 68), che certo non volle calcare le orme d'un collega a lui tanto inferiore, in parte a geometri ignoti, che non cessarono di coltivare un campo di ricerche che era all'ordine del giorno fin dai tempi di PITAGORA (p. 93) ed al quale le idee cosmologiche di PLATONE (p. 123) conservarono per lungo tempo un carattere di attualità.

CAPITOLO III.

Archimede.

32. - Chi istituisce un esame comparativo dei modi in cui gli scienziati che ci tramandarono notizia delle loro opere contribuirono all'incremento del sapere, non tarderà a riconoscere che tali modi sono di due sorta: vi ha chi si propose di risolvere questioni isolate, che egli ritenne degne di studio, inventando metodi applicabili, sia ad un problema particolare, sia ad un'intera classe di questioni; altri invece, dopo avere esaminati e confrontati i risultati ottenuti trattando un determinato tema, si accinse a distribuirli armonicamente, colmare le lacune che presentavano, in conseguenza a comporne un tutto organico. Mentre a quest'ultima categoria di scienziati deve senza dubbio ascriversi EUCLIDE, per converso alla prima appartiene senza contestazione il grande scienziato, alle cui produzioni matematiche è consacrato il Capitolo attuale; giacchè, mentre le opere di quello hanno tutte, benchè forse in misura diversa, un fine didattico, quelle dell'altro sono indirizzate esclusivamente alle persone già provette nelle matematiche. In ciò, forse, è da ricercarsi la ragione per cui gli scritti di EUCLIDE sono conosciuti, almeno in parte (specie in Italia) da tutte le persone anche di mediocre coltura matematica, mentre ben pochi, anche di coloro che fanno delle scienze esatte la loro principale occupazione, sono disposti a sopportare le fatiche che aspettano colui che voglia oggi prendere diretta conoscenza delle speculazioni di ARCHIMEDE (1).

(1) Che a ragione il PEYRARD, nella prefazione alla sua traduzione in francese delle opere di ARCHIMEDE, affermasse " Ar-

La cennata diversità nell'indirizzo scientifico di quei due sommi matematici deve forse la sua origine, non soltanto all'indole differente delle loro intelligenze, ma anche alle circostanze diversissime in cui trascorsero le loro vite: ed invero, mentre l'esistenza del geometra del Museo sembra essere stata preponderantemente occupata, se non del tutto assorbita, dall'insegnamento, quella di ARCHIMEDE venne spesa totalmente in investigazioni tendenti a far progredire la scienza sia pura che applicata.

Per concorde testimonianza degli antichi, ARCHIMEDE morì settantacinquenne, durante l'assedio che Siracusa, sua patria, sostenne, mentre ferveva la seconda guerra punica, onde il 212 a. C. ed il 287 sarebbero le date estreme della sua vita; ciò si accorda con la notizia, data da PROCLO (v. il brano riportato a p. 189), che ARCHIMEDE nacque verso la fine del regno del primo dei Tolomei, dal momento che questo terminò nel 287 a. C. Mancano informazioni dirette sopra la sua famiglia, ma, modificando lievemente la comune lezione di un passo dell'*Arenario* (1), si arrivò a concludere che il di

---

chimède n'est difficile que pour ceux auquels les méthodes des Anciens ne sont pas familières; il est clair et facile è suivre pour ceux qui les ont étudiés „, risulta dal giudizio che sulle opere di ARCHIMEDE pronunciò PLUTARCO, il quale nella *Vita di Marcello* scrisse: " Imperciocchè non possono trovarsi in geometria più difficili e più gravi quistioni, scritte ed esposte con elementi più semplici e più chiari di quello che abbia fatto Archimede; il che riferiscono alcuni alla buon'indole dell'ingegno suo, e alcuni altri pensano che riferir debbesi all'eccessiva fatica, ch'ei vi metteva per far che ogni cosa paresse fatta appunto senza fatica ed agevolmente. Conciossiachè talun forse in qualche proposizione, per quanto cercasse, trovar non potrebbe la dimostrazion da sè stesso, ma come veduta ed intesa l'abbia esposta da lui, si dà tosto a credere che anch'egli potuto avrebbe trovarla: per così piana strada e spedita conduce egli alle sue dimostrazioni „ (*Le vite degli uomini illustri di Plutarco; versione italiana di* GIROLAMO POMPEI, T. II, Milano, 1824, p. 461).

(1) È assai notevole che questa modificazione sia stata proposta, indipendentemente l'uno dall'altro, da C. BLASS (nell'articolo *Der Vater des Archimedes* inserito nel vol. CIV. p 256-56 delle *Astronomische Nachrichten*) e dall'HEIBERG (*Philologische Studien zu griechischen Mathematikern*, IV, Leipzig, 1883; v. pure

lui padre fosse l'astronomo FIDIA, noto fra l'altro, per avere tentato di determinare il rapporto di grandezza fra il sole e la luna. È certo che ARCHIMEDE era legato da vincoli di parentela e di amicizia a JERONE II re di Siracusa ed al figlio suo GELONE, che condivideva il trono in attesa di succedergli (il che non accadde, essendo GELONE morto nel 216 o 215 a. C., poco prima del padre).

Da giovane egli fu in Egitto ad ascoltare le lezioni, non di EUCLIDE che era già decesso in quell'epoca, ma de' suoi successori: ivi strinse amicizia con CONONE da Samo (1) ed ERATOSTENE da Cirene, ivi ritornò forse in età più matura (2). È incerto se, dopo l'Egitto, egli abbia visitata la Spagna (3), ma è incontestato che, ritornato in patria, egli (malgrado l'ufficio d'ingegnere governativo, che gli venne probabilmente affidato) potè consacrarsi attivamente alle indagini scientifiche. Quando però, durante la seconda delle grandi lotte di Roma contro Cartagine, MARCELLO pose l'assedio a Siracusa, ARCHIMEDE mise il suo genio meccanico al servizio della propria patria, e si rivelò così straordina-

---

Philologus, T. 43, p. 482): cfr. anche FÖRSTER, *Pheidias, der Vater des Archimedes* (Jahrb. f. Philologie, CXXXIII Bd., 1886, p. 678 e seg.). L'ipotesi riferita è giudicata verosimile anche dal SUSEMIHL (op. cit., I Bd., p. 723-4). Aggiungiamo a semplice titolo di curiosità che gli Arabi fecero ARCHIMEDE figlio di PITAGORA (KLAMROTH in *Zeitschr. d. deutschen morg. Gesellschaft*, XLII Bd., 1888, p. 2).

(1) Che ARCHIMEDE ricorda con lode e rimpianto nelle quattro lettere con cui inviò a DOSITEO (da Pelusio) i suoi libri *Su la sfera ed il cilindro*, *Su le spirali* e *Su la quadratura della parabola*. Secondo un'opinione del Gow (della quale sono ignoti i fondamenti) questo CONONE sarebbe il primo e DOSITEO il secondo dei successori di EUCLIDE nel Museo: v. *A short History of Greek mathematics*. Cambridge, 1884, p. 221. I meriti di CONONE sono rammentati da ARATO, CATULLO e VIRGILIO in alcuni versi che il DILLING ha riferiti a p. 47-50 della sua precitata dissertazione *De Graecis mathematicis*, Berolici, 1831.

(2) Lo fa credere il fatto che si opina aver egli in Egitto inventata la *vite* che porta il suo nome, e la notizia data da uno scrittore arabo (ricordato dall'HEIBERG a p. 6 delle citate *Studien*) che egli vi abbia ordinato il catasto.

(3) G. LIBRI, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, T. I. Paris, 1838, p. 37.

riamente fecondo nell'inventare armi di offesa, che offrì l'esempio, unico nella storia della guerra, d'un uomo combattente per tre lunghi anni contro un intero esercito; ed il duce romano per espugnare la patria d'ARCHIMEDE dovette ricorrere ad uno stratagemma. Nel susseguente saccheggio, ARCHIMEDE stesso trovò la morte (1), benchè MARCELLO avesse dato ordine formale di rispettarlo; il generale romano gli fece erigere una tomba (2), su cui venne scolpita una sfera inscritta in un cilindro, per soddisfare al desiderio di ARCHIMEDE (3) che il suo sepolcro recasse la figura la quale illustra quella delle sue scoperte (v. n. 38) a cui egli attribuiva il più gran valore (4).

Tali le notizie sicure sulla vita di ARCHIMEDE (5); nè è prezzo dell'opera di cercare faticosamente altri particolari intorno ad essa, chè in una esistenza tutta consacrata alle

(1) Le circostanze in cui essa avvenne sono dai vari storici narrate in modi differenti sui quali è inutile arrestarci: v. la succitata *Vita di Marcello* di PLUTARCO.

(2) Sembra quindi inverosimile che, come pretende uno storico arabo (citato dal LIBRI, l. c., T. I, p. 39), i Romani distruggessero quattordici carichi di manoscritti archimedei. Cfr. anche SUTER-FIHRIST, p. 17.

(3) " Quantunque poi sia stato egli inventore di molti e bei ritrovati, dicesi nulla ostante che egli pregasse gli amici e i parenti suoi di non voler, quand'ei fosse morto, porre sopra il sepolcro suo altro che un cilindro, contenente una sfera, scrivendovi la proporzione che passa tra il solido continente e quel contenuto ". PLUTARCO, *Le vite* trad., POMPEI, vol. II, p. 461-2.

(4) Questa tomba fu poi ritrovata, non senza fatica, da CICERONE quando (nel 75 a. C.) era questore in Sicilia; ora più non esiste, quantunque nelle vicinanze di Siracusa siavi una località denominata *tomba di Archimede.*

(5) La biografia scritta da un certo ERACLIDE (forse colui che il Siracusano nomina nella prefazione al suo libro *Su le spirali*) e ricordata da EUTOCIO tanto nella prefazione al commento alla *Misura del Circolo* di ARCHIMEDE, quanto in quella del commento alle *Coniche* di APOLLONIO — non è giunta sino a noi. Ma molte informazioni intorno al nostro scienziato si traggono dagli storici che parlarono delle guerre fra Roma e Cartagine (PLUTARCO, TITO LIVIO, DIODORO SICULO, SILIO ITALICO, VALERIO MASSIMO, ecc.). Esse vennero raccolte dal MAZZUCHELLI (*Notizie istoriche e critiche intorno alla vita, alle invenzioni ed agli scritti*

investigazioni astratte della scienza, gli unici avvenimenti memorabili stanno nei risultati ottenuti: la vita di uno scienziato si compendia ne' suoi lavori, e appunto alla disamina delle opere superstiti del grande cittadino di Siracusa noi ora ci volgiamo (1).

33. - Una ricerca, che conviene far precedere a questa disamina, è la determinazione dell'ordine in cui è più opportuno considerare gli scritti di ARCHIMEDE tuttora esistenti (2). Ora i codici (3) più degni di fede che vennero finora studiati li presentano in questo ordine: *Della sfera e del cilindro* (in due libri); *Delle conoidi e delle sferoidi; Delle spirali; Dell'equilibrio dei piani e loro centri di*

---

di Archimede Siracusano; Brescia, 1837) e più recentemente dall'HEIBERG (*Questiones Archimedeae*, Hauniae, 1879, Cap. I). Veggasi anche l'eccellente articolo *Archimedes* di F. HULTSCH in PAULY-WISSOWA, *Realencyclopädie des class. Alterthumswissensch.*

(1) Le migliori edizioni delle opere complete di ARCHIMEDE sono quella del TORELLI (Oxford, 1752) e quella — di cui ci serviamo noi — dell'HEIBERG (Lipsiae, 1880-1881; è in corso di stampa una ristampa, di cui è uscito nel 1910 il T. I, molto migliorata specialmente in conseguenza della scoperta di nuovi codici archimedei in una biblioteca di Costantinopoli). Una buona traduzione tedesca fu fatta dal NIZZE (Stralsund, 1824) ed una letterale in francese, del pari pregevole, dal PEYRARD (2ª éd., Paris, 1808): una italiana dovuta a V. VIVIANI, fu scoperta da A. FAVARO a Firenze. Chi intenda formarsi un concetto esatto dei metodi usati e delle scoperte fatte dal geometra che ci occupa va raccomandata l'opera di T. H. HEATH, *The works of Archimedes edited in modern notation, with introductory chapters.* Cambridge, 1897 (con un *Supplement.* 1912). Altre edizioni e traduzioni più antiche registrarono il MAZZUCHELLI (l. c., p. 93-116) e l'HEIBERG (*Quaest. Arch.*, p. 22-24).

(2) Di tale ricerca si occuparono prima il TORELLI (v. ed. cit.), poi l'HEIBERG, *Quaest. Arch.*, p. 10-12.

(3) Per tutte le notizie relative ai mss. delle opere di ARCHIMEDE rimandiamo il lettore ai *Prolegomena* al Vol. III dell'ed. dell'HEIBERG; inoltre a due posteriori memorie dello stesso autore, in una delle quali (*Mindre Afhandlinger udg. af det philologiskhist. Samfund*, Kjöbenhavn, 1897, p. 1-8) vengono apportate alcune correzioni al testo della pref. al I Libro *Su la sfera ed il cilindro,* mentre nell'altra (*Abh. zur Gesch. der Mathematik,* V Heft, 1890, p. 1-84) sono studiate le più importanti versioni latine di dette opere.

gravità (in due libri); *Arenario*; *Quadratura della parabola*. Quest'ordine sarebbe naturale di preferire e noi lo adotteremmo se non sapessimo che, in alcuni dei lavori testè enumerati, sono invocate proposizioni le quali trovano la loro giustificazione soltanto in altri posteriori; i gravi inconvenienti derivanti da tale ordinamento si eviterebbero, in parte almeno, distribuendo le opere di cui si tratta in vari gruppi, a norma degli argomenti trattati; ma si evitano tutti studiandole nell'ordine seguente a cui, appunto perciò, noi accordiamo la preferenza: *Equilibrio dei piani*, I; *Quadratura della parabola*; *Equilibrio dei piani*, II; *Sfera e cilindro*, I e II (1); *Spirali*; *Conoidi e sferoidi*; *Misura del cerchio*. E quanto all'*Arenario* ci riserbiamo a parlarne quando, nei Libri III e V, ci occuperemo dell'astronomia e dell'aritmetica dei Greci.

Oltre a questi scritti, che possediamo sotto una forma che può in complesso ritenersi non dissimile da quella in cui vennero redatti da ARCHIMEDE (2), e ad un prezioso frammento di recente scoperto (v. p. 325-8), altri ci pervennero tradotti o riassunti: di essi, come di quelle scoperte di cui altri scrittori serbarono memoria, daremo qualche notizia nel momento che giudicheremo più opportuno.

34. - Fedeli all'ordine di successione adottato per lo studio delle opere archimedee, esamineremo anzitutto i due libri *Sull'equilibrio dei piani* (Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων), fra i quali è inserito quello *Sulla quadratura*

---

(1) Che questo libro segua anche in ordine cronologico la *Quadratura della parabola* risulta dalla relativa lettera-prefazione; la quale mostra anche che questa precede la *Misura del circolo*. Invece la pref. alle *Spirali* prova che questo libro segue tanto quelli *Su la sfera ed il cilindro* quanto quelli *Su le conoidi e le sferoidi*.

(2) Stando all'HEIBERG (*Quaest. Arch.*, p. 69-77 e *Philologische Studien zu griechischen Mathematikern*, II, Leipzig, 1880) farebbero eccezione i libri *Su le spirali* e *Su la sfera ed il cilindro*, i quali non si sarebbero sottratti a modificazione dei posteri: cfr. l'ed. critica di cui ci serviamo. Le opere di ARCHIMEDE, essendo scritte in dialetto dorico, sono interessanti anche pei cultori della filologia classica: come dimostra il Cap. V delle citate *Quaest. Arch.*, nonchè le puntate IV e V delle *Phil. Studien* dell'HEIBERG.

della parabola (Τετραγονισμὸς παραβολῆς) (1). Questi tre libri formano un tutto, che si può considerare come la base della trattazione geometrica della statica (2); sono un vero capitolo di geometria a quattro dimensioni, in cui ogni punto è determinato dalle proprie coordinate e da un coefficiente che ne è il peso (3). Questo ampliamento del campo d'indagine geometrica, che ARCHIMEDE ha per tal modo effettuato, esige l'aggiunzione di nuovi postulati a quelli adoperati da EUCLIDE; ed infatti, il Siracusano espone al principio del I dei libri in esame sette proposizioni preliminari, a cui veramente egli non dà (come noi faremmo) il nome di *postulati*, ma la cui natura logica non può essere revocata in dubbio e venne riconosciuta anche dagli antichi (4). Le prime tre

(1) Non è questo certamente il titolo datovi da ARCHIMEDE, giacchè nel testo la parabola viene costantemente indicata con la perifrasi *sezione del cono rettangolo;* alcuni ritennero che il titolo fosse (come sembra risultare da un passo di EUTOCIO; *Archimedis Op. om.*, III, p. 342) περὶ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς; ma di recente W. SCHMIDT (v. l'articolo *Archimedes 'Ephodikón,* Bibl. math., III Serie, T. I. 1900) ha notato un passo di ERONE (*Opera*, ed. SCHÖNE, T. III, Lipsiae, 1902, p. 80) da cui sembra risultare invece che era Ἐφοδικῷ, del che egli riscontrò conferme in altri due passi del medesimo scritto (W. SCHMIDT, Bibl. math., III Ser., T. III, 1902, p. 143-4); però l'HEIBERG trovò (*Hermes*, T. XLII, 1907, p. 239 n.) precipitata quella conclusione.

2) Che ARCHIMEDE sia stato il primo a istituire ricerche esatte sui fenomeni fisici è incerto, anzi poco probabile; in particolare le condizioni di equilibrio della leva dovrebbero farsi risalire almeno ad EUCLIDE, ammesso che con ragione venga a questo attribuita un'operetta *Sulla leva,* che il WOEPCKE ha fatto conoscere nella *Notice sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide* (*Journal Asiatique,* T. XVIII della IV Serie, 1851, p. 217 e seg.).

(3) A ragione dunque il DÜHRING osserva: " Ueberhaupt kann man von den erhaltenen Arbeiten des Archimedes sagen, dass ihr Hauptgegenstand die reine Mathematik sei, und dass die Combination der aufgefundenen geometrischen Sätze mit mechanischen Begriffen und Problemen häufig nur dazu dient, den geometrischen Neigungen einen Gegenstand zu verschaffen „ (*Kritische Gesch. d. allg. Principien der Mechanik,* III Aufl., Berlin, 1887, p. 6).

(4) Ciò risulta dalle citazioni di GEMINO fatte da PROCLO (PROCLO-TAYLOR, II, p. 3-4) e da EUTOCIO (*Archimedis Opera omnia,* III, p. 308).

fra le citate proposizioni preliminari e alcuni teoremi che se ne deducono si riferiscono alle condizioni di equilibrio d'un'asta rigida AB, girevole attorno ad un suo punto fisso (fulcro) C e ai cui estremi sono attaccati due pesi; se si chiamano a, b le distanze di A e B da C e α, β questi pesi, e se si conviene di scrivere $A\ (a, \alpha) \gtreqless B\ (b, \beta)$ secondochè l'asta pende dalla parte di A, è orizzontale o pende dalla parte di B, allora i tre primi postulati di ARCHIMEDE dicono:

1. Se $\alpha = \beta$ e $a \geq b$ sarà rispettivamente

$$A\ (a, \alpha) \geq B\ (b, \beta):$$

2. Se $A\ (a, \alpha) = B\ (b, \beta)$ sarà $A\ (a, \alpha + \delta) > B\ (b, \beta)$;
3. Nelle stesse ipotesi $A\ (a, \alpha - \delta) < B\ (b, \beta)$ (1).

Da essi segue: Se $a = b$ e $A\ (a, \alpha) = B\ (b, \beta)$ sarà $\alpha = \beta$; se $a = b$ e $\alpha > \beta$ sarà $A\ (a, \alpha) > B\ (b, \beta$; se $\alpha > \beta$ e $A\ (a, \alpha) = B\ (b, \beta)$ sarà $a < b$. E quindi si arriva al

TEOREMA FONDADENTALE: Se $A\ (a, \alpha) = B\ (b, \beta)$ si ha $\frac{a}{b} = \frac{\beta}{\alpha}$, tanto se α e β sono fra loro commensurabili (prop. 6ª), quanto se non lo sono (prop. 7ª).

Le altre proposizioni preliminari si riferiscono ai centri di gravità di figure piane, punti che il nostro matematico non definisce (2), forse perchè già se ne era occupato nell'opera (oggi perduta, ma citata da PAPPO (3)) Περὶ γυγῶν. Dopo avere rilevate due proprietà semplici dei detti punti (proposizioni 4ª e 5ª), egli insegna (prop. 8ª) a determinare il centro di gravità della figura piana che nasce togliendo da una data una sua parte, quando sian noti i centri di gravità del tutto e di ciò che si toglie; dai teoremi 9° e 10° si apprende l'ubicazione del centro di gravità di un paralle-

(1) Per quanto concerne il valore *fisico* di questi postulati rimandiamo il lettore alle osservazioni fatte dal MACH a p. 8 e segg. dell'opera *Die Mechanik in ihrer Entwickelung* (II Aufl., Leipzig, 1899; trad. ital. di D. GAMBIOLI, Roma-Milano, 1909, p. 11 e segg.).

(2) Al silenzio di ARCHIMEDE tentò sopperire EUTOCIO (*Archimedis Opera omnia*, T. III, p. 306); però dalle parole di queste non risulta che, per ogni figura piana, esista sempre uno e un solo centro di gravità.

(3) PAPPO ed. HULTSCH, p. 1068.

logrammo e dai quattro seguenti quelle del centro di gravità di un triangolo (1); e siccome qualunque trapezio si può riguardare come differenza di due triangoli, cosi la prop. 8ª è applicabile alla ricerca del centro di gravità di tale figura; in questo modo si trova che esso sta sulla congiungente i punti medi delle basi del trapezio e la divide nel rapporto $2\,b_2 + b_1 : 2\,b_1 + b_2$, dette b_1 e b_2 le lunghezze delle basi stesse.

35. — Di queste proposizioni relative ai centri di gravità del triangolo e del trapezio ARCHIMEDE fa importanti applicazioni nel secondo dei libri componenti il gruppo che stiamo esaminando. Questo libro si apre con tre proprietà elementari della parabola, che l'autore dice essere dimostrate nei trattati sulle coniche (in quelli di ARISTEO ed EUCLIDE forse?) e che noi ritroveremo in APOLLONIO (cfr. Libro I, prop. 46, 35, 20): egli ne trae due nuove conseguenze, che gli serviranno poi. Premesso ciò, suppone di avere una bilancia AB a braccia eguali, col fulcro in C, e di appendere al braccio CB un triangolo con un lato verticale o un trapezio a basi verticali per modo che la verticale passante pel centro di gravità di quello o di questo passi per un punto di BC; e si propone (prop. 6ª-14ª) in ogni caso di determinare quale area debba avere una superficie piana affinchè, appendendola in A pel proprio centro di gravità, faccia assumere alla bilancia la prima posizione di equilibrio. Se, ora, si suppone di appendere al braccio CB un segmento parabolico avente per base questo braccio e l'asse verticale, inscrivendo in esso triangoli o trapezi della specie anzidetta, si dedurranno due limiti fra cui è compresa l'area del triangolo avente per un cateto CB, per altro cateto la verticale di C e per ipotenusa la tangente in B alla parabola (prop. 14ª), risultato questo che poi si estende (prop. 15ª) e permette di dimostrare, mediante riduzione all'assurdo (prop. 16ª), una espressione notevole dell'area di un segmento parabolico qualsivoglia. Se si chiama *base* del segmento la retta che

(1) Emerge da ciò che ad ARCHIMEDE era noto il *teorema delle tre mediane*: tuttavia per trovarne l'enunciazione esplicita ed una dimostrazione geometrica bisogna arrivare sino a LEONARDO PISANO (v. il T. II, p. 112-13 degli *Scritti pubblicati da* B. BONCOMPAGNI, Roma, 1862).

lo limita e *vertice* il punto in cui la tangente alla curva è parallela alla base, quell'espressione è contenuta nel seguente teorema (prop. 17ª): « ogni segmento parabolico è quattro terzi del triangolo avente comuni con esso la base ed il vertice ».

ARCHIMEDE giunse così (e per primo, come afferma egli stesso nella prefazione al Libro in discorso) a quadrare un segmento parabolico, anzi — prescindendo dalle ricerche troppo speciali di IPPOCRATE (p. 80 e segg.) — per primo a quadrare un'area limitata da linee non tutte rette, giacchè (come egli rileva) non riuscirono nel loro intento coloro che prima di lui tentarono di quadrare il circolo od un segmento circolare od un segmento di sezione conica.

Ad ARCHIMEDE però non isfuggì che nel suo metodo di ricerca si annida un elemento eterogeneo somministrato dalla meccanica, e gli sorse pertanto il desiderio di surrogarlo con altra argomentazione completamente geometrica. Questo legittimo desiderio viene soddisfatto dal procedimento esposto nella seconda parte del Libro che stiamo esaminando; ove (dopo avere dimostrato due semplici proprietà della parabola) egli, anzitutto, fa vedere che « un segmento parabolico è minore del doppio del triangolo di egual base ed eguale altezza » e ne deduce la possibilità di inscrivere nel segmento stesso una linea poligonale limitante, assieme alla base del segmento, un'area differente dall'area del segmento di meno d'uno spazio dato ad arbitrio. Dimostra poi che « se B è il vertice del segmento parabolico ABΓ e Δ quello del segmento analogo di base BΓ, il triangolo ABΓ risulterà ottuplo di BΔΓ » (prop. 21ª), e che « la somma di quantisivogliano spazi, ciascuno quadruplo del seguente a partire dal triangolo BAΓ, è minore del segmento parabolico considerato ». Da tali verità e da un semplice lemma di algebra geometrica (1) prop. 23ª) ARCHIMEDE

---

(1) Ecco in che consiste: dati quantisivogliano termini u_0, u_1, ..., u_n di una progressione geometrica di ragione 4, si ha

$$(u_0 + u_1 + \dots + u_n) + \frac{u_0}{3} = u_n + \frac{u_n}{3},$$

relazione che risulta da un teorema di EUCLIDE (cfr. p. 219), ma che ARCHIMEDE dimostra direttamente.

desume il risultato anzidetto (prop. 24ª) col ragionamento seguente:

Indichiamo con S il dato segmento $A\Delta BE\Gamma$ di parabola e sia $AB\Gamma$ il triangolo di egual base ed eguale altezza (fig. 36). Indichiamo ancora con K un rettangolo $= \frac{4}{3}$ del triangolo $AB\Gamma$. Bisogna dimostrare che $K = S$. Infatti, se ciò non accade, dovrà essere $K > S$ o $K < S$. — Sia in primo luogo, se è possibile, $S > K$. Nei due segmenti $A\Delta B$ e $BE\Gamma$ inscriviamo i triangoli $A\Delta B$ e $BE\Gamma$ per modo che la tangente in Δ sia parallela ad AB e

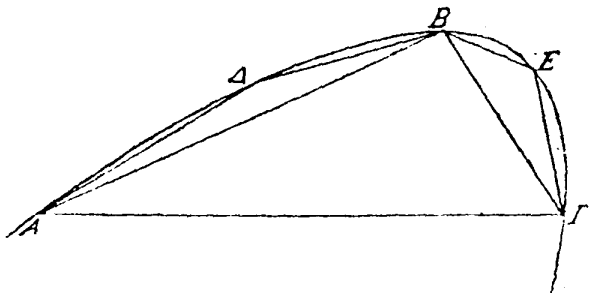


Fig. 36.

quella in E a $B\Gamma$. Operiamo similmente sui quattro residui segmenti parabolici e così continuiamo finchè la somma σ dei segmenti residui risulti $< S - K$ (prop. 20ª, cor.): detta ancora Σ la somma dei triangoli successivamente inscritti, avremo quindi $\sigma < \Sigma + \sigma - K$ cioè $\Sigma > K$ il che è assurdo. Infatti, noi abbiamo una somma (Σ) di spazi in progressione geometrica di ragione $\frac{1}{4}$, cioè il triangolo $AB\Gamma$ che è quadruplo della somma dei due triangoli inscritti nei quattro segmenti residui e così via; e perciò (prop. 23ª) la somma degli spazi seguenti il primo, cioè $\Sigma - AB\Gamma$, è minore di $\frac{1}{2}$ del primo $AB\Gamma$, onde $\Sigma < \frac{4}{3}\ AB\Gamma = K$. Dunque non può essere $S > K$. — Supponiamo invece sia $S < K$. Si considerino gli spazi $Z = AB\Gamma$, $H = \frac{1}{4}\ Z$, $\Theta = \frac{1}{4}\ H$, e così via finchè si arrivi ad uno spazio $I < K - S$. Sarà

$$Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3}\ I + \frac{4}{3}\ Z \quad \text{(prop. 33ª)}$$

epperò

$$K = Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3} I$$

e

$$K - (Z + H + \Theta + I) < I:$$

donde, per essere $I < K - S$, si desume

$$S < Z + H + \Theta + I,$$

il che è impossibile. Si è infatti dimostrato (prop. 22ª) che, dati quantisivogliano spazi in progressione geometrica di ragione $\frac{1}{4}$, il massimo dei quali sia eguale al triangolo inscritto in un segmento S di parabola, la loro somma è $> S$. Perciò non può neppure aversi $S < K$. Ma si è già escluso che sia $S > K$. Dunque $S = K$.

36. - Le questioni risolte nei due libri ora esaminati ne suggeriscono tosto un'altra: la determinazione cioè del centro di gravità di un segmento parabolico; ad essa è consacrato il II Libro sull'*Equilibrio dei piani*. L'artificio usato da ARCHIMEDE a tale scopo è la considerazione della *figura propriamente inscritta* in un segmento parabolico; sotto questo nome egli intende la figura somma del triangolo avente comune con questo la base ed il vertice, dei triangoli analoghi dedotti dai due segmenti parabolici residui, poi di quelli risultanti dai quattro segmenti parabolici rimanenti e così via. Il centro di gravità di una tal figura sta sull'*asse del segmento* (retta congiungente il vertice col punto medio della base), altrettanto dicasi del centro di gravità di qualsiasi figura propriamente inscritta, ma la distanza fra l'uno e l'altro può rendersi minore di qualunque lunghezza data. Da tutti questi teoremi si deduce senza stento che (prop. 8ª) « il centro di gravità di un segmento parabolico sta sull'asse e lo divide in due parti tali che quella adiacente al vertice sta all'altra come 3 a 2 ». Che se poi si considera il trapezio mistilineo compreso da due corde parallele di una parabola (ne diremo b_1 e b_2 le lunghezze e dai relativi archi di curva, il centro di gravità si può assegnare mediante un lemma un po' complicato di algebr

geometrica (1), coll'aiuto del quale si trova (prop. 10ª) che « il centro di gravità di un segmento parabolico a basi parallele sta sull'asse; diviso questo in cinque parti eguali, quel punto determina sul segmento medio due parti tali che quella più vicina alla base b_1 sta a quella più vicina alla base b_2 come $b_2^2 (2 b_1 + b_2)$ sta a $b_1^2 (2 b_2 + b_1)$ ». Riteniamo superfluo arrestarci a rilevare il singolare valore di questa conclusione ed a mettere in evidenza la straordinaria sagacia di cui diede prova ARCHIMEDE nello scoprirla e dimostrarla coi metodi di cui disponeva.

37. - Mentre nei tre libri testè discorsi ARCHIMEDE gettò i fondamenti geometrici della Statica, altri due egli ha destinati ad iniziare la trattazione matematica dell'Idrostatica. Ma quelli ci pervennero direttamente, mentre di questi ci giunse notizia per via indiretta e mal sicura; intendiamo parlare dell'opera intitolata *De insidientibus aquae* o anche *De iis quae in humido vehuntur*, del cui primo libro NICOLÒ TARTAGLIA fece conoscere nel 1543 una traduzione latina, che (se si presta fede a lui) sarebbe stata ricavata dall'originale greco, ma che, con maggiore probabilità, egli non fece che trascrivere da un codice del XIII secolo, contenente la versione (dal greco o dall'arabo) fattane da GUGLIELMO DI MÖRBECKE (2): ad ogni modo l'originale sembra irremissibilmente perduto, eccezion fatta per un breve frammento di esso, pubblicato per la prima volta da ANGELO MAI (1782-1854) (3).

---

(1) Esso dice che dalle relazioni:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}, \quad \frac{d}{a-d} = \frac{e}{\frac{3}{5}(a-c)}, \quad \frac{2a + 4b + 6c + 3d}{5a + 10b + 10c + 5d} = \frac{f}{a-c}$$

segue l'altra

$$e + f = \frac{2}{5} a .$$

(2) Cfr. HEIBERG nei *Prolegomena* alla sua ed. di ARCHIMEDE, in *Quaest. Arch.*, p. 95 e seg., e nel V Heft delle *Abh. zur Gesch. der Math.*, p. 6-7. Inoltre M. CANTOR, *Vorlesungen*, II, 2 Aufl., Leipzig, 1900, p. 514 e W. SCHMIDT, *Zur Textgeschichte der "Ochumena" des Archimedes* (Bibl. math., III Ser., T. III, 1902).

(3) Aggiungasi che nel 1551 TARTAGLIA tradusse la stessa opera

Di tale opera di ARCHIMEDE, in questo momento c' interessano meno i risultati (1), che i procedimenti adoperati per raggiungerli, chè, se quelli appartengono alle matematiche applicate, questi sono da ascriversi fra i più rigorosi e originali ragionamenti di matematica pura. Quelli tendono a determinare le condizioni di equilibrio di un segmento di sfera o di conoide retto (2) immerso in un fluido più o meno denso; questi poggiano su pochi postulati, che ARCHIMEDE enuncia senza giustificare in alcun modo, e procedono con quell'andamento sicuro, ma un po' misterioso, che caratterizza le argomentazioni del grande Siracusano. E siccome dei metodi di ricerca e di esposizione a cui egli accordò la preferenza dovremo occuparci in più opportuno momento (v. p. 323), così non ci arresteremo a lungo su questo (come su gli altri lavori meccanici) di ARCHIMEDE (3). Soltanto osserveremo (4), a complemento di quanto precede,

---

dal latino in italiano, correggendo tacitamente gli errori di cui riboccava la prima versione e aggiungendovi un breve commento: il secondo libro apparve soltanto nel 1564, per merito del libraio veneziano CURZIO TRAJANO erede dei mss. di TARTAGLIA. A F. COMMANDINO si deve la più diffuca e migliore edizione latina di tutta l'opera. Bologna, 1565. Una restituzione del I Libro fu fatta dall'HEIBERG (*Archimedis* Περὶ ὀχουμένων *liber I graece restituit* in *Mélanges Graux*, Paris, 1884, p. 689-703), il quale giunse così a dimostrare che il trattato in discorso appartiene in realtà ad ARCHIMEDE. Veggasi anche H. ZOTENBERG, *Traduction arabe du Traité des corps flottants d'Archimède* (Journ. asiatique, T. XIII della VII Serie, 1879, p. 509-515).

(1) Di essi parleremo nel L. III (n. 60).

(2) Di questa figura ARCHIMEDE suppone si sappia trovare il centro di gravità, che egli presumibilmente insegnò a determinare in qualche continuazione, oggi perduta, delle ricerche di cui abbiamo parlato nel n. prec.

(3) Il lettore desideroso di maggiori particolari ricorra al MARIE, che con amore fece un'analisi dei due libri *Su i galleggianti* nel T. I (Paris, 1883), p. 110-127, della sua *Histoire des Sciences math. et phys.* Si noti anche che lo scritto *De iis quae in humido vehuntur* fece tale impressione sopra l'HUYGENS giovinetto da ispirargli (1650) i tre libri *De iis qaae liquido super natant* solo di recente pubblicati (*Oeuvres complètes de* HUYGENS T. XI. L. HAYE, 1908 p. 94 e segg).

(4) Cfr. R. CAVERNI, *Storia del metodo sperimentale in Italia* T. I, Firenze, 1891, p. 35.

che essi presentano il carattere proprio e distintivo della filosofia naturale di PLATONE, che è quello di astrarre dalle proprietà fisiche dei corpi, per trattenersi a contemplare i caratteri matematici delle loro forme; ad esempio, la leva archimedea, sulla quale è fondata tutta la statica, non è una verga solida, ma una linea geometrica, e l'umido archimedeo è un liquido che esiste, non in natura, ma nelle mentali astrazioni del filosofo, il quale suppone che le molecole rasentino le pareti de' vasi e fluiscano le une sulle altre, senza patirvi la minima resistenza, a quel modo che un punto genera una linea liberamente fluendo nello spazio.

38. - Con assai maggior ragione dei così detti *XIV* e *XV Libri degli Elementi di Euclide* (cfr. p. 269), possono considerarsi siccome una preziosa continuazione ed un indispensabile complemento dell'opera capitale di EUCLIDE i due libri di ARCHIMEDE *Su la sfera ed il cilindro* (Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου) (1), i quali formano un eccellente capitolo di stereometria in senso stretto e che egli (v. p. 282) considerava per la gemma più preziosa della sua fulgida corona di scienziato. Mentre, però, il libro di IPSICLE e quello che vi è annesso concernono i poliedri (regolari) a cui è consacrato l'ultimo Libro degli *Elementi*, i due libri archimedei svolgono ulteriormente il confronto fra i corpi limitati da superficie non tutte piane, che EUCLIDE aveva iniziato nel penultimo dei suoi libri (2).

Ma, a tale scopo, non sono sufficienti i concetti ed i postulati esposti dall'Alessandrino ed il Siracusano, prima di ogni altra cosa, fa conoscere quelli nuovi che gli sono necessari; i concetti nuovi si riferiscono alla « concavità da una parte » di linee e superficie, mentre i postulati — che forse furono introdotti nella scienza prima di ARCHIMEDE (3) — servono a confrontare le lunghezze o le aree di linee e superficie contermini e sono tuttora invocati quando si tratta

(1) La prefazione al I Libro fu da noi già riferita (L. I, n. 71).

(2) Vale la pena di notare che tale legame con gli *Elementi* è implicitamente riconosciuta da ARCHIMEDE: infatti egli espone come lemmi, la cui dimostrazione fu data " dai suoi predecessori " (*Archimedis Opera Omnia* ed. HEIBERG, T. I, p. 82), i teoremi 11°-15° del XII Libro degli *Elementi di Euclide*.

(3) ALLMAN, op. cit., p. 187.

il problema della rettificazione di una linea o della misurazione di una superficie (1). Si noti fra questi ultimi l'affermazione che « la retta segna il minimo cammino fra due punti » — la quale da PROCLO (2) e da altri venne erroneamente scambiata per una definizione della retta (3) — e la sua analoga concernente il piano nello spazio, nonchè l'esplicita enunciazione di quel principio (ricordato nella prefazione ed applicato nella ricerca della *Quadratura della parabola*) denominato oggi *assioma d'Archimede*, benchè già EUDOSSO da Cnido se ne fosse servito dianzi (v. p. 144). Non sarà giudicato fuor di luogo notare anche (4) come ARCHIMEDE ammetta per evidente essere grandezze omogenee due porzioni di linee o di superficie qualsivogliano, come pure due porzioni di spazio; in conseguenza egli fu in grado di parlare di somma e di differenza (v. l'enunciato del suo

(1) " Après le problème de la quadrature des courbes, se présente naturellement celui de leur rectification, c'est-à-dire, de la détermination de la longueur même de la courbe. Nous partirons, pour la solution de ce problème, du principe d'Archimède, adopté par tous les géomètres anciens et modernes, suivant lequel de deux lignes courbes, ou composées de droites, ayant leur concavité tournée du même côte et les mèmes extrémes, celle qui renferme l'autre est la plus longue „. LAGRANGE, *Théorie des fonctions analytiques* (Nouv. éd., Paris, 1814, p. 218).

(2) PROCLO-TAYLOR, I, p. 133.

(3) La definizione di retta, come linea di lunghezza minima, che troveremo in TEONE SMIRNEO (L. IV, n. 5) e che venne adottata da LEGENDRE (*Eléments de géometrie*, déf. III) e suoi seguaci, si aggira in un circolo vizioso, sinchè non si sappia definire il concetto di lunghezza senza ricorrere alla retta. Un tentativo in questo senso fu fatto da R. BETTAZZI nell'articolo intitolato *Il concetto di lunghezza e la retta* (Annali di matematica, T, XX della 2ª Serie, 1892, p. 19-37); cfr. anche le osservazioni dello stesso autore *Sulla definizione della retta* (Periodico di mat. per l'insegn. secondario, T. VII, 1892, p. 16-25 e 54-61) e H. G. ZEUTHEN, *Ueber einige archimedische Postulate* (Festschrift zu M. CANTOR anlässlich seines LXXX Geburtstages. Leipzig, 1909).

(4) Cfr. O. STOLZ, *Zur Geometrie des Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes* (Math. Annalen, XXII Bd., 1883, p. 504-519) e LASSWITZ, *Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton*, I Bd., Hamburg und Leipzig, 1890, p. 180.

postulato) di due fra tali grandezze, di considerare, rispetto a due di esse, una terza compresa, di suddividerle in parti, ecc. Mediante l'esplicita enunciazione dei postulati surriferiti, egli si pose in grado, non soltanto di colmare le lacune che rilevammo nel sistema geometrico euclideo (vedi p. 235), ma eziandio di farvi alcune aggiunte importanti, che ora segnaleremo. Quelle di maggiore rilievo sono riassunte negli enunciati seguenti:

Prop. 13''. La superficie laterale d'un cilindro circolare è eguale ad un cerchio il cui raggio è medio proporzionale fra il lato ed il diametro della base del cilindro.

Prop. 14''. La superficie laterale di un cono circolare retto è eguale ad un cerchio il cui raggio è medio proporzionale fra il lato ed il raggio della base del cono.

Prop. 16''. Secando un cono circolare retto con un piano parallelo alla base, si ottiene un tronco di cono la cui superficie laterale è eguale ad un cerchio avente per raggio la media proporzionale fra il lato e la somma dei raggi delle basi del tronco.

Prop. 33'. La superficie di una sfera è eguale al quadruplo di un suo circolo massimo.

Prop. 34''. Il volume di una sfera è eguale a quello di un cono avente per base un circolo massimo e per altezza un raggio.

Cor. Se un cilindro ha per base un circolo massimo di una sfera e per altezza un diametro, il volume e la superficie della sfera sono rispettivamente due terzi del volume e della superficie totale del cilindro.

Prop. 42'-43'. La superficie di un segmento sferico, esclusa la base, è eguale ad un circolo avente per raggio il segmento rettilineo che unisce il vertice del segmento ad un punto della base (1).

Prop. 44''. Un settore sferico è eguale ad un cono avente per base le superficie della corrispondente calotta e per altezza il raggio della sfera.

Le altre proposizioni componenti il I Libro servono quasi tutte (2) a dimostrare quelle testè citate; non è a credere,

(1) Questa proprietà è dimostrata da ARCHIMEDE direttamente per un segmento minore di un emisfero (prop. 42ª) e poi estesa ad un segmento qualunque (prop. 43ª). PAPPO (ed. HULTSCH, p. 382) l'enunciò in generale con un teorema unico.

(2) Fra proposizioni che non abbiamo citate ve ne sono tre

però, che esse abbiano esclusivamente il valore di strumenti logici; per converso alcune fra esse sono dotate di importanza intrinseca non comune: a provarlo è sufficiente citare quelle che recano i numeri 22 e 23, la seconda delle quali, tradotta nel linguaggio della trigonometria, insegna a calcolare la somma di un certo numero d'archi circolari in progressione aritmetica, mentre la prima concerne un caso particolare dell'altra; e giova notare che le dimostrazioni di esse la vincono, per semplicità ed eleganza, sulle consuete dimostrazioni elementari delle formole seguenti, che ad esse equivalgono:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}+\ldots.+\operatorname{sen}\frac{(m-1)\pi}{m}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}$$

$$\frac{2\left\{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{m}+\operatorname{sen}\frac{2\alpha}{m}+\ldots.+\operatorname{sen}\frac{(m-1)\alpha}{m}\right\}+\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha}=\cot\frac{\alpha}{2m}$$

I ragionamenti adoperati da ARCHIMEDE per dimostrare le proposizioni surriferite sono tutte del medesimo tipo ed hanno

---

(17ª-19ª) le quali mettono in luce l'abilità spiegata da ARCHIMEDE nello scegliere gli enunciati più eleganti pei suoi teoremi. Nella prima, ad es., egli vuol esprimere il volume V dell'insieme di due coni retti avente la base comune ed i vertici da parti opposte (*rombo solido*); ora, detto r il raggio della base, e h_1, h_2 le altezze dei due coni si ha evidentemente:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2(h_1+h_2);$$

ma, se si chiama S_1 la superficie laterale del primo cono, l_1 il suo lato e d la perpendicolare condotta su questo dal vertice del secondo cono, si ha:

$$S_1=\pi r l_1\,,\ (h_1+h_2)\,r=d\,l_1\,,$$

onde

$$V=\frac{1}{3}S_1 d\,,$$

e tale relazione prova che " il rombo solido è equivalente ad un cono di base S_1 ed altezza d ". Analoghe osservazioni si potrebbero ripetere riguardo alle due proposizioni successive, ma per brevità le sopprimiamo.

una grandissima importanza, perchè lo studio approfondito di essi e di altri somiglianti, che egli espose altrove, ne hanno posto in evidenza il comune substrato logico e guidarono più tardi (cfr. a p. 144) a concepire e formulare il metodo di esaustione. Per dichiararne la natura scegliamo, ad es., le dimostrazioni dei teoremi (33° e 34°), che insegnano la quadratura e la cubatura della sfera; l'artificio su cui queste riposano è la considerazione delle *figure inscritte o circoscritte alla sfera*, cioè delle figure generate dalla rotazione di un semipoligono parilatero e regolare, inscritto o circoscritto ad un circolo massimo, fatta attorno ad un diametro che ne congiunge due vertici opposti. Ecco in qual modo esso permette di conseguire lo scopo voluto (1):

Sia S la superficie della sfera ed A il quadruplo di un circolo massimo: per dimostrare che $S = A$ noi faremo vedere che non può essere nè $S > A$ nè $S < A$ (2). Infatti, se fosse $S > A$ si potrebbero (prop. 2ª) sempre determinare due rette B e $\Gamma < B$ tali che $\frac{B}{\Gamma} < \frac{S}{A}$; presa allora la linea Δ media proporzionale fra B e Γ, si potranno (prop. 3ª) trovare una figura inscritta ed una circoscritta tali che, detti l_i e l_c i lati dei poligoni simili generatori, si abbia $\frac{l_i}{l_c} > \frac{B}{\Delta}$. Ora, se S_i e S_c sono le superficie delle figure suddette, si ha (prop. 32ª) $\frac{S_c}{S_i} = \frac{l_c^2}{l_i^2}$, epperò successivamente

$$\frac{S_c}{S_i} < \frac{B^2}{\Delta^2} = \frac{B^2}{B\Gamma} = \frac{B}{\Gamma} < \frac{S}{A};$$

ma la relazione $\frac{S_c}{S_i} < \frac{S}{A}$ è impossibile, perchè dall'essere $S_c > S$ (prop. 28ª) e $S_i < A$ (prop. 25ª) risulta $\frac{S_c}{S_i} > \frac{S}{A}$: dun-

(1) Le proposizioni citate in parentesi nel corso del ragionamento che segue, essendo dimostrate da ARCHIMEDE nel L. I, ne resta messa in evidenza la loro funzione rispetto alle altre.

(2) Notisi che, per dedurre da ciò che $S = A$, bisogna ammettere come assioma o come postulato (e già osservammo che ARCHIMEDE l'ammette) che "tutte le superficie sono grandezze della stessa specie".

que l'ipotesi $S > \text{A}$ è assurda. — Se invece fosse $S < \text{A}$, si considererebbero due rette B , Γ tali che $\frac{\text{B}}{\Gamma} < \frac{\text{A}}{S}$ e ragionando come prima si troverebbe $\frac{S_c}{S_i} < \frac{\text{A}}{S}$, relazione pur essa impossibile, perchè, essendo $S_c > \text{A}$ (prop. 30ª) e $S_i > S$ (prop. 23ª), è $\frac{S_c}{S_i} > \frac{\text{A}}{S}$: dunque non può neppure essere $S < \text{A}$. Epperò $S = \text{A}$ c. d. d.

Similmente sia V il volume della sfera e A quello del cono avente per base la superficie della sfera e per altezza il raggio. Supponiamo $V > \text{A}$; esisteranno allora (prop. 2ª) due rette K e $\text{H} < \text{K}$ tali che $\frac{\text{K}}{\text{H}} > \frac{V}{\text{A}}$; s'inseriscano fra esse due medie proporzionali I e Θ. Si potranno allora considerare due figure, una inscritta e l'altra circoscritta, tali che, chiamati ancora l_i e l_c i lati dei poligoni simili che le generano, sia $\frac{l_c}{l_i} < \frac{\text{K}}{\text{I}}$ (prop. 3ª). Ora, detti V_i e V_c i volumi di quelle figure si ha (prop. 32ª) $\frac{V_c}{V_i} = \frac{l_c^3}{l_i^3}$, onde successivamente (per essere $\text{K} : \text{I} = \text{I} : \Theta = \Theta : \text{H}$)

$$\frac{V_c}{V_i} < \frac{\text{K}^3}{\text{H}^3} = \frac{\text{K}^3}{\text{IK}\Theta} = \frac{\text{K}^2}{\text{KH}} = \frac{\text{K}}{\text{H}} < \frac{V}{\text{A}};$$

ora la relazione $\frac{V_c}{V_i} < \frac{V}{\text{A}}$ non può aver luogo, perchè dalle diseguaglianze $V_c > V$ (prop. 28ª) e $V_i < \text{A}$ (prop. 27ª) risulta $\frac{V_c}{V_i} > \frac{V}{\text{A}}$: perciò non è $V > \text{A}$. Se invece supponiamo $V < \text{A}$, determineremo due rette K e $\text{H} < \text{K}$ tali che sia $\frac{\text{K}}{\text{H}} > \frac{\text{A}}{V}$ e, ragionando come dianzi, concluderemo $\frac{V_c}{V_i} < \frac{\text{A}}{V}$, relazione pure assurda giacchè essendo $V_i > V$ (prop. 23ª) e $V_c > \text{A}$ (proposiz. 31ª) si ha certamente $\frac{V_c}{V_i} > \frac{\text{A}}{V}$. Non essendo, dunque, V nè maggiore nè minore di A, è necessariamente $V = \text{A}$ c. d. d.

Notisi che a base di tutte le dimostrazioni del genere considerato sta, più o meno nascostamente, l'assioma di ARCHIMEDE; ad esempio esso è invocato per dimostrare la pro-

posizione 2ª, dalla quale poi derivano le prop. 4ª e 5ª, da quest'ultima la prop. 6ª, ecc.

39. - L'argomento del II dei libri *Su la sfera ed il cilindro* è strettamente legato a quello del I; infatti, quel libro tende a sciogliere un certo numero di problemi di 1°, 2°, e 3° grado, la cui soluzione è resa possibile in parte dalle proposizioni del I Libro ed in parte da analoghe proposizioni fatte conoscere nel II. Fra le questioni della prima categoria troviamo anzitutto quella che consiste nella ricerca di una sfera equivalente ad un cono dato o ad un dato cilindro: essa si riduce alla duplicazione del cubo. Di analoga riduzione è suscettibile la costruzione di un segmento sferico simile ad un secondo ed equivalente ad un terzo (prop. 5ª), mentre essa si abbassa al 2° grado se, invece, il segmento deve essere simile ad un secondo ed avere la stessa superficie, esclusa la base, di un terzo (prop. 6ª). La divisione, con un piano, della superficie di una sfera di raggio R, in due parti aventi un dato rapporto $\frac{l}{m} > 1$, è di 1° grado e non richiede che i teoremi del I Libro; per converso, la divisione analoga del volume di una data sfera in due parti aventi un dato rapporto $\frac{l}{m}$ (prop. 4ª), non solo esige si sappia calcolare il volume di un segmento sferico (ed a ciò provvede la prop. 2ª), ma anche si sia in grado di risolvere geometricamente la seguente equazione cubica:

$$[1] \qquad x^3 - 3R^2 x + 2\frac{l-m}{l+m} R^3 = 0,$$

ove R è il raggio della data sfera. Aggiungiamo che la citata prop. 2ª abilita anche a «staccare con un piano da una sfera un segmento avente un rapporto dato col cono di egual base ed eguale altezza» (prop. 7ª). Chiude degnamente questa serie di ricerche il teorema «fra tutti i segmenti di eguale superficie, l'emisfero ha il volume massimo», la cui dimostrazione si fonda sulla limitazione

$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\frac{3}{2}} < \frac{V_1}{V_2} < \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2,$$

ove V_1 , S_1 sono volume e superficie del maggiore dei due segmenti che un piano determina in una sfera e V_2 , S_2 sono volume e superficie del minore (1).

All'enumerazione dei problemi risolti da ARCHIMEDE sarebbe il caso di aggiungere qualche notizia intorno ai metodi in cui sono risolti. Ora, per quanto concerne i problemi di 1° e 2° grado, non è il caso di spendere attorno ad essi molte parole, chè la loro soluzione si ottiene con semplici applicazioni dell'algebra geometrica e della teoria della similitudine. Per converso sarebbe interessantissimo studiare come ARCHIMEDE risolve quelli di 3°; ma, sgraziatamente, del problema di Delo il Siracusano parla (2) come fosse di soluzione così conosciuta che qualunque altro problema fosse da riguardar per risolto quando ad esso fosse ridotto (3); mentre, per quanto concerne la soluzione dell'equazione [1], egli si limita ad enunciarla sotto forma di problema come segue: « date due rette BΔ e BZ, delle quali BΔ è doppia di BZ, e dato ancora un punto Θ di BZ, trovare sulla retta ΔB un punto X tale che $B\Delta^2 : \Delta X^2 = XZ : Z\Theta$ (4) » e ne rimanda la soluzione — nonchè lo studio del relativo diorisma — alla fine del libro: ma sino dall'epoca di DIOCLE (cfr. n. 73), nessun codice esistente conteneva la prova che ARCHIMEDE avesse mantenuta la sua promessa. Sicchè la soluzione data da ARCHIMEDE dei problemi cubici ed in particolare di quello avente per iscopo la divisione di una sfera in due parti aventi un rapporto assegnato deve ascriversi fra gli enigmi tuttora insoluti che presenta la storia della matematica greca (5).

---

(1) Le due ultime proposizioni citate servono a dimostrare false altre analoghe che erano state proposte prima: lo afferma ARCHIMEDE nella prefazione alle *Spirali*.

(2) Cfr. anche il ragionamento che riferimmo nel n.° prec.

(3) Vedremo nel Libro IV come il silenzio di ARCHIMEDE abbia persuaso EUTOCIO a registrare un gran numero di soluzioni del problema di Delo; anzi, alcune di esse, furono da noi esposte nel Libro prec. (n. 51, 62, 76); mentre di un'altra terremo parola nel presente Libro (n. 73).

(4) Che (posto $B\Theta : \Theta Z = m : l$) questo problema si riduca all'equazione [1], si vede prendendo per incognita principale le distanze del punto cercato X dal punto medio della retta ΔB.

(5) A scioglierlo si provarono molti geometri antichi e mo-

40. - Se una retta si muove in un piano rotando attorno ad un suo punto fisso con velocità uniforme, e se un punto percorre questa retta con velocità pure uniforme partendo da quel punto fisso, il punto mobile descriverà una linea curva, che diremo *spirale d'Archimede*, perchè lo studio delle proprietà di essa venne fatto dal sommo geometra di Siracusa nell'opuscolo Περὶ ἑλίκων (1); ad ogni giro di quella retta corrisponde una spira della curva.

Adoperando, per brevità, la nomenclatura moderna, chiameremo *polo* il punto fisso, *raggi vettori* le rette che lo uniscono ai punti della curva ed *argomenti* gli angoli for-

---

derni (cfr. ad es.: F. Bruno, *Soluzioni geometriche di alcuni difficili problemi solidi*, Napoli, 1824: Zeuthen, op. cit., p. 235 e seg. e *Note sur la résolution géométrique d'une équation du 3e dègré par Archimède* in *Bibliotheca mathematica*, 1893, p. 97-104). Inoltre è il desiderio di sopperire al silenzio di Archimede che spinse C. Huygens alle ricerche sopra i problemi geometrici cubici e biquadratici che formano la miglior parte del XII vol. delle sue *Oeuvres complètes*, La Haye, 1910. Notiamo finalmente che, siccome la equazione |1| ha tre radici reali, così essa deve ridursi a quella che serve per la trisezione dell'angolo; come si effettui tale riduzione indicarono C. Huygens fin dal 1653 (*Oeuvres de Huygens*, T. I. 1888, p. 239) e più recentemente F. Padula (*Rend. dell'Acc. di Napoli*, T. XI. 1852), con due costruzioni che si trovano riportate nel mio lavoro su *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce* (Genova, 1892, p. 75); e riguardo al significato geometrico delle tre soluzioni dell'equazione |1|, consulti il lettore un'elegantissima nota del Poinsot, che il Peyrard inserì nella sua traduzione francese di Archimede (*Oeuvres d'Archimède*, T. I, p. 394).

(1) Esso è dedicato a Dositeo. Nella lettera prefazione, per varie ragioni interessantissima, Archimede dice di avere inviati gli enunciati di alcuni teoremi sulle spirali a Conone, ma che questi non arrivò a dimostrarli, essendo morto nel frattempo. Ciò indusse taluno (Pappo ed. Hultsch, p. 234-5: Montucla, *Hist. des math.*, II éd., T. I, p. 226; Dilling, *De graecis mathematicis*, Berolini, 1831, p. 49) a credere che, all'opposto, di Conone fossero i teoremi e soltanto le dimostrazioni di Archimede e che, quindi, la spirale non dovesse recare il nome del Siracusano. La falsità di quest'opinione fu dimostrata dal Nizze, nelle osservazioni critiche di cui corredò la sua traduzione tedesca di Archimede (cfr. Cantor, *Vorlesungen*, I, p. 306; P. Tannery, *Notes pour l'histoire des lignes et des surfaces courbes dans l'antiquité*, § VIII: Bull. des Sc. math. et astr., 2e Série, T. VII).

mati da queste rette con la posizione iniziale della retta mobile. Designando con ϱ il raggio vettore e con ω l'argomento di un punto generico della curva e con a una costante data, la proprietà caratteristica della spirale d'ARCHIMEDE si traduce subito nell'equazione $\varrho = a\omega$.

Quando la retta mobile avrà compiuti n giri, il punto mobile avrà descritto una retta misurata da $2n\pi a$, onde la lunghezza della circonferenza avente questo raggio (o, come dice ARCHIMEDE, la periferia dell'n^{mo} *cerchio*) è $4n\pi^2 a$; d'altronde, l'angolo formato dalla tangente alla curva nell'estremo della sua n^{ma} spira col corrispondente raggio vettore ha, in virtù di una formola notissima, per tangente trigonometrica $2n\pi$; ne viene che la perpendicolare condotta dal polo alla posizione iniziale della retta mobile incontrerà la tangente anzidetta in un punto la cui distanza dal polo è $2n\pi a \,.\, 2n\pi = 4n^2\pi^2 a$, epperò è eguale a n volte la periferia dell'n^{mo} circolo (prop. 18ª e 19ª dell'opuscolo citato): donde emerge l'applicabilità della spirale in discorso alla *rettificazione della circonferenza* che, a quanto affermano SIMPLICIO ed EUTOCIO (1), non sarebbe sfuggita ad ARCHIMEDE stesso. Più generalmente: consideriamo un punto qualunque $(\varrho\,,\,\omega)$ della spirale; la corrispondente tangente (2) forma col raggio vettore passante per il punto di contatto un angolo, la cui tangente trigonometrica è $\varrho^2 : a$ (3) ed incontra in un certo punto la perpendicolare condotta dal polo a quel raggio vettore; ora si vede subito che $\varrho^2 : a$ misura tanto la distanza di quel punto dal polo, quanto l'arco circolare che ha per centro il polo, passa pel punto considerato dalla spirale ed è intercetto fra il raggio vettore corrispondente a questo punto e la posi-

(1) *Archimedis Opera omnia*, ed. HEIBERG, Vol. III, p. 266.

(2) Che " una retta non può toccare una spirale in più d'un punto „, vien dimostrato da ARCHIMEDE nella prop. 13ª del suo libro.

(3) Se, come è costume, si prende quale senso positivo della spirale quello in cui movesi il punto generatore e lo si trasporta nella tangente in un punto qualunque della curva, allora, è ottuso l'angolo del raggio vettore, immaginato percorso dal polo verso un punto della curva, colla direzione positiva della tangente in questo punto alla curva stessa: tale proprietà si apprende dai teoremi 16° e 17°.

zione iniziale della retta mobile (prop. 20ª) (1): donde emerge la possibilità di servirsi della spirale d'ARCHIMEDE per *rettificare un arco circolare qualsivoglia.*

Chiamiamo E_n l'area descritta dal raggio vettore, quando l'argomento varia fra $2(n-1)\pi$ e $2n\pi$, e C_n l'area dell'n^{mo} cerchio; si ha allora evidentemente

$$C_n = 4n^2\pi^3a^2 ;$$

d'altronde, in forza d'un teorema assai noto, è

$$E_n = \frac{4}{3}\pi^3a^2(3n^2 - 3n + 1) ;$$

si ha quindi

$$\frac{E_n}{C_n} = \frac{n(n-1) + \frac{1}{3}}{n^2} = \frac{2n\pi a \,.\, 2(n-1)\pi a + \frac{1}{3}(2\pi a)^2}{(2n\pi a)^2} ,$$

in particolare

$$E_1 = \frac{1}{3}C_1 , \quad E_2 = \frac{7}{12}C_2 ;$$

dunque: « La superficie compresa fra la prima spira della curva e la posizione iniziale della retta mobile è eguale alla terza parte del primo cerchio (prop. 24ª); la superficie compresa fra la seconda spira e la stessa retta sta al secondo cerchio come 7 a 12 (prop. 25ª); ed, in generale, la superficie compresa fra l'n^{mo} spira e la retta medesima sta all'n^{mo} circolo come il rettangolo delle periferie dei circoli $(n-1)^{mo}$ ed n^{mo}, accresciuto della terza parte del quadrato della differenza di queste circonferenze, sta al quadrato del raggio nell'n^{mo} circolo (Cor. alla prop. 25ª) ». Dalle formole precedenti, risultano ancora le seguenti

$$E_1 = \frac{4}{3}\pi^3a^2 , \quad E_2 - E_1 = 8\pi^3a^2 , \quad E_n - E_{n-1} = 8(n-1)\pi^3a^2 ,$$

(1) Si noti qui la più antica determinazione della tangente ad una curva col mezzo della sottotangente polare.

e quindi le relazioni

$$E_1 = \frac{1}{6}(E_2 - E_1)\,,\quad E_n - E_{n-1} = (n-1)(E_2 - E_1)\,,$$

che è facile enunciare a parole (prop. 27ª).

Consideriamo da ultimo l'area S del triangolo mistilineo compreso fra un arco di spirale ed i raggi vettori relativi ai suoi estremi; se ϱ_1 e $\varrho_2 > \varrho_1$ sono questi raggi vettori, si trova subito

$$S = \frac{(\varrho_2^2 + \varrho_2\varrho_1 + \varrho_1^2)(\varrho_2 - \varrho_1)}{6a};$$

denotando poi con S_1 e S_2 i settori circolari compresi entro gli stessi raggi vettori si ha evidentemente:

$$A'' = S - S_1 = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)^2(\varrho_2 + 2\varrho_1)}{2a},$$

$$A' = S_2 - S = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)^2(2\varrho_2 + \varrho_1)}{2a}$$

$$S_1 = \frac{\varrho_1^2(\varrho_2 - \varrho_1)}{2a}\,,\quad S_2 = \frac{\varrho_2^2(\varrho_2 - \varrho_1)}{2a}$$

epperò

$$\frac{S}{S_2} = \frac{\varrho_2^2 + \varrho_2\varrho_1 + \varrho_1^2}{3\varrho_2^2} = \frac{\frac{1}{3}(\varrho_2 - \varrho_1)^2 + \varrho_1\varrho_2}{\varrho_2^2}$$

$$\frac{A'}{A''} = \frac{\varrho_1 + 2\varrho_2}{2\varrho_1 + \varrho_2} = \frac{\varrho_1 + \frac{2}{3}(\varrho_2 - \varrho_1)}{\varrho_1 + \frac{1}{3}(\varrho_2 - \varrho_1)}$$

e queste ultime equazioni dicono: « L'area di un settore di spirale sta al settore circolare avente lo stesso angolo e per raggio il maggiore dei raggi vettori che limitano quel settore, come il rettangolo di questi raggi vettori, aumentato della terza parte del quadrato della loro differenza, sta al quadrato del maggiore di essi » (prop. 26ª). Si prendano sulla spirale due punti qualunque e si uniscano al polo; si descrivano due

archi di circolo passanti per quei due punti ed intercetti da quelle congiungenti (la minore delle quali prolungata); allora la superficie compresa fra l'arco del cerchio maggiore, il prolungamento della congiungente minore e l'arco di spirale, sta alla superficie compresa fra l'arco del cerchio minore, la congiungente minore e l'arco di spirale, come il raggio del cerchio minore, aumentato dei due terzi della differenza fra i due raggi, sta allo stesso raggio, aumentato di un terzo della medesima differenza » (prop. 28ª).

Le proprietà ora indicate sono le più interessanti fra quelle che ARCHIMEDE ravvisò nella sua celebre curva (1); se ne abbiamo accompagnati gli enunciati con un cenno di un modo con cui si possono dimostrare senza difficoltà servendosi dei procedimenti moderni, fu per agevolare al lettore l'intelligenza di una produzione dell'antica letteratura matematica che riesce oggi molto astrusa (2), non già con lo scopo di dimostrare la superiorità dei sistemi moderni, chè anzi, notando come ARCHIMEDE sia riuscito a risolvere tutte le questioni metriche non trascendenti relative alla sua curva (3), si è portati ad affermare che i me-

(1) Non è superfluo aggiungere che ARCHIMEDE dimostra di regola ogni teorema per la prima spira, poi per la seconda, e nota che similmente si farebbe per le altre: donde emerge il legame strettissimo che esiste fra le proposizioni 14ª e 15ª, 16ª e 17ª, 18ª e 19ª, 21ª e 22ª, 24ª e 25ª.

(2) " Elles „ (le dimostrazioni dei teoremi sulla spirale d'ARCHIMEDE) " sont si longues et si difficiles à embrasser que, comme on l'a pû voir dans la Préface de l'*Analyse des infiniments petit* (par M. le MARQUIS DE L'HOSPITAL) M. BOULLAUD a avoué qu' il ne les avait jamais bien entendues, et que VIÈTE les a injustement soupçonnées de paralogisme, parce qu' il n'avait pû non plus parvenir à les bien entendre „. *Histoire de l'Académie des Sciences pour l'année* 1704. Paris, 1722, p. 42). " Après vingt siècles de travaux et de découvertes, les intelligences les plus puissantes viennent encore échouer contre la synthèse difficile du Traité des spirales „. LIBRI, op. cit., T. I, p. 35. [Questa nota, che si trovava anche nella I ed. dell'opera presente, ha dato occasione ad alcune osservazioni dotte ed interessanti da parte di P. TANNERY (Bulletin des Sc. mathém., 2e Sér., T. XIX, 1894, I Partie, p. 266-271)].

(3) Ci esprimiamo così perchè la rettificazione della curva notoriamente esige l'uso di logaritmi.

todi vetusti, applicati alle classi di problemi per cui vennero creati, sono indiscutibilmente di potenza non inferiore a quella di cui gode il calcolo infinitesimale (1).

41. - Per applicare questi procedimenti alla trattazione dell'argomento scelto, ARCHIMEDE ebbe bisogno di appoggiarsi sopra alcuni teoremi di cinematica, di geometria e di algebra geometrica sui quali è necessario spendiamo qualche parola.

Riguardo ai primi (prop. 1ª e 2ª) basti rilevare che ivi viene esposta la proprietà caratteristica del moto uniforme, per dimostrare la quale viene invocato il lemma d'ARCHIMEDE, il quale, quindi, anche questa volta, il grande geometra pone a sostegno dell' insieme delle proprie argomentazioni.

I secondi sono di natura porismatica, giacchè affermano la possibilità di costruire certe figure quando siano soddisfatte determinate condizioni (2), e vengono stabiliti nella ipotesi che si sappiano risolvere alcuni *problemi d'inserzione* (3), dei quali ARCHIMEDE non insegna la soluzione. Tale silenzio — a cui d'altronde non è difficile sopperire (4) — come si può interpretare? Una prima spiegazione si ottiene osservando che, di quei problemi non è necessario

---

(1) Cfr. CARNOT, *Reflexions sur le métaphysique du calcul infinitésimal*, II éd., Paris, 1813, p. 138.

(2) Tradotte in formole queste proposizioni insegnano le condizioni di risolubilità di alcune speciali equazioni trigonometriche.

(3) Sappiamo che di uno fra tali problemi si servì IPPOCRATE da Chio nel costruire la terza delle sue lunule (p. 83); l'enunciato generale in cui tutti son compresi verrà esposto fra non molto (v. n. 65); rileviamo intanto che i problemi invocati da ARCHIMEDE sono:

I. *Dato un diametro di un cerchio e l'estremo di un raggio ad esso perpendicolare, adattare una retta di data lunghezza fra il cerchio ed il diametro prolungato, per modo che il prolungamento di esso passi pel detto estremo.*

II. *Data una corda di un cerchio ed un punto dell'arco sotteso, adattare una retta di data lunghezza fra la corda e l'arco complementare, per modo che il suo prolungamento passi pel punto dato.*

(4) Cfr. R. BALTZER a p. 1231-33 di PAPPO ed. HULTSCH e HEIBERG in *Zeitschr. Math. u. Phys., hist.-lit. Abth.*, T. XXV, p. 66.

conoscere la soluzione completa, ma basta sapere che esiste, della qual cosa è agevole convincersi mediante alcune semplici considerazioni di continuità (1); ma, siccome queste non erano ritenute dagli antichi sufficientemente rigorose, così si è pensato che la possibilità di risolvere le anzidette questioni fosse dimostrata in opere che non giunsero sino a noi (2); anzi, l'indole porismatica delle proposizioni invocate fa pensare a qualche collezione di porismi, analoga a quella composta da EUCLIDE (v. n. 27-28); sventuratamente questa ha un'esistenza puramente ipotetica, anzi assai problematica, dal momento che nè PAPPO, nè alcun altro antico geometra allude ad alcuna raccolta di quel genere (3).

Una seconda spiegazione, che ci sembra assai più plausibie, si ottiene osservando che i citati problemi — anzi di regola tutti i problemi di inserzione — si possono sciogliere in pratica assai agevolmente col mezzo di una riga materiale mobile, sul cui orlo siano segnati due punti distanti per una lunghezza eguale al segmento da inserire; ora, nulla vieta di supporre che di questo mezzo siasi giovato ARCHIMEDE, il quale, senza pedanterie, usò tutti i procedimenti più convenienti a condurre alla scoperta della verità (v. anche il frammento di cui parleremo nel n. 44): come egli si servì di considerazioni statiche per quadrare la parabola (n. 35) e di considerazioni aritmetiche per recare qualche cospicuo contributo al problema della quadratura del cerchio (n. 43), così egli probabilmente non si sarà fatto scrupolo di adoperare anche le inserzioni meccaniche quando gli riuscivano utili. Ammesso ciò, si giunge in possesso di uno fra i più forti argomenti a sostegno della tesi che le inserzioni meccaniche fossero ascritte dai Greci fra le operazioni concesse

(1) P. TANNERY, *Sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède* (Mém. de la Soc. de Bordeaux, 2e Série, T. V, 1881, p. 49-63).

(2) Quest'ipotesi si presenta spontaneamente osservando che ARCHIMEDE, nel dimostrare l'espressione del volume della sfera (v. p. 298), adoperò, come già rilevammo, l'inserzione di due medie proporzionali, senza neppure accennare come si eseguisse.

(3) HEIBERG. *Litt. gesch. Studien üb. Euklid.* p. 68-70.

al geometra (1), almeno nelle investigazioni che oltrepassavano gli elementi.

Finalmente, riguardo alle proposizioni aritmetiche (proposizioni 10ª e 11ª), è sufficiente notare che esse esprimono in linguaggio geometrico le seguenti relazioni:

$$n^3 + n^2 + (1 + 2 + \ldots + n) = 3\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

$$(1^2 + 2^2 + \ldots + \overline{n-1}^2) < n^3 < 3\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

$$\frac{n\,(a + nd)^2}{a^2 + (a + d)^2 + \ldots + (a + \overline{n-1}\,d)^2}$$

$$< \frac{(a + nd)^2}{a^2 + (a + nd) + \frac{1}{3} n^2 d^2} <$$

$$\frac{n\,(a + nd)^2}{a^2 + (a + d)^2 + \ldots + (a + \overline{n+1}\,d)^2}$$

Nel determinare le aree, di cui si parla negli enunciati riferiti nel n. prec., ARCHIMEDE procede in modo somigliante a quello che vedemmo da lui seguito nel I Libro *Su la sfera ed il cilindro;* onde, per caratterizzarlo completamente basta che aggiungiamo la definizione delle *superficie inscritte e circoscritte* da lui scelte siccome ausiliari. Si immagini, a tal uopo, un settore di spirale e se ne divida l'angolo in un certo numero di parti eguali; per ognuno dei settori parziali si potranno allora considerare due settori circolari uno interno e l'altro esterno a questo, aventi comuni i lati rettilinei e passanti ciascuno per un estremo del contorno curvilineo del settore di spirale; su ognuno dei nuovi settori di spirale si operi nell'istesso modo e cosi si continui; l'insieme dei settori interni cosi generati è la figura ausiliare *inscritta*, l'insieme degli esterni la *circoscritta*.

(1) Quest'opinione fu emessa dall'OPPERMANN, accettata e difesa dallo ZEUTHEN nel cap. XII dell'op. cit.

ARCHIMEDE, come accennammo, si occupa eziandio delle tangenti alle sue spirali e noi, per chiarire come le costruisca, non troviamo di meglio che riferire il ragionamento da lui usato nel dimostrare la prop. 18ª del suo Libro.

TEOREMA. Se si conduce la tangente nell'estremo della prima spira della curva e dal punto origine della spirale si guida la perpendicolare alla posizione iniziale della retta mobile, questa segherà la tangente in un punto, la cui distanza dall'origine della spirale è eguale alla periferia del primo circolo.

DIMOSTRAZIONE. Sia ABΓΔΘ la spirale avente A per origine; inoltre ΘA sia la posizione iniziale della retta generatrice, ΘHK il primo circolo e ΘZ la tangente in Θ alla spirale. Si conduca da A la retta AZ perpendicolare ad AΘ; questa incontrerà la tangente ΘZ perchè l'angolo delle rette ZΘ, ΘA è acuto (pr. 16ª). L'incontro abbia luogo in Z: bisogna dimostrare che la retta AZ è eguale alla periferia del circolo ΘKH. Infatti, se non lo è, sarà maggiore o minore.

Supponiamo anzitutto AZ > circ. ΘKH. Si prenda allora (fig. 37) una retta AΛ < AZ e > circ ΘKH (prop. 4ª). Si avrà allora un circolo ΘKH ed in esso una corda ΘH minore del diametro. Inoltre $\frac{\Theta A}{A\Lambda}$ > del rapporto della metà di HΘ alla perpendicolare condotta da A a questa corda, perchè questo rapporto è, $= \frac{\Theta A}{AZ}$ che è evidentemente < $\frac{\Theta A}{A\Lambda}$. È quindi possibile condurre una retta da AN da A al prolungamento di ZΘ per modo che sia $\frac{NP}{\Theta P} = \frac{\Theta A}{A\Lambda}$ (prop. 7ª); essa tagli il circolo in P e la spirale in X. Ora $\frac{\Theta P}{A\Lambda} < \frac{\text{arc. } \Theta P}{\text{circ. } \Theta KH}$ ΘP < arc. ΘP e AΛ > circ. ΘKH. Inoltre $\frac{NP}{PA} = \frac{NP}{\Theta A} = \frac{\Theta P}{A\Lambda}$ onde $\frac{NP}{PA} < \frac{\text{arc. } \Theta P}{\text{circ. } \Theta KH}$, da cui $\frac{NA}{PA} < \frac{\text{arc. } \Theta P}{\text{arc. } \Theta P + \text{circ. } \Theta KH} = \frac{XA}{A\Theta}$ (prop. 15ª). Ora la relazione $\frac{NP}{PA} < \frac{XN}{A\Theta}$ è impossibile perchè NA > AX e PA = AΘ. Perciò non può essere AZ > circ. ΘKH.

Supponiamo invece che sia AZ < circ. ΘKH. Si scelga allora (fig. 38) una retta AΛ > AZ e circ. ΘKH (prop. 4ª) e si conduca da Θ la parallela ad AZ. Allora si ha un circolo ΘKH ed in esso una corda ΘH minore del diametro ed una retta ΘM tangente in Θ. Inoltre $\frac{A\Theta}{A\Lambda}$ < del rapporto della metà di HΘ alla per-

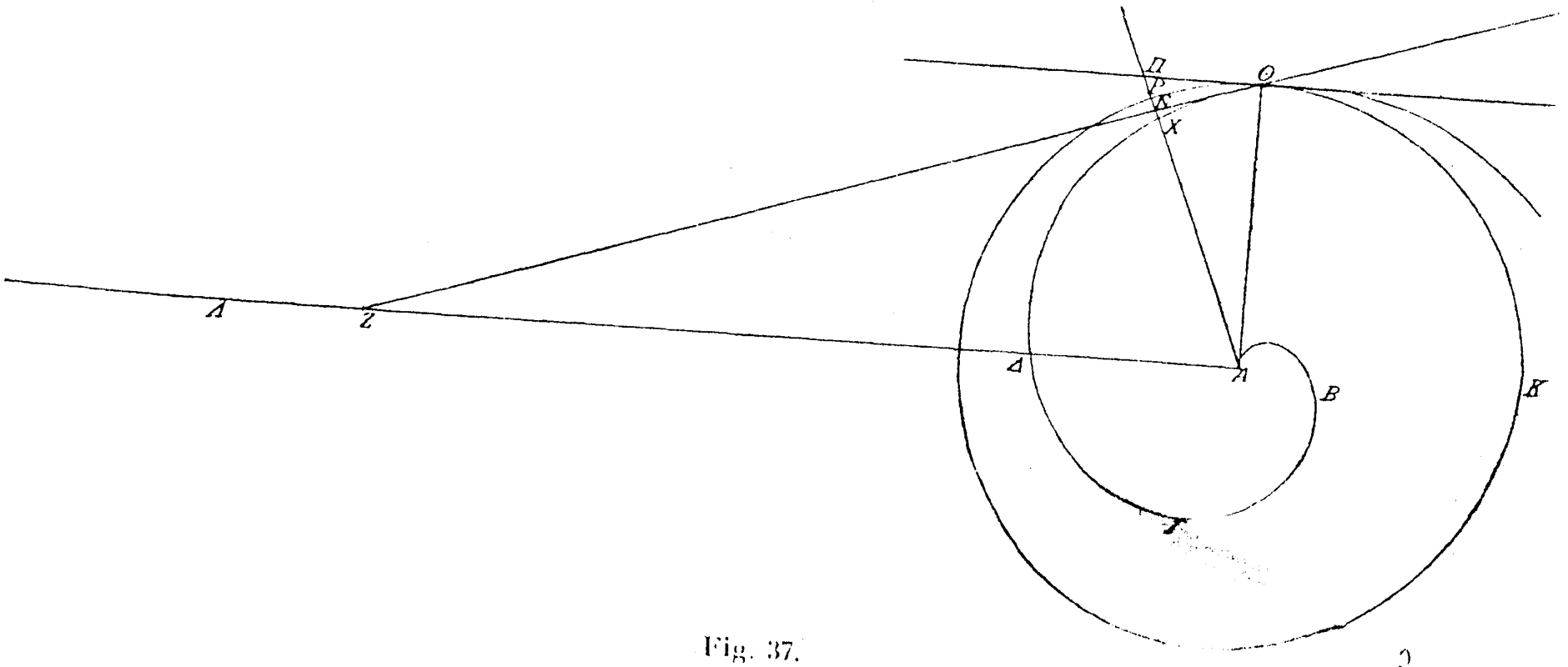


Fig. 37.

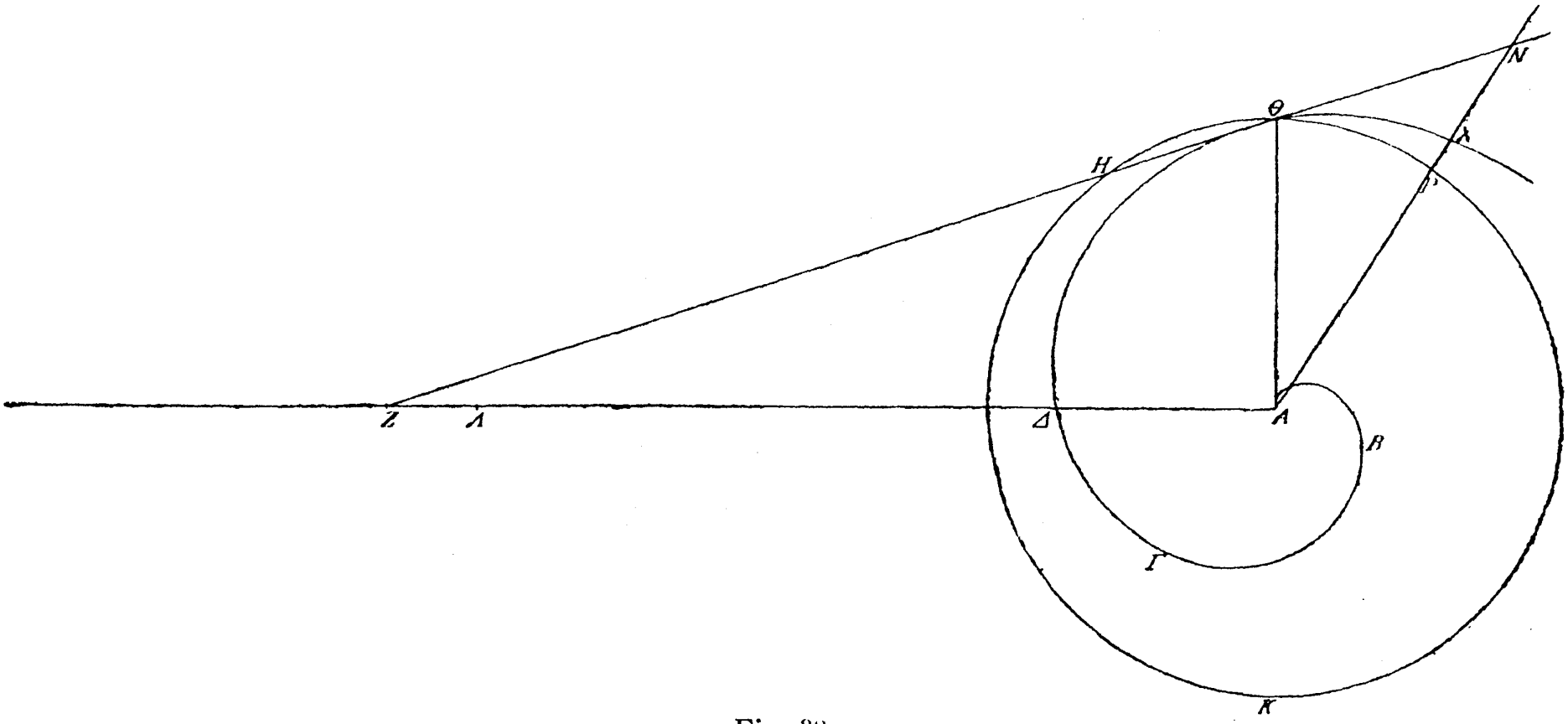


Fig. 38.

pendicolare condotta da A a questa corda, perchè esso è $< \frac{A\Theta}{AZ}$, rapporto eguale al precedente. Si potrà quindi condurre da A alla tangeate una retta BΠ per modo che $\frac{PN}{\Theta\Pi} = \frac{\Theta A}{AA}$ (prop. 8ª); essa tagli il circolo in P e la spirale in X. Ora, essendo $\Theta A = AP$, dalla relazione precedente segue $\frac{NP}{PA} = \frac{\Theta\Pi}{AA}$. Di più $\frac{\Theta\Pi}{AA} > \frac{\text{arc. } \Theta P}{\text{circ. } \Theta HP}$ perchè $\Theta\Pi >$ arc. ΘP e per ipotesi $AA <$ circ. ΘHK; onde $\frac{NP}{AP} > \frac{\text{arc. } \Theta P}{\text{circ. } \Theta HK}$. Ancora: $\frac{PA}{NA} > \frac{\text{circ. } \Theta HK}{\text{arc. } \Theta KP}$ e $\frac{\text{circ. } \Theta HK}{\text{arc. } \Theta KP} = \frac{\Theta A}{AX}$ (prop. 14ª): dunque $\frac{PA}{NA} > \frac{\Theta A}{AX}$, relazione impossibile perchè $PA = \Theta A$ e $NA > AX$. Perciò non può neppure essere $AZ <$ circ. ΘKH. Dunque $AZ =$ circ. ΘKH, c. d. d. (1).

A questa dimostrazione PAPPO mosse il seguente appunto:

Ci sembra sia non piccolo errore per un geometra quello di risolvere un problema piano mediante le linee coniche o linee superiori e in generale far derivare la soluzione di una questione da un genere, al quale non appartiene la questione stessa, come fecero APOLLONIO nel problema (2) sulla parabola nel V Libro delle *Coniche* ed ARCHIMEDE nel suo libro *Sulle spirali*, allorquando usa di un'inserzione in un circolo che è un problema solido. Giacchè si può, senz'adoperare alcuna proposizione solida, dimostrare il teorema esposto da quest'ultimo, cioè che la circonferenza del circolo relativo alla prima rivoluzione è eguale alla retta condotta dall'origine alla tangente (3).

Come ognun vede, in questa critica si possono distinguere due parti. Una colpisce in generale l'uso nelle dimostrazioni di inserzioni non eseguibili *regula et circini* e ad essa abbiamo implicitamente risposto colle osservazioni fatte an-

(1) ARCHIMEDE ed. HEIBERG. T. II. p. 70-76.

(2) Quale? V. n. 60.

(3) PAPPO ed. HULTSCH, p. 270-73; cfr. anche p. 296 e seg. Inoltre HEIBERG, *Ueber eine Stelle des Pappus* (Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd. XXIII, 1878, *Hist.-lit. Abth.*, p. 117-120).

ormente (p. 306) sull'uso di questo artificio di dimostra-
ıe.
'altra, invece, mira al ragionamento dianzi riferito e, per
ıoscere se abbia o non qualche valore, è inevitabile as-
ırarsi se del teorema d'ARCHIMEDE esista o non una di-
strazione nella quale non intervengano problemi di grado
eriore al secondo (1). Orbene, una tale dimostrazione esiste
fatto (2); perchè, senza uscire dagli elementi, si può far
ere che, se (fig. 37) la retta AZ è eguale alla periferia
primo circolo e si conduce la retta ZΘ, questa gode
la proprietà che tutti i punti della curva stanno da una
te di essa, ed è noto essere questa la proprietà con cui
antichi solevano caratterizzare la tangente ad una curva.
za è, dunque, convenire che mentre PAPPO, con dubbio
damento e comportandosi da pedante, disapprovò in mas-
ıa l'impiego nelle dimostrazioni di inserzioni ineseguibili
mentarmente, non senza qualche ragione criticò ARCHI-
DE per avere adoperato un ragionamento più complicato
quanto fosse strettamente indispensabile. Tuttavia egli,
rimendo la propria disapprovazione in quel modo così
do, palesò di non tenere abbastanza conto del fatto che,
giungere alla verità, lo spirito umano non segue di re-
a il cammino di minima resistenza, ed ebbe torto di non
vare, almeno, che, per il progresso della scienza, sa-
be estremamente desiderabile si moltiplicassero gli *errori*
loghi a quello che egli così aspramente rimproverò ad
CHIMEDE, purchè ciascuno recasse un incremento altret-
to notevole alle nostre cognizioni.

2. - Facendo ruotare un'ellisse attorno ad uno de' suoi
i, si ottiene una superficie che ARCHIMEDE chiama *sfe-
de*, *allungata* o *accorciata* secondo che l'asse di rota-
ne è il maggiore o il minore degli assi della curva; fa-
do invece rotare una parabola attorno al suo asse o una
rbola (cioè uno dei due rami di cui noi oggi riteniamo
mposta tale curva) attorno al suo asse trasverso, nasce
a *conoide rettangola* od *ottusangola*. Gli è lo studio di

1 Tale questione venne lasciata irresoluta dall'HULTSCH:
PAPPO ed. HULTSCH, p. 299, nota 1.

2 Come fece vedere P. TANNERY nella memoria citata nella
ta (1) a p. 307.

queste quattro notevoli superficie che ARCHIMEDE si è proposto nel suo libro Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων (1). Il quale è, esso pure, diretto a DOSITEO e si apre con tre proposizioni di aritmetica, di cui la prima è soltanto enunciata, essendo dimostrata nel libro *Sulle spirali* (prop. 11ª), mentre le due altre dicono:

Prop. 1ª. Se

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{A_1}{A_2}\ ,\ \frac{a_2}{a_3} = \frac{A_2}{A_3}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

e

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{A_1}{B_1}\ ,\ \frac{a_2}{b_2} = \frac{A_2}{B_2}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{a_n}{b_n} = \frac{A_n}{B_n}$$

sarà

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{B_1 + B_2 + \ldots + B_n}\ .$$

Prop. 2ª. Se si pone:

$$S = (l + a)\,a + (l + 2a)\,2a + \ldots + (l + \overline{n-1}a)\,\overline{n-1}a + (l + na)\,na$$

$$S' = (l + a)\,a + (l + 2a)\,2a + \ldots + (l + \overline{n-1}a)\,\overline{n-1}a$$

$$\Sigma = n\,(l + na)\,na$$

si avrà

$$\frac{\Sigma}{S} < \frac{na + l}{\frac{na}{3} + \frac{l}{1}} < \frac{\Sigma}{S'}$$

Prima di passare ad esporre le indagini, che sono lo scopo precipuo del libro di cui ci occupiamo, ARCHIMEDE, fedele alle consuetudini sue e dei geometri contemporanei, fa co-

(1) Importa rilevare subito due cose: 1.° che ARCHIMEDE conobbe tutte le quadriche rotonde, eccettuato l'iperboloide ad una falda, 2.° che della conoide ottusangola egli considerò il cono asintoto, il quale egli intendeva descritto dalla rotazione degli asintoti dell'iperbola generatrice.

noscere tutte le proposizioni sussidiarie, che dovrà invocare più tardi. La prima si può considerare quasi un supplemento ai risultati ottenuti nella *Quadratura della parabola*, giacchè ha per iscopo il confronto fra due segmenti di parabola (1) e vien dimostrata servendosi dell'espressione dell'area di un segmento parabolico e di un teorema che APOLLONIO inserì poi nel III Libro delle *Coniche* (prop. 17ª). Le tre successive sono analoghe, inquantochè servono a confrontare l'area di un'ellisse con quella di un circolo o di un'altra ellisse (prop. 4ª-6ª), e sono dimostrate con artifici non dissimili da quelli che si usano oggi per raggiungere lo stesso scopo. Dopo ciò, ARCHIMEDE abbandona la geometria di misura per entrare nel campo della geometria di posizione, ed in tre proposizioni estremamente notevoli (che gli piace enunciare sotto forma di porismi) insegna a costruire un cono (obliquo o retto) o un cilindro circolari passanti per una data ellisse e soddisfacenti ad altre condizioni date (prop. 7ª-9ª), e porge in tal modo un dato di fatto per dimostrare che i geometri greci anteriori ad APOLLONIO si erano occupati non senza frutto di coni obliqui (2).

Premesso ciò e ricordate le proposizioni concernenti la misura dei coni, cilindri e loro *tronchi* (3), ARCHIMEDE si volge allo studio delle quattro quadriche rotonde anteriormente definite, determinando anzitutto (prop. 11ª-14ª) la

---

(1) Sia p il semiparametro di una parabola, nella quale è inscritto un triangolo AA_1A_2, e d la mediana uscente da A del triangolo AA_1A_2 (cioè l'*asse del segmento parabolico* A_1AA_2). È facile vedere che

$$\text{area triangolo } A_1AA_2 = 2\sqrt{2p\ d^3}$$

$$\text{area segmento } A_1AA_2 = \frac{4}{3}\sqrt{2p\ d^3};$$

donde segue che *due segmenti di una stessa parabola che abbiano eguali assi sono equivalenti.* È appunto quanto dimostra ARCHIMEDE nella prop. 4ª. Si può aggiungere (v. formole prec.) che *i quadrati di due segmenti della stessa parabola stanno fra loro come i cubi dei relativi assi.*

(2) CHASLES, *Ap. hist.*, II ed., Paris, 1875, p. 546, nota.

(3) Solidi ottenuti tagliando un cono o un cilindro retto con piani non paralleli alle basi.

specie delle sezioni prodotte in esse da piani aventi determinate posizioni (1). I teoremi 15° e 16° constano ciascuno di tre parti diverse, che per chiarezza distingueremo colle lettere *a*, *b*, *c*; 15*a* e 15*b* si riferiscono alla posizione rispetto a quelle superficie di certe rette; 15c e 16*a* insegnano come sia situato il piano tangente in un punto; 16*b* la costruzione di questo; finalmente 16c e 17 si riferiscono alle coppie di piani tangenti fra loro paralleli di una sferoide, e provano indirettamente come ad ARCHIMEDE non sia sfuggita l'assenza di tali coppie di piani nelle altre due quadriche a lui note. Col teorema affermante che « ogni piano condotto pel centro di una sferoide divide in due parti eguali il solido e la superficie », ARCHIMEDE chiude la rassegna delle proprietà di posizione di cui godono le sferoidi e le conoidi, e si volge quindi ad applicare i metodi così abilmente adoperati nei libri *Su la sfera ed il cilindro* alla ricerca delle proposizioni che, nelle quadriche rotonde, corrispondono a quelle in questi dimostrate per la sfera. A tale scopo — servendosi della prop. 1ª del Libro X degli *Elementi di Euclide* (p. 224), la quale, equivale all'assioma di ARCHIMEDE — egli stabilisce l'importante teorema seguente (nel cui enunciato il lettore ravviserà tosto la forma porismatica): « In un segmento determinato in una conoide od in una sferoide da un piano perpendicolare (prop. 19ª) od obliquo all'asse (prop. 20ª) — nel caso della sferoide si suppone di più che il segmento sia minore di un'emisferoide — si può inscrivere una figura e ad esso circoscriverne un'altra, tali che la loro differenza sia minore di qualunque grandezza data »; da esso, mediante ragionamenti apagogici analoghi a quelli che riferimmo nei nn. 33 e 34, deduce le seguenti importantissime proposizioni, alle quali il Libro in discorso deve l'altissima e meritata fama di cui gode:

Prop. 21''-22'. Il volume di qualunque segmento di conoide ettangola è una volta e mezza il volume di un cono avente

(1) Le dimostrazioni sottintese da ARCHIMEDE furono ricostruite dagli antichi editori delle sue opere (cfr. *Archimedis Opera* ed. HEIBERG, vol. I, p. 343, nota 1) e dallo ZEUTHEN (op. cit., Cap. XIX).

la stessa base e per vertice il punto (*vertice del segmento*) in cui il piano tangente è parallelo alla base (1).

Prop. 25''-26'. Il volume di qualunque segmento di conoide ottusangola sta al cono avente la stessa base e lo stesso vertice, come l'asse del segmento assieme al triplo della distanza del vertice di questo dal centro della superficie sta all'asse assieme al doppio di questa stessa distanza.

Prop. 27''-32'. Se una sferoide è tagliata da un piano qualunque, il minore (maggiore) dei segmenti risultanti starà al cono avente la stessa base e lo stesso vertice, come la somma della semi-congiungente i vertici dei due segmenti e dell'asse del segmento maggiore (minore) sta all'asse del segmento maggiore (minore).

Per tale modo ARCHIMEDE, con un nuovo e convincentissimo esempio, dimostrò la malleabilità e la potenza del metodo da lui usato; i suoi procedimenti sono vere integrazioni, eseguite senza l'algoritmo infinitesimale; ad essi s'inspirarono, in essi trovarono lo stimolo ad ulteriori investigazioni, CAVALIERI, KEPLERO e quanti altri contribuirono alla creazione del calcolo integrale (2).

43. - Di tre sole proposizioni consta l'opuscolo che chiude la serie delle scritture archimedee autentiche e complete, da esaminarsi nel presente Libro (3). È quello intitolato Κύκλου μέτρησις, estratto, fatto presumibilmente ad uso scolastico (4), di un più esteso lavoro, ricordato da PAPPO (5), *Sulla periferia del cerchio* (Περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας),

---

(1) Le prop. 23ª-24ª, che servono a paragonare due segmenti di una stessa conoide rettangola, sono corollari delle due precedenti.

(2) Si veggano anche le ricerche compiute nella Scuola napoletana intorno ad un certo problema di WALLIS, delle quali ho trattato a p. 55-61 del mio precitato scritto sopra *Nicola Fergola, ecc.*

(3) Cfr. NESSELMANN, *Die Algebra der Griechen,* Berlin, 1842, p. 108-122); RUDIO, *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre* (Leipzig, 1892, p. 71-81); HULTSCH, *Die Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes* (Götting. Nachrichten, 1893, p. 385-393).

(4) P. TANNERY, *Sur le mésure du cercle d'Archimède* (Mem. de la Soc. de Bordeaux, T. IV, 2ᵉ Série, 1882), p. 313 e *Bull. des Sc. math. et astr.*, 2ᵉ Série, T. VI, 1882, I Partie, p. 106.

(5) PAPPO ed. HULTSCH. p. 312.

nel quale forse (1) era cominciato il raffronto fra un arco circolare qualsivoglia e la propria corda. Lo scopo della parte superstite di tale opera è il paragone della lunghezza dell'intera periferia di un circolo col relativo diametro, paragone legittimo perchè ARCHIMEDE —come esplicitamente dichiara il commentatore EUTOCIO (2) — a somiglianza del suo predecessore DINOSTRATO (v. p. 163), annoverava fra le grandezze omogenee le lunghezze di due linee qualsivogliano. Esso viene raggiunto col mezzo di tre proposizioni, che ci sono presentate in ordine differente dall'ordine logico (perchè la seconda di esse non è che un semplice corollario della terza) e che noi, autorizzati anche dallo stato dei manoscritti esistenti (3), esamineremo nella loro naturale successione.

La prima di esse afferma l'equivalenza di un circolo ad un triangolo rettangolo, avente i cateti eguali, uno alla periferia, l'altro al raggio del circolo. È una proposizione che da PROCLO (4) è attribuita ad ARCHIMEDE (ciò che viene confermato da due citazioni di PAPPO) (5), attribuzione che non ha nulla di sorprendente, vista, fra l'altro, la somiglianza dell'enunciato e della dimostrazione di essa con altre, che pure vengono attribuite al Siracusano; il ragionamento di ARCHIMEDE poggia sulla considerazione dei poligoni regolari di $3 . 2^n$ lati inscritti e circoscritti alla sfera ed è di natura apogogica; è una sintesi delle argomentazioni di ANTIFONTE e di BRISONE (v. L. I, nn. 48 e 49), purgate da ogni considerazione di infinito e rese rigorose mediante il lemma che porta il nome di ARCHIMEDE.

---

(1) P. TANNERY, *Recherches sur l'astronomie ancienne,* Paris, 1893, p. 63-64.

(2) *Archimedis Opera omnia,* ed. HEIBERG, vol. III, p. 266.

(3) " Hic locus mire corruptus et confusus transcriptoris tribuo, que eum addidit, postquam prop. 2 et 3 permutavit; neque enim Archimedes hanc propositione ante prop. 3, qua nititur, posuit „, ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. I, p. 163, nota 2.

(4) PROCLO-TAYLOR, II, p. 201.

(5) PAPPO ed. HULTSCH, p. 258 e 312. Questo commentatore preferisce enunciare il teorema di ARCHIMEDE dicendo essere il circolo metà del rettangolo avente per base la periferia e per altezza il raggio.

Maggior novità di concetti troviamo nella terza proposizione; essa assegna due limiti fra cui è compreso il rapporto (del quale EUCLIDE aveva già dimostrato la costanza, col teorema 2° del Libro XII degli *Elementi*) della periferia di un circolo qualunque al relativo diametro. Siffatti limiti vengono ottenuti con una procedura la quale, venne sfruttata nell'antichità da APOLLONIO da Perga e FILONE da Gadara (1) e in tempi a noi più vicini da LUDOLF VON CEULEN (1540-1610) e W. SNELLIUS (1580-1626) per trovare, con approssimazione maggiore di quella raggiunta da ARCHIMEDE, il valore del rapporto anzidetto, e che, in tempi recenti, venne ravvisata come suscettibile di assai più vasta applicazione (2). Tale argomentazione ha per proprio fondamento la considerazione dei lati L_n dei poligoni regolari di $n = 6$, 12, 24, 48, 96 lati, circoscritti al cerchio di diametro D, e dei lati l_n degli analoghi poligoni inscritti. ARCHIMEDE dimostra che il rapporto $D : L_n$ è, pei valori suddetti di n, superiore rispettivamente a

$$\frac{265}{153}, \frac{571}{153}, \frac{1162\frac{1}{8}}{153}, \frac{2334\frac{1}{4}}{153}, \frac{4673\frac{1}{2}}{153},$$

mentre il rapporto $D : l_n$ è, per $n = 12$, 24, 48, 96, inferiore rispettivamente a

$$\frac{3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{780}, \frac{1838\frac{9}{11}}{240}, \frac{1007}{66}, \frac{2017\frac{1}{4}}{66}.$$

Detti, quindi, P e p i perimetri dei due poligoni di 96 lati e C la periferia del circolo si avrà

$$\frac{P}{D} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = \frac{29376}{9347} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{2}{1335}} < 3 + \frac{1}{7}$$

(1) Ricordati da EUTOCIO nella chiusa del suo commento alla *Misura del cerchio* (ARCHIMEDE ed. HEIBERG. vol. III, p. 300-302).

(2) C. RUNGE, *Ueber eine numerische Berechnung der Argumente der cyklischen, hyperbolischen und elliptischen Functionen* (Acta mathematica, T. XV, 1891, p. 221-247).

$$\frac{p}{D} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} = \frac{25344}{8069} = 3 + \frac{1}{7 + \dfrac{1}{10 + \dfrac{27}{110}}} > 3 + \frac{1}{7 + \dfrac{1}{10}} = 3 + \frac{10}{71}$$

siccome poi

$$p < C < P,$$

così, *a fortiori*, sarà

$$3 + \frac{10}{71} < \frac{C}{D} < 3 + \frac{1}{7},$$

come appunto trovò ARCHIMEDE (1).

Emerge dal fin qui detto che il ragionamento archimedeo riposa sul calcolo approssimato dei lati dei poligoni regolari successivamente inscritti e circoscritti; per eseguirlo basta una facile combinazione di poche proposizioni della più elementare geometria, ma fa mestieri avere a propria disposizione una considerevole abilità aritmetica la quale permetta di riconoscere che i numeri

$$265\,,\ 591\frac{1}{8}\,,\ \ 1172\frac{1}{8}\,,\ \ 2339\frac{1}{4}$$

sono valori approssimati per difetto risp. di

$$\sqrt{70227}\,,\ \sqrt{349450}\,,\ \sqrt{1373943\frac{33}{64}}\,,\ \sqrt{5472132\frac{1}{16}}$$

mentre i numeri

$$1351\,,\ 3013\frac{3}{4}\,,\ \ 1838\frac{9}{11}\,,\ \ 1009\frac{1}{6}\,,\ \ 2017\frac{1}{4}$$

sono valori approssimati per eccesso di

$$\sqrt{1825200}\,,\ \sqrt{9082321}\,,\ \sqrt{3380929}\,,\ \sqrt{1018405}\,,$$

$$\sqrt{4069284\frac{1}{36}}\,.$$

---

(1) Notiamo che, durante il Medio Evo, la conclusione cui arrivò ARCHIMEDE venne fraintesa, perchè si ritenne essere esattamente $\pi = 3\frac{1}{7}$.

In qual modo ARCHIMEDE abbia ottenuti questi risultati così notevoli ci è completamente ignoto; egli non si è indugiato ad esporre questi particolari di calcolo pratico ed EUTOCIO (che, come la maggior parte dei commentatori, è assai laconico appunto nelle circostanze in cui, con più intenso desiderio, il lettore invoca il suo aiuto!), rimandando per i procedimenti di estrazione della radice quadrata ai commenti alla grande opera di CLAUDIO TOLOMEO, si limita a verificare, con volgari elevazioni a quadrato, l'esattezza dei calcoli di ARCHIMEDE. Sventura volle che le opere citate da EUTOCIO siano andate tutte perdute, ad eccezione di una, la quale riesce di assai mediocre aiuto nell'occasione presente; epperò ci troviamo di fronte ad uno dei troppo numerosi problemi la cui soluzione definitiva sarà possibile soltanto il giorno in cui verrà strappato il velo che nasconde ai nostri occhi la logistica degli antichi Greci. Riserbandoci di riprendere a miglior tempo (Libro V) questo argomento, noteremo intanto che per risolvere il problema storico dianzi enunciato da tempo furono istituite numerose ricerche molte delle quali di valore indiscutibile (1); ma, se esse devono

(1) Su alcune di tali indagini attrassero l'attenzione dei dotti. S. GÜNTHER, nel lavoro *Antike Näherungsmethode im Lichte moderner Mathematik* (Abh. d. k. böhm. Ges. d. Wiss., VI Folge, IX Bd., Prag, 1879), H. G. ZEUTHEN nella nota *Nogle Hypotheser om Archimedes Kuadratrods beregning* (Tidsskrift for Math., 1879, p. 145-155) e J. L. HEIBERG nelle citate *Quaest. Arch.*, p. 60-66. Ma una rassegna completa delle più cospicue fra esse leggesi nella memoria *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und ihre Entwickelungsmethoden von* S. GÜNTHER (Abh. zur Gesch. d. Math., IV Heft, Leipzig, 1882). Sullo stesso argomento si consultino gli scritti posteriori di HEILERMANN, WEISSENBORN, SCHOENBORN e DEMME inserti nei volumi XXVII, XXVIII e XXXI della *Zeitschrift f. Math. u. Phys*, ed ancora: WEISSENBORN, *Die irrationale Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron*, Berlin, 1883; HUNRATH, *Ueber das Ausziehen der Quadratwurzeln bei Griechen und Indern*, Hadersleben, 1883; THIELE, *Archimedes og* $\sqrt{3}$ (Tidsskrift for Math., 5e Série, T. II, 1884, p. 151-153); WEISSENBORN, *Die Berechnung des Kreis-Umfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano*, Berlin, 1894. Un contributo di singolare importanza allo studio degli irrazionali in ARCHIMEDE recò l'HULTSCH coll'articolo già citato (p. 52) che egli inserì nelle *Götting. Nachr.*, 1893; ma riserbiamo di occuparcene in altro momento:

menzionarsi con onore pel loro pregio intrinseco e per l'ingegno che attestano nei loro autori, tuttavia — come in generale quelle aventi carattere di divinazione (1) — non possono ascriversi fra i contributi alle nostre cognizioni positive sulla scienza greca, tanto più che i risultati a cui esse guidarono non sono fra loro in perfetto accordo (2).

Ritornando, ora, all'opuscolo che ci occupa, noteremo che, essendo $\frac{P}{D} < \frac{22}{7}$ ed essendo il cerchio di diametro D espresso da $\frac{1}{4} PD$, si ha subito che il rapporto della superficie di un cerchio qualunque al quadrato del suo diametro è minore, ma approssimativamente eguale, a $\frac{11}{14}$: gli è quello che si apprende dalla seconda proposizione di ARCHIMEDE (3).

L'opera testè esaminata fu, dopo il Rinascimento, il bersaglio contro cui appuntarono i loro strali i pretesi quadratori del circolo, i quali, trovando le lor conclusioni discordanti da quelle a cui era giunto ARCHIMEDE, per difenderle, si sforzarono di mostrare erronee quelle del Siracusano; questi all'opposto trovò strenui difensori in coloro che con-

---

allora terremo conto anche della memoria dello stesso autore *Zur Kreismessung des Archimedes*, di cui la prima parte è inserita nel vol. 39, 1895 (Hist.-lit. Abth., p. 121-237) della *Zeitschr. für Math. und Phys.*

(1) Specialmente quando si tratta di operazioni approssimate nel compiere le quali un abile calcolatore abbandona di quando in quando il metodo generale per raggiungere più rapidamente un buon risultato.

(2) Infatti, se gli uni contestano ad ARCHIMEDE la conoscenza di un metodo uniforme per calcolare le radici quadrate, altri arrivano ad attribuirgli l'uso di procedimenti, che equivalgono all'applicazione delle frazioni continue alla estrazione delle radici quadrate; e l'ipotesi non molto riverente, che il Siracusano abbia sottintesi i calcoli in discorso perchè erano così poco eleganti da diminuire, invece che accrescere, il pregio del suo scritto, è in aperto contrasto con quella che spiega il suo silenzio coll'avere egli giudicato le lacune da lui lasciate facilmente colmabili dai suoi contemporanei.

(3) Vedremo nel Libro seguente (n. 72) che ERONE attribuisce ad ARCHIMEDE altri risultati analoghi, ma più approssimati.

futarono quelle quadrature, i quali a ragione notarono che, per conseguire il loro scopo, nessun mezzo poteva dirsi migliore del far vedere *a priori* errata qualsivoglia proposizione fosse in disaccordo con quelle di cui si compone la *Misura del cerchio.*

44. - Nei lavori di cui abbiamo testè compiuta un'analisi sommaria, ARCHIMEDE ha offerto i primi esempi di determinazioni rigorose di volumi limitati da superficie non tutte piane, di aree piane limitate da linee curve e di aree non piane, ha insegnato a tracciare le tangenti, anzi a studiare completamente una notevole curva trascendente ed ha trattato il problema della quadratura del circolo sotto l'unica forma che allora era possibile per renderlo in qualche modo risolvibile (1). Laonde i risultati più cospicui che egli ha ottenuti, quei risultati il cui raggiungimento è senza dubbio il principale scopo di quei lavori, appartengono a quelle che oggi si riguardano per applicazioni del calcolo infinitesimale alla geometria; ed è opportuno ricordare qui, in primo luogo, che lo studio approfondito di essi guidò FERMAT e CAVALIERI, LEIBNIZ e NEWTON alla scoperta dei procedimenti generali moderni e, in secondo luogo, che dietro l'imponente autorità del Siracusano si rifugiarono i primi geometri che si servirono di questi procedimenti. Ma quei risultati sono raggiunti indipendentemente dal concetto di infinito — dal quale i geometri greci del periodo aureo rifuggivano, quasi con superstizioso terrore, non essendo riusciti a fondare su di esso ragionamenti esenti da obbiezioni — col mezzo di un artificio (metodo d'esaustione), adoperato già da EUCLIDE nel XII Libro degli *Elementi* (v. n. 22), di aspetto variabile, ma di essenza costante, che ARCHIMEDE, secondo il costume in uso ai suoi tempi (2) non enuncia in generale, ma applica in ogni caso particolare senza dichiararlo. Tale artifizio (cfr. nn. 22, 37 e 39) riposa sulla considerazione di due

(1) Si allude qui all'altra formulazione, che solo l'analisi moderna permise e che nel 1882 guidò F. LINDEMANN alla soluzione definitiva completa del celebre problema.

(2) " Ce qui manque aux mathématiques grecques ce sont moins les méthodes (les grands géomètres en possedaient assez pour l'ordre de travaux qu'il poursuivaient) que des formules propres à l'exposition des méthodes ... P. TANNERY, *Bull. d. Sc. math. et astr.*, 2e Sér., T. X, 1885.

grandezze variabili, fra cui è sempre compresa la grandezza da misurarsi e tali che la loro differenza si può rendere più piccola di qualsivoglia grandezza data; coll'aiuto di esso e dell'assioma d'ARCHIMEDE, si arriva, attraverso ad una duplice riduzione all'assurdo, a convincere che la grandezza da misurare non potrebbe essere maggiore nè minore di una certa grandezza, determinata appunto dal teorema da dimostrarsi; che, in conseguenza, queste due grandezze siano fra loro eguali si deduce ammettendo che siano omogenee. Nei ragionamenti di tal fatta quello che muta da caso a caso è la scelta delle grandezze ausiliarie, nella quale appunto si rileva l'abilità del geometra, come nella scelta delle variabili d'integrazione si dimostra quella dell'analista; e si noti che questo che noi facciamo non è un semplice paragone, ma invece la constatazione di un'affinità profonda fra i metodi antichi ed i moderni. Per dirigere tale scelta a quale varietà di espedienti dovette ricorrere ARCHIMEDE! Quanto profondamente egli dovette studiare le proprietà delle figure da lui considerate! Gli è per questa ragione che le opere di questo celebre geometra, oltre le conclusioni a cui sopra alludemmo, contengono gran numero di indagini ausiliarie, degne della più elevata considerazione; a dimostrarlo basti citare il primo studio metodico a noi noto delle quadriche di rivoluzione (1).

La considerazione simultanea delle figure inscritte e circoscritte guida di regola con estrema difficoltà alla scoperta del limite comune a cui esse tendono, non appena si abbandonino i problemi più elementari e le figure di più facile costruzione. Ciò indusse la maggioranza degli scienziati moderni (2) a supporre che i procedimenti di dimostrazione impiegati da ARCHIMEDE fossero differenti da quelli che gli servirono alla scoperta delle verità da lui esposte; ipotesi questa che si direbbe confermata da parecchi passi delle lettere che preludono ai suoi lavori, nei quali sembra che il nostro geometra schiettamente distingua l'atto di scoprire

(1) Rileviamo anzi che molte proposizioni di ARCHIMEDE, nonchè le loro dimostrazioni, sono indipendenti dall'ipotesi che la quadrica sia rotonda.

(2) Fra questi sembra non potersi ascrivere il CARNOT: si veggano le sue *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, 2e éd., Paris, 1813, p. 134-141.

dall'atto di dimostrare le verità geometriche. Spogliato, così, il modo di procedere archimedeo del carattere di metodo di ricerca, si è stimolati a ricostruire le analisi relative alle di lui splendide sintesi; un pregevole tentativo in questo senso venne fatto da uno dei più profondi conoscitori dell'antica geometria (1); ma il determinare in quale proporzione esso accresca quanto sappiamo sulla scienza greca è un problema che sfugge ai nostri metodi di misura. D'altronde, siccome è comune a tutti il desiderio di formarsi un concetto, almeno approssimativo, del modo in cui la mente umana procede alla scoperta del vero, così crediamo dar qui un posto alla geniale congettura (2) secondo cui ARCHIMEDE (nonchè in generale gli antichi geometri) avrebbe usato, quali ausiliari per l'indagine delle proprietà dello spazio, l'applicazione dell'aritmetica alla geometria (3) e di questa a quella, nonchè in genere le matematiche applicate e specialmente la meccanica, senza sdegnare i soccorsi indiscutibilmente potenti dell'analogia e dell'induzione: una semplice ispezione delle pagine che precedono somministra argomenti assai poderosi a sostegno di questa supposizione.

Ma nuove ed ancor più robuste prove dell' uso da parte di ARCHIMEDE di considerazioni meccaniche per scoprire le verità geometriche sono offerti da un frammento greco recentemente scoperto in una biblioteca di Costantinopoli, decifrato e riconosciuto per l'opera archimedea sul *Metodo* (4) dall'HEIBERG (5), tradotto da lui in tedesco (6),

---

(1) Il BARROW; si veggano le XXIV-XXVIII delle sue *Lectiones mathematicae.*

(2) L. F. OFTERDINGER, *Beiträge zuc Geschichte der griechischen Mathematik.* Ulm, 1860, p. 6-7.

(3) Ciò è ammesso anche dal MARIE, il quale osserva di più: " De toutes les choses incroyables entre lesquelles, pourtant, il faut bien choisir, en présence du fait, la plus croyable est encore, il me semble, qu' Archimède se servait pour lui-même d'une certaine algèbre et y était très-versé ... *Hist. des sciences math. et phys.*, T. I, Paris, 1883, p. 121.

(4) È l' ἐφοδιζον ricordato da ERONE (*Opera*, III ed., p. 131-33).

(5) *Eine neue Archimedeshandschrift*, HERMES, T. XLII, 1907.

(6) J. L. HEIBERG und H. G. ZEUTHEN, *Eine neue Schrift des Archimedes* (Bibl. mathem., III Folge, VII Band, 1907). V. inoltre HEIBERG Λεύτεραι φροντίδες (Festskrift til. H. G. ZEUTHEN, Kobenhavn, 1909).

in francese da T. REINACH (1), in inglese da LYDIA B. ROBINSON (2) e poi da T. L. HEATH (3), finalmente in russo per cura della Società « Mathesis » (4); esso fu commentato con grande ampiezza e profondità da H. G. ZEUTHEN.

La portata filosofica e metodologica di questo lavoro del celebre Siracusano risulta dalla lettera-prefazione che suona così:

" ARCHIMEDE ad ERATOSTENE salute.

Prima d'ora io ti ho mandati gli enunciati di alcuni teoremi da me scoperti, invitandoti a trovarne le dimostrazioni che io, in quel momento non ti comunicavo. Ecco quali erano siffatti enunciati:

1.° *Se s'inscrive* (fig. 39) *un cilindro in un parallelopipedo con le basi inscritte in quelle del prisma e la superficie laterale tangente alle sue facce laterali — e si conduce un piano per il centro di una delle basi ed un lato del quadrato opposto, esso staccherà dal cilindro una porzione limitata dal piano secante, dal piano della base e da una parte di superficie cilindrica, il cui volume sarà un sesto di quello dell'intero parallelopipedo.*

2.° *Se in un cubo s'inscrivono prima un cilindro avente le basi inscritte in due facce opposte e la superficie laterale tangente alle altre quattro, poi un secondo analogo cilindro avente per basi inscritte in altre due facce opposte e la superficie laterale tangente alle altre quattro; allora il volume risultante dall'intersezione di queste due superficie cilindriche e comune ai due cilindri varrà due terzi del cubo intero.*

È chiaro che questi teoremi sono d'un genere del tutto diverso da quelli che ti avevo comunicati (5). In quelli, infatti, io paragonavo dal punto di vista del volume le figure di elissoidi e paraboloidi di rivoluzione e segmenti di figure siffatte a coni e cilindri. Invece nel caso attuale ho trovato che cia-

---

(1) *Un traité de géométrie inédit d'Archimède* (Introduction de M. P. PAINLEVÉ). Révue générale des sciences, 30 nov. e 15 déc. 1907.

(2) *A newly discovered Treatise of Archimedes* (The Monist, April, 1909), scritto a cui fa seguito *A Commentary on the Heiberg manuscript of Archimedes* di D. E. SMITH.

(3) Odessa, 1908.

(4) *The "Method" of Archimedes recently discorered by Heiberg. A supplement to "The works of Archimedes, 1897"*. Cambridge. 1912.

(5) ARCHIMEDE allude qui ai teoremi sopra i volumi delle conoidi e delle sferoidi.

scuno dei volumi considerati — limitati da piani e superficie cilindriche — equivale ad un solido limitato da piani.

Nel presente scritto io ho redatte le dimostrazioni di questi due teoremi e te le mando. Ma conoscendoti, come soglio dire, per uno scienziato zelante, per distinto filosofo e grande ammiratore delle ricerche matematiche, io ho creduto di scrivere per tuo uso e comunicarti i particolari di un metodo speciale di cui, quando te ne sarai impadronito, ti potrai servire per scoprire certe verità matematiche col mezzo della meccanica. D'altronde, io vado persuadendomi che tale metodo non è meno utile per

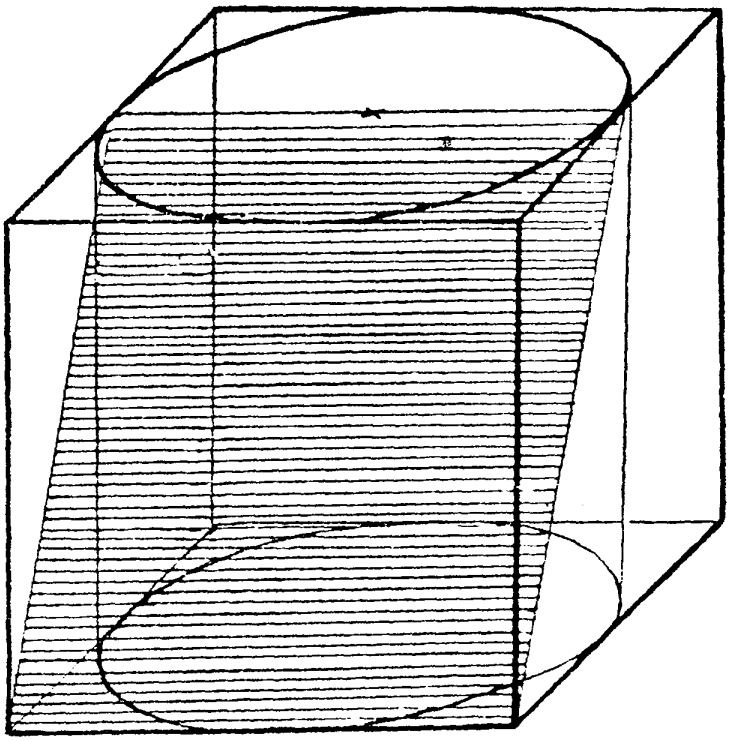


Fig. 39.

la stessa dimostrazione dei teoremi. Infatti, spesso io scopersi con l'aiuto della meccanica proposizioni che ho poi dimostrate col mezzo della geometria, perchè il metodo in questione non costituisce una vera dimostrazione. Giacchè riesce più facile, dopo che con tale metodo si sia acquistata una cognizione all'ingrosso delle questioni, l'immaginarne poi la dimostrazione, che se si cercasse questa senza alcuna nozione preliminare. Per la stessa ragione riguardo ai teoremi di cui Eudosso ha per primo scoperte le dimostrazioni — cioè che il cono è il terzo del cilindro, la piramide il terzo del prisma aventi eguale base ed eguale altezza — il merito ne va fatto risalire in buona

parte a DEMOCRITO, che per primo ha enunciato senza dimostrazione le proposizioni relative a tali figure (1).

Per quanto concerne anche i teoremi che pubblico oggi, io ne feci la scoperta servendomi del metodo meccanico. Quindi io reputo di doverti esporre tale metodo per due ragioni: anzitutto perchè, avendovi fatto allusione altrove (2), non vorrei essere accusato da qualcuno di avere parlato senza fondamento e poi perchè ritengo che tale pubblicazione non sarà di mediocre giovamento alla nostra scienza. Poichè, senza dubbio molti scienziati presenti e futuri, dal metodo che io esporrò, saranno posti in grado di scoprire altri teoremi che io non ho ancora incontrati sul mio cammino.

Seguono alcuni lemmi già noti per altri studi archimedei, parecchi teoremi sopra l'area della parabola ed i volumi di solidi sferici e sferoidici, già contenuti in altre pubblicazioni, finalmente le dimostrazionidei due nuovi teoremi, di cui la riferita prefazione contiene l'enunciato.

Di molte di queste proposizioni ARCHIMEDE dà due dimostrazioni, una meccanica, geometrica l'altra; il loro paragone suggerisce molte considerazioni intorno agli antichi metodi di scoperta e di dimostrazione ed alla loro parentela con la *Geometria degli indivisibili* di B. CAVALIERI; ma la via lunga che dobbiamo percorrere ci vieta il diffonderci su di esse.

45. - Oltre alle opere archimedee che ci arrivarono pel tramite dei Greci, di due altre serbarono notizia gli Arabi: una è quella di cui già ci occupammo nel n. 37, l'altra è una collezione di eleganti proposizioni di geometria piana, di cui nel 1659 fu pubblicato per le stampe (3) una versione latina, dovuta a I. GRAVES, sotto il titolo di *Lemmata Archimedis*, e che, per la seconda volta, venne fatta conoscere (4), poco dopo, da G. A. BORRELLI, sotto il titolo di *Liber assumptorum;* in seguito venne accolta in tutte le più reputate edizioni degli scritti archimedei (5). Ciò non

(1) Qui ARCHIMEDE sembra contraddire sè stesso: v. la prefazione al I Libro *Sulla sfera ed il cilindro* riferita da noi a p. 143

(2) Vedi specialmente il trattato *Della quadratura della parabola.*

(3) *Miscellanies or Mathem. Lucubrat. of* S. FOSTER, London, 1659

(4) *Apolloniis Pergaei Conica* V-VII *et Archimedis Assumptorum liber.* Florentiae. 1661.

(5) Cfr. Anche A. M. SÉDILLOT, *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux,* T. I, Paris, 1845, p. 401-6.

ostante essa non può considerarsi per un lavoro redatto da ARCHIMEDE stesso, chè altrimenti, come spiegare che, negli enunciati delle prop. IV e XIV, si possa parlare di lui in terza persona e che, in alcune argomentazioni, si trovino delle non lievi inesattezze? Le ragioni, per le quali si propende a considerare quel lavoro come una collezione di teoremi radunati da qualche geometra posteriore, nel mentre leggeva alcune memorie del Siracusano, verranno indicate dopo i loro enunciati, che ora riferiremo:

I. Se due circoli si toccano, gli estremi di due loro raggi paralleli sono allineati col punto di contatto (1).

II. È dato un semicerchio, la tangente in un estremo del relativo diametro ed un'altra tangente qualunque: la retta che unisce l'altro estremo del diametro alla intersezione delle due tangenti, biseca la perpendicolare abbassata sul diametro dal punto di contatto della seconda tangente.

III. Dato (fig. 40) un segmento circolare qualunque ABC ed un punto qualunque B dell'arco relativo: si conduce BD per-

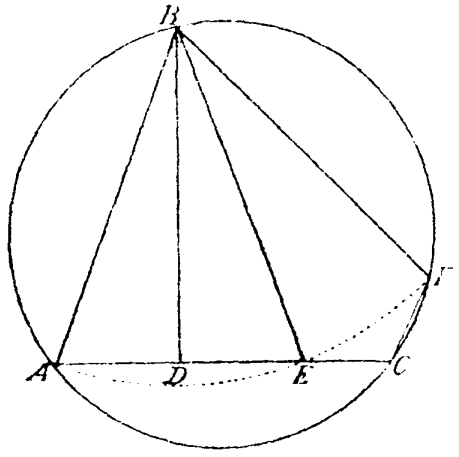


Fig. 40.

pendicolare ad AC, si porta sulla corda $DE = AD$ e sull'arco $BF = AB$: condotta la retta CF, sarà $CF = CE$.

IV. Dato (fig. 41) un semicerchio ABC ed un punto D del diametro si descrivono nell'interno di esso due semicircoli aventi per diametri AD e CD. La figura (ἄρβηλος) (2) limitata

(1) Il teorema vien dimostrato da ARCHIMEDE nell'ipotesi che il contatto sia interno; il caso del contatto esterno fu considerato da PAPPO (ed. HULTSCH, p. 840)

(2) Questa figura (il cui nome deriva dalla sua rassomiglianza con un trincetto da calzolaio) è considerata anche da PAPPO

dalle tre semicirconferenze è eguale al cerchio avente per diametro la retta DB perpendicolare ad AC.

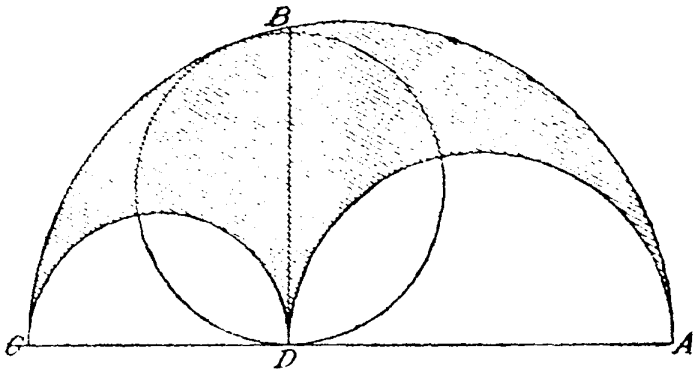


Fig. 41.

V. Nella stessa figura, i circoli inscritti nei due triangoli mistilinei i cui l'*arbelo* è diviso dalla retta DB sono eguali (1).

VI. Nella stessa figura, dato il rapporto $AD : DC = \lambda$, trovare il rapporto al diametro AC del raggio del cerchio tangente ai tre semicerchi dianzi descritti: se per es. $\lambda = \frac{1}{2}$ il rapporto cercato vale $\frac{6}{19}$ (2).

VII. Il quadrato circoscritto ad un cerchio è doppio del quadrato inscritto in questo.

VIII. Se si prolunga una corda qualunque AB di un cerchio di un segmento BF eguale al raggio e si unisce al centro C l'estremo del prolungamento, si avranno in totale due secanti FBA, FDE che intercettano sulla circonferenza data due archi non adiacenti AE, BD, di cui uno è il triplo dell'altro (3).

IX. Due corde di un cerchio fra loro perpendicolari ne dividono la periferia in quattro archi tali che la somma di due opposti è eguale alla somma degli altri due.

(ed. Hultsch, p. 228-224), il quale, però, non parla di Archimede, probabilmente perchè non ebbe da invocare alcuno dei lemmi IV-VI.

(1) Infatti è facile vedere che il raggio di ciascuno è espresso da $\frac{AC \cdot DC}{AD + CD}$.

(2) Archimede si limita a dimostrare questo risultato speciale, asserendo che similmente procederebbesi in ogni altro caso. In generale in rapporto richiesto è espresso da $\frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1}$

(3) Quindi, se si vuole dividere in tre parti eguali un arco AE, basta condurre per A una retta tale che la porzione di

X. Date (fig. 42) due tangenti *DA* e *DC* di un cerchio ed una secante *DB* entro l'angolo da esse formate: per il punto di contatto *C* di una di esse si conduce la corda *CE* parallela alla

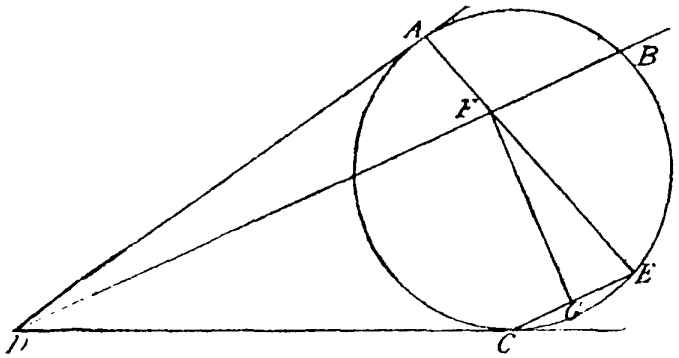


Fig. 42.

secante e se ne unisce l'estremo *E* al punto di contatto *A* dell'altra tangente. Le rette *AE* e *BD* si tagliano in un punto *F*: se da questo si conduce *FG* perpendicolare a *CE*, il punto *G* bisecherà questa corda.

XI. Due corde di un cerchio fra loro perpendicolari si tagliano scambievolmente in quattro parti i cui quadrati dànno per somma il quadrato del diametro.

XII. Date una semicirconferenza e le tangenti in due suoi punti qualunque, il punto a queste comune e l'intersezione delle rette che uniscono i punti di contatto agli estremi del diametro, stanno su una retta perpendicolare a questo (1).

XIII. Se dagli estremi di un diametro si conducono le perpendicolari ad una corda, i loro estremi saranno equidistanti dal punto medio della corda.

---

essa compresa fra il diametro *DCE* prolungato e la circonferenza a cui appartiene l'arco sia eguale al raggio. Il problema della trisezione dell'angolo è così ridotto ad un problema di inserzione che forse (cfr. n. 41) ARCHIMEDE intendeva si risolvesse meccanicamente. Che lo scopo del lemma VIII sia appunto di ridurre l'uno all'altro i problemi citati, venne esplicitamente affermato da NEWTON (v. *Arithmétique universelle, trad.* BEAUDEUX, Paris, an X, 1802, T. II, p. 55, 56 e 82) ed è implicitamente confermato dall'uso che ne fecero i commentatori Arabi.

(1) Come ognun vede, assoggettando questo lemma ad una trasformazione projettiva si ottiene il seguente notissimo teorema: *Dato un quadrangolo semplice inscritto in una conica, le tangenti in due vertici adiacenti e le tangenti negli altri due si intersecano in due punti allineati col punto d'incontro delle diagonali.*

XIV. Dati (fig. 43) un semicerchio ABC e due punti E, G del diametro AC equidistanti dal centro O, si descrivano i due semicerchi di diametri AE, GC interni al dato e il semicerchio di diametro EG esterno: la figura |che ARCHIMEDE chiama σαλίνον (1)| limitata dalle quattro semicirconferenze è eguale al cerchio avente per diametro la retta BH perpendicolare ad AC in O.

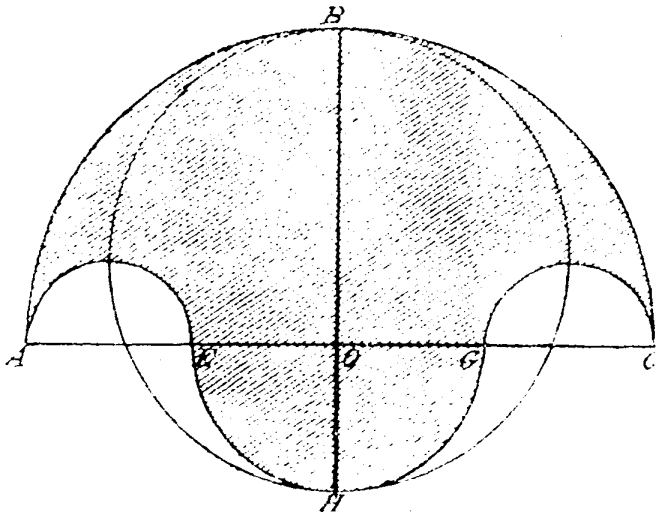


Fig. 43.

XV Se AC (fig. 44) è il lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio di diametro AB e D è il punto medio dell'arco AC, il prolungamento della retta CD taglierà il diametro di un punto E, che dista di una lunghezza eguale al raggio dal piede G della perpendicolare condotta ad AB dal punto F comune alle rette AC e BD.

Un semplice esame di queste proposizioni mostra che esse trattano tutte di cerchi, molte di rette a questi tangenti, alcune di circoli fra loro tangenti; si può quindi supporle

(1) Grafia ed etimologia di questo vocabolo sono incerte: ad es. il BARROW preferisce scrivere σαλίνιον, M. CANTOR (*Vorlesungen* I, p. 299) fa derivare il detto nome da σάλος (ondeggiare dell'alto mare), mentre l'HEIBERG (*Archimedis Opera* II, p. 443) lo deduce da σέλινον (edera) colla cui foglia egli ravvisa nel *salinon* una certa rassomiglianza (argomenti a sostegno di questa opinione vennero offerti da P. TANNERY, Bibl. mathem., 3ª Serie, T. I, 1900, p. 266); da ultimo T. L. HEATH (*The works of Archimedes*, Cambridge, 1897, p. XXXIII) ritiene il vocabolo σάλινον per una ellenizzazione di data recente dalla parola *salinum* (saliera).

estratte dagli scritti *Sui cerchi tangenti* e *Sull'ettagono nel circolo*, ora perduti, che gli Arabi attribuiscono ad ARCHIMEDE (1). Inoltre, le quadrature dell'*arbelo* e del *salinon* (figure di cui è palese l'analogia con le lunole d'IPPOCRATE) sono semplici applicazioni del primo dei teoremi insegnati

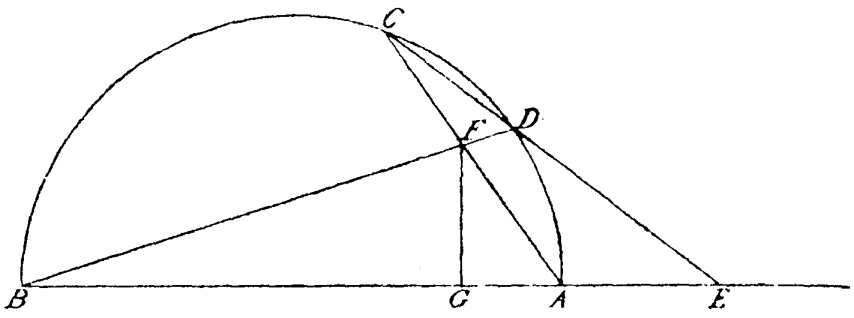


Fig. 44.

nella *Misura del circolo;* e l'espressione di ricercata eleganza con cui sono enunciate richiama alla mente le doti analoghe che rilevammo in scritture indiscutibilmente archimedee (v. p. 256). Finalmente la proposizione VIII — alla quale, come osservammo in nota, sarebbe difficile assegnare uno scopo diverso da quello di trisecare un angolo — viene a confermare le osservazioni anteriormente fatte (v. n. 41) intorno all'uso delle inserzioni meccaniche per risolvere i problemi geometrici. Per tutte queste ragioni noi ascriviamo ad ARCHIMEDE la totalità dei *Lemmi* che portano il suo nome, senza però escludere la possibilità che fra essi se ne trovino taluni derivati da altra fonte.

46. - Di un'ultima importante classe d'indagini compiute da ARCHIMEDE serbò notizia PAPPO nella seconda parte del V Libro della *Collezione matematica* (2). Ivi, per dimostrare che la sfera è il corpo che, a parità di superficie, racchiude il volume massimo, il commentatore citato la paragona ad altre figure in essa inscritte e sceglie, oltre i cinque poliedri regolari, altri solidi (semiregolari) dotati di una parziale regolarità, cioè limitati da facce equilatere ed equiangole, ma non tutte simili; tali solidi, egli aggiunge,

(1) Cfr. HEIBERG, *Quaest. Arch.*, p. 29.
(2) Ed. HULTSCH, p. 350-358.

sono in numero di tredici e furono scoperti da ARCHIMEDE. Per descriverne la struttura, PAPPO indica per ciascuno dei poliedri archimedei (che designeremo per brevità con le lettere P_1,..., P_{13}) il numero delle facce di ogni specie che lo limitano; se si conviene d'indicare con $P_k\,(a_\alpha\,, b_\beta\,,...)$ che il k^{mo} poliedro archimedeo ha per facce α a-goni regolari, β b-goni regolari, ecc., i suoi dati si possono riassumere come segue: $P_1\,(4_3\,, 4_6)$, $P_2\,(8_3\,, 6_4)$, $P_3\,(6_4\,, 8_6)$, $P_4\,(8_3\,, 6_8)$, $P_5\,(8_3\,, 18_4)$, $P_6\,(12_4\,, 8_6\,, 6_8)$, $P_7\,(20_3\,, 12_5)$, $P_8\,(12_5\,, 20_6)$, $P_9\,(20_3\,, 12_{10})$, $P_{10}\,(32_3\,, 6_4)$, $P_{11}\,(20_3\,, 30_4\,, 12_5)$, $P_{12}\,(30_4\,, 20_6\,, 12_{10})$, $P_{13}\,(80_3\,, 12_5)$. Perciò P_1 ha 8 facce (donde il nome di ὀκτάεδρον con cui lo designa PAPPO); P_2, P_3 e P_4 ne hanno 14 (τεσσαρακαιδεκάεδρα)(1); P_5 e P_6 26 (ἑκκαιεικοσάεδρα); P_7, P_8 e P_9 32 (δυοκαιτριακοντάεδρα); P_{10} 38 (ὀκτωκαιτριακοντάεδρον); P_{11} e P_{12} 62 (δυοκαιεξηκοντάεδρα); finalmente P_{13} 92 (δυοκαιεννηκοντάεδρον). Il numero degli spigoli è espresso, come osserva PAPPO, dalla semisomma del numero dei lati di tutte le facce, cioè da $\frac{1}{2}\,(a\alpha + \beta b + ...)$, onde è ordinatamente 18, 24, 36, 36, 48, 72, 60, 90, 90, 60, 120, 180 e 150; invece, il numero dei vertici è quella stessa somma divisa per 3, per 4 o per 5, secondo che gli angoli del poliedro sono tutti triedri, tetraedri o pentaedri, quindi è risp. 12_3, 12_4, 24_3, 24_4, 48_3, 30_4, 60_3, 24_5, 60_4, 120_3 e 60_5, ove gli indici indicando il numero delle facce di ciascun angolo solido.

PAPPO si limita a descrivere i poliedri di ARCHIMEDE, nel modo testè riassunto (2), senza dire le origini e lo scopo per cui quel grande istituì le ricerche in discorso, nè i mezzi di cui si servì per compierle; ora, quanto al fine, non è estremamente probabile che ARCHIMEDE si proponesse di *determinare tutti i poliedri semiregolari*, figure la cui esistenza era stata rivelata da osservazioni che risalgono all'epoca di PLATONE (v. p. 123)? E quanto ai mezzi, non

(1) Sono due di questi che, se si presta fede ad ERONE (vedi p. 123), sarebbero stati segnalati da PLATONE.

(2) Le relative figure vennero disegnate da KEPLERO nel II Libro dell'*Harmonices mundi* (v. *J. Kepleri Astronomi Opera Omnia* ed. FRISCH, Francforti et Erlangae, 1764, T. V, p. 123-126); ivi si trova anche una completa nomenclatura dei solidi archimedei.

enza ragione fu supposto (1) avere ARCHIMEDE conosciuta quella celebre relazione fra i numeri dei vertici, delle facce e degli spigoli che porta i nomi di DESCARTES e di EULERO (2), potesi questa che può confortarsi con l'osservazione che, basandosi su quella formola, è possibile dimostrare direttamente l'esistenza dei tredici solidi di ARCHIMEDE (3).

Ma, ad un geometra dell'antichità, non poteva bastare l'avere dimostrata la possibilità di una figura geometrica, essendo egli tenuto ad insegnarne la costruzione; ha fatto ciò ARCHIMEDE pei poliedri che recano il suo nome? Sopra tale questione PAPPO serba un completo silenzio; invece un di lui antico anonimo scoliasta (4) riferisce un procedimento uniforme per costruire i primi cinque poliedri archimedei che, a nostro avviso, egli apprese nell'opera *Sui poliedri* presumibilmente scritta da ARCHIMEDE. Per dichiarare in che consista, indichiamo con le lettere T, E, O, D, I, i cinque poliedri regolari nell'ordine seguente: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro; inoltre chiamiamo *inscritto* un poligono regolare di $2n$ lati in uno di n, quando n lati del primo sono stesi su altrettanti del secondo, mentre i rimanenti si trovano rimpetto ad altrettanti vertici di questo. Allora le informazioni date da quello scoliasta possono compendiarsi nel seguente enunciato: *P_1 nasce da T inscrivendo un esagono in ogni sua faccia e conducendo un piano per ciascuna terna di punti così ottenuti adiacente a un vertice di T; P_2 nasce* (fig. 45) *da E, bisecandone gli spigoli e congiungendo, come nel caso precedente, con piani i punti ottenuti; P_3 nasce da O inscrivendo nelle*

(1) S. GÜNTHER, *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften*, Leipzig, 1876, p. 53.

(2) R. BALTZER (*Berliner Monatsberichte*, 1861) e E. DE JONQUIÈRES (*Comptes rendus*, 1890) rilevarono che essa fu scoperta, assai prima di EULERO, da DESCARTES (il lavoro di questo fu studiato a fondo dal DE JONQUIÈRES stesso nella *Bibl. math.*, 1890, p. 43-55, ed in una più estesa memoria, pubblicata, pure nel 1890, dall'Istituto di Francia), il quale, di più, ha considerati e studiati tutti i poliedri archimedei, esclusi quelli da noi designati con P_{10} e P_{13}.

(3) R. BALTZER, *Stereometria*, trad. CREMONA II ed., Genova, 1877, p. 121-125.

(4) PAPPO ed. HULTSCH, p. 1241: cfr. p. 1170.

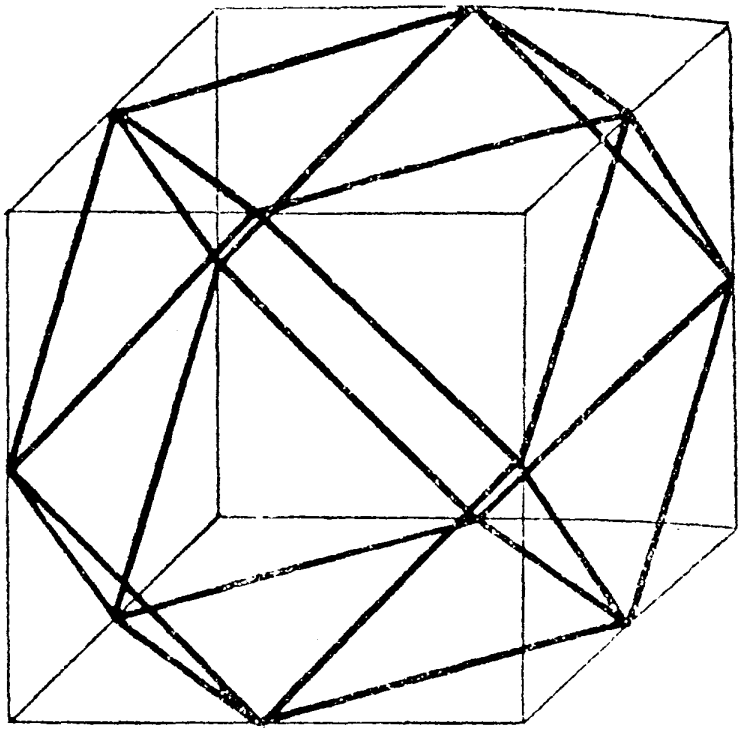


Fig. 45.

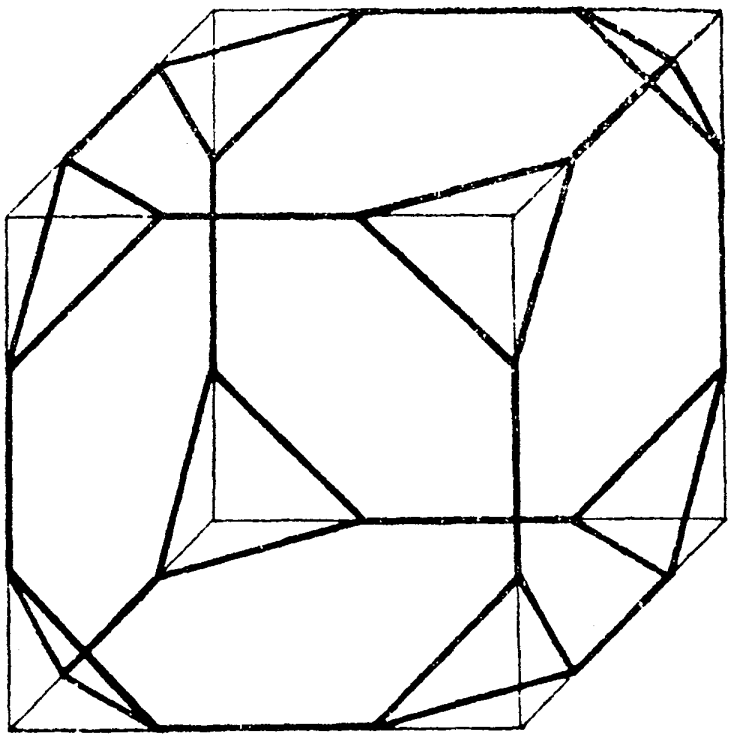


Fig. 46.

sue facce altrettanti esagoni e conducendo dei piani nel modo anzidetto; P_4 nasce (fig. 46) *da E inscrivendo in ogni faccia un ottagono; finalmente P_5 nasce da P_2 bisecandone gli spigoli.*

La verità di queste proposizioni si constata senza difficoltà effettuando le operazioni indicate e si giunge così nel modo più ovvio ad immaginare la forma dei primi cinque solidi di ARCHIMEDE; ora, ognun vede che queste operazioni non sono che il prodotto dell'applicazione costante di quel metodo di derivazione dei cristalli, che ai geometri venne insegnato nel 1509 da LUCA PACIUOLO (1) (1445-1514 circa) ed ai mineralisti venne suggerito da ROMÉ DE L'ISLE (1736-1790), il quale v'impose il nome di *troncatura* (2). È notevole che lo stesso metodo è capace di condurre a tutti i poliedri di ARCHIMEDE, uno solo escluso (quello che chiamammo P_{10}) (3): infatti al lettore non sarà difficile verificare che P_6 *deriva da* P_2 *inscrivendo degli ottagoni nelle sue facce quadrate;* P_7 *bisecando gli spigoli di D o di I;* P_8 *da I inscrivendo degli esagoni nelle facce di I;* P_9 *da D inscrivendo in ogni sua faccia un decagono; finalmente da* P_7 *si possono dedurre* P_{11} *e* P_{12}, *mentre* P_{13} *si ottiene bisecando gli spigoli di* P_{10}. E noi, tenendo conto anche di quanto viene da ERONE attribuito a PLATONE (v. p. 123), non esitiamo ad attribuire ad ARCHIMEDE anche la conoscenza di queste proposizioni, nonchè la nozione della feconda legge di derivazione dei cristalli che dianzi abbiamo ricordata, legge che egli forse, seguendo il suo costume (cfr. p. 324), avrà

(1) Veggasi la *Divina Proportione* di questo celebre matematico.

(2) Si consulti l'*Essai de cristallographie* (Paris, 1772) e più completamente la *Cristallographie ou description des formes propres à tous les corps du règne mineral.* (Paris, 1783).

(3) Il ROMÉ DE L'ISLE, nella maggiore delle opere dianzi citate, ottiene col mezzo della troncatura i primi poliedri di cui ci stiamo occupando (v. l'Atlante annesso a quell'opera, Tav. I, fig. 2, 18 e 19 e Tav. II. fig. 5, 11 e 16) di cui soltanto P_1, P_4, P_6 s'incontrano in natura; gli altri poliedri (eccetto P_{10}) è vano cercare nelle opere di cristallografia perchè, come si sa, nessun minerale può cristallizzare in una forma avente la stessa simmetria del dodecaedro e dell'icosaedro regolari.

costantemente applicata, senza mai enunciarla in generale (1).

I poliedri semiregolari archimedei sono caratterizzati dalla proprietà di avere tutti gli angoli solidi fra loro identici; per dualità ad essi corrispondono analoghi poliedri aventi facce tutte fra loro identiche. Sino a poco fa si riteneva

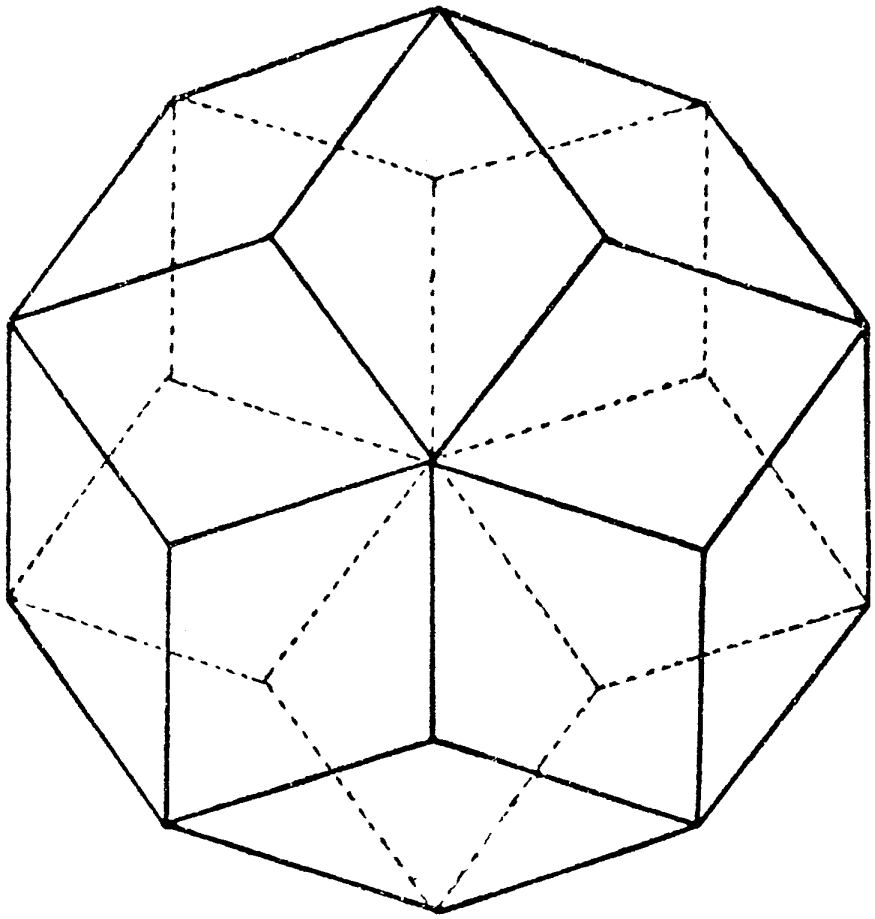


Fig. 47.

che la considerazione di tale nuova classe di figure appartenesse ai geometri del secolo XIX. Ma un triacontaedro romboidale casualmente trovato da F. LINDEMANN (2) (vedi fig. 47) e proveniente da scavi praticati nell'Asia Minore,

(1) Altre costruzioni dei poliedri P_1, P_3, P_4, P_8, P_9 furono indicate da ABÛ'L-WAFA; v. WOEPCKE, *Recherches sur l'histoire des sciences mathématique chez les Orientaux* (Journal Asiatique, T. V della V Serie, 1853, p. 242, 356 e seg.).

(2) *Zur Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichen* (Sitzungsber. der k. bayr. Akad., Bd· XXVI, München, 1896, p. 626-28).

ne farebbe risalire l'origine alla Scuola Neoplatonica che vedremo (Libro V, n. 36) avere fiorito nei secoli IV e V dell'E. v. sotto la direzione di GIAMBLICO e DAMASCIO di Damasco; tale scoperta rappresenta il punto più elevato che nell'antichità raggiunse la teoria dei poliedri.

47. - Per completare il quadro delle produzioni geometriche di ARCHIMEDE, fa d'uopo accennare brevemente a quelle che gli vennero, a torto od a ragione, attribuite — oltre alle due *Sui circoli tangenti* e *Sull'ettagono nel circolo* (1), che segnalammo a p. 333 — o di cui conservaronsi i soli titoli.

Fra le prime spicca un'esposizione delle proprietà delle sezioni coniche, dalla quale si volle APOLLONIO PERGEO attingesse a così larga mano, da meritare, in conseguenza, il nome di plagiario (2); ora, benchè le vaste nozioni che ARCHIMEDE aveva sulle curve anzidette (3) possano essere

---

(1) Non è improbabile che ivi venisse insegnata la costruzione approssimata dell'ettagono che troveremo (Lib. III) in ERONE che ABÛ 'L-WAFA espose in un lavoro dal WOEPCKE pubblicato nelle citate *Recherches* (v. spec., p. 329) e che, forse pel tramite degli Arabi, venne a conoscenza di LEONARDO DA VINCI, il quale la registrò nei suoi manoscritti (cfr. CANTOR, *Vorlesungen* II, 2. Aufl., p. 298).

(2) Si vegga l'esordio della prefazione al Commento fatto da EUTOCIO alle *Coniche* di APOLLONIO (*Apollonii Pergaei quae grece extant cum commentariis antiquis*, ed. HEIBERG, Vol. II, Lipsiae, 1893, p. 168).

(3) Ad es. ARCHIMEDE applica le proposizioni che, nelle *Coniche* di APOLLONIO, portano i numeri I, 20, 35, 46: II, 5: III, 17, 18. Per maggiori particolari rimandiamo all'articolo dell'HEIBERG intitolato *Die Kenntnisse des Archimedes über die Kegelschnitte* (Zeitschrift für Mathem. und Phys., T: XXV, 1880, Hist.-lit. Abth., p. 41-67), dal quale si desume, fra l'altro, che ARCHIMEDE conosceva la definizione delle coniche a centro mediante l'equazione $\frac{y^2}{xx_1} = \text{cost.}$ con la condizione $x + x_1 = \text{cost.}$, nonchè l'analoga definizione della parabola $\frac{y^2}{x} = \text{cost.}$; inoltre la teoria dei diametri coniugati e le relative equazioni cartesiane, finalmente il teorema (ingiustamente attribuito a NEWTON): " se M_1M_2 e N_1N_2 sono due corde di una conica aventi date direzioni e segantisi in un punto P, il rapporto $\frac{PM_1 \cdot PM_2}{PN_1 \cdot PN_2}$ è

citate a comprovare l'esistenza di quell'opera, pure nessuna attestazione è capace di togliere ad essa il carattere ipotetico che possiede.

Altrettanto può ripetersi riguardo ad uno scritto *Sui triangoli rettangoli* e ad uno *Sui dati*, di cui gli Arabi fecero autore il Siracusano: al primo potrebbe riferirsi una citazione che si legge nella dimostrazione del V de' *Lemmi*, mentre una, che s'incontra in quella del XII, parrebbe concernere un lavoro *Sulle figure quadrilatere*.

Ad ARCHIMEDE viene anche fatta risalire l'invenzione di un giuoco geometrico (*loculus Archimedius*) (1), sul quale non si avevano sino ad un decennio fa che notizie malsicure (2), mentre oggi si può farsene un concetto esatto grazie ad un manoscritto arabo di cui fu pubblicato il testo e la versione tedesca (3). Invece una lettera, di cui un tempo egli fu ritenuto autore (4), venne poi dimostrata falsa (5). Delle di lui vaste cognizioni aritmetiche e delle sue produzioni meccaniche verrà fatto cenno, sicchè di lui dovremo ancor occuparci più di una volta (6); però dal sin qui detto

---

indipendente dalla posizione di P_n. V. anche HEIBERG, *Litt. Studien über Euklid*, p. 86-88, ZEUTHEN, op. cit., Cap. II, VI, XVII e XIX.

(1) MAZZUCHELLI, op. cit., p. 28-30, M. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I p. 297.

(2) HEIBERG, *Quaest. Archim.*, p. 43.

(3) H. SUTER, *Der Loculus Archimedius oder das Syxtemaction des Archimedes. Zum ersten Mal nach zwei arabischen Manuskripten der K. Bibliothek zu Berlin herausgegeben und übersetzt* (Abh. zum Gesch. der Math., IX Heft, 1899). La prefazione e due frasi dell'originale greco furono recentemente scoperte dall'HEIBERG (*Hermes*, T. XLII, p. 240).

(4) Venne pubblicata dall'HENNING a Darmstadt nel 1872.

(5) Cfr. M. CURTZE in *Zeitschr. f. Math. und Phys.*, T. XX, 1875, *Hist.-lit. Abth.*, p. 89 e seg., e HEIBERG in *Quaest. Arch.*, p. 27.

(6) Aggiungiamo qui che il Cod. Basil. F. II, 33 contiene, sotto il titolo *Archimedis De curvis superficiebus*, alcune proposizioni estratte dal I Libro *Su la sfera ed il cilindro* e dalla *Misura del cerchio*, le quali sembrano tradotte dall'arabo in latino: quel manoscritto non ci apprende, dunque, nulla di essenzialmente nuovo; ad ogni modo, per chi desiderasse conoscere gli enunciati delle proposizioni in esso contenute, avvertiamo che l'HEIBERG li inserì nella sua edizione di ARCHIMEDE (Tomo III, pagine LXXXVII-LXXXVIII.

risulta già che egli non si è limitato a coltivare ed estendere i campi d'indagine già dissodati da altri, ma scoprì delle intere contrade ubertosissime, ove innumerevoli generazioni di scienziati trovarono il loro alimento intellettuale, senza ancora esaurirli; e se si tiene presente che, con le splendide applicazioni da lui fatte del metodo di esaustione insegnò a LEIBNIZ e NEWTON, come si navigasse in quel « mar che non ha fondo e non ha lido » che è l'infinito, si troverà che con piena ragione il WALLIS disse ARCHIMEDE *vir stupendae sagacitatis, qui pria fundamenta posuit inventionum fere omnium, de quibus promovendis aetas nostra gloriatur.*

CAPITOLO IV.

Eratostene.

48. - Fra coloro coi quali è fama ARCHIMEDE avesse dimestichezza durante il suo soggiorno in Alessandria (v. p. 281), il più rinomato è colui a cui il Siracusano diresse il suo E'φοδικόν (p. 326) e che ci tramandò notizia delle origini favolose del problema di Delo (v. p. 76); di lui vogliamo occuparci con quella diffusione che, da un lato, egli merita in grazia de' suoi lavori matematici e che, d'altro lato, ci è consentita dalle notizie sicure da noi possedute intorno alla sua vita ed ai suoi scritti (1).

Nacque ERATOSTENE nel 276 o nel 275 a. C. nell'Affrica settentrionale, nell'« alma Cirene dal trono d'oro, dai bei cocchi, posta sulla mammella della ferace Libia, dolce giardino d'Afrodite » (PINDARO). Ebbe a maestri in patria il grammatico LISANIA, in Alessandria CALLIMACO, che in quel tempo era a capo della celebre Biblioteca, e in Atene altri a cui egli si volse per famigliarizzarsi con le dottrine di

(1) I frammenti delle opere di ERATOSTENE ancora esistenti furono raccolti da G. BERNHARDY e pubblicati col titolo di *Eratosthenica* (Berolini, 1882); opera sulla quale R. STIEHLE fece una serie di osservazioni, correzioni ed aggiunte nell'articolo *Zu den Fragmenten des Eratosthenes* (Philologus, II Supplementband, 1961, p. 453-492); nessuna di queste però si riferisce alle produzioni matematiche o alle notizie biografiche. — Per altre notizie bio-bibliografiche si ricorra all'articolo *Eratostene* del KNAACK in PAULY-WISSOWA, *Realencyklopädie der class. Alterthumwissenschaft.*

PLATONE. Da TOLOMEO EVERGETE (il cui regno si stende dal 246 al 221 a. C.) venne, intorno al 235 a. C., prescelto quale successore di CALLIMACO nell'ufficio di bibliotecario, ed in Egitto passò il rimanente della sua vita, la quale finì, verso il 194 a. C., quando egli, a quanto narrasi, si lasciò morire di fame, per la disperazione di avere perduta la vista (1). Ebbe ERATOSTENE ingegno eccezionalmente versatile (2), sicchè si sarebbe tentati ad equipararlo a quegli scienziati enciclopedici del periodo precedente a quello che stiamo studiando, il prototipo dei quali è per noi EUDOSSO da Cnido. Egli infatti fu filosofo (e viene annoverato fra gli stoici) (3), oratore, poeta, archeologo, geografo (4), geodeta e matematico non spregevole; ma il soprannome di *filologo*, che gli viene dato, di preferenza, sembra indicare che egli specialmente come grammatico venisse reputato eccellente. Tuttavia anche delle occupazioni sue come cultore delle scienze abbiamo attestazioni sicure nel tentativo fatto da lui per misurare la terra (5), nella parte che prese alla

(1) Cfr. BERNHARDY, l. c., p. VII e seg., nonchè le autorità ivi citate; inoltre PARTHEY, *Das Alexandrinische Museum.* Berlin. 1843, p. 190-193.

(2) ERATOSTENE venne talvolta sopranominato πένταθλος per essere riuscito vincitore in tutte le cinque gare (la lotta, il salto, il getto del disco e dell'asta ed il pugilato) che, fino all'Ol. 18ª, formarono un ciclo dei celebri giuochi olimpici. Quanto al significato della lettera β, unita talora al suo nome, esso non è noto con certezza; vuole lo SCHIAPARELLI (*Mem. del R. Ist. Lombardo, Classe di Scienze math. e naturali,* Vol. X, p. 10 nota) che significasse essere ERATOSTENE secondo in tutte le discipline, primo in nessuna; opinione questa accettata dallo ZEUTHEN (*Forelaesning,* p. 23).

(3) E. ZELLER, *Die Philosopie der Griechen,* III Tl., I Abt., IV Aufl., Leipzig, 1909, p. 45.

(4) Cfr. H. BERGER, *Die geographisce Fragmente des Eratosthenes,* Leipzig, 1880.

(5) ROSENBERG, *Geschichte der Physik,* T. I, Braunschweig, 1882, pag. 39. - ERONE cita un'opera di ERATOSTENE *Sulla misura della terra* (περὶ τῆς ἀναμετρήσεως τῆς γῆς); gli è probabilmente in essa che egli usò metodicamente la decomposizione di un'area in parti (σφραγίδες) per determinarne più agevolmente la superficie. Notisi che la eccezionale importanza dei lavori geodetici del Cirenaico fu implicitamente riconosciuta da W. SNEL-

riforma del calendario (1) e negli studi che gli fecero conseguire una posizione eminente nella storia della metrologia (2); l'analisi di queste produzioni è riserbato ai cultori della geografia matematica e della cronologia, per converso spetta a noi di esaminare le tre uniche produzioni matematiche che non caddero in completa dimenticanza.

49. - Della prima dà notizia ERATOSTENE stesso nella continuazione dell'epistola al terzo TOLOMEO, di cui nel Libro prec. (n. 42) riferimmo l'esordio (3). Mentre questo è consacrato all'esposizione del primo movente alla ricerca della duplicazione del cubo e dei più antichi metodi con cui essa venne risolta, il proseguimento contiene — dopo un breve cenno delle molteplici occasioni in cui, anche in pratica, è necessario di saper trovare due medie proporzionali fra due rette date e dopo l'osservazione che la soluzione che ora esporremo si può adattare all'inserzione di quantesivogliano medie — il seguente modo di risolvimento:

Siano date (fig. 48) due rette diseguali AE e ΘΔ fra cui bisogna inserire due medie in proporzione continua. Sia AE perpendicolare a EΘ e su EΘ si costruiscano tre parallelogrammi eguali AZ, AH, IΘ dei quali si traccino le diagonali AZ, AH, IΘ. Queste risulteranno fra loro parallele. Tenendo fermo il paralellogrammo intermedio, si accostino ad esso gli altri due, ponendo AZ al disopra e IΘ al disotto, come è indicato dalla seconda figura (fig. 49), per modo che i punti A, B, Γ, Δ si dispongano in linea retta. Per questi punti A, B, Γ, Δ si conduca una retta la quale incontri in K la EΘ prolungata. Essendo parallele le rette AE e BZ, si avrà:

LIUS quando intitolò *Eratosthenes Batavus* (1617) l'opera che gli meritò di venire considerato come il fondatore della moderna geodesia di precisione.

(1) Cfr. G. CURTIUS, *Storia Greca,* T. I (1877), p. 147 e 201.

(2) F. HULTSCH, *Griechische und römische Metrologie,* II Bearbeitung, Berlin, 1882, p. 60 e seg.

(3) ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. III, p. 106-115. Cfr. anche REIMER, *Historia problematis de cubi duplicatione,* Gottingae, 1788, p. 131-159; MONTUCLA, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle,* II ed., Paris, 1831, p. 229 e 287-89. Dello stesso problema ERATOSTENE si è probabilmente occupato in un'opera perduta, il cui titolo sembra fosse Πλατωνικός ed il cui contenuto, è del resto ignoto.

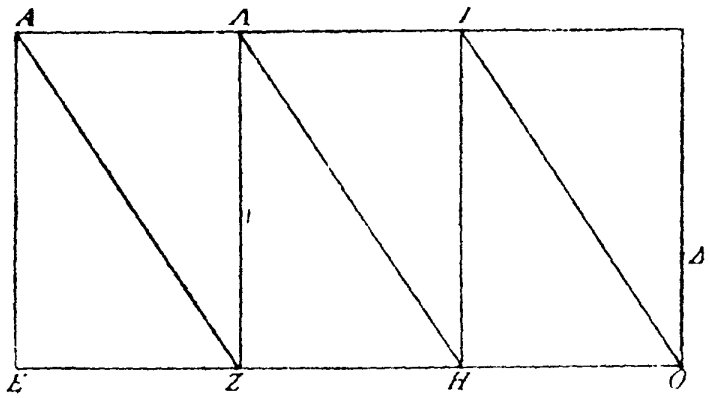


Fig. 48.

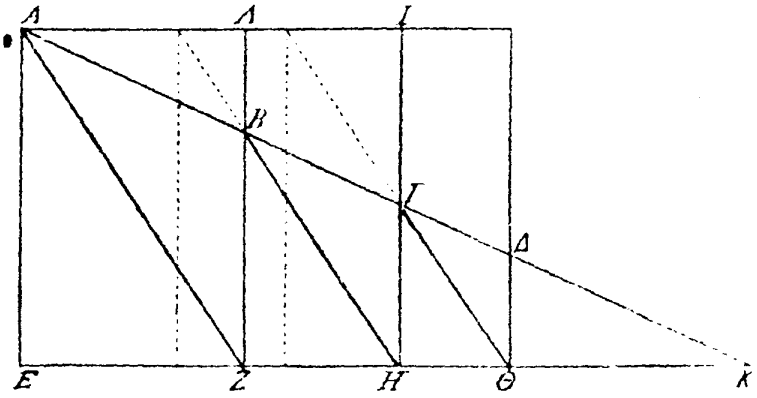


Fig. 49.

$$AK : KB = EK : KZ,$$

ed essendo lo AZ e BH si avrà

$$AK : KB = ZK : KH :$$

perciò

$$AK : KB = EK : KZ = ZK : KH.$$

Similmente, essendo parallele BZ e HΓ, sarà

$$BK : K\Gamma = ZK : KH :$$

ed essendolo BH e ΓΘ sarà

$$BK : K\Gamma = HK : K\Theta :$$

perciò

$$BK : K\Gamma = ZK : KH = HK : H\Theta .$$

Ma

$$ZK : KH = EK : KZ$$

dunque è anche

$$EK : KZ = ZN : KH = HK : K\Theta .$$

Finalmente è

$$EK : KZ = AE : BZ , ZK : KH = LZ : \Gamma H , HK : K\Theta = \Gamma H : \Delta\Theta ;$$

sarà in conseguenza

$$AE : BZ = BZ : \Gamma H = \Gamma H : \Delta\Theta ,$$

epperò fra AE e $\Delta\Theta$ si sono trovate due medie proporzionali BZ e ΓH.

Questa costruzione si può eseguire praticamente in modo assai agevole coll'aiuto d'uno strumento — da PAPPO (1) chiamato *mesolabio* (μεσολαβός) — (2), composto di tre tavolette rettangolari fra loro eguali; ERATOSTENE lo descrive accuratamente; non crediamo far eco alle sue parole perchè siamo sicuri che il lettore sopperirà senza stento al nostro silenzio. Quello strumento sembra venisse conservato presso un altare, su una facciata del quale era scolpita la dimostrazione precedente, sotto forma più concisa e accompagnata da un grazioso epigramma (3) narrante le vicende più cospicue del problema in questione.

50. - Assai più scarse ed incerte sono le nostre nozioni su uno scritto geometrico di maggior lena *Sulle proporzioni* che avrebbe composto — a quanto riferisce PAPPO (4) — il matematico di cui stiamo occupandoci. Questo lavoro aveva attinenza col metodo analitico e portava il titolo Περὶ μεσοτήτων; ma lo scopo ed il contenuto di esso non vennero dichiarati da PAPPO, nè da alcun altro antico scrittore (5).

---

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 54-6.

(2) Ammesso apocrifo l'apparato attribuito a PLATONE (v. p. 125) sarebbe questo il più antico strumento geometrico conosciuto.

(3) Ricordato anche da PROCLO (*Proclo-Taylor*, I, p. 134); la autenticità di esso venne recentemente dimostrata dal WILAMOWITZ.

(4) PAPPO ed. HULTSCH, p. 636 e 662.

(5) A questo scritto si riferiscono forse PROCLO (v. *Proclo-Taylor* II, p. 80), nel combattere l'opinione di ERATOSTENE che la

Di colmare la lacuna che, in conseguenza, presenta la storia della matematica greca, si sforzarono parecchi ricercatori, di cui non è inopportuno far qui rapidissimo cenno. Il primo, in ordine di tempo (1), fece un tentativo di divinazione dell'opera perduta ed espose due teoremi locali, concernenti le sezioni coniche, che egli ritenne potessero far parte di quell'opera; lo riteneva perchè opinava che PAPPO dicesse essere di tale specie i luoghi di ERATOSTENE, il che realmente PAPPO non dice; onde non vi è ragione per giudicare che egli annoveri oggi molti seguaci. Secondo un'altro storico (2) i luoghi studiati da ERATOSTENE sarebbero le linee (rette e coniche) rappresentate in coordinate trilineari dalle equazioni

$$2x_2 = x_1 + x_3\,,\; x^2{}_2 = x_1\,x_3\,,\; x_2(x_1 + x_3) = 2x_1\,x_3\,,$$

$$x_1\,(x_1 - x_2) = x_3\,(x_2 - x_3)\,,\; x_1\,(x_1 - x_2) = x_2\,(x_2 - x_3).$$

Un terzo (3) si limitò a congetturare genericamente che quei luoghi fossero strettamente collegati alla risoluzione del problema di Delo. Finalmente, vi fu chi (4) formulò l'ipotesi, che i luoghi di ERATOSTENE venissero generati conducendo trasversali da un polo fisso del piano di una conica e determinando su ognuna il punto formante, con il polo e le intersezioni con la curva, una delle proporzioni conosciute dagli antichi, e giunse, persino, ad attribuire all'erudito di Cirene un procedimento per trovare, in una conica, una corda di data lunghezza passante per un punto dato.

---

idea di proposizione abbraccia tutta la matematica, e TEONE SMIRNEO (v. ed. DUPUIS, Paris, p. 182), nel riferire le opinioni del poligrafo da Cirene, secondo cui "tutte le figure risultano da qualche proporzione, e per costruirle bisogna partire dall'eguaglianza, perchè in eguaglianze esse si risolvono„; da esso lo stesso TEONE estrasse alcune proposizioni, che citeremo nel L. IV, n. 5.

(1) MONTUCLA, *Hist. des Math.*, T. I, 2e éd., p. 280. Cfr. *Appendice* al presente Libro (n. 6).

(2) P. TANNERY, *L'arithmétique des Grecs dans Pappus* (Mém. de la Soc. de Bordeaux, 2e Serie, T. III, 1880), p. 361.

(3) M. MARIE, *Histoire des Sciences math. et phys.*, T. I. Paris, 1883, p. 80.

(4) H. G. ZEUTHEN, *Die Kegelschnitten im Alterthum*, p. 321 e seg.

Quanto tali congetture hanno di vero? A quale deve accordarsi la preferenza?

> These are the questions nobody can answer,
> These are the problems nobody can solve.

51. - Dopo che fu dimostrato (EUCLIDE, *Elementi* VIII, prop. 20ª, cfr. p. 219) essere illimitata la serie dei numeri primi, due questioni spontaneamente si presentano, cioè: la ricerca di un metodo per discernere i numeri primi dai numeri composti e, forse come corollario di tal metodo, quella dell'espressione generale dei numeri primi. Orbene, della prima di tali questioni ERATOSTENE diede una soluzione, nell'unico frammento superstite di una sua opera aritmetica, frammento di cui faremo ora cenno, perchè il metodo suggerito dal Cirenaico per costruire una tavola di numeri primi (il così detto κόσκινον o *cribrum Eratosthenis*) porge un necessario complemento alle ricerche aritmetiche di EUCLIDE.

Per esporre in che cosa consista questo procedimento (1) osserviamo che, eccetto 2, tutti i numeri pari sono composti, sicchè, oltre 2, tutti i numeri primi si trovano nella serie dei numeri dispari

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \ldots$$

Ciò posto, 3 è un numero primo, ma non lo sono tutti i suoi multipli, i quali occupano in questa serie i posti della forma $3r + 1$ $(r = 1, 2, \ldots)$; cancelliamoli dalla serie, similmente 5 è primo, ma non lo sono i suoi multipli, cioè i termini di quella serie che occupano i posti della forma $5r + 2$ $(r = 1, 2, \ldots)$, onde questi vanno soppressi; similmente si cancelleranno quegli occupanti posti dalla forma

$$7r + 3 \; (r = 1, 2, \ldots).$$

---

(1) Riferito da NICOMACO (*Arith.*, Lib. I, cap. 13) e dal BERNHARDY (*op. cit.*, p. 174). Cfr. anche l'articolo di S. HORSELEY intitolato ΚΟΣΚΙΝΟΝ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΟΥΣ *or the Sieve of Eratosthenes* (*Phil. Tranr.*, 1772, p. 314 del vol. XIII della ristampa di questa collezione fatta nel 1809).

Invece, 9 è numero composto, onde esso ed i suoi multipli furono già tolti; ma lo stesso non può ripetersi riguardo a 11, perciò dalla serie in questione dovranno venire eliminati i termini di posti $11r + 5$; e così via. Si trova così facilmente che fra 1 e 100 non vi sono altri numeri primi tranne i 25 seguenti:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Per quanto sia semplice, quasi infantile, questo procedimento, esso venne continuamente invocato per quasi diciannove secoli quando si ebbe bisogno di decidere se un numero fosse o non primo, cioè sino al momento in cui SCHOOTEN pubblicò una grande tavola di numeri primi (1); oggi ancora non è infrequente il servirsene e, probabilmente, vi si ricorrerà fino al giorno in cui i geometri giungeranno in possesso di una proprietà caratteristica atta a discernere con sicurezza i numeri composti da quelli che tali non sono (2).

---

(1) *Exercitationum mathematicarum*, Liber V, Lugd. Bat., 1657, p. 393. Questa tavola comprende tutti i numeri primi inferiori a 10000, epperò è sufficiente pei calcoli consueti; una analoga, ma di dimensioni assai più modeste, si trova già nel *Liber Abaci* di LEONARDO PISANO (*Scritti inediti di Leonardo Pisano matematico del secolo XIII*, pubblicati da B. BONCOMPAGNI, T. I, Roma, 1857, p. 31).

(2) Si può aggiungere che la procedura eratostenica abilita anche a trovare un'espressione del numero dei numeri primi non eccedenti un certo limite: lo osservarono indipendentemente il LEGENDRE (*Théorie des nombres*, II éd., Paris, 1808, p. 414), P. PAGI (*Sul numero dei numeri primi inferiori ad un dato numero*, Parma, 1879) e E. DE JONQUIÈRES (*Formule pour déterminer conbien il y a de nombres premièrs n'excédant pas un nombre donnè*, Comptes rendus, T. XCV, 1882). Essa fu anche dimostrata suscettibile di applicazioni e problemi più elevati, come si apprende dalla memoria di J. C. MOREHEAD, *Extension of the sieve of Eratosthenes to arithmetical progressions* (Annales of mathem., II Ser., T. X, 1909).

CAPITOLO V.

Apollonio da Perga.

52. - Due sono le grandi categorie in cui è costume ripartire le verità geometriche; l'una abbraccia quelle proposizioni in cui si stabilisce il confronto fra i contenuti di varietà (lineari, superficiali o solide) della stessa specie; l'altra i teoremi ed i problemi ove è in giuoco la posizione delle varie parti di una figura o di varie figure. Alla prima si dà il nome di *geometria di misura*, di *geometria di posizione* alla seconda. Benchè questa ripartizione sia propria all'epoca moderna, i due corrispondenti indirizzi dell'investigazione geometrica sono visibili *ab antiquo:* se il primo trova in ARCHIMEDE il suo più illustre rappresentante, quello in cui è più chiaramente visibile il secondo è APOLLONIO PERGEO, l'ultima, in ordine di tempo, fra le stelle di prima grandezza del periodo scientifico di cui ci stiamo occupando, quell'investigatore che LEIBNIZ non esitò a porre allo stesso livello di ARCHIMEDE quando sentenziò: *qui Archimedem et Apollonium intelligit, recentiorum summorum virorum inventa parcius mirabitur.*

Intorno alla vita di lui abbiamo informazioni estremamente scarse. PROCLO (1) lo fa tacitamente posteriore ad EUCLIDE, quando rileva che la conoscenza degli *Elementi* è presupposta nelle sue opere; EUTOCIO (2), fondandosi su quanto

(1) PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 104.

(2) *Apollonii Pergaei quae graece extant cum commentariis antiquis,* ed. HEIBERG, II vol., Lipsiae, 1893, p. 168.

ERACLIDE (cfr. p. 282) scrisse nella *Vita d'Archimede*, lo dice oriundo da Perga, città della Pamfilia, e vissuto al tempo del primo TOLOMEO EVERGETE (246-221 a. C.); l'avere egli, come vedremo, dedicato alcuni libri della sua opera principale ad ATTALO I, che regnò a Pergamo nel periodo 241-197, farebbe credere che egli fosse contemporaneo ai due Tolomei EVERGETE e FILOPATORE (247-205); ma un papiro scoperto ad Ercolano e di recente studiato (cfr. n. 57), farebbe ritenere che fiorisse intorno al 170 a. C. La sua istruzione si compì in Alessandria sotto la direzione dei successori di EUCLIDE; quali siano state le sue occupazioni posteriori è ignoto con precisione; certo è però che ben presto egli seppe conquistarsi una posizione scientifica tanto eminente che, benchè di poco posteriore ad ARCHIMEDE (1), anzi, sorto forse quando l'astro del Siracusano non aveva ancora cessato di splendere, fu ritenuto degno del nome di *grande geometra* o *geometra per eccellenza*. Di un suo soggiorno in Pergamo (città che era sede di una biblioteca e di un'università, simili a quelle di Alessandria) ci dà notizia la prefazione generale della massima sua opera (vedi n. 54), indirizzata ad un tale EUDEMO DA PERGAMO, che APOLLONIO appunto in Pergamo conobbe (2); mentre una sua dimora in Efeso ci viene rivelata dalla prefazione speciale al secondo libro dell'opera stessa. Delle poco pregevoli qualità del carattere del nostro matematico parla PAPPO (3) in un brano (di autenticità a dir vero sospetta) della *Collezione matematica*, dal quale risulterebbe che APOLLONIO fosse stato vano e borioso. Notisi, da ultimo, che sotto il regno di TOLOMEO FILOPATORE (221-205 a. C.) fiorì un astronomo

(1) Il BALSAM (v. la pref. alla traduzione delle *Coniche* che citeremo nel n. 53) ritiene che APOLLONIO fosse più giovane di ARCHIMEDE di circa quarant'anni, mentre F. HULTSCH (articolo *Apollonio* in PAULY-WISSOWA, *Realencyklopädie der class. Alterthumswiss.*) riduce a venticinque anni la differenza della loro età.

(2) P. TANNERY pensava (Bulletin des sc. math., II Sér., T. XV, 1891, I Partie, p. 222 nota) che il re ATTALO I lo avesse legato alla propria persona in modo somigliante a quello usato dai Tolomei riguardo agli scienziati che risiedevano nel Museo di Alessandria.

(3) PAPPO ed. HULTSCH, p. 678.

designato pure col nome di APOLLONIO; è desso da identificarsi col nostro matematico? Questa identificazione venne accolta con favore da M. CANTOR (1) ed è ammessa implicitamente da G. SCHIAPARELLI (2), esplicitamente da P. TANNERY (3); noi stessi inclíniamo ad accettarla, ma non crediamo opportuno di arrestarci ora a discutere una questione che, in questo momento, ha per noi un interesse assai secondario: soltanto osserviamo che il nome di APOLLONIO era così diffuso in Grecia che in una recente enciclopedia (4) sono indicati non meno di 128 personaggi che lo portarono.

A queste poche notizie biografiche, che ci arrivano da fonte greca, nessun altro dato positivo si aggiunge per merito di scrittori Arabi (5); questi porgono per converso alcune informazioni bibliografiche, che si trovano riepilogate in un'opera a cui già ricorremmo in parecchie occasioni ed alle quali riputiamo conveniente accordare qui un posto, non soltanto per il loro intrinseco valore, ma anche perchè funganoquasi di piattaforma al nostro studio sul *grande geometra*.

APOLLONIO. È l'autore dell'opera sulle coniche. I figli di Mûsâs ricordano nell'introduzione al libro sulle coniche, che APOLLONIO era Alessandrino di nascita (?) e che il suo libro sulle coniche era corrotto, in primo luogo perchè il manoscritto era difficile (a capirsi) e quindi si era tralasciato di commentarlo, ed in secondo luogo perchè il ricordo del libro erasi affievolito ed aveva finito per scomparire; cosicchè accadde che nelle mani della gente si trovarono esemplari differenti, finchè apparve un uomo di Ascalona chiamato EUTOCIO che era assai versato nella geometria — i figli di Mûsâs asseriscono che egli compose dei libri geometrici eccellenti, ma nessuno di questi giunse sino a noi —; dopo che egli ebbe raccolto di quell'opera

---

(1) *Vorlesungen*, T. I, p. 333.

(2) " E ad APOLLONIO di Perga ... era ... dato il sopranome di εψσιλον, perchè amava assai di guardare la luna, la cui falce è simile alla figura della lettera ε „. *Mem. del R. Ist. Lomb., Classe di Scienze mat. e nat.*, Vol. X, p. 10 nota.

(3) *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Paris, 1893, p. 69.

(4) Quella del PAULY-WISSOWA: il più noto è forse APOLLONIO DA TIANA, filosofo pitagorico del I o II sec. dell'E. v.

(5) Si potrebbe anzi dire che questi hanno somministrato soltanto delle notizie *negative*; cfr. più avanti nel testo.

quanto più potè, pose in ordine quattro libri — i figli di Mûsâs dicono che l'opera completa era in otto libri, dei quali esistono tuttora i primi sette ed una parte dell'ottavo, che i primi quattro libri vennero tradotti sotto la direzione di AHMED BEN Mûsâs da HILÂL BEN ABÎ HILÂL AL HIMSI ed i tre ultimi da TÂBIT BEN KURRA AL-HARRÂNÎ, e che quanto resta dell'ottavo libro si riduce a quattro teoremi. — Pertanto la parte superstite dell'opera che APOLLONIO scrisse sulle coniche è in sette libri con un frammento dell'ottavo. Egli compose di più: Due libri sulla sezione determinata: il primo dei quali fu migliorato da TÂBÎT, mentre il secondo, benchè sia stato tradotto in Arabo, è inintelligibile. Un libro sulla sezione delle superficie in dato rapporto. Su i cerchi tangenti. TÂBIT BEN KURRA ricorda che da APOLLONIO proviene una memoria sul teorema che dice: due rette le quali escono da una terza sotto angoli un po' minori di due retti, si incontrano (1).

53. - Nella stessa guisa che EUCLIDE è conosciuto dall'universalità degli studiosi pei suoi *Elementi*, così all'eccellente esposizione che fece della teoria delle sezioni coniche deve principalmente la sua rinomanza APOLLONIO DI PERGA.

Prescindendo da alcuni frammenti che di questo trattato si trovano in un'opera postuma del celebre erudito GIORGIO VALLA (2), sotto il titolo abbastanza ridicolo *De comica sectione*, la prima volta che esso vide la luce per le stampe fu per cura di G. B. MEMO (3), patrizio veneto, il quale, illudendosi di poter somministrare ai geometri una traduzione latina dei primi quattro libri delle *Coniche*, disponendo di cognizioni filologiche, non di sapere matematico, compì un lavoro, che venne giudicato in generale meritevole di mediocre considerazione e che, in particolare, fu

(1) V. SUTER-FIHRIST, p. 18-19. - Agli Arabi si deve anche notizia di un apparato inventato da APOLLONIO: lo ha rilevato il CARRA DE VAUX nella *Note sur les Mécaniques de Bédi Ez-zaman El-djazari et sur un appareil hydraulique attribué à Apollonius de Perge* (Annales int. d'histoire, V Sect., Paris, 1901).

(2) Si allude all'opera *De expetendis et fugiendis rebus* (I ed., 1488) descritta da P. RICCARDI in *Biblioteca matematica italiana*, Parte I, Vol. 2°, Modena, 1873-76, p. 573-4, e dall'HEIBERG in *Philologische Studien zu griech. Mathematikern*, III, Leipzig, 1881.

(3) *Apollonii Pergaei philosophi mathematicique excellentissimi Opera*. Venetiis, 1537.

vivamente criticato da MAUROLICO (1494-1570) (1). Un plauso assai maggiore ottenne l'opera analoga di F. COMMANDINO (2), alla quale attinse a larga mano il gesuita CLAUDIO RICHARD (1589-1644) per l'edizione delle *Coniche* da lui fatta quasi un secolo più tardi (3). Se tutti i citati editori si arrestarono ai primi quattro libri, gli è che soltanto questi erano stati (4) trovati in greco: ciò spiega anche perchè il MAUROLICO divisasse di accingersi alla divinazione dei libri V e VI (5). Intanto che il Messinese si occupava di questa ricostruzione, G. A. BORELLI (1608-1679) (6) ravvisava in un manoscritto della Biblioteca Medicea la traduzione araba dei libri V-VI e, ottenuto il consenso del Granduca di Toscana, lo portava seco a Roma, ove, combinando la propria scienza geometrica colla conoscenza delle lingue orientali posseduta da ABRAMO D'ECHELLES (1605-1664), potè giungere a compierne la traduzione, la quale egli presentò nel 1661 ai matematici (7); notisi che nel frattempo (1659) era giunta a

(1) G. LIBRI, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, T. III. Paris, 1840. p. 242. Il TIRABOSCHI, *Storia della lett. ital.*, T. VII. Venezia, 1796, p. 478, attribuisce gli errori esistenti nell'opera del MEMO al figlio suo che la pubblicò dopo la morte del padre.

(2) *Apollonii Pergaei Conicorum libri quattuor, una cum Pappi Alexandrini lemmatibus et Commentariis Eutocii Ascalonitae. Sereni Antissensis philosophi libri duo nunc primum in lucem edidit*, Bononiae, 1566.

(3) *Apollonii Pergaei Conicorum libri IV cum Commentariis Claudii Ric ardi*, Antuerpiae, 1655.

(4) Le condizioni sono ora circa le stesse: anzi dei libri V-VII si ritiene oggi irremissibilmente perduto l'originale, mentre per l'ultimo non è più ragionevole sperare nemmeno in qualche versione orientale.

(5) Gli elementi per giudicare quanto sia riuscito il tentativo da lui fatto in questo senso si trovano adunati nel n. 6 dell'*Appendice* al presente libro.

(6) Cfr. per quanto segue M. DEL GAIZO, *Contributo allo studio della vita e delle opere di Giovanni Alfonso Borrelli* (Atti della Acc. Pontaniana, Vol. XX, 1891, p. 1-48).

(7) *Apollonii Pergaei Conicorum libri* V, VI, VII. *Paraphrases Abalphato Asphahanensis nunc primum edidit.* Florentiae, 1661. Una seconda traduzione dell'arabo, che sembra di utilità pressocchè nulla, fu pubblicata a Kiel nel 1669 dal RAVIUS.

cognizione del pubblico la celebre divinazione fatta da V. VIVIANI del V (1).

Un'edizione completa del testo greco venne per la prima volta progettata e tentata sul finire del secolo XVII da EDOARDO BERNHARD, intrapresa da DAVIDE GREGORY (1661-1710) e portata a compimento (1710) da EDMONDO HALLEY (1656-1724); il quale aggiunse la traduzione de' libri V-VII e una sua divinazione dell'ultimo (2).

L'unica edizione critica da noi posseduta è la recente dell'HEIBERG (1891-1893), sgraziatamente essa comprende soltanto la parte delle *Coniche* che ci pervenne pel tramite dei Greci (3), mentre sarebbe necessario che essa abbracciasse tutto il trattato (4). Di traduzioni in lingue moderne sono in dominio del pubblico quelle fatte liberamente da H. BALSAM, in tedesco (5), e da T. L. HEATH, in inglese (6); una versione italiana compiuta nel sec. XVII da un certo COSIMO DE NOFERI deve tuttora esistere manoscritta in Francia (7); una francese era stata eseguita dal PEYRARD (1760-1822), ma il suo autore venne colto da morte quando ne erano impressi i primi fogli; l'impresa venne in conse-

(1) V. il n. 7 dell'Appendice al presente libro.

(2) *Apollonii Pergaei Conicorum libri* VIII. Oxonii, 1710. Riguardo alla restituzione del Libro VIII, si consulti il n. 8 dell'*Appendice* citata.

(3) Cfr. la recensione fattane dallo ZEUTHEN del Vol. II della 3ª Serie del *Nordisk tidsskrift for filologi*, Kjöbenhavn, 1894. Ai *Prolegomena* pieni di dottrina del II vol. ricorra chiunque desideri maggiori particolari intorno ai codici esistenti ed al loro valore, nonchè alla storia del testo.

(4) Speriamo che il NIX — al quale dobbiamo una nuova versione dall'arabo (sul codice 943 della Bodleiana) di un frammento del V Libro (L. M. LUDWIG NIX, *Das fünfte Buch der Conica des Apollonius von Perga in der arabischen Uebersetzung des Thabit Ibn Corrah*, Leipzig, 1889) — voglia porgere un complemento degno quanto necessario al lavoro del celebre erudito danese.

(5) *Des Apollonius von Perga sieben Bücher über Kegelschnitte nebst dem durch Halley wiederhergestellten achten Buche*, Berlin, 1861.

(6) *Apollonius of Perga Treatise on conic sections edited in modern notations*. Cambridge, 1896.

(7) APOLLONIO ed. HEIBERG, T. II, p. LXXXVIII.

guenza abbandonata ed il vuoto risultante è soltanto in parte colmato dal largo riassunto che più tardi fece C. P. HOUSEL dell'opera appolloniana (1).

54. - Siccome l'*opus magnus* del geometra Pergeo è il più antico lavoro superstite riferentesi alle curve di second'ordine, così, per determinare il progresso che esso segna sulle opere antecedenti, altro mezzo non vi è che ricorrere alle dichiarazioni di APOLLONIO stesso e dei più accreditati commentatori greci, non trascurando di rilevare quelle proprietà delle sezioni coniche applicate o presupposte in iscritti anteriori a quelli di APOLLONIO. Orbene, mentre EUTOCIO, come sappiamo (v. p. 154) (2), fa merito ad APOLLONIO di avere per primo avvertita l'esistenza in qualunque cono (retto od obliquo) di tutte le coniche, per converso PAPPO si limita ad asserire (3) che APOLLONIO, non riuscendo a rendersi ragione del principio di classificazione per le coniche usato dai suoi predecessori, dal momento che la così detta « sezione del cono rettangolo » esiste anche nei coni obliquangoli e similmente per le altre, modificò i nomi vetusti delle tre sezioni coniche e le chiamò *ellisse*, *iperbola*, *parabola*. D' altronde APOLLONIO — nella prefazione generale della sua opera, che riferiremo nel n. seg. — quando parla del primo libro di essa, si limita a dichiarare che contiene la generazione e le proprietà fondamentali delle coniche, esposte in modo più completo e più generale di quello usato dai geometri anteriori. E queste semplici parole, scritte da persona che aveva per abitudine di non misurare le espressioni quando si trattava di estollere i propri meriti, si possono a fatica interpretare siccome annunziatrici di una scoperta così cospicua quale è quella dell'*esistenza in qualunque cono di tutte le specie di coniche;* tanto più, che non è possibile negare che EUCLIDE (4) e ARCHIMEDE (5) sapessero trovarsi sezioni ellittiche in un cono acutangolo. Se, da ultimo, si osserva (cfr. L. IV) che GEMINO, unica

(1) *Les coniques d'Apollonius* (Journal de math. pures et appliquées. II Série, T. II, 1858).

(2) Cfr APOLLONIO ed. HEIBERG, Vol. II, p. 170.

(3) PAPPO ed. HULTSCH, p. 672-74.

(4) Cfr. HEIBERG. *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*, p. 88.

(5) ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. I, p. 288.

fonte di notizie a cui attinse EUTOCIO, probabilmente s'inspirò esclusivamente alle opere del geometra di Perga e che, d'altronde, egli è, come matematico, di valore incomparabilmente inferiore a PAPPO (il quale, come vedemmo, si esprime sotto forma assai più riservata) ci sembra essere quasi forzati di concludere che *la trattazione della teoria delle sezioni coniche, quale si legge in* APOLLONIO, *differisce dalle precedenti per ciò che questo geometra prende le mosse dalla definizione di quelle celebri curve come sezioni prodotte da piani in un cono qualsivoglia, mentre* ARISTEO *ed* EUCLIDE *le definivano mediante piani perpendicolari alle generatrici di un cono* (1). Ammesso che ad APOLLONIO sia dovuta questa trasformazione, risulta chiaro perchè a lui per primo sia apparso indispensabile designare le coniche con nomi, i quali, invece di esprimere (come quelli antichi, proprietà affatto secondarie, rammentassero verità *già note* (come dimostrano le opere di ARCHIMEDE) ma da ritenersi per essenziali. La nuova nomenclatura, avendo il proprio fondamento nei problemi di applicazione di aree, coi quali i Greci erano famigliari sin dai tempi di PITAGORA aveva grande probabilità di venire generalmente ben accolta: ed infatti, dopo APOLLONIO, la vediamo usata da tutti, senza eccezione (2).

55. - Agli occhi dello storico presenta non comune importanza la prefazione generale della grande opera di APOLLONIO, che già varie volte citammo; perciò crediamo opportuno accordarle qui un posto, tanto più che essa può fungere da documento giustificativo di un'opinione sostenuta nel n. prec.:

APOLLONIO ad EUDEMO salute.

Se tu stai bene di corpo ed il resto procede a norma dei tuoi desideri, io ne avrò gran piacere: anche a me va passabilmente. Allorquando io mi trovai con te a Pergamo, ebbi occasione di osservare che tu eri bramoso di conoscere le Coniche da me composte. Ne invio perciò ora a te il primo libro

(1) È questa la tesi sostenuta dallo ZEUTHEN nel II cap. dell'opera più volte citata *Die Lehre der Kegelschnitte in Alterth um*

(2) Intorno agli antichi nomi delle coniche v. anche: HEIBERG. *Nogle puncter af de graekes mathematikeres terminologi.* (Kjöbenhavn, 1879).

dopo averne migliorata la forma: per gli altri farò altrettanto, quando ne sarò soddisfatto. Giacchè credo che tu non avrai dimenticato di avere udito da me come io mi fossi accinto a scriverle dietro l'eccitamento del geometra NAUCRATE, nell'epoca in cui egli venne in Alessandria e si trattenne presso di me: e come io, dopo averle esposte in otto libri, le comunicassi subito a lui, prima di avervi posta tutta la necessaria diligenza, perchè egli voleva imbarcarsi al più presto, ma buttando giù tutto quello che mi capitava, coll'intenzione di rivederlo poi. Avendo poi trovato il tempo a ciò necessario, io le pubblicherò ora, di mano in mano che le avrò corrette. Siccome è accaduto che anche altri che abitavano presso di me vedessero il primo ed il secondo libro prima della revisione, così non ti deve far meraviglia se li troverai ora sotto forma differente (da quella che tu conosci).

Ora nei primi quattro degli otto libri si trovano gli elementi della teoria (1). Il primo contiene la generazione delle tre coniche e delle sezioni opposte, nonchè le loro principali proprietà, esposte in modo più completo e generale di quello che era stato fatto dai nostri predecessori. Il secondo libro si riferisce a i diametri e gli assi delle sezioni e gli asintoti, cose tutte che hanno importanza ancora più estesa ed essenziale pei diorismi (2): che cosa poi intenda per diametri ed assi, apprenderai da questo stesso libro. Il terzo libro racchiude molti teoremi notevoli i quali sono utili per la sintesi ed il diorisma dei luoghi solidi (3) e sono per la maggior parte belli e nuovi. Dopo averli scoperti io mi accorsi che EUCLIDE non aveva ottenuta la sintesi del *luogo relativo alle tre e quattro rette,* ma soltanto una parte di essa e neppure molto felicemente; e che, anzi, non era possibile completar bene questa sintesi senza quello che scopersi io. Il quarto libro insegna in quanti modi si possono tagliare due coniche, oppure una conica ed un cerchio, e molte altre cose che erano totalmente sfuggite ai miei predecessori, cioè in quanti punti due sezioni opposte incontrino una conica, un cerchio o altre due sezioni opposte. Gli altri quattro libri abbracciano considerazioni più elevate. Il quinto, infatti, tratta diffusamente di massimi e minimi; il sesto di coniche eguali e simili; il settimo di teoremi

(1) È forse a questo carattere elementare dei primi quattro libri che è dovuta la loro conservazione in greco.

(2) Si osservi qui e più innanzi rilevata esplicitamente l'importanza che gli antichi attribuivano ai diorismi.

(3) A quali problemi alludesse APOLLONIO è ignoto: è anzi presumibile (cfr. ZEUTHEN, l. c., p. 309) non ne esista più traccia nella letteratura superstite.

relativi ai diorismi: e l'ottavo contiene problemi sulle coniche nei quali si trovano condizioni dioristiche limitatrici.

56. - Il I Libro del trattato apolloniano si compone di due parti schiettamente distinte l'una dall'altra, ognuna delle quali si apre con una serie di definizioni.

APOLLONIO suppone dati ad arbitrio un circolo ed un punto esterno al piano di esso ed immagina che una retta indefinita si muova colla condizione di passare pel punto dato e di incontrare la periferia del circolo. Nasce allora una superficie composta di due falde toccantisi nel punto fisso e alla quale noi, seguendo l'esempio del geometra di Perga, diamo il nome di *superficie conica:* il nome di *cono* è invece riserbato al solido limitato da questa e dal cerchio base; il punto fisso è *vertice* tanto della superficie quanto del solido, la congiungente del vertice col centro della base ne è l'*asse*, e, secondochè questo è perpendicolare o non alla base, il cono dicesi *retto* od *obliquo*. Esposti questi concetti nelle prime tre definizioni, nelle cinque successive APOLLONIO scende dallo spazio al piano per far sapere che cosa si debba intendere per *diametri* e *diametri conjugati*, *vertici*, *assi* e *assi conjugati* di una curva piana o del sistema di due curve.

L'or fatta distinzione in due gruppi delle *definizioni prime* del I Libro delle *Coniche* può estendersi ai teoremi costituenti la prima parte del Libro stesso, giacchè alcuni sono stereometrici, planimetrici gli altri. Il primo di essi insegna che qualsia retta congiungente il vertice ad un punto di una superficie conica giace totalmente su questa, mentre dal secondo si apprende essere interni alla superficie tutti i punti della retta che unisce due punti di essa. APOLLONIO si volge poi allo studio delle sezioni prodotte da piani in un cono e, seguendo il costume preferito dagli antichi (e adottato oggi dai sintetici seguaci di STAUDT) di esaurire anzitutto i casi speciali, suppone da principio che il piano segante passi pel vertice (prop. 3ª) o sia parallelo alla base (prop. 4ª): nel primo caso la sezione è un triangolo e nel secondo un circolo; se il cono è obliquo vi è però un'altra serie di piani (fra loro paralleli) che lo secano in circoli, sono i piani delle sezioni antiparallele (ὑπεναντία) la cui esistenza è dimostrata dalla prop. 5ª. Il teorema successivo in-

segna che « un piano passante per l'asse di un cono biseca tutte le corde dello stesso che sono parallele ad una retta condotta nel piano della base perpendicolarmente alla traccia di quel piano su questo ». Ad esso tien dietro la prima proposizione generale sulle coniche, la quale dice che « se s'immagina di segare un cono con un piano per l'asse e con un piano perpendicolare alla traccia del primo sul piano della base, si ottiene sul secondo piano segante una curva tale che tutte le sue corde parallele alla intersezione del piano di essa col piano della base sono bisecate dall'intersezione dei due piani considerati » (questa intersezione è pertanto un diametro della curva); il geometra greco non manca di osservare (1) che le corde sono perpendicolari a questa intersezione o se il cono è retto oppure se esso è ortogonalmente simmetrico rispetto al piano condotto per l'asse. Che la curva sezione di un cono con un piano si possa stendere all'infinito è dimostrato dalla prop. 8ª; che possa essere finita senz'essere circolare dalla seguente; e che una sezione conica divida il proprio piano in due regioni distinte dalla prop. 10ª. Importantissime sono le proposizioni 11ª-13ª le quali esprimono le proprietà delle coniche che noi significhiamo mediante l'equazione $y^2 = 2px + qx^2$, supposto di aver presi per assi coordinati il diametro che comparisce nel teor. 7° e la tangente in un suo estremo: si arriva così ad una proprietà delle coniche che abilita a studiarle senza ricorrere a considerazioni stereometriche; la possibilità di trasformare quell'equazione emerge — almeno pel caso dell'ellisse — dalla prop, 15ª. Agli enunciati delle prop. 11ª-13ª Apollonio collega le definizioni di *parabola*, *ellisse*, *iperbola*, nonchè quelle di (*parametro* ossia) *lato retto* (ὀρθία) e *lato trasverso* (πλαγία) (2). Giova rilevare che,

(1) M. Chasles, non avendo prestata sufficiente attenzione a questa osservazione essenziale, fu trascinato ad asserzioni disformi dal vero (v. *Aperçu hist.*, 2ª ed., 1875, p. 18).

(2) Per rendersi facilmente ragione di alcune fra le cose che seguono, è bene tenere presente che per la conica $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ il lato trasverso è $2a$ ed il lato retto $\frac{2b^2}{a}$: mentre per la parabola $y^2 = 2px$ il lato retto è $2p$.

non diversamente da quanto usava ARCHIMEDE, APOLLONIO per *iperbola* intende uno solo dei rami infiniti formanti la curva da noi designata con tal nome e, quando gli accade di considerarli insieme, li chiama *sezioni opposte;* che queste siano identiche e possiedano diametri è dimostrato dai teoremi 14° e 16°.

Alla seconda parte del I Libro preludono le definizioni di *centro* d'un'ellisse, d'un'iperbola o di due sezioni opposte, *raggio* (cioè *raggio vettore*), e di *diametro* (lunghezza) coniugato ad un diametro dato. I primi tre teoremi (17°-19°) che s'incontrano poi, nonchè quello che porta il numero 31, concernono la posizione di una retta rispetto ad una sezione conica; la loro importanza deriva soltanto dall'uso fattone per condurre in modo rigoroso certe dimostrazioni. Sono corollari dei citati teoremi 11°-13° i seguenti:

20. I quadrati di due ordinate di una parabola relative allo stesso diametro stanno fra loro come le corrispondenti ascisse contate dal vertice. 21. Se in un'iperbola od in un'ellisse si conducono quantesivogliano ordinate, il quadrato di ciascuna sta al rettangolo dei segmenti che essa determina sul corrispondente diametro trasverso, come il lato retto sta al lato trasverso: quindi i quadrati di due ordinate stanno fra loro come i rettangoli che ad esse corrispondono nel modo detto.

Alla posizione di una corda o di una tangente rispetto ad un diametro si riferiscono le proposizioni 22ª-28ª ed alle rette passanti pel centro le 29ª-30ª. Dalle proposizioni 32ª-36ª s'impara a costruire la tangente in un punto di una conica, della quale sia noto un diametro e la direzione delle corrispondenti ordinate; tale costruzione è ovvia, se il punto considerato è l'estremo di quel diametro; altrimenti essa si ottiene applicando un teorema, il quale, in linguaggio moderno, si enuncia così: « se da un punto di una conica si guida l'ordinata corrispondente ad un dato diametro e si trova il coniugato armonico del piede di essa rispetto agli estremi del diametro, si otterrà l'intersezione di questo con la tangente nel punto considerato », teorema il quale, in un caso particolare, dice che « nella parabola la sottangente è doppia dell'ascissa ».

Le quattro proposizioni successive riflettono pure le tangenti; esse fanno conoscere relazioni metriche abbastanza

notevoli per meritare che noi le riassumiamo in un enunciato unico: « Se a, b sono le lunghezze di due semidiametri coniugati di una conica di centro O, P_x e P_y le projezioni di un punto qualunque P della curva, fatte su ciascuno di quei diametri parallelamente all'altro, finalmente T_x e T_y le intersezioni con i diametri stessi della tangente alla curva in P, sussisteranno le eguaglianze:

$$OP_x \,.\, OT_x = a^2 \;;\; \frac{P_xT_x \,.\, OP_x}{\overline{PP_x}^2} = \mp \frac{a^2}{b^2}$$

$$OP_y \,.\, OT_y = \pm b^2 \;;\; \frac{P_yT_y \,.\, OP_y}{\overline{PP_y}^2} = \mp \frac{b^2}{a^2},$$

ove si devono scegliere i segni superiori (inferiori) se si tratta d'un'ellisse (iperbola) ». La prop. 41ª ha un enunciato complicato e può intendersi come una notevole rappresentazione geometrica dell'equazione di una conica a centro: le quattro successive concernono una relazione esistente fra un punto di una conica, la tangente e l'ordinata corrispondenti e le parallele condotte a queste da un altro punto della curva; dei diametri trattano le tre successive; e finalmente le 49ª-51ª si possono interpretare siccome esprimenti che l'equazione di una sezione conica, o di due sezioni opposte, non muta forma se al diametro, che (v. più sopra) fu rivelato dalla considerazione stereometrica, si sostituisce un altro diametro e le relative ordinate (1).

Tutte queste proposizioni, per quanto varia ne possa sembrare la materia, porgono insieme i mezzi per sciogliere i problemi con cui chiudesi il I Libro, l'intento dei quali è di « trovare un cono rotondo su cui stia una parabola, un'ellisse, un'iperbola, o due sezioni opposte, noti che siano di queste curve un diametro e la direzione delle corrispondenti ordinate, inoltre il lato retto se si tratta di una parabola oppure il lato retto ed il trasverso se si tratta di una conica a centro »; resta per tal modo implicitamente dimostrato che « qualunque curva rappresentata in coordinate

(1) Questo significato è in sostanza dichiarato dal geometra greco nelle osservazioni annesse alla prop. 51ª.

cartesiane ortogonali od oblique da un'equazione della forma $y^2 = 2px + qk^2$ si può immaginare ottenuta secando un cono circolare con un piano». Importa (cfr. il n. seg.) rilevare che APOLLONIO, per ciascuno dei problemi citati, comincia a considerare il caso in cui le ordinate siano perpendicolari al corrispondente diametro, lo tratta direttamente, e poi riconduce ad esso il caso più generale, dimostrando l'esistenza in qualunque conica di almeno un asse, cioè d'un diametro perpendicolare alle relative ordinate. Dall'ultima proposizione si apprende poi che esistono e come si ricostruiscano due coppie di sezioni opposte *conjugate* (τομαὶ συξυγεῖς).

57. - Il II Libro delle *Coniche* di APOLLONIO comincia così:

APOLLONIO ad EUDEMO salute.
Se tu stai bene, io sono contento: quanto a me sto come desidero. Ho rimesso a mio figlio APOLLONIO il II Libro delle Coniche da me scritto perchè lo rechi a te. Leggilo con cura e comunicalo a coloro che te ne sembrano meritevoli. Lo farai leggere anche al geometra FILONIDE che ti ho presentato in Efeso, se per caso viene a Pergamo. Sta bene.

Queste poche linee fanno conoscere un nuovo personaggio: FILONIDE, cui sino a poco fa non si conosceva che il nome; ma un papiro Ercolanese di recente investigato (1) ce ne ha dato una completa biografia; così siamo venuti a conoscere i suoi sentimenti di amor figliale, che mediocremente c'interessano, e, ciò che più ci preme, i suoi maestri, che furono EUDEMO, colui a cui APOLLONIO diresse i primi tre libri della sua opera, poi l'epicureo DIONISIDORO DA CAUNO, inoltre ARTEMONE e JOLAO, i cui nomi incontriamo qui per la prima e l'ultima volta. FILONIDE sembra aver avuti rapporti con molti filosofi contemporanei (anche se non appartenenti alla setta ipicurea, a cui egli era ascritto) quali l'accademico CARNEADE, che deve ad ALESSANDRO MANZONI una non invidiabile notorietà, e lo stoico DIOGENE BABILONESE; fu anche legato a ZENODORO, che incontreremo (n. 76) come creatore della teoria degli isoperimetri. Per la determinazione dell'epoca in cui visse è importante il fatto che fu in

(1) W. CRONERT, *Der Epikureer Philonides* (Sitzungsber. d. K. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin. 1900, p. 942-959).

relazioni coi re ANTIOCHIO EPIFANIO (175-164 a. C.) e DEMETRIO SOTERO (161-150 a. C.); sicchè si può ritenere abbia fiorito verso il 175-180 a. C.; mentre per fissar i suoi lineamenti di autore, giova notare che gli si fa merito di avere raccolti e commentati, non soltanto gli scritti di EPICURO, ma anche quelli di EUDEMO, DIONISIDORO e di altri.

Tale è la persona che APOLLONIO riteneva particolarmente indicato per intendere ed apprezzare il secondo libro delle sue coniche, il quale ha lo scopo di stabilire le relazioni di posizione fra le coniche (considerate esclusivamente come curve piane) ed i loro asintoti; le proposizioni che lo costituiscono sono in gran parte verità che, se è ovvio intuire, non è facile dimostrare con solidi argomenti.

Esso comincia con l'esposizione di un procedimento per costruire rette (ἀσύμπτωτοι) non secanti un'iperbola della quale sia noto un diametro, la direzione delle ordinate corrispondenti ed i relativi lati retto e trasverso; tale costruzione degli asintoti consiste nel congiungere il centro della curva all'estremo ai un'ordinata passante per un vertice di essa e di lunghezza media proporzionale fra il lato retto ed il lato trasverso. Ogni retta condotta pel centro, entro l'angolo degli asintoti, taglia la curva (prop. 21ª); questi adunque fungono da elementi di separazione fra le rette passanti pel centro che incontrano la curva e quelle che non la incontrano; la loro posizione è, pertanto, indipendente dal diametro adoperato per tracciarli con la costruzione precedente; che la distanza di un punto della curva da un asintoto si possa rendere minore di qualunque lunghezza data, vien dimostrato più tardi (prop. 14ª) mediante un teorema (prop. 12ª) che citeremo fra breve.

Osserviamo, intanto, che le notevoli relazioni che intercedono fra gli asintoti e le tangenti d'un'iperbola erano nella loro totalità conosciute da APOLLONIO; così, l'essere il segmento di una tangente intercetto dagli asintoti bisecato dal punto di contatto emerge dalla propos. 3ª, la quale dice di più che esso segmento è medio proporzionale fra il lato retto ed il lato trasverso relativi al diametro contenente il punto di contatto. Dalla prima parte di questo teorema (il cui inverso è dimostrato nella proposizione 9ª) scaturisce subito un modo per costruire (ossia determinare lato retto e lato trasverso di) un'iperbola conoscendone gli asintoti ed un punto.

Dopo una breve digressione (prop. 5ª-7ª), sulle relazioni esistenti fra una tangente d'una conica, il diametro passante pel punto di contatto e le corde parallele a quella tangente, APOLLONIO ritorna agli asintoti, per dimostrare che essi e l'iperbola (prop. 8ª) oppure due sezioni opposte (prop. 16ª) determinano su qualsivoglia trasversale due segmenti MN e PQ concentrici e tali (prop. 8ª e 11ª) che i rettangoli $PM \,.\, PN$ e $QM \,.\, QN$ sono fra loro eguali. La proposizione 12ª esprime a parole e sotto forma più generale (1) l'equazione di un'iperbola riferita agli asintoti, la 13ª afferma l'unicità dell'intersezione d'un'iperbola con una retta condotta per un punto d'un asintoto parallelamente all'altro, mentre la 15ª insegna che due sezioni opposte hanno comuni gli asintoti, e la 16ª che due sezioni opposte sono tagliate da qualunque retta che incontri un asintoto ed il prolungamento dell'altro.

Con la proposizione che viene appresso s'inaugura una serie di proprietà in cui intervengono le sezioni opposte coniugate a due date sezioni opposte, giacchè essa afferma avere quelle quattro sezioni comuni gli asintoti. Le proposizioni 18ª-23ª e la 43ª insegnano proprietà di corde, tangenti e diametri di due coppie di sezioni opposte coniugate, proprietà che somigliano ad altre che dianzi riferimmo e mediante le quali acquistasi la certezza che, come coppia di sezioni opposte coniugate ad una coppia data, si ottiene sempre la medesima curva qualunque paio di diametri coniugati si adoperi per costruirla. Le prop. 24ª-26ª, 33ª e 41ª-42ª trattano dell'intersezione di due corde di una conica, mentre le 27ª-32ª e le 34ª-40ª riguardano le coppie di tangenti parallele di una conica a centro; esse non hanno così grande valore da meritare che qui se ne riporti l'enunciato.

L'ultima parte del libro in discorso è occupata da problemi sulle coniche che può sciogliere chi conosca i teoremi precedenti e *in cui fa mestieri supporre la conica di cui si parla interamente descritta.* Risolta anzitutto la questione (indeterminata) di tracciare un diametro di una conica (proposizione 44ª), APOLLONIO ha il modo per fissare la posizione

(1) Essa, infatti, afferma essere costante il prodotto delle rette condotte da un punto di un'iperbola sotto angoli costanti *ma qualunque*.

del centro d'un'ellisse o d'un'iperbola (prop. 45ª), l'asse di una parabola (prop. 46ª) e gli assi di una conica a centro (prop. 57ª) — questi sono le mediane del rettangolo avente per vertici le intersezioni della conica con una circonferenza concentrica — e di dedurre (prop. 48ª) l'unicità di tale coppia se la conica data non è un circolo; è importantissimo rilevare come, per costruire gli assi, APOLLONIO implicitamente ammetta l'esistenza di uno di essi, cosa lecita in forza della chiusa al Libro I (cfr. n. prec.) (1). Il geometra greco passa poi a costruire le tangenti di una conica passanti per un punto dato (prop. 49ª) (2) o formanti un angolo dato coll'asse (prop. 50ª) o col diametro contenente il punto di contatto; quest'ultimo problema è possibile qualunque sia la grandezza dell'angolo dato, se la curva è parabolica od iperbolica (prop. 51ª), ma, se è ellittica (prop. 53ª), lo è soltanto quando quell'angolo non supera un certo limite, la cui determinazione è lo scopo della prop. 52ª. Le soluzioni di questi problemi hanno soltanto importanza teorica; in pratica sono di scarsa utilità perchè in esse, come dicemmo, si suppone la conica completamente tracciata; che APOLLONIO le abbia riferite unicamente perchè erano in uso prima di lui è opinione (3) che noi non dividiamo, ma che siamo esonerati dal combattere, perchè *quod gratis asseritur gratis negatur*.

58. - Le proposizioni del III Libro — l'importanza ed originalità delle quali sono rilevate, come sappiamo (v. n. 55), da APOLLONIO medesimo — si possono distribuire in parec-

(1) Quest'osservazione fatta dallo ZEUTHEN (op. cit., p. 311) assolve APOLLONIO da una colpa di cui lo imputò l'HOUSEL (l. c., pag. 163).

(2) APOLLONIO esamina separatamente i casi in cui la curva è una parabola, un'iperbola o un'ellisse. Il primo suddivide in tre, caratterizzati risp. dall'essere il punto sulla curva, sul prolungamento di un dato diametro od altrove. Il secondo in cinque, differenziati l'uno dall'altro per essere il punto sulla curva, sul prolungamento di un dato diametro, entro l'angolo degli asintoti, su un asintoto o nell'angolo adiacente a quello degli asintoti. Il terzo finalmente in due, distinti dall'essere il punto sulla curva o fuori. — In alcuni di questi casi il problema ammette due soluzioni, la cui esistenza emerge dai ragionamenti di APOLLONIO, ma non viene da lui esplicitamente notata.

(3) HOUSEL, loc. cit., p. 166.

chi gruppi. Infatti, le prime quindici sono casi particolari della seguente: « In una conica a centro è costante l'area del quadrilatero che ha per lati due diametri qualisivogliano e le corde condotte da un punto qualunque della curva, con la condizione di essere bisecate da questi diametri ». Similmente, le otto seguenti sono suscettibili di venir compendiate nel teorema — attribuito a NEWTON ingiustamente (1), giacchè era conosciuto da ARCHIMEDE per la parabola ed un ramo d'iperbola (v. nota (3) p. 339) — che dice: « Se da un punto M del piano di una conica si conducono due corde AB e CD aventi direzioni fisse, il rapporto dei rettangoli $MA \,.\, MB$ e $MC \,.\, MD$ avrà un valore indipendente dalla posizione del punto M ».

I sei teoremi seguenti si possono enunciare come segue:

24-26 e 28. Date due iperbole coniugate, di cui a, b è in lunghezza una coppia di diametri coniugati, ed un punto esterno M; se la parallela condotta da M al primo di questi diametri incontra una delle curve in P e P', mentre la parallela condotta dallo stesso al secondo incontra l'altra in Q e Q', fra i segmenti rettilinei così risultanti sussisteranno le relazioni

$$\frac{MP \,.\, MP'}{a^2} + \frac{MQ \,.\, MQ'}{b^2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{\overline{MP}^2 + \overline{MP'}^2}{\overline{MQ}^2 + \overline{MQ'}^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

29. E se, inoltre, la prima delle anzidette parallele incontra in R e R' gli asintoti, si avrà

$$\frac{\overline{MR}^2 + \overline{MR'}^2 - \frac{1}{2}\, a^2}{\overline{MQ}^2 + \overline{MQ'}^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

27. Se MM' e N' sono due corde di un'ellisse parallele a due diametri coniugati e O il loro punto d'intersezione, sarà

$$\frac{\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2}{a^2} + \frac{\overline{ON}^2 + \overline{ON'}^2}{b^2} = 1 \,.$$ (2)

(1) A meno che tal nome non gli venga concesso in memoria della generalizzazione datavi (1704) dal grande geometra inglese a tutte le curve algebriche nella sua *Enumeratio linearum tertii ordinis*.

(2) Per l'iperbola sussiste un teorema corrispondente (esso è espresso dall'equazione analoga a quella del testo, col solo cambiamento di b^2 in $-b^2$), ma APOLLONIO non si arresta a dimostrarlo.

Queste proposizioni si verificano in modo estremamente facile con poche linee di geometria analitica; da tali dimostrazioni non diversificano molto, nel fondo, i ragionamenti di APOLLONIO. Aggiungiamo come da un lato la mancanza di un saldo legame logico fra di esse e dall'altro la possibilità di servirsene per determinare il « luogo di un punto tale che il prodotto delle rette condotte da esso sotto dati angoli a due rette date stia in un rapporto assegnato al rettangolo delle rette analoghe condotte dallo stesso punto ad altre due rette date, oppure al quadrato della retta condotta ad una terza retta data pure sotto un angolo dato » ha indotto (1) a pensare che esse fossero quelle verità che posero in grado il geometra di Perga (come egli afferma nella prefazione riferita nel n. 52) di rendere perfetta la sintesi del problema locale ora citato, il quale non è altro se non il celebre *locus ad tres aut quatuor lineas* degli antichi (2). La giustezza di tale opinione ci sembra possa difficilmente venire revocata in dubbio; ma, quanto verosimile sia la conseguente restituzione proposta per la sintesi di APOLLONIO, non è qui il momento di discutere; tanto più che, ove entrassimo in tale esame, per debito di giustizia, dovremmo occuparci delle altre analoghe divinazioni, molte delle quali non meritano certamente di essere cancellate dal catalogo delle opere congeneri (3). Vogliamo invece ag-

(1) ZEUTHEN, op. cit., Abschn. VI e VII.

(2) Cfr. PAPPO ed. HULTSCH, p. 678.

(3) La più antica delle soluzioni geometriche superstiti del problema delle tre o quattro rette è, per quanto ci consta, quella che NEWTON espose al principio della V Sezione dei *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687); tiene dietro ad essa in ordine cronologico quella di ENRICO PEMBERTON (1694-1771) pubblicata per la prima volta nel 1763 (*On the locus for three and four lines celebrated among the ancients geometers.* The phil. Trans. of the R. Society of London abridged by Hutton, Shaw and Pearson, Vol. XII, London, 1809, p. 60-77); ed a questa segue quella di G. SCORZA (1781-1843) che si legge nella *Divinazione della geometria analitica degli antichi.* Napoli, 1825. Una soluzione analitica del problema fu esposta in succinto da CARTESIO nella *Géométrie* (1637), per dimostrare la potenza del metodo delle coordinate, e completata dai suoi numerosissimi commentatori, come ultimo dei quali, in ordine di tempo

giungere l'osservazione che gli antichi geometri non possono aver mancato di rilevare che il luogo in discorso è circoscritto al relativo quadrilatero; e siccome, invece di dare il rapporto costante dei due rettangoli, è lecito assegnare un punto pel quale il luogo deve passare, così si può ritenere che, in sostanza, APOLLONIO abbia, per primo, insegnato a *descrivere una conica passante per cinque punti dati in un piano*.

Le prop. 30ª-40ª appartengono alla teoria dei poli e polari rispetto ad una conica; adoperando il linguaggio moderno esse possono riassumersi nelle due seguenti: I. Se da un punto esterno ad una conica si conducono due tangenti ed una secante, il segmento determinato su questa dalla curva è diviso armonicamente dal punto dato e dalla congiungente i punti di contatto delle due tangenti. II. Se da un punto dato si conduce la parallela alla polare di esso rispetto alla conica, ogni corda di questa, passante pel centro del segmento determinato dalla curva sulla polare, è divisa armonicamente da questo punto e da quella parallela. Possiamo ad esse riunire la prop. 44ª la quale insegna che « la polare d'un punto rispetto ad un'iperbola è parallela a due delle rette che congiungono a coppie le intersezioni degli asintoti con le tangenti guidate da quel punto alla curva ».

Questo teorema è separato dai tre precedenti da una terna di proposizioni di valore eccezionale; la prima di esse dice che « una tangente mobile determina, su due tangenti fisse di una parabola, punteggiate simili »; la seconda che « una tangente mobile d'un'ellisse o d'un'iperbola determina, sopra due tangenti parallele fisse, a partire dai rispettivi punti di contatto, coppie di segmenti formanti un prodotto costante »; la terza finalmente, che « è costante l'area del triangolo determinato con gli asintoti da una tan-

---

va posto N. FERGOLA (1753-1822), in grazia del suo *Trattato analitico dei luoghi solidi*, Napoli, 1814 e 1828, di cui ho diffusamente trattato nello scritto già ricordato sopra la Scuola napoletana. Una *Loci ad tres linea demonstratio* di FERMAT, fatta conoscere dall'edizione delle *Oeuvres de Fermat* (Paris, 1891, T. I, p. 87-89; cfr. T. II, p. 105) coincide con quella esposta dallo ZEUTHEN nell'opera più volte citata.

gente qualunque dell'iperbola ». La straordinaria importanza di queste proposizioni è dovuto specialmente a ciò che esse dimostrano come i Greci avessero visto, almeno in qualche caso, come le tangenti di una curva, a somiglianza dei punti di essa, godano di una comune proprietà atta a caratterizzarle: è però incerto, se essi siano assurti al concetto di una conica come inviluppo, come è ancora più dubbio che essi fossero in possesso del concetto generale di inviluppo (1). Per converso è indiscutibile che la prop. 41ª riduce la costruzione delle tangenti d'una parabola uscenti da un punto al famoso *problema della sezione di ragione*, di cui fra breve (n. 64) dovremo accuparci, mentre la 42ª e 43ª riconducono le determinazioni analoghe per le altre coniche al non meno famoso *proplema della sezione di spazio* (n. 64) (2).

Nella prop. 45ª APOLLONIO introduce i fuochi delle coniche a centro, sotto il nome di σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς (3), caratterizzandoli come quei punti dell'asse trasverso le cui distanze dagli estremi di questo dànno un rettangolo eguale a quello del lato retto e del lato trasverso. Egli dimostra (4), prima d'ogni altra cosa, che « il segmento di una tangente qualunque, intercetto fra le tangenti nei vertici, è visto da un fuoco sott'angolo retto »; ne deduce (prop. 46ª) che « i punti d'intersezione di una tangente qualunque di una conica con le tangenti nei vertici sono congiunte ai fuochi

(1) Il quale ordinariamente ritiensi sia stato introdotto nella scienza da FLORIMOND DE BEAUNE (1601-1651); cfr. MONTUCLA, op. cit., T. II, p. 120.

(2) È opinione dell'HALLEY, condivisa dallo ZEUTHEN (v. op. cit., p. 344-45), che questo legame tra la teoria delle coniche ed i due citati problemi non sia rimasta ignota al greco geometra, al quale, come vedremo (n. 64), si debbono due opere speciali sopra questi problemi.

(3) È noto che il nome di *fuochi* venne suggerito da KEPLERO (1571-1630) e poi generalmente adottato: cfr. C. TAYLOR, *An Introduction to ancient and modern Geometry of Conics*, Cambridge, 1881, p. LVII.

(4) Cfr. anche l'articolo del TERQUEM, *Théorie des coniques d'après Apollonius* (Nouv. Ann. de Math., T. III, 1844, p. 412-416), ove, fra le altre cose, è segnalata la identità nell'essenza delle dimostrazioni del geometra greco con le analoghe ordite da GORGONNE mediante la geometria analitica.

mediante due rette, che si tagliano in un punto, la cui projezione ortogonale su quella tangente è il relativo punto di contatto ». La prop. 48ª dice che « l'angolo delle tangenti condotte ad una conica da un punto e l'angolo delle congiungenti questo punto con i fuochi hanno la medesima bisettrice »; e, dopo avere imparato quale sia la curva podaria di un fuoco (prop. 47ª-50ª), si arriva alle importanti e notissime relazioni esistenti fra i raggi vettori di qualsia conica a centro (prop. 51ª-52ª).

Tali sono proprietà focali delle coniche segnalate da APOLLONIO e da lui dimostrate con argomentazioni la cui semplicità ed eleganza lasciano ben poco a desiderare; erano desse le uniche a lui note? oppure si è egli limitato a registrare quelle che più direttamente contribuiscono a raggiungere quello che (per sua esplicita dichiarazione) è lo scopo del libro, cioè di *gettare i fondamenti per la determinazione dei luoghi?* in particolare era a' tempi suoi ignoto il fuoco della parabola (1), erano sconosciute le direttrici (2) e le loro importanti relazioni con i fuochi? Ci è

(1) In generale si propende ad ammettere in APOLLONIO la conoscenza del fuoco della parabola, senza però giustificare quest'opinione con argomenti decisivi: così P. TANNERY dice: " Je crois, ..., que si Apollonius n'a pas parlé du foyer de la parabole, c'est qu'il n'avait rien à en dire plus que ce qu'en avait déjà dit Aristée „. (*Bulletin des Sc. math.*, II Série, T. XIII, 1889, I Partie, p. 277); e così ZEUTHEN (op. cit., p. 368): " Um nun zu verstehen, dass Apollonius dennoch weder Brennpunkt und Leitlinie der Parabel noch die dem entsprechenden allgemeineren Sätze über Ellipse und Hyperbel mit aufgeführt hat, muss man zunächst auch hier beachten, dass es aus Apollonius' eigenen Vorrede hervorgeht dass er nicht imstande ist alles zu geben, was er über die Kegelschnitte weiss. Ferner muss man, wenn man Forderungen mit Bezug auf das stellen will, was jedenfalls hätte mit aufgenommenen werden müssen, sich hüten von den modernen Auschauungen über die Bedeutung der Brennpunkte für die Astronomie oder von ihrer Brauchbarkeit als Ausgangspunkt für die gesammte Lehre von den Kegelschnitten auszugehen ... Si vegga inoltre P. TANNERY a p. 224 del T. XV (1891), 2ª Serie, del *Bulletin des Sciences mathématiques.*

(2) Non senza ragione l'HOUSEL osserva (op. cit., p. 171) che l'assenza delle direttrici è il nèo principale della teoria dei fuochi esposta da APOLLONIO.

forza limitarci a proporre queste questioni che nessun documento a noi noto è capace di sciogliere definitivamente.

Le quattro proposizioni con le quali si chiude il libro in esame, se analizzate accuratamente da un lettore moderno, gli fanno provare una di quelle gradite sorprese, che rappresentano la principale seduzione dello studio delle antiche opere matematiche. Ivi APOLLONIO considera simultaneamente le punteggiate che nascono su due tangenti di una conica proiettando i punti della curva dai rispettivi punti di contatto e trova fra esse alcune relazioni metriche, le quali, in sostanza, non sono che espressioni della proiettività da cui sono legate. Ciò prova che i geometri greci conobbero, almeno in alcuni casi, l'omografia esistente tra i fasci che proiettano i punti di una conica da due punti di essa arbitrari, ma fissi: essi dunque si accostarono al teorema fondamentale dell'odierna teoria geometrica delle coniche, senza tuttavia raggiungerlo e tanto meno avvertire la possibilità di farne il caposaldo di tutta la teoria (1).

59. - Quale scopo abbia e quanta originalità possieda il IV Libro delle *Coniche* di APOLLONIO, si desume dalla lettera dedicatoria che lo precede, la quale dice:

APPOLLONIO ad ATTALO salute.

Degli otto libri che ho scritto sulle *Coniche* ho già pubblicati i primi tre che diressi ad EUDEMO da Pergamo. Morto questo io ho deciso d'inviare i rimanenti a te, che sei bramoso di conoscere i miei scritti sopra tale argomento, perciò ti mando intanto il Libro IV. Ivi è trattata la questione di determinare in quanti punti al massimo si possono incontrare due sezioni coniche, oppure una conica ed un cerchio, senza coincidere. inoltre in quanti punti al massimo una conica e una circonferenza possono segare due sezioni opposte, oppure due sezioni opposte altre due, e di più una serie di cose simili. Sul primo di questi argomenti già CONONE da Samo scrisse a TRASIDEO. senza però condurre esattamente le dimostrazioni, per il che NICOTELE da Cirene gli mosse giuste obbiezioni. Il secondo dei detti argomenti fu soltanto nominato da NICOTELE, nel suo scritto contro CONONE, come una cosa che si può trattare, ma io non l'ho mai visto svolto. nè da lui nè da altri. Il terzo e

(1) Il primo a segnalare il significato straordinariamente interessante di questo passo, fu, per quanto ci consta, il BALSAM (p. 161 della traduzione di APOLLONIO dianzi citata); indipendentemente da lui, venne di nuovo indicato dallo ZEUTHEN (op. cit., p. 122 e segg.).

gli altri che vi si connettono, per quanto mi consta, non vennero in mente ad alcuno. Tutte queste cose esigono molti e vari teoremi, non avendole io viste dimostrate da altri: tali teoremi furono esposti da me per la maggior parte nei primi tre libri, i rimanenti lo sono in questo. La considerazione di essi è di non piccola utilità nella sintesi e nel diorisma dei problemi. A dir vero NICOTELE nel corso della sua polemica con CONONE afferma che nessuna delle cose che questi ha trovato riesce utile pei diorismi, ma ciò non è vero; si possono infatti comporre diorismi anche senza l'aiuto di esse, tuttavia è assai agevole il farli col loro sussidio, il trovare cioè se un problema ha parecchie soluzioni e quante o se non ne ha. Tale previa determinazione somministra un eccellete punto di partenza per molte ricerche e quei teoremi sono utilissimi nelle analisi dei diorismi. Ma, anche prescindendo da questi vantaggi, le dimostrazioni, in grazia del loro intrinseco valore, sono degne di venir bene accolte, dal momento che è nostro costume dare accesso nella matematica a molte cose per quest'unica ragione.

L'artificio usato da APOLLONIO, per conseguire il fine che si era prefisso, consiste in una ingegnosa ed elegante riduzione all'assurdo, metodo questo naturalissimo quando, come nel caso attuale, le proposizioni che si studiano sono evidenti *ad oculos*, ma esigono una dimostrazione inoppugnabile (1); esso ha il proprio fondamento nei teoremi sulle polari dimostrate dal Pergeo nel libro precedente e in quelli consegnati nelle prime ventitre proposizioni del libro attuale; su tali proposizioni crediamo superfluo l'arrestarci perchè esse si riducono a poche verità a tutti note (2). Piuttosto,

(1) Non diversamente pensava EUTOCIO: ciò sembra emergere dal seguente brano della lettera che egli premise al commento sul IV Libro delle *Coniche*: " Il quarto libro.... è così elegante ed intelligibile che non richiede ulteriori spiegazioni, giacchè quanto può mancare alla chiarezza nei teoremi è compensato da quello che APOLLONIO dice nelle dimostrazioni. In questo libro tutto vien stabilito col metodo indiretto, del quale si è servito anche EUCLIDE in quello che scrisse sulle intersezioni e i contatti dei circoli (*Elem.* III, 10 e 13). Per la qual ragione ARISTOTELE ed i geometri, primo fra i quali ARCHIMEDE, lo ritennero utile e necessario „. APOLLONIO ed. HEIBERG, T. II, p. 354.

(2) Ci basti citare a mo' d'esempio la prop. 23ª: " Se da un punto P si conducono le parallele agli asintoti fino ad incontrarli in A e B e se su di esse si prende $AM = PA$, $AN = PB$, la retta MN sarà la polare di P „.

nell'intento di dichiarare al lettore il procedimento suaccennato, indichiamo qui in poche parole l'argomentazione con cui APOLLONIO dimostra che (prop. 25ª) « due coniche non possono segarsi in più di quattro punti ».

Siano, se è possibile, $ABCDE$ cinque punti comuni a due coniche, e supponiamo scelte le notazioni in modo che fra due qualunque di essi, presi in quell'ordine, non cada altra intersezione delle due curve. Condotte le rette AB e CD, queste o s'incontreranno in un punto L fuori della curva o saranno parallele. Nel primo caso, si conduca LE e si determinino i coniugati armonici F e G di L rispetto alle coppie A, B e C, D; la retta FG sarà polare di L rispetto a entrambe le curve; se essa taglia la EL in H e si determina il coniugato armonico M di E rispetto alla coppia LH, M sarà un nuovo punto comune alle due coniche e cadrà fra B e C contro l'ipotesi. Nel secondo caso, si congiungano i punti medi F, G delle corde parallele AB, CD, si conduca da E la parallela ad AB che incontra FG in H e su essa si prenda $HM = EH$; si giungerà nuovamente ad un punto comune alle due coniche interposte fra B e C, ancora contro l'ipotesi fatta. In un caso e nell'altro adunque il supporre che le coniche abbiano comuni cinque punti mena ad un assurdo, onde esse non possono averne più di quattro.

Stimiamo non necessario l'esporre partitamente il contenuto delle trentaquattro proposizioni nelle quali APOLLONIO studia le posizioni mutue che possono presentare due sezioni coniche (1), dopo avere persuasi i lettori (prop. 24ª) che esse non possono avere alcuna porzione comune senza coincidere (2). Come accenna APOLLONIO stesso nella prefazione dianzi riferita, queste proposizioni erano nell'antichità

(1) Riferiamo come esempi le seguenti: 30. Due parabole non possono toccarsi in più di un punto. 34. Se due ellissi concentriche sono bitangenti, i punti di contatto sono gli estremi di un diametro. 38. Una sezione conica non può tagliare due sezioni opposte in più di quattro punti.

(2) Si noti che quantunque APOLLONIO non faccia esplicito cenno dei casi in cui le due coniche abbiano all'infinito intersezioni o contatti, pure nel V Libro dimostrò ad evidenza di conoscere e saper trattare anche questi casi.

di uso continuo per determinare il numero delle soluzioni dei problemi di 3° e 4° grado, in particolare per studiare il problema della duplicazione del cubo. Rileveremo, finalmente, che, mentre i primi tre libri delle *Coniche* sono redatti in una forma che è modellata con fedeltà scrupolosa su quella degli *Elementi* di EUCLIDE, nel IV (e non soltanto in questo) APOLLONIO si è creduto autorizzato a sopprimere in quasi tutte le proposizioni la protasi, limitandosi all'enunciato sulla figura, cioè all'estesi (cfr. n. 24).

60. - Il V Libro della grande opera di APOLLONIO (1), col quale comincia la parte superiore di essa (2), ha uno scopo dichiarato senz'ambiguità dall'autore tanto nella prefazione generale dell'opera, quanto nella dedica ad ATTALO che egli ha premessa al libro stesso: lo scopo è *lo studio delle rette massime e minime che si possono condurre da un punto di un piano ad una sezione conica situata nello stesso*; nella citata lettera dedicatoria APOLLONIO vanta poi l'originalità di tali sue investigazioni e la varietà delle applicazioni, che esse possono ricevere, vuoi nel risolvere vuoi nel discutere i problemi. Che non fosse soltanto un eccesso di vanità che spingesse APOLLONIO a giudicare così favorevolmente la quinta sezione del suo lavoro è facile dimostrare; infatti essa è, in primo luogo, un contributo non spregevole alla teoria geometrica dei massimi e minimi; in secondo luogo, rappresenta un capitolo importantissimo della teoria delle coniche, relativo a normali ed evolute, e benchè non tutti possano far propria l'opinione di coloro (3) che ammettono avere APOLLONIO avvertito l'esistenza di una linea continua luogo dei punti del piano, da ognuno dei quali esce una normale unica di una conica (cioè dell'evoluta), sarebbe falso

(1) Cfr. il Cap. XIII dell'op. cit. di ZEUTHEN: in particolare a p. 395 si troverà rilevato un notevole punto di contatto fra APOLLONIO e CARTESIO.

(2) Secondo lo ZEUTHEN (l. c., p. 302) il sostanziale divario fra i primi quattro e gli ultimi risiederebbe in ciò che quelli costituiscono un *compendio* della teoria delle coniche, e questi rappresentano altrettante *monografie* staccate concernenti questa teoria.

(3) P. es. MONTUCLA (op. cit., T. I, p. 247) e, con qualche riserva, CHASLES (*Aperçu historique*, 2ª éd., p. 20).

affermare che ad APOLLONIO sia sfuggito che questi punti hanno una effettiva esistenza (1); da ultimo ivi si trova una soluzione completa, accompagnata dalla relativa discussione, nel problema (solido) che consiste nel determinare le normali di una conica uscenti da un punto dato nel suo piano. Perciò non deve recare meraviglia se il V Libro delle *Coniche*, più di qualunque altro, ha contribuito ad elevare APOLLONIO nell'estimazione universale; e l'ammirazione per lui sorge spontaneamente in chiunque rifletta quanto difficil cosa dovesse essere riconoscere, coll'unico sussidio degli antichi procedimenti, come si distribuiscano nel piano di una conica le rette ad essa normali; anzi tale ammirazione (come in casi analoghi che abbiamo già incontrati; v. n. 44) si mutò in taluno (2) nel sospetto che in APOLLONIO il metodo di esposizione fosse ben diverso dal metodo di ricerca della verità. Quanto sia fondato tale sospetto è impossibile decidere, ma a noi pare non sia indispensabile ricorrere ad ipotesi di questa natura, giacchè la storia della scienza in generale, e in ispecial modo la storia intellettuale del popolo ellèno, presenta innumerevoli esempi di uomini a cui la naturale sagacia permise raggiungere risultati che sembrava follia sperare, adoperando mezzi che, nelle mani di altri, sembravano e ancora appaiono dotati di fecondità e di forza limitata.

Volendo indicare anche di questo libro le verità più cospicue (benchè ciò presenti difficoltà maggiori che pei libri precedenti) ricordiamo che, della conica a centro avente per equazione in coordinate ortogonali

$$[1] \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b)$$

l'evoluta è rappresentata da

$$[2] \qquad (ax)^{\frac{2}{3}} \pm (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 \mp b^2)^{\frac{2}{3}},$$

(1) Anzi, come nota lo ZEUTHEN (op. cit., p. 289), APOLLONIO insegna dell'evoluta della parabola una costruzione per punti, dalla quale si deduce subito l'equazione della stessa in coordinate cartesiane.

(2) Ad es. CANTOR, *Vorlesungen* I, p. 342.

onde questa curva ha, sull'asse maggiore AA', due punti U e U' che distano dai vertici di una lunghezza eguale al relativo semiparametro, e, nel caso dell'ellisse, ne ha altri due V e V' sull'altro asse BB' che pure distano dai vertici del relativo semiparametro; similmente, per la parabola

$$[3] \qquad y^2 = 2px$$

l'evoluta è rappresentata dall'equazione

$$[4] \qquad y^2 = \frac{8}{27}\,\frac{(x-p)^3}{p}$$

ed ha sull'asse un punto U, distante dal vertice A del semiparametro.

Ciò posto, le prime tre proposizioni del Libro V non sono che lemmi per le seguenti, porgendo una nuova interpretazione geometrica dell'equazione cartesiana di una conica a centro. Dimostrate queste, APOLLONIO si volge a considerare le rette massime e minime, che si possono guidare ad una conica da un punto P del piano di essa, scelto in posizioni speciali e la distribuzione, dalle due parti di una di esse, delle rette uscenti da P. Le posizioni di P che si presentano per prime sono i punti dell'asse: tutti questi godono la proprietà di avere l'asse stesso per corrispondente retta minima ed anche per retta massima, se la curva è ellittica; fra i punti dell'asse ha speciale importanza il punto U, a cui sono consacrate le prop. 4ª-6ª, mentre la 7ª si riferisce ai punti del segmento AU e le 8ª-10ª ai punti dell'asse esterni al detto segmento (1). Per l'ellisse vi è poi sull'asse un altro punto notevole, cioè il centro, e la proposizione 11ª assegna i valori estremi delle rette passanti per esso. Dimostrato (prop. 12ª) che una retta minima uscente da un punto dell'asse è retta minima rispetto a qualsia altro suo punto, APOLLONIO nota essere possibile che da un punto dell'asse d'una conica parta una retta minima distinta da questo e, supposto che esista in fatto, ne stabilisce alcune proprietà (prop. 13ª-15ª); e quindi, ben conoscendo l'uniformità di comportamento dei due assi di una ellisse,

(1) Si noti che dalla 8ª emerge che "nella parabola la sottonormale è costante".

estende all'asse minore ed al punto V le proprietà avvertite nell'asse maggiore e nel punto U.

Le tre proposizioni seguenti concernono una nuova categoria di posizioni notevoli del punto P, cioè i punti della curva, ed insegnano che per uno di essi passa non più di una retta minima ed inoltre, se la curva è ellittica, non più di una retta massima. Dai sette teoremi successivi si apprende, finalmente, che una retta minima è (per usare il linguaggio moderno) normale alla curva; da quello che vien dopo l'estensione della dianzi citata prop. 12ª a rette minime uscenti da punti qualsivogliano e dalle 35ª-37ª in qual maniera sia disposta rispetto ai vertici una retta minima uscente da un punto dell'asse.

Finora APOLLONIO aveva considerate separatamente le rette minime e su ciascuna due soli punti, cioè quello da cui parte e quello ove è normale alla curva; nelle prop. successive (38ª-43ª) egli invece si occupa delle intersezioni delle normali fra loro e con la curva. Le undici seguenti (1), riferentesi al numero (mai maggiore di tre) delle normali che si possono condurre da un punto ad una conica, somministrano gli elementi per la discussione del problema di condurre da un punto le normali ad una conica, al quale problema sono consacrate le proposizioni che vengon poi (58ª-61ª per un punto esterno, prop. 62ª-63ª per uno interno alla curva) (2). La soluzione che APOLLONIO suggerisce per questo problema poggia sulla costruzione d'una iperbola equilatera (detta tuttodì *iperbola d'Apollonio*) destinata a tagliare la conica data nei piedi delle normali cercate; la determinazione di quella curva ausiliare è un corollario dell'espressione, da APOLLONIO scoperta, della sottonormale per una conica qualsivoglia. Supposto che la conica considerata sia rappresentata da una delle precedenti equazioni [1], [3]

(1) Importa rilevare che nella prop. 52ª ed in altre ancora APOLLONIO (come già aveva fatto ARCHIMEDE) usa come ausiliaria l'inserzione di due medie proporzionali fra due rette date, senza arrestarsi a suggerire il modo di eseguirla: al suo silenzio sopperirono i commentatori Arabi: cfr. la trad. citata dal BALSAM, p. 101.

(2) Le più importanti fra esse, anzi fra quelle di tutto il V Libro, sono le 51ª e 52ª.

e che α, β siano le coordinate del punto dato, allora la corrispondente iperbola d'Apollonio ha per equazione

$$[5] \qquad (a^2 \mp b^2)\, xy - a^2\alpha y \pm b^2\beta x = 0$$

oppure

$$[6] \qquad xy - (\alpha - p)\, y - p\beta = 0.$$

Ora è evidente che, nel caso della parabola, i piedi delle tre normali stanno anche su una circonferenza, su quella, cioè, rappresentata dall'equazione

$$x^2 + y^2 - (\alpha + p)\, x - \frac{1}{2}\beta y = 0;$$

tale importante circostanza è sfuggita ad Apollonio (1), onde, con qualche fondamento, è stato congetturato (2) fosse questo il passo del V Libro criticato da Pappo (3) nello squarcio da noi riferito nel n. 41; a lui, infatti, doveva sembrare colpa imperdonabile l'usare come curva ausiliaria un'iperbola, quando all'uopo poteva servire una circonferenza (4).

(1) Fu avvertita da C. Huygens sino dal 1653; vedi la breve nota pubblicata a p. 81-82 del T. XII delle *Oeuvres complètes*. La Haye, 1910.

(2) Zeuthen, op. cit., p. 285 e seg.

(3) Pappo ed. Hultsch, p. 270-3.

(4) Un'altra interpretazione delle parole del commentatore alessandrino venne proposta dall'Hultsch (p. 273, nota 5 della cit. ed. di Pappo) e combattuta, a parer nostro vittoriosamente, da P. Tannery nell'importante lavoro *Sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède* (Mém. de la Soc. des Sc. phys. et nat. de Bordeaux, 2e Série, T. V, 1884, p. 51-52). Nel quale, inoltre, è suggerita una terza spiegazione con le parole seguenti: "Cependant l'oeuvre d'Apollonius présente une véritable lacune; la construction *plane* de le seconde normale passant per un point considéré sur l'enveloppe [des normales] n'est pas donnée. Était-ce cette lacune que signalait le critique? Elle témoignerait alors d'un progrès important accompli, après Apollonius, dans une théorie ou l'on ne sache pourtant pas qu'aucun ancien l'ait jamais dépassé. C'est, semble-t-il, la seule hypothèse qui puisse attribuer à cette critique une portée sérieuse: mais malheureusement cette hypothèse demanderait une confirmation qu'il parait bien difficile de lui trouver".

Le indagini di cui abbiamo fatto cenno da ultimo segnano forse il punto culminante del V Libro dell'opera in esame. APOLLONIO in seguito dimostra alcune proprietà dei punti interni od appartenenti all'evoluta (prop. 64ª-67ª e 73ª), stabilisce il confronto prima fra le lunghezze delle tangenti guidate da un punto ad una conica (prop. 68ª-71ª), poi fra le normali passanti per un punto da cui ne escono due soltanto (prop. 72ª e 74ª) ed in fine fra quelle condotte da un punto attraversato da tre normali (prop. 75ª). Chiudono il libro due teoremi intorno alla grandezza relativa delle tre normali di un'ellisse uscenti da un punto dell'asse minore.

61. - Il Libro VI delle *Coniche* è, non soltanto per estensione, ma eziandio per intrinseco valore e novità incomparabilmente inferiore al precedente; ne è argomento *la congruenza e la similitudine delle coniche.* Prelude ad esso la seguente brevissima lettera, che riferiamo grazie al fine a cui tende e che raggiunge, quello, cioè, di determinare il posto che spetta ad detto libro nella storia della geometria greca:

APOLLONIO ad ATTALO salute.

T'invio il sesto libro delle *Coniche*, il quale abbraccia proposizioni sulla congruenza e la similitudine delle sezioni coniche e dei loro segmenti, nonchè altre cose che non vennero rilevate dai miei predecessori. In particolare troverai ivi indicato come si possa determinare in un dato cono retto una sezione congruente ad una data e come si possa trovare un cono retto simile (1) ad un dato e contenente una data conica. Tutte queste cose io ho trattate in modo un po' più chiaro e completo di quanto fece chi scrisse prima di me sullo stesso tema. Addio.

Della verità di alcune fra le asserzioni in essa contenute possiamo persuaderci ricordando anzitutto che ARCHIMEDE, nel celebre suo scritto *Su le conoidi e le sferoidi*, diede definizioni di similitudine per queste figure, che erano fondate su certi criteri per distinguere se due coniche sono o non simili. Inoltre, non poche fra le proposizioni di APOLLONIO sono evidenti per chiunque abbia presenti la forma e le proprietà fondamentali delle coniche; onde è estremamente ve-

(1) Com'è noto, gli antichi chiamavano *simili* due coni circolari retti aventi lo stesso angolo al vertice.

rosimile che, per comporre il VI Libro del suo trattato, il geometra Pergeo abbia ordinato materiali esistenti, aggiungendovi parziali ricerche per comporne un tutto organico.

Come è agevole immaginare, il libro in questione comincia con un gruppo di definizioni relative alla congruenza ed alla similitudine di due coniche o di due loro porzioni, nonchè agli elementi che si sogliono considerare in un segmento di conica; citiamo fra esse soltanto la seguente: « due coniche si dicono simili se due ordinate corrispondenti stanno fra loro come le ascisse relative », ove per *corrispondenti* s'intendono due ordinate che stiano fra loro come i relativi lati retti; la citiamo per osservare la differenza esistente fra essa e la definizione presupposta da ARCHIMEDE, il quale desume la simiglianza delle sezioni fatte in una delle quadriche rotonde a lui note dal fatto che in tutte ha il medesimo valore il rapporto del quadrato d'un'ordinata al rettangolo dei due segmenti in cui essa divide l'asse su cui cade. — APOLLONIO trova anzitutto (prop. 1ª e 2ª) le condizioni di congruenza di due parabole, di due ellissi o di due iperbole, esclude (prop. 3ª) la possibilità di coniche eteronime congruenti (prop. 6ª e 10ª), e dimostra (prop. 16ª) la congruenza di due sezioni opposte (cfr. la prop. 14ª del I Libro). Dalle prop. 4ª e 5ª si apprende essere congruenti le due parti in cui un'ellisse è divisa da un diametro qualsivoglia, mentre la 7ª e la 8ª affermano la congruenza di altri particolari segmenti e la 9ª tratta di archi congruenti di coniche congruenti. Dalla 11ª emerge essere tutte le parabole figure simili, mentre dalle due successive si può desumere la concordanza delle definizioni di similitudine usate da ARCHIMEDE e da APOLLONIO. Esclusa la possibilità che due coniche eteronime siano simili (prop. 14ª-15ª), APOLLONIO esclude eziandio quella che sian simili due porzioni di coniche dissimili (prop. 23ª-25ª), dopo essersi occupato (proposiz. 17ª-22ª) di alcuni particolari segmenti simili.

Arrivato a questo punto il geometra greco abbandona il piano per dimostrare essere simili le sezioni prodotte in un cono da piani paralleli (prop. 26ª-27ª) e, riprendendo il filo delle idee che lo dominavano verso il termine del I Libro (v. n. 56), fa conoscere le soluzioni dei problemi seguenti (che evidentemente sono, in certo modo, inversi l'uno dall'altro): « In un dato cono trovare una sezione che sia con-

gruente ad una data conica (prop. 28ª-30ª); trovare un cono retto che sia simile ad uno dato e contenga una data conica, con una limitazione se questa è iperbolica (prop. 31ª-33ª) (1) ».

62. - Il VII Libro è pure diretto ad ATTALO: la lettera che lo accompagna dice:

APOLLONIO ad ATTALO salute.

Insieme a questa ti mando il libro settimo delle *Coniche*. Sono in esso contenute molte proposizioni che si riferiscono ai diametri delle sezioni coniche ed alle figure descritte su di essi; la utilità di tutte si manifesta in problemi di varie specie ed in particolare nella discussione (διορισμός) di essi. Molti esempi relativi s'incontrano fra i problemi limitati (da condizioni) sulle coniche che ho esposti e dimostrati nel libro ottavo: il qual libro è quasi un'appendice a quello che lo precede e che sarà mia cura di spedirti al più presto possibile. Addio.

Le proposizioni di cui consta il libro del quale si tratta si ripartiscono naturalmente in due categorie: quelle dell'una insegnano varie particolari espressioni per talune funzioni razionali semplicissime di diametri e parametri, mentre in quelle dell'altra vengono determinati i valori estremi di certe funzioni analoghe alle precedenti. Riguardo al metodo di ricerca prescelto dal geometra greco è da notare che, siccome egli aspira a ragionare in modo uniforme su tutte le coniche a centro, così evita certe argomentazioni più semplici, ma applicabili ad una sola di esse, quali ad esempio sarebbero i ragionamenti in cui l'ellisse vien considerata per proiezione parallela del cerchio.

Come la maggior parte degli altri libri delle *Coniche*, il VII si apre con un gruppo di teoremi (prop. 1ª-3ª) destinati a fungere da lemmi per quanto segue; da essi si apprende — per usare il linguaggio della moderna geometria analitica — qual forma prenda l'equazione di una sezione conica, quando si assumano quali coordinate di un suo punto il raggio vettore uscente dal vertice e l'ascissa contata sull'asse a partire da questo; allo stesso ufficio è chiamata la proposizione seguente, da cui s'impara un'espressione assai semplice del rapporto del quadrato del segmento

(1) Cfr. gli sviluppi che diede lo ZEUTHEN (l. c., p. 383-387) su questi problemi.

di tangente di una conica a centro intercetto fra il punto di contatto e l'asse al quadrato del diametro parallelo alla stessa tangente.

Per esporre concisamente la restante materia del libro in esame designeremo con: a e b gli assi di una conica, a' e b' due diametri coniugati qualisivogliano, p il parametro relativo all'asse a e p' quello che si riferisce al diametro qualunque a'. Potremo dire allora che la proposizione 5ª dà, per una parabola, l'espressione di p' in funzione di p e le 6ª-7ª insegnano una particolare espressione del rapporto $b'^2 : a'^2$, dalla quale è facile dedurre un modo per determinare i diametri coniugati eguali in un'ellisse. Le prop. 8ª e 9ª concernono i quozienti $a^2 : (a' \pm b')^2$ e la 10ª il quoziente $a^2 : a'b'$, mentre dalle 11ª-14ª risultano alcune espressioni eleganti pei quozienti $a^2 : (a'^2 \pm b'^2)$, ove si deve prendere il segno + o il — secondochè si tratti d'un'iperbola o d'un'ellisse: finalmente le intermedie prop. 12ª-13ª fan conoscere il cosidetto *primo teorema d'Apollonio:* « nell'ellisse è costante la somma e nell'iperbola la differenza dei quadrati di due diametri coniugati ». Essendo $p' = b'^2 : a'$, le citate prop. 6ª-7ª si possono intendere come esprimenti il rapporto $a' : p'$, onde si direbbero preludere ad altre, in cui entrano differenti funzioni di queste stesse lunghezze; parliamo di quelle che insegnano i valori di p' (prop. 15ª), $a' \mp p'$ (16ª-17ª), $a'p'$ (18ª) e $a'^2 \mp p'^2$ (prop. 19ª-20ª). Scopo delle prop. 21ª-22ª è di far vedere che in un'iperbola dall'essere $a \gtrless b$ segue $a' \gtrless b'$, proprietà questa che comprende quella caratteristica dell'iperbola equilatera (prop. 22ª) e che si ritrova anche nell'ellisse (prop. 24ª). Detti a'' e b'' una coppia di diametri coniugati più discosti dagli assi di quanto siano a' e b', si hanno poi le relazioni $a + b < a' + b' < a'' + b''$ (prop. 25ª-26ª), $a - b > a' - b' > a'' - b''$ (prop. 27ª) e $ab < a'b' < a'' b''$ (prop. 28ª). La costanza dell'espressione $a'^2 - a'p'$ per l'iperbola e della $a'^2 + a'p'$ per l'ellisse è un semplice corollario del primo teorema di Apollonio, tuttavia è rilevata esplicitamente (prop. 29ª-30ª) dal geometra greco, prima di esporre il secondo dei teoremi che recano il suo nome e che, come tutti sanno, dice: « il parallelogrammo costruito su due diametri coniugati qualisivogliano di una conica a centro è eguale al rettangolo costruito su gli assi » (prop. 31ª).

Dopo questa proposizione si incontrano verità di un genere un po' differente. Infatti, la 32ª fa noto che « nella parabola il parametro minimo è quello relativo all'asse »; le prop. 33ª-35ª concernono i valori estremi di p' per un'iperbola, le 36ª-37ª il massimo di $a' - p'$ per questa curva e l'ellisse; le 38ª-41ª il massimo di $a' + p'$ e le due seguenti il massimo di $a'p'$; dei valori massimi e minimi di $a'^2 + p'^2$ trattano le prop. 44ª-48ª e di quelli di $a'^2 - p'^2$ i teoremi che chiudono il libro (prop. 49ª-51ª). Tutte queste verità si possono intendere come soluzioni di altrettanti problemi di massimo e minimo, ed è difficile porre in dubbio che il geometra greco le abbia scoperte appunto per questa via. Ma, adottando il costume preferito dai suoi contemporanei, egli, compiuto l'edificio, con ogni cura cancellò ogni traccia delle impalcature che avevano aiutato ad elevarlo; se, con grande verosimiglianza, egli trasse partito dal metodo analitico per sciogliere i problemi ai quali aveva fiso lo sguardo, al metodo sintetico si appigliò per esporne le soluzioni.

63. - Come già avvertimmo, il VII è l'ultimo dei libri delle *Coniche*, che sia pervenuto sino a noi; dell'VIII conosciamo soltanto quanto ne dice Apollonio, nella prefazione generale dell'opera (p. 359) e nella dedica speciale al libro VII (p. 382), e quanto si può desumere dai quattordici lemmi, con cui Pappo intese facilitare l'intelligenza dei due ultimi libri delle *Coniche* (1). E poichè, come sappiamo, Apollonio afferma essere l'ultima sezione del suo trattato quasi un'appendice della penultima, così è stata formulata (2) ed accolta con favore (3) la congettura che in quella venissero determinate le coppie di diametri coniugati di una data conica soddisfacenti a condizioni assegnate; ammesso ciò, il libro VIII avrebbe racchiuse le soluzioni di problemi di cui il I suggeriva gli enunciati ed il VII insegnava le discussioni, ordinamento questo che corrisponde al costume dei geometri antichi di premettere alla soluzione di un problema la discussione di esso. Questa congettura forma la

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 990-1004.

(2) Halley, nella pref. alla sua divinazione del Libro VII delle *Coniche*.

(3) Zeuthen, op. cit., p. 404.

base di una divinazione del libro perduto (1) la quale, benchè sembri a noi eccellente, pure non impedisce di amaramente rimpiangere la scomparsa, probabilmente definitiva, dell'ultima parte del trattato apolloniano.

Per quanto, in conseguenza, ci si presenti monca la grande trattazione di APOLLONIO; per quanto numerose e profonde siano le alterazioni da essa certamente sofferte da parte di traduttori poco scrupolosi, quali erano gli Arabi, pure essa si conserva degna di ammirazione e di studio anche ai di nostri; a convincersene è sufficiente riflettere che, se si confronta la totatalità dei teoremi e dei problemi da essa insegnati con quanto si apprende dalle migliori opere recenti, non si tarderà a riconoscere che la differenza è ben piccola. Infatti, APOLLONIO considera le coniche prima, quasi di passaggio, nello spazio, ma poi di regola nel piano; in generale, come luoghi di punti, ma incidentalmente (sebbene non esplicitamente) come inviluppo di rette. Egli determina le proprietà comuni a tutte, ma non manca di additare quelle speciali ad ognuna; dalla sua grande opera si apprendono le relazioni di una conica con le rette secanti, tangenti o normali, con circoli o con altre coniche; ivi sono introdotte e applicate le nozioni di di diametri, assi e centro, esposte le teorie dei poli e delle polari, dei fuochi, delle evolute, delle podarie e vien sollevato un lembo di quel velo che allora celava la fertile e sconfinata pianura della teoria della proiettività, applicata alle curve di second'ordine. Si aggiungano, quindi, all'opera del geometra greco le nozioni di fuoco della parabola e di direttrici, e si avrà una teoria delle coniche che, nella sostanza, non differisce da una moderna esposizione geometrica della stessa dottrina.

Ma il trattato di APOLLONIO presenta, per converso, un assoluto distacco, nei metodi di dimostrazione, dai moderni trattati di geometria sintetica superiore. Di vero, chiunque studi a fondo quel trattato sarà obbligato a constatare la analogia profonda che esso presenta con un'esposizione delle proprietà delle curve di second'ordine mediante coordinate cartesiane: non soltanto le proprietà fondamentali

(1) Per maggiori particolari si ricorra al n. 8 dell'*Appendice* al presente libro.

(συμπτώματα), che ad APOLLONIO servono a discernere l'una dall'altra le tre curve, si traducono nelle equazioni canoniche delle medesime nel metodo di DESCARTES, ma molti dei ragionamenti esposti, quando siano tradotti nell'ordinario linguaggio algebrico, si riscontrano per equivalenti ad eliminazioni, risoluzioni di equazioni, trasformazioni di coordinate e simili (1). Già M. CHASLES (2) avvertì che le anzidette proprietà fondamentali disimpegnano, nel metodo di APOLLONIO, l'identico ufficio delle equazioni delle tre curve in quello di CARTESIO; ma, solo più tardi, l'HOUSEL (3) sviluppò completamente quest'osservazione; la quale, accolta con molto favore da R. BALTZER (4), trovò un oppositore gagliardo in S. GÜNTHER (5) (che ritenne assai più moderna l'origine del metodo delle coordinate) e più tardi uno strenuo propugnatore in H. G. ZEUTHEN (6). Comunque se ne giudichi la verosimiglianza, essa può servire di scorta e lume a chiunque voglia oggi penetrare nell'intimo del pensiero del Pergeo, e noi stessi (come il lettore si sarà avveduto) ne traemmo profitto, per rendere meno pesante e più perspicuo il riassunto dell'opera apolloniana che occupa le pagine precedenti, senza con ciò intendere di esprimere una piena ed incondizionata adesione ad idee che, appunto per essere geniali e seducenti, devono venire esaminate con estrema

(1) Lo abbiamo già rilevato in due occasioni, cioè nel testo e in una nota del n. 58 (p. 370).

(2) *Aperçu historique*, p. 18 e *Discours d'ouverture du Cours de géométrie supérieure* (*Traité de géométrie supérieure*, II ed., 1880, p. 568). Cfr. anche CANTOR, *Vorlesungen* I, p. 291: BRILL e NÖTHER, *Jahresb. d. deutschen Math.-Vereinigung*, III Bd. (1892-93), pag. 109.

(3) Nel lavoro già più volte citato.

(4) Berichte der k. sächs. Gesellschaft, Mathem.-Phys. Klasse, T. XVII, p. 1-6; v. anche PAPPO ed. HULTSCH, p. 1232.

(5) *Die Anfänge und die Entwickelungsstadien des Coordinatenprincips* (Abh. der naturforschenden Gesellschaft zu Nürnberg, T. VI). Questo lavoro venne tradotto in italiano ed inserito nel T. X (1877) del *Bull. di Bibl. e Storia*, ecc., p. 363-406.

(6) Oltre all'opera tante volte citata, si vegga la *Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument* (Bulletin de l'Acad. danoise des Sciences, 1888, p. 127-144), alla quale replicò il GÜNTHER nelle *Neue philologische Rundschau*, Jahrg. 1888, p. 394 e seg.

precauzione ed accolte fra i risultati definitivi soltanto in seguito ad uno studio pacato, fatto sotto l'egida costante di tutti i documenti esistenti.

64. - Nella classica esposizione che ci ha lasciata della teoria delle sezioni coniche APOLLONIO ci si rivela, tanto pensatore originale, quanto accorto e non volgare organizzatore delle investigazioni da altri condotte a buon termine, come uno scienziato, dunque, a cui il magnanimo desiderio di accrescere le nostre cognizioni non faceva porre in dimenticanza le esigenze di un proficuo insegnamento; onde è a ragione che il suo grande trattato (o tuttalmeno la prima metà di esso) fu nelle scuole greche e nelle arabe il testo generale per l'insegnamento geometrico superiore.

Orbene, questa tendenza a conciliare le modeste esigenze della scuola con le alte aspirazioni della scienza è confermata dall'esistenza di altre sue opere, le quali si riferiscono al *luogo resoluto* (ἀναλυόμενος) degli antichi, cioè — per dirlo con le parole di PAPPO (1), — a « quella certa speciale materia preparata ad uso di coloro che, avendo esauriti gli elementi comuni, vogliono addestrarsi nel risolvere problemi proposti mediante costruzioni di linee ». Questa importante collezione di opere abbracciava i *Luoghi solidi* di ARISTEO (L. I, 79), i *Dati*, i *Porismi* ed i *Luoghi superficiali* di EUCLIDE (L. II n. 20-29), l'opera sulle *Proporzioni* (L. II n. 50) di ERATOSTENE, finalmente di APOLLONIO, oltre le *Coniche*, gli scritti (2) di cui ora ci volgiamo a porgere qualche notizia.

Il primo tratta *Della sezione di ragione* (περὶ λόγου ἀποτομῆς); è diviso in due libri ed ha per iscopo di risolvere il problema seguente: « dati, in un piano, due rette, con un punto su ognuna, un punto esterno ed una ragione, condurre per questo una retta, che determini sulle due date rette a partire dai due dati punti due segmenti aventi una ragione eguale alla data ». PAPPO descrive accuratamente il numero delle questioni, dei casi di figura e dei diorismi contenuti in ciascuno dei due libri di APOLLONIO; e per essersi assoggettata a siffatta enumerazione, che potrebbe sembrare pedantesca ed inutile, egli merita la nostra gratitudine, giacchè permise ad EDOARDO BERNARD (1638-1697)

(1) PAPPO ed. HULTSCH. p. 634.

(2) Sono ricordati anche nel passo del FIHRIST riferito a p. 352.

di ravvisare in un manoscritto orientale della Biblioteca Bodleiana di Oxford (scritto nel 1235, ma copia di uno che risale circa all'820 dell'E. v.) la versione in arabo dell'opera di APOLLONIO. Il BERNARD ne intraprese una traduzione latina; ma, dopo averne compiuta meno della decima parte, rinunciò all'impresa, la quale venne poi condotta felice-

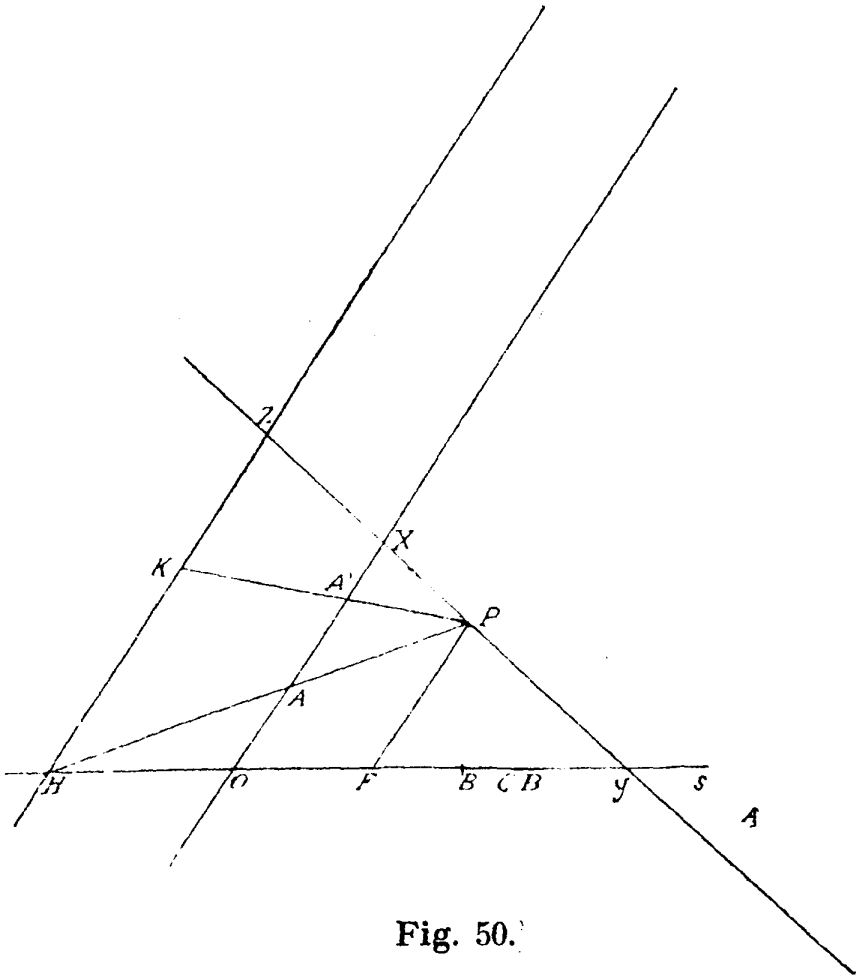


Fig. 50.

mente a termine nel 1706 da EDMONDO HALLEY (1) e permette a noi di riassumere l'analisi della soluzione del greco geometra nei termini seguenti:

Siano (fig. 50) r e s le rette date, A e B i punti dati in esse, e P il punto esterno; siano poi AA' e BB' due segmenti la cui ragione è eguale a quella che devono avere i

(1) *Apollonii Pergaei de Sectione rationis Libris duo ex Arabico Ms.^to Latine versi. Accedunt ejusdem de Sectione spatii Libri duo restituti.* Oxonii, MDCCVI.

segmenti cercati AX e BY. Chiamiamo H l'intersezione delle rette s e PA, ed F la projezione di P fatta su questa retta parallelamente a r; finalmente Z sia l'intersezione della retta PXY con la parallela condotta da H a r. Essendo $HZ : AX = PH : PA$ il rapporto di HZ ad AX è conosciuto; essendo dato, d'altronde, il rapporto di AX a BY (perchè è per ipotesi $= AA' : BB'$), è pure conosciuto quello di HZ a BY. Si potrà, quindi, determinare un segmento BC tale che sia $BF : BC = HZ : BY$; volendo effettivamente costruirlo si determini l'intersezione K di HZ con la retta PA' e si noti che in conseguenza $HZ : AX = HK : AA'$; ma $AX : BY = AA' : BB'$ dunque $HZ : BY = HK : BB'$; epperò per determinare il segmento BC, mediante la costruzione di una quarta proporzionale, servirà la relazione $PF : BC = HK : BB'$. Trovato BC, si osservi che, essendo $HZ : PF = BY : BC$ e $HZ : PF = HY : FY$ si avrà $BY : BC = HY : FY$ e $BY - BC : BC = HY - FY : FY$ cioè $CY : BC = HF : FY$. Dunque $CY \cdot FY = BC \cdot HF$; d'altronde $FY - CY = FC$; dunque per trovare il punto Y basta determinare sul prolungamento del segmento FC un punto Y tale che il rettangolo delle sue distanze dagli estremi del segmento sia eguale al rettangolo dato $BC \cdot HF$. Il problema della sezione di ragione è, dunque, ridotto ad uno di « applicazione di area »: e di tale riduzione è suscettibile comunque siano collocati i punti dati [soltanto potrà accadere che invece di un'*ellisse* si abbia un'*iperbola* (cfr. p. 42)], onde esso è virtualmente risoluto.

Altre due opere di APOLLONIO hanno per iscopo la risoluzione di problemi analoghi a quello testè considerato; esse però andarono perdute nell'originale ed ancor non ne venne scoperta alcuna traduzione; la loro esistenza è affermata ed il loro contenuto delineato da PAPPO in uno squarcio (1) che crediamo opportuno riportare qui, se non altro nella speranza che, cadendo sotto gli occhi di qualche orientalista, lo spinga e lo aiuti a collocarsi allo stesso livello di ENRICO BERNARD:

Sulla sezione di spazio (περὶ χωρίου ἀποτομῆς) (2) esistono a vero dire due libri, ma anche in questi si trova un problema

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 640-644.

(2) Ricordata anche da ERONE (*Opera* ed. SCHÖNE, T. III, p. 163-7).

unico suddiviso in due. E quest'unica proposizione è simile assai a quella trattata nei libri precedenti (cioè in quelli *Sulla sezione di ragione*) e ne differisce per ciò che, mentre in quelli era necessario trovare due segmenti rettilinei di dato rapporto, in questa essi devono comprendere un dato rettangolo. Il problema in questione enunciasi dunque così: Per un punto dato condurre una retta che tagli, da due rette date, due segmenti, contati da due punti dati su queste rette, i quali comprendono un rettangolo eguale ad un dato. Questa proposizione pure abbraccia molte figure. Il I Libro della *Sezione di spazio* comprende 24 casi di figure, 7 luoghi, 7 diorismi di cui 4 sono relativi a massimi e 3 a minimi: massimo si ha nel secondo caso del primo luogo, nel primo del secondo, nel secondo del quarto e nel terzo del sesto, minimo nel terzo caso del terzo luogo, nel quarto del quarto e nel primo del sesto. Invece il II Libro della *Sezione di spazio* comprende 13 luoghi, 60 casi e tanti diorismi quanto il primo. Il I Libro contiene 48 teoremi ed il secondo 76.

Si trovano in seguito due libri *Sulla sezione determinata* (περὶ διωρισμένης τομῆς) ove, a somiglianza dei precedenti, si trova una proposizione unica, ma divisa in due parti e che si può enunciare come segue: Secare in un punto una data retta indefinita per modo che, dei segmenti compresi fra questo punto e alcuni punti dati sulla retta, il quadrato di uno oppure il rettangolo di due abbia un rapporto conosciuto o col quadrato di un altro di quei segmenti o col rettangolo di un altro e di un segmento esterno o finalmente col rettangolo di due fra quei segmenti. Anche per trattare questa proposizione fa mestieri adoperare un grande numero di parole, perchè essa si suddivide in molte ed ha diorismi complicatissimi. Il I Libro abbraccia 6 problemi, 16 epitagmi (disposizioni di punti), 5 diorismi, quattro de' quali si riferiscono a massimi ed uno a minimo: massimo si ha nel secondo epitagma del secondo problema, nel terzo del quarto, nel terzo del quinto e nel terzo del sesto: minimo nel terzo epitagma del terzo problema. Il II Libro della *Sezione determinata* contiene 3 problemi, 9 epitagmi e 3 diorismi, di cui sono di minimo quelli che s'incontrano nel terzo epitagma del primo problema e nel terzo del secondo e di massimo nel terzo del terzo. Nel I Libro si trovano 27 lemmi e 24 nel secondo. Nei due libri della *Sezione determinata* si hanno in tutto 83 teoremi.

A queste scolorite indicazioni PAPPO unisce molte proposizioni che egli destinava a facilitare l'intelligenza del testo (1)

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 684-704 lemmi utili per l'intelligenza della *Sezione di ragione* e della *Sezione di spazio*; p. 704-774 per la *Sezione determinata*

e che prestarono un inestimabile aiuto ai numerosi geometri che si provarono a divinare quelli scritti di APOLLONIO (1).

65. - Ora fa mestieri che ci occupiamo di altre tre opere del medesimo autore che, al dire di PAPPO, facevano parte, come quelle di cui parlammo nel num. prec., dell' antico *luogo resoluto*, ma di cui, come della maggior parte delle anzidette, è perduta ogni traccia. E, forse, perfino il ricordo ne sarebbe stato completamente cancellato, ove il prelodato commentatore non avesse lasciato una descrizione del loro contenuto, nonchè un certo numero di proposizioni destinate ad agevolarne lo studio. A noi dunque non rimane che

---

(1) Per la *Sezione di spazio* si vegga, oltre all'opuscolo dianzi citato dell'HALLEY: A. DIESTERWEG, *Die Bücher des Apollonius von Perga De Sectione spatii.* Elberfeld, 1827, e A. RICHTER, *Des Apollonius von Perga zwei Bücher vom Raumschnitt.* Halberstadt, 1828). E per la *Sezione determinata:* A. ANDERSON, *Supplementum Apollonii redivivi.* Parigi, 1612: W. SNELLIUS, *Apollonius Batavus seu exsuscitata Apollonii Geometria.* Lugd. Bat., 1698, cfr. *The two Books of Apollonius Pergaeus concerning determinate section as they have been restored by* WILLEBRODUS SNELLIUS *by* J. LAWSON, *to which are added the same two Books by* WILLIAM WALES. London, MDCCLXXII: R. SIMSON, *Opera quaedam reliqua.* Glasgow, 1776, p. 59-313: A. DIESTERWEG, *Die Bücher des Apollonius von Perga De Sectione determinata.* Mainz, 1822. Lo scritto dello SNELLIO, il quale abbraccia tutte tre le sezioni, fu riassunto dall'HÉRIGONE nel T. I, Parigi, 1634, del suo celebre *Cursus Mathematicus.*

Delle varie soluzioni che ricevettero i problemi di APOLLONIO trattarono anche L. F. OFTERDINGER, nella memoria *Ueber die fünf Aufgaben des Apollonius* (Jahrsheft des Vereins f. Math. und Naturwiss. in Ulm, 1888, p. 21-38), e F. VON LÜHMANN, nel lavoro intitolato: *Die sectio rationis, sectio spatii und sectio determinata des Apollonius nebst einigen verwandten geometrischen Aufgaben.* Königsberg, 1882: cfr. anche ZEUTHEN, op. cit., Cap. V. — M. CHASLES dal canto suo ha notato che i problemi stessi sono suscettibili di soluzioni semplici ed uniformi, quando ad essi si applichino i concetti ed i metodi della moderna geometria; e tale osservazione fu sviluppata più tardi tanto da questo grande geometra (*Traité de géom. sup.,* II ed., 1880, p. 187), quanto da H. HANKEL (*Die Elemente der proj. Geometrie,* Leipzig, 1875, p. 128 e seg.). — Riguardo al legame che si può stabilire fra il problema della sezione determinata e la moderna teoria dell'involuzione, si vegga ZEUTHEN, op. cit., p. 197-99.

lasciare a lui la parola, aggiungendovi del nostro soltanto qualche chiarimento:

Vengono poi due libri *Sui contatti* (περὶ ἐπαφῶν), nei quali sembrano trovarsi parecchie proposizioni: noi però le compendieremo in una unica come segue: " data di posizione una terna qualunque composta di punti, rette e circonferenze, condurre una circonferenza che passi pei punti dati supposto che fra i dati ci siano dei punti, e tocchi tutte le linee date ". Siccome nell'ipotesi di essa entrano parecchi dati simili e dissimili fra loro, così è necessario dedurre separatamente dieci proposizioni differenti, tante essendo le terne che si possono formare con tre generi dissimili. Possono infatti essere dati: I. o tre punti; II. o tre rette: III. o due punti ed una retta: IV. o due rette ed un punto: V. o due punti ed un circolo: VI. o due circoli ed un punto: VII. o due rette ed un circolo: VIII. o due circoli ed una retta: IX. o un punto, una retta ed un circolo: X. o tre circoli. Di questi i primi due sono dimostrati nel IV Libro degli *Elementi*, perciò ci esoneriamo dal descriverli: infatti, quando sono *dati tre punti* non posti in linea retta, il problema non differisce da quello di circoscrivere un circolo ed un dato triangolo e, quando sono *date tre rette non parallele nè concorrenti in uno stesso punto*, il problema è lo stesso d'inscrivere un cerchio in un dato triangolo: che se poi sono date *due rette parallele tagliate da una terza* si ha un problema incluso nel II e che vien trattato prima d'ogni altro. Nel primo libro s'incontrano sei problemi; i due rimanenti, cioè quelli in cui sono dati *due rette ed un circolo* oppure *tre circoli*, sono trattati da soli nel secondo libro, molte essendo le posizioni rispettive che possono presentare i circoli e le rette, ed inoltre essi problemi esigono molti diorismi.... Nei due libri di APOLLONIO si leggono 21 lemmi e 60 teoremi (1).

I 16 + 7 lemmi che PAPPO ci lasciò intorno ai due libri *Sui contatti* (2) resero possibile la divinazione dell'opera perduta, alla quale si accinsero parecchi geometri insigni (3).

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 644-648.

(2) Ivi, p. 820-852.

(3) SNELLIO, *Apollonius Bathovus, seu resuscitata Apollonii Pergaei geometria*, Lugd. Bat., 1597; VIETA, *Apollonius Gallus seu exsuscitata Apollonii Pergaei* περὶ ἐπαφῶν *geometria*, Parigi, 1600, lavoro che fu compendiato da M. CANTOR (*Vorlesungen* II, p. 590); MARINO GHETALDI, *Supplementum Apollonii Galli seu exsuscitata Apollonii Pergaei tactionum geometricarum geome-*

D'altronde il problema principale risolto (per primo?) da APOLLONIO, quello cioè del circolo tangente a tre altri, possiede un'importanza intrinseca permanente, onde venne reputato degno di studio anche da persone che non eransi proposte di penetrare nell'intimo del pensiero dell'antico geometra (a provarlo basti ricordare i nomi di EULERO (1707-1783), di FUSS (1755-1816) e di GERGOENE (1771-1859)) e da molti anni venne ritenuto degno di venir esteso allo spazio (1).

66. - Più interessante dei precedenti è il passo (probabilmente estratto dai *Luoghi piani* di APOLLONIO) della *Collezione* dedicato alla penultima delle opere di APOLLONIO di cui resta da parlare (2). Ivi infatti si legge (3):

I luoghi in generale sono: in parte ἐφεκτικοί (fissi), conformemente a quanto dice APOLLONIO nell'introduzione dei suoi elementi, che cioè un punto è luogo (posizione) di un punto, una linea di una linea, una superficie di una superficie e un solido di un solido: in parte διεξοδικοί (progredienti) dimodochè egli dice che una linea è luogo di punti, una superficie di linee e un solido di superficie: in parte finalmente ἀναστροφικοί (avvolgentesi), cosicchè egli dice che una superficie è un luogo di punti e un solido di linee.... *Piani* si chiamano i luoghi di cui ora trattiamo ed in generale quelli che risultano da linee rette e circolari, *solidi* le sezioni coniche cioè o parabole o ellissi od iperbole, finalmente *lineari* tutte le linee che non sono rette, nè circolari, nè di quelle che ora chiamammo sezioni coniche... Certi antichi nel comporre gli elementi ebbero

---

tricarum pars reliqua, Venezia, 1607. Cfr. *The two Books of Apollonius Pergaeus concerning Tangencies as they have restored by Franciscus Viete and Marinus Ghetaldus, by* J. LAWSON (II ed., London, MDCCLXXI). Inoltre J. W. CAMERER, *Apollonius de tactionibus quae supersunt*, Gotha, 1796: P. GRUSON, *Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga von den Berührungen* in appendice a *Geometrische Analysis von* JOHN LESLIE *aus dem Engl. übersetzt*. Berlin, 1822, e ZEUTHEN, op. cit., p. 380-83. Finalmente si possono citare i lavori della Scuola napolitana di cui ho parlato a p. 61-66 del mio lavoro dianzi ricordato relativo a NICOLA FERGOLA.

(1) FERMAT, *De conctactibus sphaericis*, 1679, Oeuvres, T. I, Paris, 1891, p. 52-69 e T. III, Paris, 1896, p. 149-66.

(2) Si ricordi che in tali investigazioni APOLLONIO venne forse preceduto da ERMOTIMO da Colofone (v. p. 128).

(3) PAPPO ed. HULTSCH, p. 660-670.

riguardo all'ordine dei luoghi piani: i più recenti non ne tennero conto ed aggiunsero altri luoghi piani come se il loro numero non fosse infinito: orbene io porrò dopo quelli che furono aggiunti poi, prima gli altri con ordine, compendiandoli in quest'unica proposizione:

I. Si conducano due rette o da un punto dato o da due punti differenti, le quali o coincidano o siano parallele o formino un dato angolo, e di più o abbiano un dato rapporto o comprendano un dato rettangolo; allora, se l'estremo di una di quelle rette descrive un luogo piano dato di posizione, l'estremo dell'altro descriverà pure un luogo piano dato di posizione, dello stesso genere o non dell'altro, e disposto allo stesso modo od in modo differente (rispetto alla retta?) (1). Queste varie cose si verificano a norma delle diversità delle ipotesi. Con questi (teoremi locali) si accordano i tre aggiunti da principio da CARMANDRO.

II. Se di una retta di grandezza data (2) è dato un estremo, l'altro estremo descriverà una circonferenza concava data di posizione.

III. Se da due punti dati si spiccano due rette facienti fra loro un dato angolo, il punto ad esse comune toccherà una circonferenza data di posizione.

IV. Se di un triangolo dato di grandezza la base è data in grandezza e posizione, il suo vertice descriverà una retta data di posizione. Si hanno poi altri di questo genere.

V. Se un estremo di una retta data di grandezza è parallela ad una retta data di posizione, l'altro estremo percorrerà pure una retta data di posizione.

VI. Se si conducono da un certo punto a due rette di posizione date delle rette parallele o concorrenti su una stessa retta o sotto angoli dati, ed o esse hanno fra loro un dato rapporto oppure è data la somma di una di esse con quella che coll'altra ha un dato rapporto: quel punto descriverà una retta data di posizione (3).

VII. Se sono date di posizione quantesivogliano rette e ad esse si conducono da un certo punto delle rette sotto dati angoli, e la somma dei due rettangoli di cui uno ha per lati una

---

(1) Il lettore moderno ravviserà indubbiamente in questo teorema delle tracce sicure di metodi di trasformazioni geometriche; altrettanto può ripetersi riguardo ad alcuni dei seguenti.

(2) Nella traduzione di COMMANDINO sta scritto *una retta di posizione data;* l'errore fu rilevato e corretto da FERMAT, *Oeuvres* (ed. TANNERY et HENRY, Paris, 1891), T. I, p. 19 e T. III, p. 18.

(3) Come notò lo ZEUTHEN (l. c,. p. 207), questa proposizione equivale all'equazione di una retta in coordinate cartesiane.

retta data e una di quelle condotte e l'altro un'altra retta data e un'altra di quelle condotte, è eguale al rettangolo di una terza retta data e di una terza delle condotte *et sic in caeteris* (1); quel punto sta su una retta data di posizione.

VIII. Se da un punto si conducono delle rette sotto angoli dati a delle parallele date di posizione, e se esse intercettano su questo dei segmenti da punti dati i quali o abbiano un dato rapporto o comprendano un dato spazio siano oppure tali che la somma o la differenza di figure di data specie costruite sulle rette condotte sia eguale ad un dato spazio: quel punto descriverà una retta data di posizione.

Il secondo libro contiene questi teoremi:

I. Se da due punti dati si conducono delle rette concorrenti i cui quadrati differiscano per un dato spazio, il punto di concorso di queste rette descriverà una retta data di posizione.

II. Se invece quelle rette stanno in un dato rapporto, il punto di concorso descriverà una retta od una circonferenza data di posizione (2).

III. Data di posizione una retta ed un punto su di essa dal quale sia condotta una retta limitata, dall'estremo della quale sia condotta una retta perpendicolare alla retta data di posizione: allora se il quadrato della retta che si è condotta eguaglia il rettangolo di una data retta e del segmento intercetto o fra la perpendicolare ed il punto dato o fra la stessa ed un punto dato sulla retta data di posizione: l'estremità della prima retta che si è condotta toccherà una circonferenza data di posizione.

IV. Se da due punti dati si conducono due rette concorrenti e se il quadrato dell'una è rispetto al quadrato dell'altra maggiore che in ragione per un dato spazio, il punto di concorso di queste rette toccherà una circonferenza data di posizione.

V. Se da quantisivogliano punti si conducono delle rette ad uno stesso punto, e se delle figure di date specie descritte su tutte sono eguali ad un dato spazio, quel punto descriverà la periferia di un circolo dato di posizione.

(1) Con queste parole l'HULTSCH (op. cit., p. 667) tentò esprimere il concetto espresso dalle parole καὶ λοιπὸν ὁμοίως, il cui senso è vago e non permette di formarsi un concetto completamente esatto dell'estensione delle ricerche di APOLLONIO: cfr. *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 24.

(2) Sappiamo (v. p. 134) che questa proposizione era nota, almeno in parte, prima di APOLLONIO.

VI. Se da due punti dati si conducono delle rette, e dal loro punto di concorso si conduce una parallela ad una data retta di posizione la quale tagli da un'altra retta data di posizione un segmento di cui un estremo è dato, se la somma delle figure date di specie costruite sulle rette convergenti eguaglia il rettangolo di una retta e del segmento predetto: il punto di concorso delle rette convergenti percorrerà la periferia d'un circolo dato di posizione.

VII. In un circolo dato di posizione sia dato un punto, e per questo si conduca una retta su cui si prenda un secondo punto esterno al circolo, e sia il quadrato del segmento compreso da questo punto e dal punto interno al circolo eguale al rettangolo di tutta questa retta e della parte di essa esterna al circolo o soltanto il quadrato o la somma di questo e del rettangolo compreso fra i due segmenti interni: allora il punto esterno descriverà una retta data di posizione.

VIII. Se questo punto descrive una retta data di posizione, mentre il circolo non si suppone dato, i punti dalle due parti del punto dato, descriveranno la periferia di un medesimo circolo dato di posizione.

I due libri sopra i *Luoghi piani* contengono 147 teoremi ossia diagrammi e 8 lemmi.

Coll'aiuto degli otto lemmi che PAPPO ci ha lasciati (1) intorno all'opera di APOLLONIO testè discorsa, tre celebri geometri, FERMAT (1608-1665), F. SCHOOTEN (1615 circa-1661) e R. SIMSON ne recarono a buon fine alcune divinazioni, le quali, se non valgono a farci dimenticare la scomparsa di essa dalla letteratura geometrica, rappresentano, senza dubbio, un notevole acquisto fatto dalla matematica (2).

67. - L'ultima delle opere di APOLLONIO ricordata da PAPPO s'intitola Περὶ ῥοπῶν (*Inclinationum libri duo*): essa ha un tema che già vedemmo toccato da IPPOCRATE da Chio (v. p. 90) ed ARCHIMEDE (p. 312), avendo essa per oggetto la effettuazione mediante retta e circolo di speciali inserzioni. Il contenuto di essa è schizzato da PAPPO come segue:

Si dice che s'inclina o si dirige una retta verso un punto se essa prolungata raggiunge questo punto. Ora, essendo il problema generale questo:

I. Date di posizione due linee collocare fra esse una retta di grandezza data che passi per un punto dato.

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 852-864.

(2) V. *Appendice* al presente libro, n. 12-14.

ed avendo i particolari che si riferiscono a quella retta ipotesi differenti, parte piane. parte solide e parte anche lineari. fra le piane vennero scelte quelle di più vasta utilità e furono risoluti questi problemi:

II. Dati un semicerchio ed una retta perpendicolare alla sua base, oppure due semicerchi con le basi sulla stessa retta, collocare fra queste due linee una retta di grandezza data diretta verso un angolo del semicerchio.

III. Dato un rombo ed un suo lato prolungato, inserire nell'angolo esterno una retta di data grandezza che tenda all'angolo opposto.

IV. Dato di posizione un circolo, inserire in esso una corda di data grandezza che tenda ad un punto dato.

Dei quali problemi la ripartizione (nei due libri di APOLLONIO) è la seguente: nel I Libro è trattato quello sul semicircolo, che ha 2 casi, infine quello sul rombo che ne ha pure 2; invece nel II il solo problema dei due semicircoli, la cui ipotesi presenta 10 casi; e vi sono parecchie suddivisioni dioristiche in base alla grandezza data della retta. I due libri *Delle inserzioni* contengono 125 diagrammi o teoremi e 28 lemmi (1).

I 10 + 24 lemmi lasciati da PAPPO (2) intorno all'opera testè descritta abilitarono a restituirla con molta verosimiglianza (3).

68. - Ma con ciò non abbiamo ancora finito di delineare il quadro dell'opera geometrica di APOLLONIO.

Per completare il nostro disegno fa mestieri, anzitutto, tener presente che IPSICLE (v. p. 270), nella prefazione al preteso *XIV Libro degli Elementi di Euclide*, parli di un lavoro del Pergeo, avente per tema il confronto fra il dodecaedro e l'icosaedro regolari inscritti nella medesima sfera.

Rileviamo poi come SIMPLICIO (v. L. V, n. 33) attribuisca

---

1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 670-672.

2) Ivi, p. 770-820.

3) Le principali divinazioni sono dovute a MARINO GHETALDI, A. ANDERSON, C. HUYGENS e S. HORSELEY: di esse trattano i numeri 9-11 dell'*Appendice* al presente libro. Per altri particolari si ricorra a: V. FLAUTI, *Su due libri di Apollonio Pergeo detti delle inclinazioni e sulle diverse restituzioni di essi* (Mem. della Società ital. delle Scienze, T. XXV, Parte I, p. 223-236); e riguardo alle generalizzazioni che i problemi di APOLLONIO ricevettero nella Scuola napolitana, si vegga il mio precitato lavoro su NICOLA FERGOLA (p. 38-42).

al geometra di Perga una quadratura nel cerchio col mezzo di una curva speciale denominata *compagna della concoide* (1); d'altronde PAPPO e PROCLO (2), nelle loro scritture tante volte da noi sfruttate, alludono ad un opera del Pergeo Περὶ τοῦ κοχλίου il cui argomento sembra fosse una teoria geometrica di una curva a doppia curvatura generabile in modo simile alla spirale d'ARCHIMEDE (3); avvicinando l'una all'altra tali notizie e tenendo presente che il problema della costruzione della tangente all'elica si riduce a quello di rettificare un arco circolare si sarebbe indotti a pensare che la quadratrice d'APOLLONIO non differisse dall'elica cilindrica.

Inoltre un frammento recentemente pubblicato (4) di ANTEMIO DI TRALLE (il celebre meccanico, della cui eccezionale abilità è monumento imperituro la ricostruzione della Chiesa di Santa Sofia a Costantinopoli, iniziata nel 582 sotto l'impero di GIUSTINIANO), ricorda un lavoro del Pergeo *Sopra gli specchi ustori* (Περὶ πυρίων), il quale, ove si ritrovasse, permetterebbe forse di decidere se gli antichi del periodo greco-alessandrino conoscevano il fuoco della parabola (cfr. p. 371).

Ancora: PROCLO stesso a più riprese tiene parola di modificazioni che il Pergeo avrebbe arrecato al metoto didattico di EUCLIDE (5); e precisamente egli avrebbe alterate le definizioni di linea e di angolo (PROCLO-TAYLOR I, p. 125 e 142), tentato di dimostrare taluni assiomi (Ib. II, p. 5 e 13) e risolti diversamente i problemi (che nel I Libro degli *Ele-*

---

(1) Quale sia tale curva ci è ignoto; SIMPLICIO la dice identica a quella di NICOMEDE; ma siccome di questo geometra (v. n. 71) non ci è noto alcun contributo a quel celebre problema così tale notizia serve ben poco a chi voglia identificare la linea in questione; comunque la priorità di APOLLONIO nell'invenzione di essa è difficilmente contestabile.

(2) PAPPO ed. HULTSCH. p. 1110 e PROCLO-TAYLOR, I, p. 129. Cfr. APOLLONIO ed. HEIBERG. II, p. 117-18.

(3) P. TANNERY, *Quelques fragments d'Apollonius de Perge* (Bull. des sc. math. et astr., 2e Série, T. V, 1881, I Partie, p. 124-136); *L'Arithmétique des Grecs dans Pappus* (Mém. de la Soc. de Bordeaux, 2e Série, T. IV, 1832, p. 352); *La Géométrie grecque*, p. 166.

(4) C. BELGER in *Hermes*, Vol. XXI, 1881, p. 261-284.

(5) APOLLONIO ed. HEIBERG, T. II, p. 133-137.

lementi portano i numeri 10, 11 e 23) di bisecare una retta di condurre da un punto di una retta la perpendicolare alla retta stessa e di costruire un angolo eguale ad un dato (Ib. II, p. 79, 82 e 128). L'analisi accurata di questi passi dell'antico commentatore condusse (1) a congetturare che il geometra di Perga avesse intrapresa una nuova edizione degli *Elementi* di EUCLIDE, nella quale l'ordine preferito dal vecchio Alessandrino sarebbe stato surrogato con altro meno artificoso, ed alla quale egli avrebbe premesso certi prolegomeni per spiegare e discutere postulati ed assiomi. Ove nuovi documenti potessero venir citati a sostegno di questa ipotesi (2), APOLLONIO avrebbe la gloria di avere (per primo?) coraggiosamente battuta una strada che, dopo essere stata abbandonata dopo di lui e per molti secoli, fu percorsa di nuovo dai moderni coll'illusione di essere innovatori; ad ogni modo, anche se le citazioni di PROCLO si riducessero alle modeste proporzioni di estratti delle lezioni orali di APOLLONIO, rimarrebbe definitivamente assodato che, fin dai tempi che immediatamente seguono EUCLIDE, il sistema da lui seguito nell'esporre i principi della geometria non era ritenuto come d'indiscutibile perfezione (3).

Da ultimo, fra le soluzioni del problema di Delo che EUTOCIO ha conservate nel suo prezioso commento al II dei libri di ARCHIMEDE *Su la sfera ed il cilindro* havvi la seguente che viene attribuita ad APOLLONIO: (4)

---

(1) Cfr. i lavori di P. TANNERY citati nella nota (3) pag. prec.

(2) Che tale conclusione sia ancora lontana dal momento di perdere il carattere ipotetico è opinione che noi avevamo anche prima di trovarla espressa dall'HEIBERG (*Philologus*, T. XLIII, p. 488-89).

(3) A questo proposito mi piace riferire la seguente osservazione giustissima del TANNERY: "Nous sommes très-tentés en thèse général de les (*cioè* les courants intellectuels auquels ont dû obéir les mathématiciens de l'antiquité) considérer comme ayant, à très peu près, suivi un sentier unique, une seule direction, celle d'Euclide. Il y a là une illusien produite par ce qui c'est passé seulement à l'époque de la décadence, sous l'empire romain „. *L'Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie*. Mem. de la Soc. de Bordeaux, 2ª Série, T. IV, 1882. pag. 164.

(4) ARCHIMEDE ed. HEIBERG, III, p. 76-78: APOLLONIO ed. HEI-

Le due rette fra le quali bisogna inserire due medie proporzionali siano (fig. 51) BA e AΓ facenti in A un angolo retto. Centro B e raggio (eguale a) AΓ si descriva una circonferenza KΘΛ e poi centro Γ e raggio (eguale a) AB si descriva una seconda circonferenza MΘN la quale seghi in Θ la circonferenza KΘΛ, e si conducano ΘA, ΘB, ΘΓ. BΓ sarà allora un parallelogramma rettangolo e AΘ ne sarà una diagonale. Si bisechi BΘ in Ξ e col centro in Ξ si descriva una circonferenza che seghi AB e AΓ prolungate in Δ e E per modo che questi punti siano (allineati con Θ ed) equidistanti da Ξ.

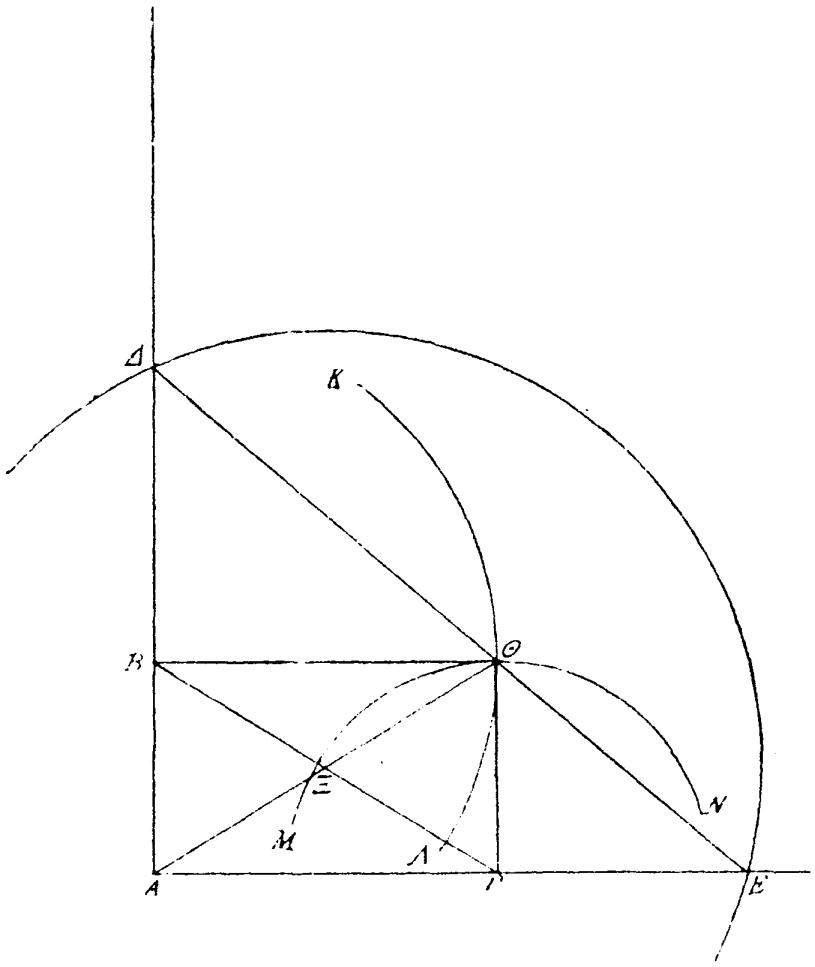


Fig. 51.

Le medie cercate sono i segmenti BΔ e ΓE; lo si dimostra facilmente considerando alcune coppie di triangoli simili, mediante un ragionamento che EUTOCIO espone a proposito

---

BERG, II, p. 104-5. Cfr. anche REIMER, *Historia* citata, p. 124 e MONTUCLA, *Histoire des recherches*, ecc., p. 236. Cfr. ZEUTHEN, op. cit., p. 259.

della soluzione del problema di Delo data da ERONE e FILONE e che noi faremo conoscere trattando nel L. IV, trattando di questi geometri.

69. - Di un altro lavoro semi-aritmetico di APOLLONIO abbiamo già (p. 233) incidentalmente annunziata l'esistenza; ne è scopo una generalizzazione, o meglio un ulteriore sviluppo, di quella teoria che, fondata da PITAGORA, coltivata da TEETETO e perfezionata da EUCLIDE, si può oggi agevolmente studiare nel X Libro degli *Elementi*. Per qual cammino il geometra di Perga abbia raggiunto tale intento ci è ignoto, perchè, malgrado una rapida citazione di PROCLO (1), lo scritto appolloniano era caduto in completo oblio, allorquando, verso la metà del secolo scorso, un erudito di grande valore credè ravvisare in un antico manoscritto arabo indicazioni del contenuto di esso così esatte che le ritenne sufficienti per ricostruire il lavoro perduto (2). Ma, prima di ammettere l'identità di materia fra l'originale e la divinazione, sarebbe indispensabile togliere un dubbio chè si affaccia, quello, cioè, di sapere se, nel manoscritto citato, sia indicato soltanto *una maniera* per accrescere i risultati ottenuti da EUCLIDE, oppure proprio *la maniera* preferita da APOLLONIO (3).

Che, d'altronde, APOLLONIO, benchè ritenuto *geometra per eccellenza*, non abbia trascurata la scienza dei numeri, avremo occasione di vedere nell'ultimo Libro della presente

---

(1) PROCLO-TAYLOR, I, p. 106. Da PROCLO si apprende che il lavoro di APOLLONIO era così elevato che doveva escludersi da quelle cose che fanno parte degli elementi. Si aggiunga che mentre, al dire di PROCLO, gl'irrazionali euclidei si chiamavano *ordinati* (τεταγμένος), quelli di APOLLONIO si dicevano *non ordinati* (ἄτακτος).

(2) F. WOEPCKE, *Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationelles d'après les indications d'un manuscrit arabe* (Comptes-rendus, T. XXXVI, 1853, p. 298 e Mém. prés. à l'Acad. des Sciences, T. XIV, 1856, p. 543-568). V. anche APOLLONIO ed. HEIBERG, T. II, p. 119-124.

(3) A chiarir meglio il nostro dubbio aggiungiamo che le ricerche di EUCLIDE si prestano a due generalizzazioni immediate: essendosi, infatti, l'autore degli *Elementi* occupato di *binomi* i cui termini sono irrazionali quadratici, per seguire le sue orme o si possono considerare i *polinomi* di analoga com-

storia, come nel seguente vedremo che egli non sdegnò far servire il possente suo ingegno alla spiegazione matematica dei fenomeni naturali (1). Questi fatti stanno in appoggio dell'opinione che il nostro geometra possedesse quella versatilità d'ingegno, quella poliedricità d'intelligenza, che, non a torto, vengono ritenute come doti caratteristiche del genio: niuna meraviglia, adunque, se, allorquando il nostro secolo assistette attonito al rinnovellarsi di tutta le geometria pura, grazie alle idee fecondissime amesse da I. STEINER, per trovare un personaggio che potesse venire a lui paragonato per originalità di vedute e vastità di concezioni, si dovette ricorrere a colui che diede rinomanza imperitura e mondiale alla piccola città di Perga e segnò l'apogeo della geometria greca.

---

posizione, oppure si può ampliare il campo dell'aritmetica, coll'introdurvi i radicali con indici superiori al secondo: quali delle due cose abbia preferito fare APOLLONIO o se altre estensioni abbia immaginate, sono questioni tuttora aperte.

(1) Nel Libro III, n. 5, esporremo anche gli enunciati di due teoremi di geometria elementare che TOLOMEO attribuisce ad APOLLONIO.

CAPITOLO VI.

I geometri minori nel periodo Greco-Alessandrino.

70. - In un'èra, quale è quella in cui vissero ed insegnarono EUCLIDE, ARCHIMEDE ed APOLLONIO, il campo della ricerca geometrica doveva rivelarsi così ubertoso in frutti succulenti e gustosi che — date anche le condizioni intellettuali e politiche dell'epoca — dovevano pullulare attorno a quei sommi scienziati pensatori più modesti, prefiggentisi almeno di abbellire con un fregio o di assodare con una colonna il grandioso edificio che giganteggiava dinanzi ai loro occhi. Ed infatti (anche prescindendo da ERATOSTENE ed IPSICLE, dei quali già trattammo), le lettere che accompagnano le produzioni superstiti di ARCHIMEDE ed APOLLONIO ci tramandarono i nomi di CONONE da Samo e DOSITEO, amici del Siracusano, di EUDEMO da Pergamo amico del Pergeo, di NAUCRATE (che la fantasia degli Arabi trasformò nel padre di EUCLIDE; v. p. 191), di NICOTELE, di TRASIDEO, di CARMANDRO, uomini tutti che dovevano essere infiammati di nobile ardore per le investigazioni geometriche. Ma dei risultati a cui essi arrivarono non ci è giunta alcuna notizia; e di quanti altri neppure il nome si sarà sottratto all'ingiuria del tempo o all'obliosa indifferenza dei posteri! Havvi, però, un piccolo gruppo di investigatori di cui alcuni lavori geometrici ci pervennero per via più o meno indiretta e che l'odierna critica storica assegna appunto al

periodo che andiamo studiando: di tali lavori raccoglieremo ora con religiosa cura i residui, che appaiono siccome le reliquie di un immenso naufragio.

Nicomede.

71. - NICOMEDE, il geometra di cui anzitutto ci occuperemo, visse probabilmente fra il 250 ed il 150 a. C. (1), e deve la sua celebrità all'invenzione di una curva, che si suole chiamare da noi *concoide* (da taluni *cocloide*), mentre i Greci l'indicavano con l'appellativo κογχοειδὴς γραμμή (da κόγχε *conchiglia*). La sua genesi, la sua costruzione e le sue proprietà vengono esposte da PAPPO nel modo seguente:

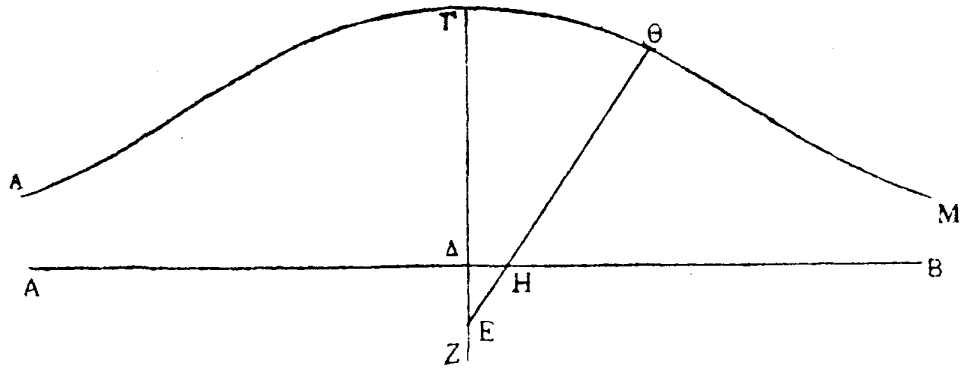


Fig. 52.

Si consideri una retta AB (fig. 52) e ad essa una perpendicolare ΓΔZ; si prenda su questa ad arbitrio un punto E; e, tenendo fisso questo punto, si faccia scorrere la retta ΓΔEZ sulla retta ΑΔB attorno al punto E, per modo che il punto Δ si muova sempre sulla AB. Eseguendo il movimento dalle due parti della perpendicolare, si vedrà il punto Γ descrivere una certa linea ΑΓΜ dotata delle seguenti proprietà. Condotta una retta qualunque HΘ dal punto E alla linea, la porzione di essa intercetta

(1) BRETSCHNEIDER, loc. cit., p. 180; M. CANTOR, *Vorlesungen*, I, p. 35; P. TANNERY, *Notes pour l'histoire des lignes et des surfaces courbes dans l'antiquité*, § IX (Bull. des sc. math. et astr., T. VIII, 1 Partie, 1884). Dall'opinione da noi adottata non discordano il REIMER (loc. cit., p. 161), che fa vivere NICOMEDE nel II sec. a. C., e MONTUCLA (*Histoire des recherches*, ecc., p. 180), che dice avere egli fiorito 180 anni a. C.

fra questa e la retta AB è eguale alla retta ΓΔ; essendo, infatti, immobili il punto E e la retta AB; se il punto Δ viene in H, la retta ΓΔ coinciderà con HΘ e il punto Γ cadrà sul punto Θ; sono dunque eguali ΓΔ e HΘ. Similmente, se si conduce un'altra retta dal punto E, la parte di essa intercetta fra la linea e la retta AB riuscirà eguale alla retta ΓΔ. Perciò AB si chiama *base* (κανών), il punto E *polo* (πόλος), e la retta ΓΔ *intervallo* (διάστημα), perchè a questa retta sono eguali tutte le rette condotte alla linea ΑΓΜ nel modo anzidetto: questa linea si chiama linea *concoide prima,* perchè ne esistono una *seconda,* una *terza* e una *quarta* che sono di uso in altri teoremi.

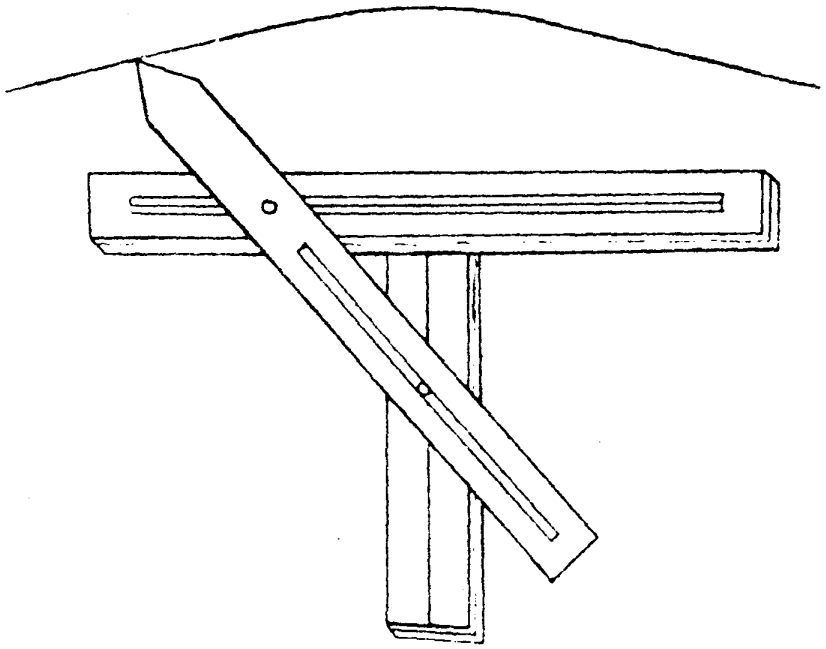


Fig. 53.

Questa linea si può descrivere col mezzo di uno strumento (fig. 53), essa si accosta sempre più alla base, vale a dire: di tutte le perpendicolari che si possono condurre da un punto qualunque della linea ΑΓΜ alla retta AB la massima è ΓΔ e una perpendicolare più vicina a ΓΔ è maggiore di una più lontana: che una retta qualunque cadente fra la retta fissa e la concoide prolungata sechi la concoide, dimostrò NICOMEDE stesso, mentre noi nel commento all'*Analemma* di DIODORO esponemmo l'applicazione di quella curva alla trisezione dell'angolo. Ora da quanto abbiamo già detto risulta evidente che, dato un angolo qualunque HAB (fig. 54) ed un punto esterno, per esempio Γ, è possibile condurre una retta ΓH per modo che la parte KH di essa intercetta fra i lati dell'angolo sia eguale ad una data retta. Si conduca, infatti, dal punto Γ alla

retta AB la perpendicolare ΓΘ e la si prolunghi finchè ΘΔ riesca eguale alla retta data e preso Γ come polo, il dato intervallo, cioè ΔΘ, e AB per base si descriva la prima concoide EΔH; essa, per quanto già dicemmo, incontrerà la retta AH. La incontri in H e si conduca la retta ΓH: sarà in conseguenza la parte di essa XH eguale alla retta data (1).

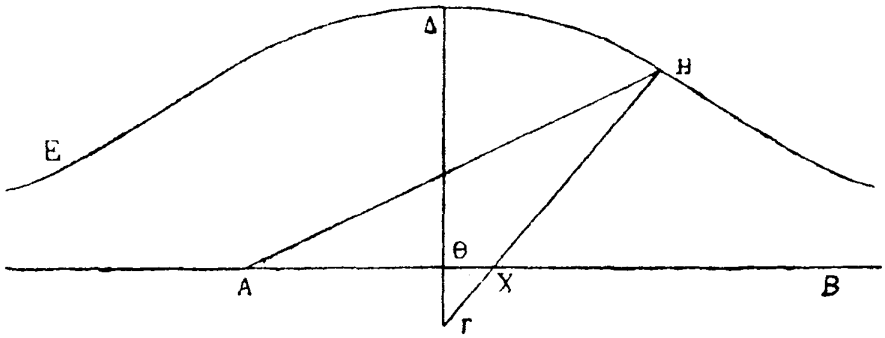


Fig. 54.

Le proposizioni surriferite sembrano desunte da una metodica esposizione delle proprietà della concoide, che avrebbe fatta NICOMEDE, alla quale sembra alludere PROCLO (2), ma che non è giunta fino a noi. Che cosa siano le altre tre concoidi di cui fa menzione PAPPO nel brano trascritto non è detto esplicitamente da alcuno, ma ci sembra estremamente verosimile che il commentatore pensasse alla curva che nasce, con una costruzione analoga a quella che serve per la prima concoide, coll'unica differenza di portare l'intervallo *dalla base verso il polo:* è noto, infatti, che tal curva è suscettibile di tre forme differenti, potendo presentare un punto doppio o una cuspide oppure essere apparentemente priva di punti multipli, secondochè l'intervallo è maggiore, eguale o minore della distanza del polo dalla base (3).

È anche facile riempire la lacuna lasciata dalle troppo vaghe indicazioni, che si leggono nello squarcio riferito,

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 242-6.

(2) PROCLO-TAYLOR, II, p. 146.

(3) Cfr. M. CANTOR, *Vorlesungen* I, p. 351 e P. TANNERY citate *Notes*, ove è ritenuta vera l'ipotesi del testo. Come è noto, i moderni considerano in ogni caso i due rami di curva come formanti una curva unica; la quale è di quarto ordine, passa

intorno all'uso della prima concoide nel problema della trisezione dell'angolo (quest'applicazione è da PROCLO (1) attribuita a NICOMEDE stesso, mentre PAPPO sembra vantarla (2) come opera propria); giacchè in un altro passo della *Collezione* si trova il seguente procedimento per trisecare un angolo:

Sia dato (fig. 55) anzitutto un angolo acuto ABΓ e da un punto qualunque A della retta AB si conduca la perpendicolare ad AΓ; completato il rettangolo AΓBZ si prolunghi ZA fino in E per modo che, condotta BE, il segmento di questa retta compreso fra ZA e AΓ sia eguale al doppio di AB; fatto ciò, dico che l'angolo EBΓ è la terza parte dell'angolo ABΓ. Bisechiamo infatti

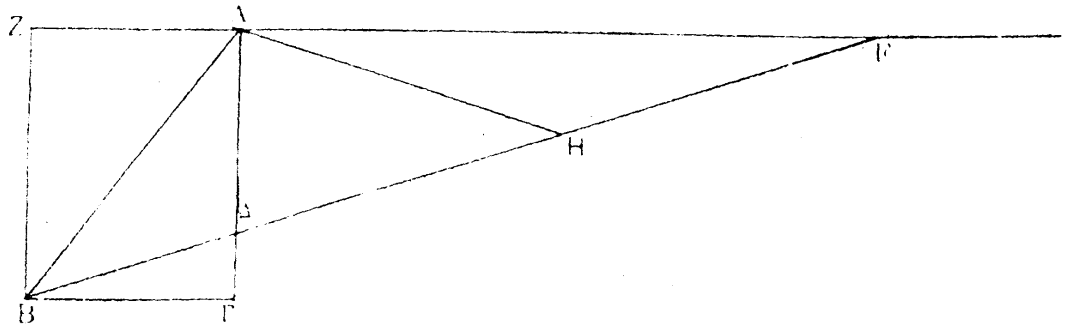


Fig. 55.

la retta ΔE in H e conduciamo AH. Riusciranno fra loro eguali le rette ΔH, HA, EH onde ΔE = 2AH. Ma per costruzione è ΔE = 2AB, dunque AB = AH e ang. ABΔ = ang. AHB. Ora ang. AHB = 2 ang. AEB = 2 ang. ΔBΓ: dunque è pure ang. ABΔ = 2 ang. ΔBΓ. Se quindi bisecheremo l'angolo ABΔ, l'angolo ABΓ riuscirà diviso in tre parti eguali. — Se l'angolo dato ABΓ è retto (fig. 56) (3),

---

per i punti ciclici del piano ed ha per punti doppi il polo ed il punto all'infinito della base. Una costruzione de' suoi flessi fu scoperta nel 1653 da HUYGENS (v. *Oeuvres complètes de Huygens*, T. XII, La Haye, 1910, p. 83-86) e pubblicata l'anno seguente, nella seconda parte del lavoro *De circuli magnitudine inventa* (cfr. CHRISTIANI HUGENII, *Opera Varia*, Vol. II, 1724, e *Oeuvres complètes*, T. XII, p. 211).

(1) PROCLO-TAYLOR, II, p. 73.

(2) A torto secondo M. CANTOR (*Vorl.*, I, p. 353).

(3) Tale trisezione era probabilmente nota già ai Babilonesi: v. CANTOR, *Vorlesungen* I, p. 47.

prenderemo sulla retta BΓ un punto qualunque Γ e descriveremo su BΓ come base un triangolo equilatero BΔΓ: diviso per metà l'angolo ΔBΓ avremo diviso l'angolo ABΓ in tre punti eguali. — Se finalmente l'angolo ABΓ è ottuso (fig. 57), condurremo BΔ perpendicolare a BΓ e dall'angolo ΔBΓ separereemo la terza parte ΔBZ e similmente dall'angolo acuto ABΔ separereemo la terza parte ΔBE (come fu dimostrato prima); allora EBZ sarà eguale alla terza parte dell'angolo ABΓ (1).

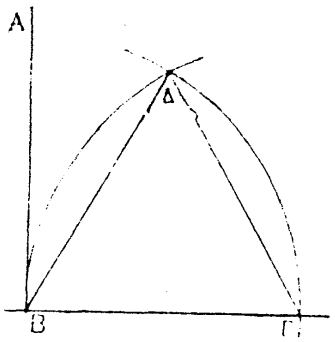


Fig. 56.

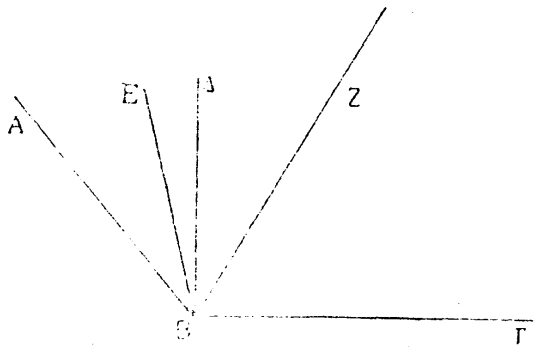


Fig. 57.

È chiaro pertanto come il problema sia così ricondotto ad un problema d'inserzione, il quale si risolve immediatamente costruendo una concoide avente B per polo, AΓ per base e il doppio di AB per intervallo.

72. Assai più riposta è l'applicazione della concoide alla inserzione di due medie proporzionali fra due rette date, della quale porgono notizie, in sostanza concordanti, PAPPO, in due brani della *Collezione* (2), ed EUTOCIO (3). Nel commento di questo al II Libro di ARCHIMEDE *Su la sfera ed il cilindro* si legge, infatti, in seguito ad un sommario della genesi e delle proprietà di quella curva (4), quanto segue:

..... siano date due rette fra loro perpendicolari ΓΛ, ΛΑ (fig. 58) fra le quali si debbano inserire due medie proporzionali. Si completi il rettangolo ABΓΛ e si bisechino in Δ, E le

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 274-276.
(2) PAPPO ed. HULTSCH, p. 58-64, 246-50.
(3) ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. III, p. 115-122.
(4) Questi autori insegnano la *sintesi* della costruzione di cui si tratta; la relativa *analisi* venne divinata nel 1652 da C. HUYGENS (*Oeuvres complètes*, T. XII, La Haye, 1910, p. 13-15).

due rette AB , BΓ e condotta ΔA la si prolunghi sinchè incontri in H la retta BΓ; si conduca da E la perpendicolare EZ a BΓ e sia la retta ΓZ eguale ad AΔ, poi si tracci ZH e a questa la parallela ΓΘ. Nell'angolo dato KΓΘ si conduca dal punto dato Z la retta ZΘK per modo che si abbia ΘK = AΔ = ΓZ. Che ciò si possa eseguire mediante la concoide fu già dimostrato. Condotta la retta KA la si prolunghi ed il prolungamento incontri in M il prolungamento di AB. Dico essere ΓA : KA = KA : MA = MA : MA. Essendo infatti BΓ bisecata in E e ad essa aggiunta ΓK,

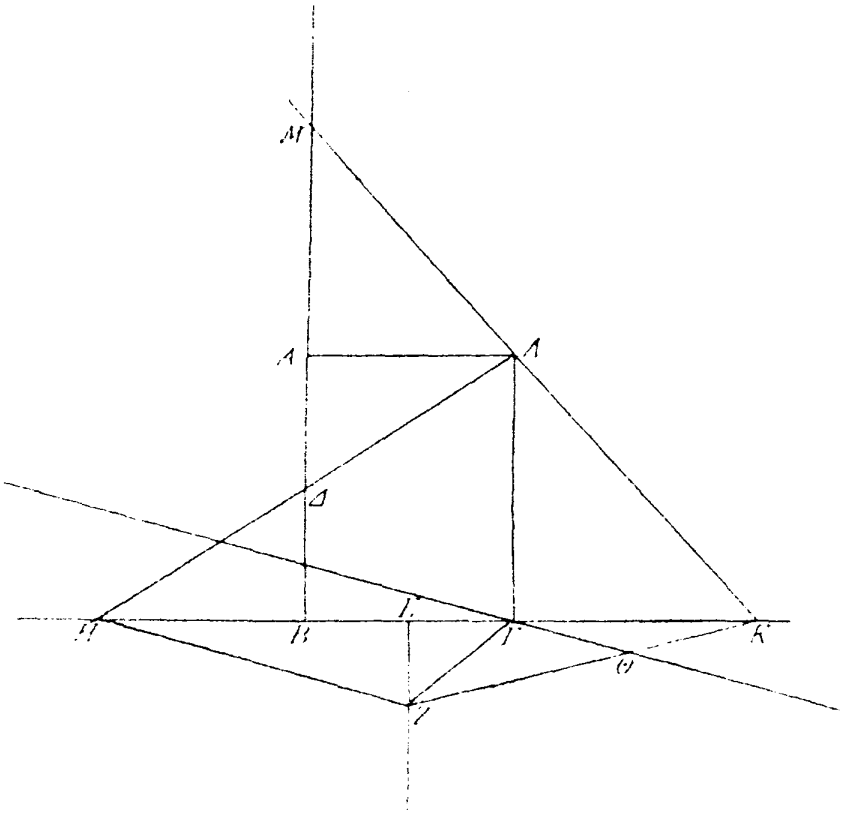


Fig. 58.

sarà (*Eucl.* II, 6) $BK \times K\Gamma + \Gamma E^2 = EK^2$. Si addizioni ai due membri EZ^2. Verrà $BK \times K\Gamma + \Gamma E^2 + EZ^2$, cioè $BK \times K\Gamma + \Gamma Z = KE^2 + EZ^2 = KZ^2$. Ed essendo MA : AB = MA : AK, MA : AK = BΓ : ΓK sarà pure MA : AB = BΓ : ΓK. È poi $A\Delta = \frac{1}{2} AB$ e ΓH = 2BΓ [perchè AΓ = 2ΔB]. Sarà quindi anche MA : AΔ = ΓH : ΓK. **Ma** HΓ : ΓK = ZΘ : ΘK, perchè HZ, ΓΘ sono parallele. [Perciò MA : AΔ = ZΘ : ΘK]. Dunque componendo MΔ : ΔA = ZK : KΘ. Ma essendosi supposto AΔ = ΘK, è ΓZ = AΔ. E così pure MΔ = ZK e $M\Delta^2 = ZK^2$. Ora è $M\Delta^2 = BM \times MA + \Delta A^2$ (*Eucl.* II, 6) e si è dimostrato che $\overline{ZK}^2 =$

$BK \times K\Gamma + \Gamma Z^2$, è poi $\overline{A\Delta}^2 = \overline{\Gamma Z}^2$ essendo per ipotesi $A\Delta = \Gamma Z$. Dunque è pure $BM \times MA = BK \times K\Gamma$. Perciò $MB : BK = K\Gamma : AM$. Ma $BM : ABK = \Gamma : \Gamma K$; ed anche $\Gamma\Lambda : \Gamma K = \Gamma K : AM$. Ma è pure $\Lambda\Gamma : \Gamma K = M\Lambda : \Lambda\Delta$ (*Eucl.* IV, 4). Dunque $\Lambda\Gamma : \Gamma K = \Gamma K : AM = AM : A\Lambda$ (1).

Questi pochi frammenti dei lavori geometrici di NICOMEDE inducono a lamentare che null'altro ci sia noto della sua vita intellettuale; a provare, infatti, quanto sia utile la linea che egli ha scoperta, ricorderemo come NEWTON (2) abbia dimostrato che, non soltanto i problemi della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo, ma in generale, qualunque questione geometrica di terzo o quarto grado si possa risolvere coll'aiuto della concoide. Questa importante scoperta, unita all'osservazione intorno alla facilità di descriverla meccanicamente, consigliò al celebre autore dei *Principia* di proporre di ascrivere questa curva, insieme alla retta ed alla circonferenza, fra gli ausiliari costantemente a disposizione del geometra: ciò basta a convincere il lettore che la concoide non ha perduto agli occhi dei moderni tutti quei pregi che di tanta considerazione la resero degna nell'antichità (3).

Diocle.

73. - Un altro dei geometri di second'ordine, che è costume ascrivere al periodo storico di cui ora ci occupiamo, è DIOCLE (4). Siccome il suo nome non è ricordato da PAPPO,

(1) ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. III, p. 122-126.

(2) NEWTON, *Aritmétique universelle,* trad. BEAUDEUX. Paris An. X, 1802, T. II, p. 52 e seg.; cfr. MONTUCLA, *Hist. des recherches,* etc. p. 236 e 262.

(3) La definizione della concoide è suscettibile di immediata generalizzazione; per giungervi basta sostituire alla retta base una linea qualsiasi. Era ciò stato osservato dagli antichi, almeno per il caso di una base circolare e del polo posto su di essa, come inclina ad ammettere M. CURTZE? (v. *Reliquiae Copernicanae* in Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. XX, 1875, p. 221-248). Chi risponde affermativamente a tale questione deve fare risalire all'antichità l'invenzione della *lumaca di Pascal.*

(4) Questo nome era abbastanza comune, tanto che nella *Enciclopedia* del PAULY-WISSOVA sono ricordate 59 persone che lo portarono.

così si credette (1) fosse a questo posteriore; ma questa opinione fu (a parer nostro) vittoriosamente combattuta, a un secolo di distanza da N. T. REIMER (2) e da P. TANNERY (3), i quali ritengono DIOCLE per anteriore a GEMINO, nonchè dal BRETSCHNEIDER (4), che lo ascrive ad una categoria di scrittori sulle matematiche applicate, che vissero e studiarono in Alessandria, fra il 250 ed il 100 a. C.

Che egli sia posteriore ad ARCHIMEDE, sembra dimostrato dal fatto che EUTOCIO estrae (5), da un'opera di DIOCLE intitolata περὶ πυρείων, una soluzione del quinto fra i problemi del II de' libri del Siracusano *Su la sfera ed il cilindro*, soluzione che consiste nel risolvere coll'aiuto di due coniche quel problema al quale ARCHIMEDE stesso aveva ridotto (v. p. 299) la divisione di una sfera in due parti aventi fra loro un dato rapporto: se ci dispensiamo dal riferire per esteso tale non ispregevole complemento a quell'opera archimedea, è che la questione a cui si riferisce non ci sembra dotata di durevole importanza (6).

Ma EUTOCIO toglie dalla medesima opera di DIOCLE un procedimento nuovo ed assai notevole per inserire due medie proporzionali fra due rette date, al quale (se non altro per essere desso fondato sulla considerazione di una nuova curva) val la pena di accordare qui un posto onorevole:

In un circolo si traccino due diametri AB, ΓΔ fra loro perpendicolari (fig. 59), dalle due parti di B si taglino due archi eguali BE e BZ, e per Z si conduca ZH parallela ad AB. Si congiunga poi Δ a E. Dico che fra le linee ΓH, HΘ sono medie proporzionali ZH, HΔ. Per dimostrarlo si conduca per E la EK parallela ad AB. Sarà in conseguenza EK = ZH e ΓK = HΔ: conduciamo infatti le rette che uniscono il centro Λ a E e Z; essendo ang. ΓΛE = ang. ZΛΔ, gli angoli in K e H retti e ΛE = ΛZ, i lati e gli angoli dei due triangoli KΛE e ΛHZ saranno tutti eguali,

(1) MONTUCLA, *Hist. des math.*, T. I, 2ᵉ ed., p. 339. *Histoire des recherches*, etc., p. 236.

(2) *Historia* citata, p. 174-180.

(3) *Notes* citate, § IX e *Géom. grecque*, p. 60.

(4) Op. cit., p. 181.

(5) ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. III, p. 189 e seg.

(6) Il lettore lo troverà esposto e commentato nell'opera di ZEUTHEN, p. 256-8.

epperò eguali saranno pure i residui ΓK e HΔ. Essendo poi ΔK : KE = ΔH : HΘ e ΔK : KE = KE : KΓ (perchè KE è media proporzionale fra ΔK e KΓ) sarà ΔK : KE = KE : KΓ = ΔH : HΘ. Ora ΔK = ΓH , KE = HZ , KΓ = HΔ, dunque è pure ΓH : HZ = ZH : HΔ = ΔH : HΘ, come si era enunciato.

Se quindi dalle due parti di B prendiamo due archi eguali BM e BN, per N guidiamo la NΞ parallela ad AB e poi uniamo Δ ad M, riusciranno NΞ e ΞΔ medie proporzionali fra ΓΞ e ΞΘ. Perciò se, in modo analogo, condurremo delle parallele fra B e Δ, e porteremo da B verso Γ degli archi eguali agli archi che

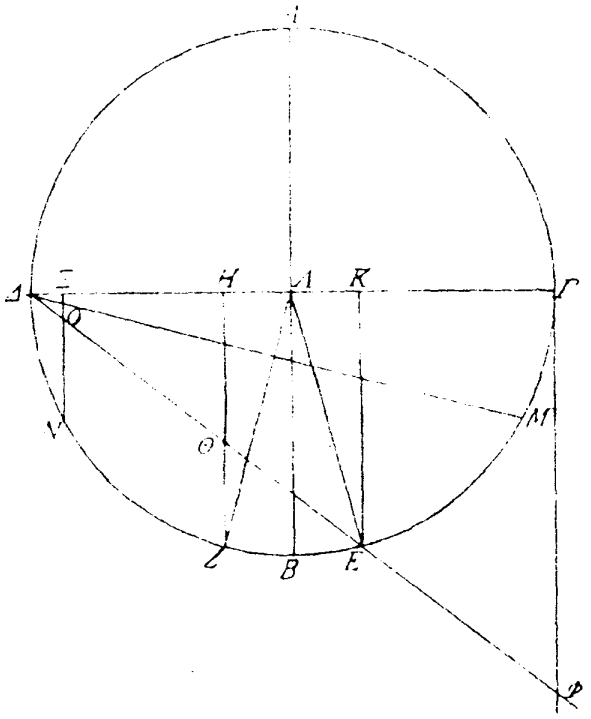


Fig. 59.

queste intercettano sulla circonferenza dall'altra parte a partire da B, e congiungeremo Δ ai punti ottenuti mediante rette analoghe a ΔE , ΔM, le parallele condotte fra B e Δ le secheranno in certi punti (analoghi ai Θ , O della figura), i quali formeranno entro il circolo una certa linea, tale che, preso su di essa un punto arbitrario e condotto per questo la parallela a AB, la linea condotta e la porzione che essa taglia dal diametro a partire dal punto Δ saranno medie proporzionali fra il segmento che quella taglia sul diametro a partire da Γ ed il segmento di parallela compreso fra la linea anzidetta ed il diametro ΓΔ.

Siano or date (fig. 60) due rette A , B fra cui si debbono inserire due medie proporzionali. Si segni un circolo del quale ΓΔ

e EZ siano due diametri fra loro perpendicolari, ed in esso si tracci la linea ΔΘZ dianzi costruita come luogo continuo di punti, e sia A : B = ΓH : HK. Condotta la retta ΓK, il suo prolungamento seghi quella linea in Θ. Per Θ si segni la ΛM parallela a EZ. Allora, in forza di quanto precede, MΛ e ΛΔ saranno medie proporzionali fra ΓΛ e ΛΘ. Ora, essendo ΓΛ : ΛΘ = ΓH : HK e ΓH : HK = A : B, se fra A e B troviamo due rette N e Ξ che con queste e fra loro stiano nei rapporti di ΓΛ , ΛΔ , ΛΘ, si arriverà a due medie proporzionali N e Ξ fra A e B: le quali appunto bisognava trovare (1).

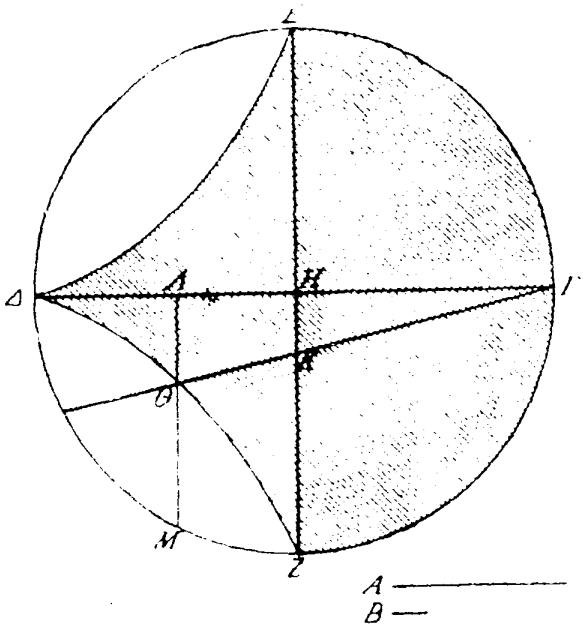


Fig. 60.

I due rami di curva simmetrici rispetto al diametro ΔΓ esistenti entro il cerchio considerato erano le uniche porzioni della curva note agli antichi geometri; essi, assieme all'arco circolare EΓZ, limitano un area piana che ha una forma non molto dissimile da quella di una foglia d'edera

(1) ARCHIMEDE ed. HEIBERG. T. III. p. 78-82. Cfr. ib., p. 152.
Notiamo che se (fig. 59) si conduce in Γ la tangente al circolo dato e se ne determina la intersezione Φ con la retta ΔE, risulterà ΔΘ = EΦ; si arriva così subito alla più nota generazione della curva di DIOCLE, generazione che permette di trovare con estrema facilità l'equazione della curva e di dedurne che essa è una curva di terzo ordine passante pei punti ciclici del piano e pel punto all'infinito del diametro ΔΓ.

(v. la parte tratteggiata della fig. 60); da questo fatto si trasse l'illazione che la curva sfruttata da DIOCLE fosse la medesima che PAPPO due volte (1) ascrive fra i « luoghi lineari », cioè (v. p. 393) fra le linee che non son rette, nè circolari, nè ottenibili secando con un piano un cono circolare retto, curva che egli designa col nome di *cissoide* (κισσοειδὴς γραμμή da κισσός *edera*). Della stessa curva parla anche parecchie volte PROCLO (2), il quale la chiama pure con quel nome, ed inoltre ne rileva le più salienti proprietà (quali sarebbero il formare essa un angolo con sè medesima, l'essere priva di centro, il non poter venire prolungata, ecc.). Siccome però nessun antico scrittore associa il nome di cissoide a quello di DIOCLE (3), così, se si può considerare per estremamente probabile che la curva dai Greci chiamata cissoide fosse quella stessa di cui DIOCLE additò l'applicabilità al problema di Delo, è innegabile che tale identificazione manca di certezza matematica (4): agli storici dell'avvenire è forse riserbato di chiarire questo punto e di gettare qualche sprazzo di luce sulla via di DIOCLE.

Giova ora notare che, circa trent'anni or sono, si credette di essere giunti in possesso di un nuovo documento intorno al geometra di cui ci stiamo occupando. Infatti nel *Cod. Ambrosianus*, L. 99, che deriva dal monastero di Bobbio, esistono alcuni frammenti di un'opera greca appartenente al secolo VIII ; una parte ne venne fatta conoscere sin dal 1819 da A. MAI (5), ma altre due pagine di contenuto matematico furono pubblicate soltanto nel 1881 (6), come opera di un bizantino vissuto nel secolo VI, cioè poco prima o poco dopo ANTEMIO DI TRALLE (v. n. 68). Però coloro (7

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 54 e 270.

(2) PROCLO-TAYLOR, T. I. p. 133. 144, 162, 171 e 180, T. II. p. 8.

(3) Infatti PAPPO e PROCLO parlano della cissoide e non del suo inventore, mentre EUTOCIO, come vedemmo, non dà alcun nome alla curva di DIOCLE.

(4) Cfr. P TANNERY, nell'ultimo § delle precitate *Notes*.

(5) *Ulphilae partis ineditae specimen*. Mediol., 1819.

(6) C. BELGER, *Ein neues Fragmentum mathematicum Bobiense* Hermes, Vol. XVI, 1881, p. 271-284.

(7) C. WACHSMUTH und M. CANTOR, *Ueber das neue Fragm. math. Bob.*, ib., p. 637-642.

a cui si deve una spiegazione soddisfacente del senso matematico di quello squarcio, si dichiararono propensi ad ammettere che si fosse in presenza di un estratto dell'opera di DIOCLE περὶ πυρείων. A tale ipotesi si dichiarò favorevole un illustre storico danese (1), malgrado gli argomenti fatti valere contro di essa da un celebre ellenista suo compatriotta: il quale (2), dopo avere messo in piena luce il significato matematico di quel frammento e rilevato il valore che ad esso deriva dall'essere l'unico scritto greco in cui si parli del fuoco di una parabola (3), confermò l'osservazione del BELGER, che lo stile in cui è scritto appartiene all'epoca bizantina, e giunse a congetturare che ne fosse autore lo stesso ANTEMIO, supposizione questa che sembra a molti (noi non esclusi) soddisfacente. Il brano considerato non può, pertanto, a parere dei più, essere di alcun sussidio nell'assegnare la parte che ebbe DIOCLE nella storia della matematica, può soltanto venire utilizzato — come noi facemmo a p. 398 — per ottenere un dato nuovo e non ispregevole sopra APOLLONIO, la notizia cioè che questi si è occupato anche di specchi ustori.

Perseo.

74. - La concoide e la cissoide ripetono l'origine loro dai problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, che esse abilitano a risolvere; altrettanto non può ripetersi di altre curve notevoli di cui ora ci occuperemo e che probabilmente furono immaginate generalizzando il concetto che guidò all'invenzione delle sezioni coniche. Mentre di tali curve parla più d'un antico scrittore, il nome di PERSEO, che primo le considerò, è noto soltanto per merito di PROCLO; ma le notizie da questo somministrate sono così scarse che, non soltanto riguardo alla personalità di PERSEO,

1) ZEUTHEN, op. cit., p. 474-377.

2) HEIBERG, *Zum Fragm. math. Bob.* (Zeit. f. Math. u. Phys., T. XXVIII, 1883, Hist.-lit. Abth., p. 121-129).

3) È ivi dimostrato il teorema: una tangente ad una parabola fa angoli eguali col raggio vettore che va al punto di contatto e coll'asse.

ma perfino riguardo all'epoca in cui egli visse i dati sicuri sono estremamente deficienti ed in conseguenza le opinioni discordi; infatti M. CHASLES (1) colloca PERSEO avanti EUCLIDE, e precisamente tra ARISTEO e MENECMO (2), il BRETSCHNEIDER (3) ed il CANTOR (4) lo fanno fiorire circa 130 anni a. C., mentre P. TANNERY (5) propende a porlo vicino ad EUCLIDE, prima di APOLLONIO; quanto a noi, crediamo di accostarci ai modi di pensare di questi tre ultimi, e, non trovando ragioni per accordare la preferenza ad alcuno, ci limitiamo a ritenere genericamente che PERSEO appartenga al periodo greco-alessandrino (6), e passiamo a dir qualche parola intorno alle curve di cui gli viene attribuita la scoperta.

Da PROCLO ed ERONE (7) si apprende che gli antichi designavano col nome di *spira* (σπεῖρα) o *anello* (κρίκος) la superficie generata dalla completa rotazione di un circolo attorno ad una retta tracciata nel suo piano (8), ossia, come essi preferivano esprimersi, dalla rivoluzione completa di un cerchio avente il centro su un secondo cerchio e il piano perpendicolare al piano di questo. Una spira dicevasi *aperta* (διεχής) se presentava un vuoto, *chiusa* (συνεχής), se presentava un contatto interno (9), *rientrante* (ἐπαλλάτουσα), quando l'asse di rotazione tagliava il cerchio generatore. Segando una spira con piani paralleli all'asse di rotazione si ottengono le *linee spiriche;* esse furono ottenute per la prima

(1) *Aperçu historique*, 2ª éd., p. 8 e 272.

(2) Col CHASLES sembra accordarsi il DILLING, il quale cita PERSEO fra ERMOTIMO e MENECMO (l. c., p. 26).

(3) Op. cit., p. 175.

(4) *Vorlesungen* I, p. 356.

(5) *Notes* citate § VI.

(6) Di quest'avviso è pure FELIX MÜLLER (*Histor. etymolog. Studien über math. Terminologie*, Berlin, 1887, p. 27), che fa PERSEO contemporaneo di DIOCLE e NICOMEDE.

(7) *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae* (ed. HULTSCH, Berlin, 1864), p. 98; *Opera* T. III p. 127 e T. IV p. 60.

(8) Sono dunque le superficie oggi chiamate *tori*.

(9) Questa spira, come già sappiamo (L. I, n, 51), era già stata (e forse per la prima volta) considerata ed adoperata da ARCHITA di Taranto.

volta da PERSEO, il quale commemorò in poesia il suo ritrovato scrivendo:

> Per avere trovate mediante sezioni cinque e tre linee
> Perseo rese grazie agli Dei (1).

Questa lezione pei versi di PERSEO è stata proposta da P. TANNERY nelle citate sue *Notes:* avendola noi accettata (2), ammettiamo con questo storico eminente che gli antichi conoscessero *otto* linee spiriche.

Al fine di determinarne le scambievoli differenze, ricordiamo, anzitutto, come PROCLO affermi che « delle tre linee spiriche una è intrecciata, a somiglianza della pista pei cavalli (ippopeda), la seconda si allarga verso il mezzo e si restringe agli estremi, la terza invece è nel mezzo più ristretta e si allarga dalle due parti (3) ». Indichiamo poi con r il raggio del cerchio generatore della spira su cui sta la linea, a la distanza del suo centro dall'asse di rotazione e d la distanza dell'asse stesso dal piano segante (che è ad esso parallelo). Allora, supposto, anzitutto, la spira aperta, cioè $r < a$, si ottiene:

quando $a < d < a + r$ una ovale rigonfia nel mezzo, epperò avente i caratteri della seconda delle spiriche di PROCLO,

» $a = d$ una curva che segna il passaggio fra la seconda e la terza delle spiriche di PROCLO, di forma analoga alla lemniscata di BERNOULLI,

(1) PROCLO-TAYLOR I, p. 134. Le curve di PERSEO sono curve di quart'ordine ed hanno per punti doppi i punti ciclici del piano.

(2) Il modo insolito di dire *tre e cinque* invece di *otto* è riguardato dal TANNERY come una forma poetica: a sostegno di questa opinione si possono citare i seguenti versi di DANTE:

" Furo iterate tre e quattro volte „ — *Purg.* VII, 2.

" Che gli assegnò sette e cinque per dieci „
Parad. VI, 138.

D'altronde lo spezzamento del numero 8 in $5 + 3$ può essere stato consigliato al poeta dal fatto (v. il testo) che nella spira aperta si trovano cinque delle curve spiriche e le altre tre nella spira rientrante.

(3) PROCLO-TAYLOR I, p. 139.

quando $a - r < d < a$ una curva chiusa, restringentesi verso il mezzo, epperò avente la forma della terza di quelle di PROCLO,

» $d = a - r$ una curva da assimilarsi alla prima di quelle di PROCLO,

» $a < d < a - r$ due curve distinte, fra loro simmetriche;

supposta, invece, la spira chiusa ($r = a$), si ottengono similmente le prime tre delle cinque spiriche ora descritte; se finalmente la superficie è rientrante ($r > a$), si possono ottenere tre nuove spiriche, ognuna delle quali risulta da una delle tre anzidette, a cui si associ un'ovale interna.

PERSEO ha, per attestazione di PROCLO (1), determinata la proprietà caratteristica delle sue curve (cioè il *sintomo*, se si vuole usare il linguaggio degli antichi); ma ne ha egli costruita od almeno schizzata una teoria completa? In particolare ha egli avvertito, che, nel caso in cui le sue curve siano ovali di CASSINI, per tutti i punti della curva è costante il prodotto delle distanze da due poli fissi? Sono questi altri inquietanti problemi storici ai quali oggi sgraziatamente non si è in grado di rispondere.

Zenodoro.

75. - NICOMEDE, DIOCLE e PERSEO lavorarono in una direzione comune, in quella cioè che, partendo dallo studio di speciali linee piane, doveva finalmente condurre, in un avvenire lontano, al concetto e alla teoria generale delle curve algebriche. Un indirizzo totalmente diverso ha l'ultimo geometra di cui vogliamo occuparci: è ZENODORO, autore di uno scritto *Sugli isoperimetri* (περὶ ἰσομέτρων σχημάτων), che TEONE ALESSANDRINO ci ha serbato (2) e che si

(1) Ivi, p. 146.

(2) Lo si trova nelle edizioni fatte a Basilea (1538) e a Parigi (1821) del *Commento all'Almagesto* composto da TEONE ALESSANDRINO (cfr. L. III); ed inoltre nell'ed. di PAPPO curata da HULTSCH (p. 1189-1211).

direbbe abbia origine dal desiderio di sradicare l'errata opinione (espressa da TUCIDIDE nel V secolo a. C. e ripetuta da altri poi) che per misurare un'area basti determinarne il contorno. L'epoca in cui egli visse non è nota con precisione; ma il fatto di essere stato maestro di quel FILONIDE, di cui è parola nella Prefazione al II Libro delle *Coniche* di APOLLONIO (v. n. 57), lo fa ritenere contemporaneo o di poco anteriore al geometra di Perga (1).

La scrittura che ha assicurato a ZENODORO una posizione non ispregevole nella storia del pensiero matematico greco comincia col teorema: « di due poligoni regolari isoperimetr ha maggiore area quello che ha un maggior numero di lati » (2). Se ne deduce che « se un poligono regolare ed un circolo hanno eguali i contorni, la superficie del circolo sarà maggiore di quella del poligono ». Col mezzo poi dell'altro teorema: « se due figure piane sono isoperimetre ed una di esse è regolare, questa avrà l'area maggiore » e di alcune proposizioni secondarie che fungono da lemmi, si arriva finalmente a concludere che « il circolo è la massima fra le

---

(1) Questa data concorda con le opinioni dell'HULTSCH, che fa ZENODORO di poco posteriore ad ARCHIMEDE (l. c., p. 1188), del CANTOR che lo pone fra il 200 a. C. ed il 90 dell'E. v., propendendo però a ritenerlo posteriore di poco ad EUCLIDE (*Vorlesungen* I, p. 357), e del SUSEMIHL (op. cit., T. I, p. 761) che ritiene appartenga al principio del II sec. o forse al III a. C. Per altre conferme a tal modo di vedere si vegga: W. SCHMIDT, *Zur Geschichte der Isoperimetrie in Alterthum*, Bibl. mathem., 3 Ser., T. II, 1901. Notisi anche che un ZENODORO è citato eziandio da PROCLO (PROCLO-TAYLOR I, p. 173) come inventore dell'appellativo κοιλογώνια pei quadrangoli aventi un angolo concavo, per quelli, cioè, che LEONARDO PISANO (cfr. *Scritti* ed. B. BONCOMPAGNI, II, Roma, 1862, p. 83) chiamò *figure barbate*.

(2) Un poligono regolare di n lati e avente per perimetro $2p$ ha per area

$$A_n = \frac{p^2}{n} \cot \frac{\pi}{n};$$

tenendo fisso p e facendo crescere n, la funzione $\frac{p^2}{n} \cot \frac{\pi}{n}$ cresce pure, epperò anche A_n: il teorema enunciato è dunque equivalente all'affermazione che $x \cot x$ è funzione decrescente dell'arco.

figure piane isoperimetre ». Una proprietà analoga ha luogo per le superficie solide, giacchè « se la superficie d'una sfera è eguale a quella d'un aitro solido, il volume di questo è minore del volume della sfera ». Ma la dimostrazione di questo importante teorema ha raggiunto la massima perfezione soltanto in tempi a noi vicinissimi, mentre nel frammento pervenutoci del lavoro di ZENODORO non ne sono esposti che dei preliminari remoti; tuttavia non v'ha dubbio che in esso esistano i fondamenti dell'importante teoria sintetica dei massimi e minimi, alla quale era riserbato a I. STEINER ed ai geometri posteriori di dare basi solide e forse un assetto definitivo.

76. - Lo scritto di cui ci siamo testè brevemente occupati è l'ultimo documento che si riferisca alle vicende della geometria durante il periodo (greco-alessandrino) del quale ci sforzammo ora di tessere una storia completa e fedele. Se ora poniamo la parola *fine* alla nostra narrazione, gli è più per avere esauriti i materiali che oggi stanno a nostra disposizione, che per il convincimento di avere delineato e colorito un quadrato prossimo al vero delle condizioni della geometria in quel tempo, perchè (già lo avvertimmo) oltre ai pochi personaggi che spiccano nella nostra pittura, oltre alle altre non numerose figure che si trovano nella penombra, s'intravvede nello sfondo della tela una coorte di pensatori, di cui riusciamo a mala pena ad avvertire l'esistenza e non arriviamo a discernere le fattezze ed il contegno.

Tuttavia, quanto si è esposto nelle pagine precedenti, a parer nostro, dimostra ad esuberanza come le rosee speranze con cui aprivasi il periodo discorso non siano state deluse. Il pensiero geometrico, risvegliato negli Ellèni da TALETE all'albeggiare della civiltà, trapassa da Mileto nella Magna Grecia, ove si occulta e feconda nei conciliaboli dei Pitagorici, risorge alla libera luce in Atene, con la scuola di PLATONE, si propaga al di fuori per opera di EUDOSSO e de' suoi discepoli, si associa e corrobora con lo sviluppo della filosofia, e giunge finalmente alla sua massima grandezza con gli scienziati che vissero all'ombra del trono dei Faraoni o con coloro che da questi scienziati ricevettero l'istruzione od almeno lo stimolo all'investigazione delle verità matematiche.

Al modo istesso che la filosofia greca, nel suo periodo di

più abbagliante splendore, trovò in SOCRATE, PLATONE ed ARISTOTELE i suoi più eminenti rappresentanti, così nel periodo aureo della geometria greca spiccano giganteggiando EUCLIDE, ARCHIMEDE ed APOLLONIO. Per opera del primo di questi geometri il mondo civile arriva in possesso di una raccolta sapientemente ordinata dalle proprietà più essenziali dell'estensione figurata, raccolta che per lungo volger di secoli fu giudicata come un codice d'insuperabile valore e che tuttora impone l'ammirazione ed il rispetto, anche a coloro che non ne accettano ciecamente le disposizioni ed i precetti. Il secondo — capo-stipite dei geometri italiani, organizzatore della geometria metrica superiore, precursore di LEIBNIZ e NEWTON — si palesa di così meravigliosa fecondità nell'immaginare espedienti per risolvere, evitando qualunque applicazione del concetto d'infinito, una pleiade di questioni, che oggi si riguardano come di stretta pertinenza del calcolo infinitesimale, che lo studio di essi riempie oggi ancora di stupore e induce melanconicamente a domandarsi se l'invenzione dei metodi generali, che tanto affaticò gli scienziati moderni, non abbia per avventura inaridito la fonte naturale degli artifici ingegnosi. Meno spontanea sorge forse l'ammirazione in chi oggidì mediti sulle opere di APOLLONIO, perchè noi siamo così immedesimati negli odierni procedimenti d'indagine, solleciti e generali, che ci riesce malagevole il misurare quale ingente somma di lavoro esigesse il giungere al vero senza invocarne l'aiuto; e con fatica riusciamo a schermirci da un senso di sorpresa che indugia gli entusiasmi; ma, ove si pervenga a ciò, si è indotti a giustificare pienamente coloro che dichiarano APOLLONIO la più grande mente geometrica che il mondo abbia prodotto prima di STEINER.

Gli sforzi coordinati di questi tre celebri matematici e dei loro immediati discepoli assicurarono basi incrollabili a tutto l'edificio geometrico, da lungi prepararono il terreno al calcolo infinitesimale ed aumentarono a dismisura la sfera di influenza della geometria, col condurre sotto il suo dominio nuove ed interessantissime forme geometriche; essi guidarono a svariate soluzioni dei famosi problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, insegnarono a contemplare la questione della quadratura del circolo dall'unico punto di vista che — date le cognizioni algebriche

dell'epoca — allora ne permettesse una soluzione e gettarono i fondamenti tanto dello studio geometrico dei massimi e minimi, quanto della dottrina degli isoperimetri. Da ultimo gli scienziati prelodati, col somministrare i più importanti elementi della collezione conosciuta sotto il nome di *luogo resoluto* (cfr. p. 387), cercarono di spianare la via agli investigatori avvenire e di fare in modo che lo spirito d'indagine geometrica non si spegnesse con essi.

Ciò non ostante, scomparsi questi illustri campioni, per un complesso di ragioni intrinseche ed estrinseche che ci sforzeremo di mettere in chiaro più innanzi, la geometria greca decade e poi definitivamente scompare. Errerebbe, però, chi credesse che, con quanto dicemmo nel presente Libro, noi abbiamo redatto un bilancio completo delle cognizioni geometriche del periodo greco-alessandrino, giacchè i pensatori di cui ci occupammo mal si adattavano a quella specializzazione che è caratteristica e vanto della scienza moderna; essi, se collaboravano all'avanzamento della matematica pura, non ispregiavano, epperò non trascuravano, le applicazioni importantissime che essa riceve nella spiegazione dei fenomeni naturali, e, mentre si occupavano di tali applicazioni, incidentalmente raffinavano i mezzi dottrinali per compierle: ond'è che i nomi di molti fra gli studiosi, a cui sono dedicati i primi due Libri della nostra storia, ci si ripresenteranno nel successivo, nel quale ci proponiamo di render conto delle indagini geometriche che i Greci condussero a termine mentre fondavano o svolgevano l'astronomia e la geodesia; ma, nel corso di tale studio, ci imbatteremo in nuove personalità degne di altissima stima, fra le quali basti fin d'ora citare: Erone d'Alessandria e Claudio Tolomeo.

APPENDICE

Divinazioni di scritti perduti dovuti a geometri del periodo greco-alessandrino.

Nello stesso modo che al termine del I Libro abbiamo esaminata l'unica restituzione che venne tentata di importanti scritti perduti appartenenti al periodo pre-euclideo, faremo ora un breve cenno delle migliori divinazioni di scritti scomparsi, appartenenti al periodo aureo della geometria greca. Per tal modo, non soltanto daremo un utile complemento a quanto si espose nel testo, ma c'industrieremo di colmare una lacuna esistente nella storia generale delle matematiche, nella quale quelle divinazioni non riuscirono ad occupare il posto che meriterebbero, venendo escluse dall'Evo antico perchè vennero scritte in tempi moderni, escluse dall'Evo moderno perchè recarono contributo assai esiguo al movimento intellettuale dei nostri tempi. Tuttavia passeremo sotto silenzio quei lavori in cui sono fatte conoscere soluzioni di questioni speciali (quali il problema delle tre o quattro rette, i problemi delle sezioni, i problemi dei contatti e simili) perchè essi di regola gettano luce assai scarsa sulla geometria antica.

L'algebra geometrica degli antichi secondo H. G. Zeuthen.

1. - L'opera dello ZEUTHEN destinata a dichiarare *quello* che i Greci sapevano sulle coniche, *in qual modo* lo dimostravano e *a che cosa* lo applicavano (1) — ed alla quale

(1) *Die Lehre der Kegelschnitte,* etc., p. 456.

largamente attingemmo — supera per originalità e genialità tutte le opere congeneri a noi conosciute; è la guida migliore per chiunque aspiri ad acquistare famigliarità con le opere vetuste. Come fu a ragione osservato essa « est moins un livre d'histoire qu'un véritable traité exposant une ancienne méthode qu'il (ZEUTHEN) a retrouvé » (1). Però l'autore, non riuscendo a tenere sempre in freno la sua possente fantasia di geometra, non esita a riempire del suo le troppo numerose e considerevoli lacune che si notano nel complesso delle antiche produzioni; e, nello sforzarsi di ricostruire quei metodi di ricerca di cui è difficile negare il possesso ai geometri greci, è così convinto di parlare in loro nome che non si cura di rintracciare (o non arriva a trovare?) quegli argomenti storici d'inoppugnabile saldezza che solo potrebbero trasfondere nel freddo lettore il convincimento, che anima l'autore, di ragionare come ragionavano APOLLONIO ed i suoi contemporanei. Donde la spiegazione dell'avere l'opera dello ZEUTHEN trovato ardenti ammiratori, in coloro che ravvisavano in lui il geniale geometra discepolo di M. CHASLES, e dei giudici severi, in coloro che cercarono nel suo scritto contributi sicuri alla conoscenza della geometria presso i Greci e trovarono invece trattate da lui le questioni storiche, con acume d'ingegno e arditezza, ma non sempre con quel copioso corredo di fatti accertati e quel forte e vivo sentimento della realtà che danno sangue e midollo alle speculazioni, le tolgono dal vago e le rendono fruttuose. Chi scrive non esita a schierarsi fra gli estimatori del matematico danese, ma non può dissimulare che agli oppositori non difettano i validi argomenti per criticarlo (2): onde (il lettore lo avrà certamente osservato) egli

(1) P. TANNERY. Bulletin des Sc. math., 2e Série, T. X, 1886, Ie Partie, p. 270.

(2) Fra gli altri quello contenuto (*mutatis mutandis*) nelle seguenti parole di un maestro a cui tutti s'inchinano: " Ebenso muss aber auch untersucht werden, ob wir zu der Voraussetzung berechtigt sind, dass der Philosoph, um den es sich handelt, die Fragen, welche *wir* ihm vorlegen, sich selbst auch schon vorgelegt, die Antworten, welche *wir* aus anderweitigen Sätzen ableiten, auch schon gegeben, die Folgerungen, welche *uns* nahe liegen, gleichfalls gezogen habe „ (E. ZELLER, *Die Philosophie der Grieches*, V Aufl., I Tl., I Hälfte, Leipzig, 1892, p. VII).

in moltissime circostanze si è deciso ad invitare il lettore, con una muta citazione, a giudicare da sè se le induzioni dello ZEUTHEN fossero sorrette o non da indiscutibili dati di fatto. Qui però crede prezzo dell'opera somministrare qualche ulteriore notizia intorno ad un procedimento per scoprire ed esporre le verità geometriche, che molti avevano supposto posseduto dagli antichi (1), e che per primo lo ZEUTHEN, a parer nostro felicemente, è riuscito a dissotterrare od a ricostruire.

La teoria delle coniche, come è insegnata da APOLLONIO, poggia esclusivamente sugli *Elementi* di EUCLIDE, onde riesce intelligibile a chiunque conosca i rudimenti della geometria; ma, per penetrare nello spirito delle argomentazioni, per orientarsi nell'intricato labirinto che esse formano, fa mestieri una non comune famigliarità con i procedimenti sussidiari di cui regolarmente si giova il geometra Pergeo. Orbene, questi procedimenti — come a più riprese si accennò nel testo — possono riguardarsi, in sostanza, per applicazioni svariate del metodo cartesiano, applicazioni di natura differente da quelle che CARTESIO ha insegnate per ciò solo che in esse non si ha, come in queste, un sistema d'assi fisso, dato una volta per tutte, ma, per converso, se ne ha uno speciale ad ogni singolo caso, rivelato dallo studio della figura che si ha per le mani. Però, nelle applicazioni citate, è indispensabile avere a propria disposizione qualche cosa che surroghi all'algebra odierna ed in fondo la equivalga; questo *quid* si trova nella teoria delle proporzioni. Orbene, tale disciplina è fondata sulla definizione di eguaglianza di due rapporti fra numeri (razionali) o frà quantità qualunque e permette di eseguire su gli uni e le altre qualunque operazione aritmetica, ma è incapace di suggerire pei risultati ottenuti enunciati così semplici da adattarsi facilmente ad ulteriori trasformazioni. Per ovviare a questo inconveniente s'invoca la rappresentazione geometrica dei numeri mediante segmenti rettilinei e dei loro prodotti mediante rettangoli; allora tutte le operazioni aritmetiche si mutano in altrettante operazioni geometriche, ep-

(1) Cfr. p. es. M. MARIE, *Hist. des sciences math. et phys.*, T. I, p. 5, 7-8, 48, 118-9; P. TANNERY, Bulletin des Sciences math., 2e Série, T. IV, 1885, Ie Partie, p. 86-7.

però l'aritmetica si muta in una nuova disciplina, a cui con piena ragione venne dato il nome di *algebra geometrica*. Questo speciale ramo di matematica ai tempi di EUCLIDE era giunto ad un grado di sviluppo tale da sostituire tutta la nostra algebra sino alla teoria delle equazioni quadratiche inclusivamente; un solo inconveniente presentava l'uso di esso, cioè la necessità di distinguere un gran numero di casi in ogni figura; tale inconveniente, per quanto grave, non impedì però agli antichi di studiare completamente *nel piano* tutte le curve di second'ordine; ma, la complicazione e l'assenza di rappresentazioni geometriche convenienti vietò ad essi di oltrepassare questi limiti e studiare metodicamente le curve di ordine superiore al secondo. Il II Libro degli *Elementi* contiene appunto i fondamenti dell'algebra geometrica; ma esso è ben lungi dal rappresentare la totalità delle cognizioni possedute dai Greci in questo campo; per completare il quadro non v'ha di meglio che adunare le innumerevoli relazioni segmentarie che i commentatori, specialmente PAPPO (v. L. IV, n. 9), dimostrarono per sopperire al laconismo dei grandi geometri, i quali ne sottintendevano la giustificazione, al modo istesso che un provetto analista moderno si dispensa dall'esporre certi piccoli calcoli ausiliari, credendosi autorizzato a citarne soltanto i risultati.

Sull'opera di Euclide relativa alla *Divisione delle figure*.

2. — Lo scritto pubblicato dal DEE e da noi citato nel testo (v. p. 251) fu scelto da L. F. OFTERDINGER quale principale fondamento per una divinazione dell'opera di EUCLIDE *Della divisione delle figure* (1). In questo lavoro le proposizioni esposte dal dotto inglese sono presentate in ordine migliore e munite di rigorose dimostrazioni; a ciascuna vengono poi collegate le proposizioni analoghe esistenti nel ms. fatto conoscere dal WOEPCKE. Si ottengono in totale 22 proposizioni, due delle quali (10ª e 21ª) sono lemmi, sei (1ª-6ª) si riferiscono alla divisione in due parti di un trian-

(1) *Beiträge zur Widerherstellung der Schrift des Euklides über Theilung der Figuren*. Ulm, 1853.

golo, quattro (7ª, 8ª, 12ª e 13ª) a quella d'un trapezio, quattro (9ª, 14ª-16ª) a quella d'un quadrangolo qualunque e cinque (17ª-22ª) a quella di un pentagono.

Nella divinazione in discorso non riuscirono a trovare sede conveniente ben sedici delle proposizioni fatte conoscere dal WOEPCKE (cioè le 10ª-13ª e 18ª-19ª), sicchè non si può ritenere che il problema di ricostruire lo scritto di EUCLIDE abbia ottenuto una soluzione definitiva soddisfacente (1): per raggiungere la quale il WOEPCKE consiglia di tenere conto di un lavoro di ABÛL-WAFÂ, che egli fece conoscere nelle sue *Recherches sur l'histoire des Sciences mathématiques chez les Orientaux* (2). Quel problema, d'altronde, cesserebbe di esistere ove venisse studiata e tradotta la versione araba completa della memoria d'EUCLIDE, che sembra essere tutta conservata nella Biblioteca dell'Escuriale (3).

I Porismi di Fermat, di Simson e di Chasles.

3. - Ecco gli enunciati dei cinque porismi di FERMAT la cui esistenza fu enunciata nel testo (p. 260) (4):

I. Sono date di posizione (fig. 61) due rette ON, OC secantisi nel punto O ed inoltre due punti A e B; si conducano da A e B le parallele a OC e se ne determinino le intersezioni F, E con ON; si conducano pure AE, BF e si trovino i punti D, C in cui esse tagliano OC; finalmente

(1) Il FAVARO si è occupato di questo problema, anzi annunziò la soluzione di esso *Preliminari ad una restituzione del Libro d'Euclide sulla divisione delle figure piane* (Atti del R. Ist. Veneto, Serie VI, T. I, 1883, p. 293-7), ma non pubblicò i risultati delle sue indagini.

(2) *Journal asiatique*, V Série, T. V (1855), p. 220-320, 338 e seg.

(3) GARTZ, *De interpretibus et explanatoribus Euclidis*, etc. Halae, 1823, p. 5.

(4) Per abbreviarli li abbiamo lievemente rammodernati. Il primo e l'ultimo di essi si leggono anche nel frammento *Porismata due* in *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 74-76. Vedi anche T. IV, Paris, 1912, p, 211.

Riguardo agli stessi si vegga l'articolo *Porismata Euclidea, immo Fermatiana, demonstrata. Auctore Archid.* Io. FRANCISCO DE TUSCHIS A FAGNANO (Nova Acta Eruditorum publicata Lipsiae, 1772, p. 431-506).

da un punto qualunque V di ON si proiettino A e B su OC in R e S. Sarà $CR \cdot DS = CO \cdot DO$. II. Sia data (fig. 62) una parabola qualunque NAB ed un suo diametro BEO; se da due puntí qualunque A, N della curva si proiettano altri due punti D, D' di essa su quel diametro, sarà $OB : BE = QB : GB$. III. Dato (fig. 63) un cerchio di diametro AD ed una corda MN parallela a questo diametro, si proietti da M e N su AD in O e V un punto qualunque B

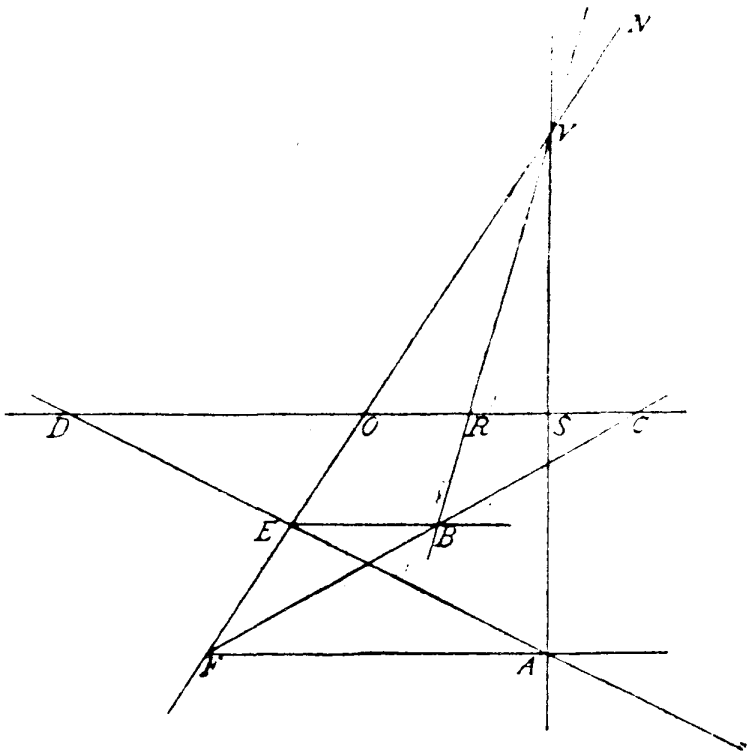


Fig. 61.

della periferia del cerchio dato: dico che $AO \cdot DV : AV : DO$ è indipendente dalla posizione del punto B. IV. È dato un circolo ICH (fig. 64) di centro D ed un suo diametro IH; sia CD il raggio del cerchio perpendicolare a questo diametro. Sul prolungamento di questo si prendono ad arbitrio due punti A, B equidistanti dal centro e sul diametro due punti L, R pure equidistanti dal centro e tali che $DI : AI = DL : LI$. Da A e B si conducono AF e BG perpendicolari al diametro AB ed eguali alla distanza di A da C. Fatto ciò, se si proietta da F e G un punto qualunque E della circonferenza sul diametro suddetto in M e N, dico che $\overline{RM}^2 + \overline{LN}^2$ è indipendente alla posizione del punto E.

V. Dati un cerchio RAC (fig. 65) di centro D e un suo diametro RDC ed il raggio a questo perpendicolare, si prendono sul diametro prolungato due punti Z, B equidistanti

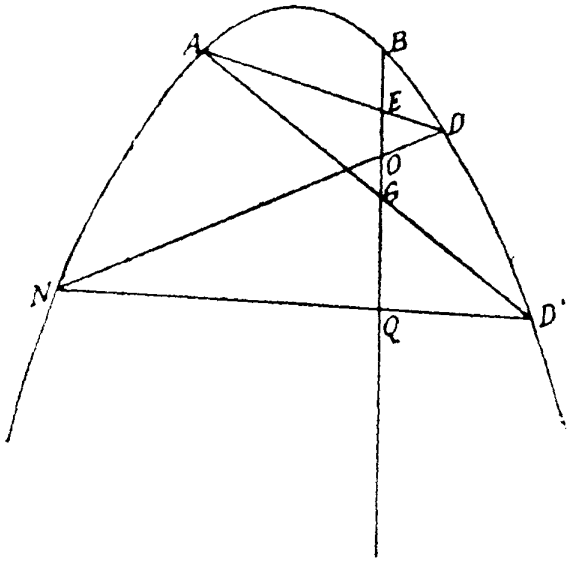


Fig. 62.

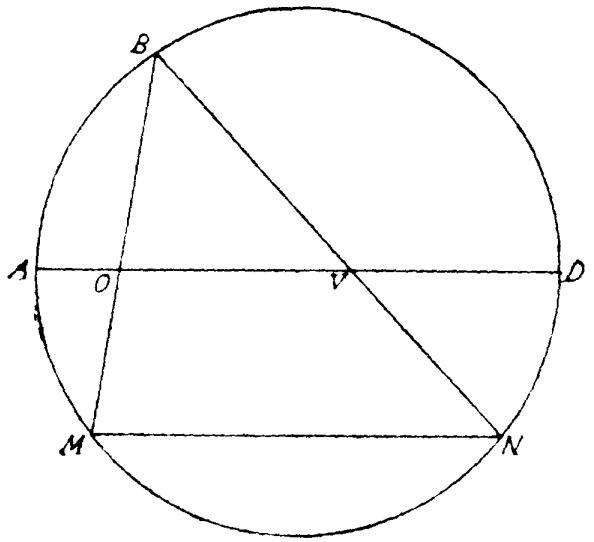


Fig. 63.

dal centro. Condotte ZN e BO perpendicolari al diametro considerato ed eguali alla distanza del punto A dal punto Z, se si proiettano da M e O un punto qualunque H della circonferenza data sul diametro CR in E e N, sarà $\overline{EH}^2 + \overline{HN}^2$: area triang. $EHN = AZ : \frac{1}{2} DZ$.

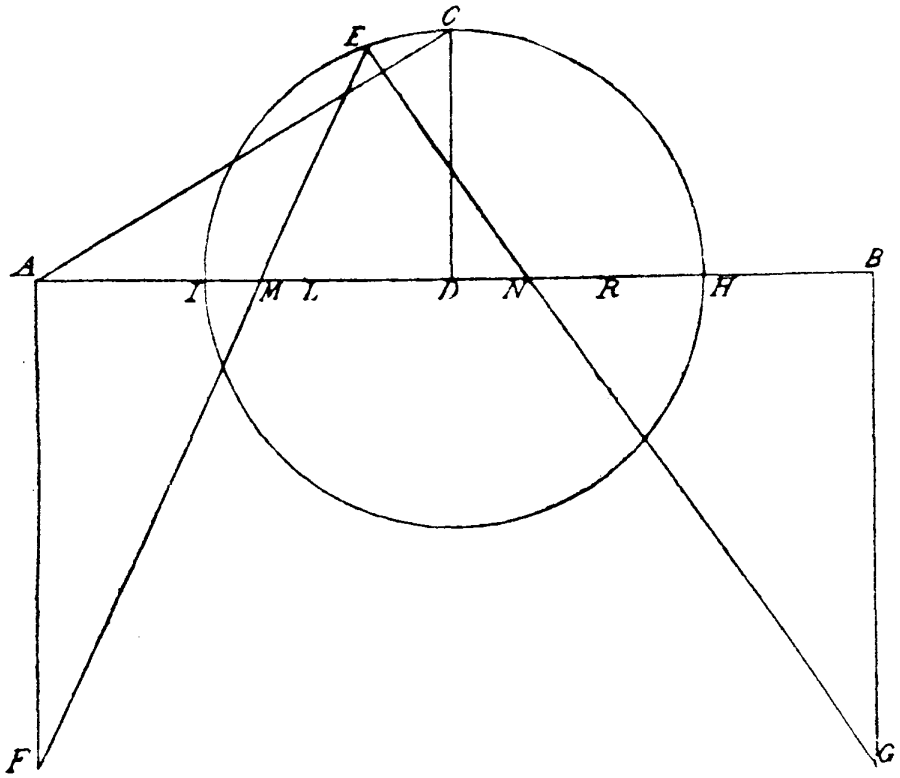


Fig. 64.

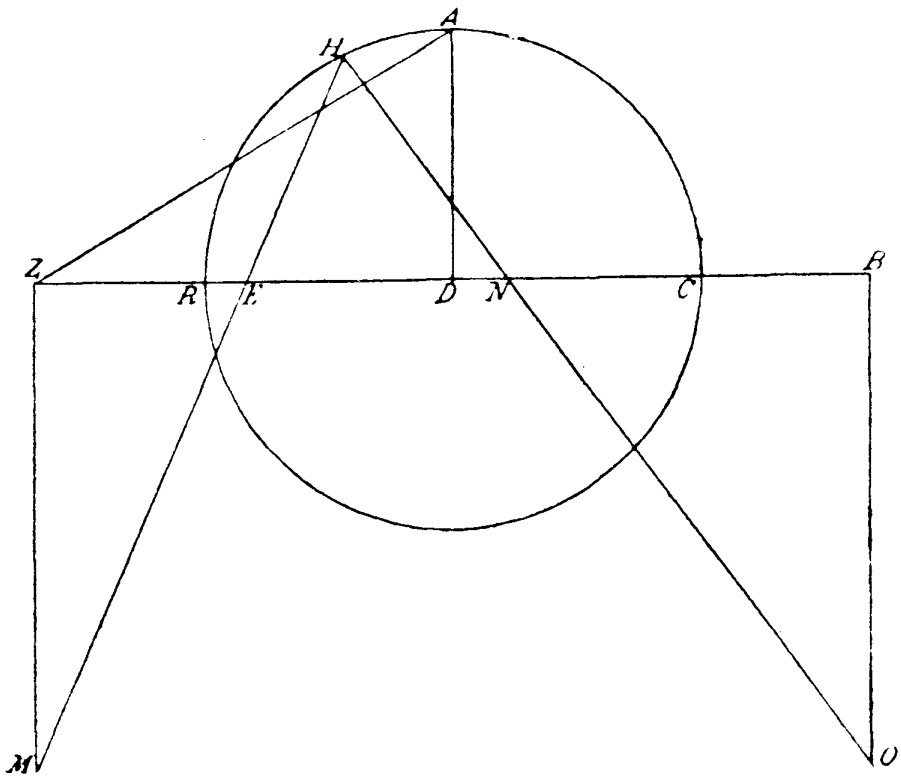


Fig. 65.

Di queste proposizioni la prima, la quarta e la quinta si possono dimostrare facilmente col calcolo, somministrano anzi degli istruttivi esercizi di geometria analitica elementare. Le altre due sono casi speciali del noto teorema di DESARGUES sul quadrangolo inscritto in una conica e segato da una trasversale; ma la prima non può avere fatto parte dell'opera di EUCLIDE, perchè, a quanto riferisce PAPPO, i primi due libri di essa trattavano di figure rettilinee ed il terzo di circoli e semicircoli, e nell'altra è superflua la condizione di parallelismo della corda e del diametro: inoltre, come notò FERMAT medesimo, essa può estendersi a tutte le coniche.

4. - Assai più diffuso del lavoro sui porismi di FERMAT è l'analogo di R. SIMSON, il quale abbraccia ben novantatrè proposizioni. Le prime sei di esse non sono che esempi atti a chiarire la definizione proposta pel vocabolo porisma; una di esse fu riferita nel testo [v. p. 261, nota (3)], le altre sono relazioni segmentarie di mediocre valore. SIMSON rileva poi che, anche nell'aritmetica, si possono rintracciare delle proposizioni prismatiche e lo prova adducendo come esempio la proposizione seguente: « dati due numeri a e $b < a$, saranno pure dati due numeri x e y tali che, per qualunque numero c, si abbia identicamente $(a - b)(b + c) = cx + ay + cy$ ». Nelle proposizioni 7ª-16ª SIMSON dimostra quel teorema sul quadrilatero deformantesi con una certa legge che EUCLIDE suddivise in dieci e che PAPPO compendiò in un solo (v. p. 265) e poi generalizzò notevolmente; quelle proposizioni si riferiscono, dunque, ad una classe speciale di porismi, cioè ai luoghi: altrettanto può ripetersi della proposizione 19ª. Le rimanenti si possono distribuire in quattro categorie; nella prima entrano quelle che si trovano già nella collezione di PAPPO e a cui SIMSON pone i numeri 17-18, 21, 22, 26-33, 39, 42-45, 49-51, 63-65, 68-77 e 79; la seconda abbraccia nuove proposizioni ausiliarie (24, 35-37, 46, 52, 54-56, 59-60, 78, 82, 86, 89); nell'ultima entrano quei problemi in cui spicca chiaramente l'utilità dei porismi (prop. 20 e 25). La terza categoria poi abbraccia 29 porismi, di cui alcuni vengono presentati come corrispondenti ai generi II, VII, XVI, XXVIII, XXIX e XXX enumerati da PAPPO, altri (prop. 80ª-81ª, 83ª-85ª) coincidono con i porismi di FERMAT (il secondo eccettuato) oppure li includono od

estendono, altri quattro finalmente (sono gli ultimi per ordine, ma fra i più notevoli) furono suggeriti dall'autore da MATTHEW STEWART (1717-1786). Di queste proposizioni non riferiamo qui gli enunciati perchè ciò esigerebbe uno spazio assai maggiore di quello che si trova a nostra disposizione; osserviamo, però, che esse somministrerebbero un materiale assai interessante, ricco e variopinto per comporre una collezione di esercizi di geometria elementare (1).

5. - Mentre FERMAT e SIMSON si limitarono a raccogliere materiali per ricostruire l'opera perduta di EUCLIDE, M. CHASLES, con la sua più estesa scrittura sopra i porismi, intese di presentarne una divinazione completa (2). Da quali criteri egli si sia lasciato guidare emerge da quanto dicemmo nel testo (p. 262), quale plauso abbia riscosso il suo scritto non fa mestieri di qui ricordare. Occorre, però, avvertire che l'approvazione che questo scritto ottenne è la espressione più del valore che tutti vi trovarono come opera originale, che del convincimento che esso rispecchiasse fedelmente l'originale scomparso. Per persuadersi che tale identità non si possa in verun modo ammettere si osservi che: 1.° l'opera di EUCLIDE comprendeva 171 proposizioni, mentre la restituzione proposta ne contiene 221; 2.° nello scritto dello CHASLES non esiste alcuna proposizione riferentesi al decimo dei generi descritti da PAPPO, perchè le parole di questo che vi si riferiscono riuscirono inintelligibili a CHASLES, essendo monca la versione del COMMANDINO su cui il geometra francese lavorava, 3.° CHASLES in ogni libro riunisce in un solo gruppo i porismi d'un medesimo genere nell'intento di «porre un po' d'ordine in tante e così svariate proposizioni»; di più nei libri II e III egli, di

(1) Nell'opera *Elements of geometry, geometrical analysis and plane trigonometry* (London, 1809 e 1821) del celebre fisico J. LESLIE (1776-1832) si trovano pure dimostrati alcuni porismi: si veggano le prop. 18ª-25ª del III Libro di detta opera.

(2) Un lavoro analogo venne tentato prima dal KLINGENSTIERNA (1670-1765), come fa sapere G. ENESTRÖM (*Bibliotheca mathematica*, 1889, p. 1). Ma, secondo il WILKINSON (*Proc. of the phil. Society of Manchester*, T. VII, p. 68), il primo che vi si accinse fu C. WILDBORE (1737 circa-1802), il cui lavoro risale al 1775; il suo esempio in Inghilterra venne tosto seguito dal LAWSON e dal PLAYFAIR.

suo arbitrio, pone prima le proposizioni che appartengono ai generi che PAPPO esplicitamente afferma esservi contenute e poi altre relative agli altri generi; ora (come riconobbe lo stesso CHASLES) nulla abilita ad asserire che EUCLIDE abbia adottato questi criteri di distribuzione, anzi si sarebbe indotti a negare che questo grande metodista abbia adottato tali norme, chè, seguendole, vengono collocate a distanza proprietà affini della medesima figura; sembra, quindi, probabilissimo che, riguardo all'ordinamento, l'opera moderna non somigli affatto all'antica (1); 4.° (2) CHASLES (a differenza di SIMSON) nell'enunciare i suoi porismi si è attenuto assai da vicino ai lemmi suggeriti da PAPPO (3) per agevolare l'intelligenza del trattato euclideo (4), tanto che non pochi fra essi non ne sono che trasformazioni pressochè immediate; orbene, se si fa il confronto dei lemmi di PAPPO relativi ad opere superstiti con le opere stesse, si scorge che essi di regola non avevano che il modesto intento di dimostrare certe proposizioni secondarie che l'autore invocava, lasciando al lettore di convincersi della loro verità; per analogia si è trascinati ad ammettere che PAPPO non abbia abbandonato questo sistema nel commentare i *Porismi* e che quindi l'opera di EUCLIDE contenesse una materia assai più elevata dei lemmi anzidetti e quindi dell'opera di CHASLES. Tutte queste ragioni concorrono a far nascere l'idea che quest'ultima porga del trattato euclideo un concetto inferiore al vero; essa ci si presenta come una *propedeutica*

(1) Si osservi, a questo proposito, che il determinare l'ordine delle proposizioni è questione preliminare che s'impone a chiunque voglia divinare un'opera geometrica perduta; ed è vano sperare di ottenere un buon risultato se la si risolve in modo così superficiale come fece CHASLES, giacchè in un'opera di matematica, in cui le varie parti hanno una salda concatenazione logica, l'ordine in cui esse si succedono è elemento essenziale.

(2) Cfr. ZEUTHEN, op. cit., Cap. VIII.

(3) PAPPO ed. HULTSCH, p. 866-918.

(4) È interessante notare che i pericoli di questo sistema erano stati segnalati da M. CANTOR tre anni prima che fosse pubblicata la divinazione di CHASLES: si vegga l'articolo *Ueber die Porismen des Euclids und deren Divinatoren* (Zeitschrift für Math. und Phys., T. II, 1857, p. 25).

alla geometria proiettiva, ove le nozioni di punteggiate e di fasci, di rapporto anarmonico e di proiettività, entrano, negli enunciati e nelle dimostrazioni, unicamente in casi particolari e vengono svolti col solo sussidio degli *Elementi* di EUCLIDE; ora chi assicura che questi non abbia oltrepassati questi confini e non sia risolutamente entrato nel campo della geometria superiore? Sino a che questi dubbi non siano dissipati (e lo saranno essi mai?), sino a che anche alle altre questioni dianzi enunciate non siasi dato risposta soddisfacente, il problema dei porismi rimarrà fra quelli che esigono e meritano l'attenzione e lo studio degli storici e dei geometri.

Divinazioni tentate dal Maurolico e dal Viviani dei Libri V e VI delle *Coniche* di Apollonio.

6. - La restituzione di MAUROLICO, della quale fu fatto cenno a p. 354, fa seguito all'edizione che egli curò dei primi quattro libri delle *Coniche* di APOLLONIO (1), ed è il più antico lavoro che si conosca avente lo scopo di divinare antiche opere perdute. Per quanto concerne il V Libro, rileveremo che nelle trenta proposizioni esposte da MAUROLICO sono fatte conoscere le relazioni di posizione che intercedono fra due sezioni coniche fra loro tangenti e sono discusse alcune condizione pel contatto di due tali curve: in qual modo il geometra messinese potesse illudersi che esse riproducessero la materia del V Libro delle *Coniche* — il quale per esplicita attestazione del suo autore (cfr. p. 358) trattava diffusamente di massimi e minimi — è impossibile concepire. Meno infelice è la pretesa divinazione del VI Libro; ivi, però, MAUROLICO si è occupato quasi esclusivamente della similitudine, trascurando la congruenza di due sezioni coniche; inoltre egli non ha confrontate fra loro due porzioni di curva, della qual cosa non gli si deve far colpa, non avendo il Pergeo parlato di tali ricerche nella prefazione generale della sua opera. A giustificare in parte questo nostro favo-

(1) FRANCISCI MAUROLYCI MESSANENSIS, *Emendatio et Restitutio Conicorum Apollonii Pergaei.* Messanae, MDLIV. La divinazione è datata: Castello Bono Die 25 Octobris Hora 4, Noctis Indictione VI, 1547.

revole giudizio, rileveremo alcuni punti di contatto fra l'originale e la divinazione: la 11ª di quello coincide con la II di questa, le 26ª-27ª di quello con le V-VI di questa, ed i problemi che MAUROLICO risolve nelle proposizioni X-XI, XXVI-XXVIII non differiscono dalle proposizioni 28ª e 30ª di APOLLONIO.

7. - Assai più importante, e degna della grande celebrità di cui gode, è la divinazione fatta del solo V Libro da VINCENZO VIVIANI (1); comparsa nel tempo in cui si stava compiendo la versione latina degli ultimi libri della grande opera di APOLLONIO, fu poi detto che essa sarebbe stata bastante a compensare della perdita del primo dei libri che erano allora stati rinvenuti in Arabo (2). Ma noi non possiamo accettare questa affermazione senza molte riserve; giacchè, secondo noi, la *Geometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergaei* contiene *più* e *meno* dell'originale: *più* per la vastità del campo di ricerche, *meno* per la profondità delle indagini; *più* perchè vaga pel piano e poi assurge allo spazio, tratta non soltanto di coniche ma anche di conoidi e sferoidi, e considera eziandio le grandezze relative di speciali segmenti determinati in quelle da rette e da piani in questi; *meno* perchè sfiora soltanto quelle capitali questioni che, come vedemmo, fanno del V Libro di APOLLONIO un preliminare importantissimo della teoria delle evolute. Essa, pertanto, si può considerare come un'eccellente aggiunta alle nostre cognizioni geometriche e, anche per la forma in cui è redatta, quasi come un'appendice alle dottrine esposte da APOLLONIO ed ARCHIMEDE; ma è impossibile considerarla siccome una divinazione riuscita (3), troppo

(1) *De Maximis et Minimis geometrica Divinatio in Quintum Conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum.* Florentiae, MDCLIX.

(2) Così FONTENELLE nel suo *Éloge de M. Viviani* disse: " l'on trouva qu'il avait plus que deviné, c'est-à-dire qu'il avait été beaucoup plus loin qu'Apollonius sur la même matière „ (*Éloges académiques,* T. I, 1740, p. 35.

(3) Noi pertanto siamo forzati a dissentire dal CANTOR, il quale, a proposito della *Divinatio*, scrive: " Für Viviani war di Veröffentlichung „ (dell'originale) " ein wahrer Triumph, da sie zeigte wie nahe er dem Gedankengang des Apollonius gekommen war „. *Vorlesungen* II, 2 Aufl. Leipzig, 1900, p. 661.

pochi essendo i punti di contatto di essa coll'originale. Di tale divergenza — è forza e dovere convenirne — non si può fare soverchio addebito al celebre discepolo di GALILEO, perchè il sapere che « il quinto libro tratta diffusamente di massimi e minimi (1) » ed il conoscere i pochi lemmi (quasi tutti concernenti relazioni di punti in linea retta) che PAPPO ci lasciò a migliore intelligenza del testo, sono materiali insufficienti per rievocare l'immagine dell'opera perduta. E poichè questo scritto del VIVIANI, al pari di quello con cui egli s'industriò di sopperire alla perdita dei *Luoghi solidi* di ARISTEO (v. l'Appendice II al Lib. I) attestano come egli fosse riccamente dotato di facoltà inventive in matematica, sorge spontaneamente il rimpianto che egli non le abbia applicate ad elaborare i prodotti spontanei della propria fantasia geometrica, piuttosto che sforzarsi a ricostruire edifici, di cui a' suoi tempi non rimaneva che un pugno di cenere.

La restituzione di E. Halley dell'ultimo libro delle *Coniche* di Apollonio.

8. - Il concetto fondamentale di questa restituzione, della quale abbiamo fatto soltanto un rapido cenno a p. 384, è esplicitamente dichiarato dall'HALLEY (1656-1742) nella lettera in cui il grande astronomo dedica il proprio lavoro al dotto ENRICO ALDRICH (1674-1710) e che dice:

Occupandomi con te dell'edizione di APOLLONIO, entrambi fummo assai spiacenti che, nel manoscritto arabo, mancasse l'VIII Libro. Tu però, coll'ordinario tuo acume, osservasti subito che a tale perdita si poteva in certa misura sopperire, perchè nella *Collezione* di PAPPO i lemmi relativi ai libri settimo ed ottavo sono presentati insieme, mentre quelli concernenti gli altri libri sono offerti a parte per ogni libro. Questo fatto sembrò a te significare che i detti due libri dovessero avere contenuti somiglianti l'uno all'altro, e che i problemi i quali, per dichiarazione di APOLLONIO stesso, si trovavano nel libro ottavo dovessero ricevere le loro determinazioni da teoremi del libro settimo. Avendo io profondamente meditato su ciò, mi parve che la tua congettura fosse verosimile e ve-

(1) V. la prefazione generale alle *Coniche* riferita a p. 357.

nisse anzi confermata da parecchi fatti, e mi decisi, in conseguenza, di riempire, per quanto fosse in mio potere, quella lacuna seguendo le tracce da te suggerite. Ora ti prego di accettare benignamente questo mio saggio.

La restituzione proposta dall'eminente editore di APOLLONIO si compone di trentatrè problemi. I primi due insegnano a determinare il parametro principale di una parabola conoscendo quello relativo ad un diametro dato ad arbitrio o viceversa, e i due seguenti trattano le questioni analoghe per le coniche a centro. Tutte le altre proposizioni insegnano a trovare una coppia di diametri coniugati di una conica assegnata, quando si conosca uno di essi (prop. 5^a-6^a), o il loro rapporto (prop. 7^a-8^a), o la loro somma (prop. 9^a-10^a), o la loro differenza (prop. 11^a-12^a), o il loro rettangolo (prop. 13^a-14^a), o la somma o differenza dei loro quadrati (prop. 16^a-16^a), o l'angolo che essi comprendono (prop. 17^a-18^a), o il parametro relativo ad uno di essi (prop. 19^a-20^a), oppure di uno dei diametri cercati e del parametro relativo il rapporto (prop. 21^a-22^a), o la differenza (prop. 23^a-24^a), o la somma (prop. 25^a-26^a), o il prodotto (prop. 27^a-28^a), o la somma dei quadrati (prop. 29^a-31^a) o finalmente la differenza dei quadrati (prop. 32^a-33^a). Come conclusione HALLEY osserva:

Fin qui noi, seguendo l'ordine nel quale sono esposti i diorismi, abbiamo trattato la soluzione dei problemi i cui limiti di risolubilità sono assegnati immediatamente dalle proposizioni dioristiche del VII libro: e noi siamo convinti che la materia dell'ottavo libro non fosse essenzialmente differente da quanto esponemmo. Ad ogni modo speriamo che, anche se non abbiamo sempre indovinate le analisi e le costruzioni di APOLLONIO, pure quanto noi vi abbiamo sostituito non apparirà fuori di luogo ad un equanime lettore. D'altronde il numero dei problemi sulle coniche le cui analisi si possono desumere senza gran fatica da questi elementi è estremamente grande, ma nostro unico scopo fu di seguire le tracce di APOLLONIO il più da presso fosse possibile. Ora ancorchè fortuna volesse che in avvenire venisse ritrovato il libro perduto, pure a noi non rincrescerà di avere speso in questo lavoro tempo e fatica.

Se la restituzione proposta dal grande astronomo sia una immagine fedele dell'originale, è questione che forse rimarrà

sempre priva di una soluzione universalmente accettabile; infatti, spenta ormai ogni speranza di ritrovare l'VIII Libro delle *Coniche*, l'unico autore antico, che possa venir citato a sostegno di un qualsiasi giudizio è PAPPO; orbene i quattordici lemmi che egli espone per agevolare l'intelligenza dei due ultimi libri di APOLLONIO possono bensì adattarsi alla divinazione dell'HALLEY, ma potrebbero esserlo egualmente ad innumerevoli altre, dal momento che esprimono delle semplici relazioni metriche derivanti dal considerare punti in linea retta o rettangoli tagliati da trasversali. Tuttavia, è fuor di questione che i problemi trattati dal matematico inglese, non solo non eccedono le forze di cui disponeva il geometra di Perga, ma hanno eziandio i lineamenti che questi notò in essi problemi nella prefazione generale dell'opera (v. p. 359) ed in quella speciale al settimo libro (v. p. 382); di più l'andamento generale delle dimostrazioni congegnate dall'astronomo inglese è fedelmente modellato su quello comune a tutte le argomentazioni apolloniane. Se a queste osservazioni si aggiunge quella che l'HALLEY è a nessuno secondo nel conoscere l'essenza più recondita della geometria greca, si vedrà di leggeri la ragione per cui noi non esitiamo a dichiarare la divinazione di HALLEY più verosimile di tutti i lavori congeneri (1) e la consiglieremmo come esemplare a chiunque volesse accingersi a tentativi dello stesso genere, ove non pensassimo essere definitivamente tramontata l'êra in cui tali sforzi si giudicavano degni di assorbire l'attività intellettuale d'un geometra.

Divinazioni dei due libri di Apollonio *Sulle inserzioni.*

9. - La divinazione di MARINO GHETALDI (1566-1625) (2) consiste nella soluzione dei problemi da noi notati coi numeri II, III, IV nel riferire il riassunto di PAPPO nell'opera

(1) Non discorda dal nostro il giudizio dello ZEUTHEN (op. cit., p. 403-407); invece M. CANTOR si esprime a questo riguardo con molto maggiore riserva (*Vorlesungen*, I, p. 343).

(2) Che io conosco dietro la riproduzione fattane dall'HÉRIGONE, *Cursus mathematicus*, T. I. Parigi, 1634, p. 305-914.

di APOLLONIO (v. p. 396), e ancora dei due seguenti, il primo dei quali è una generalizzazione del II, mentre il secondo è analogo al III: « Dato un segmento circolare qualunque ed una retta facente con la base un angolo eguale all'angolo del segmento, inserire fra questa retta e l'arco del segmento stesso una retta di data lunghezza, il cui prolungamento passi per un estremo della base del segmento stesso. — Dato un rombo e prolungati due suoi lati adiacenti, adattare fra questi prolungamenti una retta di data lunghezza che passi pel vertice opposto del rombo ». Esso adunque tratta soltanto di quei problemi che, per attestazione di PAPPO, si trovavano nel primo dei due libri del Pergeo.

10. - Di alcuni soltanto fra questi problemi si è occupato C. HUYGENS, il quale studiando alcune questioni che nell'antichità ebbero grande rinomanza (1) (quali la divisione di una sfera in dato rapporto, la duplicazione del cubo e l'inserzione di due medie proporzionali fra due rette date), fu condotto a trattare i due problemi sul rombo considerati dal GHETALDI e ad indicarne delle soluzioni tanto pel caso generale, quanto pel caso in cui il rombo divenga un quadrato.

11. - Assai più completa è la posteriore divinazione di S. HORSELEY (1661-1704) (2); nella quale, dopo un I libro, destinato a trattare le medesime questioni che aveva studiato il GHETALDI, se ne legge un II, ove sono risolti i due

---

(1) *De circuli magnitudine iuventa; accedunt problematum quorundam illustrium constructiones*, Lugd. Bat., 1654; trovansi anche nel T. II, p. 351-404 di CHRISTIANI HUGENII, *Opera varia*. Lugd. Bat., 1724 e nel T. XII delle *Oeuvres complètes* de C. HUYGENS, La Haye, 1910.

(2) *Apollonii Pergaei Inclinationum Libri duo. Restituebat* SAMUEL HORSLEY. Oxonii, MDCCLXX.

Per comporre quest'opera l'HORSELEY si è giovato di uno scritto di A. H. DE OMERIQUE, geometra spagnuolo del sec. XVII, cioè dell'*Analysis geometrica sive nova et vera metodus resolvendi tam problemata geometrica, quam arithmeticas quaestiones* (Gadibus, 1698), la quale, al dire del MONTUCLA (*Hist. des Math.*, 2ª éd., T. II, p. 167) riscosse anche il plauso di NEWTON; in essa si trovano in realtà problemi di inserzione (v. p. es. la Prop. 42 del II Libro).

seguenti problemi (i quali sono naturalmente suggeriti da un'attenta lettura di PAPPO): « Dati due semicerchi concentrici, aventi le basi sulla stessa retta, inserire fra essi una retta di data lunghezza, diretta ad un punto dato nella base comune. Dati due semicircoli, aventi le basi sulla medesima retta, inserire fra essi un segmento di data lunghezza, diretto ad un estremo di una delle basi ». Aggiungiamo che la minuziosa distinzione de' vari casi che presentano le proposizioni considerate, la determinazione dei limiti di risolvibilità dei problemi e lo stile in cui è scritta l'opera dell'HORSELEY ne rendono probabile la rassomiglianza coll'originale, epperò la fanno ascrivere fra i più riusciti tentativi di restituzione di opere perdute (1).

Restituzione dei *Luoghi piani* di Apollonio.

12. - Tre eminenti scienziati si sono accinti e riuscirono in parte a divinare l'opera di APOLLONIO sopra i *Luoghi piani*, impresa questa che, paragonata con altre analoghe, presentava minori difficoltà (perchè meno monche sono le notizie su di essa lasciate da PAPPO) e maggiore interesse (perchè molti dei teoremi che questi ci tramandò possiedono un valore permanente).

Il primo in ordine di tempo, dei divinatori in questione è FERMAT (2), il quale non pretese di comporre un'esatta riproduzione del lavoro di APOLLONIO (3), ma soltanto di risarcire, in certo qual modo, la geometria del danno subito dalla scomparsa di esso, col suggerire ragionamenti atti a giustificare gli enunciati riferiti nella *Collezione*.

In un primo libro egli dimostra tutte quelle proposizioni che PAPPO espone *a proposito* del primo dei libri di APOLLONIO e che non tutte erano ivi contenute. La prima di

(1) Nulla ci è dato dire riguardo all'analogo lavoro di R. BURROW, *Restitution of the geometrical treatise of Apollonius Pergaeus an Inclinations,* 1797, di cui non ci è nota che l'esistenza.

(2) *Apollonii Pergaei Libri duo de locis planis restituti* (Oeuvres de Fermat, T. I, 1891, p. 3-51). Cfr. anche *Ad locos planos et solidos isagoge* (ib., p. 91-110); inoltre Oeuvres, T. II, p. 5, 30, 56 74 e 100.

(3) *Oeuvres de Fermat,* T. I, p. 29 nota.

esse come sappiamo (v. p. 394) dice che se **T** è una trasformazione geometrica piana di una certa categoria, ad un luogo piano corrisponde un altro luogo piano; orbene FERMAT per dimostrarla la suddivide in otto. Per esporne succintamente le ipotesi designeremo con: *O* un'omotetia, *I* una trasformazione per raggi vettori reciproci, *R* una rotazione, *S* una trasformazione per similitudine e *T* una traslazione; intenderemo poi che un prodotto del tipo *PQ*... rappresenti la successione delle trasformazioni *P*, *Q*,..., e che, se ivi interviene una *R* assieme ad una *O* o una *I*, essa abbia lo stesso centro di queste. Posto ciò, i casi considerati da FERMAT corrispondono a supporre che **T** sia una delle trasformazioni seguenti: *O*, *I*, *OR*, *IR*, *S*, *IT*, *ORT*, *IRT*. A ragione FERMAT osserva poi, che la seconda delle proposizioni registrate da PAPPO è di per sè evidente, mentre le due successive sono semplici corollari di teoremi di EUCLIDE (1). La successiva proposizione viene dimostrata in un modo dá cui emerge che è vera, non soltanto per una retta, ma anche per una circonferenza; la sesta è dimostrata soltanto per rette concorrenti; la settima lo è in base ad un'interpretazione speciale delle parole di PAPPO, e l'ultima, dopo avere modificate radicalmente le parole del COMMANDINO.

Più agevole còmpito è la divinazione del II Libro dei *Luoghi piani*, avendo PAPPO enunciati tutti i teoremi che esso contiene; FERMAT, quindi, non ebbe altro che a provvederli di dimostrazioni convincenti, dopo averne afferrato il significato, cosa questa non sempre facile servendosi delle edizioni di cui egli disponeva, tanto vero che il senso da lui attribuito alla sesta proposizione sembra essere più ristretto del dovere (2). Ma questo piccolo nèo non impedisce che il lavoro di FERMAT sia degno di recare il di lui nome.

13. - Seguendo l'ordine cronologico incontriamo fra i divinatori dei *Luoghi piani* FRANCESCO SCHOOTEN (1615-1660), il quale, in un lavoro (3) diviso in due libri, si propose di

---

(1) Per l'onore di APOLLONIO importa ricordare che tutte tre furono aggiunte da un tal CARMANDRO.

(2) Cfr. *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 48 nota.

(3) FRANCISCI À SCHOOTEN, *Exercitationum mathematicam. Liber III Continens Apollonii Pergae Loca plata restituta.* Lugd. Batav., 1656.

giustificare le asserzioni di APOLLONIO riferite nella *Collezione*. E, precisamente, nelle otto proposizioni del I Libro il geometra olandese dimostra quei teoremi che, al dire di PAPPO, si trovavano nel I Libro di APOLLONIO, servendosi a tale scopo di un certo numero di problemi, di cui egli suggerisce delle soluzioni, ottenute in parte mediante calcoli algebrici. A questi problemi tengono dietro alcuni problemi locali che, seguendo lo SCHOOTEN, si riferiscono al II Libro dei *Luoghi piani* e che egli espone, per desumerne le proposizioni racchiuse in questo: così dai problemi 1°-3° egli fa scaturire la prima delle proposizioni riferite da PAPPO, dai problemi 4°-8° la seconda, dal 9° la terza, dal 10° la quarta, dai problemi 11°-16° la quinta e dai 17°-18° l'ultima. Anche in questa seconda parte del suo lavoro lo SCHOOTEN usò di preferenza i metodi classici nell'antichità; ricorse, però, all'aiuto del calcolo quando lo reputò conveniente: il che dimostra non potersi il lavoro medesimo ritenere una fedele riproduzione dell'antico.

14. - Assai maggiori pretese di assomigliare all'opera perduta di APOLLONIO ha la restituzione che ROBERTO SIMSON (1) compì, tenendo il debito conto di quanto tentarono e fecero i due geometri che, come or ora dicemmo, prima di lui si accinsero alla stessa impresa.

Nel I Libro egli, dopo avere dimostrati i tre semplici teoremi che portano il nome di CARMANDRO, con sedici proposizioni mette in luce la verità di quelle importanti proprietà che PAPPO ha riassunto nella prima delle proposizioni da lui conservate; si volge poi alla quinta di esse estendendola (come già aveva fatto FERMAT) a tutti i luoghi piani: finalmente le proposizioni da lui distinte con i numeri 22-35 preludono a quelle (26^a-29^a e 30^a-34^a) nelle quali sono distese le due ultime proposizioni ricordate da PAPPO.

Nel II Libro egli, invocando i lemmi lasciati dal commentatore alessandrino per agevolare l'intelligenza di APOLLONIO, dimostra le proposizioni di cui sappiamo composto il II Libro sui *Luoghi piani* e, condotto dall'analogia, ne aggiunge del suo altre sei.

---

(1) *Apollonii Pergaei Locorum planorum libri II, restituti a* ROBERTO SIMSON. Glasguae, MDCCXLIX.

Quantunque non si possa ammettere una perfetta identità fra la divinazione ora discorsa e l'originale (basterebbe ad escluderlo il computo del numero delle proposizioni che contiene, numero che non raggiunge, come in questo, il 147), pure è certo che essa può compensare in parte della perdita del lavoro di APOLLONIO: a confermarlo osserveremo che in questo, per ognuno dei luoghi considerati, doveva trovarsi una speciale costruzione; orbene il geometra inglese non ha mancato di ricomporle e si può asserire che in generale vi è riuscito.

Notiamo finalmente che le principali fra le proposizioni riferite da PAPPO si trovano eziandio dimostrate nella seconda parte della già citata opera *Elements of geometry, geometrical analysis and plane trigonometry* del LESLIE (1).

---

(1) Si vegga il II Libro della seconda parte, prop. 1ª-17ª. Di quest'opera, oltre la traduzione tedesca del GRUSON, che già citammo, ne esiste una francese del COMTE, inserita nel *Second supplément de la géométrie déscriptive par* M. HACHETTE. Paris, 1822.

PROEMIO

Il programma che dobbiamo svolgere nell'attuale Libro della nostra storia è indicato dalle parole con cui chiudesi il precedente; determinare, cioè, quali indagini di matematica pura siano state istituite e quali nuove verità siano state scoperte da quelli, fra gli scienziati Greci, che si proposero di stabilire razionalmente le leggi governatrici di tutti quei fenomeni naturali che sembrano suscettibili di una trattazione veramente scientifica (1). Se per raggiungere tale intento saremo trascinati a qualche incursione sopra territori attigui, ma estranei, al campo di nostra pertinenza, sarà soltanto nei casi in cui riterremo ciò inevitabile, onde confidiamo che il lettore, riconoscendolo, non ci rimprovererà di avere deviato dalla traiettoria che ci siamo prefissata.

---

(1) Escludemmo i fenomeni concernenti i suoni, perchè le relative indagini non sono teoricamente abbastanza conclusive, benchè siano dovute ad EUCLIDE, TOLOMEO (v. WALLIS, *Opera*, T. III, Cambridge, 1699) e a molti altri (cfr. A. J. H. VINCENT, *Notice sur trois manuscrits grecs relatifs à la musique* in *Notices et Extraits des manuscrits*, etc., T. XVI, 2e Partie, 1847), i quali s'ispirarono ad ARCHITA TARANTINO, che riteneva geometria ed astronomia, aritmetica e musica "come due coppie di sorelle gemelle, simili agli organi che noi possediamo doppi: le due facce principali dell'essere sembrano riflettervisi dall'una all'altra „ (vol. or citato, p. 379).

stronomia (1), quanto a quei rami della fisica che servono ed essa come ausiliari, che poterono aspirare a conseguire ed ottennero un posto onorevole nella storia della matematica pura: essi, infatti, sia che studiassero le traiettorie degli astri o i pretesi suoni cagionati dai loro movimenti, sia che indagassero le leggi di questi moti, vuoi che si domandassero come è regolata la propagazione della luce o che si occupassero delle dimensioni della terra, sempre procedevano, od almeno tentavano di procedere, secondo le norme di una logica rigorosa; e così posero i fondamenti dell'astronomia matematica e della musica teorica, della meccanica, dell'ottica geometrica e della geodesia, non senza incidentalmente accrescere di nuove verità il patrimonio della geometria. Queste sole hanno per noi una diretta importanza; ma quale interesse presenterebbe una nuda enumerazione di esse, non accompagnata da alcuna notizia sul *come*, sul *quando*, sul *perchè* vennero scoperte? Certamente ben poca; onde è necessario che invitiamo il lettore a ritornare con noi agli albori della civiltà greca, per determinare i mezzi di cui gli Elleni si servirono per comporre un solido edificio scientifico con i materiali greggi che avevano recato in patria dall'Oriente e dal Mezzogiorno (2). Durante

---

de l'Acad. des Inscriptions, Sav étrang., T. VIII, I Partie, 1869): per l'astronomia, dunque, sussiste ciò che osservammo (p. 6) riguardo alla geometria.

(1) Si potrebbe anzi dire che è *soltanto* grazie a tale indirizzo che le ricerche astronomiche dei più antichi Greci meritano la stima che viene loro tributata; chè, d'altronde, i concetti aprioristici, che le informano, e le esperienze poco degne di fede, su cui riposano, le farebbero collocare ad un livello assai basso.

(2) Questa preistoria dell'astronomia venne ricostruita, quasi completamente, nella seconda metà del secolo passato da Th. H. Martin e G. V. Schiaparelli (i lavori dei quali saranno menzionati più innanzi); gli storici più antichi (Bailly, Montucla, Delambre) o trascurarono di occuparsene od incorsero in errori assai gravi o si lasciarono traviare da preconcetti aprioristici, onde non ci accadrà di citarli che per eccezione. Per alcuni punti v. P. Mansion, *Note sur le caractére géométrique de l'ancienne astronomie* (Abh. zur Gesch. der Mathem., IX Heft, 1899) et *Le système des sphères homocentriques comme origine du système des épicycles* (Festschrift M. Cantor anlässlich seines LXXX Geburtstages, Leipzig, 1909).

il nostro cammino c'imbatteremo in opinioni strane e talora erronee ed in ipotesi puerili ; ma le ricorderemo perchè la storia non può disinteressarsi delle une e delle altre, dovendo industriarsi a misurare quanto servirono al progresso ed avvertire quanto lo ostacolarono, nei casi (fortunatamente rari) in cui servirono di inciampo al cammino della scienza.

Ipotesi astronomiche contrarie alla sfericità della terra.

2. - Ci dispensiamo dal raccogliere le prove di cognizioni astronomico-cosmografiche somministrate da un attento studio delle opere di OMERO ed ESIODO, giacchè, se esse conducono a valutare quanto fosse conosciuto nei secoli X e IX a. C. intorno alla configurazione dei continenti e dei mari costituenti pei Greci l'universo, a determinare quanti e quali astri fossero già stati osservati, non gettano alcuna luce sulle persone e nemmeno sui popoli a cui si devono tali osservazioni (1). Rileviamo, soltanto, l'assimilazione della terra ad un disco galleggiante sul fiume Oceano (2) e sottoposto ad un emisfero, solcato dalle stelle, le quali, al sorgere del sole, si tuffano nell'acqua e scompaiono ; assimilazione che dimostra ad evidenza come le osservazioni in allora compiute non dovevano essere molto numerose, dal momento che erano così poco soddisfacenti le ipotesi con cui si era tentato di coordinarle fra di loro.

---

(1) Informazioni più estese e precise si attingono dai dottissimi lavori di TH. H. MARTIN intitolati: *Mémoire sur la cosmographie grecque à l'époque d'Homère et Hésiode* (Mém. de l'Acad. des Inscriptions et Belles Lettres, T. XXVIII, Ire Partie, 1874, p. 211-237) : *Mémoire sur la signification cosmographique du mythe d'Héstia dans la croyance antique des Grecs* (Ivi) ; *Mémoire sur la cosmographie populaire des Grecs après l'époque d'Homère et d'Hésiode* (Id., II Partie, 1876, p. 155-178) : *Comment Homère s'orientait* (Id., T. XXIX, II Partie, 1879, p. 1-28).

(2) Il diametro di questo disco non poteva superare le 12 miglia, tale essendo la distanza tra il centro della Trinacria ed il fiume Fasi in Colcide alle cui bocche la leggenda fa approdare gli Argonauti.

3. - Dimostrata fantastica la esistenza di un astronomo FERECIDE (1), al quale venne (2) gratuitamente attribuita la costruzione di un meccanismo rappresentante il movimento del sole, lo scienziato che determina od almeno segna la transizione dalla cosmografia poetica e popolare dei Greci ad una embrionale scienza astronomica è TALETE (cfr. p. 11) il quale venne perciò chiamato *padre dell'astronomia greca* (3). Egli, benchè ammettesse, al pari dei suoi conterranei anteriori, essere la terra galleggiante sull'acqua (anzi in ciò egli rinvenne una spiegazione dei terremoti), pure cambiò il fiume Oceano in un mare illimitato circondante la terra e questa concepì di forma sferica, secondo alcuni, discoide, al dir di altri (4). Si pretende anche che egli avesse capito essere la luna un corpo opaco illuminato dal sole e che ne deducesse una attendibile spiegazione del fenomeno delle eclissi solari (5); alla volta emisferica celeste egli sostituì

---

(1) Di tal nome ha esistito però un filosofo contemporaneo di ANASSIMANDRO: cfr. ZELLER, *Die Phil. der Griechen*, V Aufl., I Abth., I Hälfte, p. 79.

(2) BAILLY, *Histoire de l'astronomie ancienne*, Paris, MDCCLXXV, p. 197.

(3) Cfr. TH. H. MARTIN, *Mémoire sur les hypothèses astronomiques des plus anciens philosophes de la Grèce étrangers à la sphéricité de la terre* (Mém. de l'Acad. des Inscr. et Bel. Let., T. XXIX, II Partie, 1879, p. 29-252). A questo importante scritto attingemmo largamente nel redigere il presente Capitolo; ci servimmo anche della dissertazione di M. SARTORIUS, *Die Entwickeluug der Astronomie bei den Griechen bis Anaxagoras und Empedokles, in besonderem Anschluss an Theophrast* (Zeitschr. f. Philos. u. phil. Kritik, T. LXXXII e LXXXIII, 1883), ove è sfruttata la collezione del DIELS *Doxographi graeci* (Berlin, 1879) per quanto concerne la Scuola Jonica. Lo stesso è fatto per tutti i *fisiologi* greci da TALETE ad EMPEDOCLE nell'opera di P. TANNERY, *Pour l'histoire de la science hellène* (Paris, 1887), già da noi utilizzata e citata.

(4) P. TANNERY ha notato (*Science Hellène*, p. p. 7) l'analogia esistente tra le idee cosmologiche di TALETE e quelle che, a quanto riferisce G. MASPERO (*Histoire ancienne des peuples de l'Orient*, p. 76), avevano gli antichi Egiziani.

(5) TEONE SMIRNEO, ed. DUPUIS, p. 320. Si ricordi ancora la predizione di un'eclisse di sole (v. p. 13), e si noti che al capo del Scuola Jonica si fa merito di avere insegnato ai Greci la sostituzione dell'anno di 30×12 giorni con quello di 365.

l'intera sfera celeste, che divenne da allora in poi il campo di studio degli astronomi teorici, e propose anche di suddividerla in cinque zone. Che poi, come afferma CICERONE (1), TALETE abbia anche costruito un globo materiale per rappresentare il firmamento, è cosa non inverosimile, ma nemmeno certa: ove fosse dimostrata la verità di tale notizia, il filosofo di Mileto sarebbe anche il fondatore della *sferopea*, cioè di quella parte della meccanica applicata, a cui gli antichi attribuivano tanta importanza, avente appunto per oggetto l'imitazione materiale dei movimenti celesti (2).

4. - ANASSIMANDRO (cfr. p. 23), preteso successore di TALETE nella direzione della Scuola Jonica ed autore della più antica rappresentazione grafica della superficie terrestre, per primo osservò (a quanto attesta PLINIO) la obliquità dell'eclittica e concepì la possibilità che la terra esistesse nello spazio, senza alcun sostegno; questa, poi, ritenne non sferica, come volle alcuno, ma sibbene cilindrica, di altezza eguale alla terza parte del diametro della base. Tale cilindro sarebbe, secondo ANASSIMANDRO, immobile e circondato da tre anelli circolari: il solare, il lunare e lo stellare; del primo il diametro esterno è 28 e l'interno 27 volte il diametro della terra; del secondo i diametri sono uno 19 volte e l'altro (probabilmente) 18 volte quello della terra: e quelli del terzo sono 10 e 9 volte quello della terra. Tacendo del conato di ANASSIMANDRO per paragonare la grandezza del sole a quella della terra e della costruzione di una sfera per rappresentare i moti degli astri, che a lui viene attribuita da PLINIO e DIOGENE LAERZIO, ci arresteremo un istante sopra un'idea che PLUTARCO gli attribuisce. Secondo tale idea i pianeti in origine si muovevano lungo cerchi paralleli al circolo base del cilindro terrestre, ma il calore, facendo aumentare la tensione dell'aria ambiente, determinò dei vortici che fecero deviare i corpi celesti, più di tutti il sole, poi la luna, poi il cielo delle stelle fisse; se in questa congettura si trovi, come a noi sembra, la prima radice della

(1) *De Rep.*, I. p. 14.

(2) PROCLO-TAYLOR, T. I. p. 78: V. anche PAPPO ed. HULTSCH p. 1026, donde parrebbe essere ARCHIMEDE il primo che si occupò della sferopea: ad ogni modo è certo che il grande geometra dedicò a questa materia un'opera, oggi perduta.

famosa ipotesi vagamente formulata da BUFFON, intravveduta più chiaramente da KANT e completamente svolta da LAPLACE (1), altri giudichi: a noi basta avere segnalata tale antichissima spiegazione genetica del nostro sistema planetario.

5. - Il terzo dei fisici Joni, ANASSIMENE (cfr. p. 24), compose verso la fine del VI sec. a. C. un trattato filosofico in prosa, del quale il compilatore STOBEO (circa nell'anno 500 dell'E. v.) ci ha trasmesso un frammento. Benchè seguace di ANASSIMANDRO, egli si permise di introdurre nelle discipline da questo professate, alcune alterazioni di vario valore. Così egli ridusse il cilindro, con cui ANASSIMANDRO avea raffigurata la terra, ad avere altezza nulla, in altri termini ammise che tutti i corpi celesti, inclusa la terra, fossero dischi sottilissimi sospesi e volteggianti per l'aria; così, con TALETE e contro ANASSIMANDRO, ammise che la luna ricevesse la propria luce dal sole (2), e dedusse da ciò una spiegazione delle eclissi lunari, cosa a cui sembra non giungesse il saggio di Mileto. Aggiungasi che ANASSIMENE considerò le stelle fisse come enti analoghi alla luna ed al sole, ma posti ai confini del mondo; tutti gli astri ammise poi fissati sulla volta celeste, riguardata solida, come chiodi su cristallo; suppose, finalmente, che la volta celeste rotasse attorno ad un asse perpendicolare alla terra, cioè fosse mobile « come un cappello sulla testa ». Ciò, praticamente, val quanto ridurre ad un emisfero lo spazio solcato dagli astri, epperò, da un certo punto di vista, segna un regresso, i cui effetti sarebbero stati sensibili per l'avvenire della geometria e della meccanica celeste, se le indagini astronomiche non fossero poi state continuate fuori dalla Jonia ed in altra direzione, come vedremo nel Capitolo seguente.

6. - Ma, prima di dire per qual modo l'astronomia sia stata rimessa sulla buona strada, è dover nostro indicare alcuni altri scienziati che fecero adesione, più o meno completa, alle idee cosmologiche sostenute dai discepoli di TALETE.

---

(1) Vedi A. VON BRAUNMÜHL, *Geschichtliche Darstellung der haupsächlichsten Theorien über die Entstehung des Sonnensystems* Himmel und Erde, X Bd., 1898),

(2) TEONE SMIRNEO, ed. DUPUIS, p. 320.

Ed anzitutto ci si presenta il celebre ERACLITO d'Efeso (VI sec. a. C.) (1), il quale, benchè dotato di ottime qualità di pensatore originale, forse perchè deficiente di quelle di osservatore, fece piuttosto regredire che avanzare la scienza di cui ci occupiamo: infatti, l'errore da lui commesso nel giudicare luminosa la luna non è compensato dalla spiegazione della minore luminosità delle stelle, col ritenerle più lontane dalla terra di quanto sia il sole.

Peggio ancora comportossi rispetto alla scienza del cielo il fondatore della scuola Eleatica; infatti, SENOFANE di Colofone, col sostenere che gli astri hanno la vita di un giorno (cioè nascono nell'istante in cui li vediamo sorgere sull'orizzonte e si dissolvono quando li vediamo tramontare) non ha egli forse attentato alla vita stessa della scienza astronomica? E, coll'ammettere per rettilinee le traiettorie dei corpi celesti (2), non ha forse involontariamente agito nel senso di traviare gli scienziati dalla strada che sola potea condurli a glorioso porto? (3) Ed in tale opera di dissoluzione venne secondato dai propri discepoli, poichè gli Eleati, sforzandosi di negare l'esistenza del movimento (cfr. p. 56), indirettamente tentarono di rendere impossibile perfino il concetto di meccanica celeste.

Nè altre scuole filosofiche fecero meglio; così ANASSAGORA si rilevò, piuttosto un ardito costruttore di ipotesi, che un

---

(1) E. ZELLER, *Die Philosophie der Griechen*, I Tl., 5 Aufl., Leipzig, 1892, p. 623 e segg.

(2) TOLOMEO (*Composition mathématique*, ed. HALMA, T. I, Paris, 1813, p. 8) ha combattuta tale ipotesi, senza però indicare a chi appartenga: ma TEONE ALESSANDRINO (*Commentaire sur la Composition mathématique de C. Ptolemée*, ed. HALMA, T. I, Paris, 1821, p. 20-21) l'attribuisce ad EPICURO e la dice accettata da ERACLITO: ma essendo EPICURO nato nel 342 o 341 a. C. (ZELLER, op. cit., 3 Tl., 4 Aufl., p. 373 e segg.), non si può ivi alludere a ERACLITO d'Efeso, sibbene di ERACLIDE PONTICO, di cui parleremo fra poco. Alla stessa ipotesi — disapprovandola, ma senza designarne il creatore — fa cenno TEONE SMIRNEO (ed. DUPUIS, p. 200).

(3) Che queste non sian le uniche e nemmeno le maggiori stravaganze astronomiche partorite dalla sbrigliata fantasia dei Greci, lo sa chi conosce il *Saggio sopra gli errori popolari degli antichi* di G. LEOPARDI.

vero astronomo (1), nè meglio si comportarono rispetto all'astronomia il suo discepolo ARCHELAO Ateniese, e DIOGENE d'Apollonia, seguace d'ARCHELAO ed uno degli ultimi rappresentanti della filosofia jonica (2): altrettanto può ripetersi per ANTIFONTE d'Atene (cfr. p. 94), che qui rappresenta la setta dei sofisti, per EMPEDOCLE e per DEMOCRITO, il celebre atomista di Abdera « che il mondo a caso pone ». Tutti abbracciarono, non senza ritoccarle, le opinioni dei fisici della Jonia; senza discuterne o sperimentarne la verità, essi se ne servirono qual punto d'appoggio per le loro elucubrazioni metafisiche su la costituzione e la genesi del mondo: da essi la scienza positiva nulla poteva attendere ed infatti nulla a loro deve.

Ipotesi astronomica di Pitagora.

7. - La setta di filosofi, che fugò i sogni fatti dai Greci durante le tenebre della loro ignoranza in fatto di astronomia, è quella stessa a cui, come sappiamo (p. 34), devesi se la geometria e l'aritmetica passarono — per servirci della terminologia di AUGUSTO COMTE — dallo stadio metafisico allo stadio scientifico. Giacchè, generalmente, respingesi come falsa l'affermazione di EUDEMO da Rodi, riferita da TEONE SMIRNEO, che « ANASSIMANDRO trovò essere la terra sospesa in aria e moversi intorno al centro del mondo » (3), e ritiensi che PITAGORA (4), prima di qualunque altro, insegnasse essere la terra sferica ed abitabile anche nell'emisfero opposto a quello in cui sta la Grecia, es-

(1) In ANASSAGORA si è ravvisato un primo cenno dell'attrazione: v. una frase assai espressiva di JACOBI riferita da ALESSANDRO HUMBOLDT (*Kosmos*, T. II, 1847, p. 348).

(2) ZELLER, *Die Philosophie der Griechen*, I Tl., 5 Aufl. (Stuttgart, 1892), p. 259.

(3) THEONIS SMYRNAEI PLATONICI *Liber de astronomia*; ed. MARTIN, Paris, 1849, p. 323: ed. DUPUIS, p. 320.

(4) TH. H. MARTIN, *Études sur le Timée*, T. II, Paris, 1841, p. 101-119 e *Hypothèse astronomique de Pythagore* (Bull. di Bibl. e Storia, T. V, 1879, p. 99-126); G. V. SCHIAPARELLI, *I precursori di Copernico nell'antichità*, Milano, 1872, p. 2-4.

e dessa divisa in cinque zone col centro fisso nel centro l'universo; attorno ad essa, secondo il filosofo di SAMO, mo luogo le rivoluzioni, obliquamente contrarie del sole, la luna e degli altri pianeti (1). È questo il sistema platario che PLATONE fece esporre da un discepolo di PIGORA, TIMEO da Locri, nel dialogo che da questo intitoi; è in sostanza quello stesso a cui DANTE si inspirò ando scrisse:

Col viso ritornai per tutte quante
Le sette spere, e vidi questo globo (2)
Tal, ch'io sorrisi del suo vil sembiante.
E quel consiglio per migliore approbo
Che l'ha per meno: e chi ad altro pensa
Chiamar si puote veramente probo.
Vidi la figlia di Latona (3) incensa
Senza quell'ombra, che mi fu cagione
Perchè già la credetti rara e densa.
L'aspetto del tuo nato (4), Iperione,
Quivi sostenni, e vidi com' si move
Circa e vicino a lui Maia e Dione (5).
Quindi m'apparve il temperar di Giove
Tra il padre e il figlio (6): e quindi mi fu chiaro
Il variar che fanno di lor dove:
E tutti e sette mi si dimostraro
Quanto son grandi e quanto son veloci,
E come sono in distante riparo.

(*Paradiso*, XXII, 133-150).

Se poi PITAGORA macchiò le proprie geniali concezioni colla ntastica introduzione dell'*antiterra* (ἀντίχθων), per portare *dieci* (7) la totalità delle rivoluzioni celesti, e con lo sta-

---

1 Secondo alcuni Pitagorici, l'ordine in cui s'incontrano i ianeti, dopo la Luna, è il seguente: Mercurio, Venere, Marte, ove e Saturno (TEONE SMIRNEO, ed. DUPUIS, p. 226).

(2) La terra.

(3) La luna.

(4) Il sole.

(5) Mercurio e Venere.

(6) Saturno e Marte.

(7) Numero sacro ai Pitagorici perchè, essendo somma dei quattro primi numeri della serie naturale, lo consideravano a immagine della perfezione. Cfr. TEONE SMIRNEO (ed. DUPUIS), p. 76 e 154.

bilire una certa relazione — che gli storici non giunsero peranco a precisar bene (1) — tra le distanze dei corpi celesti dalla terra (2) ed i numeri corrispondenti ai vari suoni della scala musicale, relazione che spiegherebbe l'armonia delle sfere celesti e che gli fece considerare l'astronomia e musica come scienze sorelle (3), se egli si lasciò trascinare a tali divagazioni antiscientifiche, noi matematici non dobbiamo fargliene soverchio addebito: giacchè egli, anche in tale circostanza (cfr. p. 26-28), sforzandosi di stabilire un legame tra l'aritmetica ed i fenomeni naturali, si attenne a criteri adottati ancor oggi dagli scienziati. D'altronde DANTE stesso non si è forse lasciato sedurre dal fascino che possiedono i riavvicinamenti supposti da PITAGORA, quando aggiunse il cielo delle stelle fisse e quello del primo mobile, contenuti nell'Empireo, a quelli della Luna, del Sole e dei cinque pianeti, nell'intento di portare a dieci il numero totale dei cieli? E TICONE BRAHE (1546-1601) non ha forse fatto rivivere e tentato di spiegare l'armonia celeste? (4)

Ma anche coloro che negheranno a PITAGORA l'assoluzione che noi chiediamo pei suoi traviamenti, converranno indubbiamente con noi, che, col diffondere le nozioni della sfericità della terra e dei movimenti propri dei pianeti, da Occidente verso Oriente, secondo cerchi obliqui all'equatore celeste, coadiuvato dai propri discepoli, pose la base di quella colonna, di cui IPPARCO doveva somministrare il tronco e CLAUDIO TOLOMEO il capitello.

Va qui notato che l'idea della sfericità della terra non fu ammessa per vera da tutti i contemporanei di PITAGORA; tuttavia essa penetrò subito in una scuola differente da

---

(1) G. V. SCHIAPARELLI, *Opinioni e ricerche degli antichi sulle distanze e sulle grandezze dei corpi celesti* (Mem. dell'Ist. Lombardo, 3ª Serie, T. V, 1767, p. 6); P. TANNERY, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Paris, 1893, p. 323-336.

(2) Secondo PLINIO i Pitagorici ritenevano che la distanza fra la terra e la luna fosse di 126 mila stadi, il doppio quella tra la luna ed il sole, il triplo quella tra il sole ed il cielo delle stelle fisse.

(3) TEONE SMIRNEO (ed. DUPUIS), p. 10.

(4) Cfr. A. VOD HUMBOLDT, *Kosmos*, T. II, 1847, p. 353.

quella ove veniva ufficialmente professata, cioè in quella di SENOFANE: lo prova quanto ha sostenuto, circa cinque secoli a. C., PARMENIDE d'Elea (1); il quale, inoltre, con PITAGORA ammetteva l'identità della stella sera (Espero o Vespero) con quella del mattino (Lucifero o Fosforo) (2), ma da quello si staccava quando asseriva che, allontanandosi dalla terra, s'incontrasse prima la sfera celeste che contiene Mercurio, Marte, Giove e Saturno, poi il Sole, quindi la Luna e da ultimo Venere. Come egli si comportasse riguardo alla nozione dell'obliquità dell'eclittica, attribuita ad OINOPIDE (v. p. 61) (3), ci è ignoto.

Il primo sistema eliocentrico.

8. - Spento PITAGORA, l'abito dell'osservare non venne smesso dai Greci, nè cessò il desiderio di spiegare i fenomeni celesti, e, crescendo il numero dei fatti accertati, ben presto si vide come, volendosi rendere ragione del come avvengono i movimenti degli astri, fosse indispensabile staccarsi dai tre canoni che, secondo i placiti pitagorici, regolano tali movimenti, che cioè essi siano perfettamente circolari, concentrici e di velocità uniforme. Il primo che, per quanto si sa, professò tale abbandono è FILOLAO, contemporaneo di SOCRATE e DEMOCRITO, epperò non immediato discepolo di PITAGORA (4). FILOLAO nacque a Taranto od a Crotone, visse qualche tempo ad Eraclea in Lucania, e più tardi (cioè sullo scorcio del V sec. a. C.), a Tebe in Beozia; come sappiamo (p. 30) a lui si attribuisce la prima espo-

(1) TH. H. MARTIN, *Hypothèse astronomique de Parmenide* (Mém. de l'Acad. des Inscriptions et Belles Lettres, T. XXIX, 2ª Partie, 1879, p. 305-318).

(2) Tale identità venne probabilmente insegnata a PITAGORA dai Caldei o dagli Egiziani.

(3) TEONE SMIRNEO ed. DUPUIS, p. 321, riferendosi alla storia dell'astronomia di EUDEMO.

(4) TH. H. MARTIN, *Études sur le Timée de Platon*, T. II, Paris, 1841, p. 92-161, e *Hypothèse astronomique de Philolaus* (Bull. di Bibl. e Storia, ecc., T. V, 1872, p. 127-157); G. SCHIAPARELLI, *I precursori di Copernico*, ecc., p. 4-11.

sizione scritta delle dottrine pitagoriche. Come il Maestro, egli fa risiedere nel numero la causa costante dell'ordine che regna nel mondo, e fa dell'unità il principio dei numeri, anzi di tutto ciò che esiste, sicchè egli la identifica con Dio. Ma, a differenza di PITAGORA, affida la parte principale del suo sistema cosmologico, non soltanto al numero dieci, ma eziandio al fuoco centrale; quindi, secondo lui, i cinque pianeti (il sole, la luna, la terra, l'antiterra e le sfere delle stelle fisse) effettuano le loro rivoluzioni attorno al fuoco centrale con velocità differenti, ma in una stessa direzione da Occidente verso Oriente; la terra e l'antiterra con obliquità nulla, gli altri con diverse obliquità. Tale concezione del nostro sistema planetario è ingegnosa, ma — forse per essere aprioristica — è incapace di spiegare alcuni fatti attestati dall'esperienza; non può certamente dirsi identica al sistema che da COPERNICO prende nome, ma rappresenta indubbiamente il primo avviamento verso di questo, e per determinare tale originale orientazione era necessaria gran forza d'intelletto e non comune ardimento, visto che per gli antichi la fissità della terra appariva un fatto incontrastabile.

9. - Quelli che vennero dopo FILOLAO, ne modificarono in parte le idee (1). Meritano di essere specialmente ricordati ICETA ed ECFANTO (2), filosofi pitagoreggianti, vissuti a Siracusa tra la fine del V sec. ed il principio del IV, i quali, abbandonando in parte l'antico principio che la terra fosse immobile, ammisero la rotazione diurna di essa attorno al proprio asse (3). Ed in ciò furono seguiti da un noto discepolo

---

(1) Cfr. il frammento dei *Mémoires sur l'histoire des hypothèses astronomiques chez les Grecs et les Romains* di TH. H. MARTIN, pubblicato nella 2ª Parte (1883, p. 1-43) del T. XXX dei Mém. de l'Acad. des Inscript. et Belles-Lettres. Alcune idee ivi sostenute furono confutate dallo SCHIAPARELLI nella memoria: *Origine del sistema planetario eliocentrico presso i Greci* (Memorie del R. Ist. Lomb., Serie III, Vol. IX, 1898, p. 89-93).

(2) Cfr. P. TANNERY, *Pseudonymes antiques:* I. *Leucippe.* II. *Hicétas.* III. *Ecphante* (Revue des études grecques, T. X, 1897) e *Ecphante de Syracuse* (Arch. für die Gesch. der Philosophie, XI Bd., 1898).

(3) Va notato che TOLOMEO (*Compositions mathématique,* ed. HALMA, T. I, p. 19) combatte tale ipotesi senza citarne l'autore.

di PLATONE, ERACLIDE PONTICO (1), il quale, di più, introdusse due notevoli innovazioni nelle idee pitagoriche: cioè soppresse l'ente fantastico che è l'antiterra ed abbandonò il canone della concentricità delle orbite planetarie, facendo, invece, il sole centro delle rivoluzioni di Mercurio e Venere. Ecco, dunque, un altro passo importante verso il sistema eliocentrico, tanto importante che, nel sistema astronomico, di ERACLIDE, venne ravvisato (2) il primo schema di quello che reca d'ordinario il nome di TICONE BRAHE. Nè va taciuto che ERACLIDE (3) alluse anche all'ipotesi della rotazione della terra attorno al sole, ma tosto l'abbandonò, non già perchè egli la giudicasse inverosimile, ma perchè gli parve di indole esclusivamente geometrica.

Emerge da quanto precede che ben poca strada rimaneva ai Greci da compiere per giungere a concepire il moto eliocentrico dei pianeti; ma essi hanno effettivamente percorso anche questo tratto di cammino! Per opera di chi, è ignoto; ma è indubitato che sino dai tempi di ALESSANDRO MAGNO era stata avvertita la possibilità di dare una spiegazione attendibile dei fenomeni celesti, per mezzo di movimenti attorno al sole (4). Due nomi però vengono dagli antichi collegati a tale importante osservazione, cioè ARISTARCO di Samo e SELEUCO di Babilonia; narrasi, infatti, che CLEANTE Stoico (5) accusasse il primo di empietà per avere « turbato il riposo di Estia » (cioè della terra, riguardata allora, per dogma, come centro e focolare del mondo); d'altronde PLUTARCO nell'VIII delle sue *Questioni platoniche* scrisse: « forse che si deve intendere la terra non rimanersi fissa, come poi mostrarono ARISTARCO e SELEUCO, il primo sup-

---

(1) Cfr. F. HULTSCH, *Das astronomische System des Herakleides von Pontos* (Jahrb. für Philologie, 1896) e P. TANNERY, *Sur Héraclides du Pont* (Revue des études grecques, 1899).

(2) SCHIAPARELLI, *Come i Greci arrivarono al primo concetto del sistema planetario eliocentrico detto oggi Copernicano* (Atene e Roma, n. 2, 1898), nonchè *Origine del sistema*, ecc.

(3) V. TH. H. MARTIN nel frammento succitato, p. 25 e segg.

(4) SCHIAPARELLI, *I precursori di Copernico*, p. 30.

(5) È questi colui che succedette a ZENONE da Cizico come capo della Scuola stoica: v. ZELLER, *Die Philos. der Griechen*, 3 Tl., 1 Aufl., Leipzig, 1909, p. 34.

ponendolo soltanto, il secondo anche affermandolo? » (1).

Dei due valentuomini or citati, il primo è un celebre astronomo (2) discepolo di STRATONE da Lampsaco e contemporaneo di ARCHIMEDE (3), di cui possediamo un'opera considerata per « uno dei più bei monumenti dell'antica geometria » (4), che esamineremo fra poco (n. 19); l'altro è un pensatore, di poco anteriore ad IPPARCO, il cui nome si è conservato nella storia, come quello dell'ultimo rappresentante in Occidente della dottrina del movimento della terra attorno al sole. Dopo di lui, per varie ragioni che furono già profondamente investigate (5) e che a noi non importa di riferire, il sistema eliocentrico venne abbandonato, sicchè lo si cercherebbe invano nelle opere di IPPARCO e TOLOMEO, i quali, invece, adottarono e sanzionarono colla loro imponente autorità il sistema degli epicicli, ideato da APOLLONIO di PERGA, sistema che sembrava più idoneo alla rappresentazione dei fenomeni celesti ed ai calcoli astronomici. Ma la presenza sia pur transitoria di esso andava qui notata: come va rilevato che gran parte delle indagini inaugurate dagli astronomi sinora ricordati, a partire da TALETE, rendevano urgente di conoscere le relazioni che intercedono fra i cerchi della medesima sfera, essendo ragionevole la fiducia che, così, grande luce sarebbesi sparsa sul modo in cui succedono i fenomeni, dei quali è teatro la volta celeste. A questo stimolo, già così potente, verso lo studio della geometria sferica, altri ne aggiunsero, e non meno efficaci, le investigazioni che, con analogo intento, vennero compiute da coloro di cui stiamo per occuparci.

---

(1) Cfr. anche il passo dell'*Arenario* riferito più avanti (n. 22).

(2) È uno dei pochissimi che TOLOMEO ha citati (*Compos. mathém.*, ed HALMA, T. I, p. 160, 162, 163), ricordandone un'osservazione astronomica eseguita nel 281 a. C. Riguardo a lui v. SUSEMIHL, *Gecchichte der griechischen Literatur in der Alexandrinerzeit*, T. I, Leipzig, 1891, p. 718-720.

(3) G. SCHIAPARELLI, *Opinioni e ricerche degli antichi*, ecc., p. 8.

(4) Visse intorno il 270 a. C. L'opera ARISTARCHI SAMII, *De mundi systemate* (Parigi, 1644) appartiene totalmente a ROBERVAL, come fece rilevare TH. H. MARTIN (*Sur un ouvrage faussement attribué à Aristarque de Samos*, Bull. di bibl. e storia, T. III, 1871).

(5) V. l'articolo succitato dello SCHIAPARELLI, *Come i greci*, ecc.

Idee astronomiche di Platone (1).

10. - In astronomia il divino filosofo, come riguardo alle altre discipline, ebbe delle vedute d'insieme, che meritano di venire onorevolmente menzionate. Va specialmente ricordato, che egli avvertì non essere l'astronomia una scienza puramente di osservazione (2), ma ne ravvisò il duplice carattere, matematico e fisico: e — conformemente all'idea che, nelle scienze fisiche, si è costretti ad accontentarsi della verosimiglianza, appartenendo esse al dominio dell'opinione — osservò che l'astronomia, grazie ai suoi rapporti coll'aritmetica e la geometria, è il ramo della fisica meno incerto, tanto che, in certe questioni, raggiunge un grado di verosimiglianza attiguo alla certezza.

Prescindendo da queste e da altre analoghe considerazioni, le quali non sono prive di originalità, PLATONE in astronomia fu imitatore. Basta, infatti, leggere il *Timeo* (3) per convincersi che egli, al pari dei discepoli di PITAGORA, intendeva spiegare tutti i fenomeni celesti mediante rivoluzioni esattamente circolari, effettuate attorno al centro im-

---

(1) Vedi: TH. H. MARTIN, *Études sur le Timée de Platon*, T. II (Paris, 1841), p. 42-48, 61-66 e 75-92; inoltre dello stesso autore *Hypothèse astronomique de Platon* (Mem. de l'Académie des Inscript. et Belles-Lettres, T. XXX, I Partie, 1881, p. 1-152) e B. ROTHLAUF, *Die Physik Plato's, eine Studie auf Grund seiner Werke*, II Theil (München, 1888).

(2) Lo provano i seguenti passi dell'*Epinomide:* " Ignorate voi, che è necessariamente assai savio quello che è veramente astronomo, non astronomo al modo di ESIODO, occupato, cioè, ad osservare il sorgere ed il tramontare degli astri, ma quello che scruta le rivoluzioni dei sette pianeti, della conoscenza dei quali è appena capace tutto il genio dell'uomo? .. " Un astronomo dev'essere il più saggio degli uomini: la sua mente dev'essere opportunamente educata sin dalla sua gioventù, specialmente nei necessari studi matematici: cioè tanto nella conoscenza dei numeri, quanto in quell'altro ramo della matematica, che, quantunque strettamente legato alla scienza del cielo, noi chiamiamo irrazionalmente *geometria*, cioè misura della terra ".

(3) Cfr. MARTIN, *Études sur le Timée de Platon*. Paris, 1841.

mobile della terra (cioè al centro dell'universo), con velocità costanti per ogni rivoluzione, ma differenti per ciascuno dei sette corpi mobili: i raggi delle orbite del Sole, di Venere, Mercurio, Marte, Giove e Saturno sarebbero, secondo PLATONE, misurate dai numeri 2, 3, 4, 8, 9, 27, preso per unità il raggio dell'orbita lunare. Di più, appoggiandosi ai risultati di osservazioni fatte dai Pitagorici, PLATONE propose di decomporre il movimento apparente di ciascun astro in due, entrambi circolari, uno diurno, eguale, parallelo e nello stesso senso di quello delle stelle fisse attorno all'asse dell'equatore, l'altro obliquamente contrario e molto più lento per ognuno degli altri astri attorno all'asse dello zodiaco. Questi due movimenti simultanei lo condussero a concepire una traiettoria elicoidale (1), segnalando la quale il grande filosofo introdusse, benchè sotto forma vaga, il concetto di *curva spirale* (2) (ἕλιξ: cfr. p. 123), concetto che era destinato a prendere un posto stabile nella geometria, benchè non abbia ancora raggiunto quella precisione che deve possedere qualunque idea matematica (3).

Ai concetti astronomici ora schizzati, PLATONE si attenne durante gran parte della sua vita, chè se ne rinvengono tracce, tanto negli scritti anteriori al *Timeo*, quanto nelle *Leggi*, pubblicate da FILIPPO OPUNZIO, e nell'*Epinomide*; d'altronde, l'importante problema geometrico da lui proposto « quali sono i movimenti circolari ed uniformi che possono spiegare in modo soddisfacente i fenomeni offerti dalle rivoluzioni planetarie? » (4), basta a dimostrare come egli si

---

(1) Cfr. *Comméntaire de Théon* (ed. HALMA, T. I, p. 17).

(2) Cfr. TEONE SMIRNEO, ed. DUPUIS, p. 328. V. anche V. A. SÉDILLOT, *De l'origine de la semaine planétaire et de la spirale de Platon* (Comptes rendus, etc., 7 dicembre 1872).

(3) Veggasi infatti l'articolo *Spirale* scritto dal D'ALEMBERT per l'*Encyclopédie méthodique*, nonchè gli articoli *Radiale* e *Spirale* del *Dictionnaire des mathématiques* del MONTFERRIER.

(4) Secondo GEMINO (*Isagoge*, Cap. I) l'origine di tal questione trovasi nella scuola dei Pitagorici, chè questi dicevano: " Pei corpi divini ed eterni non si può supporre che essi vadano ora più presto e ora più adagio e che ora si fermino. Poichè neanche in una persona giudiziosa ed equilibrata si trovano tali anomalie nel modo di andare. È vero che i bisogni della vita possono dare occasione agli uomini di camminare ora più

esse come sappiamo (v. p. 394) dice che se **T** è una trasformazione geometrica piana di una certa categoria, ad un luogo piano corrisponde un altro luogo piano; orbene FERMAT per dimostrarla la suddivide in otto. Per esporne succintamente le ipotesi designeremo con: *O* un'omotetia, *I* una trasformazione per raggi vettori reciproci, *R* una rotazione, *S* una trasformazione per similitudine e *T* una traslazione; intenderemo poi che un prodotto del tipo *PQ*... rappresenti la successione delle trasformazioni *P*, *Q*,..., e che, se ivi interviene una *R* assieme ad una *O* o una *I*, essa abbia lo stesso centro di queste. Posto ciò, i casi considerati da FERMAT corrispondono a supporre che **T** sia una delle trasformazioni seguenti: *O*, *I*, *OR*, *IR*, *S*, *IT*, *ORT*, *IRT*. A ragione FERMAT osserva poi, che la seconda delle proposizioni registrate da PAPPO è di per sè evidente, mentre le due successive sono semplici corollari di teoremi di EUCLIDE (1). La successiva proposizione viene dimostrata in un modo dá cui emerge che è vera, non soltanto per una retta, ma anche per una circonferenza; la sesta è dimostrata soltanto per rette concorrenti; la settima lo è in base ad un'interpretazione speciale delle parole di PAPPO, e l'ultima, dopo avere modificate radicalmente le parole del COMMANDINO.

Più agevole còmpito è la divinazione del II Libro dei *Luoghi piani*, avendo PAPPO enunciati tutti i teoremi che esso contiene; FERMAT, quindi, non ebbe altro che a provvederli di dimostrazioni convincenti, dopo averne afferrato il significato, cosa questa non sempre facile servendosi delle edizioni di cui egli disponeva, tanto vero che il senso da lui attribuito alla sesta proposizione sembra essere più ristretto del dovere (2). Ma questo piccolo nèo non impedisce che il lavoro di FERMAT sia degno di recare il di lui nome.

13. - Seguendo l'ordine cronologico incontriamo fra i divinatori dei *Luoghi piani* FRANCESCO SCHOOTEN (1615-1660), il quale, in un lavoro (3) diviso in due libri, si propose di

---

(1) Per l'onore di APOLLONIO importa ricordare che tutte tre furono aggiunte da un tal CARMANDRO.

(2) Cfr. *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 48 nota.

(3) FRANCISCI À SCHOOTEN, *Exercitationum mathematicam. Liber III Continens Apollonii Pergae Loca plata restituta.* Lugd. Batav., 1656.

giustificare le asserzioni di APOLLONIO riferite nella *Collezione*. E, precisamente, nelle otto proposizioni del I Libro il geometra olandese dimostra quei teoremi che, al dire di PAPPO, si trovavano nel I Libro di APOLLONIO, servendosi a tale scopo di un certo numero di problemi, di cui egli suggerisce delle soluzioni, ottenute in parte mediante calcoli algebrici. A questi problemi tengono dietro alcuni problemi locali che, seguendo lo SCHOOTEN, si riferiscono al II Libro dei *Luoghi piani* e che egli espone, per desumerne le proposizioni racchiuse in questo: così dai problemi 1°-3° egli fa scaturire la prima delle proposizioni riferite da PAPPO, dai problemi 4°-8° la seconda, dal 9° la terza, dal 10° la quarta, dai problemi 11°-16° la quinta e dai 17°-18° l'ultima. Anche in questa seconda parte del suo lavoro lo SCHOOTEN usò di preferenza i metodi classici nell'antichità; ricorse, però, all'aiuto del calcolo quando lo reputò conveniente: il che dimostra non potersi il lavoro medesimo ritenere una fedele riproduzione dell'antico.

14. - Assai maggiori pretese di assomigliare all'opera perduta di APOLLONIO ha la restituzione che ROBERTO SIMSON (1) compì, tenendo il debito conto di quanto tentarono e fecero i due geometri che, come or ora dicemmo, prima di lui si accinsero alla stessa impresa.

Nel I Libro egli, dopo avere dimostrati i tre semplici teoremi che portano il nome di CARMANDRO, con sedici proposizioni mette in luce la verità di quelle importanti proprietà che PAPPO ha riassunto nella prima delle proposizioni da lui conservate; si volge poi alla quinta di esse estendendola (come già aveva fatto FERMAT) a tutti i luoghi piani: finalmente le proposizioni da lui distinte con i numeri 22-35 preludono a quelle (26^a-29^a e 30^a-34^a) nelle quali sono distese le due ultime proposizioni ricordate da PAPPO.

Nel II Libro egli, invocando i lemmi lasciati dal commentatore alessandrino per agevolare l'intelligenza di APOLLONIO, dimostra le proposizioni di cui sappiamo composto il II Libro sui *Luoghi piani* e, condotto dall'analogia, ne aggiunge del suo altre sei.

---

(1) *Apollonii Pergaei Locorum planorum libri II, restituti a* ROBERTO SIMSON. Glasguae, MDCCXLIX.

Quantunque non si possa ammettere una perfetta identità fra la divinazione ora discorsa e l'originale (basterebbe ad escluderlo il computo del numero delle proposizioni che contiene, numero che non raggiunge, come in questo, il 147), pure è certo che essa può compensare in parte della perdita del lavoro di APOLLONIO: a confermarlo osserveremo che in questo, per ognuno dei luoghi considerati, doveva trovarsi una speciale costruzione; orbene il geometra inglese non ha mancato di ricomporle e si può asserire che in generale vi è riuscito.

Notiamo finalmente che le principali fra le proposizioni riferite da PAPPO si trovano eziandio dimostrate nella seconda parte della già citata opera *Elements of geometry, geometrical analysis and plane trigonometry* del LESLIE (1).

---

(1) Si vegga il II Libro della seconda parte, prop. 1ª-17ª. Di quest'opera, oltre la traduzione tedesca del GRUSON, che già citammo, ne esiste una francese del COMTE, inserita nel *Second supplément de la géométrie déscriptive par* M. HACHETTE. Paris, 1822.

PROEMIO

Il programma che dobbiamo svolgere nell'attuale Libro della nostra storia è indicato dalle parole con cui chiudesi il precedente; determinare, cioè, quali indagini di matematica pura siano state istituite e quali nuove verità siano state scoperte da quelli, fra gli scienziati Greci, che si proposero di stabilire razionalmente le leggi governatrici di tutti quei fenomeni naturali che sembrano suscettibili di una trattazione veramente scientifica (1). Se per raggiungere tale intento saremo trascinati a qualche incursione sopra territori attigui, ma estranei, al campo di nostra pertinenza, sarà soltanto nei casi in cui riterremo ciò inevitabile, onde confidiamo che il lettore, riconoscendolo, non ci rimprovererà di avere deviato dalla traiettoria che ci siamo prefissata.

---

(1) Escludemmo i fenomeni concernenti i suoni, perchè le relative indagini non sono teoricamente abbastanza conclusive, benchè siano dovute ad EUCLIDE, TOLOMEO (v. WALLIS, *Opera*, T. III, Cambridge, 1699) e a molti altri (cfr. A. J. H. VINCENT, *Notice sur trois manuscrits grecs relatifs à la musique* in *Notices et Extraits des manuscrits*, etc., T. XVI, 2e Partie, 1847), i quali s'ispirarono ad ARCHITA TARANTINO, che riteneva geometria ed astronomia, aritmetica e musica "come due coppie di sorelle gemelle, simili agli organi che noi possediamo doppi: le due facce principali dell'essere sembrano riflettervisi dall'una all'altra „ (vol. or citato, p. 379).

stronomia (1), quanto a quei rami della fisica che servono ed essa come ausiliari, che poterono aspirare a conseguire ed ottennero un posto onorevole nella storia della matematica pura: essi, infatti, sia che studiassero le traiettorie degli astri o i pretesi suoni cagionati dai loro movimenti, sia che indagassero le leggi di questi moti, vuoi che si domandassero come è regolata la propagazione della luce o che si occupassero delle dimensioni della terra, sempre procedevano, od almeno tentavano di procedere, secondo le norme di una logica rigorosa; e così posero i fondamenti dell'astronomia matematica e della musica teorica, della meccanica, dell'ottica geometrica e della geodesia, non senza incidentalmente accrescere di nuove verità il patrimonio della geometria. Queste sole hanno per noi una diretta importanza; ma quale interesse presenterebbe una nuda enumerazione di esse, non accompagnata da alcuna notizia sul *come*, sul *quando*, sul *perchè* vennero scoperte? Certamente ben poca; onde è necessario che invitiamo il lettore a ritornare con noi agli albori della civiltà greca, per determinare i mezzi di cui gli Elleni si servirono per comporre un solido edificio scientifico con i materiali greggi che avevano recato in patria dall'Oriente e dal Mezzogiorno (2). Durante

---

de l'Acad. des Inscriptions, Sav étrang., T. VIII, I Partie, 1869): per l'astronomia, dunque, sussiste ciò che osservammo (p. 6) riguardo alla geometria.

(1) Si potrebbe anzi dire che è *soltanto* grazie a tale indirizzo che le ricerche astronomiche dei più antichi Greci meritano la stima che viene loro tributata; chè, d'altronde, i concetti aprioristici, che le informano, e le esperienze poco degne di fede, su cui riposano, le farebbero collocare ad un livello assai basso.

(2) Questa preistoria dell'astronomia venne ricostruita, quasi completamente, nella seconda metà del secolo passato da Th. H. Martin e G. V. Schiaparelli (i lavori dei quali saranno menzionati più innanzi); gli storici più antichi (Bailly, Montucla, Delambre) o trascurarono di occuparsene od incorsero in errori assai gravi o si lasciarono traviare da preconcetti aprioristici, onde non ci accadrà di citarli che per eccezione. Per alcuni punti v. P. Mansion, *Note sur le caractére géométrique de l'ancienne astronomie* (Abh. zur Gesch. der Mathem., IX Heft, 1899) et *Le système des sphères homocentriques comme origine du système des épicycles* (Festschrift M. Cantor anlässlich seines LXXX Geburtstages, Leipzig, 1909).

il nostro cammino c'imbatteremo in opinioni strane e talora erronee ed in ipotesi puerili ; ma le ricorderemo perchè la storia non può disinteressarsi delle une e delle altre, dovendo industriarsi a misurare quanto servirono al progresso ed avvertire quanto lo ostacolarono, nei casi (fortunatamente rari) in cui servirono di inciampo al cammino della scienza.

Ipotesi astronomiche contrarie alla sfericità della terra.

2. - Ci dispensiamo dal raccogliere le prove di cognizioni astronomico-cosmografiche somministrate da un attento studio delle opere di OMERO ed ESIODO, giacchè, se esse conducono a valutare quanto fosse conosciuto nei secoli X e IX a. C. intorno alla configurazione dei continenti e dei mari costituenti pei Greci l'universo, a determinare quanti e quali astri fossero già stati osservati, non gettano alcuna luce sulle persone e nemmeno sui popoli a cui si devono tali osservazioni (1). Rileviamo, soltanto, l'assimilazione della terra ad un disco galleggiante sul fiume Oceano (2) e sottoposto ad un emisfero, solcato dalle stelle, le quali, al sorgere del sole, si tuffano nell'acqua e scompaiono ; assimilazione che dimostra ad evidenza come le osservazioni in allora compiute non dovevano essere molto numerose, dal momento che erano così poco soddisfacenti le ipotesi con cui si era tentato di coordinarle fra di loro.

---

(1) Informazioni più estese e precise si attingono dai dottissimi lavori di TH. H. MARTIN intitolati: *Mémoire sur la cosmographie grecque à l'époque d'Homère et Hésiode* (Mém. de l'Acad. des Inscriptions et Belles Lettres, T. XXVIII, Ire Partie, 1874, p. 211-237) : *Mémoire sur la signification cosmographique du mythe d'Héstia dans la croyance antique des Grecs* (Ivi) ; *Mémoire sur la cosmographie populaire des Grecs après l'époque d'Homère et d'Hésiode* (Id., II Partie, 1876, p. 155-178) : *Comment Homère s'orientait* (Id., T. XXIX, II Partie, 1879, p. 1-28).

(2) Il diametro di questo disco non poteva superare le 12 miglia, tale essendo la distanza tra il centro della Trinacria ed il fiume Fasi in Colcide alle cui bocche la leggenda fa approdare gli Argonauti.

3. - Dimostrata fantastica la esistenza di un astronomo FERECIDE (1), al quale venne (2) gratuitamente attribuita la costruzione di un meccanismo rappresentante il movimento del sole, lo scienziato che determina od almeno segna la transizione dalla cosmografia poetica e popolare dei Greci ad una embrionale scienza astronomica è TALETE (cfr. p. 11) il quale venne perciò chiamato *padre dell'astronomia greca* (3). Egli, benchè ammettesse, al pari dei suoi conterranei anteriori, essere la terra galleggiante sull'acqua (anzi in ciò egli rinvenne una spiegazione dei terremoti), pure cambiò il fiume Oceano in un mare illimitato circondante la terra e questa concepì di forma sferica, secondo alcuni, discoide, al dir di altri (4). Si pretende anche che egli avesse capito essere la luna un corpo opaco illuminato dal sole e che ne deducesse una attendibile spiegazione del fenomeno delle eclissi solari (5); alla volta emisferica celeste egli sostituì

---

(1) Di tal nome ha esistito però un filosofo contemporaneo di ANASSIMANDRO: cfr. ZELLER, *Die Phil. der Griechen*, V Aufl., I Abth., I Hälfte, p. 79.

(2) BAILLY, *Histoire de l'astronomie ancienne*, Paris, MDCCLXXV, p. 197.

(3) Cfr. TH. H. MARTIN, *Mémoire sur les hypothèses astronomiques des plus anciens philosophes de la Grèce étrangers à la sphéricité de la terre* (Mém. de l'Acad. des Inscr. et Bel. Let., T. XXIX, II Partie, 1879, p. 29-252). A questo importante scritto attingemmo largamente nel redigere il presente Capitolo; ci servimmo anche della dissertazione di M. SARTORIUS, *Die Entwickeluug der Astronomie bei den Griechen bis Anaxagoras und Empedokles, in besonderem Anschluss an Theophrast* (Zeitschr. f. Philos. u. phil. Kritik, T. LXXXII e LXXXIII, 1883), ove è sfruttata la collezione del DIELS *Doxographi graeci* (Berlin, 1879) per quanto concerne la Scuola Jonica. Lo stesso è fatto per tutti i *fisiologi* greci da TALETE ad EMPEDOCLE nell'opera di P. TANNERY, *Pour l'histoire de la science hellène* (Paris, 1887), già da noi utilizzata e citata.

(4) P. TANNERY ha notato (*Science Hellène*, p. p. 7) l'analogia esistente tra le idee cosmologiche di TALETE e quelle che, a quanto riferisce G. MASPERO (*Histoire ancienne des peuples de l'Orient*, p. 76), avevano gli antichi Egiziani.

(5) TEONE SMIRNEO, ed. DUPUIS, p. 320. Si ricordi ancora la predizione di un'eclisse di sole (v. p. 13), e si noti che al capo del Scuola Jonica si fa merito di avere insegnato ai Greci la sostituzione dell'anno di 30×12 giorni con quello di 365.

l'intera sfera celeste, che divenne da allora in poi il campo di studio degli astronomi teorici, e propose anche di suddividerla in cinque zone. Che poi, come afferma CICERONE (1), TALETE abbia anche costruito un globo materiale per rappresentare il firmamento, è cosa non inverosimile, ma nemmeno certa: ove fosse dimostrata la verità di tale notizia, il filosofo di Mileto sarebbe anche il fondatore della *sferopea*, cioè di quella parte della meccanica applicata, a cui gli antichi attribuivano tanta importanza, avente appunto per oggetto l'imitazione materiale dei movimenti celesti (2).

4. - ANASSIMANDRO (cfr. p. 23), preteso successore di TALETE nella direzione della Scuola Jonica ed autore della più antica rappresentazione grafica della superficie terrestre, per primo osservò (a quanto attesta PLINIO) la obliquità dell'eclittica e concepì la possibilità che la terra esistesse nello spazio, senza alcun sostegno; questa, poi, ritenne non sferica, come volle alcuno, ma sibbene cilindrica, di altezza eguale alla terza parte del diametro della base. Tale cilindro sarebbe, secondo ANASSIMANDRO, immobile e circondato da tre anelli circolari: il solare, il lunare e lo stellare; del primo il diametro esterno è 28 e l'interno 27 volte il diametro della terra; del secondo i diametri sono uno 19 volte e l'altro (probabilmente) 18 volte quello della terra: e quelli del terzo sono 10 e 9 volte quello della terra. Tacendo del conato di ANASSIMANDRO per paragonare la grandezza del sole a quella della terra e della costruzione di una sfera per rappresentare i moti degli astri, che a lui viene attribuita da PLINIO e DIOGENE LAERZIO, ci arresteremo un istante sopra un'idea che PLUTARCO gli attribuisce. Secondo tale idea i pianeti in origine si muovevano lungo cerchi paralleli al circolo base del cilindro terrestre, ma il calore, facendo aumentare la tensione dell'aria ambiente, determinò dei vortici che fecero deviare i corpi celesti, più di tutti il sole, poi la luna, poi il cielo delle stelle fisse; se in questa congettura si trovi, come a noi sembra, la prima radice della

(1) *De Rep.*, I. p. 14.

(2) PROCLO-TAYLOR, T. I. p. 78: V. anche PAPPO ed. HULTSCH p. 1026, donde parrebbe essere ARCHIMEDE il primo che si occupò della sferopea: ad ogni modo è certo che il grande geometra dedicò a questa materia un'opera, oggi perduta.

famosa ipotesi vagamente formulata da BUFFON, intravveduta più chiaramente da KANT e completamente svolta da LAPLACE (1), altri giudichi: a noi basta avere segnalata tale antichissima spiegazione genetica del nostro sistema planetario.

5. - Il terzo dei fisici Joni, ANASSIMENE (cfr. p. 24), compose verso la fine del VI sec. a. C. un trattato filosofico in prosa, del quale il compilatore STOBEO (circa nell'anno 500 dell'E. v.) ci ha trasmesso un frammento. Benchè seguace di ANASSIMANDRO, egli si permise di introdurre nelle discipline da questo professate, alcune alterazioni di vario valore. Così egli ridusse il cilindro, con cui ANASSIMANDRO avea raffigurata la terra, ad avere altezza nulla, in altri termini ammise che tutti i corpi celesti, inclusa la terra, fossero dischi sottilissimi sospesi e volteggianti per l'aria; così, con TALETE e contro ANASSIMANDRO, ammise che la luna ricevesse la propria luce dal sole (2), e dedusse da ciò una spiegazione delle eclissi lunari, cosa a cui sembra non giungesse il saggio di Mileto. Aggiungasi che ANASSIMENE considerò le stelle fisse come enti analoghi alla luna ed al sole, ma posti ai confini del mondo; tutti gli astri ammise poi fissati sulla volta celeste, riguardata solida, come chiodi su cristallo; suppose, finalmente, che la volta celeste rotasse attorno ad un asse perpendicolare alla terra, cioè fosse mobile « come un cappello sulla testa ». Ciò, praticamente, val quanto ridurre ad un emisfero lo spazio solcato dagli astri, epperò, da un certo punto di vista, segna un regresso, i cui effetti sarebbero stati sensibili per l'avvenire della geometria e della meccanica celeste, se le indagini astronomiche non fossero poi state continuate fuori dalla Jonia ed in altra direzione, come vedremo nel Capitolo seguente.

6. - Ma, prima di dire per qual modo l'astronomia sia stata rimessa sulla buona strada, è dover nostro indicare alcuni altri scienziati che fecero adesione, più o meno completa, alle idee cosmologiche sostenute dai discepoli di TALETE.

---

(1) Vedi A. VON BRAUNMÜHL, *Geschichtliche Darstellung der haupsächlichsten Theorien über die Entstehung des Sonnensystems* Himmel und Erde, X Bd., 1898),

(2) TEONE SMIRNEO, ed. DUPUIS, p. 320.

Ed anzitutto ci si presenta il celebre ERACLITO d'Efeso (VI sec. a. C.) (1), il quale, benchè dotato di ottime qualità di pensatore originale, forse perchè deficiente di quelle di osservatore, fece piuttosto regredire che avanzare la scienza di cui ci occupiamo: infatti, l'errore da lui commesso nel giudicare luminosa la luna non è compensato dalla spiegazione della minore luminosità delle stelle, col ritenerle più lontane dalla terra di quanto sia il sole.

Peggio ancora comportossi rispetto alla scienza del cielo il fondatore della scuola Eleatica; infatti, SENOFANE di Colofone, col sostenere che gli astri hanno la vita di un giorno (cioè nascono nell'istante in cui li vediamo sorgere sull'orizzonte e si dissolvono quando li vediamo tramontare) non ha egli forse attentato alla vita stessa della scienza astronomica? E, coll'ammettere per rettilinee le traiettorie dei corpi celesti (2), non ha forse involontariamente agito nel senso di traviare gli scienziati dalla strada che sola potea condurli a glorioso porto? (3) Ed in tale opera di dissoluzione venne secondato dai propri discepoli, poichè gli Eleati, sforzandosi di negare l'esistenza del movimento (cfr. p. 56), indirettamente tentarono di rendere impossibile perfino il concetto di meccanica celeste.

Nè altre scuole filosofiche fecero meglio; così ANASSAGORA si rilevò, piuttosto un ardito costruttore di ipotesi, che un

---

(1) E. ZELLER, *Die Philosophie der Griechen*, I Tl., 5 Aufl., Leipzig, 1892, p. 623 e segg.

(2) TOLOMEO (*Composition mathématique*, ed. HALMA, T. I, Paris, 1813, p. 8) ha combattuta tale ipotesi, senza però indicare a chi appartenga: ma TEONE ALESSANDRINO (*Commentaire sur la Composition mathématique de C. Ptolemée*, ed. HALMA, T. I, Paris, 1821, p. 20-21) l'attribuisce ad EPICURO e la dice accettata da ERACLITO: ma essendo EPICURO nato nel 342 o 341 a. C. (ZELLER, op. cit., 3 Tl., 4 Aufl., p. 373 e segg.), non si può ivi alludere a ERACLITO d'Efeso, sibbene di ERACLIDE PONTICO, di cui parleremo fra poco. Alla stessa ipotesi — disapprovandola, ma senza designarne il creatore — fa cenno TEONE SMIRNEO (ed. DUPUIS, p. 200).

(3) Che queste non sian le uniche e nemmeno le maggiori stravaganze astronomiche partorite dalla sbrigliata fantasia dei Greci, lo sa chi conosce il *Saggio sopra gli errori popolari degli antichi* di G. LEOPARDI.

vero astronomo (1), nè meglio si comportarono rispetto all'astronomia il suo discepolo ARCHELAO Ateniese, e DIOGENE d'Apollonia, seguace d'ARCHELAO ed uno degli ultimi rappresentanti della filosofia jonica (2): altrettanto può ripetersi per ANTIFONTE d'Atene (cfr. p. 94), che qui rappresenta la setta dei sofisti, per EMPEDOCLE e per DEMOCRITO, il celebre atomista di Abdera « che il mondo a caso pone ». Tutti abbracciarono, non senza ritoccarle, le opinioni dei fisici della Jonia; senza discuterne o sperimentarne la verità, essi se ne servirono qual punto d'appoggio per le loro elucubrazioni metafisiche su la costituzione e la genesi del mondo: da essi la scienza positiva nulla poteva attendere ed infatti nulla a loro deve.

Ipotesi astronomica di Pitagora.

7. - La setta di filosofi, che fugò i sogni fatti dai Greci durante le tenebre della loro ignoranza in fatto di astronomia, è quella stessa a cui, come sappiamo (p. 34), devesi se la geometria e l'aritmetica passarono — per servirci della terminologia di AUGUSTO COMTE — dallo stadio metafisico allo stadio scientifico. Giacchè, generalmente, respingesi come falsa l'affermazione di EUDEMO da Rodi, riferita da TEONE SMIRNEO, che « ANASSIMANDRO trovò essere la terra sospesa in aria e moversi intorno al centro del mondo » (3), e ritiensi che PITAGORA (4), prima di qualunque altro, insegnasse essere la terra sferica ed abitabile anche nell'emisfero opposto a quello in cui sta la Grecia, es-

(1) In ANASSAGORA si è ravvisato un primo cenno dell'attrazione: v. una frase assai espressiva di JACOBI riferita da ALESSANDRO HUMBOLDT (*Kosmos*, T. II, 1847, p. 348).

(2) ZELLER, *Die Philosophie der Griechen*, I Tl., 5 Aufl. (Stuttgart, 1892), p. 259.

(3) THEONIS SMYRNAEI PLATONICI *Liber de astronomia*; ed. MARTIN, Paris, 1849, p. 323: ed. DUPUIS, p. 320.

(4) TH. H. MARTIN, *Études sur le Timée*, T. II, Paris, 1841, p. 101-119 e *Hypothèse astronomique de Pythagore* (Bull. di Bibl. e Storia, T. V, 1879, p. 99-126); G. V. SCHIAPARELLI, *I precursori di Copernico nell'antichità*, Milano, 1872, p. 2-4.

e dessa divisa in cinque zone col centro fisso nel centro l'universo; attorno ad essa, secondo il filosofo di SAMO, mo luogo le rivoluzioni, obliquamente contrarie del sole, la luna e degli altri pianeti (1). È questo il sistema platario che PLATONE fece esporre da un discepolo di PIGORA, TIMEO da Locri, nel dialogo che da questo intitoi; è in sostanza quello stesso a cui DANTE si inspirò ando scrisse:

Col viso ritornai per tutte quante
Le sette spere, e vidi questo globo (2)
Tal, ch'io sorrisi del suo vil sembiante.
E quel consiglio per migliore approbo
Che l'ha per meno: e chi ad altro pensa
Chiamar si puote veramente probo.
Vidi la figlia di Latona (3) incensa
Senza quell'ombra, che mi fu cagione
Perchè già la credetti rara e densa.
L'aspetto del tuo nato (4), Iperione,
Quivi sostenni, e vidi com' si move
Circa e vicino a lui Maia e Dione (5).
Quindi m'apparve il temperar di Giove
Tra il padre e il figlio (6): e quindi mi fu chiaro
Il variar che fanno di lor dove:
E tutti e sette mi si dimostraro
Quanto son grandi e quanto son veloci,
E come sono in distante riparo.

(*Paradiso*, XXII, 133-150).

Se poi PITAGORA macchiò le proprie geniali concezioni colla ntastica introduzione dell'*antiterra* (ἀντίχθων), per portare *dieci* (7) la totalità delle rivoluzioni celesti, e con lo sta-

---

1 Secondo alcuni Pitagorici, l'ordine in cui s'incontrano i ianeti, dopo la Luna, è il seguente: Mercurio, Venere, Marte, ove e Saturno (TEONE SMIRNEO, ed. DUPUIS, p. 226).

(2) La terra.

(3) La luna.

(4) Il sole.

(5) Mercurio e Venere.

(6) Saturno e Marte.

(7) Numero sacro ai Pitagorici perchè, essendo somma dei quattro primi numeri della serie naturale, lo consideravano a immagine della perfezione. Cfr. TEONE SMIRNEO (ed. DUPUIS), p. 76 e 154.

bilire una certa relazione — che gli storici non giunsero peranco a precisar bene (1) — tra le distanze dei corpi celesti dalla terra (2) ed i numeri corrispondenti ai vari suoni della scala musicale, relazione che spiegherebbe l'armonia delle sfere celesti e che gli fece considerare l'astronomia e musica come scienze sorelle (3), se egli si lasciò trascinare a tali divagazioni antiscientifiche, noi matematici non dobbiamo fargliene soverchio addebito: giacchè egli, anche in tale circostanza (cfr. p. 26-28), sforzandosi di stabilire un legame tra l'aritmetica ed i fenomeni naturali, si attenne a criteri adottati ancor oggi dagli scienziati. D'altronde DANTE stesso non si è forse lasciato sedurre dal fascino che possiedono i riavvicinamenti supposti da PITAGORA, quando aggiunse il cielo delle stelle fisse e quello del primo mobile, contenuti nell'Empireo, a quelli della Luna, del Sole e dei cinque pianeti, nell'intento di portare a dieci il numero totale dei cieli? E TICONE BRAHE (1546-1601) non ha forse fatto rivivere e tentato di spiegare l'armonia celeste? (4)

Ma anche coloro che negheranno a PITAGORA l'assoluzione che noi chiediamo pei suoi traviamenti, converranno indubbiamente con noi, che, col diffondere le nozioni della sfericità della terra e dei movimenti propri dei pianeti, da Occidente verso Oriente, secondo cerchi obliqui all'equatore celeste, coadiuvato dai propri discepoli, pose la base di quella colonna, di cui IPPARCO doveva somministrare il tronco e CLAUDIO TOLOMEO il capitello.

Va qui notato che l'idea della sfericità della terra non fu ammessa per vera da tutti i contemporanei di PITAGORA; tuttavia essa penetrò subito in una scuola differente da

---

(1) G. V. SCHIAPARELLI, *Opinioni e ricerche degli antichi sulle distanze e sulle grandezze dei corpi celesti* (Mem. dell'Ist. Lombardo, 3ª Serie, T. V, 1767, p. 6); P. TANNERY, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Paris, 1893, p. 323-336.

(2) Secondo PLINIO i Pitagorici ritenevano che la distanza fra la terra e la luna fosse di 126 mila stadi, il doppio quella tra la luna ed il sole, il triplo quella tra il sole ed il cielo delle stelle fisse.

(3) TEONE SMIRNEO (ed. DUPUIS), p. 10.

(4) Cfr. A. VOD HUMBOLDT, *Kosmos*, T. II, 1847, p. 353.

quella ove veniva ufficialmente professata, cioè in quella di SENOFANE: lo prova quanto ha sostenuto, circa cinque secoli a. C., PARMENIDE d'Elea (1); il quale, inoltre, con PITAGORA ammetteva l'identità della stella sera (Espero o Vespero) con quella del mattino (Lucifero o Fosforo) (2), ma da quello si staccava quando asseriva che, allontanandosi dalla terra, s'incontrasse prima la sfera celeste che contiene Mercurio, Marte, Giove e Saturno, poi il Sole, quindi la Luna e da ultimo Venere. Come egli si comportasse riguardo alla nozione dell'obliquità dell'eclittica, attribuita ad OINOPIDE (v. p. 61) (3), ci è ignoto.

Il primo sistema eliocentrico.

8. - Spento PITAGORA, l'abito dell'osservare non venne smesso dai Greci, nè cessò il desiderio di spiegare i fenomeni celesti, e, crescendo il numero dei fatti accertati, ben presto si vide come, volendosi rendere ragione del come avvengono i movimenti degli astri, fosse indispensabile staccarsi dai tre canoni che, secondo i placiti pitagorici, regolano tali movimenti, che cioè essi siano perfettamente circolari, concentrici e di velocità uniforme. Il primo che, per quanto si sa, professò tale abbandono è FILOLAO, contemporaneo di SOCRATE e DEMOCRITO, epperò non immediato discepolo di PITAGORA (4). FILOLAO nacque a Taranto od a Crotone, visse qualche tempo ad Eraclea in Lucania, e più tardi (cioè sullo scorcio del V sec. a. C.), a Tebe in Beozia; come sappiamo (p. 30) a lui si attribuisce la prima espo-

(1) TH. H. MARTIN, *Hypothèse astronomique de Parmenide* (Mém. de l'Acad. des Inscriptions et Belles Lettres, T. XXIX, 2ª Partie, 1879, p. 305-318).

(2) Tale identità venne probabilmente insegnata a PITAGORA dai Caldei o dagli Egiziani.

(3) TEONE SMIRNEO ed. DUPUIS, p. 321, riferendosi alla storia dell'astronomia di EUDEMO.

(4) TH. H. MARTIN, *Études sur le Timée de Platon*, T. II, Paris, 1841, p. 92-161, e *Hypothèse astronomique de Philolaus* (Bull. di Bibl. e Storia, ecc., T. V, 1872, p. 127-157); G. SCHIAPARELLI, *I precursori di Copernico*, ecc., p. 4-11.

sizione scritta delle dottrine pitagoriche. Come il Maestro, egli fa risiedere nel numero la causa costante dell'ordine che regna nel mondo, e fa dell'unità il principio dei numeri, anzi di tutto ciò che esiste, sicchè egli la identifica con Dio. Ma, a differenza di PITAGORA, affida la parte principale del suo sistema cosmologico, non soltanto al numero dieci, ma eziandio al fuoco centrale; quindi, secondo lui, i cinque pianeti (il sole, la luna, la terra, l'antiterra e le sfere delle stelle fisse) effettuano le loro rivoluzioni attorno al fuoco centrale con velocità differenti, ma in una stessa direzione da Occidente verso Oriente; la terra e l'antiterra con obliquità nulla, gli altri con diverse obliquità. Tale concezione del nostro sistema planetario è ingegnosa, ma — forse per essere aprioristica — è incapace di spiegare alcuni fatti attestati dall'esperienza; non può certamente dirsi identica al sistema che da COPERNICO prende nome, ma rappresenta indubbiamente il primo avviamento verso di questo, e per determinare tale originale orientazione era necessaria gran forza d'intelletto e non comune ardimento, visto che per gli antichi la fissità della terra appariva un fatto incontrastabile.

9. - Quelli che vennero dopo FILOLAO, ne modificarono in parte le idee (1). Meritano di essere specialmente ricordati ICETA ed ECFANTO (2), filosofi pitagoreggianti, vissuti a Siracusa tra la fine del V sec. ed il principio del IV, i quali, abbandonando in parte l'antico principio che la terra fosse immobile, ammisero la rotazione diurna di essa attorno al proprio asse (3). Ed in ciò furono seguiti da un noto discepolo

---

(1) Cfr. il frammento dei *Mémoires sur l'histoire des hypothèses astronomiques chez les Grecs et les Romains* di TH. H. MARTIN, pubblicato nella 2ª Parte (1883, p. 1-43) del T. XXX dei Mém. de l'Acad. des Inscript. et Belles-Lettres. Alcune idee ivi sostenute furono confutate dallo SCHIAPARELLI nella memoria: *Origine del sistema planetario eliocentrico presso i Greci* (Memorie del R. Ist. Lomb., Serie III, Vol. IX, 1898, p. 89-93).

(2) Cfr. P. TANNERY, *Pseudonymes antiques:* I. *Leucippe.* II. *Hicétas.* III. *Ecphante* (Revue des études grecques, T. X, 1897) e *Ecphante de Syracuse* (Arch. für die Gesch. der Philosophie, XI Bd., 1898).

(3) Va notato che TOLOMEO (*Compositions mathématique,* ed. HALMA, T. I, p. 19) combatte tale ipotesi senza citarne l'autore.

di PLATONE, ERACLIDE PONTICO (1), il quale, di più, introdusse due notevoli innovazioni nelle idee pitagoriche: cioè soppresse l'ente fantastico che è l'antiterra ed abbandonò il canone della concentricità delle orbite planetarie, facendo, invece, il sole centro delle rivoluzioni di Mercurio e Venere. Ecco, dunque, un altro passo importante verso il sistema eliocentrico, tanto importante che, nel sistema astronomico, di ERACLIDE, venne ravvisato (2) il primo schema di quello che reca d'ordinario il nome di TICONE BRAHE. Nè va taciuto che ERACLIDE (3) alluse anche all'ipotesi della rotazione della terra attorno al sole, ma tosto l'abbandonò, non già perchè egli la giudicasse inverosimile, ma perchè gli parve di indole esclusivamente geometrica.

Emerge da quanto precede che ben poca strada rimaneva ai Greci da compiere per giungere a concepire il moto eliocentrico dei pianeti; ma essi hanno effettivamente percorso anche questo tratto di cammino! Per opera di chi, è ignoto; ma è indubitato che sino dai tempi di ALESSANDRO MAGNO era stata avvertita la possibilità di dare una spiegazione attendibile dei fenomeni celesti, per mezzo di movimenti attorno al sole (4). Due nomi però vengono dagli antichi collegati a tale importante osservazione, cioè ARISTARCO di Samo e SELEUCO di Babilonia; narrasi, infatti, che CLEANTE Stoico (5) accusasse il primo di empietà per avere « turbato il riposo di Estia » (cioè della terra, riguardata allora, per dogma, come centro e focolare del mondo); d'altronde PLUTARCO nell'VIII delle sue *Questioni platoniche* scrisse: « forse che si deve intendere la terra non rimanersi fissa, come poi mostrarono ARISTARCO e SELEUCO, il primo sup-

---

(1) Cfr. F. HULTSCH, *Das astronomische System des Herakleides von Pontos* (Jahrb. für Philologie, 1896) e P. TANNERY, *Sur Héraclides du Pont* (Revue des études grecques, 1899).

(2) SCHIAPARELLI, *Come i Greci arrivarono al primo concetto del sistema planetario eliocentrico detto oggi Copernicano* (Atene e Roma, n. 2, 1898), nonchè *Origine del sistema*, ecc.

(3) V. TH. H. MARTIN nel frammento succitato, p. 25 e segg.

(4) SCHIAPARELLI, *I precursori di Copernico*, p. 30.

(5) È questi colui che succedette a ZENONE da Cizico come capo della Scuola stoica: v. ZELLER, *Die Philos. der Griechen*, 3 Tl., 1 Aufl., Leipzig, 1909, p. 34.

ponendolo soltanto, il secondo anche affermandolo? » (1).

Dei due valentuomini or citati, il primo è un celebre astronomo (2) discepolo di STRATONE da Lampsaco e contemporaneo di ARCHIMEDE (3), di cui possediamo un'opera considerata per « uno dei più bei monumenti dell'antica geometria » (4), che esamineremo fra poco (n. 19); l'altro è un pensatore, di poco anteriore ad IPPARCO, il cui nome si è conservato nella storia, come quello dell'ultimo rappresentante in Occidente della dottrina del movimento della terra attorno al sole. Dopo di lui, per varie ragioni che furono già profondamente investigate (5) e che a noi non importa di riferire, il sistema eliocentrico venne abbandonato, sicchè lo si cercherebbe invano nelle opere di IPPARCO e TOLOMEO, i quali, invece, adottarono e sanzionarono colla loro imponente autorità il sistema degli epicicli, ideato da APOLLONIO di PERGA, sistema che sembrava più idoneo alla rappresentazione dei fenomeni celesti ed ai calcoli astronomici. Ma la presenza sia pur transitoria di esso andava qui notata: come va rilevato che gran parte delle indagini inaugurate dagli astronomi sinora ricordati, a partire da TALETE, rendevano urgente di conoscere le relazioni che intercedono fra i cerchi della medesima sfera, essendo ragionevole la fiducia che, così, grande luce sarebbesi sparsa sul modo in cui succedono i fenomeni, dei quali è teatro la volta celeste. A questo stimolo, già così potente, verso lo studio della geometria sferica, altri ne aggiunsero, e non meno efficaci, le investigazioni che, con analogo intento, vennero compiute da coloro di cui stiamo per occuparci.

---

(1) Cfr. anche il passo dell'*Arenario* riferito più avanti (n. 22).

(2) È uno dei pochissimi che TOLOMEO ha citati (*Compos. mathém.*, ed HALMA, T. I, p. 160, 162, 163), ricordandone un'osservazione astronomica eseguita nel 281 a. C. Riguardo a lui v. SUSEMIHL, *Gecchichte der griechischen Literatur in der Alexandrinerzeit*, T. I, Leipzig, 1891, p. 718-720.

(3) G. SCHIAPARELLI, *Opinioni e ricerche degli antichi*, ecc., p. 8.

(4) Visse intorno il 270 a. C. L'opera ARISTARCHI SAMII, *De mundi systemate* (Parigi, 1644) appartiene totalmente a ROBERVAL, come fece rilevare TH. H. MARTIN (*Sur un ouvrage faussement attribué à Aristarque de Samos*, Bull. di bibl. e storia, T. III, 1871).

(5) V. l'articolo succitato dello SCHIAPARELLI, *Come i greci*, ecc.

Idee astronomiche di Platone (1).

10. - In astronomia il divino filosofo, come riguardo alle altre discipline, ebbe delle vedute d'insieme, che meritano di venire onorevolmente menzionate. Va specialmente ricordato, che egli avvertì non essere l'astronomia una scienza puramente di osservazione (2), ma ne ravvisò il duplice carattere, matematico e fisico: e — conformemente all'idea che, nelle scienze fisiche, si è costretti ad accontentarsi della verosimiglianza, appartenendo esse al dominio dell'opinione — osservò che l'astronomia, grazie ai suoi rapporti coll'aritmetica e la geometria, è il ramo della fisica meno incerto, tanto che, in certe questioni, raggiunge un grado di verosimiglianza attiguo alla certezza.

Prescindendo da queste e da altre analoghe considerazioni, le quali non sono prive di originalità, PLATONE in astronomia fu imitatore. Basta, infatti, leggere il *Timeo* (3) per convincersi che egli, al pari dei discepoli di PITAGORA, intendeva spiegare tutti i fenomeni celesti mediante rivoluzioni esattamente circolari, effettuate attorno al centro im-

---

(1) Vedi: TH. H. MARTIN, *Études sur le Timée de Platon*, T. II (Paris, 1841), p. 42-48, 61-66 e 75-92; inoltre dello stesso autore *Hypothèse astronomique de Platon* (Mem. de l'Académie des Inscript. et Belles-Lettres, T. XXX, I Partie, 1881, p. 1-152) e B. ROTHLAUF, *Die Physik Plato's, eine Studie auf Grund seiner Werke*, II Theil (München, 1888).

(2) Lo provano i seguenti passi dell'*Epinomide:* " Ignorate voi, che è necessariamente assai savio quello che è veramente astronomo, non astronomo al modo di ESIODO, occupato, cioè, ad osservare il sorgere ed il tramontare degli astri, ma quello che scruta le rivoluzioni dei sette pianeti, della conoscenza dei quali è appena capace tutto il genio dell'uomo? .. " Un astronomo dev'essere il più saggio degli uomini: la sua mente dev'essere opportunamente educata sin dalla sua gioventù, specialmente nei necessari studi matematici: cioè tanto nella conoscenza dei numeri, quanto in quell'altro ramo della matematica, che, quantunque strettamente legato alla scienza del cielo, noi chiamiamo irrazionalmente *geometria*, cioè misura della terra ".

(3) Cfr. MARTIN, *Études sur le Timée de Platon*. Paris, 1841.

mobile della terra (cioè al centro dell'universo), con velocità costanti per ogni rivoluzione, ma differenti per ciascuno dei sette corpi mobili: i raggi delle orbite del Sole, di Venere, Mercurio, Marte, Giove e Saturno sarebbero, secondo PLATONE, misurate dai numeri 2, 3, 4, 8, 9, 27, preso per unità il raggio dell'orbita lunare. Di più, appoggiandosi ai risultati di osservazioni fatte dai Pitagorici, PLATONE propose di decomporre il movimento apparente di ciascun astro in due, entrambi circolari, uno diurno, eguale, parallelo e nello stesso senso di quello delle stelle fisse attorno all'asse dell'equatore, l'altro obliquamente contrario e molto più lento per ognuno degli altri astri attorno all'asse dello zodiaco. Questi due movimenti simultanei lo condussero a concepire una traiettoria elicoidale (1), segnalando la quale il grande filosofo introdusse, benchè sotto forma vaga, il concetto di *curva spirale* (2) (ἕλιξ: cfr. p. 123), concetto che era destinato a prendere un posto stabile nella geometria, benchè non abbia ancora raggiunto quella precisione che deve possedere qualunque idea matematica (3).

Ai concetti astronomici ora schizzati, PLATONE si attenne durante gran parte della sua vita, chè se ne rinvengono tracce, tanto negli scritti anteriori al *Timeo*, quanto nelle *Leggi*, pubblicate da FILIPPO OPUNZIO, e nell'*Epinomide*; d'altronde, l'importante problema geometrico da lui proposto « quali sono i movimenti circolari ed uniformi che possono spiegare in modo soddisfacente i fenomeni offerti dalle rivoluzioni planetarie? » (4), basta a dimostrare come egli si

---

(1) Cfr. *Comméntaire de Théon* (ed. HALMA, T. I, p. 17).

(2) Cfr. TEONE SMIRNEO, ed. DUPUIS, p. 328. V. anche V. A. SÉDILLOT, *De l'origine de la semaine planétaire et de la spirale de Platon* (Comptes rendus, etc., 7 dicembre 1872).

(3) Veggasi infatti l'articolo *Spirale* scritto dal D'ALEMBERT per l'*Encyclopédie méthodique*, nonchè gli articoli *Radiale* e *Spirale* del *Dictionnaire des mathématiques* del MONTFERRIER.

(4) Secondo GEMINO (*Isagoge*, Cap. I) l'origine di tal questione trovasi nella scuola dei Pitagorici, chè questi dicevano: " Pei corpi divini ed eterni non si può supporre che essi vadano ora più presto e ora più adagio e che ora si fermino. Poichè neanche in una persona giudiziosa ed equilibrata si trovano tali anomalie nel modo di andare. È vero che i bisogni della vita possono dare occasione agli uomini di camminare ora più

conservasse per gran tempo fedele ai canoni posti dal grande filosofo di Samo. Tuttavia sembra che PLATONE, verso il termine della propria vita, presa cognizione delle ipotesi originali formulate da FILOLAO e dai Pitagorici posteriori, accogliesse le nuove idee sul movimento della terra; anzi, arrivasse a convincersi siffattamente dell'esistenza di tal movimento, da dichiararne l'opinione contraria ingrata agli Dei ed appena perdonabile alla debolezza degli uomini, che non partecipano all'intelligenza divina (1). Malgrado questa recisa affermazione, i discepoli ed i successori di PLATONE nella direzione dell'Accademia preferirono il primo sistema astronomico di PLATONE: bastino a provarlo FILIPPO OPUNZIO e SENOCRATE, personaggi che non meritano più di questo cenno fugace in una storia dell'astronomia.

Digressione sopra Teone Smirneo.

11. - Poichè, come a più riprese dicemmo, PLATONE ha sparso con profusione nelle sue opere allusioni a concetti matematici, l'intelligenza di esse riesce difficile a coloro che di tali scienze sono affatto digiuni; onde è spiegabile come, nell'epoca dei commentatori, quando nel II sec. dell'E. v. si videro risorgere le dottrine di PITAGORA e di PLATONE, sia apparso un ammiratore del divino filosofo, il quale ritenne opportuno compilare un'esposizione metodica *Delle cognizioni matematiche utili per la lettura di Platone:* è desso TEONE DA SMIRNE.

Tutti certamente converranno — egli dice nell'esordio del suo discorso — non essere possibile comprendere quello che PLATONE scrisse intorno alle matematiche se non ci si è dedicati allo studio di esse. Egli stesso ha mostrato in parecchie occasioni come tale conoscenza non sia inutile nè senza frutti per le altre scienze. Epperò dev'essere tenuto per fortunato

---

presto ed ora più adagio; ma per le stelle inalterabili non vi può essere alcuna causa di variabilità nella velocità „. In base a tali considerazioni i Pitagorici domandavano una rappresentazione dei fenomeni celesti col mezzo di movimenti non soltanto circolari, ma anche uniformi.

(1) SCHIAPARELLI, *I precursori di Copernico*, ecc., p. 22.

colui che, nell'accostarsi agli scritti di PLATONE, possiede bene tutta la geometria e tutta la musica e l'astronomia. Ma sono queste cognizioni il cui acquisto non è rapido, nè facile; al contrario esige un lavoro assiduo sino dalla più tenera età. Nel timore che coloro i quali non ebbero la possibilità di coltivare le matematiche e che pur desiderano conoscere gli scritti di PLATONE non siano astretti a rinunciarvi, noi diamo qui un sommario ed un riassunto delle nozioni necessarie, e la traduzione dei teoremi matematici più utili su l'aritmetica, la musica, la geometria, la stereometria e l'astronomia, scienze senza cui è impossibile di essere perfettamente felici, come egli (PLATONE) dice, dopo di avere lungamente dimostrato che non si devono trascurare le matematiche.

TEONE divise la sua opera in cinque sezioni, dedicate, rispettivamente, all'aritmetica, alla geometria (piana), alla stereometria, all'astronomia ed alla musica, ritenendo però che delle tre parti di cui componesi quest'ultima (teoria dei suoni, musica istrumentale ed armonia delle sfere celesti) la seconda fosse da escludersi, avendo PLATONE detto che « non si devono tormentare le corde degli strumenti come curiosi che stiano ad ascoltare ». Di tali sezioni andarono perdute quelle concernenti la geometria, del piano e dello spazio, e la musica celeste: fra le superstiti (1) vennero pubblicate da S. BOULLIAU (1605-1694) quelle relative all'aritmetica ed alla musica (2); più tardi di nuovo l'aritmetica da J. DE GELDER (1765-1848) (3) e da TH. H. MARTIN l'astronomia (4): il tutto venne edito dall'HILLER (5) ed in seguito dal DUPUIS (6).

---

(1) M. CANTOR (*Vorlesungen*, T. I, p. 434 della 3ª ed.), ritiene che esse compongono tutto quello che TEONE ha scritto; opinione questa che condividono pienamente E. HILLER, recente editore di TEONE, e P. TANNERY (v. *Bulletin des Sc. math.*, 1893, I Parte, p. 282).

(2) *Theonis Smyrnaei Platonici, Eorum quae in mathematicis ad Platonis lectionem utilia sunt Expositio. Opus nunc primum editum ab Ismaele Bullialdo* (Lutetiae Parisiorum, 1644).

(3) *Specimen Academicum inaugurale, exhibens Theonis Smyrnaei arithmeticam* (Lugduni Batavorum, 1827).

(4) *Theonis Smyrnaei Platonici Liber de Astronomia cum Sereni fragmento* (Parisis, 1849).

(5) *Theonis Smyrnaei, philosophi platonici, expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium* (Lipsiae, 1878).

(6) *Théon de Smyrne, philosophe platonicien, Exposition des*

Chi fosse TEONE non è noto; nemmeno si conoscono gli anni estremi della sua esistenza. Per determinare, almeno approssimativamente, l'epoca in cui visse, si può osservare essere egli colui che TEONE ALESSANDRINO, nel commento al IX Libro dell'*Almagesto*, indica coi nomi Θέων παλαιός e Θέον παλαιος μαθηματικός, e tener conto di coloro che sono nominati nella sua opera (1). Ora fra questi s'incontrano i più antichi pensatori Greci, quali TALETE, ANASSIMANDRO, ANASSIMENE, PITAGORA, OINOPIDE, ARCHITA, IPPARCO e FILOLAO; inoltre EMPEDOCLE, l'agrigentino celebre come uomo politico, oratore, medico, filosofo e poeta; un LASO d'Ermione, contemporaneo e discepolo d'IPPASO, e LISIA, che appartiene all'epoca del famoso oratore DEMOSTENE (nato nel 381 a. C.); si trovano poi PLATONE con EUDOSSO, EUDEMO, MENECMO, CALIPPO ed EVANDRO, che nel III sec. a. C. tenne la direzione dell'Accademia, quindi ARISTOTELE con i discepoli ARISTOSSENO (la più eminente autorità greca relativamente alla musica teorica) ed il peripatetico siciliano DICEARCO, nonchè ARCHIMEDE, ERATOSTENE, IPPARCO (180-125 a. C.) e POSIDONIO (I sec. a. C.). Non arrestandoci su un certo IBICO, personaggio probabilmente da identificarsi ad un tragico vissuto durante il VI sec. a. C., su TIMOTEO, lirico del IV sec. a. C., e su EROFILO, nome ben noto nella storia della medicina greca del tempo di TOLOMEO LAGO (2), va notata la presenza dei nomi di ALESSANDRO d'Etolia, poeta e bibliotecario di TOLOMEO FILADELFO nato circa nel 315 dell'E. v., del filosofo pitagorico e platonico TRASILLO e del suo contemporaneo DERCILLIDE, filosofo pitagoreggiante, favorito di AUGUSTO e TIBERIO (3), e di ADRASTO da AFRODISIA, la principal fonte a cui attinse TEONE nello

---

connaissances mathémotiques utiles pour la lecture de Platon, traduite pour la primière fois du grec en français par J. DUPUIS Paris, 1892). Continueremo a citare questa opera coll'abbreviazione: TEONE SMIRNEO ed. DUPUIS.

(1) Cfr. TH. H. MARTIN, *De Theonis Smirnaei Astronomia Dissertatio*. premessa all'edizione dianzi citata.

(2) Cfr. H. DIELS, *Ueber das physikalische System des Straton* Sitzungsber. der K. Preuss. Akad. der Wiss., 1893, p. 101).

(3) TH. H. MARTIN, *Sur quatre personnages appelés Thrasylle* (Annali di Scienze matematiche e fisiche, T. VIII, 1857, p. 423-428).

scrivere la parte astronomica del suo commento, che visse tra NERONE e COMMODO (180-192 dell'E. v.) (1). E poichè nei libri IX e X dell'*Almagesto* sono riferite alcune osservazioni fatte da TEONE su Venere e Mercurio tra il 128 ed il 132 dell'E. v. (2), così si può asserire che questi è anteriore a chi scrisse il sommo codice astronomico dell'antichità; ora essendo TOLOMEO vissuto tra l'anno 87 ed il 165 dell'E. v., sembra legittima la conclusione che lo Smirneo sia stato di poco anteriore, o fors'anche contemporaneo a TOLOMEO, che egli appartenga pertanto alla prima metà del II secolo dell'era nostra.

12. - Della sezione del commento di TEONE dedicata all'aritmetica, verrà discorso nel L. V (nn. 34 e 35) dell'opera presente; qui ci occuperemo di quanto si riferisce all'astronomia (Parte III), ricordando, però, prima, le molte citazioni già fattene, le quali attestano che da essa abbiamo tratte molte ed importanti notizie relative al primo stadio di sviluppo dell'astronomia greca, ed altre ancora attingeremo; perciò il còmpito nostro in questo momento si può limitare a porgere un'idea dell'andamento generale dell'opera dello Smirneo.

La quale comincia con una esposizione delle ragioni per cui si considera la terra come sferica e posta nel centro dell'universo. Da essa si apprende, poi, quali siano e quali nomi portino i circoli che si sogliono considerare nella sfera celeste, quali siano le stelle ed i vari pianeti, l'ordine in cui questi si succedono ed il concerto cui danno luogo. Commentata una favola che PLATONE espose al termine della sua *Repubblica*, TEONE si volge a considerare il moto dei pianeti in generale e quindi quello del sole, arrestandosi sulla considerazione del cerchio eccentrico e del cerchio epiciclo. Ed osserva:

ADRASTO mostra così che i fenomeni sono spiegati in entrambe le ipotesi, quella dell'eccentrico e quella dell'epiciclo (3).

---

(1) Il lavoro di ADRASTO Περὶ τε ἁρμονίας καὶ εὐμφωνίας, ricordato da TEONE (ed. cit., p. 82) si credeva erroneamente esistere manoscritto nella Biblioteca di Napoli (v. la *Dissertatio* del MARTIN, p. 76).

(2) NESSELMANN, *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842), p. 224.

(3) " IPPARCO vantò l'ipotesi dell'epiciclo come sua propria ". TEONE SMIRNEO, ed. DUPUIS, p. 305.

Ipparco fece osservare essere degna dell'attenzione del matematico, la ricerca della spiegazione dello stesso fenomeno mediante ipotesi tanto differenti quanto quelle dei cerchi eccentrici e dei cerchi concentrici e degli epicicli. Adrasto ha mostrato che l'ipotesi dell'eccentrico è conseguenza di quella dell'epiciclo; a dir vero l'ipotesi dell'epiciclo è essa pure conseguenza di quella dell'eccentrico (1).

Secondo la prima teoria si ammette che, ad esempio, il sole descriva un circolo non concentrico alla terra, e si giunge così ad una spiegazione soddisfacente delle irregolarità che presenta il movimento di quell'astro; invece, accettando la seconda, si considera bensì circolare la traiettoria dell'astro, ma si ritiene che il suo centro, invece di essere fisso, descriva un circolo concentrico alla terra, e si arriva così alle medesime conclusioni. Non arrestiamoci a misurare la solidità dei due conseguenti edifici astronomici (2), che la scienza moderna ha già atterrati, piuttosto rileviamo che appresso, Teone passa ad esporre quanto si sapeva ai suoi tempi intorno a le congiunzioni e le occultazioni degli astri e le eclissi, sia in genere, sia in particolare di quelle del sole o della luna; e, dopo un breve intermezzo sulla storia dell'astronomia da Oinopide e Talete (tolto dai libri astronomici del Peripatetico Eudemo), espone alcune generalità intorno alle ipotesi dell'astronomia.

Tutto questo, dice finendo Teone, era necessariissimo ed utilissimo per la lettura delle opere di Platone. Ora noi dicemmo che dovevamo considerare la musica istrumentale, la musica matematica e l'astronomia delle sfere e che avremmo riferito tutto quello che vi è necessariamente d'armonia nel mondo, dopo quanto concerne l'astronomia — perchè Platone assegna a questa musica delle sfere il quinto posto nelle matematiche, dopo l'aritmetica, la geometria, la stereometria e l'astronomia —; perciò noi ora mostreremo sommariamente quanto Trasillo espose sopra tale argomento, ed in pari tempo il nostro lavoro anteriore.

---

(1) Id., p. 268.

(2) Siamo in certo modo autorizzati a tale silenzio dell'essere stata tal misura effettuata dal Whewell nella sua celebre *History of inductive Sciences*, T. I (London, 1837), p. 179.

Ma qui ha termine quanto esiste tuttora del lavoro di TEONE; e qui noi pure ci arresteremo: non senza avere notato che tale scritto ha, dal punto di vista matematico, assai scarsa importanza: ed è appunto perchè noi riteniamo che l'unico suo pregio consista nell'essere una illustrazione delle idee di PLATONE che, facendo uno strappo all'ordine cronologico, da noi sempre osservato, abbiamo spesa qualche parola intorno ad esso in questo momento. Ma, dopo questa digressione, riprendiamo il filo del nostro discorso.

Le sfere omocentriche di Eudosso da Cnido.

13. - Se PLATONE non contribuì con opere proprie a far compiere notevoli progressi all'astronomia, però, analogamente a quanto vedemmo per la geometria (p. 109), collaborò indirettamente al perfezionamento di essa, specialmente col proporre quell'interessante problema meccanico-geometrico, di indole prettamente pitagorica, di cui riferimmo l'enunciato a p. 464 e che per tanti secoli venne così altamente pregiato (1). Il primo che, per quanto ci è noto, si è accinto alla magnanima impresa di scioglierlo è un eminente geometra che già conosciamo (p. 136-148), EUDOSSO da Cnido. E tal successo ebbero i suoi sforzi, che il « sistema delle sfere omocentriche », in cui risiede la sua soluzione, fu presso gli antichi uno dei più potenti veicoli alla diffusione ed al consolidamento della sua fama ed oggi ancora lo addita come uno dei pensatori più forti ed originali che abbia prodotto il suolo dell'Ellade (2).

---

(1) V. un passo dell'*Almagesto* (Cap. II del IX Libro), ove TOLOMEO pone fra le benemerenze di IPPARCO l'avere spiegati tutti i fenomeni, che presentano il sole e la luna, appunto con movimenti circolari ed uniformi opportunamente combinati.

(2) Nell'esporre il sistema astronomico di EUDOSSO ci atteniamo alla celebre restituzione fattane da G. SCHIAPARELLI (*Le sfere omocentriche di Eudosso, di Calippo e di Aristotele*, Milano, 1875), al quale, ancor più che all'IDELER (*Ueber Eudoxus, II Abhandlung*, in Abh. der K. Akad. d. Wiss. zu Berlin, hist.-phil. Klasse, 1830, Berlin, 1832) ed all'APELT (*Die Sphärentheorie des Eudoxus und Aristoteles*. Abh. der Frie'schen Schule, II Th., 1849,

Egli pose come fondamento alla soluzione del problema di PLATONE i due principi seguenti: I. Tutto il mondo degli astri è governato da una legge generale unica. II. All'universo deve attribuirsi una forma simmetrica e la più semplice possibile. Ne dedusse che gli astri devono muoversi sopra tante sfere (omocentriche), cioè, aventi tutte per centro il centro della terra: donde il nome che venne dato al sistema eudossiano. Si vede subito che i criteri prescelti da EUDOSSO, mentre davano all'universo somma eleganza e perfètta simmetria, rendevano la soluzione del problema di PLATONE assai più difficile di quello che sarebbe stato, ove egli si fosse riserbato di disporre di qualche movimento diverso da quello di una sfera attorno al proprio centro.

14. - Per completare il congegno del proprio sistema, EUDOSSO, imitando PLATONE, immaginò che ogni astro fosse portato in circolo da una sfera girevole attorno a due poli e dotata di un moto rotatorio uniforme: suppose, inoltre, che l'astro fosse attaccato ad un punto dell'equatore di questa sfera, in modo da descrivere durante la rotazione un circolo massimo posto nel piano perpendicolare all'asse di tale rotazione. E siccome queste ipotesi non bastavano ancora a rendersi conto di tutti i fenomeni celesti, così EUDOSSO fu indotto ad ammettere che ogni pianeta fosse dotato

---

p. 26-49) il capo della scuola di Cizico è debitore dell'essere le sue idee non giudicate più con lo spregio e lo scherno adoperati durante il secolo passato. Le idee dello SCHIAPARELLI furono accolte e sviluppate in lavori posteriori, fra cui meritano una menzione speciale: P. TANNERY, *Note sur le système astronomique d'Eudoxe* (Mém. de la Soc. de Bordeaux, II Serie, T. I, 1876, p. 441-449) e *Seconde note sur le système, etc.* Id., T. V, 1883, p. 129-147); TH. H. MARTIN, *Mémoire sur les hypothèses astronomiques d'Eudoxe, de Calippe et d'Aristote* (Mem. de l'Acad. des Inscriptions et Belles-Lettres, T. XXX, 1ª Partie, 1881, p. 153-202); H. KÜNSSBERG, *Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxus von Knidos,* I Theil. Dinckelsbühl, 1888.

Del sistema eudossiano parla TEONE SMIRNEO (ed. DUPUIS, p. 287 e seg., ma riferendosi a quanto ne scrisse ARISTOTELE. L'opera in cui EUDOSSO lo espose non può essere quella che IPPARCO citò (*Hipparchi in Arati et Eudoxi Phaenomena Commentariorum,* ed. MANITIUS, Lipsiae, 1894, p. 8) e ARATO versificò nal III sec. a. C. Forse è quella *Sulla velocità* (Περὶ ταχῶν) di cui non è superstite che il titolo.

ad un tempo di parecchi movimenti analoghi a quel primo, i quali, componendosi, producessero il moto effettivamente osservato. In conseguenza egli stabilì che i poli della sfera portante il pianeta fossero trascinati da una sfera più grande, concentrica alla prima e girante con velocità uniforme intorno a due poli differenti dai primi. E siccome neanche ciò bastava a rappresentare i moti di tutti i sette astri, così l'astronomo di Cnido attaccò i poli della seconda sfera sopra una terza concentrica alle prime due e maggiore di esse, la quale egli fece ruotare attorno ai propri poli con una velocità determinata. Così ottenne un'attendibile spiegazione dei moti apparenti del Sole e della Luna; ma, per ciascuno degli altri astri (Saturno, Giove, Marte, Mercurio e Venere), gli fu necessario di introdurre una quarta sfera, comprendente entro di sè le tre prime e rotante uniformemente intorno a due poli. Ottenne così, entro la sfera delle stelle fisse, una totalità di ($2 \times 3 + 5 \times 4 =$) ventisei sfere; le quali — checchè abbiano asserito i detrattori di Eudosso — erano con ogni probabilità, concepite da lui, non quali congegni materiali, ma come enti ideali, introdotti soltanto come ausiliari geometrici, per ottenere la rappresentazione desiderata dei fenomeni celesti. Che così si conseguisse l'intento di rappresentare l'anomalia solare dei pianeti (cioè quella massima irregolarità del loro corso, di cui gli effetti più salienti sono i noti fenomeni delle stazioni e delle retrogradazioni) è conseguenza delle considerazioni che ora passiamo ad esporre succintamente.

15. - Delle quattro sfere assegnate a ciascun pianeta, la *prima* (cioè la più esterna) serviva, secondo Eudosso, a produrre il moto diurno, mentre alla *seconda* era dovuta la rivoluzione dei pianeti lungo l'eclittica: ed alla *terza* ed alla *quarta* era riserbato il compito di rappresentare l'anomalia solare ed il movimento in latitudine. Al dire del citato matematico, la rivoluzione della prima sfera è uguale a quella delle sfere fisse; il periodo della seconda eguaglia, invece, quello della rivoluzione zodiacale dell'astro; finalmente le ultime due si muovono in sensi opposti con periodi eguali alla rivoluzione sinodica. Se si astrae, per un momento, dall'azione locomotrice esercitata sull'astro dalle due prime sfere, si vede che la questione di determinare la natura del moto dell'astro si riduce al seguente problema geometrico:

« Intorno al diametro fisso AB si aggira, con moto uniforme, una sfera portante due poli opposti P, intorno ai quali ruota, con velocità costante, una seconda sfera con periodo eguale e con movimento contrario. Determinare la via percorsa da un punto della seconda sfera equidistante dai poli di essa ».

Lo studio di tale questione si può fare con mezzi elementari (SCHIAPARELLI), o col sussidio della trigonometria sferica (TANNERY), oppure col metodo delle coordinate (KÜNSSBERG); comunque fatto, esso conduce a concludere che il movimento indicato è periodico e dura quanto il moto delle due sfere e che la sua traiettoria è una curva simmetrica rispetto ad un certo piano passante per AB, il quale può dirsi, grazie alla parte importante che rappresenta, *piano fondamentale*. Si dirà, poi, *piano diametrale* quello che passa pel diametro AB ed è perpendicolare al piano fondamentale, e *piano ortogonale* quello condotto pel centro perpendicolarmente ad AB. Chiamisi ancora *inclinazione* la distanza (sferica) costante AP ed *argomento* l'angolo AOP uniformemente variabile: dette i la prima e θ la seconda di queste quantità, e x ed y i rapporti tra il raggio della sfera e le distanze del pianeta dal piano diametrale del piano fondamentale, si trovano le equazioni:

$$x = \operatorname{sen} i \,.\, \cos\theta \,,\; y = -\operatorname{sen}^2 \frac{i}{2} \,.\, \operatorname{sen} 2\theta \,,$$

le quali, assieme all'equazione della sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,,$$

individuano la traiettoria rispetto ad un sistema di coordinate, avente per elementi di riferimento i piani fondamentale, diametrale ed ortogonale.

Per caratterizzare geometricamente tale traiettoria, si noti che essa è la curva comune ad una sfera, ad un cilindro circolare retto ad essa tangente e ad un cono di rivoluzione; si vedrà così che essa altro non è che una quartica gobba di prima specie con un punto doppio. Questa triplice definizione della traiettoria come intersezione di due superficie note, ne rivela l'analogia con quella impiegata da ARCHITA, maestro di EUDOSSO, per risolvere il problema di Delo (vedi

p. 99-105); si giunge, così, in possesso di un nuovo argomento per ritenere conforme al vero la restituzione del sistema eudossiano suggerita dallo SCHIAPARELLI.

Un'altra conferma si ottiene osservando che il moto dell'astro risulta, in forza di quanto precede, di rotazione anche attorno agli assi del cilindro e del cono, sicchè questi moti sono pure « regolari ed ordinati » quali erano quelli da impiegarsi per risolvere il problema di PLATONE. — Si noti da ultimo che la proiezione della traiettoria ottenuta sul piano xy ha per equazione il risultato dell'eliminazione di z tra due delle equazioni precedenti, cioè:

$$x^4 = x^2 \cdot \operatorname{sen}^2 i - 4y^2 \cdot \cos^4 \frac{i}{2} ;$$

la proiezione stessa è dunque una di quelle linee che, in tempi assai più recenti, vennero considerate da G. di S. VINCENZO (1584-1667) sotto il nome di « parabole virtuali » (1). Ora tale curva è di forma somigliante alla lemniscata di G. BERNOULLI (1654-1705) e ciò spiega perchè SIMPLICIO (2) dia alla curva di EUDOSSO il nome di *ippopeda*, dal momento che tal nome (ἱπποπέδη) veniva attribuito dai Greci (3) alle linee in forma di 8 (epperò denominate « *huits* » da alcuni geometri francesi) che facevansi percorrere ai cavalli, per costringerli ad alternate conversioni dal lato destro e dal sinistro; è una linea che, a quanto afferma PROCLO, era mista (cioè nè retta nè circolare), segante sè stessa e per forma simile alla spirica (cfr. p. 417) ottenuta segando la superficie di un toro con un piano tangente parallelo all'asse della superficie.

16. - Finora restringemmo le nostre considerazioni a due sole sfere omocentriche, per semplificare il ragionamento e per mettere in piena luce le importanti contribuzioni arrecate alla geometria da EUDOSSO, coll'introdurre nella scienza una nuova e notevolissima curva a doppia curvatura, quella che può, collo SCHIAPARELLI, chiamarsi *lemniscata sferica*

(1) *Opus geometricum*. Antverpiae, 1647.

(2) BRANDIS, *Scholia in Aristotelem*. Berolini, 1836, p. 498-404. Il brano si trova tradotto in italiano dallo SCHIAPARELLI (*Le sfere*, ecc., p. 53-63).

(3) Cfr. PROCLO ed. FRIEDLEIN, p. 112, 127 e 128

che altri denomina *ippopeda di Eudosso*. Ma, per completare le indicazioni sul sistema delle sfere omocentriche, bisogna che teniamo conto dei movimenti di tutte quattro le sfere, vale a dire dobbiamo immaginare che i poli A, B siano appoggiati sulla seconda sfera di EUDOSSO e percorrano l'eclittica in un tempo eguale alla rivoluzione zodiacale del pianeta. Supponendo che il circolo fondamentale (sezione della sfera, su cui sta l'ippopeda, col piano fondamentale) coincida costantemente col piano dell'eclittica, il punto O (centro della lemniscata sferica) si troverà sopra questa, e l'asse della curva apparterrà al piano di essa. Il punto O, al pari dei punti A, B, descriverà con moto uniforme, durante una rivoluzione zodiacale, tutto il circolo dell'eclittica; sicchè potremo, senza turbare il movimento del pianeta, surrogare alla considerazione delle sfere terza e quarta quella della lemniscata sferica. Componendo il moto del pianeta sulla lemniscata con quello della lemniscata stessa si otterrà un movimento capace di far giungere il pianeta due volte ai limiti boreali e due agli australi, non senza fargli attraversare quattro volte l'eclittica, capace, cioè, di fargli compiere un movimento quale è quello che si presenta all'osservatore.

Tale è probabilmente la soluzione suggerita da EUDOSSO pel problema di PLATONE. Quanto ingegno esigesse il concepirla e quanto sapere geometrico supponesse, non è chi non veda; onde il sistema delle sfere omocentriche dovette apparire ed apparve ai contemporanei di EUDOSSO, quello che realmente è, cioè una delle opere più geniali e grandiose che lo spirito umano abbia partorite; e poichè per seguirne tutti i particolari è necessario grande famigliarità con le figure a tre dimensioni e con la combinazione dei movimenti, così è probabile che EUDOSSO siasi servito, come ausiliare, di uno di quei meccanismi, la costruzione dei quali era affidata all'antica sferopea (cfr. p. 458).

Le sfere di Calippo e di Aristotele.

17. - Il sistema delle sfere omocentriche venne accuratamente studiato nella scuola di Cizico da MENECMO (vedi p. 149) e POLEMARCO, senza, però, subire ivi modificazioni

rilevanti. Ma, più tardi, l'astronomo CALIPPO, migliore osservatore del matematico EUDOSSO, avvertì la necessità di portare da 26 a 34 il numero delle sfere mobili ausiliari, aggiungendone una tanto per Marte quanto per Venere e Mercurio, e due pel sole e per la luna. Tale emendamento fu dal suo inventore sottoposto al giudizio di ARISTOTELE (durante un viaggio ad Atene all'uopo intrapreso assieme a POLEMARCO), e combattuto da AUTOLICO da Pitane (cfr. più avanti n. 26) in uno scritto contro ARISTOSSENO, oggi perduto, del quale SIMPLICIO conservò memoria. Il risultato di quella conferenza astronomica è ignoto; ma ciò che è certo si è che il filosofo di Stagira accordò in massima la sua approvazione alle idee di EUDOSSO, modificandole però dal canto suo in un senso che importa rilevare.

Mentre EUDOSSO e CALIPPO consideravano l'investigazione dei fenomeni celesti esclusivamente nel senso geometrico indicato da PLATONE, epperò prescindevano affatto dalle condizioni meccaniche del problema (costituzione delle sfere mobili ed artifici regolatori dei loro movimenti), ARISTOTELE si occupò di connettere in un tutto bene organizzato l'intera serie dei movimenti, rendendo le sfere inferiori dipendenti dalle superiori. E credette di conseguire tale intento collegando insieme tutte le sfere proposte da CALIPPO; per evitare poi che i movimenti degli astri superiori agli inferiori si comunicassero, egli, intercalò, dopo l'ultima e più interiore sfera (*deferente*) di ciascuno pianeta e prima della sfera più esterna del pianeta immediatamente inferiore, un certo numero di nuove sfere (*reagenti*). Così la luna ebbe 5 deferenti e nessuna reagente; Saturno e Giove ciascuno 4 deferenti e 3 reagenti; Marte, Mercurio, Venere ed il Sole 5 deferenti e 4 reagenti: in totale si otteneva così 55 (1) sfere, oltre a quella delle stelle fisse (2).

---

(1) Questo numero si ritrova nel *quartenario* di cui PLATONE parla nel *Timeo* e che si compone delle due serie 1, 2, 4, 8 e 1, 3, 9, 27.

(2) A ragione il MÖBIUS pensa che gli sforzi fatti dagli antichi per determinare, con esattezza sempre crescente, le traiettorie degli astri mediante epicicli, ognor più numerosi, corrisponde al metodo moderno di rappresentare una funzione col mezzo di una serie trigonometrica.

Il sistema di ARISTOTELE è, come si vede, molto complicato; lo è anzi più di quanto sia strettamente necessario, perchè fu notato che lo stesso scopo prefissosi dallo Stagirita può conseguirsi con 6 sfere di meno (1). Sia in causa di tale complicazione, sia per altre cagioni che non ci importa indagare, il sistema delle sfere omocentriche di ARISTOTELE ebbe breve vita; i Greci lo abbandonarono e, benchè molti secoli dopo sia stato ripreso sott'altro cielo (2), si può dire che la sua azione sui progressi dell'astronomia sia stata nulla. Che altrettanto possa dirsi della sua influenza sulla sferopea è poco probabile, ma niun documento abilita ad affermare e tanto più a misurare tale ipotetico benefico influsso. Laonde nessuna ragione ci consiglia a trattenerci ulteriormente sopra il congegno astronomico di ARISTOTELE; e poichè altri sistemi congeneri la Grecia non produsse, all'infuori di quella che adottarono più tardi IPPARCO e TOLOMEO e di cui ci occuperemo più innanzi, così non abbiamo ragione per indugiarci ulteriormente sopra questo argomento.

I cicli cronometrici.

18. - I sistemi cosmologici ideati dai Greci possono indirettamente servire come criterio misuratore del numero e dell'esattezza delle osservazioni astronomiche da essi compiute. Ma vi è ancora un altro ordine di dati, che può disimpegnare il medesimo ufficio, fors'anche con precisione maggiore, cioè i procedimenti che vennero successivamente adoperati, per misurare e dividere il tempo (3).

Non intendiamo di arrestarci a descrivere il modo in cui venivano determinate le varie fasi della giornata; soltanto ricordiamo che lo strumento a tal fine adoperato era il gnomone, la cui introduzione in Grecia è attribuita ad ANASSI-

(1) SCHIAPARELLI, l. c., p. 49.

(2) Veggasi l'opera *Homocentricorum seu de stellis*, di FRACASTORO (1483-1553) pubblicata la prima volta a Venezia nel 1538.

(3) Per ulteriori informazioni si ricorra al *Lehrbuch der mathematischen und technischen Chronologie* (Berlin, I ed. 1825, II ed. 1883) dell'IDELER e al T. I (London, 1837) dell'*History of inductive Sciences* del WHEWELL.

MANDRO, e le cui applicazioni non cessarono nemmeno quando il meccanico CTESIBIO, un secolo e mezzo a. C., insegnò la costruzione degli orologi.

In origine i Greci adoperavano *mesi lunari*, ognuno dei quali comprende il periodo di tempo necessario affinchè la luna passi successivamente per tutte le sue fasi (1). Avendo in seguito osservato come, dopo circa dodici mesi lunari, le stagioni (che in origine erano due sole, *estate* ed *inverno*) si ripresentano nello stesso ordine, se ne compose un nuovo periodo (luni-solare), l'*anno*, regolatore delle feste periodiche. Questa modificazione è di somma importanza, perchè attesta che si vide allora essere (per usare le parole di DANTE)

> Lo ministro maggior della natura
> Che . . . . . .
> . . . col suo lume il tempo ne misura.

Però, dopo poche applicazioni dell'anno luni-solare, si avvertì un disaccordo tra il presentarsi delle stagioni e l'epoca prefissata alle feste, e vi si portò rimedio coll'introduzione dell'anno bisestile, che venne effettuata in epoca remotissima (però dopo OMERO ed ESIODO), ma regolata in modo stabile soltanto all'epoca di SOLONE (VI sec. a. C.). Al quale si fa risalire il costume di comporre ogni anno comune di 12 mesi alternativamente di 30 e 29 giorni; l'anno bisestile invece comprendeva un tredicesimo mese di 36 giorni. Ogni anno comune era seguito da un bisestile e formava con esso un ciclo biennale o *trieteride* di 738 giorni. Tale sistema implica, quindi, che l'anno sia in media di 369 giorni; la differenza, assai notevole, fra tale lunghezza e la durata reale doveva ben presto manifestare un disaccordo tra le date ed i fenomeni, ed EUDOSSO ne diede la spiegazione insegnando (dopo il 387 a. C.) ai Greci l'anno egiziano di giorni 365 $^1/_4$. Per ovviare a quell'inconveniente s'introdusse, a quanto riferisce CENSORINO nel noto suo scritto *De die natali*, un periodo quadriennale (*tetraeteride*) di 1461 giorni, o, secondo l'attestazione di GEMINO, uno di otto anni (*ottae-*

(1) Cfr. TEONE SMIRNEO (ed. DUPUIS), p. 170, linee 6-11.

teride) di 2922 distribuiti in 99 mesi (1). Ma anche questi cicli, coll'andar del tempo, dovevano manifestarsi insufficienti. D'altronde, sin dal V sec. a. C., un Ateniese che ora gode fama mondiale, METONE, propose (432 a. C.) il ciclo di 235 mesi lunari o 19 anni solari, per rappresentare il lasso di tempo necessario affinchè la terra, la luna ed il sole riprendano le loro posizioni rispettive (2); in base a questo concetto, egli costruì un calendario, il quale ebbe virtù di fare accettare le sue idee da tutta la Grecia. Se non che anche il *ciclo di Metone* aveva imperfezioni che ulteriori osservazioni rivelarono; infatti, un secolo dopo, il Ciziceno CALIPPO scopriva (330 a. C.) che esso faceva l'anno solare un 76° di giorno più lungo del vero, e proponeva (330 a. C.) la considerazione di un ciclo di 27759 giorni ripartiti in 76 anni, ciclo di grande esattezza, che oggi ancora a titolo di onore porta il nome di chi lo concepì. Un ulteriore perfezionamento — l'ultimo che dobbiamo riferire — fu operato da IPPARCO (3); il quale, avendo notato che CALIPPO fece l'anno tropico più lungo del vero di circa la 300ª parte di un giorno, suggerì la considerazione di un ciclo di 111035 giorni distribuiti in 304 anni. La conformità dei fenomeni celesti al principio ed alla fine di questo periodo è così perfetta, che l'*annus Hipparchi*, come CENSORINO lo chiama, è un periodo capace di soddisfare le esigenze di un'astronomia anche più avanzata di quella che si rispecchia nell'*Almagesto* di TOLOMEO; nulla di sorprendente, adunque, se esso segni il punto culminante della cronologia astronomica dei Greci (4).

---

(1) Anche questo periodo venne insegnato ai Greci da EUDOSSO DA CNIDO in uno scritto, oggi perduto, intitolato appunto *Sull'ottaeteride* (cfr. BÖCKH, *Ueber die vierjährigen Sonnenkreis der Alten, vorzüglich den Eudoxischen*, Berlin. 1863). Secondo IDELER (op. cit., T. II, p. 607) il periodo di otto anni sarebbe stato stabilito avanti quello di due.

(2) È ignota la considerazione che guidò METONE al ciclo di 19 anni; forse egli si servì delle eclissi già osservate.

(3) Nell'opera oggi perduta *Sopra i mesi ed i giorni intercalari* (Περὶ ἐμβολίμων μηνῶν τε καὶ ἡμερῶν).

(4) Un altro ciclo di 2434 anni, suggerito da ARISTARCO, sembra abbia incontrato poco favore; esso è ricordato da CENSORINO in un passo che P. TANNERY di recente ha ricondotto alla

L'astronomia come scienza di misura.

19. - Fa ora d'uopo che ritorniamo ad ARISTARCO di Samo, il COPERNICO dell'antichità (cfr. p. 461) per esaminare l'opera superstite di questo scienziato *Sulle grandezze e le distanze del sole e della luna* (περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης (1), la quale, se pei risultati definitivi che contiene non merita più un posto nella biblioteca di un astronomo (2), pel suo indirizzo prettamente geometrico è degna di tutta la considerazione dello storico e di profondo studio da parte del matematico. Giacchè la somma di cognizioni matematiche ivi adunata e la rigorosa concatenazione logica delle sue parti la fanno giudicare non indegna di figurare a lato delle opere che, come essa, furono prodotte durante il periodo aureo della geometria greca (3).

Quali fondamenti al proprio argomentare, ARISTARCO pone le sei ipotesi seguenti:

---

vera lezione; v. la memoria sopra *La grande année d'Aristarque de Samos* (Mem. de la Soc. de Bordeaux, 3ª Série, T. IV, 1888, p. 79-96).

(1) Quest'opera fu pubblicata per la prima volta in latino da G. VALLA (1488) e poi, pure in latino, da F. COMMANDINO (1592). L'" editio princeps „ dell'originale appartiene al WALLIS (1588); cfr. anche il III Vol. delle *Opere* dello stesso (1699). In greco ed in francese la si legge nell'*Histoire d'Aristarque de Samos par* M. DE F.*** (FORTIA D'URBAN) Paris, 1810; questa versione francese fu ristampata nel 1823; nemmeno la più recente edizione di tale opuscolo, fatta da E. NIZZE (Stralsund, 1856) è ritenuta oggi come soddisfacente; una traduzione tedesca fu fatta da A. NOKK (Freiburg, 1854) ed una inglese da T. HEATH (p. 449). Vedremo (n. 22) che il problema ivi trattato era stato, almeno in parte, studiato dianzi da FIDIA (p. 281), il presunto padre di ARCHIMEDE.

(2) Tuttavia è ingiustizia ed esagerazione l'affermare che " il est fâcheux pour sa (cioè di ARISTARCO) mémoire que ce livre nous ait été conservé en entier „ (DELAMBRE, *Hist. de l'astr. anc.*, T. I, Paris, 1817, p. 75).

(3) Va notato essere opinione dal TANNERY che ARISTARCO non abbia fatto che dar forma scientifica a metodi, di cui l'inventore sarebbe EUDOSSO da Cnido. V. l'articolo *Aristarque de Samos* (Mem. de la Soc. de Bordeaux, 2ª Série, T. V, 1884, p. 237-258) e *Science hellène*, p. 56, nota.

I. La luna riceve la propria luce dal sole. II. La terra si può considerare come un punto rispetto alla sfera lunare. III. Quando la luna ci appare dimezzata, il circolo di separazione delle due parti ha il proprio piano passante pel nostro occhio. IV. Allora la distanza angolare del sole dalla luna è 87°. V. L'ombra proiettata dalla terra è in larghezza eguale a due diametri lunari. VI. La grandezza apparente della luna è la quindicesima parte del segno, cioè (1) due gradi.

Non è còmpito nostro il discutere questi canoni; soltanto osserveremo che, sin dal tempo di PAPPO (2), si consideravano come falsi il V ed il VI (3); quanto al IV, in base alle osservazioni più recenti, si sostituisce 89° 50′ a 87°. Riguardo al procedimento che segue ARISTARCO — il quale chiamasi tuttora « metodo della dicotomia di ARISTARCO » —, rileveremo anzitutto che egli, ben vedendo l' impossibilità di determinare con esattezza le grandezze e le scambievoli distanze degli astri considerati, si contentò di assegnare due limiti, fra cui sono inclusi i mutui rapporti delle une e delle altre.

20. - Il primo di questi limiti è insegnato dalla prop. VIII, la quale dice: « il rapporto delle distanze della terra dal sole e dalla luna è compreso fra 18 e 20 ». Per dimostrarla ARISTARCO osserva che, quando la luna appare dimezzata, essa determina col sole e la terra un triangolo di cui è retto l'angolo che ha il vertice nella luna e di 87° (ipotesi IV) quello che ha per vertice la terra; di tale triangolo è pertanto conosciuta la forma, epperò si può determinare il rapporto dei due cateti, che sono le congiungenti della terra al sole ed alla luna. Ora tale determinazione è facilissima, mediante i procedimenti trigonometrici di cui oggi disponiamo, ma esige una tattica speciale da parte di chi voglia risolverla colla pura geometria, come apparirà dalla seguente esposizione del ragionamento usato da ARISTARCO.

Sia (fig. 66) TLS il triangolo costituito dai tre astri nell'istante considerato, onde l'angolo SLT sarà retto e l'angolo

(1) Si ricordi che il *segno* è la dodicesima parte dello Zodiaco

(2) PAPPO ed. HULTSCH, p. 554 e seg.

(3) Secondo l'*Annuaire publié par la Bureau des longitudes pour l'an 1913*, la grandezza apparente della luna è 31′. 8″, 18, cioè poco più della quarta parte di quanto credeva ARISTARCO.

LTS di 87°. Nel piano TLS si descriva il quadrante di centro T e raggio TS e se ne tracci il raggio TLD; si descriva ancora su TS il quadrato $STEF$, di cui si conduca la dia-

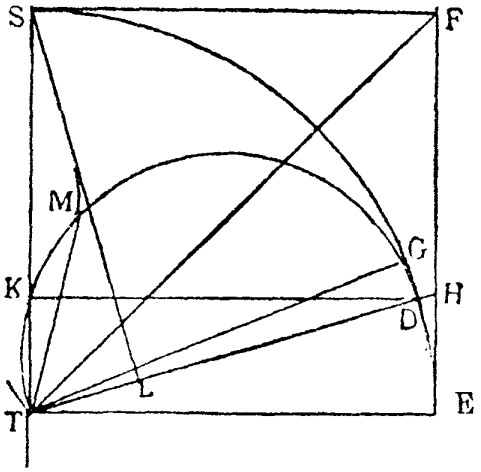


Fig. 66.

gonale TF; si segni ancora la bisettrice TG dell'angolo FTE. Essendo per la ipotesi e le costruzioni fatte

$$\text{ang. } GTE = \frac{1}{4}\,90^\circ\,,\ \text{ang. } DTE = 3^\circ$$

sarà

$$\frac{\text{ang. } GTE}{\text{ang. } DTE} = \frac{15}{2}\,. \tag{1}$$

Detto poi H il punto in cui EF è tagliata dal prolungamento del raggio TD, si avrà:

$$\frac{GE}{HE} > \frac{\text{ang. } GTE}{\text{ang. } DTE}\,, \tag{2}$$

onde, per la (1),

$$\frac{GE}{HE} > \frac{15}{2}\,. \tag{3}$$

Ma

$$\overline{TF}^2 = 2\ \overline{TE}^2\,,\ 2\,.\,25 > 49\,,$$

onde

$$25\,.\,\overline{TF}^2 > 49\,.\,\overline{TE}^2\,,$$

ossia

$$\frac{TF}{TE} > \frac{7}{5}.$$

Applicando ora al triangolo EFT la notissima proprietà della bissettrice di un angolo di un triangolo (EUCLIDE, L. IV, Prop. 3) si trasforma questa relazione nell'altra

$$\frac{GF}{GE} > \frac{7}{5},$$

da cui, componendo,

$$\frac{EF}{EG} > \frac{12}{5}. \tag{4}$$

Moltiplicando le (3), (4) si conclude

$$\frac{EF}{EH} > 18,$$

ossia

$$\frac{TE}{EH} > 18,$$

onde *a fortiori*

$$\frac{TH}{EH} > 18.$$

Se, da ultimo, si osserva la simiglianza dei triangoli LST, ETH si può trasformare questa relazione nell'altra

$$\frac{TS}{TL} > 18. \tag{5}$$

Un'altra relazione congenere si ottiene conducendo la DK parallela a TE e descrivendo su DT come diametro una semicirconferenza. Questa passerà per K e l'arco TK sarà di 6°; condotta inoltre la corda $TM = \frac{1}{2} TD$, l'arco TM varrà 60°, onde

$$\text{arco } TM = 10 \text{ arco } TK.$$

Ma

$$(6) \qquad \frac{\text{arco } TM}{\text{arco } TK} > \frac{\text{corda } TM}{\text{corda } TK},$$

quindi

$$\frac{TM}{TK} > 10$$

e

$$\frac{TD}{TK} > 20.$$

Utilizzando, finalmente, la simiglianza dei triangoli TDK e TSL si conclude la relazione annunziata, cioè

$$(7) \qquad \frac{TS}{TL} < 20.$$

Le (5) e (7) compongono la limitazione seguente:

$$18 < \frac{TS}{TL} < 20,$$

che è appunto quella espressa nel riferito teorema di ARISTARCO.

Il ragionamento testè esposto riposa sull'applicazione, oltrechè di notissime proporzioni contenute negli *Elementi* di EUCLIDE, di un teorema che è espresso dalle relazioni (2) e (6) e che, in linguaggio moderno, si enuncia come segue: « se due archi x, y sono tali che si abbia

$$0 < x < y < \frac{\pi}{2},$$

si avrà anche

$$\frac{\text{sen } y}{\text{sen } x} < \frac{y}{x} < \frac{\text{tg } y}{\text{tg } x} ».$$

In questa limitazione è contenuto un teorema molto importante, di cui più tardi (n. 41) esporremo una dimostrazione

datane da C. TOLOMEO (1); ma qui andava rilevato come esso fosse già noto anteriormente (2).

Dalla Prop. VIII il nostro autore ne deduce un'altra osservando (Prop. IX) che, siccome un'eclissi totale di sole non dura che pochi minuti, il vertice del cono d'ombra (lunare) deve lambire la terra, onde, con grande approssimazione, il rapporto dei diametri del sole e della luna può equipararsi al rapporto delle distanze dalla terra del sole e della luna; dunque quel rapporto è compreso fra 18 e 20 (Prop. XI) e quindi (EUCLIDE, *Elem.*, Lib. XII, Prop. 18ª) il rapporto dei volumi dei detti corpi è compreso tra $18^3 = 5832$ e $20^3 = 8000$.

21. - A meglio caratterizzare l'indole dei ragionamenti

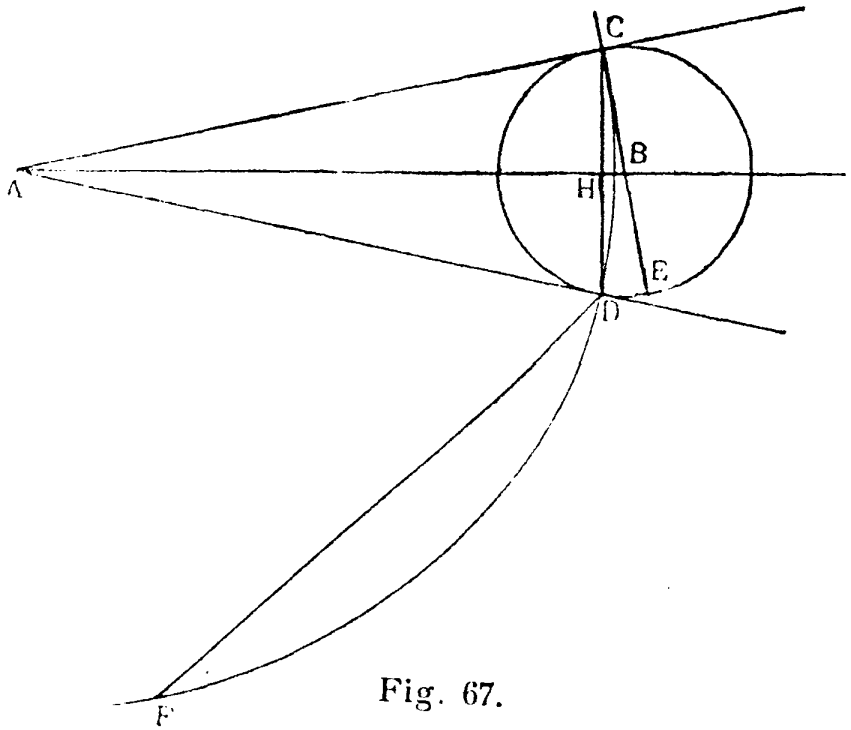


Fig. 67.

adoperati da ARISTARCO, riferiremo ancora il metodo che egli ha seguito per determinare due limiti, entro cui è con-

(1) Un'altra dimostrazione, congegnata da F. COMMANDINO ed esposta nella sua traduzione latina di ARISTARCO (Pisa, 1572), si legge nell'articolo di D. BESSO, *Sopra una ricerca goniometrica di Aristarco di Samo* (Periodico di Matematica, T. IV, 1885, p. 14-17).

(2) Ritroveremo la prima parte di esso $\left(\frac{y}{x} > \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x}\right)$ nell'*Ottica* di EUCLIDE (v. n. 54).

tenuto il rapporto tra il diametro lunare e la distanza fra la terra e la luna.

Sia (fig. 67) A l'occhio dell'osservatore e B il centro della luna, nell'istante in cui essa trovasi col sole in un cono di vertice A. Per la retta AB conduciamo un piano (il piano del disegno) il quale tagli la luna nel circolo CDE ed il cono anzidetto lungo le rette AC, AD; si tracci anche il diametro CBF. In forza della VI ipotesi (1) sarà angolo $BAC = 1^\circ$ e

$$\frac{BC}{AC} < \frac{1}{45} \text{ (2)}, \quad \frac{CE}{AC} < \frac{2}{45};$$

onde, *a fortiori*,

$$\frac{CE}{AB} < \frac{2}{45}. \tag{8}$$

Si descriva poi il circolo di centro A e raggio AC e si tracci in esso la corda DF eguale al raggio. Essendo arco $CD = 2^\circ$ e arco $DF = 60^\circ$ sarà

$$\frac{\text{arco } DC}{\text{arco } DF} = \frac{1}{30}.$$

Ma

$$\frac{\text{arco } DC}{\text{arco } DF} < \frac{\text{corda } DC}{\text{corda } DF},$$

dunque

$$\frac{DC}{DF} > \frac{1}{30}$$

ossia

$$\frac{2.CH}{AC} > \frac{1}{30}.$$

---

(1) Va notato che *soltanto* dall'essere tale ipotesi tanto lontana dal vero deriva la poca esattezza del risultato ottenuto da ARISTARCO.

(2) Ciò equivale ad ammettere

$$\text{tg } 1^\circ < \frac{1}{45} = 0,0222...,$$

il che è vero, essendo (H. SCHUBERT, *Fünfstellige Tafeln un Gegentafeln für logarithmische und trigonometrische Rechnung*, Leipzig, 1897)

$$\text{tg } 1^\circ = 0,01746.$$

Ora, essendo simili i triangoli ACH e ACB, se ne dedurrà

$$\frac{2 . CB}{AB} > \frac{1}{30},$$

ossia

$$\frac{CE}{AB} > \frac{1}{30}. \tag{9}$$

Riunendo le disuguaglianze (8), (9) si conclude che

$$\frac{1}{30} < \frac{CE}{AB} < \frac{2}{45},$$

cioè, come afferma ARISTARCO (Prop. XII): « il rapporto del diametro lunare alla distanza tra la terra e la luna è compreso tra $\frac{1}{30}$ e $\frac{2}{45}$ ». Con procedimento analogo egli trova che il rapporto dei diametri del sole e della terra è compreso tra $\frac{19}{3}$ e $\frac{43}{6}$ (Prop. XVI) e ne deduce (Prop. XVII) che il rapporto dei volumi di quei due corpi è compreso tra $\frac{6859}{27}$ e $\frac{79507}{216}$. Combinando questa proposizione con altre precedenti conclude essere $\frac{108}{43}$ e $\frac{60}{19}$ (1) due numeri fra cui è compreso il rapporto dei diametri della terra e della luna e, quindi, essere $\frac{1259712}{79507}$ e $\frac{216000}{6859}$ due limiti fra cui è racchiuso il rapporto dei loro volumi (2).

Arrestiamoci un istante ancora all'opera di ARISTARCO per annunciare che ivi dovremo più tardi (n. 54) segnalare alcune proposizioni appartenenti all'ottica geometrica, per

(1) Come valore medio di questo rapporto si può quindi assumere 0,3531; lo paragoni il lettore a quello (0,272975) insegnato (v. il precitato *Annuaire publié par le Bureau des Longitudes*) dalla scienza odierna.

(2) IPPARCO, più tardi, trovò che i volumi del sole, della terra e della luna stanno fra di loro come i numeri 1880, 27 e 1. V. *Teone Smirneo*, ed. DUPUIS, p. 319; cfr. anche PAPPO ed. HULTSCH, p. 554.

notare la forma rigorosamente euclidea in cui è scritta e finalmente anche per estrarne le seguenti proposizioni, con cui essa apresi:

« Due sfere uguali sono inscritte nello stesso cilindro e due diseguali in uno stesso cono; in un caso e nell'altro la retta che congiunge i centri dello due sfere è perpendicolare ai piani dei circoli di contatto » (1).

22. - Che lo scritto di ARISTARCO ora esaminato non sia l'unica opera del celebre astronomo di Samo emerge dal fatto che ivi non è fatta menzione del sistema eliocentrico da lui sostenuto (v. p. 462), ed è provato indiscutibilmente da uno squarcio dell'*Arenario* di ARCHIMEDE, che qui riferiamo per dare (a complemento di ciò che esponemmo nel Libro precedente) un'idea di quelle ricerche che valsero al grande Siracusano fama di eminente tra gli antichi astronomi (2):

Tu sai (3) che il mondo viene detto una sfera, il cui centro coincide col centro della terra ed il cui raggio è eguale alla retta che unisce il centro della terra al centro del sole. Questo è scritto in generale e tu lo apprendesti dagli astronomi. Ma ARISTARCO di Samo pubblicò un certo libro intitolato *Ipotesi* (ὑποθεσίων), dal quale emerge essere il mondo assai più grande di quanto dicemmo. Infatti egli ammette che le stelle ed il sole stiano fermi e la terra giri attorno al sole come centro, e che la grandezza della sfera delle stelle fisse, avente per centro il sole, sia tale che la circonferenza descritta dalla terra sta alla distanza delle stelle fisse come il centro della sfera sta alla superficie. Ma essendo costume di riguardare la terra come il centro del mondo, è a credersi che ARISTARCO intendesse dire che il circolo descritto dalla terra ha colla sfera delle stelle fisse lo stesso rapporto che ha la terra alla sfera chiamata mondo (4). Infatti le dimostrazioni sono congegnate come se i fenomeni avvenissero così e se la grandezza della sfera su cui si immagina moversi la terra fosse eguale a quella che chiamiamo mondo.

---

(1) Tali proposizioni trovano applicazioni alla spiegazione delle eclissi: v. *Teone Smirneo*, ed. DUPUIS, p. 315.

(2) Cfr. un brano di IPPARCO riferito da TOLOMEO (*Almagesto*, ed. HALMA, T. I, p. 153).

(3) Il discorso è rivolto a GELONE Siracusano (cfr. p. 281).

(4) Questa interpretazione delle idee di ARISTARCO è generalmente giudicata arbitraria; v. SCHIAPARELLI, *I precursori di Copernico*, p. 34; p. 34; HEIBERG, *Questiones Archimedeae* (Hauniae, 1879) p. 202 e ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. II, p. 247.

Ora noi diciamo che, se si avesse una sfera di arena grande come la sfera delle stelle fisse immaginata da ARISTARCO, si potrebbe dimostrare che tra i numeri indicati nel libro (1) dei *Principi* (ἀρχαῖ) ve ne sono di quelli che sorpassano il numero dei grani di sabbia contenuti in tale sfera (2). Bisogna per ciò ammettere:

1.° Che il contorno della terra sia 300 miriadi (3000000) di stadi (3), ma non maggiore; perchè, come sai, taluno volle dimostrare che esso è circa 30 miriadi di stadi (4). Ma io, spingendomi molto più avanti lo suppongo 10 volte maggiore, cioè circa 300 miriadi di stadi, ma non più.

2.° Poi, che il diametro della terra sia maggiore di quello della luna, anche qui conformemente al parere di molti astronomi anteriori.

3.° Inoltre, che il diametro del sole sia trenta volte quello della luna, ma non più. Giacchè fra gli astronomi ora citati, EUDOSSO dichiarò essere quel diametro nove volte il diametro della luna, FIDIA (5) dodici, mentre da ultimo ARISTARCO (6)

---

(1) Oggi perduto.

(2) A ragione pertanto scrive M. CHASLES: "le but d'Archimède était de détruire une opinion erronée, savoir que le nombre des grains de la terre était infini, ou du moins qu'on ne pouvait assigner un nombre plus grand „ (*Eclaircissement sur le traité " de numero arenae „*, Comptes rendus, etc., T. XIV, 1842, p. 547-559). Invece, nulla prova che ragionevolmente il LIBRI asserisse: " Archimède a écrit, comme on sait, un traitè intitulé l'*Arénaire*. qui n'a d'autre but que de simplifier la numération des Grecs „ (*Hist. des Sciences math. en Italie*, T. II, Paris, 1838, p. 295).

(3) Essendo lo stadio 157 metri, ARCHIMEDE ammette che il meridiano terrestre sia 47.100.000 metri, mentre è 40.000.000 ARISTOTELE (seguendo in ciò probabilmente EUDOSSO) lo ammetteva di 400.000 stadi.

(4) ARCHIMEDE sembra alludere qui ad una determinazione fatta da DICEARCO alla fine del IV secolo od al principio del III (v. F. HULTSCH, *Poseidonius über die Grösse und Entfernung der Sonne*, Abh. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Hist.-phil. Klasse, Neue Folge, T. I, 1897, p. 340), determinazione il cui risultato venne tosto abbandonato per quello che ERATOSTENE (p. 343) dedusse dalla misura di un arco di meridiano e che fa il meridiano stesso di 252000 stadi (TEONE SMIRNEO, ed. DUPUIS, p. 204 e seg.).

(5) Quello che venne identificato col padre di ARCHIMEDE, v. p. 280.

(6) Cfr. più indietro, p. 484.

si è sforzato a dimostrare che il diametro del sole è maggiore di 18 volte e minore 20 volte il diametro della luna. Quanto a me, spingendomi più oltre per dimostrare inconfutabilmente l'asserto, suppongo essere il diametro del sole eguale a 30 volte quello della luna, ma non di più.

4.° Finalmente che il diametro del sole sia maggiore del lato del poligono regolare di mille lati inscritto nel circolo massimo della sfera del mondo. Ammetto ciò avendo ARISTARCO asserito (1) che il sole appare circa la 720ª parte dello zodiaco.

Per giustificare pienamente quest'ultima ipotesi ARCHIMEDE descrive una ingegnosa esperienza che lo condusse a concludere che l'angolo sotto cui ci appare il sole è compreso tra la 164ª e la 200ª parte di un angolo retto. Applicando poi e i teoremi insegnati nel suo opuscolo sulla *Misura del circolo* (p. 317-323) e quella proposizione trigonometrica che vedemmo usata da ARISTARCO (p. 484) egli conclude essere accettabile la detta ipotesi. Per dedurre da ciò che il diametro del mondo è minore di 10000 diametri terrestri e minore anche di 10000000000 stadi ARCHIMEDE ragiona poi come segue:

Chiaminsi s, l, t, m i diametri del sole, della luna, della terra e del mondo; inoltre L_{1000} e P_{1000} il lato ed il perimetro del poligono di mille lati inscritto nel circolo massimo della sfera del mondo. In forza delle ipotesi fatte si ha

$$s \leq 30\, l, \quad l < t,$$

onde

$$s < 30\, t;$$

inoltre

$$s > L_{1000},$$

onde

$$P_{1000} < 1000\, s < 30000\, t.$$

Ma la geometria insegna essere

$$P_{1000} > 3\, m, \text{ (2)}$$

(1) Probabilmente in un'opera oggi perduta.

(2) Per rendersi conto di questo passaggio si osservi essere

$$P_{1000} = \text{m. } 1000 \text{ sen } \frac{180^\circ}{1000} = \text{m. } 1000 \text{ sen } 10' . 48^\circ.$$

Ora sen $10' . 48'' >$ sen $10' = 0.00291$ (cfr. SCHUBERT, l. c., p. 104) onde, a maggior ragione

$$\text{sen } 10' . 48'' > 0.003$$

epperò

$$P_{1000} > m. 1000 \times 0{,}003 = m. 3 \quad \text{c. d. d.}$$

onde

$$m < \frac{1}{2} P_{1000} < 10000\, t\,,$$

e così la prima proposizione è dimostrata. E notando che, per le ipotesi fatte,

$$t < 1000000 \text{ stadi},$$

si conclude

$$m < 10000000000 \text{ stadi},$$

conformemente alla seconda asserzione di ARCHIMEDE.

23. - Le investigazioni consegnate nella parte astronomica dell'*Arenario* furono, più tardi, il punto di partenza di altre, compiute dal filosofo stoico POSIDONIO (1) e delle quali, verso la metà del I sec. a. C., rese conto CLEOMEDE nell'opera Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων. Non ci arresteremo a lungo su di esse perchè non contengono alcun importante contributo all'incremento delle nostre cognizioni geometriche (2); ma ne estrarremo un ingegnoso procedimento per calcolare il diametro del sole. Esso poggia sull'osservazione — dovuta ad ERATOSTENE — che a Siene (città posta sul tropico del Cancro), nel giorno in cui cade il solstizio estivo, si ha, nell'istante del mezzodì, uno spazio senz'ombra di 300 stadi, e sull'ipotesi che la traiettoria solare sia 10000 volte un cerchio massimo della terra.

Per utilizzarle chiamisi (3) (fig. 68) T il centro della terra, G la posizione di Siene e A il centro del sole a mezzodì del detto giorno. Si immagini tagliato tutto il sistema con un piano condotto per la retta AGT (il piano del disegno) e, guidate da T le tangenti TB, TC alla traccia lasciata su

---

(1) Nato in Siria, vissuto a Roma (ove fu maestro di CICERONE ed amico di POMPEO) e morto a Rodi circa nell'80 a. C.

(2) Maggiori particolari si troveranno, oltrechè nella memoria dianzi citata di F. HULTSCH sopra POSIDONIO, nelle opere seguenti: BAILLY, *Histoire de l'astronomie moderne depuis la fondation de l'Ecole d'Alexandrie*, etc., T. I. Paris, 1779, p. 119; DELAMBRE, *Histoire de l'astronomie ancienne*, T. I. Paris, 1817, p. 223; R. WOLF, *Geschichte der Astronomie*. München, 1877, p. 175.

(3) Cfr. SCHIAPARELLI, *Opinioni degli antichi sulle distanze e sulle grandezze dei corpi celesti* (Mem. del R. Ist. Lombardo, T. X) nota c.

questo piano dal globo solare, se ne determinino le intersezioni I, L colla superficie terrestre; in tutti i punti compresi fra I e L non vi è ombra. Ora la distanza IL fu tro-

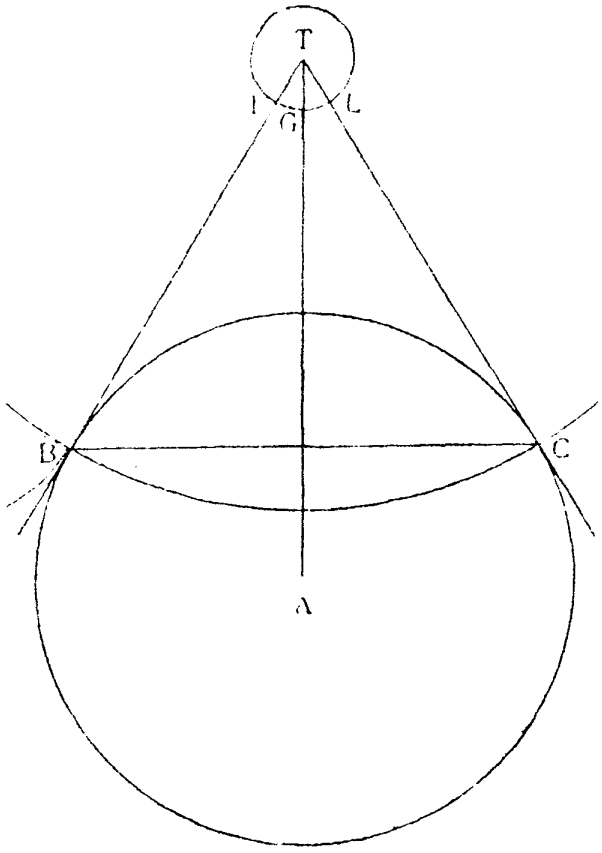


Fig. 68.

vata essere 300 stadi, e la distanza tra il sole e la terra è per ipotesi 10000 raggi terrestri; quindi

$$TA = 10000\ TG\ ,\ IL = 300 \text{ stadi}\ .$$

Ma, fra gli archi o le corde che presentansi nella figura, sussiste la relazione

$$\frac{BC}{IL} = \frac{TA}{TG}\ ,$$

onde

$$BC = 30000000 \text{ stadi}.$$

Ora BC può, senza grave errore considerarsi eguale al diametro del sole, onde questo vale 3 milioni di stadi, come trovò Posidonio.

I risultati di queste, come di tutte le altre calcolazioni sin qui riferite, sono così lontani dal vero, che indarno se ne cercherebbe traccia in un trattato moderno di astronomia. Tuttavia di esse doveva venir tenuta qui parola perchè mostrano come i Greci, dopo avere lasciato libero corso alla loro fantasia nel congegnare spiegazioni della costituzione e del meccanismo dell'universo, abbiano finito per mettersi sopra una strada razionale, sopra l'unica che doveva condurre ad una vera scienza astronomica. Nel Cap. seg. troveremo altre attestazioni, benchè di natura un po' differente, del medesimo fatto e nel Cap. III potremo constatare gli splendidi risultati di tali fatiche; ma intanto, vegga il lettore, quanto cammino l'astronomia aveva già percorso nel lasso di tempo che va da TALETE a POSIDONIO!

CAPITOLO II.

La Sferica

Il più antico trattato sulla Sferica.

24. - PAPPO, nell'esordio del VI Libro della *Collezione*, accenna (1) con qualche imprecisione, ad un gruppo di scritti, la cui conoscenza è indispensabile a coloro che, essendo già istruiti negli *Elementi* di EUCLIDE, vogliono dedicarsi allo studio dell'astronomia; questi scritti hanno le loro radici nell'opera maggiore del celebre Alessandrino, cosicchè possono riguardarsi come continuazioni o meglio complementi di essa. E poichè essi sono necessari alla intelligenza della *Composizione matematica* di TOLOMEO (v. più avanti n. 37), così il loro insieme è chiamato da un anonimo scoliasta di PAPPO *Piccola collezione astronomica* (2). Quali lavori questa comprendesse non è noto con assoluta esattezza, fors'anche gl'ingredienti di essa variarono col tempo (3); sembra però che di essa facessero parte quattro opere di EUCLIDE (*Dati*, *Ottica*, *Catottrica*, *Fenomeni*), tre di TEO-

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 474.

(2) Id., p. 1142.

(3) Ed infatti gli Arabi — che tradussero le opere della *Piccola collezione astronomica*, dando ad esse il nome di *Opere intermedie* — vi comprendevano anche alcuni scritti di ARCHIMEDE e MENELAO. Cfr. M. STEINSCHNEIDER, *Die mittleren Bücher der Araber und ihre Bearbeiter* (Zeitschrift f. Math. und Phys., T. X, 1865, p. 456-498).

DOSIO (*Sferica*, *Delle abitazioni*, *Delle notti e dei giorni*), due di AUTOLICO PITANEO (*Della sfera mobile* e *Del levarsi e tramontare delle stelle*), una di IPSICLE (*Delle ascensioni*) e finalmente una di ARISTARCO SAMIO (*Grandezze e distanze del sole e della luna*).

Due di questi scritti ci sono già noti, cioè i *Dati* di EUCLIDE (p. 245-250) ed il libro di ARISTARCO (v. p. 480-488); dell'*Ottica* e della *Catottrica* crediamo opportuno rimandare lo studio al Cap. IV (v. nn. 51-56). Tutte le altre concernono la teoria elementare delle linee tracciate sopra una superficie sferica, disciplina questa che PITAGORA (cfr. p. 54) elevò a scienza individuale, assegnandole il quarto posto (dopo l'Aritmetica, la Musica e la Geometria) nella collezione delle scienze matematiche. La *Sferica* — tale è il nome della nuova disciplina — comprende due ordini di teoremi: negli uni si suppone fissa la sfera che si studia, nei secondi la si considera animata da una rotazione uniforme attorno ad un suo diametro. Come più perfetto modello della esposizione dei primi deve considerarsi la *Sferica* di TEODOSIO, mentre il prototipo di una trattazione dei secondi si ha nei *Fenomeni* di EUCLIDE, o, meglio, del primo dei succitati lavori di AUTOLICO.

Si osservi ora che lo studio della sfera mobile suppone già compiuta l'investigazione delle proprietà della sfera fissa, mentre la *Sferica* di TEODOSIO è posteriore allo scritto di AUTOLICO; d'altronde, sia questi, sia EUCLIDE nei *Fenomeni* (1), parlano come se avessero a propria disposizione un trattato delle proprietà della sfera fissa. Tutto ciò conduce alla conclusione che, sino dal IV sec. a. C., esisteva un trattato di sferica che, rimaneggiata ed ampliata, si ritrova nell'opera di TEODOSIO. Anzi, la rigorosa concatenazione logica delle proposizioni che esiste in tutte le opere matematiche dei Greci permette di ricostruire nelle sue linee generali tale opera perduta; basta perciò accuratamente notare tutti i teoremi su cui tacitamente si fondano EUCLIDE ed AUTOLICO; si arriva così (2), non solo a concludere che TEODOSIO copiò fedelmente l'antico modello, ma ad indicare un buon

(1) HEIBERG, *Litt.-gesch. Studien über Euklid*, p. 43-47.

(2) F. HULTSCH, Berichte der K. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig, Sitzung von 11 Dec. 1886.

numero di proposizioni degli *Elementi* anteriori ad EUCLIDE (1).

Per determinare chi può essere stato l'autore di questa ipotetica Sferica, altro mezzo non si presenta che esaminare l'elenco delle più spiccate personalità matematiche greche anteriori ad EUCLIDE. Fra tutte emerge EUDOSSO da Cnido. « Geometra, astronomo e geografo, EUDOSSO che credeva, come PITAGORA, alla sfericità della terra, aveva dovuto naturalmente occuparsi dei circoli della sfera terrestre al pari di quelli della sfera celeste » (2); inoltre il complicato sistema delle sfere omocentriche (v. p. 470) esige una perfetta conoscenza della geometria della sfera; onde non senza ragione fu emessa l'ipotesi (3) che EUDOSSO fosse l'autore del primo trattato di Sferica; e tale ipotesi venne in generale accolta con favore: taluno l'accettò per vera (4), altri la ammise con qualche riserva (5), ed anche chi la respinse, non la combattè (6). Noi pure troviamo in essa un indiscutibile grado di verosimiglianza; non vogliamo però tacere che giudichiamo, in tesi generale, assai pericoloso il sistema di attribuire un'opera di ignoto autore appartenente ad una certa epoca ed un certo paese all'unico scienziato, nato in

(1) Secondo l'HULTSCH sono le seguenti.

Lib. I, def. 9, 15-23; post. 1-5; assiomi 1-1, 7-9; prop. 1-5, 7-20, 22-24, 26-29, 31-34, 41, 46, 47.

Lib. III, def. 1, 2, 6-9, 11; prop. 1 (e cor.), 3, 5, 7, 10, 16, 20-22, 24, 26, 27, 31.

Lib. IV, prop. 6.

Lib. XI, def. 3, 4, 8; prop. 1-11, 13, 14, 16, 18, 19, 38.

(2) TH. H. MARTIN, Mém. de l'Acad. des Inscriptions et Belles-lettres, T. XXX, 1re Partie, 1881, p. 169.

(3) F. HULTSCH, *Die Sphärik des Theodosius und einige unedierte mathematische Texte* (Berichte der Sächs. Ges. des Wiss., 23 April 1885). V. anche la prefazione alla edizione di AUTOLICO dovuta all'HULTSCH.

(4) Oltre all'HEIBERG, il Gow (*A short History of greek Mathematics*, Cambridge, 1884, p. 254).

(5) P. TANNERY una volta si limita ad accennare all'ipotesi di HULTSCH (*Géom. grecque*, p. 34), un'altra (*Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, p. 37) attribuisce quella sferica " à l'Ecole d'Eudoxe, si non a lui même „.

(6) M. CANTOR, *Vorlesungen* (3a ed., T. I, p. 293) semplicemente osserva che la ipotesi non è dimostrata.

quel tempo ed in quella terra, che si giudica fosse capace di concepirla (1); come non vogliamo passare sotto silenzio che troviamo assai più importante l'accertamento dell'esistenza dell' antica Sferica che la determinazione del nome di chi ne fu autore.

25. - Di tale opera sembrano esistere alcune traccie nel Papiro del Louvre recante il n. 1, decifrato dal LETRONNE, e pubblicato, dopo la morte di questo, dal BRUNET DE PRESLE (2), col titolo di *Arte d'Eudosso*, al quale pare, però, preferibile quello proposto dal LETRONNE, che è *Didascalia celeste di Leptinio*. Venne scritto tra il 193 ed il 165 a. C. (cioè una generazione innanzi IPPARCO) ed ha tutto l'aspetto di un quaderno scolastico (3), corrispondente ad un insegnamento orale, fatto coll'aiuto di un manuale in versi. Comincia coll'annuncio di una esposizione dell'« ammirabile composizione del cielo »; ed insegna, infatti, anzitutto come si muovano il sole, la luna e le stelle erranti. A queste nozioni, altre ne seguono, concernenti i circoli della sfera celeste, le quali possiedono per noi uno speciale interesse, dimostrando che assai presto si avvertì la necessità di considerare in essa certi elementi (come ad esempio i circoli massimi, i circoli paralleli, i poli, ecc.) che si trovano tuttora nei trattati di astronomia.

Per dare un'idea della forma in cui tali cognizioni vengono insegnate trascriviamo, a titolo di esempio, i brani seguenti:

Esistono nel mondo due poli attorno a cui esso gira. La terra, che ha la forma di una sfera, è situata in mezzo al mondo

---

(1) Generalizzando l'applicazione di tale sistema, se un giorno il piccolo volume in cui sono raccolte le opere di GALOIS perdesse il nome del suo autore, esso rischierebbe di venire attribuito a CAUCHY, a STURM, od a LIOUVILLE, che sono i più eminenti analisti francesi del tempo di GALOIS.

(2) *Notices et extraits des manuscrits*, T. XVIII, 2ª Parte, 1865, p. 25 e seg.

(3) Cfr. F. BLASS, *Eudoxi Ars astronomica qualis in charta Aegyptiaca superest denuo edita* (Kiliae, 1887) e P. TANNERY, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, p. 23-24 e 283-295.

pure sferico (1), ed i poli, attorno a cui gira il mondo, sono immobili.

Prova. Infatti, se il polo salisse o discendesse, le Orse tramonterebbero e si leverebbero, mentre invece non si levano. Se il polo si spostasse verso Levante o verso Ponente, le stelle fisse non si leverebbero più negli stessi punti della terra, mentre lo fanno sempre. Dunque il mondo gira attorno a due poli immobili, come dovevasi dimostrare.

Ogni stella fissa si muove secondo un circolo: perchè ciascuna gira attorno al polo immobile ad una distanza che le compete e resta sempre la medesima, pertanto ciascuna deve moversi lungo un cerchio. Le stelle erranti, la luna ed il sole si muovono lungo spirali (2).

Infatti questi astri girano attorno al polo immobile senza conservare da esso la medesima distanza; ma quando sono nel Cancro la distanza è minima, nella Bilancia è maggiore ed è massima nel Capricorno: e ciò fa sì che le stelle erranti si muovono lungo spirali.

Le stelle fisse descrivono dei circoli paralleli. Infatti rimanendo esse fra di loro sempre a distanze eguali, lo stesso accadrà pei loro cerchi; ed è appunto questo che caratterizza i circoli paralleli (3).

Non riferiremo le altre nozioni sulla inclinazione dello Zodiaco e sul modo in cui gli anni sono distribuiti nell'ottaeride (cfr. p. 478), e nemmeno la spiegazione geometrica del fatto che « un'eclisse di sole non è mai dappertutto totale, mentre può esserlo una di luna ». Ma rileveremo due cose; cioè la presenza di due proposizioni che — come vedremo tra poco — AUTOLICO (4) condensò in una unica, e lo stile in cui è scritta la *Didascalia*, il quale, con la sua somiglianza con quello degli *Elementi*, conferma l'ipotesi che la forma euclidea sia lo stadio più perfetto di un metodo di esposizione di origine assai più remota (v. p. 244).

---

(1) Questa proposizione si ritrova nei *Fenomeni* di EUCLIDE sotto la forma: " la terra sta in mezzo al mondo e ne rappresenta il centro „ (Prop. I).

(2) Cfr. p. 464.

(3) Questo stesso fatto è ripetuto e completato più avanti: " Le stelle fisse nelle loro rivoluzioni impiegano lo stesso tempo ed i loro cerchi sono paralleli. Ne diremo la ragione, è che il mondo gira attorno a due poli fissi „.

(4) *Della sfera mobile*, Prop. 9.

Autolico da Pitane.

26. - Il più antico di coloro che, a quanto dice PAPPO, collaborarono alla Piccola collezione astronomica è AUTOLICO da Pitane. Il quale, secondo DIOGENE LAERZIO, sarebbe nato nell'Asia minore (sulla costa dell'Eolide) ed avrebbe avuto per discepolo il filosofo ARCESILAO da Pitane, il quale entrò poi nella scuola che TEOFRASTO aprì ad Atene nel momento del ritiro di ARISTOTELE (322 a. C.) e da essa uscì ancora giovane. ARCESILAO era, pertanto, ancora nel fior degli anni nel 298 a. C., onde fu probabilmente verso il 322 a. C. che abbandonò, per TEOFRASTO, AUTOLICO. Questi adunque, insegnando (già od ancora?) nel 323, fu un po' anteriore ad EUCLIDE (1) (il quale, come sappiamo, fiorì sotto TOLOMEO SOTERO, morto nel 283 a. C.) e questa conclusione sembra confermata dall'esame delle opere superstiti (2) di AUTOLICO, a cui ora ci volgiamo (3).

Una di essa concerne la sfera animata da un movimento uniforme di rotazione e consta dei teoremi seguenti:

I. Quando una sfera ruota con velocità uniforme attorno al proprio asse, tutti i punti della sua superficie, non posti sull'asse, descrivono dei circoli paralleli, i cui poli coincidono con i poli della sfera ed i cui piani sono perpendicolari all'asse.

II. Tutti quei punti descrivono sui propri paralleli in tempi eguali archi simili.

III. Viceversa, archi simili sono percorsi in tempi eguali.

IV. Se un cerchio massimo fisso perpendicolare all'asse

---

(1) TH. H. MARTIN, *Révue critique d'histoire et de littérature*, T. III, 1877, p. 409; F. HULTSCH, Berichte der K. Sächs. Ges. der Wiss., 11 Dicembre 1886 e articolo *Autolico* in PAULY-WISSOWA, *Real-Encyklopädie der class. Alterthumswiss.* AUTOLICO è, in conseguenza, di poco posteriore ad ARISTOTERO, matematico noto soltanto per essere detto maestro di ARATO: cfr. WACHSMUTH, *Des Mathematiker Aristoteros* (Rhein. Museum für Philologie, Neue Folge, T. XX, 1865, p. 455-496).

(2) Una *Sopra i pianeti* contro ARISTOTERO non esiste più.

(3) La migliore edizione di esse è quella che ha il titolo seguente: AUTOLYCI. *De sphaera quae movetur liber, De ortibus et occasibus libri duo, una cum scholiis antiquis edidit* F. HULTSCH (Lipsiae, 1886).

della sfera divide questa in due parti una visibile e l'altra invisibile, nessun punto della sfera passa da una delle regioni nell'altra.

V. Quando invece quel circolo massimo fisso contiene i poli, tutti i punti della sfera mobile passano da una regione nell'altra e restano tanto tempo nell'una quanto nell'altra, cioè tanto sopra quanto sotto l'orizzonte.

VI. Se l'orizzonte è obliquo all'asse, esso è toccato da due paralleli eguali uno dei quali è sempre visibile (il circolo artico) mentre l'altro (l'antartico) è invisibile (1).

VII. Nella stessa ipotesi, i circoli perpendicolari all'asse e seganti l'orizzonte lo incontrano sempre negli stessi punti e sono similmente inclinati sull'orizzonte.

VIII. I circoli massimi tangenti all'artico ed all'antartico coincideranno coll'orizzonte due volte durante ciascuna rivoluzione della sfera.

IX. Se l'orizzonte è obliquo all'asse, di tutti i punti che sorgono nello stesso istante i più vicini al polo visibile tramontano più tardi e fra quelli che tramontano contemporaneamente sorgono prima i più prossimi al polo visibile.

X. Nella stessa ipotesi, ogni circolo massimo passante pei poli della sfera risulta durante ogni rotazione due volte perpendicolare all'orizzonte.

XI. Se un circolo massimo tocca due paralleli corrispondenti qualunque, avrà tutti i suoi punti di levata e di tramonto fra quei due circoli paralleli.

XII. Se un cerchio fisso taglia in due parti eguali un cerchio mobile in tutte le sue posizioni, e se nessuno di quei cerchi è perpendicolare all'asse o contiene i poli della sfera, allora quei due cerchi sono entrambi massimi.

27. - Le proposizioni ora riferite sono così facili e pel geometra di così scarso interesse che non si sarebbe certamente pensato a raccoglierle in uno speciale trattato, ove non si fosse visto, che col loro aiuto, si poteva rendersi ragione di alcuni fenomeni celesti. Non importa perciò arrestarci su di esse; ma ciò che va notato è lo stile in cui scrisse Autolico. La forma della sua esposizione è rigorosamente euclidea (v. p. 244); ogni teorema è enunciato, prima in termini generali e poi sulla figura, ed è anche ripetuto a mo' di conclusione, al termine della dimostrazione: se altri ingredienti costanti (quali sarebbero: enunciato delle

(1) I nomi di *artico* ed *antartico* furono aggiunti da noi per chiarezza.

condizioni di possibilità, costruzione, ecc.) dei teoremi degli *Elementi* non si rintracciano nelle dimostrazioni di AUTOLICO, gli è che queste, vertendo sopra questioni più semplici, non potevano contenerli; ciò non ostante resta nuovamente confermato che lo stile di EUCLIDE non è originale. Inoltre le argomentazioni usate da AUTOLICO per dimostrare i teoremi II-IV e VI-VIII abilitano a far risalire il metodo apagogico ad un'epoca anteriore al periodo aureo della geometria greca (1).

Le or fatte osservazioni sullo stile usato da AUTOLICO nella prima delle sue opere superstiti possono ripetersi riguardo a quello adoperato nell'altra. La quale verte *Sulle levate e sui tramonti* e può intendersi come una continuazione della prima, costituendo con quella una teoria del levarsi e del tramontare (apparenti e reali) delle stelle. Le relazioni ivi dimostrate sono geometricamente tanto semplici che crediamo superfluo darne qui una esposizione, nemmeno in compendio (2): tanto più che oggi esse, anche per gli astronomi, possiedono un interesse scarsissimo, giacchè il loro insieme forma una teoria che si considera soltanto come una prima approssimazione alla verità (3).

Euclide ed Ipsicle.

28. - Pel tema che trattano e per lo stile in cui sono scritti i lavori di AUTOLICO si collegano all'opera di EUCLIDE intitolata Φαινόμενα, opera che, sospettata essere una di

(1) Che la esposizione fatta da AUTOLICO si avvicini alla perfezione è dimostrato dal fatto che PAPPO, nel trattare lo stesso argomento nel VI Libro della sua *Collezione*, non mise del suo che qualche osservazione per spiegare la dipendenza fra le varie parti dell'opera del suo predecessore, ritenendo necessario soltanto di aggiungere (PAPPO ed. HULTSCH, p. 528) un breve ragionamento inteso a dimostrare che " la perpendicolare calata da un punto di una sfera sopra un diametro è tutta interna alla sfera ".

(2) Per più minuti ragguagli si ricorra a DELAMBRE, *Histoire de l'astronomie ancienne*, T. I, Paris, 1817, p. 235-243.

(3) V. la memoria di P. TANNERY, *Autolycos de Pitane* (Mém. de la Soc. des Sciences de Bordeaux, 3 Série, T. I, 1884).

quelle ingiustamente attribuite al grande alessandrino da uno degli editori di EUCLIDE (il GREGORY), venne senz'altro esclusa dalla collezione delle opere di quel grande che un altro (il PEYRARD) compose, mentre il più recente di essi (l'HEIBERG) assunse, a parer nostro con piena ragione, una attitudine diametralmente opposta (1).

Questo nuovo lavoro di EUCLIDE che ora incontriamo è — per usare le espressioni di un dotto italiano che lo ha pubblicato — un trattato elementare di astronomia (2), nel comporre il quale il professore del Museo attinse a larga mano, secondo il suo costume, alle opere di AUTOLICO e degli anteriori studiosi di astronomia, senza però indicare le fonti che sfruttò (3). La mediocre originalità di quest'opera si rispecchia nel titolo, il quale è il medesimo che porta la più antica descrizione delle costellazioni a noi conosciuta — alludiamo ai *Fenomeni* di ARATO da Soli (III sec. a. C.) (4) — versificazione di uno scritto anteriore di EUDOSSO (5). Del resto la identità del titolo si giustifica osservando che, in ultima analisi, il lavoro di EUCLIDE dà la teoria matematica dei fenomeni descritti da ARATO; è lo stesso intento che si propose AUTOLICO ne' suoi libri *Su le levate ed i tramonti*, ma EUCLIDE raggiunge il suo scopo in modo più completo.

Per caratterizzare le verità da lui dimostrate riferiamo

---

(1) *Litterargesch. Studien über Euklid.* Leipzig, 1882, p. 41; tuttavia i *Fenomeni* non si trovano nei volumi sinora pubblicati dell'edizione di EUCLIDE curata dall'HEIBERG.

(2) " Sunt phaenomena astronomiae scientiae principia „ (*Euclidis Phaenomena post Zamberti et Maurolyci editionem, nunc tandem de Vaticana bibliotheca deprompta*, etc. A IOSEPHO AURIA Neapolitano, Romae, MDCIX).

(3) V. la succitata edizione, ove l'AURIA ha accuratamente notati i passi in cui sono invocate proposizioni che si leggono in AUTOLICO ed in TEODOSIO; inoltre HEIBERG, *Studien über Euklid*, p. 41-46.

(4) Il SUSEMIHL (*Geschichte der griech. Literatur in die Alexandrinerzeit*, T. I, 1891, p. 284 e seg.) lo dice nato circa nel 315 a. C.

(5) V. DELAMBRE, *Histoire de l'astronomie ancienne*, T. I, Paris, 1817, p. 61-74. — Dei *Fenomeni* venne fatta un'edizione critica da ATTALO RODIO, alla quale poco dopo s'inspirò IPPARCO nel suo commento ad ARATO; cfr. MAASS, *Comment. in Arat. reliq.* (Berlin, 1898) e KNAACK nel *Supplemant* (I Heft) della *Realencyklopädie* di PAULY-WISSOWA.

qui le più significanti fra le (18 secondo alcuni codici, 19 secondo altri) proposizioni che compongono l'opera in questione:

III. Le stelle che si alzano e tramontano, appaiono ogni giorno nel medesimo punto dell'orizzonte e tramontano pure nello stesso punto, il quale non è però quello in cui sorgono. VI. Gli astri dello zodiaco diametralmente opposti hanno albe e tramonti coniugati: lo stesso dicasi per gli astri diametralmente opposti sull'equatore. XI. Di due archi dello zodiaco eguali e contrari uno impiega ad alzarsi lo stesso tempo che l'altro impiega a tramontare. XII e XIII. Nel semicircolo che comincia dal Cancro (o dal Capricorno) gli archi eguali sorgono in tempi diseguali; i più vicini al tropico impiegano maggior tempo, i più lontani minore; quelli che impiegano il tempo minimo sono quelli che toccano gli equinozi; quelli che sono equidistanti dall'equatore sorgono e tramontano in tempi eguali. XIV e XVI. Archi eguali dello zodiaco non attraversano in tempi eguali l'emisfero visibile (invisibile). XV. Di due archi diseguali ed opposti dello zodiaco, uno attraversa l'emisfero visibile nello stesso tempo che l'altro attraversa l'emisfero invisibile.

Può darsi che, come dice un eminente storico, questi teoremi appartengano alla « metafisica dell'astronomia sferica »; ma ci sembra esagerazione l'affermare che alla pratica non derivi da essi nessuna utilità (1); giacchè, se anche essi non somministrano il mezzo per eseguire alcuna misura, porgono, però, gli elementi per una descrizione razionale dei fenomeni astronomici. Ed è probabilmente per tale motivo che PAPPO giudicò l'opera di EUCLIDE degna di assiduo studio e di un particolareggiato commento (2).

Non ci arrestiamo a parlare della forma in cui sono scritti i *Fenomeni*, chè essa non porge se non nuove conferme a quanto dicemmo sullo stile euclideo; ma, prima di lasciare quest'opera, notiamo il passo seguente: « se un cono od un cilindro è segato con un piano parallelo alla base, la sezione risultante è una sezione di cono acutangolo, somigliante a un θυρεός » (scudo); lo notiamo per aggiungere che è fondandosi sopra di esso e precisando un'idea del BRETSCHNEIDER (3),

(1) DELAMBRE, vol. cit., p. 56.

(2) V. il Libro VI della *Collezione* (ed. HULTSCH, p. 594-632).

(3) *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides* (Leipzig, 1870), p. 176 nota.

che l'HEIBERG suppose essere θυρεός il nome originario dato da MENECMO all'ellisse (1).

29. - Della piccola collezione astronomica fa parte anche (v. p. 493) un lavoretto, a noi già noto, di uno — IPSICLE — fra i pretesi continuatori degli *Elementi* di EUCLIDE (cfr. p. 269). Esso possiede una certa importanza per essere il primo in cui trovasi applicata la divisione del cerchio in gradi e minuti primi (sessantesimi di grado) (2), e presenta qualche interesse perchè è uno dei rari scritti che abilitano a formarsi un'idea del come venivano trattate, prima dell'invenzione della trigonometria, le questioni in cui essa oggi trova la sua naturale applicazione. Del resto — affrettiamoci a dichiararlo — il problema ivi risolto (e non senza errori) possiede attualmente così esiguo valore per l'astronomo, che uno studioso dei nostri giorni (3) ha supposto che esso fosse stato sciolto soltanto in vista di applicazioni all'astrologia; comunque, per lo storico quel lavoretto si presenta dotato di qualche valore, come quello che stabilisce un ponte fra l'*Almagesto* di TOLOMEO e gli scritti congeneri anteriori.

L'Ἀναφορικός (*Delle ascensioni*), tale è il titolo dell'opuscolo di IPSICLE (4), intende rispondere alla domanda: « in quale istante, sotto la latitudine di Alessandria, si leva ogni segno od ogni grado dell'eclittica? » La risposta viene data mediante un'ipotesi, che oggi deve giudicarsi assolutamente falsa, ed è che « le differenze di ascensioni per archi in progressione aritmetica sono pure in progressione aritmetica ».

---

(1) *Studien* succitati, p. 88.

(2) P. TANNERY, *Le géométrie grecque*, p. 156.

(3) V. MANITIUS, op. cit. nella nota seguente.

(4) L'*editio princeps* fu fatta da G. MENTELIO a Parigi nel 1657 noi ci serviamo della (unica) posteriore, contenuta nella dotta monografia di C. MANITIUS, *Des Hypsikles Schrift Anaphorikos nach Ueberlieferung und Inhalt kritisch behandelt* (Dresden, 1888); alla quale rimandiamo chi desideri notizie intorno ai manoscritti contenenti l'*Anaforico* ed alle traduzioni (arabe e latine) che ne furono fatte, nonchè alle questioni intorno allo scopo ed al valore di esso ed al modo in cui venne giudicato. Il problema di IPSICLE venne ripreso e sciolto poi in modo soddisfacente da IPPARCO, in un'opera che noi non possediamo più (PAPPO ed. HULTSCH, p. 600).

Ma, per arrivare a formulare quella risposta, IPSICLE invoca e dimostra tre teoremi esattissimi, concernenti una progressione aritmetica decrescente

$$u_1 , u_2 , u_3 ....$$

di ragione d; essi possono esprimersi mediante le relazioni seguenti:

$$(u_1 + u_2 + ... + u_n) - (u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{2n}) = n^2 . d$$

$$u_1 + u_2 + ... + u_{2n+1} = (2n + 1) u_n$$

$$u_1 + u_2 + ... + u_{2n} = n (u_k + u_{2n+1-k}) \text{ (per } k = 1, 2, ..., n).$$

A queste proposizioni (1) ed all'esempio che esso offre di una interpolazione, eseguita secondo le ordinate dalla parabola $y = ax^2 + bx + c$ (2), il libro di IPSICLE deve se viene tuttora citato con qualche lode nella storia della matematica greca.

Teodosio.

30. - Soggetti somiglianti a quelli trattati da AUTOLICO ed EUCLIDE sono svolti in due opere *Sulle abitazioni* (περὶ οἰκήσεων) e *Su i giorni e le notti* (περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν), scritte circa mezzo secolo a. C. (3) da TEODOSIO e non ancora pubblicate nell'originale greco. Nella prima (composta di 12 proposizioni) è spiegata la diversità dei fenomeni che presenta la rivoluzione diurna della terra, secondochè l'osservatore si suppone nel polo, all'equatore od in una delle tre zone (torrida, temperata, artica) (4). Nell'altra (di 13 + 19 proposizioni distribuite in due libri) TEODOSIO tien conto dell'arco descritto ogni giorno dal sole sopra l'eclittica, per

(1) Esse si collegano alle ricerche di IPSICLE sui numeri poligonali, di cui DIOFANTO (v. L. V, n. 57) serbò memoria.

(2) P. TANNERY, *Le géom. grecque*, p. 156-7.

(3) FABBRICII, *Bibl. gr.* (ed. HARLESS), T. IV, p. 21. Cfr. P. TANNERY, *Recherches sur l'hist. de l'astr. ancienne*, p. 38; secondo cui TEODOSIO o sarebbe nato a Tripoli (Africa Settentrionale) dopo TOLOMEO, oppure in Bitinia (Nord-Ovest dell'Asia Minore) circa 150 a. C.

(4) DELAMBRE, op. cit., T. I, p. 235-237.

determinare quali condizioni devono essere verificate affinchè il solstizio avvenga nel meridiano di un dato luogo o affinchè negli equinozi il giorno e la notte siano effettivamente fra loro eguali; dimostra anche che le variazioni del giorno e della notte si devono riprodurre rigorosamente dopo un certo tempo, se la lunghezza dell'anno solare è commensurabile con quella del giorno, mentre non si riprodurranno così esattamente, nel caso contrario (1).

Ma Teodosio c'interessa, assai più che grazie a queste opere, per un trattato di Sferica (σφαιρικῶν βιβλια γ) il quale, essendo il più antico superstite sopra tale argomento, deve essere consultato ed invocato ogniqualvolta si tratti di determinare la storia di qualche teorema di geometria della sfera (2).

31. - Prima di cominciare la descrizione degli argomenti svolti da Teodosio, ricordiamo che, negli *Elementi* di Euclide, la sfera è trattata in modo assai superficiale ed incompleto, sembra, anzi, che il sommo Alessandrino se ne sia occupato unicamente per essere dessa il recipiente che accoglie i cinque corpi regolari, alla costruzione dei quali egli consacrò tutto l'ultimo libro del suo trattato; in conseguenza si limitò a dimostrare (Lib. XII, prop. 18) il teorema che dà il rapporto tra i volumi di due sfere qualisivogliano.

---

(1) Id. p. 257-243. V. anche il commento scritto da Pappo nel VI Libro della *Collezione* (ed. Hultsch, p. 530-534).

(2) Per tale ragione la *Sferica* di Teodosio venne stampata molte volte, nell'originale ed in traduzioni. La versione dall'arabo in latino di Platone Tiburtino trovasi nel volume del Nucarello, *Sphaera mundi noviter recognita* (Venezia, 1518). Notevoli sono le seguenti edizioni: *Theodosii Tripolitae Sphaericorum Libri III, nunquam ante hac graece ex cursis iidem latine reddit* J. Penna (Paris, 1553): *Theodosii Tripolitae Sphaericorum Liber III a* Christophoro Clavio *perspicuis demonstrationibus ac scholiis illustrati* (Romae, 1586). Va pure ricordata la traduzione tedesca (di cui ci serviamo) *Theodosius von Tripolis Drei Bücher Kugelschnitte, aus dem griechischen mit Erläuterungen und Zusätzen herausgegeben* von E. Nizze (Stralsund, 1826), nella prefazione della quale si trovano informazioni complete sulle edizioni e traduzioni anteriori. Una importante collezione di *Scholien zur Sphaerik des Theodosius* fu pubblicata recentemente da F. Hultsch (Abh. der phil.-hist. Klasse der k. sächs. Gesch. des Wiss., T. X, 1887).

Questo sorprendente silenzio di EUCLIDE sopra tutte le altre proprietà della sfera si spiega perfettamente ammettendo che gli antichi riguardassero la teoria di questo solido come una parte, non della geometria pura, ma dell'astronomia teoretica. Di tale ipotesi, sul modo di considerare la geometria sferica, si ottiene una conferma paragonando le definizioni che dànno della sfera EUCLIDE e TEODOSIO: per il primo essa è una figura geometrica di cui importa conoscere la generazione e di cui, quindi, egli dà una definizione genetica mediante rotazione di un semicerchio attorno ad un diametro; per il secondo, invece, essa è un ente già dato, caratterizzato dalla proprietà di avere tutti i suoi punti equidistanti da un punto fisso; in una parola, è la figura che si concepisce contemplando la volta celeste in una notte serena. E che TEODOSIO pensasse spessissimo alla sfera celeste nello scriver l'opera che attualmente ci occupa, è dimostrato, non soltanto da quella definizione, ma da innumerevoli altri passi della *Sferica* (1).

Il I dei tre libri di TEODOSIO apresi coll'affermazione che « ogni sezione piana di una sfera è un circolo ». Segue il « porisma » (che è una estensione allo spazio di quello che insegna EUCLIDE in principio del III Libro degli *Elementi*) col mezzo del quale si costruisce il centro di una data sfera. Pure generalizzazioni di teoremi di EUCLIDE (L. III, prop. 18, 19, 14 e 15) sono quelli esposti da TEODOSIO sui piani tangenti ad una sfera e sulla relazione che intercede tra le grandezze delle sezioni prodotte in una sfera da piani e le distanze di questi dal centro di quella. Similmente, la proposizione che dice « i circoli massimi di una sfera sono caratterizzati dalla proprietà di bisecarsi scambievolmente » è analoga ad una che compete ai diametri di un cerchio; essa conduce naturalmente a proporsi un problema che è risoluto dal seguente teorema: « la condizione necessaria e sufficiente affinchè un circolo massimo bisechi un circolo minore è che passi pei poli di questo ». TEODOSIO dimostra anche che « in un circolo massimo la distanza (rettilinea) di un polo dalla periferia è eguale al lato del quadrato in-

(1) Il che però non toglie a questa il carattere di complemento alla parte stereometrica degli *Elementi*, che essa indiscutibilmente possiede.

scritto », nè ignora la verità della proposizione reciproca. Il I Libro della *Sferica* in esame finisce con un gruppo di problemi fondamentali: determinazione del diametro di un circolo appartenente ad una sfera o del diametro della sfera stessa: costruzione del circolo massimo passante per due punti non diametralmente opposti di una sfera; determinazione dei poli di un dato circolo.

32. - Nel II Libro Teodosio si occupa delle relazioni a cui dà luogo la considerazione di una serie di circoli paralleli, segati dai circoli massimi passanti pei loro poli comuni, oppure quella di circoli fra loro tangenti: basti rilevare la proposizione — già conosciuta da Autolico — « se un circolo massimo tocca un circolo minore, ne toccherà pure un secondo eguale e parallelo al primo ». Va anche notata la ricerca del circolo massimo tangente ad un circolo minore in un suo punto e dei circoli massimi condotti da un punto di una sfera a toccarne un dato circolo minore; tale ricerca, evidentemente ispirata dall'analoga nel piano già compiuta da Euclide (*Elementi*, Lib. III, prop. 17ª), mostra che sin dai tempi di Teodosio si cominciava ad accorgersi che, nella geometria della sfera, i circoli massimi compiono un ufficio analogo a quello che disimpegnano le rette nella geometria del piano.

I medesimi argomenti vengono ulteriormente svolti nelle (quattordici) proposizioni del III Libro, che probabilmente è quello in cui Teodosio mise più del proprio. Ivi la considerazione incessante del circolo massimo parallelo ad un sistema di circoli paralleli di una sfera, induce la persuasione che l'autore pensasse sempre all'equatore ed ai paralleli della sfera celeste; a ritener ciò si è anche condotti osservando, da un lato, che, se non fosse in vista delle applicazioni astronomiche, non si comprenderebbe perchè Teodosio siasi tanto dilungato sopra il paragone di certi circoli, il quale non offre nessun interesse pel geometra, ed osservando, d'altronde, che alcune sue proposizioni vennero realmente sfruttate in parecchie occasioni, dai cultori dell'Astronomia (1). Non si stupisca il lettore se noi, che investighiamo soltanto quanto interessa il matematico puro, non riferiamo nemmeno gli enunciati di proposizioni, in cui la

(1) Teone Alessandrino ed. Halma, T. I, p. 103

complicazione dà l'apparenza di valore, nascondendone la insignificanza geometrica. Va però osservato: I. che nella prop. 9ª Teodosio approfitta della possibilità di determinare una quantità, la quale sia compresa fra due date quantità omogenee e sia commensurabile con una terza; II. che nella 10ª si appoggia sul seguente lemma: « se n quantità $u_1 u_2 \ldots u_n$ sono tali che

$$u_1 > u_2 > \ldots > u_n,$$

si avrà

$$u_n < \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} < u_1, \quad \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_m}{m} > \frac{u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n}{n - m} \text{ »;}$$

III. che nella 11ª applica quella importante limitazione trigonometrica che già incontrammo in Aristarco (p. 484) ed in Archimede (p. 490) (1).

Contrariamente al nostro costume, di non rilevare quello che si cercherebbe indarno nelle opere che esaminiamo, osserveremo, prima di abbandonare Teodosio, che nella sua *Sferica*, non vi è il menomo accenno a triangoli sferici; ci permettiamo tale osservazione perchè Pappo ha indicato dimostrazioni per le prop. 5ª e 6ª del III Libro (2), ove è tratto profitto dalla considerazione di tali figure: così facendo il commentatore, non si è ispirato al suo autore, ma a geometri posteriori, fra cui emerge quello che stiamo per incontrare ora.

Menelao d'Alessandria.

33. - Il punto culminante della Sferica è, nell'antica letteratura dei Greci, rappresentato da Menelao, personaggio imperfettamente conosciuto, il quale — secondo quanto ci

(1) Il Bjornbö, nel lavoro citato nella nota (6) a p. seg., si è proposto di determinare quali elementi dell'antica *Sferica* (v. p. 496) si ritrovino nell'opera di Teodosio ed ha (p. 63) concluso che questi tolse da quella *certamente* 20 proposizioni (Lib. I: 1, 7, 8, 12, 13, 15; Lib. II: 2, 5, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 22; Lib. III: 1, 3, 7, 8), *probabilmente* altre 14 (Lib. I: 6, 10, 11, 17, 20; Lib. II: 1, 3, 6, 7, 8, 12, 20; Lib. III: 2, 4) e *forse* ancora altre 6 (Lib. I: 2, 9, 14, 21; Lib. II: 4, 21), sicchè come proprietà indiscussa di Teodosio non resterebbe che 20 proposizioni.

(2) Ed. Hultsch, p. 480 e seg.

riferiscono gli Arabi (1) — fece delle osservazioni astronomiche durante il primo anno del regno di TRAJANO (98 dell'E. v.) e compose un libro di astronomia per incarico di DOMIZIANO (81-96 dell'E. v.) (2). Egli è autore di un trattato in sei libri *Sul calcolo delle corde di un circolo*, il quale, a quanto afferma TEONE ALESSANDRINO (3), segna lo stadio intermedio nello sviluppo che ebbe siffatto calcolo da IPPARCO a TOLOMEO; tale trattato deve considerarsi irremissibilmente perduto, e lo stesso può ripetersi riguardo ad un'altra opera, a cui confusamente allude PAPPO (4). Superstiti, invece, nella sostanza, se non nella forma, sono tre libri sulla *Sferica*, i quali ci pervennero attraverso traduzioni arabe ed ebraiche, e che ora possediamo in veste latina per merito di MAUROLICO (1494-1575) (5) e dell'HALLEY (1656-1724) (6).

L'esame dello scritto geometrico di MENELAO mostra come ai suoi tempi — forse per merito principale, ma, certamente, non per opera esclusiva di lui (7) — la teoria delle figure tracciate su una sfera avesse già assunto quei lineamenti spiccati che era destinata a conservare sempre e che si può dire derivino dalla perfetta analogia che essa presenta colla geometria del piano, quando si convenga di far corrispon-

(1) SUTER-FIHRIST, p. 19.

(2) *Almagesto* ed. HALMA, T. II (Paris, 1816, p. 24 e 26). Ivi MENELAO è indicato col nome di Μενέλαος ὁ γεωμέτρης.

(3) Ed. HALMA, T. I, p. 110.

(4) Ed. HULTSCH, p. 602. Ivi MENELAO è designato così: Μενελαος ὁ Ἀλῃξανδρεύς.

(5) *Theodosii Sphaericorum Elementorum libri III, ex traditione Maurolyci Messanensis Mathematici. Menelai Sphaericorum Lib. III ex traditione ejusdem*, etc. (Messanae, 1558). Riguardo alle fonti a cui attinse MAUROLICO nel comporre quest'edizione (che è quella di cui ci serviamo) vedi la dissertazione di F. MACRÌ, *F. Maurolico nella vita e negli scritti* (p. 66-67) che fa parte nel volume *Commemorazione del IV Centenario di Francesco Maurolico* MDCCCXCIV (Messina, tip. d'AMICO).

(6) *Menelai Sphaericorum*, Lib. III (Oxon., 1758). Ricerche esaurienti intorno ai manoscritti ed alle edizioni di MENELAO si trovano nel II e III Cap. degli *Studien über Menelaos Sphärik* di A. A. BJÖRNBÖ (Abh. zur Gesch. der Mathem., XIV Heft, 1902), nonchè nell'*Appendice* a questo importante lavoro.

(7) V. quanto scrivemmo intorno a TEODOSIO nel n. prec.

dere alle rette le circonferenze dei circoli massimi (1). In conseguenza, per esempio, alle proprietà dei triangoli piani — escluse quelle in cui intervengono rette fra loro perpendicolari — ne corrispondono altrettante concernenti figure non meno importanti, i « triangoli sferici », a cui MENELAO per primo diede un nome speciale (ἐν τοῖς σφαιρικοῖς τρίπλευρον). Benchè tale analogia non venga dichiarata in generale dal geometra greco di cui parliamo, pure è impossibile negare che egli ne fosse pienamente consapevole, dopo avere accuratamente esaminato il suo I Libro, del quale le proposizioni 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11 (2), 12, 13, 14-16 corrispondono a quelle del I Libro di EUCLIDE che (nella edizione dell'HEIBERG) portano i numeri 23, 5, 6, 4, 8, 20, 21, 19, 24, 25, 18, 16, 32 e 26; mentre un corollario della 2ª di MENELAO corrisponde alla 15ª di EUCLIDE (3). Di più MENELAO, non solo considera esplicitamente cinque (Lib. I, prop. 5, 23, 24, 25 e 36) ed implicitamente anche il sesto (prop. 8ª) dei casi di eguaglianza di due triangoli sferici, ma istituisce anche il paragone fra due tali triangoli aventi eguali soltanto due coppie di elementi. Finalmente a MENELAO non sono ignoti i limiti oltre i quali cessa l'analogia fra i triangoli piani e gli sferici (4); per esempio, non esistendo nella geometria sferica un teorema analogo a quello che dà la somma degli angoli di un triangolo piano, egli trova almeno che tale somma è maggiore di due retti; così egli trova che, mentre il segmento rettilineo congiungente i punti medi di due lati di un triangolo piano è eguale alla metà del terzo lato, in un triangolo sferico l'arco di circonferenza massima, che unisce i punti medi di due lati di un triangolo sferico, è maggiore della metà del terzo lato. Che

(1) È l'idea madre dei *Principes de la trigonometrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits* di EULERO (Hist. de l'Acad. de Berlin, 1753).

(2) Questa proposizione dice che la somma degli angoli di un triangolo sferico *è superiore a due retti*; MAUROLICO aggiunse che essa è *inferiore a sei*.

(3) Ulteriori particolari intorno al parallelo accennato nel testo fra EUCLIDE e MENELAO si trovano nel IV Cap. della succitata memoria del BJÖRNBO.

(4) A lui però sembra essere sfuggita la distinzione fra triangoli sferici *eguali* e *simmetrici*.

poi egli abbia almeno intravveduto che in un triangolo sferico, in opposizione a quanto accade nei triangoli piani, esiste un legame tra le lunghezze assolute dei lati e le ampiezze degli angoli, è dimostrato, fra l'altro, dalle prop. 17ª e 18ª del I Libro, le quali affermano che un triangolo sferico ha tutti i suoi angoli ottusi (o acuti) se i suoi lati sono minori (o risp. maggiori) di un quadrante.

34. - Le proposizioni esposte nel II Libro della *Sferica* di MENELAO sono perfezionamenti di altre che incontrammo in EUCLIDE, IPSICLE, TEODOSIO (III Libro) e che probabilmente si leggevano anche nella supposta Sferica preeuclidea. Sono assai più complicate, ma, per il geometra, molto meno importanti di quelle che si leggono negli altri due; le scarsissime applicazioni che ricevono e l'essere desse in parte corollari delle precedenti ed in parte lemmi per le seguenti, fece si che, mutato l'assetto della geometria sferica, esse caddero in un meritato oblio, da cui noi non tenteremo di toglierle. Ma se quel Libro sembra oggi quasi privo di significato, ben diversamente veniva giudicato dagli antichi, giacchè somministrava gli elementi per determinare l'istante del sorgere e del tramontare degli altri, questione che, sino ad APOLLONIO, fu il problema fondamentale dell'astronomia greca.

Invece nei migliori trattati di geometria si ritrova la sostanza del III Libro. Il quale si apre con l'enunciato di un teorema che ora riferiremo, scrivendo però per brevità sempre *sen* x invece di $\frac{corda\ 2x}{2}$: « Sopra una sfera sono tracciati (fig. 69) due archi di circolo massimo AB, AΓ entrambi minori di una semicirconferenza, ed altri due ΓΔ e BE terminati ai due primi e segantisi in Z; si avrà

$$\frac{\text{sen } \Gamma E}{\text{sen } EA} = \frac{\text{sen } \Gamma Z}{\text{sen } Z\Delta} \cdot \frac{\text{sen } \Delta B}{\text{sen } BA} \text{ » (1).}$$

Il lettore ravviserà tosto in questa proposizione quella oggi chiamata « teorema di MENELAO », applicata al trian-

(1) Esaurienti notizie intorno alle varie forme sotto cui ci è pervenuta questa proposizione sono somministrate dal BJÖRNBO, l. c., p. 88.

golo ABΔ segato dalla trasversale BZE (1). Il geometra greco aggiunge che si avrà pure:

$$\frac{\text{sen}\,\Gamma A}{\text{sen}\,AE} = \frac{\text{sen}\,\Gamma\Delta}{\text{sen}\,\Delta Z} \cdot \frac{\text{sen}\,ZB}{\text{sen}\,BE},$$

come si riconosce considerando il triangolo ΓEZ, in uno alla trasversale AΔB. Egli dimostra il suo teorema premettendo

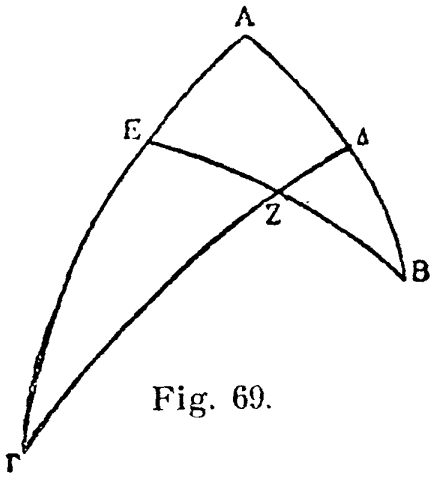


Fig. 69.

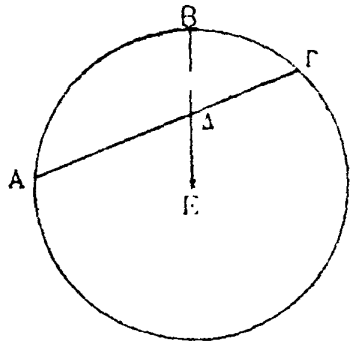


Fig. 70.

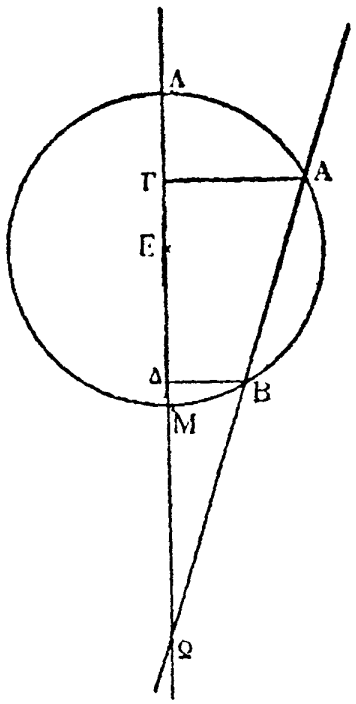


Fig. 71.

(1) Delambre crede appartenga ad Ipparco (*Hist. de l'astronomie ancienne*, T. I, p. 245), contrariamente all'affermazione seguente di Maurolico "notandum est, quod haec prima propositio, et quatuor lemmata ad ejus demonstrationem attinentia, sunt inventa Menelai „ (ed. cit., p. 37). Il Björnbo (l. c., p. 98-100) propende invece a ritenere che si trovasse fra i *Porismi* di Euclide; a questo proposito giova ricordare (p. 264) che M. Chasles suppone che l'analogo nel piano fosse applicato da Euclide ne' suoi *Porismi* (*Les trois livres des Porismes d'Euclide*, Paris, 1860, p. 107).

l'analogo della geometria del piano e servendosi dei due lemmi seguenti:

I. Dati (fig. 70) sulla periferia di un cerchio di centro E tre punti A , B , Γ e chiamata Δ la intersezione della corda AΓ col raggio BE si avrà:

$$\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\text{sen } AB}{\text{sen } B\Gamma}.$$

II. Se (fig. 71) Ω è un punto del diametro AM di un cerchio di centro E e AB è una corda passante per Ω, detti Δ e Γ i piedi delle perpendicolari abbassate da A e B sul diametro AM, si avrà la relazione:

$$\frac{A\Omega}{B\Omega} = \frac{\text{sen } A\Delta}{\text{sen } BM}.$$

Non entriamo in minuti particolari sui ragionamenti adoperati dal nostro matematico perchè li ritroveremo nell'*Almagesto* di TOLOMEO (n. 43), e preferiamo farne l'analisi su un testo originale, piuttosto che sopra uno giuntoci attraverso traduzioni e ritraduzioni di mano ignota.

Applicando il suo teorema fondamentale, MENELAO, col mezzo di opportune considerazioni sulla figura, perviene a nuove proposizioni che importa qui registrare. La prop. 2ª dice che « se nei due triangoli sferici ABΓ, ΔEZ sono eguali o supplementari tanto gli angoli A , Γ quanto gli angoli Δ , Z si ha:

$$\frac{\text{sen } AB}{\text{sen } B\Gamma} = \frac{\text{sen } \Delta E}{\text{sen } EZ} \text{»};$$

essa appare a noi per un immediato corollario del *teorema dei seni*, ma il geometra greco, ignorando questa proposizione, era costretto a dimostrarlo direttamente.

La prop. 3ª « se ABΓ , ΔEZ sono due triangoli rettangoli risp. in A e Δ ed aventi uguali gli angoli acuti Γ , Z, si avrà:

$$\text{tg } AB = \text{tg } \Delta E \cdot \frac{\text{sen } A\Gamma}{\text{sen } \Delta Z} \text{»};$$

si deduce dalla prec. Così dicasi di quest'altra (4ª): « se due triangoli sferici ABΓ , ΔEZ hanno eguali tanto gli angoli A , Δ

quanto gli angoli Γ, Z e si abbassano gli archi BΛ, EM risp. perpendicolari a AΓ, ΔZ, si avrà:

$$\frac{\text{sen } A\Lambda}{\text{sen } \Lambda\Gamma} = \frac{\text{sen } \Delta M}{\text{sen } MZ} \text{ ».}$$

Mentre questi teoremi, forse perchè appaiono oggi come semplici conseguenze di altri più generali ed importanti, ebbero vita effimera, uno ve n'è nel III Libro della *Sferica* menelaica (il 5°) che esprime una delle relazioni fondamentali tra gli elementi di un triangolo sferico rettangolo. È quello che può enunciarsi come segue: « se ABΓ è un triangolo sferico rettangolo in γ si avrà:

$$\frac{\text{sen } (AB + A\Gamma)}{\text{sen } (AB - A\Gamma)} = \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} \text{ »;}$$

si vede subito che quest'equazione si riduce all'altra

$$\text{tg } A\Gamma = \text{tg } AB \cdot \cos A$$

epperò dice che in ogni triangolo sferico rettangolo si ha:

tg cateto = tg ipotenusa × cos ang. acuto compreso.

La dimostrazione di tale proposizione, nota grazie a HALLEY e MAUROLICO, è notevole perchè poggia sopra le invariabilità per proiezione del doppio rapporto di quattro punti di un circolo massimo, ammessa come già nota (1); ma, al dire del BJORNBÖ (2), assai più interessante era la dimostrazione originale, se non altro perchè prova che il così detto teorema di MENELAO era conosciuto prima.

Segnaliamo ancora nell'opera che stiamo studiando il seguente teorema (prop. 8ª): « Se ABΓ è un triangolo sferico rettangolo in B e se gli archi BΔ . BE condotti dal vertice B al

(1) Tale proprietà può dedursi applicando il teorema di MENELAO sulla sfera; essa non si ritrova che in opere uscite nel sec. XIX (GUDERMANN, *Lehrbuch der niederer Sphärik*, Münster, 1835, §§ 184-185).

(2) Bibl. mathem., 3ª Ser., III Bd., 1902, p. 419.

lato opposto fanno angoli eguali col lato BA, si avrà:

$$\frac{\text{sen } \Gamma E}{\text{sen } EA} = \frac{\text{sen } \Gamma \Delta}{\text{sen } \Delta A} \text{»},$$

il quale esprime la proprietà armonica di uno speciale fascio di quattro circoli massimi.

I seguenti teoremi, analoghi ad altri planimetrici che già si trovano in EUCLIDE (*Elem.*, IV, 4) ed ARCHIMEDE (*Lemmi*, 5-6) mostrano che MENELAO era sempre spronato dal desiderio di stabilire un completo parallelo fra piano e sfera:

(Prop. 9ª): « Le bisettrici degli angoli di un triangolo sferico concorrono in un punto » (teorema che così spesso viene attribuito a REGIOMONTANO (1436-1476), il quale lo ritrovò molto dopo).

(Prop. 10): « Le altezze di un triangolo sferico passano per uno stesso punto ».

Nello stesso Libro III si trovano molte altre proposizioni di cui, al pari di quelle del Libro precedente, la presenza riuscirebbe inesplicabile se non si tenesse presente che la Sferica e la Trigonometria sferica erano le ali che permettevano agli astronomi greci i loro voli più ampli e sicuri. Citiamo le principali:

« Gli archi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ e $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ siano tali che:

$$\frac{\pi}{2} \geq \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$$

$$\frac{\pi}{2} > \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \beta_4;$$

allora:

I. Se $\text{sen } \alpha_1 : \text{sen } \alpha_2 : \text{sen } \alpha_3 : \text{sen } \alpha_4 =$

$= \text{sen } \beta_1 : \text{sen } \beta_2 : \text{sen } \beta_3 : \text{sen } \beta_4;$

sarà

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_4} > \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_4}.$$

II. Se

$$\frac{\text{sen}(\alpha_1 + \beta_1)}{\text{sen}(\alpha_1 - \beta_1)} = \frac{\text{sen}(\alpha_2 + \beta_2)}{\text{sen}(\alpha_2 - \beta_2)} = \frac{\text{sen}(\alpha_3 + \beta_3)}{\text{sen}(\alpha_3 - \beta_3)} = \frac{\text{sen}(\alpha_4 + \beta_4)}{\text{sen}(\alpha_4 - \delta_4)}$$

sarà

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_4} < \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_4} .$$

III. Se

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{sen}(\alpha_3 - \alpha_4)} < \frac{\operatorname{sen}(\beta_1 - \beta_2)}{\operatorname{sen}(\beta_3 - \beta_4)}$$

sarà

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_4} < \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_4} \text{ ».}$$

« Gli archi $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3$; $\beta_1 , \beta_2 , \beta_3$; $\gamma_1 , \gamma_2 , \gamma_3$ soddisfacciono invece alle relazioni

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 , \ \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 , \ \frac{\pi}{2} > \gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 ;$$

e sia inoltre

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}(\alpha_1 - \gamma_1) : \operatorname{sen}(\alpha_2 - \gamma_2) : \operatorname{sen}(\alpha_3 - \gamma_3) = \\ &= \operatorname{sen}(\beta_1 - \gamma_1) : \operatorname{sen}(\beta_2 - \gamma_2) : \operatorname{sen}(\beta_3 - \gamma_3) = \\ &= \operatorname{sen}\gamma_1 : \operatorname{sen}\gamma_2 : \operatorname{sen}\gamma_3 . \end{aligned}$$

Allora se

$$\alpha_1 > \beta_1 > 2\gamma_1 , \ \alpha_2 > \beta_2 > 2\gamma_2 , \ \alpha_3 > \beta_3 > 2\gamma_3$$

sarà

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_3} > \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_2 - \beta_3} ,$$

mentre se

$$\beta_1 < \alpha_1 < \gamma_1 , \ \beta_2 < \alpha_2 < \gamma_2 , \ \beta_3 < \alpha_3 < \gamma_3$$

sarà

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_3} < \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_2 - \beta_3} \text{ ».}$$

L'analogia di tali proposizioni con altre che già incontrammo in ARISTARCO ed ARCHIMEDE e che ritroveremo nell'*Ottica* di EUCLIDE (n. 54) è evidente.

Chiuderemo questo resoconto notando come la *Sferica* di MENELAO termina con una proposizione relativa alla teoria dei massimi e minimi sulla sfera, a proposito di cui è citato (dal geometra greco o da uno de' suoi traduttori ?) APOLLONIO PERGEO.

Emerge da quanto esponemmo che i tre libri ora esaminati contengono molte cose belle e buone, parecchie delle quali anzi, sino a prova contraria, devono dirsi invenzione *dell'autore*; se un astronomo esclusivista asseri che « ces théorèmes sont presque tous de pure spéculation et d'un usage presque nul pour la pratique » (1), chi ama la scienza per sè stessa può replicare che tale criterio per giudicare dannerebbe all'indifferenza, assieme allo scritto di MENELAO, quelli d'innumerevoli altri geometri.

35. - Dall'esame della *Sferica* risulta pure che MENELAO non fu un semplice astronomo osservatore, ma ebbe spiccate qualità di geometra: ora, tale giudizio è confermato da altre sue indagini di cui è rimasta qualche traccia (2).

Anzitutto PROCLO (3) cita una dimostrazione data da lui pel teorema di EUCLIDE (*Elementi*, Lib. I, prop. 25ª): « Se due triangoli hanno due lati dell'uno rispettivamente eguali a due lati dell'altro, ma diseguali gli angoli compresi, avranno diseguali anche i terzi lati ed il lato maggiore sarà opposto all'angolo maggiore ».

Inoltre PAPPO (4) gli attribuisce la scoperta, od almeno lo studio, di una certa curva, da lui chiamata *straordinaria* o *mirabile* (παράδοξος γραμμή). Qual era la definizione di tal curva? Quali considerazioni avevano indotto a considerarla? Quali prerogative erano state in essa ravvisate? Sono questi problemi importanti, a cui invano si tenterebbe di porgere una risposta non riboccante di congetture. FERMAT arbitrariamente identificò la curva di MENELAO colla spirale (*parabolica*) rappresentata in coordinate polari dall'equazione $\rho^2 = a\,\omega$ (5). Ma M. CHASLES osservò (6) come dalle parole di

(1) DELAMBRE, *Hict. de l'astr. anc.*, T. I, p. 243.

(2) Secondo il BJÖRNBO il catalogo degli scritti di MENELAO sarebbe il seguente: 1. *Sferica* (tre libri); 2. *Sulle corde del cerchio* (sei libri); 3. *Idrostatica*; 4. *Memoria sopra il tramonto dei segni dello zodiaco*. 5. *Elementi di Geometria*. 6. *Sopra qualche curva trascendente*. 7. *Determinazione di alcune stelle fisse*. 8. *Libro sopra i triangoli* (?).

(3) PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 136.

(4) Ed. HULTSCH, p. 270.

(5) Lettera al P. MERSENNE del 3 giugno 1636. V. *Oeuvres de Fermat* (ed. TANNERY et HENRY), T. II, Paris, 1894, p. 13.

(6) *Aperçu historique*, etc. (II ed., Paris, 1875), p. 26.

PAPPO sembri emergere che la curva di MENELAO fosse a doppia curvatura. Opinione questa che venne abbracciata da P. TANNERY (1), il quale, ritenendo che le proprietà mirabili della curva di MENELAO si riferissero alla quadratura (se non alla costruzione della tangente), emise timidamente la ipotesi che essa curva fosse la celebre *curva di Viviani* (2), intersezione di una sfera con un cilindro ad essa tangente ed avente per diametro della base il raggio della sfera (3). Chi ricordi le investigazioni di EUDOSSO sopra la ippopeda (v. p. 473) e tenga conto di certe indagini sopra una notevole curva sferica che si incontrano in PAPPO (v. Lib. IV, n. 12), converrà con noi che nulla abilita a negare a MENELAO la conoscenza della curva di VIVIANI. Tanto più che egli si è occupato della soluzione stereometrica data da ARCHITA per il problema di Delo (p. 99 e seg.) (4) e che a quella medesima linea si arriva cercando di « descrivere (mediante un compasso a gambe curve) sopra un cilindro una curva che appartenga ad una sfera, abbia il centro sul cilindro e sia esattamente quadrabile » (5); a tale que-

(1) V. la chiusa del § III delle *Notes pour l'histoire des courbes et des surfaces dans l'antiquité* (Bull. des Sc. math. et astron., T. VII e VIII).

(2) Cfr. l'*Enigma geometricum* proposto da questo geometra in *Acta erud.*, 1692, p. 274.

(3) Ammessa tale interpretazione, deve modificarsi il titolo del lavoro n. 6 dell'Elenco riferito nella nota (2) a p. prec.

(4) Veggasi il *Liber trium fratrem* pubblicato da M. CURTZE p. 150 (Nova Acta der K. Leop.-Carol. Akd., T. XLIX, 1885).

(5) Per giungere alla linea cercata con metodi moderni, si consideri la intersezione del cilindro

$$x^2 + y^2 = r^2$$

con la sfera

$$(x - r)^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Posto

$$x = r \cos \varphi , \; y = r \operatorname{sen} \varphi ,$$

l'elemento di area sul cilindro sarà dato da

$$dS = r \, d\varphi \, dz .$$

I punti dell'intersezione delle due superficie soddisfanno la

stione è probabile si pensasse nell'antichità, dopo che si videro vani gli sforzi per quadrare il circolo, ma coronati da buon successo quelli intesi a determinare delle lunole aventi l'area assegnabile in termini finiti. Il fatto che questo bel problema si è presentato a ROBERVAL (1602-1675), il quale seppe risolverlo con mezzi elementari (1), giungendo così a concepire la curva detta *ciclo-cilindrica*, può suffragare la ipotesi che altrettanto abbiano fatto gli antichi. Tuttavia, siccome nessun documento attesta che essi abbiano fatto tal passo importante, così il problema storico di determinare qual fosse la «curva mirabile» di MENELAO appartiene tuttora alla categoria di quelle che l'avvenire è chiamato a risolvere.

---

equazione

$$4\,r^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} + z^2 = R^2 ,$$

onde per ottenere l'area della porzione del cilindro che è interna alla sfera basta calcolare l'espressione:

$$S = 2r \int\int d\varphi\, dr$$

ove l'integrale va preso fra i limiti

$$\varphi = 0 \quad \text{e} \quad \varphi = \pi$$

$$z = -\sqrt{R^2 - 4r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \quad \text{e} \quad z = +\sqrt{R^2 - 4r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

Si ha quindi:

$$S = 4r \int_{\varphi = 0}^{\varphi = \pi} \sqrt{R^2 - 4r^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}}\; d\varphi .$$

S dipende in generale da integrali ellittici, tranne però se

$$R = 2r .$$

In allora

$$S = (4\,r)^2 .$$

cioè S è eguale al quadrato avente per lato il doppio del diametro del dato cilindro. Come appunto trovò il ROBERVAL.

(1) *Traité des Indivisibiles* (Mém. de l'Acad. roy. des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699, T. VI, Paris, 1730), p. 241 e seg.

CAPITOLO III.

L'apogeo dell'Astronomia greca

Ipparco.

36. - In tre grandi opere, divise ciascuna in tredici libri, la Grecia tramandò ai posteri più lontani notizia del proprio sapere in geometria, in astronomia ed in aritmetica; degli *Elementi* di EUCLIDE (che è la prima di tali opere) trattammo nel Libro precedente (n. 7-24), mentre l'esame della terza (l'*Aritmetica* di DIOFANTO) sarà il precipuo fine del Libro V: ora dobbiamo occuparci di quella (l'*Almagesto*) che concerne la scienza del cielo (1).

Lo studio del maggior codice astronomico che la Grecia ci ha legato, presenta la massima importanza, non soltanto perchè la letteratura greca non annovera oggi alcuna opera congenere di più antica data, ma perchè (al pari degli altri scritti del medesimo autore) contiene molteplici e preziose vestigia dei lavori del più grande astronomo degli antichi tempi, del principe degli astronomi greci, IPPARCO di Nicea, lavori di cui esiste tuttora soltanto quello che probabilmente era dotato di minore originalità e minore valore (2).

(1) Va notato che secondo le indicazioni date dal T. I del *Catalogus Codicum manuscriptorum Bibliothecae Regiae* (Parisis, MDCLXXIX) esisterebbero due codici dell'*Almagesto* in quattordici libri. Cfr. *Oeuvres complètes de Huygens*, T. V (La Haye, 1893, p. 181).

(2) *Hipparchi in Arati et Eudoxis Phaenomena Commentariorum*, ed. MONITIUS (Lipsiae, 1894). Ivi, p. 282-287 si trovano adu-

Ipparco visse un po' a Rodi ed un po' ad Alessandria intorno alla metà del II sec. a. C. A lui si attribuisce la scoperta della precessione degli equinozi (fatta nel 134 a. C. in base ad osservazioni cominciate nel 161 e proseguite poi sino al 126), la costruzione di un catalogo di 1022 stelle fisse (mentre uno precedente di Eratostene non ne abbracciava che 475), l'uso della longitudine e della latitudine come coordinate geografiche e l'applicazione delle eclissi lunari alla ricerca delle longitudini. Si ritiene (1) che egli fosse in possesso di nozioni intorno al calcolo combinatorio e gli Arabi serbarono notizia di un suo scritto sopra le equazioni quadratiche (2). Riserbandoci di rilevare fra breve l'influenza che egli esercitò sopra Tolomeo, osserviamo che Strabone gli attribuisce una specie di triangolazione della porzione di terra allora conosciuta e che un geodeta di cui ci occuperemo fra breve, Erone Alessandrino, gli attribuisce (3) la scoperta delle seguenti relazioni approssimate

$$3\, l_9 = 2r \quad , \quad 25\, l_{11} = 14\, r \, ,$$

ove l_9 e l_{11} sono le lunghezze dei lati dei poligoni regolari di 9 e 11 lati inscritti nel cerchio di raggio r (4): probabil-

---

nati tutti i dati biografici relativi al grande astronomo. V. anche Delambre, op. cit., T. I, p. 106-189.

(1) M. Cantor, *Vorlesungen*, T. I, 3. Aufl., p. 256 e 362.

(2) Secondo il Fihrist, Ipparco compose " il libro sull'arte dell'algebra „, noto sotto il nome *Le regole* ed inoltre " Il libro sulla divisione dei numeri „ ; il primo venne commentato da Abû 'l Wafa.

(3) *Heronis Alex. Opera*, ed. Schöne, T. III, p. 59 e 63.

(4) Per giudicare del grado di approssimazione dato da queste formole si osservi che esse equivalgono ad assumere

$$\operatorname{sen} 20^\circ = \frac{1}{3} = 0{,}3333...$$

$$\operatorname{sen} \frac{180^\circ}{11} = \operatorname{sen} 16^\circ.21'... = \frac{\pi}{25} = 0{,}28;$$

ora si ha (v. Schubert, l. c.)

$$\operatorname{sen} 20^\circ = 0{,}34202$$
$$\operatorname{sen} 16^\circ.21' = 0{,}28150.$$

mente egli le estrasse dall'opera Πραγματεία τῶν ἐν κύγλῳ εὐθειῶν, ricordata da TEONE ALESSANDRINO nel suo *Commento all'Almagesto* (ed. HALMA, T. I, p. 110).

Tali notizie (1), per quanto frammentarie ed incomplete, bastano a spiegare perchè gli antichi ritenessero che ad IPPARCO la natura avesse rivelati i più riposti segreti; come lo si giudicasse per un genio straordinario, posto al disopra della condizione di uomo, avendo eseguito quello che un Dio stesso avrebbe compiuto con fatica (2), e come sia stato scritto essere stato « IPPARCO uno degli uomini più meravigliosi dell'antichità ed il più grande di tutti nelle scienze non puramente speculative, ma che esigono tante cognizioni geometriche, quanto nozioni di fatti speciali e di fenomeni » (3).

Tolomeo.

37. - Lo studio della grande opera astronomica legataci dalla Grecia è importantissimo anche perchè essa è la migliore fonte a cui possono aversi informazioni intorno al suo celebre autore: CLAUDIO TOLOMEO (4). Si apprende, così, che questi fece delle osservazioni astronomiche tra il 123 ed il 151 dell'E. v.; quando avremo aggiunto che TOLOMEO è posteriore a PROCLO, dal quale è citato, avremo detto tutto quello che si conosce di sicuro intorno alla biografia del grande astronomo (5).

---

(1) Per altri particolari al riguardo si veggano gli scritti di F. HULTSCH, *Winkelmessungen mit die Hipparchische Dioptra* (Abh. zur Geschichte der Mathem., IX Heft, 1899) e *Hipparchos über die Grosse und Entfernung der Sonne* (Ber. der k. sächs. Gesch. der Wissensch., Leipzig, 1900.

(2) PLINIO, *Hist. nat.*, L. I, p. 5.

(3) DELAMBRE, op. cit., T. I, p. 186.

(4) I dati cronologici relativi a TOLOMEO si trovano raccolti e discussi nelle *Studien über Klaudius Ptolemäus* (Leipzig, 1894) di F. BOLL.; ivi l'autore conclude essere le probabili date estreme dell'esistenza del grande astronomo l'anno 100 ed il 178 dell'E. volgare e Tolemaide la sua patria.

(5) Escludiamo, ben inteso, i particolari somministrati dagli Arabi, non essendo che il prodotto dell'ardente fantasia dei popoli orientali e meridionali. V. FIHRIST, p. 19 e 22.

La grande ammirazione che suscitò l'*opus magnum* di CLAUDIO TOLOMEO è dimostrata dal fatto che, ben presto, il suo titolo originario Μαθηματικὴ σύνταξις venne mutato in Μεγάλη σύνταξις, in uso fin dai tempi di TEONE ALESSANDRINO e da cui proviene il nome *Magna constructio* tanto frequentemente adoperato in Europa. Tale ammirazione fu condivisa dagli Arabi, i quali intrapresero la traduzione di esso(1) fin dai tempi di HARÛN ARRASCHID (786-809), e, congiungendo l'articolo *Al* della loro lingua al superlativo μέγιστος, diedero la vita alla ibrida parola *Al-Midschisti*, con cui designarono l'opera di TOLOMEO. Da essa derivò il nome *Almagesto*, con cui è volgarmente chiamata in Europa, dopo che GHERARDO DA CREMONA la tradusse in latino nel 1175, servendosi di un manoscritto esistente in una biblioteca di Toledo. Ritrovatosi poi il testo originale, nel 1538 ne venne fatta una pregevole edizione (2), a cui altre poi seguirono; pregevole ed assai diffusa è quella curata da N. B. HALMA (1755-1828) (3), ove si trovano, oltre il testo, una buona versione francese e utili commenti, alcuni dovuti al DELAMRRE. Oggi, grazie ad un celebre ellenista (J. L. HEIBERG), siamo in possesso di un'ottima edizione critica di tutte le opere di TOLOMEO (4), che serve di base alla traduzione tedesca attualmente in corso di stampa (5).

38. - Il I Libro dell'*Almagesto* contiene i preliminari indispensabili ad uno studio razionale dei fenomeni celesti, in base all'ipotesi che oggi considerasi come caratteristica

---

(1) Due fra tali traduzioni si contesero il primato: v. M. KLAMROTH, *Ueber die Auszüge der griechischen Schriftsteller bei al-Ja'qûdi* (Zeitschr. d. deutsch morgenl. Gesch., T. XLII, 1888, p. 17).

(2) *Claudi Ptolomaei Magna Constructionis. Lib. XIII* (Basileae apud J. VVALDERVON, MDCXXXVIII).

(3) *Composition mathématique de Claude Ptolomée traduite pour le première fois du Grec en Français* par H. HALMA, T. I, Paris, 1813, T. II, 1816. È questa l'edizione di cui ci serviamo e che citiamo sempre coll'abbreviatura *Almagesto* ed. HALMA. Alcune varianti alla lezione di HALMA vennero suggerite da F. HULTSCH nella nota *Zur Syntaxis des Ptolomaios* (Jahrb, für Phil., 1893, p. 748-752).

(4) *Ptolomai Opera*, Vol. I. *Sintaxis*, Vol. II. *Op. astronomica min.* (Lipsiae, 1898, 1903, 1907).

(5) Traduttore C. MANITIUS, editore TEUBNER.

del sistema tolemaico, cioè all'ipotesi che il sole — *il cuore dell'universo*, secondo TEONE SMIRNEO, la *lucerna mundi* di COPERNICO — ruoti attorno alla terra. Il II Libro è dedicato alla esposizione della divisione del cielo in zone e del modo in cui gli astri si levano e tramontano. La lunghezza dell'anno e la teoria del sole dànno materia al III Libro, la lunghezza dei mesi e la teoria della luna al IV; ivi si trovano le prime applicazioni della teoria degli eccentrici e degli epicicli, i cui germi, come sappiamo, risalgono alla scuola di PITAGORA e si ritrovano in quella di PLATONE, ma il cui pieno sviluppo è, secondo la opinione di alcuni (1), opera precipua di APOLLONIO PERGEO, che nell'antichità andava famoso come astronomo quanto come geometra (vedi p. 352). Dal V Libro dell'*Almagesto* si impara la costruzione dell'astrolabio (2) e dal VI quali fenomeni portino i nomi di *congiunzioni* ed *opposizioni* del sole e della luna e quali relazioni essi abbiano con le eclissi. I due libri successivi sono consacrati alle stelle fisse ed alla precessione degli equinozi; e gli ultimi alla teoria dei cinque pianeti, Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno.

Non esporremo con maggiori particolari l'architettura dell'*Almagesto* (3), giacchè, se giudicammo necessario segnalare le ipotesi e le principali osservazioni che gradatamente trasformarono l'astronomia da una congerie di fatti isolati in una scienza degna di tal nome e successivamente indussero gli scienziati ad approfondire certi rami ausiliari della matematica pura, non riteniamo competa allo storico della geometria il redigere un completo bilancio dell'eredità che i Greci tramandarono agli astronomi futuri, col mezzo dell'*Almagesto*. Una tale minuziosa esposizione sarebbe forse consigliabile ed utile ove conducesse a misurarne il progresso che TOLOMEO segna sopra i suoi predecessori; ma a tale risultato essa non guiderebbe, giacchè pressochè tutti i lavori

(1) Cfr. P. TANNERY, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (Paris, 1893), p. 58. Più riservato è lo SCHIAPARELLI (v. *Origine del sistema*, ecc., p. 73).

(2) Specie di sfera armillare.

(3) Notizie meno sommarie si trovano nel II Vol. dell'*Hist. de l'astronomie ancienne* del DELAMBRE (Paris, 1817, p. 67-410) e nelle precitate *Recherches* del TANNERY.

astronomici anteriori all'*Almagesto* andarono perduti, ed inoltre TOLOMEO, al pari degli scienziati coevi, ignorò l'onesto sistema moderno delle esatte citazioni, cosicchè, con le scarse indicazioni da lui fornite e senza introdurre alcun elemento congetturale, non è possibile ricostruire l'astronomia greca esistente prima di lui (1).

A questo punto di rassomiglianza fra l'*Almagesto* e gli *Elementi*, ne fa riscontro uno fra TOLOMEO ed EUCLIDE: giacchè, sia notando che TOLOMEO, pur vivendo ad Alessandria, effettuò i suoi calcoli sopra numeri relativi al parallelo di Rodi (luogo ove osservò IPPARCO), sia leggendo attentamente le sue opere (e fors'anche la sola prefazione!), si acquista la convinzione che si è in presenza, non di un COPERNICO, di un KEPLERO, di un GALILEO, ma di un osservatore diligente ed acuto, nell'atto di raccogliere con amorosa cura i frutti dei lavori più antichi, di coordinarli, di colmarne le lacune e correggerne le imperfezioni: or non si delinea forse così una fisonomia di scienziato analoga a quella che già riscontrammo in EUCLIDE?... (2).

39. - L'immenso interesse che l'*Almagesto* ha pei matematici puri è dovuto, in tesi generale, all' indirizzo prettamente geometrico che esso possiede, ma in particolare all'essere il primo lavoro in cui trovasi esposta ed applicata la trigonometria, piana e sferica (3); sgraziatamente TOLOMEO ne fa conoscere solo quel tanto che è indispensabile per conseguire il fine a cui egli mirava (4), sicchè la trigono-

---

(1) Il DELAMBRE aveva dapprima creduto (v. op. cit., T. II, p. 67) che a TOLOMEO appartenesse tutto ciò che egli espone diffusamente ed ai suoi predecessori il resto; ma non tardò a ravvisare la fallacia di siffatto criterio discriminatore.

(2) Paragonando, anzi, alcune parti dell'*Almagesto* col Lib. III della *Sferica* di MENELAO, ci si forma l'idea che TOLOMEO, al pari di EUCLIDE, avesse per principio di mutare il meno possibile nei lavori dei predecessori.

(3) Cfr. WILBERG, *Die ebene Trigonometrie der Griechen, Aus dem Almagest dargestellt* e *Zur sphärischen Trigonometrie der Griechen. Nach dem Almagest des Ptolemaus* (Programm Essen, 1838 e 1839).

(4) Per essere tale scopo pratico, TOLOMEO soppresse in ogni teorema la protasi, limitandosi all'ectesi (enunciazione del teorema sulla figura).

metria dei Greci non si può identificare con ciò che risulta adunando tutto quello che trovasi in quell'opera, e sarebbe ingiusto e pericoloso il sistema di negare agli antichi la conoscenza di quelle proposizioni che TOLOMEO non ha registrate nella sua *Composizione matematica* (1).

Fu detto che la trigonometria tolemaica è profondamente differente da quella di cui ci serviamo noi, perchè è indipendente dall'uso di funzioni circolari; ora di tale asserzione la portata è molto più limitata di quanto può sembrare a prima giunta; giacchè se — uniformandosi al precetto dei matematici Indiani (2) — nelle proposizioni trigonometriche dell'*Almagesto* si sostituisce alla corda di un arco qualunque il doppio del seno dell'arco metà (3), si ricade nelle proposizioni dell'ordinaria trigonometria. Non vogliamo con ciò negare che l'assenza della nozione di *seno* e la conseguente circonlocuzione necessaria per indicare un *coseno*, nonchè la mancanza del concetto delle altre funzioni trigonometriche, di simboli per designarle e di un algoritmo per combinarle, rendano il modo di procedere tolemaico assai differente dal nostro; ma è questa una differenza che rimane all'epidermide, non penetra sino al midollo della teoria, è una differenza dello stesso genere di quella che intercede tra l'algebra moderna e l'algebra geometrica degli antichi (v. l'*Appendice* al L. II).

La creazione della trigonometria nell'antichità provenne dalla necessità di avere a propria disposizione una tavola delle lunghezze che hanno le corde di tutti gli archi multipli di una parte aliquota della circonferenza. Questo bi-

---

(1) L'interessante problema di divinare la trigonometria dei Greci fu tentato da un professore del Collegio di Francia, MAURIZIO BRESSIEU (?-1608), in un'opera oggi dimenticata (*Metrices astronomicae*, libri IV, Parisiis, 1581); fu ripreso poi — e risolto in modo più geniale che verosimile — dal DELAMBRE (v. l'*Historie* più volte citata e le note all'*Almagesto*, ed. HALMA).

(2) Nell'attribuire a questi l'introduzione e l'uso della funzione *seno* noi ci scostiamo da P. TANNERY (*Recherches sur l'histoire de l'astr. ancienne*, p. 63-67), che fa merito a TOLOMEO di averla scoperta; tuttavia non mancheremo di rilevare fra poco (n. 47) in altra opera di questo celebre astronomo l'uso del *seno*.

(3) Cfr. quanto già facemmo nel nostro resoconto della *Sferica* di MENELAO (p. 512 e segg.).

sogno fu avvertito, se non prima, da IPPARCO, al quale si attribuisce un'opera in dodici libri sul calcolo delle corde di un circolo (1); per tal fatto ad IPPARCO venne da molti attribuita l'invenzione della trigonometria, da molti, ma non da tutti. Infatti uno storico eminente osserva: « In seguito alle ricerche di ARCHIMEDE sul rapporto della circonferenza al diametro (2), vennero eseguiti dei calcoli, forse già cominciati dal geometra di Siracusa, per determinare le corde dei vari archi. Tali calcoli condussero, da un lato a stabilire formole approssimative che s'incontrano negli scritti attribuiti ad ERONE d'Alessandria (3), e da un altro lato alla costruzione di tavole. Essi vennero ripresi da APOLLONIO (4), il quale determinò con maggiore precisione il valore (3,1416) da attribuirsi alla circonferenza, quando se ne prenda il diametro per unità, e, più tardi, dai geometri d'Alessandria, contemporanei d'IPSICLE, quando venne introdotto il sistema sessagesimale (5). — D'altronde, APOLLONIO stabilì metodi che permettono di calcolare gli archi sulla sfera usando quelle tavole di corde, partendo dal teorema fondamentale delle trasversali. Un tale sviluppo delle varie conseguenze di un solo principio non sembra in realtà potere essere attribuito che ad un genio matematico potente quanto il geometra di Perga; ciò inoltre è conforme alle sue abitudini intellettuali. IPPARCO, trovando il terreno così preparato, calcolò tavole più esatte di tutte quelle che erano state redatte prima di lui ed a cui egli diede la forma, che divenne poi classica, grazie alla superiorità di queste tavole ed alle applicazioni che ne vennero fatte (6) ».

Tale schizzo storico sulla genesi della trigonometria contiene molti elementi ipotetici, che il lettore ravviserà tosto,

(1) " IPPARCO aveva esposto in dodici libri il metodo per trovare le rette iscritte nel cerchio. MENELAO trattò pure questa materia in sei libri. Ma non si può a meno di ammirare la facilità con cui TOLOMEO, mediante alcuni teoremi semplici e poco numerosi, perviene a trovare tali valori „. TEONE ed. HALMA T. I, p. 110.

(2) V. p. 319-320.

(3) V. n. 63 e segg. del presente Libro.

(4) V. L. V, n. 9.

(5) V. p. 504.

(6) P. TANNERY, *Recherches sur l'histoire*, etc., p. 67.

anche senza il nostro aiuto; tuttavia presenta indiscutibili caratteri di verosimiglianza, che auguriamo possano accrescersi con ulteriori ricerche. A noi basti di averne fatto cenno, prima di esporre in qual modo TOLOMEO proceda nella costruzione di una tavola di corde.

Per la facilità della pratica — egli dice (1) — noi costruiremo ora una tavola di queste rette, dividendo la circonferenza in 360 parti. Tutti gli archi della nostra tavola andranno crescendo di mezzo grado ciascuno, e noi daremo per ognuno di questi archi il valore della corda (suttendente) supponendo il diametro diviso in 120 parti. Si vedrà coll'uso essere questo il numero più comodo che si potesse scegliere. Mostreremo dapprima come, mediante un certo numero, il minimo possibile di teoremi (2), che sono sempre gli stessi, si possa comporre un metodo generale e sollecito per trovare quei valori. Non ci limiteremo a presentare le tavole, dove sono raccolti questi valori, senza insegnarne la teoria, ma renderemo agevole il modo di trovarli e verificarli, esponendone il metodo di costruzione. Adopereremo in generale la divisione sessagesimale per evitare le frazioni; e nelle moltiplicazioni e divisioni prenderemo sempre i valori più approssimati, sicchè, anche quello che trascureremo, non impedirà che essi siano sensibilmente esatti.

40. - Ora la determinazione metrica fondamentale nel metodo di calcolo esposto da TOLOMEO è contenuta nella seguente proposizione (3):

« Sia (fig. 72) ABΓ un semicerchio di diametro AΓ e di centro Δ, sia ΔB il raggio perpendicolare a AΓ, E il punto

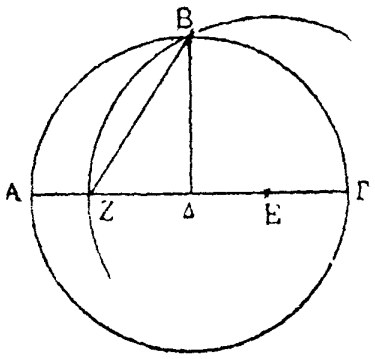


Fig. 72.

(1) *Almagesto*, ed. HALMA, T. I, p. 26.

(2) Ciò prova (in conformità con quanto diremo innanzi) che non sono gli unici noti a TOLOMEO.

(3) Op. cit., p. 26-27.

medio del raggio $\Delta\Gamma$ e Z un punto del raggio ΔA tale che si abbia $EZ = EB$. Condotta la retta BZ, sarà ΔZ eguale al lato del decagono e BZ a quello del pentagono iscritti nel dato cerchio ».

La verità di questa proposizione si palesa subito osservando che, detto R il raggio del dato cerchio, in forza della costruzione indicata, sussistono le relazioni:

$$\Delta Z = R\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\quad,\quad BZ = R\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\,;$$

Tolomeo le dimostra servendosi dell'algebra geometrica ed applicando due teoremi di Euclide (Libro II, prop. 6ª e Libro XIII, prop. 9ª).

Supponendo, come già si disse, che il raggio sia 60 parti, cioè facendo $R = 60^p$, si deduce

$$\Delta Z\ (= \overline{\lambda\xi}\ .\ \delta'\ .\ \nu\varepsilon'') = 37^p\ .\ 4'\ .\ 55''$$

e quindi

$$BZ\ (= \bar{o}\ .\ \lambda\beta'\ .\ \gamma'') = 70^p\ .\ 32'\ .\ 3''\ .$$

Va notato che Tolomeo, a somiglianza di quanto fece Archimede in casi analoghi (v. p. 321), non espone i particolari del calcolo aritmetico necessario per giungere a queste conclusioni, ma si limita ad asserire che, estraendo certe radici quadrate, si ottengono quei risultati. Si ha dunque:

$$\text{corda } 72^\circ = 70^p\ .\ 32'\ .\ 3''$$
$$\text{corda } 36^\circ = 37^p\ .\ 4'\ .\ 55''\ .$$

D'altronde, essendo le corde degli archi di 60°, 90° e 120°, risp. i lati dell'esagono regolare, del quadrato e del triangolo equilatero inscritti (cfr. Euclide, Lib. XIII, prop. 12), eventualmente mediante altre estrazioni di radice, si trova:

$$\text{corda } 60^0 = 60^p$$
$$\text{corda } 90^0 = 84^p\ .\ 51'\ .\ 10''$$
$$\text{corda } 120^0 = 103^p\ .\ 55'\ .\ 23''\ .$$

Da questi valori ne derivano altrettanti notando che dal teorema di PITAGORA consegue:

$$\overline{\text{corda } x^{\circ}}^2 + \overline{\text{corda } (180 - x)^{\circ}}^2 = \overline{120^p}^2;$$

applicando tale osservazione nell'ipotesi $x = 36$, si conclude

$$\text{corda } 144^{\circ} = 114^p \,.\, 7' \,.\, 37''.$$

41. - Ma l'applicazione della stessa osservazione alle altre corde già calcolate non guida a nessun nuovo risultato, ove non si introduca qualche nuovo elemento teorico; come tale TOLOMEO sceglie quell'importantissima proprietà del quadrilatero inscritto in un cerchio che porta appunto il nome di « teorema di TOLOMEO » (1); egli lo enuncia e dimostra come segue (2):

Sia (fig. 73) ABΓΔ un quadrilatero inscritto in un cerchio; condotte le diagonali AΓ e BΔ, si avrà la seguente relazione fra rettangoli:

$$A\Gamma \,.\, B\Delta = AB \,.\, \Gamma\Delta + A\Delta \,.\, B\Gamma.$$

Per dimostrarlo si formi l'angolo ABE eguale all'angolo ΔBΓ. Sarà in conseguenza l'angolo ABΔ eguale all'angolo ΓBE; siccome poi sono fra loro eguali anche gli angoli BΔA e BΓE, perchè entrambi misurati dalla metà dell'arco AB, così i triangoli ABΔ e EBΓ sono simili e danno

$$B\Gamma \,.\, A\Delta = \Gamma E \,.\, B\Delta.$$

---

(1) È nostro convincimento che questa proposizione non appartenga a TOLOMEO: si suole attribuirla a lui soltanto perchè l'*Almagesto* è la prima opera in cui s'incontri: ma poichè TEONE ALESSANDRINO ne parla (TEONE ed. HALMA, T. I, p. 187) circa nello stesso modo che adopera riguardo al teorema di MENELAO (id. p. 232 e 238), è poco probabile che si tratti di una scoperta di TOLOMEO.

(2) La dimostrazione di TOLOMEO è tanto semplice ed elegante che è tuttora esposta nei trattati elementari di geometria; essa cade in difetto nel caso in cui BΔ sia bisettrice dell'angolo ABΓ: ma a questo caso provvide, come vedremo, TEONE ALESSANDRINO (v. più avanti n. 49).

Ma essendo fra loro eguali anche gli angoli BAΓ e BΔΓ, sono eziandio fra loro simili i triangoli ABE e ΔBΓ, dunque è pure

$$AB \cdot \Gamma\Delta = AE \cdot B\Delta.$$

Addizionando membro a membro due relazioni trovate si conclude subito quella che si trattava di dimostrare.

Per vedere di quale utilità essa può riuscire, si consideri (fig. 74) il semicerchio di diametro AΔ ed in esso le corde

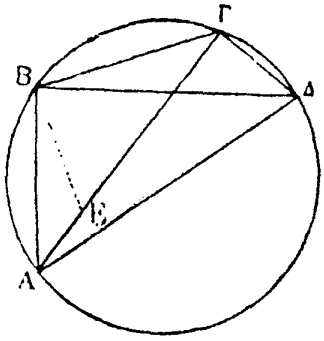


Fig. 73.

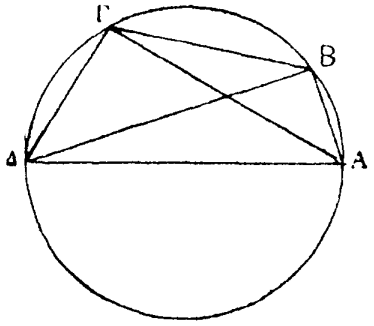


Fig. 74.

AB , AΓ ; condotte le rette BΓ , BΔ e ΓΔ nascerà una figura a cui applicando il teorema di Tolomeo si ottiene

$$A\Gamma \cdot B\Delta = AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma .$$

Ora, se si conoscono le corde AB , AΓ, si conosceranno anche ΔB , ΔΓ ; e siccome il diametro AΔ è noto, così si potrà dedurre da questa relazione la lunghezza che ha la corda dell'arco BΓ differenza tra gli archi AΓ e AB ; per esempio avendo già determinate *corda* 72° e *corda* 60° se ne dedurrà *corda* 12°. La relazione precedente è, dunque, una formola per la sottrazione degli archi ; ed infatti, chiamando $2x$ e $2y$ le lunghezze degli archi AB e AΓ e supponendo eguale all'unità il raggio del cerchio considerato, essa si muta nella classica relazione

$$\text{sen}\,(x - y) = \text{sen}\,x \cdot \cos y - \cos x \cdot \text{sen}\,y.$$

Un ragionamento dello stesso tipo serve a Tolomeo a stabilire una formola per l'addizione; eccolo :

Si considerino (fig. 75) nel cerchio di centro Z e diametro AΔ gli archi consecutivi AB , BΓ ; si conducano il diametro BZE, e le corde AB , AΓ , BΓ , ΓΔ , BΔ , ΓE e ΔE e si applichi il citato teorema al quadrilatero BΓΔE e si avrà

$$B\Delta \cdot \Gamma E = B\Gamma \cdot \Delta E + BE \cdot \Gamma\Delta ,$$

ossia (poichè $\Delta E = AB$ e $BE = A\Delta$)

$$B\Delta \cdot \Gamma E = AB \cdot B\Gamma + A\Delta \cdot \Gamma\Delta .$$

Orbene, dati gli archi AB , BΓ si conoscono le corde relative nonchè le corde BΔ e ΓE ; e, poichè è noto AΔ, l'equa-

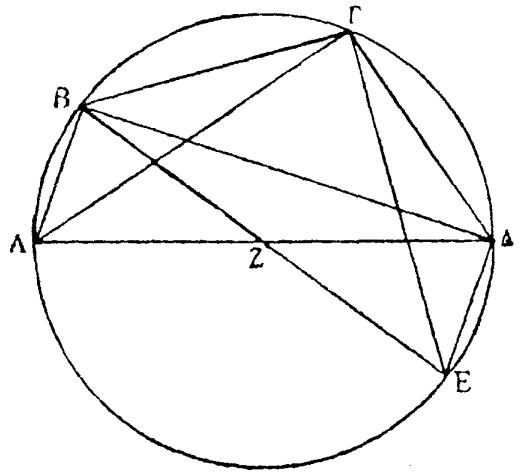


Fig. 75.

zione precedente darà ΓΔ e quindi il triangolo rettangolo AΓΔ darà AΓ, cioè la corda dell'arco AΓ somma dei due AB e BΓ. E ciò viene espresso in linguaggio moderno dalla equazione

$$\cos x \cdot \cos y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y + \cos (x + y)$$

in cui mutasi la precedente quando si faccia $AB = 2x$ e $B\Gamma = 2y$ (1).

(1) Come si vede, Tolomeo ha dedotto dal teorema che porta il suo nome le proposizioni fondamentali della teoria delle funzioni circolari ; che ciò dovesse essere possibile poteva prevedersi dal momento che quel teorema esprime una relazione che passa fra quattro punti quando e solo quando essi appartengano alla stessa circonferenza ; ma è suo merito di averlo

Tolomeo tratta poi anche il problema della bisezione degli archi. Si considerino infatti — egli dice (1) — nel cerchio (fig. 76) di diametro AΓ l'arco ΓB ed il suo punto di mezzo Δ, e si conducano le rette AB , AΔ , ΓΔ e BΔ nonchè la ΔZ perpendicolare a AΓ ; si porti anche sopra AΓ , AE = AB e si

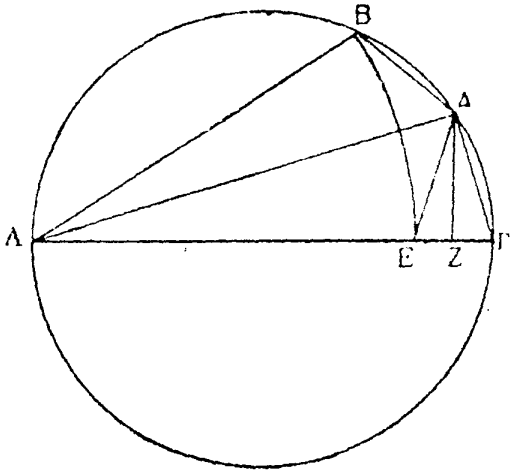


Fig. 76.

conduca ΔE. I triangoli ABΔ e AEΔ risultano evidentemente eguali, onde ΔB = ΔE ; il triangolo ΓΔE è quindi isoscele, ΔZ ne è l'altezza, e si hanno le relazioni :

$$\Gamma E = A\Gamma - AB$$

$$\Gamma Z = \frac{A\Gamma - AB}{2},$$

fatto. Dello stesso teorema J. Hermann (1678-1733) si è giovato (*Acta erud.*, Aug. 1703) per dimostrare le formole di moltisezione degli archi scoperte da Giovanni Bernoulli (1667-1748) (Id., aprile 1701). Il metodo adoperato da Tolomeo fu ritrovato dal Carnot (1753-1823) [v. *De la corrélation des figures*, Paris, 1801, p. 95 e seg.; M. Chasles (*Ap. hist.*, 2e ed., Paris, 1875, p. 27) cita invece, per una svista, la *Géométrie de position*] e poco dopo da N. Fergola (1752-1824) (v. una memoria inserita nel Vol. I, 1819, degli Atti della R. Accademia di Napoli e il mio lavoro su *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce*, Genova, 1892, p. 24 e seg.), coincidenza che non deve stupire perchè " il est de la nature des verités mathématiques d'être souvent découvertes à peu près en même temps, par différents moyens et différentes personnes „ (Carnot, *Geom. de position*, Paris, 1803, p. 306, nota).

(1) Op. cit., p. 31.

la seconda delle quali dimostra che ΓZ è una lunghezza data, quando si conosca l'arco BΓ (1). Ora, essendo il triangolo AΓΔ rettangolo in Δ, si ha

$$\overline{\Gamma\Delta}^2 = A\Gamma \cdot \Gamma Z ;$$

dunque anche ΓΔ, corda dell'arco metà di ΓΓ, è data quando si conosca la corda dell'arco intero; ed infatti dalle relazioni precedenti emerge che

$$\frac{\overline{\Gamma\Delta}^2}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma - AB}{2} ;$$

ora questa equivale all'equazione

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} ,$$

supponendo l'arco $B\Delta = 2x$.

Applicando questo importante risultato si deduce, dalla corda già trovata dell'arco di 12°, successivamente *corda* 6°, *corda* 3° e si conclude da ultimo

$$\text{corda } \frac{3^\circ}{2} = 1^p \,.\, 34' \,.\, 15''$$

$$\text{corda } \frac{3^\circ}{4} = 0^p \,.\, 47' \,.\, 8'' \,.$$

42. - L'ultimo dei teoremi di cui si serve il grande astronomo per costruire una tavola di corde è una parte di quella importante proposizione trigonometrica, che già vedemmo adoperata da ARISTARCO (p. 484) ed ARCHIMEDE (p. 490), e che dice: « se si tracciano in un cerchio due corde qualunque, purchè minori del diametro, il rapporto della maggiore alla minore di esse è minore del rapporto degli archi corrispondenti ». Il ragionamento mediante cui TOLOMEO ne dimostra la verità è semplice e merita di venir qui riferito,

(1) Le proprietà indicate da TOLOMEO nella fig. 76 sono casi particolari di quella a cui ARCHIMEDE consacrò il terzo de' suoi *Lemmi* (v. p. 329).

anche perchè non ne conosciamo alcun altro autentico di pari antichità che conduca allo stesso scopo.

Siano (fig. 77) AB , BΓ gli archi dati, il secondo dei quali sia maggiore del primo. Si conducano le corde AB , BΓ , AΓ e si uniscano i punti A , B , Γ al punto di mezzo Δ dell'arco AΓ . E sia l'intersezione delle rette AΓ , BΔ ; ΔZ sia perpendicolare a AΓ

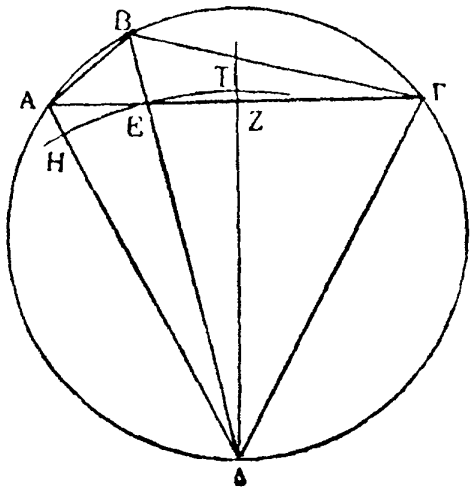


Fig. 77.

e T , H siano le intersezioni del prolungamento della retta ΔZ e della corda ΔA colla circonferenza di centro Δ e raggio ΔE. Sarà

$$\Gamma\Delta = A\Delta\ ,\ \Gamma E > AE$$

$$\text{sett. } \Delta ET > \text{triang. } \Delta EZ\ ,\ \text{sett. } \Delta EH < \text{triang. } \Delta EA$$

epperò

$$\frac{\text{triang. } \Delta EZ}{\text{triang. } \Delta EA} < \frac{\text{sett. } \Delta ET}{\text{sett. } \Delta EH}.$$

Ma il primo di questi rapporti vale $\frac{EZ}{EA}$ ed il secondo

$$\frac{\text{ang. } E\Delta Z}{\text{ang. } E\Delta A},$$

quindi

$$\frac{EZ}{EA} < \frac{\text{ang. } E\Delta Z}{\text{ang. } E\Delta A}.$$

Componendo si deduce da questa proporzione la seguente

$$\frac{AZ}{EA} < \frac{\text{ang. } A\Delta Z}{\text{ang. } A\Delta E},$$

e raddoppiando

$$\frac{A\Gamma}{AE} < \frac{\text{ang. } A\Delta\Gamma}{\text{ang. } A\Delta E},$$

e sottraendo

$$\frac{\Gamma E}{AE} < \frac{\text{ang. } \Gamma\Delta B}{\text{ang. } A\Delta B}.$$

Osservando finalmente che la retta $BE\Delta$ è la bisettrice dell'angolo B del triangolo $AB\Gamma$ si trasforma questa relazione nell'altra

$$\frac{B\Gamma}{BA} < \frac{\text{ang. } \Gamma AB}{\text{ang. } A\Gamma B},$$

ossia

$$\frac{B\Gamma}{BA} < \frac{\text{arco } B\Gamma}{\text{arco } AB},$$

che è appunto quanto trattavasi di dimostrare (1).

43. - Di tale risultato TOLOMEO si giova nel modo seguente:

Sia *arco* $BA = \frac{3^0}{4}$ e *arco* $B\Gamma = 1^0$; sarà, in virtù di quanto si dimostrò,

$$\frac{B\Gamma}{BA} < \frac{4}{3};$$

sostituendo a BA $\left(= \textit{corda}\ \frac{3^0}{4}\right)$ il valore già calcolato si conclude

$$B\Gamma = \text{corda } 1^0 < 1^p\,.\,2'\,.\,50''...$$

Se invece si suppone *arco* $BA = 1^0$ e *arco* $B\Gamma = \frac{3^0}{2}$ si trova

$$\frac{B\Gamma}{BA} < \frac{3}{2};$$

e sostituendo a $B\Gamma$ $\left(= \textit{corda}\ \frac{3^0}{2}\right)$ il suo valore già trovato

(1) Questa relazione si ritiene ancora oggi indispensabile per costruire una tavola di valori delle funzioni circolari e si enuncia così: *se l'arco* x *decresce di* $\frac{\pi}{2}$ *a* 0 *la funzione* $\frac{\text{sen } x}{x}$ *cresce accostandosi indefinitamente all'unità* (v. SERRET, *Trattato di trigonometria*, trad. FERRUCCI, Firenze, 1856, p. 79).

si conclude essere

$$\text{BA} = \text{corda } 1^0 < 1^p \,.\, 2' \,.\, 50'' \ldots$$

Essendo pertanto

$$1^p \,.\, 2' \,.\, 50'' \ldots < \text{corda } 1^0 < 1^p \,.\, 2' \,.\, 50'' \ldots$$

con approssimazione superiore a $\frac{1}{60^2}$ del raggio, si può ritenere

$$\text{corda } 1^0 = 1^p \,.\, 2' \,.\, 50''.$$

Notiamo che prendendo

$$\text{arc } 1^0 = \text{corda } 1^0 = 1^p \,.\, 2' \,.\, 50''$$

si ottiene come lunghezza dell'intera circonferenza

$$360\ (1^p \,.\, 2' \,.\, 50'');$$

ed essendo il raggio 120^p, si vede che ciò equivale ad assumere per π il seguente valore:

$$\pi = \frac{180}{120}\left(2 + \frac{5}{60} + \frac{40}{3600}\right) = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2}\ (1).$$

È questo il valore tacitamente adoperato da TOLOMEO quando ne abbisogna nella costruzione di una tavola ausiliare pel calcolo delle eclissi (Cap. VII del VI Libro dell'*Almagesto*); ivi, infatti, egli dice: « il rapporto della circonferenza al diametro è quello di 3 . 8′ . 30″ a 1 »; ma nasconde la via che lo guidò a tale conclusione sotto la vaga osservazione seguente: « giacchè questo rapporto cade tra 3 e $\frac{1}{7}$, e 3 e $\frac{10}{71}$ dei quali si è servito ARCHIMEDE » (2).

Ottenuta *corda* 1°, dalle formole di sottrazione si trae *corda* $\left(\frac{3^0}{2} - 1^0\right)$ = *corda* $\frac{1^0}{2}$, mentre, mediante quelle di addizione, si giunge a *corda* $\left(\frac{3^0}{2} + \frac{1^0}{2}\right)$ = *corda* 2^0; invo-

(1) In decimali equivale a $\pi = 3{,}14166\ldots$

(2) *Almagesto* ed. HALMA, T. I, p. 421.

cando di nuovo le formole di sottrazione, mediante il valore di *corda* 3^0, si arriva a *corda* $\left(3^0 - \frac{1^0}{2}\right) = corda\ \frac{5^0}{1}$; e continuando in modo analogo si ottengono le corde di tutti gli archi multipli di $\frac{1^0}{2}$.

Questo procedimento non lascia nulla a desiderare per eleganza e rigore, tanto che è quello che — *mutatis mutandis* — è tuttora adoperato. Per valutare l'approssimazione dei risultati conseguiti col suo mezzo, notiamo che, dal valore ottenuto per *corda* 1^0 nel cerchio di raggio 60, scaturisce che, nel cerchio di raggio 1, è

$$\text{sen } 30^0 = \frac{1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2}}{2} = 0{,}008726 ;$$

ora, secondo un calcolo recente (1), è invece

$$\text{sen } 30' = 0{,}00873 ,$$

che si accorda col valore trovato da TOLOMEO nelle quattro prime decimali.

L'autore dell'*Almagesto* insegna anche a rimediare al graduale moltiplicarsi dell'errore che si è commesso assumendo per *corda* 1^0 il valore soprascritto, calcolando direttamente il valore di certe corde notevoli. Ad esempio (applicando forse due volte la formola di bisezione al valore già noto di *corda* $72^0 = 2 \,.\, sen\ 36^0$) trova

$$\text{sen } 9^0 = \frac{18 + \frac{46}{60} + \frac{19}{60^2}}{2.60} = 0{,}15643 \text{ (2)} .$$

Va da ultimo notato che, pel calcolo delle corde degli archi che non sono multipli di 30', TOLOMEO ritiene, ser-

(1) H. SCHUBERT, *Fünfstellige Tafeln und Gegen-Tafeln*, etc., Leipzig, 1897.

(2) È il medesimo trovato dallo SCHUBERT, l. c.

vendosi di un principio tuttora in uso, che in ogni intervallo di 30′, gli incrementi delle corde siano proporzionali a quelli degli archi; anzi, nella tavola di corde che chiude il IX Cap. del I Libro dell'*Almagesto*, per ogni intervallo di 30′ è registrato, a comodo dei calcolatori, il valore della trentesima parte della differenza che intercede tra le lunghezze delle corde negli estremi dell'intervallo stesso.

44. - Emerge dal fin qui detto che, sin dai tempi di TOLOMEO, esistevano gli elementi essenziali della « teoria delle funzioni circolari »; anzi, basta applicare una conveniente simbolica e l'algoritmo algebrico a quanto testè esponemmo in compendio, per ottenere la disciplina a cui si dà oggi quel nome.

Ma quello che invano cercherebbesi, anche in germe, nell'*Almagesto* è la trigonometria rettilinea; tuttavia ciò non impedisce a TOLOMEO di calcolare tutti gli elementi di un triangolo piano sufficientemente determinato (v. ad es. il Cap. VII del Lib. VI).

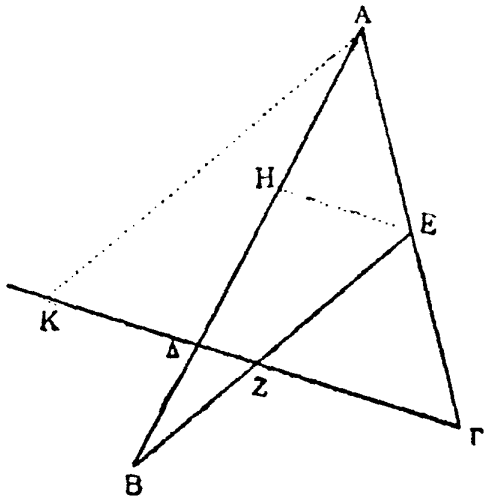


Fig. 78.

Per compenso, il Cap. XI del I Libro di tale opera pone, sotto il titolo di « Preliminari per le dimostrazioni sferiche », fondamenti prettamente scientifici alla trigonometria sferica, come emerge da quanto ci apprestiamo ad esporre.

L'autore comincia coll'insegnare che « se si tagliano (fig. 78) due rette AB , AΓ con altre due ΓΔ e BE intersecantisi nel punto Z, si avrà

$$\frac{\Gamma A}{AE} = \frac{\Gamma\Delta}{Z\Delta} \cdot \frac{ZB}{BE} \text{»};$$

è la relazione tanto spesso adoperata dai matematici posteriori al Rinascimento sotto il nome di *regula sex quantitatum* e che oggi è uno dei capisaldi della teoria delle trasversali, ove vien chiamata « teorema di MENELAO » (cfr. p. 512).

Per dimostrarla si conduca EH parallela a ΓΔ ; nascono così i triangoli simili AΓΔ ed AEH, che danno

$$\frac{\Gamma A}{AE} = \frac{\Gamma \Delta}{EH},$$

ossia

$$\frac{\Gamma A}{AE} = \frac{\Gamma \Delta}{\Delta Z} \frac{\Delta Z}{EH};$$

e siccome sono simili anche i triangoli BΔZ e BHE così è pure

$$\frac{\Delta Z}{EH} = \frac{ZB}{BE};$$

epperò, sostituendo nella precedente,

$$\frac{\Gamma A}{AE} = \frac{\Gamma \Delta}{\Gamma Z} \frac{ZB}{BE},$$

come erasi enunciato.

Applicando il teorema ora dimostrato al triangolo AΓΔ tagliato dalla trasversale BZE, si ottiene l'altra relazione:

$$\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{\Gamma Z}{\Delta Z} \cdot \frac{\Delta B}{BA};$$

è da notarsi che TOLOMEO, il quale non concepiva il teorema di MENELAO con la generalità e la precisione oggi imposte dall'uso dei segni in geometria, dimostra quest'equazione direttamente, conducendo cioè AK parallela a BE, e notando che si ha successivamente:

$$\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{\Gamma Z}{ZK} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta} \frac{Z\Delta}{ZK} = \frac{\Gamma Z}{\Delta Z} \frac{\Delta B}{BA}.$$

Relazioni analoghe sussistono sulla sfera (1); e TOLOMEO,

(1) Il nostro autore non rileva *esplicitamente* l'analogia delle proposizioni precedenti con quelle che seguono, ma è impossibile che gli sia sfuggita; ed infatti le lettere identiche poste ai punti omologhi delle corrispondenti figure lo prova indirettamente, ma, secondo noi, indiscutibilmente.

dopo avere dimostrato due lemmi che vedemmo adoperati da MENELAO coll'identico scopo (v. p. 514), enuncia la principale fra esse nel modo seguente:

« Siano dati (fig. 79) due archi di circolo massimo di una sfera AB e AΓ; si taglino con altri due ΓΔ e BE intersecantisi in Z; si avrà

$$\frac{\text{sen } \Gamma A}{\text{sen } AE} = \frac{\text{sen } \Gamma Z}{\text{sen } Z\Delta} \cdot \frac{\text{sen } \Delta B}{\text{sen } BA} \text{ ».}$$

Per provare l'asserto si congiunga il centro H della data sfera ai punti B, E, Z; si traccino anche le rette AΓ, AΔ, ΓΔ e si determinino le intersezioni: K delle rette ΓΔ, HZ; T

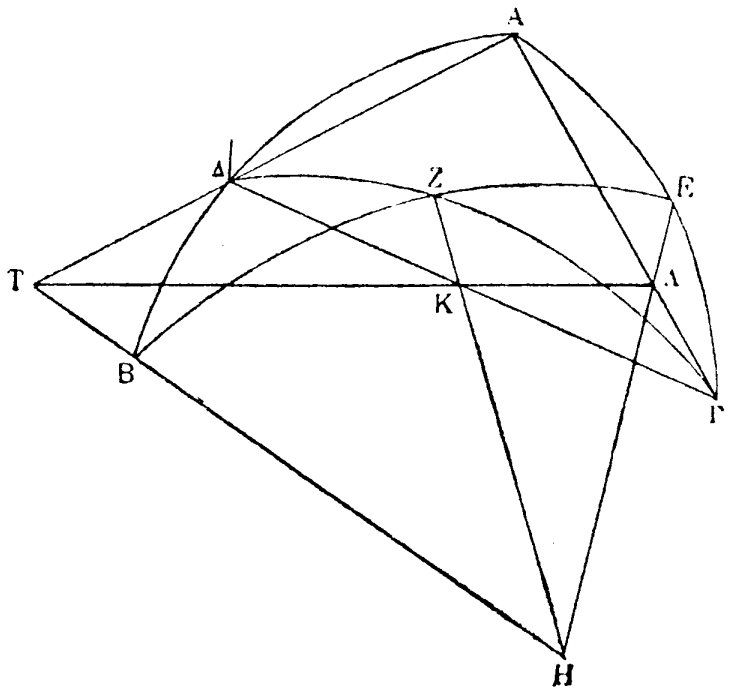


Fig. 79.

delle rette AΔ, BH; Λ delle rette AΓ e TK. Siccome le rette HB, HE, HZ stanno in un medesimo piano e lo stesso accade per le rette AΔ, AΓ, ΓΔ, così i punti T, Λ, K, in cui le tre rette tagliano le seconde, stanno sopra una retta; questa è una trasversale del triangolo AΓΔ, onde, pel teorema di MENELAO nel piano, si ha

$$\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda A} = \frac{\Gamma K}{K\Delta} \cdot \frac{\Delta T}{TA}.$$

Ma, applicando uno dei lemmi succitati, si ottiene

$$\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda A} = \frac{\text{sen } \Gamma E}{\text{sen } EA}\,,\quad \frac{\Gamma K}{K\Delta} = \frac{\text{sen } \Gamma Z}{\text{sen } \Delta Z}\,,\quad \frac{\Delta T}{TA} = \frac{\text{sen } \Delta B}{\text{sen } BA}\,,$$

dunque

$$\frac{\text{sen } \Gamma E}{\text{sen } EA} = \frac{\text{sen } \Gamma Z}{\text{sen } \Delta Z}\,\frac{\text{sen } \Delta B}{\text{sen } BA}\,,$$

relazione che esprime appunto il teorema di MENELAO per il triangolo sferico $A\Gamma\Delta$, segato dalla trasversale BZE.

TOLOMEO aggiunge che si ha pure (analogamente a quanto si è visto nel piano)

$$\frac{\text{sen } \Gamma A}{\text{sen } EA} = \frac{\text{sen } \Gamma\Delta}{\text{sen } \Delta Z}\,\frac{\text{sen } ZB}{\text{sen } BE}\,;$$

ma per noi questa equazione non insegna nulla di nuovo, giacchè esprime il medesimo teorema, applicato al triangolo sferico ΓZE, tagliato dalla trasversale $A\Delta B$.

45. - Come dal teorema di TOLOMEO si possono dedurre tutte le formole della teoria delle funzioni circolari, così dal teorema di MENELAO si possono far scaturire tutte le formole che servono alla risoluzione dei triangoli sferici (1). Un trattatista moderno, che avesse riconosciuto tale fatto importante, ne avrebbe approfittato per ottenere tutte le relazioni fondamentali che intercedono tra gli elementi di un triangolo sferico, si da averle a propria disposizione in ogni occasione. TOLOMEO, invece, tiene costantemente presente la relazione generale e ne deduce quanto gli occorre in ogni circostanza. Che fosse in grado di farlo è dimostrato dai due Capitoli XII e XIII del I Libro dell'*Almagesto*, ove è insegnato un procedimento per costruire le tavole che dànno, per i vari punti dell'eclittica, le *coordinate sferiche* (ascensione retta e declinazione) già considerate ed in uso ai tempi di IPPARCO.

Per dare un'idea della via seguita dal celebre astronomo, segnamo (fig. 80) l'equatore della sfera celeste $AE\Gamma$ e l'eclittica $BE\Delta$, nonchè il circolo massimo della sfera stessa, che

(1) Cfr. il mio articolo *Intorno alla trigonometria degli antichi Greci* nel T. IV (1912) del *Bollett. della "Mathesis"*.

contiene i poli di quello e di questa. Sia H un punto qualunque dell'eclittica e ZHTN il circolo massimo condotto per quel punto e pei poli del mondo (centri sferici Z, N dell'e-

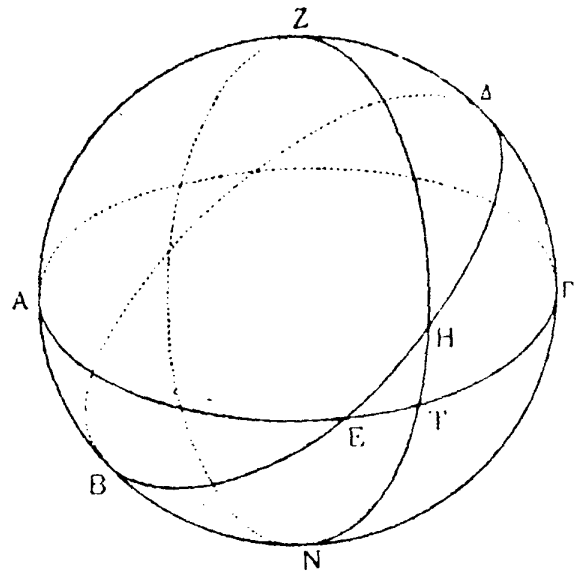


Fig. 80.

quatore). Applicando il teorema di MENELAO al triangolo BHZ tagliato dalla trasversale AET, si ottiene:

$$\frac{\text{sen ZA}}{\text{sen AB}} = \frac{\text{sen TZ}}{\text{sen TH}} \frac{\text{sen HE}}{\text{sen EB}};$$

osservando ora che ognuno degli archi ZA, ZT, EB vale un quadrante, si può trasformare questa relazione nell'altra

$$\text{sen TH} = \text{sen HE} \cdot \text{sen AB}.$$

In questa equazione si conosce l'arco HE (distanza sferica del punto considerato H dal punto equinoziale E) e l'arco AB (che misura l'obliquità dell'eclittica) (1), dunque essa dà il valore dell'ascensione retta TH. Va, inoltre, notato che quella relazione esprime che in ogni triangolo sferico

$$\text{sen } \textit{cateto} = \text{sen } \textit{ipotenusa} \times \text{sen } \textit{ang. opposto},$$

(1) Notiamo per incidenza che essa venne misurata da ERATOSTENE ed applicata da IPPARCO (*Almagesto*, ed. HALMA, T. I, p. 49).

proposizione di cui il teorema dei seni, per un triangolo qualunque, è notoriamente un corollario immediato; però questo corollario non fu scoperto che assai più tardi dagli Arabi.

Ma, considerando nella stessa figura il triangolo ATZ e la trasversale BEH, si ottiene analogamente

$$\frac{\text{sen ZB}}{\text{sen BA}} = \frac{\text{sen ZH}}{\text{sen HT}} \frac{\text{sen TE}}{\text{sen EA}},$$

ossia

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \text{BA}\right)}{\text{sen BA}} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \text{HT}\right)}{\text{sen HT}} \frac{\text{sen ET}}{\text{sen}\frac{\pi}{2}},$$

o finalmente

$$\text{sen ET} \,.\, \text{tg AB} = \text{tg HT}.$$

Essendosi già determinato prima l'arco HT ed essendo AB conosciuta, questa equazione dà subito il valore di ET, seconda coordinata sferica del punto H. E resta incidentalmente dimostrato che ai Greci era pur nota un'altra delle relazioni che legano gli elementi di un triangolo sferico rettangolo, cioè la seguente:

$$\text{tg } \textit{primo cateto} = \text{sen } \textit{secondo cateto} \times \text{tg } \textit{ang. acuto opposto al primo.}$$

Che il nostro scienziato sapesse altresì che « in ogni triangolo sferico rettangolo il coseno dell'ipotenusa è eguale al prodotto dei coseni dei cateti » è dimostrato dal Cap. II del II Libro dell'*Almagesto*, ove dalla considerazione (fig. 81) del triangolo EHT segato dalla trasversale ABZ si conclude essere

$$\frac{\text{sen AT}}{\text{sen AE}} = \frac{\text{sen TZ}}{\text{sen ZH}} \frac{\text{sen HB}}{\text{sen BE}};$$

ora tale relazione si trasforma subito nell'altra

$$\text{cos ET} = \frac{\text{cos EH}}{\text{cos TH}},$$

che è quella dianzi citata.

Finalmente, nel Cap. III dello stesso II Libro, una considerazione somigliante guida a concludere che

$$\text{tg } \textit{cateto} = \text{tg } \textit{ipotenusa} \times \cos \textit{ang. compreso.}$$

Altre deduzioni analoghe si trovano nell'*Almagesto* (v. p. esempio il Cap. V dell'VIII Libro); ma quelle che abbiamo esposte bastano a caratterizzare i procedimenti usati dal famoso astronomo e a provare come, nelle sue argomentazioni, si noti quella rigorosa unità di metodo che ai di nostri si considera obbligatoria in qualunque esposizione, veramente scientifica, di una teoria matematica; ragione per cui è sorprendente che in nessun trattato moderno di trigonometria non si trovi almeno un cenno della via che TOLOMEO ha, se non aperta, gloriosamente percorsa.

Prima di abbandonare l'*Almagesto*, a complemento di quanto esponemmo nel V Cap. del nostro L. II, rileveremo come nel Cap. V dell'VIII Libro di tale opera, nello studio delle culminazioni e dei tramonti delle stelle fisse sono applicati i due teoremi seguenti che TOLOMEO (1) attribuisce ad APOLLONIO:

1.° Nel cerchio di centro E (fig. 81) si conduca un diametro AΓ e si segni su di esso un punto Z; presi gli archi

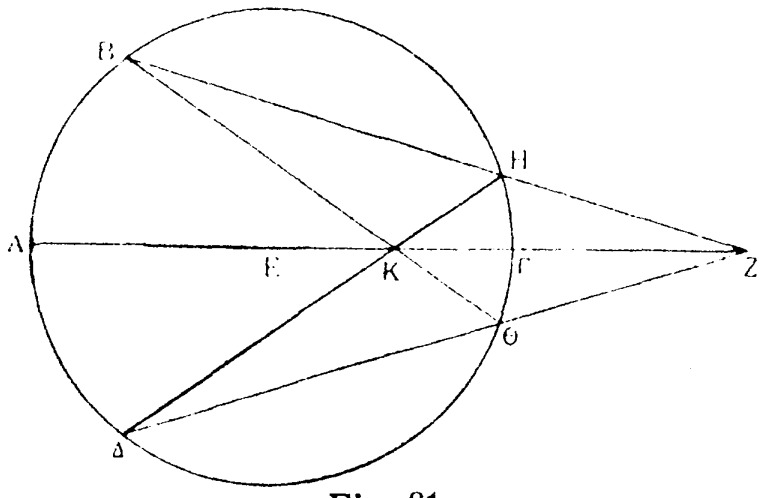


Fig. 81.

eguali ΓΘ e ΓH, si conducano le rette ZHB e ZΘΔ, ΔH e BΘ; queste si taglieranno in un punto K del diametro considerato tale che AZ : ZΓ = AK : KΓ.

(1) *Almagesto* ed. HALMA, T. II, p. 313.

2.° Se, nel triangolo rettilineo ABΓ, il lato BΓ è maggiore di AΓ, e si prende su BΓ un punto Δ tale che $\Gamma\Delta \geq A\Gamma$, il rapporto $\Gamma\Delta : B\Delta$ risulterà superiore a quello degli angoli ABΓ , BΓA.

46. - Oltre che della *Composizione matematica* TOLOMEO è autore di altre opere di minor mole, le quali, quantunque non abbiano un fine prettamente teorico, pure recano, quale più qual meno, contributi non spregevoli alle nostre cognizioni sullo stato delle scienze esatte nell'antica Grecia, epperò meritano di venir qui considerate.

Cominciamo dallo scritto intitolato *Planisfero*; è posteriore all'*Almagesto*, il quale è ivi citato; ne esiste una versione latina compiuta a Tolosa il 1° giugno 1544 da ROBERTO DI BRUGES (1), sopra una traduzione araba, dovuta ad un certo MASLEM, la qual versione F. COMMANDINO ha pubblicata, corredandola di preziose note e dotti commenti (2). Lo scopo di tale lavoro è di insegnare un metodo per rappresentare sopra un piano la volta del cielo: non è che la proiezione fatta dal polo australe sul piano dell'equatore; in conseguenza ai punti dell'emisfero boreale corrispondono punti interni all'equatore, a quelli dell'altro emisfero punti esterni, ai meridiani le rette di un fascio ed ai paralleli tanti cerchi concentrici. Il lettore ravviserà tosto in questa corrispondenza fra i punti di una sfera e quelli di un piano quel metodo di rappresentazione che, nel 1613, doveva ricevere da F. AGUILLON (1566-1617) il nome di *proiezione stereografica* (3), tuttora in uso. È risaputo che questa proiezione gode di due proprietà notevolissime, cioè di far corrispondere ad un cerchio un cerchio e di conservare le grandezze degli angoli; ora questa seconda prerogativa sembra essere rimasta totalmente ignota agli antichi (4), mentre la prima era ad essi conosciuta, almeno in alcuni casi particolari.

---

(1) " Facta est translatio haec Tolosae Cal. Junii anno domini MCXLIII „, si legge infatti al termine di essa. Secondo il BJÖRNBO (Bibl. math., 3ª Ser., T. III, 1902, p. 420) bisognerebbe correggere questo numero in 1143.

(2) *Ptolemaei Planisphaerium. Jordani Planisphaerium. Federici Commandini Urbinatis in Ptolomaei Planisphaerium Commentarius.* Venetiis, MDLVIII.

(3) *Opticorum*, Lib. VI (Antverp., 1613), p. 573.

(4) Il DELAMBRE (*Histoire de l'astronomie au XVIII Siècle*. Paris, 1827, p. 88) ne trovò soltanto cenno, con una dimostrazione non

La proiezione stereografica offre il più antico esempio di rappresentazione di una superficie sopra un'altra e può dirsi costituire il primo capitolo della Teoria matematica delle carte geografiche; spetta a TOLOMEO il merito di averlo scritto? A tale domanda rispondono negativamente PROCLO ed un discepolo di IPAZIA d'Alessandria — SINESIO DA CIRENE (n. 365-370, m. circa 415 E. v.) (1) —, i quali concordano nel far risalire ad IPPARCO il metodo esposto nel *Planisfero*.

47. - Una profonda ed indiscutibile affinità con questo lavoro ha l'altra opera di CLAUDIO TOLOMEO intitolata *Analemma* (Περὶ ἀναλήμματος). Dell'originale ci rimangono soltanto alcuni frammenti nel palimpsesto *Ambros.* L. 99, che furono di recente raccolti e pubblicati (2); ma ne esiste una traduzione latina, eseguita, sopra una versione araba, da GUGLIELMO DA MOERBECK (3) e pubblicata dall'infaticabile FEDERICO COMMANDINO (4), con commenti che erano veramente indispensabili, data l'oscurità del testo.

L'*Analemma*, al pari delle due opere precedenti, è dedicata a un tal CIRO ed ha per iscopo di insegnare la *proiezione ortogonale* di una sfera su di un piano. Tale procedimento è considerato come un sussidio alla costruzione degli orologi solari (o alla equivalente determinazione della posizione del sole in un determinato istante del giorno), e questo appunto l'autore volle indicare col titolo adottato, giacchè *analemma* ha un significato simile a quello che possiede la parola *lemma*; quello è per le costruzioni grafiche circa ciò che è questo per la dimostrazione dei teoremi. Da notarsi è la considerazione costante da parte di TOLOMEO di tre cerchi fissi (il meridiano, l'orizzonte ed il primo verticale), come elementi a cui sono riferiti tutti i punti della

---

perfetta in *A complete system of Astronomy* (London, 1628) di C. LEADBETTER.

(1) SYNESII CYRENAEI AD PAENIUM, *Sermo de astrolabio. Interprete* FED. MORELLI (Paris, 1864), p. 1578-1588. Cfr. DELAMBRE, *Hist. de l'astr. ancienne*, T. II (Paris, 1817), p. 453.

(2) J. L. HEIBERG, *Ptolomaeus de Analemmate* (Abh. zur Gesch. der Math., T. VII, 1895, p. 1-30).

(3) Secondo il parere dell'HEIBERG (*Neue Studien über Archimedes*, Id., T. V, 1890, p. 4).

(4) CL. PTOLEMAEI *liber de Analemmate* (Romae, MCLXII).

sfera (1): come negare che esista qui in germe il concetto delle coordinate cartesiane ortogonali nello spazio?

Una gran parte dell'*Analemma* è dedicata alla descrizione ed all'uso di certi istrumenti, mediante i quali si applica alla gnomonica il metodo della proiezione ortogonale; non è il caso di riassumere quanto dice il celebre astronomo, ma va per converso notato come nelle argomentazioni esposte si è ravvisata (2) la prima radice di un procedimento uniforme, equipollente alla nostra trigonometria, che gli Indiani appresero, svolsero ed insegnarono agli Arabi, i quali lo trasmisero al REGIOMONTANO (3); e questi se ne servì per ottenere alcune delle proposizioni che consideransi oggi come i capisaldi della trigonometria sferica. Basti ciò a dimostrare che l'*Analemma* è degno di attenzione anche da parte degli storici della geometria (4).

Alla proiezione stereografica TOLOMEO fa allusione anche nel Cap. XXI della sua opera che raggiunse maggiore notorietà, grazie alle numerose traduzioni che ebbe, cioè la *Geografia* (περὶ τῆς γεωγραφικῆς ὑφηγήσεως) (5); ma non è

---

(1) Forse tale considerazione fu tolta da un'altra opera di TOLOMEO, oggi perduta, *Sulle dimensioni,* che SIMPLICIO ricorda in un passo (riferito da F. COMMANDINO nell'ed. succitata) del commento al I Libro *De coelo* di ARISTOTELE, opera che sembra fosse destinata a dimostrare l'impossibilità di una quarta dimensione.

(2) A. VON BRAUNMÜHL, *Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie* (Nova Acta der k. Leop.-Carol. Deutschen Akad. des Naturf., T. LXXI, Halle a. S. 1897) e *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, I Teil (Leipzig, 1900), p. 12-13; ivi è fra l'altro osservato come TOLOMEO determini gli archi che cerca col mezzo dei loro seni, mentre ordinariamente i Greci si servivano a tal fine delle corde.

(3) V. anche la *Note sur la trigonometrie de l'antiquité* di H. G. ZEUTHEN (Bibl. mathem., III Ser., T. I, 1900), intesa a diminuire un po' la portata delle conclusioni del BRAUNMÜHL.

(4) Chi desidera più precisi ragguali sopra il *Planisfero* e l'*Analemma* ricorra a DELAMBRE, *Hist. de l'astr. ancienne,* T. II, p. 403-503.

(5) Anche questa è posteriore all'*Almagesto*, e venne nello scorso secolo pubblicata, assieme ad una traduzione francese, dall'HALMA (*Traité de géographie de Claude Ptolémée,* Paris, 1828). Vedi DELAMBRE, op. cit., T. II, p. 520-542.

quello il procedimento di rappresentazione grafica a cui TOLOMEO dà ivi la preferenza. Infatti nell'VIII Libro dell'or citato lavoro egli costruisce e descrive ventisei carte geografiche, con cui intende rappresentata tutta la terra abitata, nelle quali tanto ai meridiani, quanto ai paralleli corrispondono rette; a tale procedimento si è ispirato N. MERCATORE (†-1687) nel concepire il metodo che porta il suo nome: « così è nata — osserva JACOBI (1) — la proiezione conosciuta sotto il nome di MERCATORE, la quale coinciderebbe con quella di TOLOMEO, ove questi avesse composta la sua rappresentazione della terra col mezzo di *infinite carte* ».

Resta così dimostrato che le origini di tutti tre i principali metodi in uso, per rappresentare su di un piano la superficie della terra, si trovano nella letteratura greca.

48. - Un'altra faccia dell'operosità di TOLOMEO ci rimane da descrivere in questo Capitolo (2); ne serbarono memoria ERONE, nel suo commento ad EUCLIDE (3), e PROCLO (4), il quale al grande astronomo sembra attribuire un'opera, presumibilmente giovanile, sulla teoria delle parallele, avente per iscopo il togliere dagli *Elementi* quell'imperfezione che il D'ALEMBERT (1717-1783) non esitò a chiamare « l'écueuil et le scandale des Élèments de la géométrie ». PROCLO completa quella informazione trascrivendo, nelle sue chiose alla prop. 28ª degli *Elementi* (5), il ragionamento con cui TOLOMEO dimostrava che « due rette facenti con una terza angoli interni dalla stessa parte supplementari sono parallele »; tale ragionamento, e come nuova attestazione (cfr. p. 398) del desiderio degli antichi di migliorare gli *Elementi* di EUCLIDE, e come prima fiammella di quel gran fuoco che rivelò tanti lati notevoli dell'intima struttura dell'edificio

(1) *Ueber das Vorkommen eines ägyptischen Bruchnamens in Ptolemäus Geographie* (Berliner Monatsberichte, agosto 1849; oppure *Jacobi's Ges. Werke*, T. VII, 1891, p. 348).

(2) Di altri aspetti verrà discorso nel Cap. seguente.

(3) *Codex Leidensis*, 399, 1, *arabice et latine ididerunt* BESTHORN *et* HEIBERG I (Hauniae, 1897), p. 119. Cfr. anche *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii*, etc., ed. CURTZE (Lipsiae, 1899), p. 6.

(4) PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 11 e 153.

(5) Id., p. 151.

geometrico, merita di venir qui riferito almeno nella sostanza (1):

Siano (fig. 82) AB, CD due rette; una trasversale $EGFH$ le tagli in modo che la somma degli angoli BFG e FGD sia due retti. Dico che quelle due rette sono parallele, cioè non s'incontrano mai. Infatti, se ciò è possibile, BF e GD s'incontrino quando siano prolungate sino in K. Siccome la retta EF incontra la AB essa forma gli angoli AFE e BFE eguali in somma a due retti. Similmente FG incontrando CD forma gli angoli CGF, DGF eguali a due retti. Perciò i quattro angoli BFE, AFE, CGF, DGF sono eguali in totale a quattro retti; ma la somma di due fra essi BFG, DGF è due retti, dunque lo stesso avverrà della somma degli altri due AFG e CGF. Quindi se le

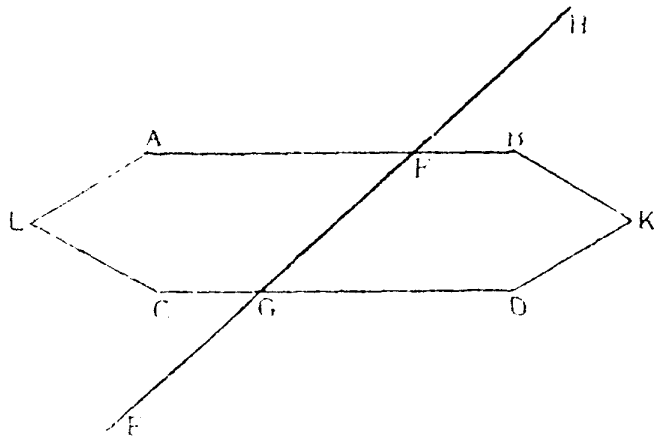


Fig. 82.

rette FB, GD prolungate si tagliano, per essere supplementari gli angoli interni, le rette FA, GC prolungate si taglieranno pure, dal momento che anche gli angoli AFG e CGF sono supplementari. Quindi le due rette AB, CD o si taglieranno da tutte due le parti della trasversale o non s'incontreranno mai. Nella prima ipotesi sia L la intersezione di AF e CG: allora le rette $LABK$ e $LCDK$ comprenderanno uno spazio, il che è impossibile. Per ciò non è possibile che s'incontrino due rette formanti con una terza angoli supplementari. Epperò, esse sono parallele.

Emerge da questo brano che probabilmente grave danno deriva alla scienza nostra dalla perdita del lavoro in cui

(1) Perchè mai venne escluso dall'ottima opera di STÄCKEL-ENGEL, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895)?

Tolomeo si sforzò contribuire al perfezionamento della geometria e si mostrò idoneo a coltivare anche le scienze di puro ragionamento: che tale egli fosse rispetto alle discipline fisico-matematiche è dimostrato da quanto precede e verrà confermato nel Capitolo seguente.

Teone d'Alessandria ed Ipazia.

49. - Fra le opere di commento, che annovera la letteratura matematica dei Greci, non eccelle quella (1) con cui Teone d'Alessandria (2) (p. 196) « perpetuamente sollecitato dai suoi ascoltatori (3) » si propose di « dare una spiegazione delle difficoltà che.... racchiude la *Composizione* di Tolomeo ». Che egli abbia così reso qualche segnalato servigio « tanto a quelli che professano e studiano l'astronomia, quanto alle persone che amano abbastanza la verità per affrontare fatiche e ricerche, pur di arrivare sino ad essa » è forse vero, sì minuziose e diffuse essendo le sue illustrazioni. Che poi egli abbia « aggiunte alcune dimostrazioni ignote ai commentatori precedenti » i quali « proponendosi di omettere le più chiare, hanno più spesso soppresse le più difficili » è un'asserzione che non siamo in grado nè di dimostrar vera, nè di confutare, non essendo noi in possesso dei lavori a cui allude Teone. Anzi, nemmeno il commento da lui redatto è giunto integralmente sino a noi, chè ne sopravissero soltanto i primi tre libri.

Siccome quanto ci rimane nel commento di Teone si riferisce ai libri dell'*Almagesto* in cui sono esposti i fondamenti posti dai Greci all'astronomia, così poteva sperarsi

(1) *Commentaire de Théon sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée, traduit pour la premiere fois du grec en français par M. l'abbé Halma* (Paris, 1821). Continueremo a citare questa edizione coll'abbreviatura (Teone ed. Halma).

(2) Che bisogna ben guardarsi dall'identificare con Teone Smirneo (v. p. 465), come fa il Montucla (*Hist. des Math.*, T. I, p. 292-292).

(3) Il virgolato è tolto dalla lettera-prefazione diretta da Teone a suo figlio Epifanio, personaggio del resto ignoto, forse perchè, come crede il Montucla (*Histoire des mathématiques*, T. I, p. 322) " la célébrité de la soeur (Ipazia) a eclipsé le frère „.

che, analogamente a quanto si è potuto fare per la geometria coll'aiuto del *Commento* di PROCLO, esso abilitasse a ricostruire la storia della Sferica e della Trigonometria. Ma una semplice lettura dell'opera di TEONE mostra fallace tale speranza; vero è che il commentatore è in citazioni meno parco del suo autore, ma è ancora troppo avaro, sia che lo si paragoni ai chiosatori coevi, di cui dovremo occuparci nel Libro veniente, sia che si tenga conto del bisogno pungente d'informazioni, in cui ci troviamo.

Le notizie più abbondanti e veramente utili che egli ci somministra concernono l'aritmetica pratica (logistica) dei Greci, e verranno da noi sfruttate nell'ultimo Libro di quest'opera. Sembra, anzi, che i calcoli aritmetici fossero il campo che TEONE si sentiva meglio in grado di dominare; valga a dimostrarlo la illustrazione, che egli porge del Cap. (III del I Libro) dell'*Almagesto*, avente come titolo e tesi « la terra è sensibilmente di forma sferica »; per dimostrar ciò era sufficiente paragonar il diametro della terra all'altezza della più alta montagna conosciuta; invece TEONE scrive (1):

La grandezza totale della sfera misurata sopra il suo circolo massimo è diciotto miriadi di stadi, come dice TOLOMEO nella sua *Geografia*. Ora ARCHIMEDE mediante la rettificazione, dimostra che la circonferenza del circolo è maggiore del triplo del diametro assieme alla settima parte dello stesso. Quindi il diametro della terra sarebbe 572727 stadi. Infatti la circonferenza di diciotto miriadi è maggiore del triplo e del settimo di questa quantità. Ma ERATOSTENE prova, mediante le diottre che servono a misurare da lontano, che la perpendicolare calata dal vertice delle montagne più alte sulla loro base è dieci E siccome ARCHIMEDE dimostrò eziandio che il rettangolo del diametro per la circonferenza rettificata è il quadruplo dell'area del circolo, così il prodotto del diametro per la quarta parte della circonferenza eguaglia l'area del circolo. Si trova in conseguenza che il quadrato del diametro sta all'area del circolo come 14 a 11. Infatti la circonferenza essendo più grande del triplo e di un settimo del diametro, supposto questo di sette parti, la circonferenza ne conterrà 22 ed il suo quarto $5\,{}^{1}/_{2}$. Quindi il quadrato del diametro ne conterrà 49 ed il cerchio $38\,{}^{1}/_{2}$. Raddoppiando questi numeri, in causa della frazione $^{1}/_{2}$, avremo come superficie del circolo 77 delle parti di cui 98 con-

(1) TEONE ed. HALMA, T. I, p. 62-64.

tiene il quadrato del diametro. Orbene il rapporto di questi numeri ridotto all'espressione più semplice è lo stesso di quello fra 11 e 14. Infatti, il loro massimo comune divisore è 7, che, dividendo 77, dà per quoziente 11, e, dividendo 98, dà per quoziente 14. Ma, come dimostreremo più innanzi, il cubo stando al cilindro di eguale altezza nel rapporto quadrato del diametro al circolo, quel cubo sta a quel cilindro nel rapporto di 14 a 11. Archimede, nel suo trattato della sfera e del cilindro, ha dimostrato che se un cilindro ha la stessa altezza ed ha per base un circolo massimo di essa, la sfera è due terzi del cilindro. Dunque se il cilindro è 11 la sfera sarà $7\ ^1/_3$. Essa sarà dunque $\frac{7}{11}$ e $\frac{1}{4}$ di una delle quattordicesime parti del cubo. E siccome dimostrammo che il diametro della terra è 57273, il quadrato del diametro è 3280196529, ed il cubo 187866695805417, la cui quattordicesima parte è 13419049700386. Questo numero preso sette volte dà 93933347902702. Aggiungo ad essa il terzo della quattordicesima parte che è 4473016566795. La somma è 98406364469497. Tale è la grandezza della terra. Ma la perpendicolare abbassata dalla più alta montagna è 10 stadi. Dunque se noi concepiamo che sulla terra, così prodigiosamente grande, si faccia un'elevazione di 10 stadi, vedremo bene che non sarà tolta alla sfera la forma sensibilmente sferica.

Al lettore non isfuggirà che Teone, non soltanto esegue qui dei calcoli in gran parte inutili, ma commette l'errore di paragonare fra di loro due grandezze eterogenee, come sono un volume ed un'altezza.

50. - Sopra soggetti prettamente matematici si aggirano il brano (1) del *Commento* di Teone destinato a chiarire un rapido cenno fatto da Tolomeo sulla teoria degli isoperimetri (2), e quello in cui, a proposito del teorema di Menelao, egli espone prolisse considerazioni intorno alla composizione dei rapporti (3); come vedremo parlando di Eutocio (L. IV, n. 21-34) è questo un tema che esercitava sui commentatori un fascino speciale! Teone giudica eziandio necessario di esporre (4) una dimostrazione *ad hoc* del teorema di Tolomeo per il caso in cui (fig. 75 a p. 533) la diagonale

(1) Teone ed. Halma, T. I, p. 33-49. Ivi è in sostanza riprodotto lo scritto di Zenodoro che noi conosciamo (p. 755).

(2) *Almagesto* ed. Halma, T. I, p. 10.

(3) Teone ed. Halma, T. I, p. 10.

(4) Id., p. 187.

BΔ sia bisettrice dell'angolo ABΓ; a rigore poteva dispensarsene perchè, eccettuato il caso in cui il quadrilatero considerato sia regolare (nella quale ipotesi il teorema di TOLOMEO è evidente), una almeno delle diagonali di un quadrilatero non biseca alcuno degli angoli di questo aventi per vertici gli estremi di essa. Di qualche interesse sono invece le osservazioni (1) che illustrano il *metodo di interpolazione* (v. p. 540) usato da TOLOMEO per rendere applicabili le sue tavole di corde agli archi che non sono multipli di 30′; TEONE espone molti particolari relativi ed esempi opportuni.

Ciò è forse tutto quanto di importante pel matematico puro si legge nella parte superstite del *Commento* di cui ci occupiamo.

L'autore — che già conosciamo come editore ed illustratore degli *Elementi* di EUCLIDE (pag. 196) ed il cui nome troveremo (n. 52 del presente Libro) collegato all'*Ottica* dello stesso autore — visse in Alessandria sotto il regno dell'imperatore TEODOSIO (379-395 dell'E. v.), cioè nella seconda metà del IV sec. dell'E. v.; ciò risulta dall'avere egli assistito, nel 365, ad una eclisse e avere proseguite le sue osservazioni astronomiche sino al 372. Inoltre egli fu padre di una donna tanto eminente che i contemporanei la ritennero degna di stare alla testa della Scuola platonica di Alessandria (2), la celebre e sventurata IPAZIA (3), il cui sangue

(1) TEONE ed. HALMA, T. I, p. 214.

(2) Le ragioni di tale lusinghiero giudizio sono ignote, perchè nulla si conosce dell'opera filosofica della celebre donna; vedi ZELLER, *Die Philosophie der Griechen*, III Tl., 2 Abth., IV Aufl., Leipzig, 1903, p. 801-2.

(3) Ὑπατία; meno frequente e attendibile è la lettura Ὑπάτεια; v.: R. HOCHE. *Hypathia die Tochter Theons*, Philologus, T. XV, 1860, p. 435-474: in quest'eccellente memoria si legge:

"Nell'ultimo periodo della lotta fra la Chiesa cristiana e la fede negli antichi Dei, ci si presenta il fenomeno di una donna, la cui eguale si cerca indarno in tutta la storia, che, uscita dal Museo, seppe raccogliere quasi tutta la scienza pagana, almeno nelle discipline mediche e filosofiche, e con la potenza del suo aspetto e della sua parola divenne o minacciò divenire così terribile pel Cristianesimo e pei suoi aderenti in Alessandria, che la Chiesa bellicosa scatenò contro di essa una morte ignominiosa".

macchiò le vie di Alessandria nel marzo del 415, e le cui opere matematiche — che SUIDA enumera imprecisamente (1) — ebbero una sorte non meno deplorevole di quella che toccò alla misera autrice.

Con TEONE ed IPAZIA, non soltanto si chiude la serie dei Greci che coltivarono l'astronomia, ma finisce anche quella di coloro che, a partire dalla morte di ALESSANDRO MAGNO, diedero alla città da questo fondata la meritata fama di eminente sede di studi scientifici; della « divina scuola di Alessandria » (secondo l'entusiastica espressione di SINESIO) si celebrano ora i funerali!

(1) Dall'imprecisione delle espressioni usate da SUIDA deriva che, mentre il NESSELMANN (*Die Algebra des Griechen*, Berlin, 1842, p. 248) afferma che le opere di IPAZIA sono un *Commento* ad APOLLONIO ed uno alle *Tavole astronomiche* di DIOFANTO, altri (cfr. CANTOR, *Vorlesungen*, 3. Aufl., T. I, 1907, p. 496) attribuisce ad essa delle chiose a DIOFANTO, una *Tavola astronomica* ed un *Commento ad Apollonio*. Nè va taciuto che le parole di SUIDA autorizzano a dubitare che il DIOFANTO ivi nominato sia il celebre aritmetico di cui tratteremo nel V Libro (v. la pref. dello SCHULZ, p. VII alla sua versione tedesca di DIOFANTO, stampata a Berlino nel 1822).

CAPITOLO IV.

Gli albori della Fisica matematica.[1]

L'Ottica di Euclide.

51. - I Greci, mentre tramandarono ai posteri un grandioso edificio geometrico che validamente resiste ai colpi del piccone demolitore di cui è armata la critica moderna, non ci lasciarono in eredità che degli informi frammenti di una fisica infantile, che invano chiederebbero un posto nella scienza attuale (2): come, infatti, si potrebbero dedurre (seguendo PLATONE) un organismo scientifico da teorie *a priori*, a cui non corrisponde la generalità dei fenomeni, oppure (prendendo a modello ARISTOTELE) una congerie di fatti non connessi fra di loro da un'attendibile spiegazione comune?

Alla sorte generale si sottrassero, per merito di ARCHIMEDE, una parte della statica (p. 284) e, come vedremo tra breve (v. n. 60: cfr. p. 291) l'idrostatica, ma vi soggiacque invece la teoria della luce: per persuadersene il lettore non

(1) Uno sguardo d'insieme sull'argomento trattato in questo Cap. si trova nell'articolo di A. E. HAAS *Die Aufänge der mathematischer Paysik* (*Festschrift M. Cantor anlässlich seines LXXX Geburtstages*, Leipzig, 1909).

(2) " . . . non possiamo citare alcuna dottrina fisica oggi ammessa, di cui esista un'anticipazione, analoga a quella che, del sistema Copernicano, troviamo in ARISTARCO . . . . (WEHWELL, *History of inductive Sciences*, T. I, London, 1837, p. 68).

ha di meglio che esaminare i passi relativi delle opere del « maestro di color che sanno » (1).

Tuttavia l'ottica contiene una parte importante la quale si fonda, in ultima analisi, sull'unico fatto dell'essere rettilinei i raggi luminosi nel vuoto; per la natura geometrica che essa possiede *doveva* interessare gli antichi Greci, e per essere indipendente da qualunque altra ipotesi sulle norme regolatrici dei fenomeni, *poteva* venire studiata almeno nei suoi fondamenti. Ed infatti la teoria fisico-matematica, che in questo secolo fu tanto efficacemente promossa da MALUS (1775-1812) e DUPIN (1784-1873), da HAMILTON (1805-1865) e KUMMER (1810-1893), trovò sotto il cielo dell'Ellade assidui cultori. Chi fosse il primo non sappiamo (2); le radici dell'ottica geometrica sono sconosciute, al pari di quelle di quasi tutti i rami della scienza; per essa, come per questi, non possiamo che segnalare i primi documenti scritti che vi si riferiscono.

Ora nella letteratura greca esistono due lavori sopra teoria della luce, dei quali taluno fece autore EUCLIDE; tale attribuzione venne contestata da altri, i quali non trovarono in essi le doti di chiarezze e rigore, che si considerano come caratteristiche dello stile del sommo Alessandrino, e vi incontrarono errori non lievi negli enunciati e nelle dimostrazioni. Fra coloro che opinarono illegittimo il fare EUCLIDE autore di quelle due opere sta il PEYRARD, il quale, in conseguenza, le escluse dalla sua celebre edizione delle opere del grande Alessandrino (v. p. 197). Oggi, invece, almeno riguardo a una di esse, si inclina generalmente verso l'avviso opposto, osservando che le imperfezioni di forma (molte delle quali, come vedremo nel n. seg., non van poste a carico di EUCLIDE) non bastano a far decretare indegna dell'autore degli *Elementi* un'esposizione matematica dei fenomeni di propagazione della luce, un primo tentativo di sottoporre a leggi determinate i movimenti di un ente, come è la luce, tanto differente da tutti gli altri altri conosciuti; nè va dimenticato che EUCLIDE è di assai poco posteriore ad

(1) Si trovano raccolti nell'opuscolo di E. WILDE, *Ueber die Optik der Griechen*, Berlin, 1832. p .5-8,

(2) Il WILDE, op. cit., p. 32, ricorda che IPPARCO attribuisce ad EUDOSSO un lavoro di ottica.

ARISTOTELE, nelle cui opere non s'incontrano, sull'argomento che ora ci interessa, se non ipotesi insostenibili e svolte assai imperfettamente. Per ciò non si reca offesa ad EUCLIDE considerando, sino a prova contraria, come opera sua l'*Ottica* che ne porta il nome.

52. - Essa venne pubblicata, per la prima volta, nel 1557 da GIOVANNI DE LA PÈNE (1528-1558) nell'originale ed in una traduzione latina (1): edizione e traduzione che passarono, senza subire quasi alterazione alcuna, nella collezione delle opere complete di EUCLIDE, pubblicata nel 1703 da D. GREGORY (2). Col testo ivi adottato concorda, almeno nella sostanza, la generalità dei manoscritti esistenti; ma, nel 1879, J. L. HEIBERG scoperse a Firenze (*Cod. Laurent.* XXVIII, 3) un'altra redazione, che ritrovò poi a Vienna (*Cod. Vindobonensis*, 103) ed è migliore della vulgata (3); le proposizioni, fatta eccezione per poche, sono le stesse ed espresse con le medesime parole, ma le dimostrazioni sono meno concise, più esatte, e presentano, nella forma, molta rassomiglianza con quelle degli *Elementi*: cade così uno degli argomenti più validi fra quelli addotti per negare ad EUCLIDE la paternità dell'*Ottica* e nasce la convinzione che, nei citati codici di Firenze e Vienna, si trovi la redazione originaria di essa. E tale convinzione acquista maggiore forza e determinatezza osservando che i mss. della vulgata contengono un esordio che non può essere di EUCLIDE, giacchè ivi se ne parla in terza persona; è una specie di prolusione, ove sono spiegati, mediante le idee di PLATONE, i fenomeni dell'ottica e della visione. E poichè il *Cod. Paris* 2468 l'attribuisce a TEONE, sembra ragionevole la conclusione (4) che questi fu, non soltanto editore degli *Elementi* (v. p. 196), ma anche autore della redazione più diffusa dell'*Ottica* di EUCLIDE.

---

(1) *Euclidis Optice et Catoptrica et Musica, graece et latine, interprete* J. PENA *nunquam antehac edita* (Parisiis, 1557).

(2) Sulla traduzione latina del DE LA PÈNE fu eseguita quella francese che leggesi in POUDRA, *Histoire de la perspective ancienne et moderne*. Paris, 1864, p. 5-15.

(3) Venne pubblicata per la prima volta dall'HEIBERG nelle sue *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*. Leipzig, 1882, p. 93-131.

(4) HEIBERG, op. cit., p. 139.

In base a tali considerazioni venne accolta nella migliore edizione di EUCLIDE da noi posseduta (1), oltre una *Euclidis Optica*, un'*Opticorum recensio Theonis*: la prima corrisponde ai codici di Firenze e Vienna succitati, la seconda è la vulgata (2); il contenuto di entrambe è circa il medesimo, onde nell'analisi che or ne imprendiamo è superfluo considerarle a parte: basti dichiarare che la indicazione dei cinquantotto teoremi è fatta da noi in base alla numerazione adottata nella surriferita *Euclidis Optica* (3).

53. - Da buon sistematico EUCLIDE comincia dall'enunciare le proposizioni indimostrate (Ὅροι) su cui si fonda; sono le seguenti:

I raggi che partono dall'occhio sono rettilinei. La figura formata dai raggi luminosi è un cono avente per vertice l'occhio e per base il contorno dell'oggetto guardato. Sono visibili soltanto gli oggetti a cui giungono raggi visuali, invisibili gli altri: sembrano maggiori gli oggetti visti sotto angoli più grandi, minori quelli che sono visti sotto angoli più piccoli, eguali quelli che sono visti sotto angoli eguali; sembrano più alti quelli che corrispondono a raggi più elevati, più bassi quelli che corrispondono a raggi inferiori, più a destra quelli che corrispondono a raggi a destra, ed a sinistra quelli che corrispondono a raggi a sinistra. Appaiono più distinte le cose viste sotto parecchi angoli.

Di queste proposizioni la più importante, quella che merita veramente il nome di fondamentale, è la prima: essa prova che EUCLIDE, come tutti i seguaci di PLATONE (4), ammetteva la visione accadere in causa di raggi uscenti dall'occhio, ipotesi notoriamente erronea, ma che conduce alle stesse conseguenze geometriche di quella veritiera, perchè l'una e l'altra rappresentano nella teoria della luce una parte secondaria: l'essenziale è che si ammetta e si applichi

(1) *Opera omnia*, Vol. VII, Lipsiae, 1895.

(2) V. ad es.: *La prospettiva di Euclide insieme alla prospettiva di Eliodoro, tradotta da* EGNATIO DANTI. Firenze, 1573.

(3) Secondo P. TANNERY (*Pour l'histoire de la Science hellène*, Paris, 1887, p. 277) questo lavoro di EUCLIDE avrebbe avuto come prototipo uno scritto, oggi perduto, di ANASSAGORA.

(4) Cfr. TH. H. MARTIN, *Études sur le Timée de Platon*, T. II, Paris, 1841, p. 157-163.

essere rettilinei i raggi visuali. Quali esperienze conducano a confermare quell'ipotesi è esposto nell'interessante proemio della *Opticorum recensio Theonis*; nel quale è pure illustrata un'altra ed assai più strana proposizione assiomatica adoperata da EUCLIDE, quella, cioè, che « i raggi visuali non si succedono con continuità ». Il movente ad ammettere tal principio è l'osservazione che noi non vediamo certi oggetti a noi vicini (così, talvolta cerchiamo indarno un oggetto piccolo caduto ai nostri piedi, tal altra non arriviamo a percepire nello stesso tempo tutte le lettere di un libro aperto davanti a noi), il che, secondo EUCLIDE, non si spiega che ammettendo esistere discontinuità nel cono formato dai raggi visuali. Nei fenomeni ora nominati EUCLIDE trovò anche argomenti a sostegno della supposizione da lui fatta, che le origini dei raggi visuali si trovassero nell'occhio, invece che negli oggetti illuminati. Da tale ipotesi inverosimile derivano alcune proposizioni, di evidente falsità, contenute nell'*Ottica* di cui ci occupiamo: in tali condizioni si trovano la I, che nega la possibilità di percepire nello stesso momento tutto un oggetto, e la 9ª, secondo cui un quadrato ha da lungi l'apparenza di un circolo (perchè i suoi angoli sembrano smussati).

54. - Prescindendo da queste proposizioni, che sono conseguenze logiche di premesse false, le altre che costituiscono l'*Ottica* di EUCLIDE sono giuste, tanto che vengono ancora considerate siccome ingredienti necessari di qualunque trattato di prospettiva, e venivano forse insegnate agli studenti di astronomia per premunirli contro i paradossi degli Epicurei, i quali sostenevano essere impossibile di provare che il sole è più grande di quanto ci appare (1). Ed invero la distinzione fra *grandezza apparente* e *grandezza reale* in un oggetto, che in tante occasioni è invocata (2), balza fuori dalle prop. 2ª, 4ª e 5ª, le quali insegnano come la prima vari al moversi dell'oggetto: anzi EUCLIDE sa anche (prop. 7ª) che le grandezze apparenti di un oggetto non sono proporzionali alle rispettive distanze di questo dall'oc-

(1) P. TANNERY, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*. Paris, 1893, p. 36.

(2) V. ad es. THEONE ed. HALMA, T. I, p. 21.

chio (1). La stessa distinzione guida (nella prop. 6ª) a spiegare perchè due rette parallele sembrino concorrenti. Infatti, nella pratica, due rette si giudicano parallele quando e solo quando appaiono equidistanti; onde, date due rette, per verificare se sono parallele, si conducono tanti segmenti fra loro paralleli aventi i loro estremi su di esse; ove essi risultino eguali, e soltanto allora, quelle due rette saranno parallele. Orbene, se queste effettivamente lo sono, quei segmenti hanno la stessa *grandezza effettiva*, ma hanno *grandezze apparenti* che decrescono colla distanza, epperò vengono da noi giudicati come formanti una serie indefinitamente decrescente. Donde scaturisce la proposizione fondamentale della prospettiva, quella cioè che dice « due rette parallele sembrano concorrenti ».

Nell'*Ottica* di EUCLIDE vanno ancora notati tre problemi interessanti la pratica e risoluti mediante la teoria della similitudine; sono: la determinazione d'un'altezza inaccessibile, della profondità di un pozzo e della lunghezza di una data retta; del primo anzi EUCLIDE insegna due soluzioni, una nell'ipotesi che il sole sia visibile sull'orizzonte, l'altra mediante uno specchio, applicando la legge fondamentale del fenomeno della riflessione della luce. In seguito, il nostro autore passa ad esaminare ciò che accade quando si contempli, non più una retta, ma un solido di forma conosciuta. Comincia dal caso in cui la visione si faccia con un solo occhio, per passare poi a quello in cui vengano adoperati entrambi. Supposto il solido di forma sferica, nel primo caso la parte vista è minore di un emisfero, sembra contornata da un circolo (prop. 23ª) e tanto minore di un emisfero quanto più l'occhio è vicino al solido (prop. 24ª), quantunque sembri accadere il contrario, perchè del cono visuale cresce l'apertura all'avvicinarsi dell'occhio. Nel secondo caso, invece, la parte vista è eguale,

(1) In linguaggio trigonometrico ciò si esprime dicendo che un angolo non è proporzionale al suo seno, e precisamente che se due angoli α, β sono tali che $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ si ha

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} > \frac{\alpha}{\beta}$$

cfr. (p. 484).

maggiore o minore di un emisfero, secondochè la distanza fra i due occhi è eguale, maggiore o minore del diametro della sfera (prop. 25ª-27ª). Ai due teoremi riferiti, concernenti la sfera vista con un solo occhio, ne corrispondono altri nel cilindro (prop. 28ª-29ª) e nel cono (prop. 30ª-31ª), i quali hanno analogia con quello che ARISTARCO (cfr. p. 488) dimostrò ed enunciò nei seguenti termini: « Se una sfera è illuminata da una sfera maggiore, la parte illuminata supera un emisfero » (1).

55. - Nella stessa opera è successivamente studiata la questione di determinare sotto quale aspetto si presenti un circolo quando venga guardato con un solo occhio, ed è dimostrato che esso conserva la forma circolare quando l'occhio si trovi sulla perpendicolare innalzata dal centro del circolo al suo piano, oppure ad una distanza dal centro eguale al raggio (prop. 34ª-35ª); PAPPO, il quale nel VI Libro della *Collezione* dimostrò diversamente queste proprietà, le ha completate, coll'investigare la forma apparente che ha il cerchio, quando l'occhio non occupa queste posizioni speciali. Ma di ciò parleremo a miglior tempo (L. IV, n. 11); qui invece va notato che EUCLIDE si occupa eziandio dell'aspetto che hanno le ruote di un carro (prop. 36ª), e stabilisce pel quadrato (analogamente farebbesi per qualsia altro poligono regolare) le posizioni che deve occupare l'occhio affinchè la forma apparente ne sia regolare. Dopo di che il nostro autore ritorna a paragonare le varie grandezze apparenti di uno stesso segmento rettilineo ed osserva che se, per una data posizione dell'occhio e per gli estremi del segmento, si fa passare una circonferenza, questa godrà due notevoli proprietà; cioè il detto segmento contemplato da tutti i punti di essa, avrà la stessa grandezza apparente, e tutte le sue corde eguali a tale segmento, guardate dall'occhio nella posizione data, avranno la medesima grandezza apparente (prop. 37ª e seg.).

(1) Prop. III dell'opuscolo analizzato nei nn. 19-20 del presente Libro: l'autore se ne servì per concludere che: " Nella luna il minimo circolo di separazione della luce dall'ombra si ha quando il vertice del cono circoscritto si trova nell'occhio dell'osservatore „ (Prop. IV) e che " Nella luna il circolo che separa la parte luminosa dall'oscura non differisce sensibilmente da un circolo massimo „ (Prop. V).

Si connette a tali considerazioni la ricerca (prop. 38ª) dei punti da cui un dato segmento è visto sotto angoli aventi un rapporto assegnato.

Qui ci arrestiamo, giacchè il fin qui detto è sufficiente a porgere un'idea adeguata dell'*Ottica* recante il nome di EUCLIDE e a dimostrare che, quantunque per la precisione del dettato e l'ordinamento della materia sia inferiore agli *Elementi*, pure non è così imperfetta da offuscare l'aureola di purissima gloria che circonda l'autore di questi, tanto più che, mentre EUCLIDE geometra ha notoriamente una coorte di precursori, alcuni dei quali valorosissimi (valga per tutti EUDOSSO da Cnido!), nulla abilita ad affermare che altrettanti ed altrettali ne abbia avuti nelle sue investigazioni intorno alla propagazione della luce ed i fenomeni conseguenti.

Il più antico lavoro di Catottrica.

56. - Quella parte dell'ottica geometrica che concerne la riflessione della luce chiamasi *catottrica*, mentre si dà oggi il nome di *diottrica* a quella che alla rifrazione si riferisce (1). Che ai Greci non siano rimaste ignorate le applicazioni pratiche di cui quella è suscettibile vien dimostrato dalla storia (qualunque ne sia del resto il grado di attendibilità) (2) dei mezzi di offesa e difesa adoperati da ARCHI-

(1) Questo significato della parola "diottrica" è di origine moderna (DESCARTES?): i Greci, invece, designavano sotto questo nome la teoria della *diottra* (v. più avanti, n. 65); anzi PLUTARCO (*Non posse suaviter vivi secundum Epicurum*, c. XI) attribuisce ad EUCLIDE una Διοπτρικά; inoltre, tema somigliante, aveva uno scritto di BITONE, ricordato in un trattato sulle macchine belliche, anteriore a quello di ERONE e diretto al re ATTALO (cfr. THEVENOT, *Mathematici Veteres*, p. 108), del quale è parola in un lavoro del geodeta bizantino ERONE il Giovane (v. TH. H. MARTIN, *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie*, Mem. pres. par divers Savants à l'Acad. des Inscript. et Belles-Lettres, T. IV, 1854, p. 258).

(2) Il WILDE (op. cit., p. 25-32) ha raccolte e discusse le notizie relative; cfr. anche i Cap. XXVIII-XXXI de *Lo specchio ustorio* (Bologna, 1632) di BONAVENTURA CAVALIERI e l'articolo del PEYRARD intitolato *Miroir ardent* posto al termine delle *Oeuvres d'Archimède traduites littéralement*. II ed., Paris, 1808.

MEDE durante l'assedio della sua patria (v. p. 282). Che poi essi abbiano anche investigate le leggi fondamentali di quel ramo della fisica è dimostrato da un opuscolo, il quale godette di notevole celebrità e, sotto il nome di EUCLIDE, ebbe varie edizioni (1); tuttavia esso, almeno nello stato in cui trovasi nei manoscritti esistenti, non merita di venire annoverato tra gli scritti autentici del grande Alessandrino. Invero esso ha tutto l'aspetto di una compilazione assai posteriore ad EUCLIDE, fatta forse da TEONE d'Alessandria (2), servendosi di lavori più antichi; questi appartenevano probabilmente ad ARCHIMEDE, dal momento che TEONE, nel suo *Commento all'Almagesto*, cita una *Catottrica* del famoso Siracusano (3), ed il notissimo retore e filosofo APULEJO di Madaura (n. circa nel 125 dell'E. v.), afferma essere dubbio se ARCHIMEDE sia più grande pei suoi lavori di geometria o per quelli di catottrica (4).

Benchè, la così detta *Catottrica di Euclide*, non possa ascriversi fra i lavori genuini di alcun matematico conosciuto, pure non merita di venir passata in silenzio nella rassegna che andiamo facendo delle produzioni fisico-matematiche dei Greci, se non altro per essere dessa la prima attestazione di uno studio razionale dei fenomeni provenienti dalla riflessione della luce, sopra specchi piani o sferici (5).

Fra i principi fondamentali applicati nell'opuscolo di cui parliamo ritroviamo naturalmente quelli, a noi già noti (v. p. 560), che affermano essere rettilinei i raggi luminosi ed esserne l'occhio l'origine. Va poi notata la forma originale

---

(1) Si trova, ad esempio, nelle edizioni di EUCLIDE dovute a HEIBERG e GREGORY: inoltre nell'opera del DANTI citata a p. 560, sotto il titolo *Gli specchi d'Euclde; cioè quella parte della Prospettiva, che dimostra i vari effetti degli specchi.* Nuovi studi di A. A. BJORNBÖ sopra alcuni mss. di tale opera trovansi compendiati nella nota di S. VOGL, *Ueber die (Pseudo-) Euklidische Schrift, De Speculis* (Festschrift M. CANTOR anlässlich seines LXXX Geburtstages, Leipzig, 1909).

(2) HEIBERG, *Euclidis opera omnia*, T. VIII, p. L.

(3) TEONE ed. HALMA, T. I, p. 27, ove dalle ricerche di ARCHIMEDE è dedotta una spiegazione del fatto che gli astri appaion più grandi all'alba che all'apogeo.

(4) *Apologia* (ed. JULIANUS FLORIDUS, Paris, 1688), p. 428.

(5) Riguardo a questa parte dell'ottica greca, vedasi TH. H. MARTIN, *Études sur le Timée de Platon*, T. II, Paris, 1841), p. 163-71.

sotto cui viene presentata la legge governatrice dei fenomeni della riflessione; invece di ammettere come postulato l'eguaglianza fra l'angolo d'incidenza e quello di riflessione, lo scrittore della *Catottrica* afferma che, nella riflessione sopra uno specchio piano, il rapporto fra le distanze dallo specchio dell'oggetto e dell'occhio dell'osservatore è eguale al rapporto delle lunghezze dei raggi incidenti e riflesso. Da tale proposizione si trae, con una semplice considerazione di triangoli simili, la eguaglianza dei due angoli suddetti, supposto che la riflessione avvenga sopra specchi piani o sferici (concavi o convessi); e quindi si deduce quale sia la natura dell'immagine di un oggetto conosciuto sopra uno specchio di assegnata struttura. Non riferiremo le proposizioni relative e nemmeno segnaleremo le inesattezze negli enunciati e gli errori nelle dimostrazioni, chè la nostra critica cadrebbe nel vuoto, non essendo noto il bersaglio contro cui dirigerla e d'altronde si tratta di teoria su cui la storia ha pronunciato un severo e definitivo giudizio. Soltanto, finendo, rileveremo l'ultima proposizione, la quale afferma la possibilità di incendiare un oggetto coll'aiuto di uno specchio esposto al sole; la rileviamo perchè rappresenta il punto di contatto tra le considerazioni teoriche, contenute nella *Catottrica* del Pseudo-EUCLIDE ed alcuni celebri apparati guerreschi, attribuiti ad ARCHIMEDE.

Eliodoro o Damiano? Tolomeo od Erone?

57. - Parecchie delle proposizioni, che si leggono nell'*Ottica* di EUCLIDE, si ritrovano esposte in parte ed in parte confutate in un'operetta, che si legge in calce alla *Prospettiva* di EUCLIDE edita da I. DANTI (1537-1586) (cfr. p. 560), e che porta il titolo: Ἡλιοδώρου Λαρισσαίου (1) Κεφάλαια τῶν Ὀπτικῶν. È l'ultimo documento conosciuto su l'ottica, o per dir meglio, la prospettiva dei Greci; l'autore di esso non è noto con precisione: secondo il DANTI sarebbe ELIODORO da Larissa, mentre, secondo il MARTIN (2), sarebbe DAMIANO di-

(1) Il ms. 165 della Biblioteca di Monaco porta invece Κρισσαίου (v. TH. H. MARTIN, *Recherches sur la vie*, etc., p. 198, nota).

(2) *Recherches* citate, p. 54-55; ivi, p. 413-420, si trova una buona restituzione dell'opera in discorso, accompagnata da una tra-

scepolo di ELIODORO; egli, però, è posteriore, non soltanto ad EUCLIDE, non soltanto all'imperatore TIBERIO (42 a. C. 37 E. v.) — del quale ricorda la facoltà di vedere di notte come i gatti —, ma anche ad ERONE di Alessandria (vedi Cap. seg.), di cui rammenta la *Catottrica*, e a CLAUDIO TOLOMEO, di cui cita l'*Ottica*; onde si ritiene appartenga al IV sec. dell'E. v. (1).

Fra ciò che si legge in questi frammenti spicca un teorema di minimo, cioè quello affermante che la luce percorre, durante la riflessione, il più breve possibile cammino. Esso viene attribuito ad ERONE; infatti si legge nella precitata edizione del DANTI: « Essendo che ha dimostrato il Meccanico HERONE, nel libro degli specchi, che quelle rettilinee, che ad angoli eguali si rompono, sono minori di tutte le altre, che dalle medesime simili parti vengono, e si rompono alle parti medesime ad angoli ineguali ». Per avere serbato notizia di tale importante osservazione e per la estimazione di cui fu fatto segno nei secoli passati (2), lo scritterello di ELIODORO e DAMIANO meritava ben la menzione che qui ne facemmo!

58. - Del resto, questo nuovo punto di vista per considerare il fenomeno della riflessione si ritrova in un altro lavoretto, in quello cioè intitolato *Ptolemaeus de Speculis*, e che fa parte di una collezione di opere sulla Sferica pubblicata da G. NUCERELLO a Venezia il 19 gennaio 1518 (e contraffatta nello stesso luogo il 30 giugno del medesimo anno) sotto il titolo *Sphera mundi noviter recognita* (3). È desso una traduzione dal greco (4), compiuta l'ultimo giorno

---

duzione francese. V. anche R. SCHÖNE, *Damianos Schrift über Optik, mit Auszügen aus Geminos, griechisch und deutsch* (Berlin, 1877).

(1) V. l'articolo *Damianos* di F. HULTSCH in PAULY-WISSOWA, *Real-Encyklopädie der klass. Alterthumswiss.*

(2) È dimostrata dalle numerose edizioni e traduzioni che ebbe e che il MARTIN ha diligentemente registrate (op. cit., p. 54, nota).

(3) Cfr. B. BONCOMPAGNI, *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino, traduttore del secolo duodecimo*. Roma, 1851.

(4) Lo si deduce dal grande numero di ellenismi e di parole greche latinizzate, nonchè dal fatto che l'ordine in cui si seguono le lettere adoperate per indicare i vari punti delle figure è lo stesso che occupano le lettere corrispondenti nell'alfabeto greco.

dell'anno 1269, probabilmente da GUGLIELMO DI MOERBECKE (1). Ora, sin dal principio del secolo decorso G. B. VENTURI (1746-1822), ne' suoi pregiati e pregevolissimi *Commentari sopra la storia e la teoria dell'ottica* (Bologna, 1814) avverti che il paragone del libro *de Speculis* coll'*Ottica* tolemaica (v. p. seg.) prova essere falsa l'attribuzione di quello al celebre astronomo e fa nascere la convinzione che esso sia l'estratto di un'opera, in origine anonima, e poi arbitrariamente attribuita a TOLOMEO. Inoltre considerando 1.° che nella prefazione di quel libro è citato un lavoro sulla *Diottra*, 2.° che è noto (v. n. 65) uno scritto di ERONE ALESSANDRINO sopra questo tema, 3.° che nel testo si legge quel teorema di minimo che è attribuito ad ERONE (v. p. prec.) e non esiste altrove, 4.° che lo scopo pratico del libro *de Speculis* fa apparire questo di natura analoga a quella di molte fra le opere di ERONE, il VENTURI si credette autorizzato a concludere (op. cit., p. 52) che l'opera *Sugli specchi* attribuita a TOLOMEO e spesso (benchè vagamente) ricordata da scrittori dei secoli XVI e XVII, appartiene, invece, nella sostanza ad ERONE d'Alessandria. Tale attribuzione, che il MARTIN suffragò di altre robuste prove (2), ci sembra raggiungere un grado di probabilità che confina colla certezza (3); e poichè le basi di tale conclusione stanno appunto nel proemio di quel lavoro, riteniamo non inutile, nè inopportuno, il riferirne qui la parte essenziale:

Prima di noi vari autori scrissero intorno all'Ottica in modo soddisfacente, in ispecie ARISTOTELE. Noi stessi trattammo della Diottrica, con l'estensione che giudicammo conveniente. Ma ci parve che anche la Catottrica fosse un tema degno di studi ed offrente speculazioni mirabili. È coll'aiuto di essa che si apprende a formare specchi ove la destra corrisponde alla destra e la sinistra alla sinistra, in modo che la somiglianza risulti perfetta e le immagini s'accordano con la realtà; inoltre si è in grado di costruire specchi dove ci si vede per di dietro, rovesciati, colla testa in basso, con tre occhi e due nasi oppure col viso decomposto come da profondo dolore. La

(1) MARTIN, *Recherches* citate, p. 63.

(2) Id., p. 56.

(3) Tale opinione è condivisa dai più recenti editori di ERONE: v. infatti *Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia*, vol. II, fasc. I, Lipsiae, 1901, p. 301-365.

Catottrica non ha soltanto valore teorico, ma possiede pratiche applicazioni: infatti, chi non troverà utile di potere osservare gli abitanti di una casa vicina, di vedere quanti siano e che cosa facciano?

La *Catottrica* del Pseudo-Tolomeo poggia, al pari di tutte le opere congeneri, sulla teoria platoniana della visione, e comprende dieci teoremi e nove problemi (risolti questi assai brevemente); fra i primi s'incontrano alcune proposizioni della *Catottrica* pseudo-euclidea (1), altre nuove, le più importanti delle quali portano i numeri 4 e 5 e sono appunto quelle riferite da Eliodoro o dal suo discepolo Damiano: le rimanenti non sono di tal valore da farci ulteriormente indugiare sopra questo presunto primo lavoro di uno scrittore, la cui opera scientifica darà argomento a tutto il Capitolo veniente.

Tolomeo e la rifrazione della luce.

59. - I lavori sinora discorsi in questo Capitolo trattano con maggiore o minore diffusione ed esattezza di questioni concernenti la propagazione e la riflessione della luce, ma nessuno si riferisce alla rifrazione; forse che questo importante fenomeno rimase sconosciuto agli antichi? Chiunque ricordi come l'*Almagesto* faccia menzione della rifrazione astronomica (2) risponderà subito negativamente a tale domanda. Una conferma della giustezza di questa risposta si attinge da un'altra opera di Tolomeo (3) che ci pervenne pel tramite degli Arabi e che è citata (per non allegare che autorità di antica data) da Simplicio ed Eliodoro di Larissa (v. p. 566). Molti storici della fisica e dell'astronomia ne fecero menzione e parecchi eruditi (ad es. il Venturi

(1) Le proposizioni 7, 8, 9, 10 del Pseudo-Tolomeo corrispondono alle 4, 24, 5 del Pseudo-Euclide.

(2) V. Libro II, Cap. III (ed. Halma, T. I, p. 11 e Libro VIII, Cap. VI (id., T. II, p. 108).

(3) Cfr. l'articolo di Th. H. Martin intitolato: *Ptolémée, auteur de l'Optique traduite en latin par Ammiratus Eugenius Siculus sur une traduction arabe incomplète, est-il le même que Claude Ptolémée, auteur de l'Almageste?* (Bull. di Bibl. e Storia, ecc., T. IV, 1871, p. 466-467).

ed il CAUSSIN) si proposero di pubblicarne la versione dall'arabo in latino, che di essa fece nel sec. XII EUGENIO AMMIRATO (1); ma, chi per un motivo, chi per un altro, non tradusse in atto il proprio divisamento; perciò il 23 aprile 1871 G. GOVI (1826-1889), propose all'Accademia delle Scienze di Torino (2) di far trascrivere il migliore (3) dei quattordici codici tuttora esistenti della versione suddetta (4) e di affidarne a lui la pubblicazione; la proposta venne accettata ed il lavoro compiuto tredici anni dopo (5).

L'*Ottica* di TOLOMEO non ci pervenne nella sua integrità, giacchè, oltre a piccole e non insignificanti lacune che in essa si notano, ne manca il I Libro e la fine del V. La perdita di quello non è molto deplorevole, perchè dal riassunto, che se ne legge nell'esordio al libro seguente, si deduce che esso non conteneva se non cose che trovansi negli altri scritti ottici a noi noti dei Greci; ma il danno che proviene dalla scomparsa delle altre parti è di malagevole misurazione.

Se di TOLOMEO non ci rimanesse altro scritto che l'*Ottica*, lo si dovrebbe giudicare geometra assai mediocre, tanti essendo gli errori che ivi si riscontrano e che non si possono ragionevolmente addebitare agli amanuensi ed ai traduttori. Inoltre le soluzioni di molte questioni sono viziate dall'essere fondate sul seguente principio evidentemente falso (benchè universalmente ammesso dagli antichi): « l'immagine di un punto sopra uno specchio sta all'incontro di due linee, di cui una va dal punto luminoso al centro di curvatura

---

(1) M. AMARI, *Storia dei Mussulmani di Sicilia*, T. III, Parte 2ª, Firenze, 1872, p. 657-660, lo crede contemporaneo a Re RUGGIERO, morto nel 1154.

(2) *Sulla opportunità di pubblicare una traduzione inedita dell'Ottica di Tolomeo* (Atti della R. Acc. di Torino, T. VI, p. 401-5).

(3) È il Codice Ambrosiano, T. 100.

(4) Questi codici sono enumerati nell'ed. del GOVI qui appresso citata. V. anche; B. BONCOMPAGNI, *Intorno ad una traduzione latina dell'Ottica di Tolomeo* Boll. di Bibliogr. e Storia, T. IV, 1871, p. 470-492 e T. VI, 1873, p. 159-170), e NARDUCCI, *Sur l'optique de Claude Ptolémée* (Bibl. mathematica, 1888, p. 92-102).

(5) G. GOVI, *L'Ottica di Claudio Tolomeo, di Eugenio Ammiraglio di Sicilia — Scrittore del Secolo XII, ridotta in latino sovra la traduzione araba di un testo greco imperfetto, ora per la prima volta pubblicata,* Torino, 1884.

dello specchio e l'altra dall'occhio al punto dello specchio, ove avviene la riflessione »; TOLOMEO se ne serve in particolare per risolvere diversi casi speciali della seguente questione (che in generale dipende da un'equazione biquadratica ed è oggi chiamata *problema di Alhazen*) (1): « Essendo dati una superficie sferica riflettente, la posizione di un punto luminoso e quella di un punto per cui deve passare il raggio riflesso, determinare il punto dello specchio ove accadrà la riflessione ».

Ma se TOLOMEO nell'*Ottica* non brilla come matematico, fa per compenso eccellente figura come fisico, giacchè le esperienze che egli descrive per verificare la legge della riflessione e scoprire quella che governa la rifrazione (nel passaggio dall'aria nell'acqua o nel vetro, oppure dall'acqua nel vetro) lasciano poco a desiderare.

È nel V Libro della sua *Ottica* che TOLOMEO tratta *ex-profcsso* della rifrazione (2), fenomeno di cui aveva fatto già cenno nei Libri II e III (3); ivi presenta al lettore tavole dei valori degli angoli di rifrazione (r), che corrispondono a dati valori degli angoli d'incidenza (i), calcolate supponendo che fra i e r sussista un'equazione del seguente tipo

$$r = ai - bi^2,$$

a e b essendo costanti. Questa relazione non è quella di SNELLIO-DESCARTES, nè può surrogarla con sufficiente approssimazione; ma doveva venire qui ricordata come primo tentativo per risolvere una questione fisica, interessante tanto la teoria quanto la pratica, e come punto saliente di un'opera del sommo astronomo, sopra la quale nulla ci trattiene ulteriormente e su cui forse i matematici puri ci rimprovereranno di esserci troppo a lungo indugiati.

L'Idrostatica in Archimede.

60. - In un campo d'investigazioni esatte, conclusive ed importanti ci riconduce l'esame dell'opera di ARCHIMEDE

(1) V. *Opticae Thesaurus Alhazeni Arabis libri septem nunc primum edidit*, Basileae, MDLXXII.

(2) *Ottica*, ed. GOVI, p. 142 e seg.

(3) Id., p. 77.

De iis, quae in humido vehuntur (1), nella quale si rinvengono posti, svolti ed applicati quei principi su cui si erige l'odierna meccanica dei fluidi (2). Due sole ipotesi servono di fondamento all'edificio archimedeo: una afferma che in un fluido la parte meno compressa è cacciata da quella che è più compressa e che ogni parte è premuta da tutte le parti sovrastanti; l'altra dice che la spinta verso l'alto ricevuta da un solido immerso in un liquido è una forza avente come linea di azione la verticale passante pel centro di gravità del solido. Per servirsene ARCHIMEDE premette il teorema: « se una superficie è segata da tutti i piani passanti per un punto fisso secondo circoli aventi per centro tale punto, essa è una sfera avente per centro lo stesso punto » e ne deduce che « la superficie di livello di un liquido stagnante appartiene ad una sfera concentrica alla terra ». Stabilite poi (prop. 3, 4 e 5) le condizioni di equilibrio di un solido immerso in un liquido, ARCHIMEDE dimostra (prop. 6) che « se si immerge un solido in un liquido più pesante, esso tenderà ad uscirne con uno slancio proporzionale alla differenza tra le densità dei due corpi », ed arriva finalmente a quella proposizione che porta oggi il nome di « principio di ARCHIMEDE » (prop. 7) (3). Ne deduce tosto che un segmento sferico abbandonato in un fluido si disporrà in equilibrio colla base orizzontale, tanto se questa è sommersa quanto se emerge dal liquido (prop. 8 e 9).

Tale è per sommi capi il contenuto del I Libro del lavoro idrostatico di ARCHIMEDE.

---

(1) Per qual via essa sia giunta sino a noi venne narrato a p. 297. Una traduzione commentata di essa venne or fa un ventennio pubblicata da A. LEGRAND, *Le traité des corps flottans d'Archiméde* (Journal de Physique, 2e Série, T. X, 1891).

(2) " Il est étrange „ osserva a ragione C. THUROT (*Recherches sur le principe d'Archimède*; Revue archéologique, T. XIX, 1869, p. 47) " que Pappus (fin du IV siècle de l'ère chrétienne) ait cité „ (ed. HULTSCH, p. 1026) " le *traité des corps flottans* comme un ouvrage de mécanique appliquée et amusante avec ceux de Héron: évidemment il n'en connaissai que le titre „.

(3) Servendosi di questa proposizione si può ricostruire, in modo assai verosimile, il procedimento con cui ARCHIMEDE ha risolto il celebre problema della corona, di cui ci occuperemo nel Libro V (n. 60): v. T. L. HEATH, *The Works of Archimedes edited in modern notations*. Cambridge, 1897, p. 259-260.

Temi analoghi, ma più elevati, sono trattati nelle dieci proposizioni che costituiscono il II. Nel quale (dopo di avere dimostrato che « se un solido è parzialmente immerso in un fluido più pesante, il rapporto della densità di quello alla densità di questo è eguale al rapporto del peso che ha la parte immersa al peso di tutto il solido ») vengono studiate le condizioni di equilibrio di un segmento retto di paraboloide ellittico di rotazione, immerso in un fluido. Ricordiamo (v. nota (2) a p. 292) che ARCHIMEDE suppone che il lettore conosca la posizione del centro di gravità di quel segmento, il che induce a credere che egli se ne fosse anteriormente occupato, in qualche opera oggi perduta. Le conclusioni a cui egli perviene si possono riassumere così: « Detto h l'asse del segmento paraboloidico e p il parametro della parabola generatrice, il solido si disporrà sempre colla base orizzontale, se $h \leqq \frac{3}{2} p$: ma lo stesso accadrà nella ipotesi contraria, se di più si supponga che il rapporto fra la densità del solido e quella del fluido sia $> \left(1 - \frac{3p}{2h}\right)^2$, ovvero che sia $\frac{3}{2} p < h < \frac{15}{8} p$. Se, invece, il rapporto di queste densità è $< \left(1 - \frac{3p}{2h}\right)^2$, la conoide considerata si disporrà colla base inclinata sulla superficie del liquido, tanto se la base è esterna al liquido, quanto se immersa ». In altri casi la conoide subisce un rovesciamento.

Queste conclusioni sono di così alto interesse scientifico che, col loro valore, mostrano come i due libri dedicati da ARCHIMEDE alla meccanica dei fluidi, benchè giunti a noi deturpati e mutili, siano meritevoli di stare accanto a quelli *Su la sfera ed il cilindro* e *Su le conoidi e le sferoidi* (1); d'altronde, ad assicurar loro perenne rinomanza basterebbero le seguenti parole, in cui LAGRANGE compendiò il proprio giudizio sul secondo: « Ce livre est un des plus beaux

(1) La ricerca del come e perchè ARCHIMEDE abbia potuto giungere a tante belle verità, pur ignorando il paradosso idrostatico, venne compiuta da P. DUHEM nell'articolo *Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique?* (Bibl. math., III Ser., T. I, 1900).

monuments du gènie d'Archimède, et renferme une théorie de la stabilitè des corps flottans, à laquelle les modernes ont peu ajoutè » (1).

La Statica in Erone.

61. - Negli interessanti suoi studi di idrostatica ARCHIMEDE non ebbe nell'antichità alcun discepolo o continuatore; dopo di lui quella scienza venne abbandonata sino ai tempi di GALILEO (1564-1642) e STEVINO (1548-1620). Invece, nelle sue indagini, parte conservate e parte perdute, sulla meccanica dei solidi, egli trovò un imitatore in uno scienziato, di cui ci occuperemo colla larghezza che merita nel prossimo venturo Capitolo, ma della cui operosità ora dobbiamo descrivere una faccia: parliamo di ERONE di Alessandria (2).

ERONE come meccanico (3) è indiscutibilmente discepolo di ARISTOTELE, benchè egli nol dichiari, e lo è pure di ARCHIMEDE, che nomina a più riprese (4): di tali citazioni, anzi, potrebbe trarre gran profitto chi volesse rendere meno incerti i contorni della figura del grande Siracusano, considerato come principale autore della statica razionale dei Greci. Se egli abbia attinto anche ad EUCLIDE — di cui, come sappiamo (v. p. 285), esiste un frammento sulla teoria della leva che venne fatto conoscere più di mezzo secolo fa (5) e

(1) *Mécanique analytique*, Nouv. éd., T. I, Paris, 1811, p. 176.

(2) Per attestazione di PAPPO, ERONE avrebbe scritte due opere di meccanica, il Βαρουλκός e la Μηχανικά; della prima non si conosce più che qualche pagina, conservata dal succitato commentatore.

(3) Vedi: CARRA DE VAUX, *Les mécaniques où l'Élévateur de Héron d'Alexandrie publiés pour la première fois sur la version arabe de Qostâ ibn Lûqâ et traduit en français. Extrait du "Journal Asiatique"* (Paris, 1894) e *Herons von Alexandria Mechanik und Katoptrik herausgegeben und übersetzt von* L. NIX und W. SCHMIDT (*Heronis Opera omnia*, Vol. II, fasc. I, Leipzig, 1901), ove sono raccolti anche i pochi frammenti superstiti dell'originale greco. Cfr. anche l'ultimo Libro della *Collezione* di PAPPO.

(4) CARRA LE VAUX, p. 45, 73, 74, 77, 88, 107, 152.

(5) F. WOEPCKE, *Notice sur des traductions arabes de deux ouvrage d'Euclide* (Journ. Asiatique, V Serie, T. XVIII, 1851).

che solo di recente fu studiato con diligenza ed acume (1) — non possiam dire, chè il nome di EUCLIDE non s'incontra nella *Meccanica* di ERONE, nè è lecito asserire che egli appartenesse al gruppo di coloro che questi raccoglie sotto il nome generico di « predecessori » (2).

Benchè la *Meccanica* di ERONE abbia un indirizzo indiscutibilmente pratico, conformemente alle idee di chi proclamava essere « la esperienza la migliore educatrice » (3), pure essa prova come i Greci fossero riusciti a fornire di solido scheletro matematico la teoria dei moti e delle forze, intento che avevano raggiunto per l'astronomia, ma che invano avevano tentato di conseguire per altri rami della fisica. In conseguenza, percorrendo i tre libri di ERONE, si trovano da spigolare alcuni interessanti nuovi dati di fatto, relativi all'antica geometria. Ed infatti, già nel I Libro, il quale contiene una « prima introduzione alle arti meccaniche » (4), c'imbattiamo in considerazioni geometriche illustranti la teoria degli ingranaggi, teoria che viene ivi applicata al problema « di sollevare un peso conosciuto con una forza data ». Ivi si trovano poi alcune pagine di alto interesse, nelle quali viene insegnato un modo per « costruire una figura piana o solida, la quale sia simile ad un'altra ed il di cui contenuto abbia un rapporto assegnato col contenuto di questa »: se si tratta di figure piane, il problema si esaurisce colla costruzione di una media proporzionale, ma, per figure solide, esso esige la inserzione di due medie proporzionali.

Come dunque troveremo due medie proporzionali consecutive tra due rette date? chiede ERONE (5), e prosegue (6): Fa-

(1) G. VAILATI. *Di una dimostrazione del principio della leva attribuita ad Archimede* (Boll. di Bibl. e Storia matematica posto in appendice al Vol. XXXV, 1897, del *Giornale di matematiche*; oppure *Scritti di G. Vailati*, Firenze, 1911, p. 115-7). V. anche la prima parte dell'articolo di M. CURTZE, *Zwei Beiträge zur Geschichte der Physik im Mittelalter* (Bibl. mathem., 3ª Serie, T. I, 1900, p. 51-54).

(2) CARRA DE VAUX, p. 163.

(3) Id., p. 69.

(4) Id., p. 92.

(5) Id., p. 52. Opera II, 1, p. 21.

(6) Cfr. quanto segue colla soluzione suggerita da APOLLONIO pel problema di Delo (v. p. 100).

remo questa dimostrazione con un metodo che non esigerà la considerazione dei solidi e ci condurrà al modo di operare il più semplice. Siano (fig. 83) AB , BΓ le due rette date, una perpendicolare all'altra; sono le due linee fra cui noi vogliamo trovare due medie proporzionali. Completiamo il rettangolo ABΓΔ, conducendo le due rette ΔΓ , ΔA : uniamo B a Δ, e Γ a A ; poi facciamo passare pel punto B una riga che tagli le due rette ΔΓ , ΔZ e che noi, mediante rotazione, disporremo in una posizione tale che le rette uscenti dal punto H e terminate ai

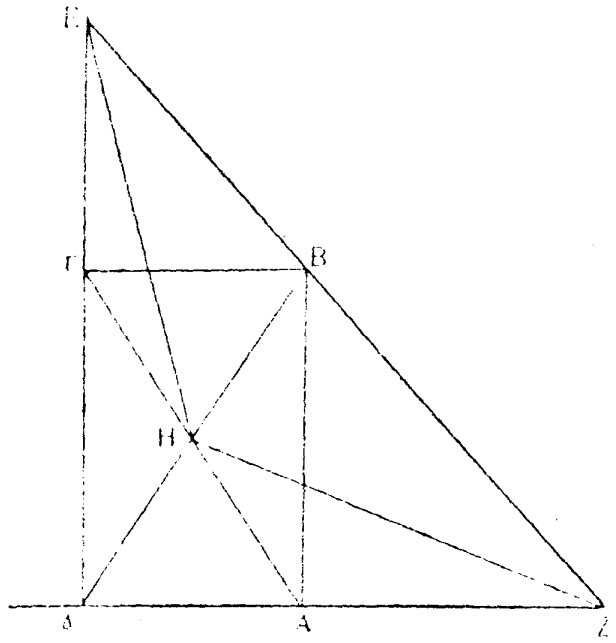


Fig. 83.

punti d'intersezione della riga con le rette ΓE , AZ siano fra loro eguali (1). Dico che le rette AZ , ΓE sono medie proporzionali tra le due rette AB , BΓ : AB sarà il primo termine dei rapporti, AZ il secondo, ΓE il terzo e ΓB il quarto. Infatti il quadrilatero ABΓΔ ha i lati a due a due paralleli e gli angoli retti. Dunque le quattro rette ΔH , HA , HB , HΓ sono eguali. La linea

(1) Questo problema d'inserzione, che Erone scioglie per tentativi, si può risolvere segando un circolo con una iperbola equilatera (v. anche T. L. Heath, *Apollonius of Perga Treatise on Conic Sections edited in modern notation,* Cambridge, 1896, p. CXXVI): un punto di contatto fra il metodo di Erone e quello di Platone (v. p. 121) si trova segnalato nella mia nota *Sopra una relazione che passa fra due antiche soluzioni del problema di Delo* (Bibl. mathem., III Ser., T. XI, 1911).

HΔ essendo eguale alla linea HA e la linea HZ essendo già stata condotta, abbiamo

$$\Delta Z \times ZA + \overline{AH}^2 = \overline{HZ}^2,$$

e similmente

$$\Delta E \times E\Gamma + \overline{\Gamma H}^2 = \overline{HE}^2.$$

Ora le due linee EH, HZ sono eguali; onde risulta

$$\Delta Z \times ZA + \overline{AH}^2 = \Delta E \times E\Gamma + \overline{\Gamma H}^2.$$

Ma $\overline{\Gamma H}^2 = \overline{AH}^2$, onde resta

$$\Delta Z \times ZA = \Delta E \times E\Gamma$$

ossia

$$\frac{E\Delta}{ZA} = \frac{\Delta Z}{\Gamma E}.$$

D'altronde si ha

$$\frac{E\Delta}{\Delta Z} = \frac{AB}{AZ} = \frac{E\Gamma}{\Gamma B};$$

dunque i rapporti $\frac{AZ}{\Gamma E}$ e $\frac{\Gamma E}{B\Gamma}$ sono eguali al rapporto $\frac{AB}{\Gamma B}$.

Abbiamo così costruite due medie proporzionali consecutive tra AB e BΓ, cioè le due AZ e ΓE. È quanto volevamo dimostrare.

In seguito ERONE introduce (1) il concetto di figure « simili e similmente poste », che egli distingue da quelle soltanto « simili » e che insegna a descrivere meccanicamente con appositi strumenti, dei quali debbono prender nota coloro che intendono redigere un catalogo completo degli apparati matematici.

62. - La descrizione e la spiegazione del metodo di agire delle cinque macchine semplici (ἑ δυνάμεις) (2) — che sono: il verricello (ἄξων ἐν περιτονίῳ), la leva (μοχλός), le taglie (πολύσπαστον), il cuneo (σφῆν) e la vite (κοχλίας) —, ecco lo scopo precipuo del II dei libri meccanici di ERONE (3); che

(1) Id., p. 54.

(2) Una congettura sulla via che guidò a concepirle leggesi in MONTUCLA. *Hist. des Math.*, T. I (2ª ed.), p. 98.

(3) Cfr. G. VAILATI, *Il principio dei lavori virtuali da Aristotele a Erone d'Alessandria* (Atti della R. Acc. di Torino, T. XXXII, 1897, oppure *Scritti di G. Vailati*, p. 91-106).

ivi l'autore abbia spiegata scarsa originalità viene da lui stesso affermato nell'esordio del libro successivo (1); esso però non è agli occhi nostri destituito di valore, perchè ci insegna la definizione ed una proprietà dell'elica cilindrica, che ERONE desunse probabilmente dall'opera sull'argomento di APOLLONIO PERGEO (v. p. 398) oggi perduta. Il passo relativo ci sembra anzi meritevole di venir qui riferito, essendo l'unico che l'antichità ci abbia trasmesso relativo a quella notevole curva (2):

Noi definiamo nel seguente modo la natura della linea tracciata sulla vite: supponiamo che una delle generatrici di una figura cilindrica si muova sulla superficie del cilindro e che un punto si muova sopra questa generatrice a partire dal suo estremo; questo punto percorre tutta la generatrice nel tempo che questa impiega a fare il giro della superficie cilindrica sino a ritornare alla posizione d'onde è partita. La curva descritta da quel punto sulla superficie del cilindro è un giro di vite: è quello che chiamasi vite. Volendo tracciare questa linea sulla superficie del cilindro, opereremo in questo modo: noi diamo in un piano due rette fra loro perpendicolari, eguali una alla generatrice del cilindro e l'altra alla periferia della sua base, ed uniamo le estremità di queste linee, che comprendono un angolo retto, mediante una retta che sottende l'angolo retto. Applicando la retta eguale alla generatrice di un cilindro sopra una generatrice e la linea eguale alla circonferenza base del cilindro su questa circonferenza, la linea che sottende l'angolo retto si avvolge allora sulla superficie del cilindro e vi descrive un giro di vite.

Noti qui il lettore il concetto di sviluppo di una superficie cilindrica sopra di un piano.

Mentre, nell'esporre la teoria della vite, ERONE si è probabilmente appoggiato alle indagini di APOLLONIO PERGEO, per redigere la teoria dei centri di gravità ricorse, per sua esplicita dichiarazione, ad ARCHIMEDE (3). Quale fondamento di tale teoria egli pone la determinazione del centro di gravità di un triangolo (4), punto che ERONE determina come

(1) CARRA DE VAUX, p. 163.

(2) Id., p. 101.

(3) Cfr. G. VAILATI, *Del concetto di centro di gravità nella statica di Archimede* (Atti della R. Acc. di Torino, T. XXXII, 1897, oppure *Scritti di G. Vailati*, p. 79-90).

(4) CARRA DE VAUX, l. c., p. 152-4.

intersezione di due mediane, od anche come punto il quale divide ogni mediana in due parti tali che quella adiacente ad un lato è metà di quella contigua al vertice opposto. La determinazione analoga per un quadrilatero si opera dividendo questo in due triangoli col mezzo di una diagonale, e per un pentagono dividendolo in un quadrilatero ed un triangolo, pure col mezzo di una diagonale. A questi problemi ERONE ne collega altri ed altri ancora, molti dei quali sono originali e riempiono il III de' suoi libri; l'intento essenzialmente meccanico che essi hanno ci esonera dal diffonderci sul loro scopo e sulle loro soluzioni (1).

Il sin qui detto intorno alla statica eroniana serva al lettore come primo saggio delle molte opere dell'uomo eminente a cui è dedicato il Capitolo che ora imprendiamo.

---

(1) Affinchè il lettore si formi un'idea di quale specie sieno, riferiamo gli enunciati di alcuni: Perchè i carri a quattro ruote trascinano i pesi più facilmente di quelli a due? Perchè per le bestie da tiro riesce difficile trascinare un carro nella sabbia? Perchè un pezzo di legno si spezza più facilmente quando chi opera colloca il ginocchio nel mezzo di esso? Perchè un pezzo di legno è tanto più debole quanto è più lungo e perchè s'incurva quando si tiene in direzione verticale? Perchè il rematore, quantunque debole, può muovere dei pesi considerevoli?

CAPITOLO V.

Erone d'Alessandria

63. - Ciascuno degli scienziati, di cui ci occupammo nei primi tre Libri dell'opera presente, possiede, considerato almeno come essere pensante, se non come uomo agente, una fisonomia ben determinata: di alcuni conosciamo nel suo complesso la produzione scientifica, di altri un'opera soltanto, talora la soluzione di un solo problema; il nome degli uni è legato ad un vasto campo d'investigazioni, mentre quello di altri s'incontra unicamente connesso ad una questione particolare; ma, per ognuno, le caratteristiche che interessano lo storico delle scienze esatte sono sufficientemente determinate. Ora però, proseguendo nella nostra rassegna della produzione matematica del popolo ellèno, c'imbattiamo in una collezione assai confusa di scritti diversi (costituenti il nucleo della letteratura geodetica dei Greci), i quali vanno sotto il nome di ERONE (1). E siccome tanto prima quanto dopo l'E. v. il nome di ERONE era molto diffuso (2), così fa mestieri distribuire fra gli Eroni noti gli

(1) Essi vennero utilizzati grandemente dai Romani quando AUGUSTO effettuò la misura dell'impero che GIULIO CESARE aveva progettata; anzi secondo S. GÜNTHER (*Geschichte der Mathematik*, I Teil, Leipzig, 1908, p. 141) a tale opera ERONE stesso avrebbe partecipato.

(2) Basti dire che di individui di tal nome si è serbato il ricordo di ventuno (che forse sono da ridursi a diciotto), la metà dei quali consta di scrittori.

ingredienti di quella raccolta, per poi determinare l'epoca a cui questi appartengono. Tal problema — di consueto chiamato *questione eroniana* — è assai complicato, e tanto più lo diventa notando (1), che il nome di ERONE è di origine egiziana e sulle rive del Nilo aveva un significato analogo a quello che ha per noi il vocabolo *ingegnere:* questa osservazione, combinata con quella che, nella collezione eroniana, emergono per numero e valore gli scritti concernenti le scienze fisico-matematiche, fa nascere il sospetto che come eroniane siansi considerate tutte le opere aventi per soggetto le applicazioni pratiche delle matematiche e specialmente la scienza delle costruzioni. Si aggiunga che le innumerevoli interpolazioni e mutilazioni, che subirono i manoscritti intestati col nome di ERONE per opera di ignoti (2), rendono impossibile formarsi un concetto della loro primitiva redazione, epperò obbligano a grande prudenza nel pronunciarsi intorno al loro valore ed alla loro derivazione (3).

Un contributo importante alla soluzione della questione eroniana fu arrecato, in principio del secolo presente, da

(1) VINCENT, *Estrait des manuscrits relatifs à la géometrie pratique des Grecs* (Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale, etc.: T. XIX, IIe Partie, 1858, p. 163, nota).

(2) " Die bis auf unsere Zeit gekommen Heronischen Texte sind echt, insofern sie den Autornamen und in der Hauptsache auch die ursprünglishe Anlage und Gestaltung der Heronischen Werke bewahrt haben, unecht aber insofern, als sie in stetigen Dienste der Praxis zu wiederholten Mahlen neu aufgelegt und dabei je nach den Zeitbedürfnisse überarbeiten worden sind ,,. F. HULTSCH, in *Litter. Centralblatt*, 1894, p. 555.

(3) A conferma di ciò possono valere le seguenti frasi del VINCENT: " Suivant moi, il a dû exister, sous le nom de Héron, et cela des une epoque très élevée, une vaste composition qui, servant de texte pour l'inseignament des écoles, s'est transmise, de siècle en siècle, en subissant des modifications successives, des additions, des mutilations, des interpolations. Les professeur enseignaient Héron comme nous avons vu enseigner Euclide, c'est-à-dire chacun à sa manière, s'accordant sur le fond, mais variant à l'infini dans les détails: c'est ainsi que nous avons eu l'Euclide de Clavius, l'Euclide de Tacquet, celui d'Henrion, celui d'Ozanam, et cent autres. De même donc chaque professeur rédigeait à sa manière et dictait son Héron ,,. (*Extraits* citati, p. 163).

G. B. VENTURI (1746-1822) col secondo de' suoi *Commentarj sopra la storia e la teoria dell'ottica* (1). Molto minor valore possiede una memoria del LETRONNE, coronata nel 1816 dall'Istituto di Francia, ma di cui forse l'autore stesso non era in fondo soddisfatto, poichè mai si decise di darla alle stampe (2). Nel 1854 la questione di cui ci occupiamo fu trattata da T. H. MARTIN con mirabile precisione e chiarezza (3): le conclusioni a cui egli pervenne possiedono quel grado di attendibilità che è sperabile raggiungere in argomenti siffatti, onde vennero in generale accettate (4), nè subirono gravi attacchi da parte di coloro che si occuparono in seguito della storia della geodesia dei Greci. Ciò non toglie che il problema storico, che da ERONE prende nome, è tuttora ben lungi dall'essere definitamente risoluto; esso deve, per converso, collocarsi accanto ai numerosi enigmi in attesa di un Edipo, dei quali è troppo ricca la storia della matematica greca; noi ci limiteremo a riferire imparzialmente in quale stato esso oggi si trovi.

64. - Fra i personaggi greci che portarono il nome di ERONE, tre si occuparono di matematica. Sono: 1.° ERONE d'Alessandria, citato da EUTOCIO (5) e PAPPO (cfr. p. 574); 2.° un altro ERONE Alessandrino che fu maestro a PROCLO (L. IV, n. 25) e che taluno vorrebbe identificare con un ERONE al quale viene attribuito un commento sull'*Introduzione dell'aritmetica* di NICOMACO GERASENO; 3.° un mediocre geodeta bizantino di cui diremo qualchecosa nel Cap. seg. (n. 73). Al primo si fa risalire la maggior parte dei manoscritti, di

(1) Bologna, 1814, p. 77-147.

(2) Venne pubblicata nel 1851 dal VINCENT col titolo: *Recherches sur le fragments d'Héron d'Alexandrie, ou du système métrique égyptien.* È basata sulla premessa — giudicata ormai inaccettabile — che tutti i lavori che portano il nome di ERONE siano opere di uno scrittore del V secolo dell'E. v.

(3) *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie disciple de Ctésibius et sur tous les auvrages mathématique grecs conservés ou perdus, publiés ou inédits, qui ont été attribués à un auteur nommé Héron* (Mém. prés. par divers savants à l'Acad. des Inscript. et Belles-Lettres, I Serie, T. IV, 1855).

(4) Vedi fra l'altro K. TITTEL, *Heron und seine Fachgenossen* (Rhein. Museum f. Philologie, Bd. LVI).

(5) ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. III, p. 71, 141 e 271. Da taluno esso è designato come ERONE " il vecchio „.

argomento fisico-matematico, aventi per autore un ERONE; sopra di esso, un dato da tutti considerato per certo è quello relativo alla patria, che concordemente si ritiene essere Alessandria (1). Basandosi poi sopra un'ovvia interpretazione del titolo affisso a certi manoscritti eroniani, si considerò per molto tempo essere ERONE discepolo di CTESIBIO; e poichè si riteneva certo che questi avesse vissuto sotto il settimo de' Tolomei (TOLOMEO EVERGETE II)— il cui regno, durato trentacinque anni, finì al termine del 117 o al principio del 116 a. C. — così si concluse avere ERONE fiorito circa cent'anni innanzi la nascita di G. C., essersi forse la sua esistenza protratta sin verso il 50 a. C. Ma tanto su quell'interpretazione, quanto su la determinazione cronologica concernente CTESIBIO vennero elevate serie obbiezioni (2). D'altra parte (3), osservando (come già aveva fatto il MARTIN) i frequenti latinismi che bruttano la lingua di ERONE, venne manifestato l'avviso che questi visse, se non dopo, al principio dell'E. v. Tale conclusione vien confermata osservando che ERONE ha sfruttati alcuni dati fisici e matematici somministrati da POSIDONIO di Apamea: ora, poichè lo stoico POSIDONIO, maestro di CICERONE, ha vissuto sin verso la prima metà del I secolo a. C., così ERONE non può essere anteriore a tale secolo (4). In tal modo resterebbero escluse senz'altro le opinioni di B. BALDI, che ritiene « egli fiorisse intorno a seicento anni dopo il nascimento di Cristo, intorno a tempi che seguirono dopo l'Imperio di GIUSTINIANO » (5), di F. HAASE, che fa vivere ERONE verso la metà del III sec. a. C. (6), del SUSEMIHL, che lo fa più giovane di mezzo secolo (7), e di F.

(1) Egual valore ha l'osservazione che ERONE è posteriore ad EUDOSSO ed ARCHIMEDE, che vedemmo (p. 574) e vedremo (n. 605) da lui rammentati.

(2) Veggasi W. SCHMIDT nell'introduzione a *Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia*, Vol. I, Lipsiae, 1899, p. X.

(3) Cfr. H. DIELS, *Ueber das physikalische System des Straton* (Sitzungsber. der K. Preuss. Ak. der Wiss.; phil.-hist. Cl., 23 Februar 1893).

(4) SCHMIDT, op. cit., p. XVI.

(5) Bull. di bibliogr. e storia, ecc., T. IX, 1876, p. 168.

(6) *Ueber die Grechischen und lateinischen Kriegsschriftsteller* (Neue Jahrb. für Phil. und Pädag., T. XIV, 1835, p. 112).

(7) *Gesch. der griech. Litt.*, T. I, p. 737.

HULTSCH (1), che lo fa fiorire verso la fine del II sec. a. C.; e sembrano per converso ammissibili le opinioni (a cui noi ci accostiamo) del MARTIN, che pone ERONE intorno alla metà del I sec. a. C., di M. CANTOR (2) e R. MEIER (3), che lo considerano appartenente a questo secolo, senza più precisa determinazione, del CARRA DE VAUX (4), del TANNERY (5) e del DIELS che (appoggiandosi al manoscritto arabo di cui parlammo a p. 574) lo porterebbero al II sec. Vennero però già addotti degli argomenti per combattere tale illazione e sostenere che ERONE è anteriore all'anno 50 dell'E. v. ed a CLAUDIO TOLOMEO (6)! Chiudiamo questa lunga enumerazione di avvisi contradditori — nella quale fedelmente rispecchiasi l'esiguità di dati sicuri — notando lo strano fatto che, nè VITRUVIO cita ERONE, nè questi quello: così si dilegua una speranza d'aiuto che spontaneamente sorgeva: nè altre è lecito nutrirne, se non in eventuali scoperte di nuovi documenti sino ad oggi ignorati (7).

65. - A qualche cosa di più concreto giungeremo esaminando le opere che portano il nome di ERONE; chè, sfrondandole anche da tutti gli sviluppi concernenti le applicazioni pratiche della matematica (8), troveremo come residuo

(1) *Metrologicorum scriptorum Reliquia,* T. I, Lipsiae, 1864, p. 5.
(2) *Vorlesungen,* T. I (3ª ed.), p. 363.
(3) *De Heronis aetate* (Leipzig, 1905).
(4) *Les mécaniques ou l'élevateur de Héron,* etc., p. IX.
(5) *Bull. des Sc. math.*, 1894, I P., p. 206.
(6) SCHMIDT, op. cit., p. XXIII-XXV.
(7) W. SCHMIDT aveva creduto (*Haben Vitruv und die römischen Feldmessen aus Heron geschöpft?* Bibl. mathem., 3e Reihe, I Bd., 1900) di trovare un dato per determinare l'epoca in cui visse ERONE in una coincidenza fra lui e PLINIO nella descrizione che essi fanno di un torchio da olive; ma gli fu obbiettato che si tratta di strumenti differenti (E. HOPPE, *Ein Beitrag zur Zeitbestimmung Herons von Alexandria,* Programm Hamburg, 1902); però anche questa replica fu oggetto di gravi appunti da parte di G. ENESTRÖM (Bibl. mathem., 3 Reihe, VIII Bd., 1907, p. 68-69).
(8) Cioè l'aritmetica pratica e la geodesia, l'ottica (v. n. 557), la meccanica (v. p. 574) e l'astronomia: l'epiteto " il Meccanico " dato ad ERONE (v. ad es. MONTUCLA, *Hist. des Math.,* T. I, p. 262) sembra indicare che come meccanico fosse specialmente pregiato nell'antichità: ma le seguenti parole, che si leggono in uno scritto geodetico che esamineremo nel n. 73, fanno fede della considerazione che egli godeva anche come geometra:

una bella raccolta di verità atte a completare in modo notevole le discipline di cui EUCLIDE ci tramandò il fondamento, verità che — se anche non appartengono tutte ad ERONE (1) — pure meritano di restar collegate alla sua memoria.

Non ci occuperemo di alcuni frammenti sopra gli orologi ad acqua (2), nè di altri congeneri (cfr. p. 153), chè lo studio di essi appartiene esclusivamente ai cultori della fisica, teorica od applicata; altrettanto facciamo riguardo ad un'opera sulle macchine da guerra (Βελοποιϊκά), solo rilevando in essa la presenza del procedimento per inserire due medie proporzionali fra due rette date che trovammo già (p. 575) nell'*Elevatore* dell'autor nostro.

Di indole esclusivamente fisica sono eziandio i due libri intitolati Πνευματικον, ove, dopo una dissertazione esclusivamente teorica « sul vuoto », si legge la descrizione di una quantità di ingegnosi apparecchi, non tutti originali (per confessione dello stesso autore) posti in movimento dall'aria, dall'acqua e dal fuoco e destinati e capaci di impressionare il gran pubblico (3). Un analogo scopo ha l'altra opera dal titolo Περὶ αυτοματοποιητικῆς, in cui egli insegnò il modo per ottenere effetti dello stesso genere combinando ruote, viti e pullegge: si direbbe la continuazione dell'*Elevatore*, ma, a differenza di questa, interessando i pratici, ebbe un grande numero di traduzioni in latino, italiano, spagnuolo, tedesco, inglese e francese (4).

" Riguardo alla misura delle figure chiamate trapezi e trapezoidi (classificate così in base all'eguaglianza degli angoli), come pure delle figure classificate e non classificate, ARCHIMEDE ed ERONE ne diedero, nei loro trattati, dimostrazioni complete „.

(1) La scarsità di citazioni fatte da ERONE rende impossibile discernere le proposizioni originali da quelle riferite; sembra tuttavia che queste siano più numerose di quelle.

(2) Questi lavori sono tutti raccolti nel T. I di *Heronis Opera omnia*. Cfr. W. SCHMIDT, *Heron von Alexandrie* (Neues Jahrb. f. das klass. Alterthum, Geschichte und deutsche Literatur, 1899).

(3) Quanto sia antico l'uso di tali apparati impressionanti è dimostrato dall'affermazione di OMERO che i tripodi esistenti a Delfo camminarono da soli: il poeta spiega ingenuamente tal fatto (*Illiade*, Canto XVIII) dicendo che Vulcano vi aveva apposte ruote invisibili.

(4) Queste due opere formano il Vol. I di *Heronis Alex. Oper a quae supersunt* (Leipzig, 1899); l'edizione di essa venne curata da W. SCHMIDT.

Esiste ancora integralmente un altro lavoro, quello intitolato Περὶ διόπτρας, sul quale è dovere nostro l'arrestarci, giacchè, come a ragione fu scritto (1), esso è da considerarsi come un documento prezioso della geometria greca, degno di prendere posto in coda alle opere di EUCLIDE, ARCHIMEDE e APOLLONIO; inoltre esso, dandoci qualche notizia sull'antica geodesia, colma una lacuna esistente nella collezione degli scritti scientifici dell'antichità (2). Per la prima volta esso venne pubblicato tradotto in italiano (col titolo *Il Traguardo*) ed in parte abbreviato dal VENTURI, nell'opera surriferita; più tardi l'originale greco, accompagnato da una fedele traduzione francese, dal VINCENT in uno scritto che pure già citammo; il VENTURI prima, in seguito il MARTIN e da ultimo il VINCENT addussero ragioni così convincenti per attribuire ad ERONE il lavoro di cui è parola, che ormai nessuno più dubita che a lui ne appartenga la paternità (3).

Il titolo di esso ha origine in uno strumento geodetico, colla descrizione del quale ha principio la memoria eroniana e che prestava agli antichi gli stessi servigi che ai moderni offre il teodolite (4).

Sul fine e sul grado di originalità dello scritto di cui ci occupiamo, dà notizie l'esordio di esso, che qui riferiamo:

Siccome l'uso della diottra si presta ad applicazioni molteplici ed indispensabili agli usi della vita e se ne è molto parlato, ritengo che sia necessario di mettere in iscritto le osser-

(1) M. CHASLES, *Aperçu historique,* II ed., Paris, 1875, p. 544.

(2) In modo analogo si esprime il VINCENT: " Entre la *géométrie élémentaire* des Grecs représentée par Euclide, et la *géométrie supérieure,* sur laquelle nous possedons d'admirables ouvrages, ceux d'Apollonius de Perge, par exemple, il est une troisième branche de la science, intermédiaire en quelque sorte entre les deux autres, et dont, jusqu'à présent, l'histoire est à peine connue: c'est la *géométrie pratique* ou *géodésie,* que l'on peut personnifier sous le nom d'Héron ,. (*Extraits,* etc., p. 161).

(3) Quest'opinione è implicitamente confermata dall'essere dessa passata in *Heronis Alex. Opera quae supersunt omnia,* Vol. III, Leipzig, 1903.

(4) Cfr. le figure che si trovano in VINCENT, p. 180-181 e in *Heronis Opera,* T. III, p. 192-193.

vazioni dei nostri predecessori — osservazioni importanti, come dissi testè — ed in pari tempo di rettificare quello che ne è stato detto con troppo poca esattezza. Però non credo necessario di riferire qui tutto quello che si trova male esposto o erroneo od interamente falso negli autori che ci precedettero: chi lo voglia, potrà sempre giudicare da sè qual differenza si trovi tra essi e noi. Non è tutto: coloro che descrissero siffatte operazioni, non seppero fondarne l'esecuzione sull'impiego di un medesimo strumento; oppure i loro apparecchi, per quanto numerosi e vari, non somministrano che le soluzioni di un piccolo numero di problemi. Noi, all'opposto, non solo ci siamo imposti di risolvere collo stesso strumento tutte le questioni già trattate in passato, ma di più ci lusinghiamo che qualunque altra questione, che si potrà proporre, verrà risoluta con eguale facilità col mezzo della nostra diottra.

Da questo squarcio emerge non essere ERONE il primo greco che siasi occupato di geodesia (1), ma sembra che egli vi abbia introdotto il concetto importantissimo dell'unità di metodo; la sua opera scientifica appare pertanto somigliante a quelle di EUCLIDE e di TOLOMEO: ma, se la scarsità delle notizie intorno alla geometria pre-euclidea rende malagevole il misurare quanto ha operato il sommo Alessandrino, se la perdita delle più importanti opere di IPPARCO vieta si pronunzi un giudizio definitivo sulla originalità di TOLOMEO, ci troviamo nel momento attuale, in condizioni anche peggiori, essendo pressochè nulle le nostre cognizioni sulla geodesia greca preeroniana (2). Tuttavia le parole di chiusa dell'esordio riferito sembrano attestare che ERONE sia l'inventore dello strumento di cui si serve; mentre le frasi con cui esso comincia affermano l'esistenza di altri apparati analoghi (ed infatti è noto che i Greci chiamavano διόπτρα qualunque strumento attraverso a cui si mirava).

66. - La prefazione testè trascritta occupa il § I dell'opu-

(1) Ciò, d'altronde, risulta anche dal paragonare i teoremi enunciati nel n. seg. con quelli di cui si attribuisce la soluzione a TALETE (p. 18) e con alcuni che notammo (p. 562) nell'*Ottica* di EUCLIDE.

(2) Si può dire che queste riducansi all'osservazione del VINCENT (l. c., p. 174-175) che BITONE, scrittore sulle macchine da guerra (v. *Mathematici veteres*, p. 108), è probabilmente uno di quelli che ERONE designa come suoi "predecessori".

scolo di ERONE; la descrizione della diottra occupa i quattro successivi; ecco i temi degli altri trentadue:

VI. Determinare la differenza di livello fra due punti dati.

VII. Congiungere mediante una retta due punti, dall'uno dei quali non si può vedere l'altro.

VIII. Misurare la distanza, ridotta all'orizzonte, tra il punto dove si trova l'osservatore ed un punto lontano.

IX. Misurare la larghezza di un fiume.

X. Misurare la distanza di punti inaccessibili.

XI. Data una retta, condurre ad essa una perpendicolare da un estremo, senz'avvicinarsi alla retta od all'estremo.

XII. Misurare l'altezza di un punto inaccessibile.

XIII. Determinare la differenza di altezza di due punti inaccessibili, la loro distanza e la direzione della loro congiungente.

XIV. Determinare la profondità di una fossa.

XV. Traforare una montagna secondo una retta che congiunga due punti dati sulle sue falde.

XVI. Scavare in una montagna dei pozzi che cadano verticalmente su di una caverna.

XVII. Data una galleria sotterranea di forma arbitraria, determinare sul terreno sovrastante un punto tale che, scavando ivi un pozzo verticale, si arrivi ad un punto assegnato della galleria.

XVIII. Tracciare il contorno di una sponda secondo un arco di cerchio od una curva qualunque.

XIX. Fare un mucchio di terra avente la forma di un dato segmento sferico.

XX. Dare ad un terreno una assegnata inclinazione.

XXI. Fissare, su una retta orizzontale avente per un estremo l'osservatore, un punto che disti di una data lunghezza dall'osservatore stesso.

XXII. Trovare un punto che disti di una lunghezza data da un dato punto inaccessibile.

XXIII-XXIV. Misurare un campo.

XXV. Supposto che siano scomparsi tutti i confini di un campo, tranne due o tre, trovare quelli perduti, conoscendo un disegno del campo.

XXVI. Dividere un campo in parti assegnate col mezzo di rette uscenti da un punto interno.

XXVII. Misurare un campo nel quale non si può penetrare.

XXVIII-XXIV. Dividere un trapezio od un triangolo in un dato rapporto mediante una parallela alla base.

XXX. Trovare l'area di un triangolo in funzione dei lati.

XXXI. Determinare l'efflusso di una fontana.

XXXII. Determinare la distanza angolare fra due astri.

XXXIII. Critica dell'istrumento detto "asterisco„ o "stelletta„.

XXXIV. Descrizione ed uso dell'" odometro „.

XXXV. Misura del cammino percorso da una nave.

XXXVI. Determinare la distanza fra due punti posti in climi differenti.

XXXVII. Muovere un dato peso con una data potenza servendosi di un sistema di ruote dentate.

Quest'ultimo articolo — venne osservato a ragione — non appartiene al trattato del *Traguardo*, ma taluno ve lo aggiunse come parto indubitato di ERONE. Quanto al problema XXV, esso evidentemente rientra nella categoria di quelli la cui soluzione era resa necessaria dalle periodiche inondazioni del Nilo, mentre quelli che portano i numeri XXVI, XXVIII e XXIV rappresentano altrettanti punti di contatto col trattato perduto di EUCLIDE *Della divisione delle figure* (v. p. 250-252); crediamo perciò arrestarci un istante sopra uno almeno di essi. Sceglieremo il seguente:

XXVIII. Dato un trapezio ABΓΔ, come pure i suoi due lati paralleli ΑΔ ΒΓ e la retta ad essi perpendicolare, condurre una

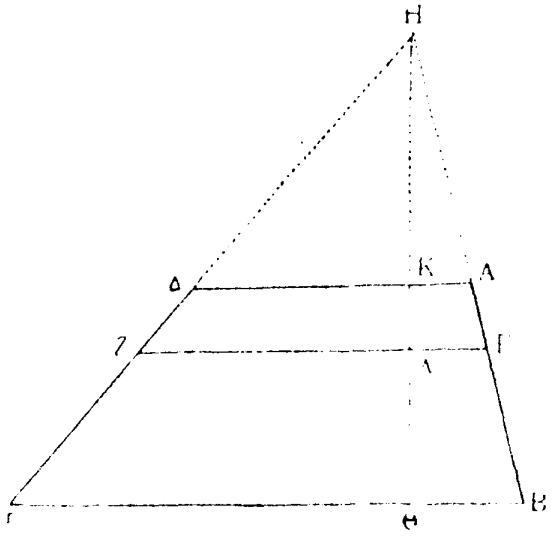


Fig. 84.

retta EZ parallela alla base ΑΔ in modo da tagliare dal trapezio un trapezio AEZΔ di data area (fig. 84).

I dati essendo disposti conformemente all'enunciato, prolunghiamo le rette BA, ΓΔ sinchè si taglino in H ed abbassiamo la perpendicolare HKΘ. Essendo date le lunghezze ΒΓ, ΑΔ, è dato pure il loro rapporto, epperò anche il rapporto $\frac{\Theta H}{KH}$. Ma,

ΘK è dato, dunque KH lo è pure. D'altronde, poichè ΔΔ è dato, il triangolo ΔΔH lo è anche in grandezza, epperò altrettanto può ripetersi del triangolo EZH; dunque è dato il rapporto di HEZ a HΔΔ, epperò quello di $\overline{HA}^2$ a $\overline{HK}^2$: ora HK ci è dato, dunque altrettanto può dirsi di $\overline{HA}^2$, epperò di HA. Ma HA è dato, dunque KA è pure dato e per conseguenza EZ è dato di posizione (1)

Senza riferire le soluzioni esposte da ERONE per gli altri problemi, limitiamoci a rilevarne l'analogia con quelle tuttora adoperate e la differenza da queste prodotta dall'uso della simiglianza dei triangoli come surrogato all'impiego delle funzioni trigonometriche: va specialmente notata a questo proposito la soluzione del probl. XXVII.

Nei probl. XXIII-XXIV si è creduto ravvisare in germe il concetto di coordinate cartesiane (2), e in molti altri (p. es. in quello che porta il n. XVIII) si può notare l'applicazione della prerogativa di qualunque cono di essere segato in curve fra loro simili da piani paralleli. In un gran numero delle questioni trattate da ERONE è indispensabile sapere calcolare l'area di un triangolo di cui si conoscano i lati: a questo problema è dedicato il § XXX, il quale forma l'aggiunta più importante che sia stata data agli elementi della geometria dai successori di EUCLIDE; e se — come sembra — appartiene ad ERONE, è il più cospicuo contributo che a lui deve la matematica pura. Coerentemente a siffatto modo di vedere, riportiamo la soluzione che di quella questione si legge nel *Traguardo;* essa è un modello di esattezza, eleganza e semplicità, onde direbbesi appartenere ad uno scrittore non molto lontano dal periodo aureo della geometria greca: se, dunque, è una produzione di ERONE, sembra difficile ammettere che questi abbia vissuto molto dopo l'E. V.

Sia dato il triangolo ABΓ (fig. 85) e sia dato ciascuno de' suoi lati; proponesi di trovarne l'area.

Si inscriva nel triangolo dato il cerchio ΔEZ, il cui centro sia H. Conducansi le rette HA, HB, HΓ, HΔ, HE, HZ. Il prodotto BΓ per HE sarà il doppio del triangolo BΓH, mentre AB × HZ sarà il

(1) VINCENT, op. cit., p. 283; *Heronis Opera,* T. III, p. 278-80.
(2) CANTOR, *Vorlesungen,* T. I, 3ª ed., p. 383.

doppio del triangolo ABH e AΓ × HΔ il doppio del triangolo AΓH. Perciò il prodotto del contorno del triangolo ABΓ per EH raggio del cerchio ΔEZ è eguale al doppio del triangolo ABΓ. Si

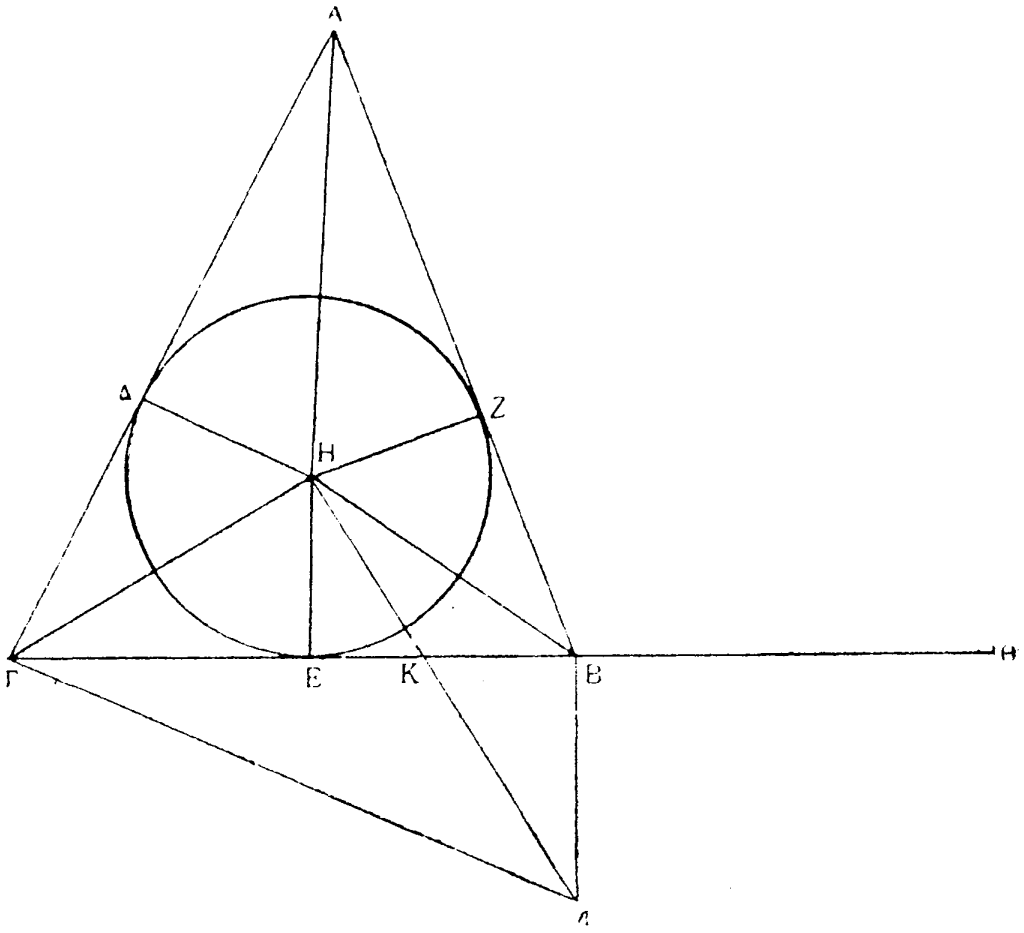


Fig. 85.

prolunghi ΓB e si faccia BΘ = AΔ. Sarà ΓΘ la metà del contorno del triangolo ABΓ. Dunque l'area del medesimo è

$$\Gamma\Theta \times HE = \sqrt{\Gamma\Theta^2 \cdot HE^2}.$$

Si conduca ora HKΛ perpendicolare a HΓ e BΛ perpendicolare a BΓ e si unisca Γ a Λ. Poichè i due angoli ΓHΛ, ΓBΛ sono retti, i punti Γ, H, B, Λ staranno sopra una medesima circonferenza e gli angoli ΓHB, ΓΛB daranno in somma due retti. Per conseguenza, dal momento che le rette HA, HB, HΓ bisecano i tre angoli formati attorno al punto H (1), l'angolo AHΛ

(1) Dai raggi del cerchio inscritto.

sarà eguale all'angolo ΓΑΒ ed il triangolo ΗΑΔ risulterà simile al triangolo ΓΒΑ (1). Dunque sarà:

$$B\Gamma : BA = A\Delta : \Delta H = B\Theta : HE,$$

ed alternando

$$\Gamma B : B\Theta = BA : HE = BK : KE,$$

e componendo

$$\Gamma\Theta : B\Theta = EB : EK.$$

cosicchè è pure

$$\overline{\Gamma\Theta}^2 : \Gamma\Theta \cdot \Theta B = \Gamma E \cdot EB : \Gamma E \cdot EK = \Gamma E \cdot EB : \overline{HE}^2,$$

onde poi riesce

$$\Gamma\Theta \times B\Theta \times \Gamma E \times EA = \overline{\Gamma\Theta}^2 \cdot \overline{HE}^2,$$

la radice del qual ultimo prodotto è l'area del triangolo. E ciascuna delle quattro prime rette è data: imperocchè ΓΘ è la metà del contorno; ΒΘ è l'eccesso di questa metà sopra ΒΓ; ΓΕ è quanto la stessa supera ΑΒ: ed ΕΒ è il di più della stessa metà sopra il lato ΑΓ. Dunque l'area del triangolo è data (1).

67. - Si ottiene così la notissima espressione dell'area di un triangolo, che un tempo si collegava al nome di N. TARTAGLIA (1506-1559), che poi si giudicò per un prodotto indiano, e che ormai va ascritta fra le scoperte dei Greci. All'attribuzione di essa ad ERONE stesso sembrano favorevoli altre investigazioni di natura esclusivamente teorica da questo compiute, la cui conoscenza dobbiamo ad informazioni concordanti pervenuteci da fonti differenti e di cui passiamo ora ad occuparci.

Nel *Commento* di PROCLO agli *Elementi* di EUCLIDE il nome di ERONE s'incontra sei volte, e, come a ragione osserva il MARTIN (2), tutto fa credere si tratti ivi di ERONE d'Alessandria. Una citazione (PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 178) concerne la costruzione delle macchine, e non c'interessa.

(1) Al testo del *Traguardo* è stato qui arrecata una modificazione semplificatrice suggerita dal VENTURI, confermata dal VINCENT (op. cit., p. 288-9) ed approvata da F. HULTSCH (*Der Heronische Lehrsatz über die Fläche des Dreiecks als Function der drei Seiten*, Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. IX, 1864, p. 235-6). La nuova dicitura è conforme ad un'altra redazione del ragionamento di ERONE di cui parleremo fra poco (n. 72).

(2) VINCENT, op. cit., p. 95-98.

In un'altra (op. cit., II, p. 16) PROCLO biasima ERONE per avere, come vedemmo, ridotti a tre gli assiomi posti da EUCLIDE a base della geometria. Una terza volta (II p. 102) egli fa allusione a certe obbiezioni mosse da « ERONE il MECCANICO » all'enunciato del teorema « l'angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascuno dei due interni ed opposti ». Più innanzi (II, p. 116) riporta la seguente dimostrazione « che appartiene ad ERONE [ed ai seguaci di PORFIRIO » del teorema (*Elementi*, Lib. I, prop. 20ª) « la somma di due lati qualunque di un triangolo è maggiore del terzo lato »:

Sia ABΓ il triangolo e si voglia dimostrare che AB + AΓ > BΓ. Si bisechi l'angolo A colla retta AΔ. Essendo l'angolo AΔΓ esterno al triangolo ABΔ, è maggiore dell'angolo interno BAΔ. Ma l'angolo BAΔ è eguale a ΔAΓ. Quindi l'angolo AΔΓ è maggiore di ΔAΓ; epperò il lato AΓ è maggiore di ΔΓ. Per analoghe ragioni il lato BΓ è maggiore di BΔ. Onde i lati AB e AΓ sono insieme maggiori di BΓ, come erasi asserito.

Anche nel teorema (*Elementi*, Lib. I, prop. 25ª) « se due triangoli hanno due lati dell'uno eguali a due dell'altro, ma i terzi lati diseguali, al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore », PROCLO (II, p. 138) riferisce una dimostrazione di ERONE, la quale ha il vantaggio su quella di EUCLIDE di evitare la riduzione all'assurdo.

Finalmente, sopra certe aggiunte fatte dai « famigliari di ERONE (e PAPPO) » alla dimostrazione di EUCLIDE del teorema di PITAGORA, PROCLO ritiene (II, p. 206) compiere opera magnanima, stendendo un velo di pietoso oblio, per il fatto solo che esse, pur riferendosi ad un soggetto appartenente al I Libro, riposano sulle teorie che occupano il VI. Fortunatamente il segreto pedantescamente serbato da PROCLO è rivelato da un manoscritto arabo della Biblioteca di Leida (1), del quale abbiamo già fatto cenno, contenente il commento, compiuto verso il 900 dell'E. v., da ABÙ 'L 'ABBÄS AL FADL BEN HATIM AN NAIRÎZÎ (*vulgo* ANARIZIO), manoscritto di cui P. TANNERY ha fatto conoscere alcuni estratti (2) e che attualmente si trova in corso

(1) Warnerianus, 399; n. 1068 nel Catalogo del 1616, nn. 965 e 988 nel Catalogo del 1845.

(2) *La géométrie grecque*, I Partie, Paris, 1887, Chap. XIII.

di pubblicazione (1). Da questo codice si apprende che l'addizione ideata da ERONE all'argomentazione euclidea consiste nell'osservare che tre certe rette, esistenti nella figura relativa, concorrono nel medesimo punto; da esso si ha poi la completa spiegazione del biasimo inflitta a PROCLO, giacchè ERONE fonda il suo ragionamento sui tre lemmi seguenti, per stabilire i quali sono realmente necessarie la teoria delle proporzioni e la similitudine:

1. e 2 Se in un triangolo ABC si conduce DE parallela alla base BC a segare in D, E i lati AB, AC od i loro prolungamenti, e se si prende il punto medio F del segmento DE, unendo F a A si otterrà una retta ehe taglierà il lato BC nel suo punto di mezzo G.

3. (Prop. reciproca della 43 e del I Lib. degli *Elementi*). Se (fig. 86) un parallelogramma AB è diviso mediante due paral-

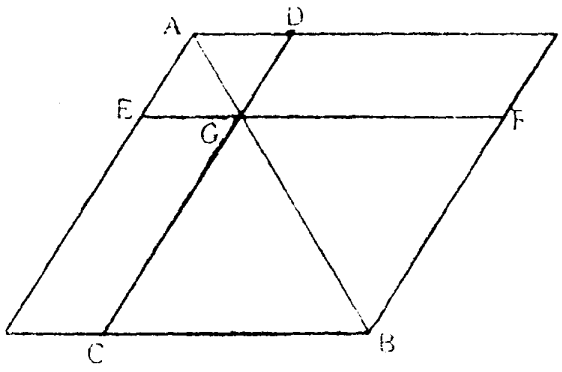


Fig. 86.

lele ai lati in quattro altri $ADGE$, DF, $FGCB$, CE in modo che DF, CE siano fra loro equivalenti, il vertice G ad essi comune si troverà sulla diagonale AB.

Premessi questi due lemmi teorematici, ecco come procede il nostro autore:

Sia (fig. 87) ABC un triangolo rettangolo in A. Costruiamo sopra BC il quadrato CD, su AB il quadrato $ABEF$ e su AC il quadrato $ACGH$. Conduciamo per A la retta AKL perpendicolare a BC, uniamo E a C; la congiungente taglia AL in M; conduciamo quindi MB e MG; dico che queste due rette si

(1) *Codex Leidensis*, 399-1, *Arabice et Latine ediderunt* R. O BESTHORN *et* J. L. HEIBERG. Ne furono sinora pubblicati cinque fascicoli (Hauniae, 1893, 1897, 1900, 1905, 1910).

trovano una sul prolungamento dell'altra. Per dimostrarlo prolunghiamo EB, CG finchè s'incontrino in N. e le loro parallele EF, GH finchè s'incontrino in O. Conduciamo per M la PMQ parallela a EO e la SMR parallela a FC; ed uniamo O ad A e F ad H. Essendo $AH = AC$, $FA = AB$ e ang. FAH = ang. BAC,

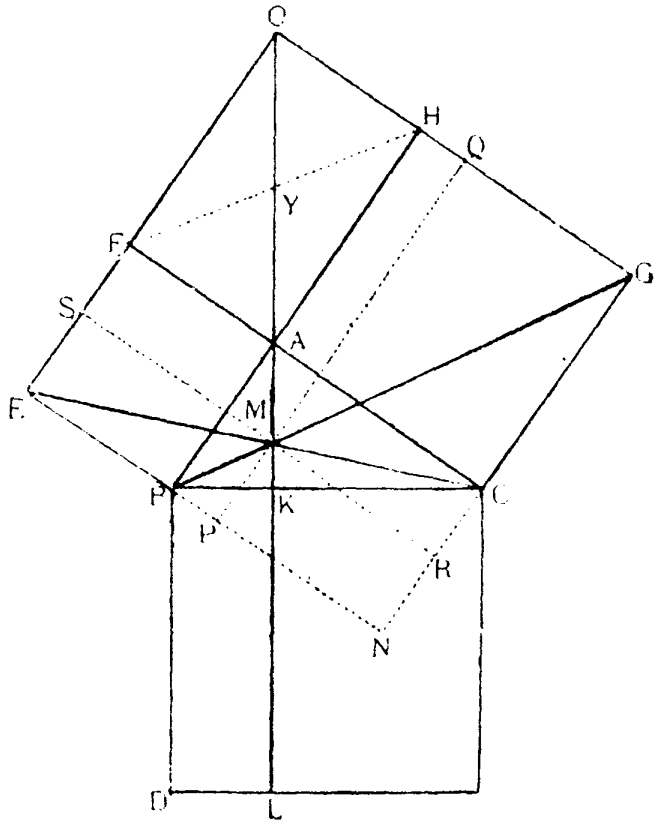


Fig. 87.

i triangoli AFH, ABC sono fra loro eguali: quindi $BC = FH$ e ang. ABC = ang. AFH. Ma essendo AK perpendicolare alla base del triangolo rettangolo ABC, sono eguali gli angoli ABC e CAK: e d'altronde, le diagonali AO, FH segandosi in Y e FY essendo eguale a YA, sarà ang. HFA = ang. OAF. Dunque ang. OAF = ang. CAK. Aggiungiamo ai due membri ang. OAC: avremo ang. OAC + ang. OAF = ang. MAC + ang. CAO. Ma la prima somma è due retti, dunque lo stesso può dirsi della seconda, epperò OAM è una retta. Essa è diagonale del parallelogramma OM: quindi, per la prop. 1ª (43ª degli *Elementi*), le aree AS e AQ sono eguali. Aggiungiamo ai due membri l'area AM ed otterremo le due aree eguali MH, MF. Ma nel parallelogrammo FN tagliato dalla diagonale EMC sono eguali le aree MF, MN. Risultano dunque eguali anche MH e MN. Perciò, in forza del terzo lemma, BM e MG sono in una retta.

68. - È superfluo insistere sull'importanza che ha questo squarcio, vuoi per la notevole verità che contiene, vuoi pel rigore con cui è assodata. È invece opportuno rilevare come le osservazioni riferite da PROCLO, e quelle ancor più numerose sparse nel suindicato manoscritto di Leida, facciano naturalmente congetturare che ERONE abbia composto un commento agli *Elementi* di EUCLIDE. È questa una ipotesi, che fu un tempo combattuta da M. CANTOR e da P. TANNERY, ma che i nuovi documenti scoperti in questi ultimi tempi rendono ogni giorno più verosimile: noi la riteniamo come una delle meno incerte fra quelle concernenti ERONE, ma lasciamo, ben inteso, indeterminata la forma precisa del lavoro supposto, affidando, cioè, all'avvenire il decidere se questo fosse un vero e proprio commento, o non piuttosto una serie di osservazioni, emendamenti ed aggiunte al trattato di EUCLIDE.

Riguardo all'estensione ed al contenuto di questa presunta opera geometrica di ERONE, ulteriori ed ampie notizie si traggono da un altro importante manoscritto rinvenuto nel 1896 da M. CURTZE nella Biblioteca universitaria di Cracovia, in cui si trova, tra l'altro, la traduzione in latino, compiuta nel sec. XII da GHERARDO da Cremona, del succitato commento dell'Arabo ANARIZIO. Questo commento, di cui il CURTZE stesso ha curata la stampa (1), è meno opera originale, che una sintesi delle osservazioni sugli *Elementi* dovute a SIMPLICIO, ERONE (2) e GEMINO (3) e venne inter-

---

(1) *Euclidis Opera omnia* ed. HEIBERG *et* MENGE *supplementum. Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii,* ed M. CURTZE (Lipsiae, 1899). Migliore del codice di Varsavia sembra essere uno della Vaticana (Cod. Reg. Suec., 1268) segnalato dal BJÖRNBO (Bibl. math., 3ª Ser., T. III, 1902, p. 72 e 420).

(2) Questi nomi sono spesso alterati in SANBELICHUS e YRINUS: come ARCHIMEDE divenne ASAMITHES o ASIMITES; a chi poi appartengono i nomi HEROMIDES, HERUNDES, APOSEDANIUS, DIOCHASIMUS e ST'IUS, è ignoto. Storpiature analoghe sono frequentissime in opere provenienti dagli Arabi: cfr. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I (3ª ed.), p. 705.

(3) Taluni vollero riconoscere questo matematico nell'*Aganis* citato da ANARIZIO: ma le ragioni della identificazione vennero riconosciute per poco solide da P. TANNERY (v. l'articolo *Le Philosophe Aganis est-il identique a Geminus?* Bibl. math., 3ª Ser., T. II, 1901).

calato nella prima versione araba di EUCLIDE (dovuta a ALHADSCHDSCHADSCH BEN JÛSUF BEN MATHAR). In esso commento il nome di ERONE ricorre assai spesso nei primi quattro libri, mai nel quinto ed una sola volta in ciascuno dei tre seguenti; significa ciò che a questi libri degli *Elementi* siasi limitato il geodeta di cui ci occupiamo?... Nulla autorizza ad affermarlo.

Da quanto dice ANARIZIO risulta che, nel chiosare EUCLIDE, ERONE si è permesso di suggerire qua e là degli spostamenti nell'ordine dei teoremi, nè ha mancato di notare (1) il nèo (v. p. 209) che esiste nella proposizione in cui EUCLIDE, in principio del III Libro degli *Elementi*, stabilisce la nozione di circoli eguali. Anche nella nomenclatura euclidea sembra avere egli introdotte alcune modificazioni, giacchè nella traduzione di GHERARDO troviamo (2) i vocaboli *compositio* e *dissolutio* per indicare due operazioni, inverse l'una dell'altra, che sono in sostanza quelle che noi eseguiamo nell'algebra quando surroghiamo mediante l'identità $a\,(b + c + d + \ldots) = ab + ac + ad + \ldots.$ il secondo membro col primo od inversamente il primo col secondo. Aggiungasi che, oltre al munire di analisi alcuni problemi attinenti a' poligoni inscritti e circoscritti al circolo, che EUCLIDE trattò col metodo sintetico da lui preferito, ERONE ha ideati procedimenti originali per risolvere certe questioni geometriche esistenti negli *Elementi* o da questi ispirate; i relativi passi del commento in esame sono quelli che, assieme ad altri riferiti prima, lo adornano di un valore permanente e lo elevano ben al disopra di quelli di cui ci tratteremo nel Libro successivo: su tali passi lo storico della geometria greca non può non arrestarsi.

69. - È noto che EUCLIDE ha cominciato i suoi *Elementi* insegnando a costruire un triangolo equilatero di dato lato. ERONE aggiunge (3) l'analoga costruzione di un triangolo isoscele, avente i lati doppi della base; essa venne riferita da PROCLO *senza citarne la provenienza* e risulta dalla fig. 88, anche non accompagnata da alcuna dilucidazione.

Nella prop. 11ª del I Libro EUCLIDE ha fatto conoscere un

(1) ANARIZIO ed. CURTZE, p. 111.
(2) Op. cit., p. 89.
(3) Id., p. 43.

metodo per condurre da un punto di una retta la perpendicolare alla retta stessa; ERONE aggiunge (1) la seguente costruzione relativa al caso in cui il punto stia all'estremo della

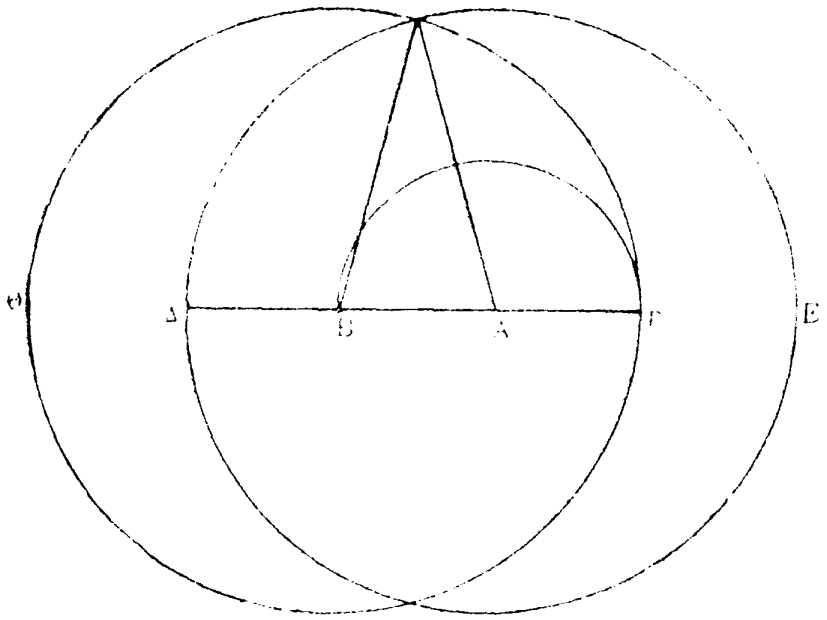


Fig. 88.

retta: Si scelga (fig. 89) ad arbitrio sulla retta data AB un punto Γ e si elevi da esso la retta ΓΔ perpendicelare a AB ed eguale a AΓ; si conduca ΔE perpendicolare a ΓΔ e se ne

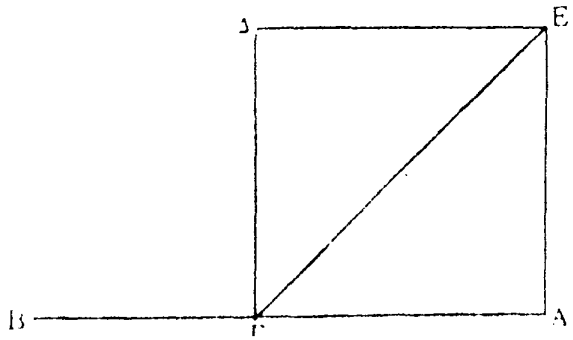


Fig. 89.

determini la intersezione E con la bisettrice dell'angolo AΓΔ; EA sarà la retta domandata.

(1) Op. cit., p. 54.

Del teor. 19° (del I Libro degli *Elementi*) ERONE dà una dimostrazione (1) che PROCLO ha trascritto *senza confessarne la derivazione*; del seguente si trova (2), quale produzione eroniana, quel ragionamento che PROCLO, come già dicemmo (p. 593), attribuisce eziandio ai seguaci di PORFIRIO; anche del teorema 37° ANARIZIO riporta (3) una dimostrazione di ERONE. Maggiore importanza possiede il metodo per eseguire la divisione di una retta in tre o più parti eguali che ERONE fa conoscere (4) in seguito alla prop. 31ª del I Libro di EUCLIDE: ecco in che cosa esso consiste:

Se (fig. 90) AB è la retta data, si conducano ad essa nei suoi estremi le perpendicolari AΓ e BΔ fra loro eguali, e si

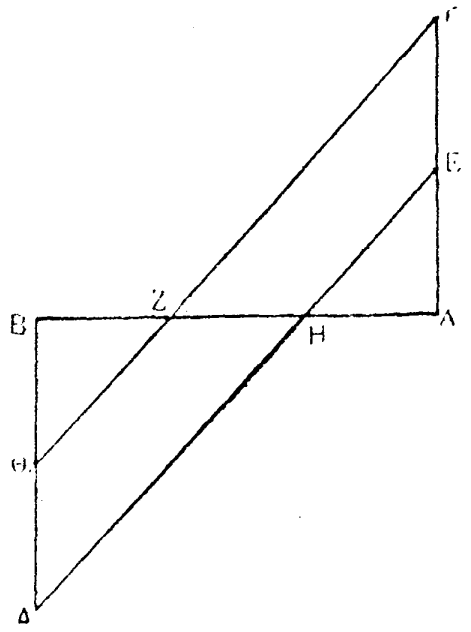


Fig. 90.

dividano per metà in E, Θ; le rette ΓΘ e ΔE segheranno AB nei punti Z e H si avrà AH = HZ = ZB. « Et secundum hanc viam dividemus, in quot sectiones voluimus usque in infinitum ». Questa costruzione, che si ritrova in ABÛL WAFÀ, è eseguibile con una sola apertura di compasso, donde il CURTZE (5) trasse un argomento per ritenere non essere ri-

(1) Op. cit., p. 56.
(2) Id., p. 58.
(3) Id., p. 75.
(4) Id., p. 73.
(5) Id., p. 75 nota.

masta ignota ai Greci la geometria fondata sull'uso esclusivo di un compasso a gambe fisse.

Sopra le aggiunte al teorema di PITAGORA (1) riferimmo nel n. prec.; qui notiamo la dimostrazione del teorema inverso (2), e rileveremmo anche le verificazioni numeriche pei teoremi di algebra geometrica del II Libro degli *Elementi*, ove fossero esplicitamente dichiarate come fatica eroniana.

Passando ora alla parte del Commento relativa al III Libro, notiamo l'importante proposizione (dimostrata per assurdo) « una retta non può segare un circolo in più di due punti » che ERONE molto giudiziosamente unì (3) a quella (12ª del III Libro di EUCLIDE) « un circolo non può toccare un circolo in più di un punto ». Similmente, alla prop. 16ª ove EUCLIDE insegna a condurre ad un circolo la tangente da un punto esterno, il nostro autore aggiunse che « per un punto esterno ad una circonferenza passano due rette fra loro eguali ad essa tangenti ». Perciò ad ERONE debbono farsi risalire le due proposizioni fra loro correlative che dicono essere la circonferenza una curva di secondo ordine e seconda classe.

Nel commento al Libro IV, ANARIZIO riferisce (4) come appartenente ad ERONE la seguente fondamentale proposizione (5): « Nell'interno di qualsivoglia figura rettilinea avente lati ed angoli eguali, esiste un punto le cui congiungenti coi vertici della figura sono fra loro eguali; tal punto è il centro della figura, nonchè dei cerchi in essa inscritto e circoscritto ». Come chiusa della dimostrazione viene riferito, attribuendolo ad EUCLIDE, il seguente teorema: « Nelle figure (sottinteso « regolari ») di un numero dispari di lati, le rette che bisecano gli angoli sono perpendicolari ai lati »; da quale opera esso sia estratto, il commentatore non dice, nè noi siamo in grado di sopperire al suo silenzio.

70. - Qui ci arrestiamo nel nostro resoconto di quanto ha

(1) Op. cit., p. 78-84.
(2) Id., p. 86.
(3) Id., p. 122.
(4) Id., p. 152.
(5) Di essa vedemmo (p. 211) esistere tracce in EUCLIDE stesso; ciò non toglie ad ERONE il merito di averla concepita completamente, enunciata in generale e dimostrata con rigore.

fatto ERONE come commentatore, giacchè quanto esponemmo è sufficiente a farne misurarne il valore. E prima di abbandonare la geometria elementare nelle sue relazioni con il meccanico d'Alessandria, vogliamo dir qualchecosa di una collezione di *Definizioni dei termini geometrici* che, per lungo volgere di secoli, venne a lui attribuita (1): ben è vero che G. FRIEDLEIN (2), P. TANNERY (3) e R. MEIER (4) giudicarono illegittima tale attribuzione, ma in questi ultimi tempi vennero addotti da W. SCHMIDT nuovi argomenti in favore dell'antica opinione (5). Per tale ragione e più ancora perchè quelle *Definizioni* costituiscono un documento citato spessissimo è bene dirne qualche cosa.

Eccone anzitutto l'esordio:

Ora, illustrissimo DIONIGI (6), volendo schizzare per te e porre sotto i tuoi occhi, il più brevemente possibile, i preliminari degli elementi della geometria, sin dal principio e da un capo all'altro di questo trattato mi conformerò agli insegnamenti geometrici di EUCLIDE, autore degli *Elementi*; giacchè io penso

---

(1) L'" editio princeps „ è contenuta nel volume *Oratio Conradi Dasypodii de disciplinis mathematicis* (Argentorati, 1579).

(2) *De Heronis quae feruntur definitionibus* (Bull. di Bibl. e Storia, ecc., T. IV, 1871, p. 93-121): v. anche B. BONCOMPAGNI, *Intorno alle definizioni di Erone Alessandrino* (Ivi, p. 122-26 e 512).

(3) *La géométrie grecque:* I Partie, p. 177-181: *L'aritmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie* (Mém. de Bordeaux, 2e Série, T. IV, p. 162-4); *La stéréometrie d'Héron d'Alexandrie* (Id., T. V, p. 305-6). Il TANNERY, nel primo dei citati luoghi, esprime l'opinione che la sostanza delle *Definizioni* risalga al I sec. dell'E. v.; ma che esse, nella forma attuale, si trovassero incorporate in certi *Prolegomeni*, redatti non prima del III sec. dell'E. v., donde poi passarono in altra compilazione fatta da ANATOLIO d'Alessandria, che, sotto AURELIANO (214-275), fu vescovo di Laodicea in Siria (v. L. V); la fonte prima sarebbe, non ERONE, ma GEMINO.

(4) *De Pseudo-Heronis* (Rhein. Museum f. Philol., T. LXI).

(5) *Heronis Alexandrini Opera*, T. I, Lipsiae, 1899, p. XV. Conformemente a tal modo di vedere le *Definizioni* presero posto nella edizione completa degli scritti eroniani (Vol. IV, Lipsiae, 1912).

(6) Chi sia costui è difficile dire; chè nella più volte citata *Enciklopädie* del PAULY-WISSOWA sono ricordate 166 persone che portarono il nome DIONIGI.

sì facendo, ti metterò in grado di abbracciare con facilità insieme e di afferrare il legame, non soltanto delle opere di questo autore, ma della miglior parte delle opere di geometria. Comincerò dal punto.

Ed infatti vengono successivamente definiti il *punto*, la *linea* (lunghezza senza larghezza o *quid* che separa la luce dall'ombra), la *linea retta*, le *linee circolari* e le *curve*, fra le quali l'autore considera specialmente l'*elica* cilindrica (di cui espone la definizione sotto due forme). Passa poi alle *superficie* in generale, che l'autore distingue in *piane* e *non piane*, e finalmente ai *solidi*, caratterizzati come figure aventi lunghezza, larghezza e altezza. Definiti gli *angoli*, ne vengono indicate le varie classificazioni: angoli piani ed angoli solidi, angoli rettilinei ed angoli non rettilinei, angoli retti, acuti ed ottusi (1). Si trova poi la nozione generale di *figure* e dei loro confini, seguita dalla loro classificazione: figure piane e figure solide, figure non composte e figure composte (lunule, corone). Dopo il circolo, il suo diametro ed il semicerchio, incontriamo l'ἀφίς (figura, minore del semicerchio, compresa tra una retta, inferiore al diametro, ed il più piccolo degli archi sottesi) e il segmento circolare qualunque. Al concetto di angolo inscritto in un segmento, tien dietro quello di settore e (dopo l'osservazione che una circonferenza è concava rispetto ad un qualunque punto interno e convessa rispetto ad uno esterno) quelli di lunula (area limitata di due archi circolari, concavi dalla medesima parte), di corona, di bipenne (πέλυξ, figura contornata da quattro archi, due concavi e due convessi). Si ritorna poi alle figure rettilinee, per distribuirle in tre categorie: *triangoli*, *quadrilateri* e *multilateri*. I primi vengono distinti in equilateri, isosceli e scaleni, e viene osservato che i primi sono sempre acutangoli, mentre gli altri possono essere rettangoli, acutangoli od ottusangoli. Invece dei quadrilateri, alcuni sono equilateri, altri non, alcuni rettangoli, altri non, quelli soltanto equilateri diconsi *rombi*, mentre se sono anche rettangoli si chiamano *quadrati*; altre specie di quadrilateri sono: il *parallelogramma* ed il

(1) L'autore rileva che tutti gli angoli retti sono eguali fra loro, mentre esistono infinite specie di angoli acuti ed ottusi.

rettangolo, il *trapezio* (1) (isoscele o scaleno) ed il *trapezoide*.

In ogni figura l'autore delle *Definizioni* considera base, lati e diagonali; quindi chiarisce che cosa intendasi per κάθετος, per rette παράλληλοι e οὐ παράλληλοι, e per altezza di un triangolo; e finisce riferendo il teorema pitagorico (v. p. 39) che afferma essere il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare gli unici poligoni capaci di riempire un piano.

Il nostro compilatore dice poi che, secondo alcuni, le figure solide si dividono in non composte e composte, secondo altri, in semplici (come la sfera ed il piano) e miste (ad esempio i coni ed i cilindri). Analoga distinzione può farsi relativamente alle linee tracciate su di una superficie; così, sono semplici la retta e la circonferenza, miste le coniche e le spiriche (σπειρικαί; cfr. p. 416). Fra le figure solide emerge la sfera, in cui va notato non solo il centro ed il diametro, ma anche l'asse ed i poli (cfr. il II Cap. del presente libro); ogni sezione piana di una sfera è un circolo; circolo e sfera godono della proprietà di avere il contenuto massimo a parità di contorno (cfr. p. 420).

Dopo la sfera, s'incontra il cono, figura in cui esiste una base, un vertice ed un asse; l'autore classifica i coni e le loro sezioni piane. Quindi si occupa del cilindro e della spira (cfr. p. 416), per volgersi alla classificazione dei solidi contornati da linee rette, distinguendone le seguenti specie: cubi (κύβοι), poliedri, prismi, travicelli (δοκίδες), quadrelli (πλινθίδες) (2), e cunei (σφηνίσκοι). La piramide regolare si chiama anche tetraedro ed il cubo esaedro; si sogliono poi anche considerare l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro, che, assieme ai due precedenti formano i cinque Πλάτωνος σχήματα mentre esistono altri tredici poliedri chiamati, dal nome di colui che ne fece la determinazione completa, Ἀρχιμήδους σχήματα (cfr. p. 123).

Anche nello spazio si può considerare il κάθετος di una figura; e, sia nel piano che nello spazio, esistono figure eguali e figure simili fra loro.

---

(1) Cfr. Weissenborn, *Das Trapez bei Euklid, Heron und Brahmegupta* (Abh. zur Gesch. der Math., II Heft. 1879, p. 167-181).

(2) Cfr. Teone Smirneo ed. Dupuis, p. 70. Cfr. anche L. V, n. 32.

Si trova finalmente un gruppo di definizioni concernenti le grandezze e le loro parti, i loro rapporti e le emergenti proporzioni, nonchè i numeri razionali ed irrazionali, commensurabili ed incommensurabili (1). Poi l'autore scende dall'astratto al concreto, definendo le unità di misura in uso. In tale enumerazione non lo seguiremo, anzi abbandoneremo le *Definizioni*, dopo di avere però notato che, se il lettore ricorrerà all'originale di queste, riscontrerà in esso tali inesattezze e tanti errori, che (ricordando quanto esponemmo nei nn. precedenti) si renderà ragione del giudizio pronunciato dal FRIEDLEIN colle parole: « haec intuens Heronem illum clarum geometriae et mechanicae artis peritissimum auctorem esse huius libelli persuadere mihi nequo ».

71. - Ciò che rimane delle altre opere di ERONE può dividersi in cinque sezioni, intitolate risp.: 1. Geometria; 2. Introductio stereometricorum; 3. Stereometricorum collectio altera; 4. Mensurae (Μετρικά); 5. Liber geeponicus (Γεηπονικὸς βιβλίον) (2). Lo studio di questi scritti venne cominciato e spinto anzi avanti da T. H. MARTIN, proseguito da M. CANTOR (3) e si può dire completato da P. TANNERY (4). Se, a differenza di quanto facemmo nei casi analoghi, non riassumeremo e discuteremo le conclusioni a cui essi pervennero, gli è che dell'opera Μετρικά (di cui il MARTIN, con estrema sagacia, riuscì a trovare le tracce e ricostruire il piano e di cui P. TANNERY aveva poi trovato un brano

(1) Ivi è ricordato un commento aritmetico dell'autore (τά μρὸ τῆς ἀριθμητικῆς στοιχειώσεως).

(2) Il tutto venne pubblicato da F. HULTSCH sotto il titolo *Heronis Alexandrini Geometricorum et Stereometricorum Reliquiae* (Berolini, 1864). Giova notare che sotto il nome Γεωπονικά si designano le collezioni greche di estratti di opere relative all'agricoltura; sotto la forma attuale vennero composte nel X secolo per merito dell'Imperatore COSTANTINO VII PORFIROGENNETO.

(3) Oltre alle *Vorlesungen*, si vegga il lavoro *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmessungkunst* (Leipzig, 1875).

(4) *L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie* (Mém. de Bordeaux, II Série, T. IV, 1882); *La stéréometrie d'Héron d'Alexandrie* (Id., T. V, 1884); *Études héroniennes* (Ivi); *Questions héroniennes* Bull. des Soc. math., II Série, T. VIII, 1884).

importante (1)), venne recentemente scoperta da R. SCHÖNE il manoscritto, nella biblioteca del Serraglio a Costantinopoli; esso abilita tutti a pronunciare sul suo valore un giudizio esente da qualunque elemento ipotetico, giacchè forma il nucleo dell'edizione completa di ERONE, che più volte abbiamo avuto occasione di citare (2). Con la scorta di essa analizzeremo l'unico lavoro eroniano che ancora ci resta da considerare e che si direbbe il prototipo di quei manuali scolastici che gli anglo-sassoni intitolano *Mensuration*.

72. - Il I Libro dei Μετρικά si apre con un preludio storico, che giova riferire perchè conferma o completa alcune notizie da noi fatte conoscere anteriormente.

Nelle sue origini la geometria si occupava, come ci apprende un'antica storia, della misura e della divisione delle terre, e appunto da ciò ebbe origine il nome geometria. Ma, essendo ciò utile agli uomini, il concetto di essa venne ampliato, cosicchè la trattazione delle misure progredì ai corpi solidi, e siccome le proposizioni trovate da principio non bastavano a ciò, così quelle divisioni richiesero ulteriori indagini, tanto che oggi stesso molto resta ancora da trovarsi, quantunque ARCHIMEDE ed EUDOSSO abbiano trattato eccellentemente tale soggetto. Giacchè, innanzi alla scoperta di EUDOSSO, era impossibile dimostrare che il cilindro è triplo del cono di egual base ed eguale altezza e che i cerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro diametri. E prima della acuta scoperta di ARCHIMEDE sembrava improbabile si arrivasse a pensare che la superficie della sfera fosse il quadruplo dell'area di un circolo massimo e che il suo volume fosse due terzi del volume del cilindro circoscritto e che esistessero ancora altre proposizioni dello stesso genere. Ora, poichè il detto studio è indispensabile, così noi ritenemmo opportuno di raccogliere tutto quello che i nostri predecessori scrissero e che noi stessi abbiamo poi trovato.

Cominceremo dalla misura delle aree piane, aggiungendo poi alle superficie piane le altre, convesse e concave, dal momento che il concetto di superficie non esige che due dimen-

(1) V. l'articolo *Sur un fragment inédit des Métriques d'Héron d'Alexandrie* (Bull. des sc. math., 2e Sér., T. XVIII, 1894, I Partie).

(2) La necessità di surrogare l'edizione dell'HULTSCH con altra meglio rispondente allo stato attuale delle nostre cognizioni venne dimostrata da J. L. HEIBERG nell'articolo *Der sogenannte Heronis liber geeponicus* (*Festschrift M. Cantor anlässlich seines LXXX Geburtstages*, Leipzig, 1903).

sioni. Le dette superficie devono essere paragonate ad una superficie a lati rettilinei e ad angoli retti, a lati rettilinei perchè le rette, a differenza delle altre linee, sono sovrapponibili a sè stesse (perchè ogni retta è sovrapponibile ad altra retta, mentre le altre linee, concave e convesse, non si possono tutte sovrapporre le une alle altre). Quindi il paragone si fa con qualche cosa d'invariabile, cioè con la retta, ed inoltre anche coll'angolo retto. Giacchè ancora ogni angolo retto è sovrapponibile a qualunque altro angolo retto, mentre i rimanenti non lo sono a tutti gli altri. Ora si parla di un cubito quadrato quando si ha un quadrato avente per lato un cubito, e similmente di un piede quadrato, quando si ha un quadrato avente per lato un piede, dimodochè le dette superficie vengono paragonate a tali porzioni di superficie od a parti delle medesime. I solidi a lor volta vengono paragonati ad un corpo fisso che ha gli spigoli rettilinei e gli angoli retti e che ha tutte le costole fra loro eguali — è un cubo, di cui ogni spigolo è un cubito od un piede —, oppure alle parti di questo cubo. Per quali ragioni poi il paragone venga fatto con le dette porzioni di spazio, fu detto: in seguito noi cominceremo con la misura delle superficie. Per non avere bisogno di nominare per ciascuna misura piedi o cubiti o loro frazioni, presenteremo i dati in unità, potendosi così intendere qualunque unità di misura.

Il tòno in cui è scritta questa prefazione ricorda lo stile del proemio al *Traguardo* e conferma le induzioni che noi abbiamo tratte da questo (n. 65) relativamente alla fisonomia generale di ERONE; egli appare, non come un NEWTON creatore del calcolo infinitesimale, ma piuttosto come un EULERO che ne riordina, completandole e perfezionandole, le dottrine fondamentali. Le ultime frasi di essa fanno palese una differenza sostanziale fra i metodi di esposizione di EUCLIDE ed ERONE: mentre questo non scende mai ad applicazioni numeriche delle regole contenute nelle sue proposizioni, questi vi si sofferma metodicamente, arrestandosi anzi nei particolari più minuti, quali la disposizione più opportuna ai singoli calcoli. In tali applicazioni egli suppone che i dati sieno sempre numeri *interi* ed in più occasioni mostra di saperli scegliere in modo da ottenere risultati *razionali*. Tale vincolo volontariamente assunto dal nostro autore non è senza inconvenienti, chè ad es. lo costringe ad esporre (Lib. I, Prop. I) la regola per calcolare l'area di un rettangolo nell'unico caso in cui i lati siano *multipli*

dell'unità di misura, senza nemmeno far cenno di quello (che era così facile esaurire) in cui i lati siano semplicemente *commensurabili* con la unità stessa.

Nelle prop. II-VI del I Libro dei *Metrica*, ERONE espone come si possano calcolare tutti gli elementi (inclusa l'area) di un triangolo ABΓ rettangolo, isoscele o scaleno (acutangolo od ottusangolo secondo che $\overline{AB}^2 + \overline{A\Gamma}^2 \gtrless \overline{B\Gamma}^2$) col mezzo di semplici applicazioni di teoremi ben noti a chi abbia studiati gli *Elementi* di EUCLIDE: giova notare che i dati numerici sono sempre scelti in modo che tutte le quantità di cui devonsi estrarre le radici quadrate siano quadrati perfetti. A questo punto ERONE osserva: « Sino ad ora noi abbiamo esposte le dimostrazioni geometriche mediante il calcolo, ma in seguito le misurazioni verranno effettuate con l'aiuto di un'analisi basata sopra la combinazione dei valori numerici ». Nel senso di queste parole vi è qualche oscurità, che scompare osservando che, dopo di averle scritte, ERONE passa ad esporre (nn. VII e VIII) *il metodo generale per calcolare l'area di un triangolo di cui si conoscano i lati*. Le pagine che egli dedica a tale esposizione, per eleganza e rigore di argomentazioni ed importanza di risultati possono competere fra le più belle che furono scritte durante il periodo aureo della geometria greca e non differiscono sostanzialmente da quelle che trovammo (n. 66) nel *Traguardo* sopra lo stesso tèma. Questa ripetizione venne da taluno interpretata come prova che quel metodo fu scoperto dal nostro geometra, chè è costume degli inventori di cogliere ogni occasione si presenti per far conoscere i loro ritrovati; altri invece dubitò di tale conclusione, notando che ERONE parla di quel metodo come di cosa esistente da tempo: comunque, mancando alcuna prova dell'essere quel metodo anteriore ad ERONE, è giustificatissimo il nome di *formola di Erone* dato all'espressione dell'area di un triangolo in funzione dei lati (1). Dopo di averla stabilita, ERONE fa vedere come si applichi, tanto nel caso in cui le altezze del

(1) In una lettega scritta da JACOBI il 21 settembre 1849 e pubblicata da L. KOENIGSBERGER (*C. G. J. Jacobi*, Leipzig. 1904, p. 468) è detto che quel grande matematico si trattenne un giorno nella celebre biblioteca di Wolffenbüttel e che fra l'altro vi

triangolo siano numeri razionali (es. triangolo di lati 13, 14, 15) quanto nell'ipotesi contraria (es. triangolo di lati 8, 10, 12).

Esaurita così la questione fondamentale di misurare l'area di un triangolo, si passa all'analoga relativa a figure più complicate; e, anzitutto ai quadrangoli di forme speciali: trapezio rettangolo (prop. 10ª), trapezio isoscele (11ª), trapezio acutangolo, cioè con due angoli acuti adiacenti (12ª), trapezio ottusangolo, cioè con due angoli acuti opposti (13ª), rombo e romboide, cioè parallelogrammo (14ª). Tutti questi quadrangoli godono della proprietà di avere una coppia di lati opposti fra loro paralleli: ERONE mostra poi come gli *Elementi* di EUCLIDE abilitino anche, senza ricorrere alla formola da lui scoperta per l'area di un triangolo, a calcolarne tutti gli elementi, non esclusa la superficie; di qualsia quadrangolo avente un angolo retto e di cui si conoscano i lati (prop. 14ª). A tale categoria di figure sono consacrati i due paragrafi successivi (XV-XVI); ma è strano che, con patente incoerenza. ERONE chiami tali quadrangoli *trapezi*, facendo così risorgere (cfr. p. 603) la questione intorno al significato dato dagli antichi a tale vocabolo, che notoriamente non si incontra in EUCLIDE.

ERONE lascia agli Indiani posteriori la gloria di stabilire l'espressione dell'area di un quadrangolo inscrittibile di cui si conoscano i lati, limitandosi ad osservare che, per calcolare la superficie di un quadrangolo qualunque fa mestieri conoscerne, oltre i lati, una diagonale. E passa (nn. XVII-XXV)(1) a calcolare approssimativamente le aree dei poligoni regolari di 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 lati: l'approssimazione pro-

---

scoperse " la traduzione latina di uno scritto ancora inedito, ove sino dal 200 a. C. si trova stabilita la formola

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

e dimostrata geometricamente in modo magnifico „: è presumibile si trattasse di una versione latina della *Diottra* o dei *Metrica* o di altro scritto di ERONE; ignoriamo se quel ms. sia stato poi studiato da altri (cfr. una Questione da noi proposta nella Bibliotheca mathematica, III Ser., T. XII, 1912, p. 182).

(1) Cfr. W. SCHMIDT, *Sind die Heronischen Vieleckformeln trigonometrisch?* (Bibl. mathem., III Ser., T. I, 1900, p. 319-20).

viene o dal fatto che s'incontrano radici seconde di quantità che non sono quadrati perfetti o dall'essere la determinazione dei lati di tali poligoni in funzione del raggio del cerchio circoscritto una questione che non cape entro i confini della geometria elementare.

Come si poteva risolvere in qualche caso con soddisfacente approssimazione era già stato dimostrato da IPPARCO (v. p. 522) in un'opera che si trovava a disposizione di ERONE e da cui questi estrae i risultati concernenti i lati dell'ennagono e dell'undecagono, aggiungendo di suo che *il lato dell'ettagono regolare sta al raggio del cerchio circoscritto approssimativamente nel rapporto* $^7/_8$, elegante risultato, che egli deduce dal seguente teorema: *il lato dell'ettagono regolare è sensibilmente eguale all'apotema dell'esagono regolare inscritto nel medesimo cerchio.* Questo teorema si diffuse in Europa assai prima dell'esumazione recente dei *Metrica:* lo fece conoscere GIORDANO NEMORARIO (1) come una « regola indiana », e ben a ragione egli lo chiamò così avendolo probabilmente appreso da ABÛ'L WAFA (2); lo si ritrova più tardi anche negli scritti di LEONARDO DA VINCI (3) senza alcun certificato d'origine. Ora da quanto testè si espose risulta che quel notevole risultato trae le sue origini dall'Europa e non dall'Asia, onde non è più il caso di designarlo col nome usato dal NEMORARIO.

Riguardo ai poligoni regolari (di 3, 5, 6, 8, 10, 12) costruibili con rigo e compasso, le argomentazioni usate da ERONE per calcolarne il contenuto sono esatte e porgono non spregevoli complementi al IV Libro degli *Elementi.*

Se si tratta di poligoni non regolari, per quadrarli ERONE ne suggerisce la decomposizione in triangoli; e se si tratta di un cerchio egli suggerisce l'applicazione del teorema di ARCHIMEDE (v. p. 318) che dice essere *11 volte il quadrato del diametro approssimativamente eguale a 14 volte l'area del cerchio;* ciò equivale ad assumere $\pi = {}^{22}/_7$; ma il nostro autore aggiunge: « Lo stesso ARCHIMEDE mostra nello scritto sopra il plintide ed il cilindro che il rapporto della circonferenza al diametro è maggiore di 21875 : 67441 e minore

(1) M. CANTOR, *Vorlesungen*, T. II, 2ª ed., p. 83.
(2) Id., T. I, 3ª ed., p. 745.
(3) Id., T. II, 2ª ed., p. 198.

di 197888 : 62351. Ma siccome tali numeri non sono comodi nei calcoli, siamo ricondotti al rapporto in numeri minimi $^{22}/_{7}$». Quale fosse l'opera a cui il nostro geometra si riferisce ci è ignoto; quanto ai limiti da lui indicati notiamo che l'ammettere

$$\frac{211875}{67441} < \pi < \frac{197888}{62351}$$

equivale a

$$3{,}1417\ldots < \pi < 3{,}173\ldots.$$

Gli stessi principi servono, mediante l'estrazione di una radice quadrata, a determinare il raggio di un cerchio equivalente ad una data area piana, nonchè a calcolare l'area di una corona circolare. Ben più nuova e difficile è la questione di calcolare l'area di un segmento circolare di cui si conosca la base (b) e l'altezza (h) (1). Erone ricorda che, nel caso che il segmento sia minore di una semicirconferenza. gli antichi ne valutavano l'area col mezzo di una regola che si traduce nella formola $\frac{b+h}{2}\,h$ e spiega siffatto modo di procedere notando che, nel caso limite in cui si tratti di un semicerchio ($b = 2h$), si giunge al risultato $\frac{3\,h^2}{2}$, il che equivale ad assumere $\pi = 3$. Egli aggiunge che coloro che si proposero di conseguire una maggiore approssimazione adoperarono invece l'espressione $\frac{b+h}{2}\,h + \frac{1}{14}\left(\frac{b}{2}\right)^2$, perchè, nell'ipotesi $b = 2h$, essa diviene

$$\frac{3\,h^2}{2} + \frac{h^2}{14} = \frac{1}{2}\,h^2\left(3 + \frac{1}{7}\right),$$

e dà

$$\pi = 3 + \frac{1}{7},$$

(1) Giova tenere presente che se un segmento appartiene al cerchio di raggio r ed ha un arco di ampiezza ω, la sua area è espressa da $\frac{r^2}{2}(\omega - \text{sen}\,\omega)$. Se, quindi, è minore di un semicircolo e se l ne è la base e h l'altezza esso ha per area

$$\frac{l^2 + 4\,(r-h)^2}{4}\,\text{arc. tg}\,\frac{l}{2\,(r-h)} - (r-h)\,l.$$

come ha insegnato ARCHIMEDE. Tali formole non vengono surrogate da ERONE con altre migliori, ma egli si limita ad esporre alcune considerazioni (XXVIII, XXIX, XXXII) atte a condurre a limiti superiori più approssimati per l'area di un segmento *minore* di un semicerchio; se invece si trattasse di un segmento *maggiore*, per quadrarlo basta considerarlo come differenza fra l'intero cerchio e un segmento minore. Per ottenere quei limiti ERONE si serve di un lemma di algebra geometrica, di cui va fatta menzione, meno per il suo intrinseco valore, che per la sua somiglianza con altri che incontrammo in ARCHIMEDE, la quale dimostra come i metodi d'indagine geometrica conservarono la loro indole e la loro fisonomia passando dalle mani del Siracusano a quelle dell'Alessandrino.

Non faremo più di un semplice cenno sopra i problemi XXXIV-XXXIX, giacchè non contengono che semplici applicazioni numeriche di quanto insegnò ARCHIMEDE intorno al calcolo della superficie dell'ellisse, di un segmento parabolico, di un cilindro circolare retto, di un cono o di una calotta sferica; preferiamo riferire la chiusa del I Libro, perchè delinea chiaramente la fisonomia scientifica dell'autore dei *Metrica:*

> Con questo ci sembra di avere detto abbastanza intorno al calcolo di tutte le forme di superficie determinate; ma, secondo noi, è anche necessario di far conoscere come si possano misurare anche le superficie non definite. Ora se una superficie è piana, ma contornata da una linea non definita, si segneranno sopra questa linea alcuni punti vicini, in modo che le rette che uniscono ciascuno al contiguo, formino una figura che non differisca sensibilmente da quella limitata dalla linea data, e la si calcolerà come si disse per un poligono, cioè decomponendola in triangoli. Ma se la superficie non è piana ma quale sarebbe quella di una statua o di altro oggetto somigliante, si prenderà del papiro o della tela finissima e si collocherà pezzo per pezzo su quella superficie, in modo da ricoprirla tutta; si stenderà poi il papiro o la tela sopra una superficie piana e se ne calcolerà la superficie nel modo indicato testè per quadrare un'area piana limitata da una linea non definita; l'area risultante darà la superficie cercata.

73. - Il II Libro del trattato che andiamo analizzando tratta, come già sappiamo, della misura dei solidi e si apre con le parole seguenti:

Esaurita la misura delle superficie rettilinee e non rettilinee, dobbiamo passare ai solidi, di cui, nel Libro precedente, imparammo a misurare le superficie, tanto quelli limitati da piani, quanto a quelli sferici, conici e cilindrici ed anche agli irregolari (παραδόξους). Alcuni, che pongono a base della ricerca storica l'ordine di successione, fanno risalire ad ARCHIMEDE i metodi relativi, che sono veramente meravigliosi. Provengano essi da ARCHIMEDE o da altri, è necessario di descriverli qui, affinchè il presente trattato non presenti lacune, per coloro che intendono occuparsi di tali questioni.

Il primo dei problemi di cui si occupa ERONE è l'analogo nello spazio di quello con cui apresi il I Libro della sua opera, cioè: « misurare un solido a lati rettilinei e ad angoli retti, di cui si conoscono le tre dimensioni, lunghezza, larghezza, profondità o spessore e viene risolto nelle identiche ipotesi in cui venne trattata l'analoga questione piana, cioè nella supposizione che i lati siano multipli dell'unità di misura. ERONE osserva subito come, in modo somigliante, si possa calcolare il volume di un cilindro retto circolare, di cui si conoscano base ed altezza, non senza notare come, invece della base, si possa adoperare indifferentemente una qualunque sezione retta, dal momento che tutte le sezioni rette di un cilindro sono fra loro eguali.

Applicando poi alcuni risultati stabiliti da EUCLIDE ed ARCHIMEDE, egli calcola successivamente i volumi di un cono retto od obliquo (n. I), di un analogo cilindro, di un prisma (παραλληλεπίπεδον) circolare obliquo, avente per base un poligono qualsivoglia (n. III) o un parallelogrammo (n. IV) e di una piramide qualsivoglia (n. V): non v'ha dubbio che il lettore converrà con noi che si poteva scegliere un criterio ordinatore assai migliore di quello a cui ERONE accordò la preferenza, per ragioni che ci sfuggono. Vengono in seguito calcolati i volumi di un tronco di piramide (nn. VI e VII) e del solido (mucchio di ghiaia) avente la forma indicata dalla fig. 91 (n. VIII). Due procedimenti per determinare il volume di un tronco di cono sono esposti nei nn. IX e X; mentre i due che seguono concernono la sfera ed il segmento sferico ad una base, non senza un cenno di applicazioni pratiche (p. es. determinazione del contenuto di una vasca da bagno). Nel probl. XII ERONE si occupa della *spira* (anello o toro), completo o tronco, e determina il vo-

lume della spira intera, nella tacita ipotesi che il cerchio generatore non tagli l'asse; ERONE a tale scopo applica un teorema di DIONISIDORO (L. IV, n. 33), il quale, in sostanza, dice che quel volume si ottiene moltiplicando la superficie del circolo generatore per la circonferenza descritta dal suo centro durante l'ipotetica rotazione; per giustificare (non diciamo dimostrare) tale proposizione ERONE immagina che

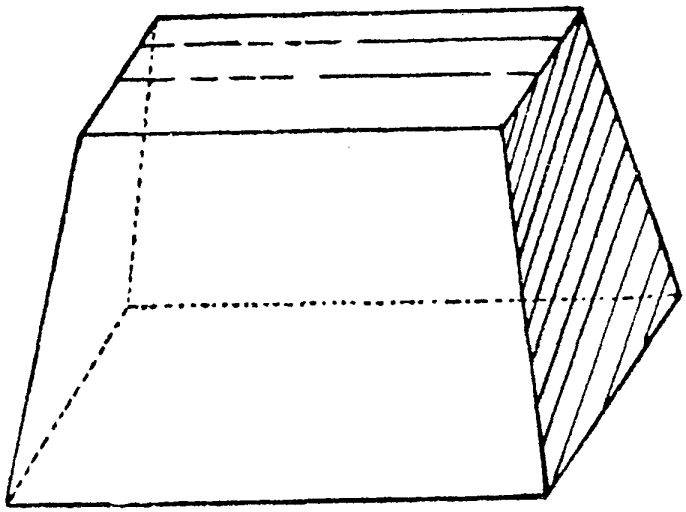


Fig. 91.

la spira si deformi in modo continuo si da finire per assumere l'aspetto di un cilindro retto avente per base quel circolo e per altezza questa circonferenza rettificata. Anche nei due seguenti problemi il nostro matematico si occupa di solidi che invano cercherebbersi negli *Elementi* di EUCLIDE o in altro congenere trattato; sono quelli di cui ARCHIMEDE ha insegnato la cubatura nel suo Ἐφοδικόν (vedi p. 325-328); si giunge così ad una inattesa conferma dell'autenticità di quell'opera! ERONE passa poi (nuovamente ispirandosi ad un criterio ordinatore di cui non riusciamo a trovare la ragione) ad occuparsi della cubatura dei cinque poliedri regolari, osservando anzitutto che il caso del cubo non esige se non l'applicazione in un caso particolarissimo della regola data in principio per calcolare il volume di un parallelepipedo rettangolo. Per trovare il volume del tetraedro regolare (n. XVI) ERONE comincia a calcolarne l'altezza, dopo di che ogni difficoltà scompare, dal momento che il volume cercato non è che la terza parte del prodotto

di una faccia del tetraedro per la trovata altezza. Similmente si calcola il volume dell'ottaedro (n. XVII), decomponendo, cioè, questo solido in due piramidi a base quadrata fra loro eguali, delle quali tutti gli elementi si determinano con ogni facilità. Ad altro concetto giova invece ricorrere per valutare i volumi degli altri due solidi regolari; ERONE, infatti, decompone l'icosaedro in venti piramidi regolari a base pentagonale, aventi per basi le facce del poliedro considerato e per comune vertice il centro dello stesso; similmente pel dodecaedro. Siccome le aree delle facce si possono calcolare servendosi di quanto si espose nel II Libro dei *Metrica*, così tutto è ridotto a calcolare le altezze di quelle piramidi, cioè i raggi (r) delle sfere inscritte nell'icosaedro e nel dodecaedro in funzione dello spigolo relativo (l). Il lettore sarà desideroso di conoscere per quale via ERONE raggiunga tale scopo; ma egli è destinato a rimanere (per dirlo con DANTE) con « di più sapere angosciosa carizia »; chè ERONE si limita a dire che il rapporto $r : l$ vale per l'icosaedro 127 : 93 e per il dodecaedro $^8/_9$, senza dare alcuna notizia intorno alla fonte a cui attinge tali notizie, e, ciò che è ancor più grave, nemmeno avvertire se i valori assegnati per quei rapporti siano esatti od approssimati (1).

Come chiusa a tutto il Libro il nostro geometra fa testualmente le osservazioni seguenti, di cui l'analogia con l'epilogo del Libro precedente dei *Metrica* non isfuggerà certamente al lettore:

Dopo di avere misurato i solidi geometricamente definiti, crediamo di fare almeno un rapido cenno della misura di quelli non determinati, quali sarebbero radici di alberi e pezzi di marmo, giacchè alcuni riferiscono che ARCHIMEDE abbia immaginato un metodo che serve allo scopo. Quando, dunque, il corpo da misurare sia di facile trasporto, ci procureremo una

(1) È opportuno ricordare che il rapporto $r : l$ vale

per il dodecaedro regolare $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25 - 11\sqrt{5}}{10}}$,

per l'icosaedro regolare $\frac{\sqrt{3}\,(3 + \sqrt{5})}{12}$.

vasca avente la forma di un parallelopipedo rettangolo, capace di contenere ciò che si vuole misurare, la riempiremo d'acqua e vi immergeremo il dato solido. È chiaro che in conseguenza uscirà dalla vasca una parte dell'acqua; quando quel corpo verrà estratto dalla vasca, da questa ne mancherà una quantità eguale al volume del corpo immerso. Se ora misuriamo lo spazio della vasca rimasto vuoto, otterremo il cercato volume del solido immerso. Ma la stessa misurazione si può effettuare per altra via. Si ricopra, infatti, il solido considerato *di cera o di argilla*, per modo che, dopo ricoperto, risulti rettangolare; misuriamolo sotto questo nuovo aspetto, togliamo poi la cera o l'argilla aggiunta e disponiamo questa sotto forma parallelepipeda, misuriamo il volume risultante e sottragghiamolo dal volume misurato dianzi; risulterà così quello del dato solido. Tale metodo va consigliato quando si tratti di solidi che non si possono trasportare.

74. - Nel III Libro della sua opera ERONE tratta della divisione delle figure, tema di cui, nell'esordio, rileva l'utilità pratica, e che presenta un'analogia indiscutibile con quello di una delle opere perdute di EUCLIDE (v. p. 250-252); anzi è da deplorare l'incuria di ERONE nel dare notizia dei lavori de' suoi predecessori; ove ne avesse date sopra quell'argomento, avrebbe somministrato preziosi elementi di giudizio agli storici e inapprezzabili punti d'appoggio ai divinatori di quel lavoro euclideo.

Dei ventitre problemi trattati, i quattro primi concernono i triangoli. I tre primi hanno per fine la divisione di un triangolo, del quale si conoscono i lati, in due parti che stiano in un dato rapporto, col mezzo di una retta che passi per un vertice, sia parallela ad un lato o contenga un punto di un lato. Ben più nuovo ed interessante è il successivo, il quale ha per iscopo la iscrizione in un triangolo ABΓ, di cui si conoscano i lati, di un triangolo ΔEZ (fig. 92) di data area. Per risolverlo ERONE aggiunge la condizione che i vertici del nuovo triangolo dividano i lati dell'antico in uno stesso rapporto e ciò per potersi giovare del seguente teorema che egli enuncia come già noto: « Se sopra i lati del triangolo ABΓ si prendono i punti Δ, E, Z per modo che sussistano le relazioni $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{BZ}{Z\Gamma} = \frac{\Gamma E}{EA}$ i tre triangoli AΔE, BΔZ, ΓZE risulteranno fra loro equivalenti »(1). Fra gli infiniti triangoli ΔEZ soddisfacenti a tali condizioni eiv-

dentemente uno ve n'è pel quale il triangolo ΔEZ ha una data area; ERONE lo determina mostrando come, per la corrispondente posizione di Z, il prodotto dei due segmenti in cui quel punto divide il lato BΓ, formino un dato prodotto, onde la ricerca di Z è ridotta ad un problema di applicazione d'area (p. 42-45). Trovato Z, la determinazione degli altri due vertici del triangolo richiesto è ridotta evidentemente ad una duplice applicazione della divisione di un

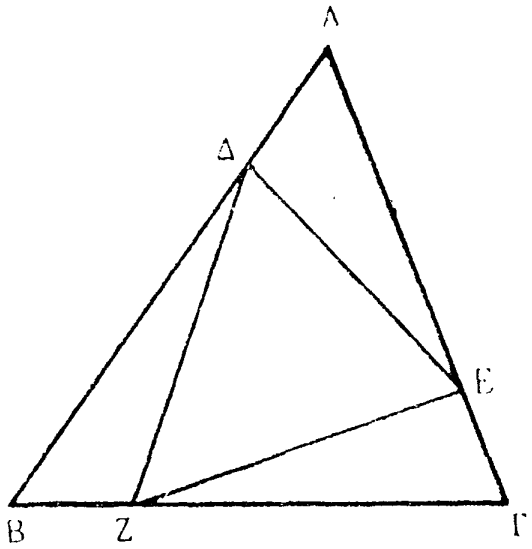


Fig. 92.

segmento in due parti che stiano in un dato rapporto. Come emerge da questi cenni, l'argomentazione eroniana non lascia nulla a desiderare, quanto ad eleganza e rigore, onde si potrebbe introdurre anche oggi nell'insegnamento elementare.

---

(1) Per riconoscere l'esattezza di quanto afferma ERONE si osservi che, detto $l : m$ il valore comune di quei tre rapporti, si ha

$$A\Delta = \frac{l}{l+m} AB\,, \quad BZ = \frac{l}{l+m} B\Gamma\,, \quad \Gamma E = \frac{l}{l+m} \Gamma A$$

$$B\Delta = \frac{m}{l+m} AB\,, \quad \Gamma Z = \frac{m}{l+m} B\Gamma\,, \quad AE = \frac{m}{l+m} \Gamma A$$

onde

$$\frac{\text{tr}\,.\,A\Delta E}{\text{tr}\,.\,AB\Gamma} = \frac{A\Delta\,.\,AE}{AB\,.\,A\Gamma} = \frac{lm}{(l+m)^2}\,, \text{ ecc.}$$

Vedremo più avanti (p. 695) come PAPPO abbia osservato che i due triangoli ABΓ, ΔEZ hanno lo stesso baricentro.

Qualche appunto si può invece far alla applicazione numerica che egli ne fa al triangolo di lati $AB = 13$, $B\Gamma = 14$, $A\Gamma = 15$ e di area 84; supposto che l'area del triangolo domandato sia 24, quelle dei tre triangoli circostanti sono misurate da 20 ed il punto Z deve soddisfare la condizione $ZB \times Z\Gamma = 46$. Siccome d'altronde $ZB + Z\Gamma = 14$ così ZB e $Z\Gamma$ sono radici dell'equazione di secondo grado $\omega^2 - 14\,\omega + 46 = 0$, le cui radici sono $7 \pm \sqrt{3}$. Come ERONE la risolva ci è ignoto; egli assume approssimativamente $BZ = 8$, $\Gamma Z = 5 + \frac{1}{2}$, mostrando, così, di prendere una volta $\sqrt{3} = 1$ ed un'altra volta $\sqrt{3} = \frac{3}{2}$ e non badando che, in conseguenza i due segmenti BZ e $B\Gamma$ dànno per somma, non 14, ma soltanto $13\,\frac{1}{2}$.

I quattro paragrafi successivi si riferiscono al problema della divisione di un trapezio, col mezzo di una retta, in due parti che stiano in un dato rapporto; esso viene risolto anzitutto (n. V) nel caso in cui la retta cercata, oltre passare per due punti appartenenti ciascuno ad una base, deve contenere l'intersezione degli altri due lati del trapezio. Da ciò si traggono gli elementi per risolverlo nell'ipotesi che la retta debba congiungere un punto dato sopra una delle basi ad un punto da determinarsi sull'altra (n. VI). All'ipotesi che la retta debba risultare parallela alle basi sono dedicati i nn. VI e VII.

Siccome i circoli stanno fra loro nel rapporto dei quadrati dei loro raggi, così il problema di «togliere da un dato circolo un'area circolare che stia alla data in un rapporto assegnato» non offre alcuna difficoltà (*Metrica*, Lib. III, n. IX).

A questo punto ERONE osserva:

> Si sono da noi considerate sino ad ora tutte le superficie che possono essere divise mediante calcoli numerici. Ma quelle che possono bensì venire divise, ma non mediante calcoli numerici, le tratteremo ora geometricamente.

In tale distinzione non si può oggi convenire col nostro autore, giacchè è noto che qualunque problema di geometria può, almeno teoricamente, risolversi tanto aritmeticamente

quanto graficamente; egli la manifesta per spiegare perchè dei seguenti problemi esponga soltanto soluzioni geometriche.

La prima delle questioni del preteso nuovo tipo trattate da ERONE è la seguente: « Dato un triangolo ABΓ ed un punto Δ del lato BΓ prolungato, condurre per esso una trasversale che stacchi dal dato un triangolo AEZ la cui area stia in un dato rapporto con quella del triangolo dato ». Per risolverla basta notare che, in conseguenza, è nota anche l'area del triangolo AEZ, epperò il prodotto AE AZ, epperò la questione si riduce immantinente a quella trattata, come dice ERONE « nel II Libro della Sezione di spazio »; ed a lui non sfugge la circostanza importantissima che tale riduzione è dipendente dall'ipotesi che il punto Δ appartenga alla retta BΓ.

Notevoli sono i due paragrafi seguenti, che concernono la divisione di un quadrilatero qualunque AB in due parti, che stiano in un dato rapporto, col mezzo di una retta congiungente un punto E dato sopra il lato A con un punto Z da determinarsi sopra il lato opposto.

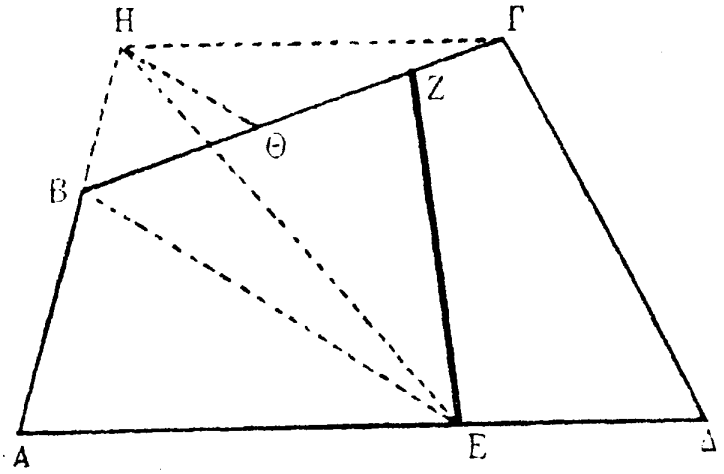


Fig. 93.

Per ragioni che risulteranno fra poco il geometra greco considera anzitutto il caso in cui il dato rapporto sia espresso da AE : EΔ. In tal caso (fig. 93) per risolvere il problema si guidi da Γ la parallela al lato AΔ sinchè incontri in B il lato AB; si uniscano B e H con E e si conduca da H la retta HΘ parallela a BE. Si divida, finalmente, il segmento ΓΘ nel punto Z in due parti ΘZ, ZΓ che stiano fra loro nel rap-

porto AE : EΔ . ZE sarà la retta cercata, come non è difficile dimostrare.

Orbene da ciò si può desumere la soluzione dell'analogo problema per il caso in cui il dato rapporto sia qualunque. Sia, infatti (fig. 94) ABΓΔ il quadrangolo dato, E il punto dato e AH : HΔ il dato rapporto; come si è testè veduto si potrà costruire la retta HΘ in modo che risulti

$$\frac{quadr.\ ABΘH}{quadr.\ ΓΔHΘ} = \frac{AH}{HΔ}.$$

Si conduca ora la retta EΘ e da H la parallela HZ; è chiaro che i due trilateri HΘE e ZΘE risulteranno equivalenti, onde sarà pure $\frac{ABZE}{ΓΔEZ} = \frac{AH}{HΔ}$ come volevasi ottenere.

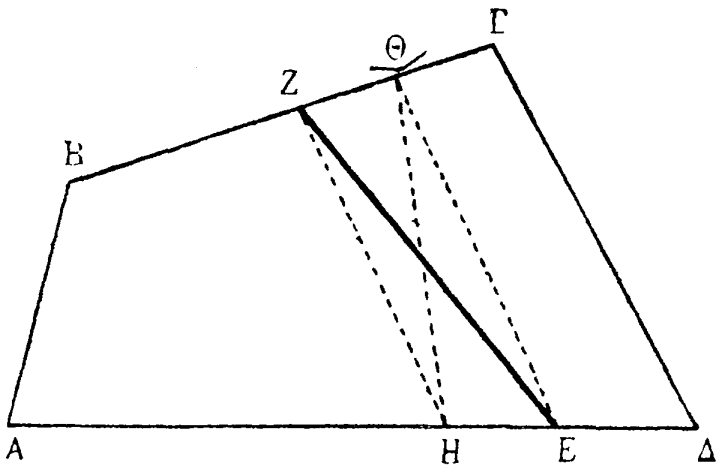


Fig. 94.

Ad altri concetti fa mestieri ricorrere per risolvere la stessa questione nel caso in cui il dato punto E non appartenga ad alcun lato del dato quadrilatero; essi sono di natura diversa secondochè i lati AΔ, BΓ sono o non fra loro paralleli; d'onde la necessità di considerare separatamente questi due casi:

a) Nel primo caso (fig. 95) sia HZ la retta richiesta; essendo noto il trapezio ABΓΔ e conoscendosi il rapporto delle parti in cui esso è diviso dalla retta domandata, si conoscono anche le aree delle parti stesse; e siccome l'area ABHZ è data dal semiprodotto della somma AZ + BH per l'altezza del trapezio, così si conosce quella somma, onde il

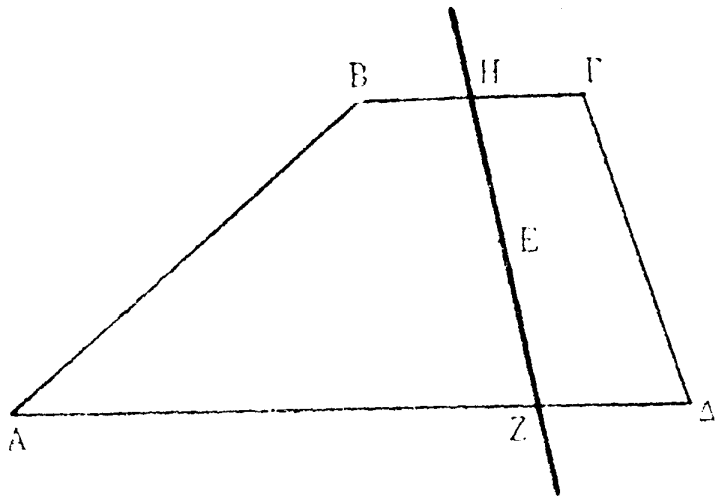


Fig. 95.

problema proposto è ridotto a quest'altro: date (fig. 96) due rette fra loro parallele ed un punto (A , B) su ciascuna, non chè un punto E esterno, condurre per questo una retta che stacchi dalle date parallele due segmenti la cui somma

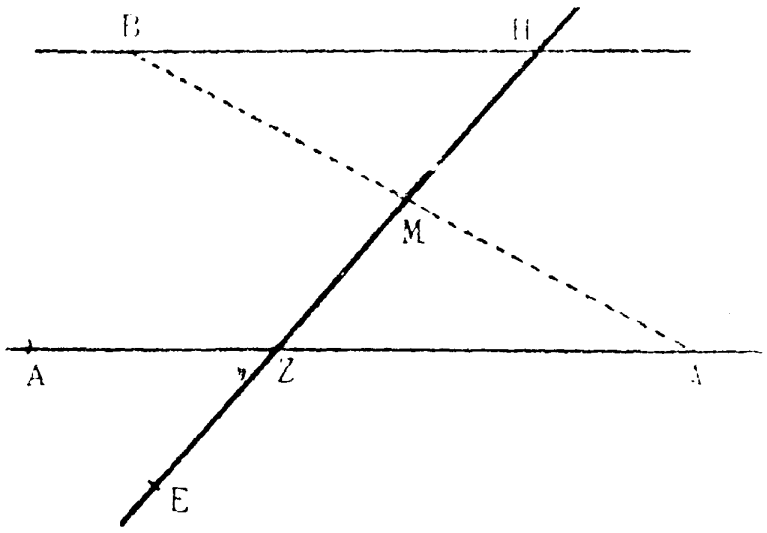


Fig. 96.

eguagli un dato segmento AΔ. ERONE ne insegna (n. XVI) la seguente semplicissima soluzione: Si conduca la retta BΔ, se ne segni il punto medio M; la retta EZMH soddisfa a tutte le condizioni del problema (1).

(1) Una seconda retta soddisfacente al quesito si otterrebbe considerando il punto della retta AZ simmetrico di Δ rispetto a Z

b) Nel secondo caso, si chiami Θ il punto in cui si tagliano le rette AΔ e BΓ (fig. 97): del risultante triangolo ΓΔΘ si conoscono tutti gli elementi, epperò l'area; d'altronde sono note le aree dei due quadrangoli in cui la cercata trasversale spezza il quadrangolo dato; in particolare quella del quadrangolo ABHZ, epperò del triangolo ΘHZ è nota la superficie (1); in conseguenza la ricerca della trasversale

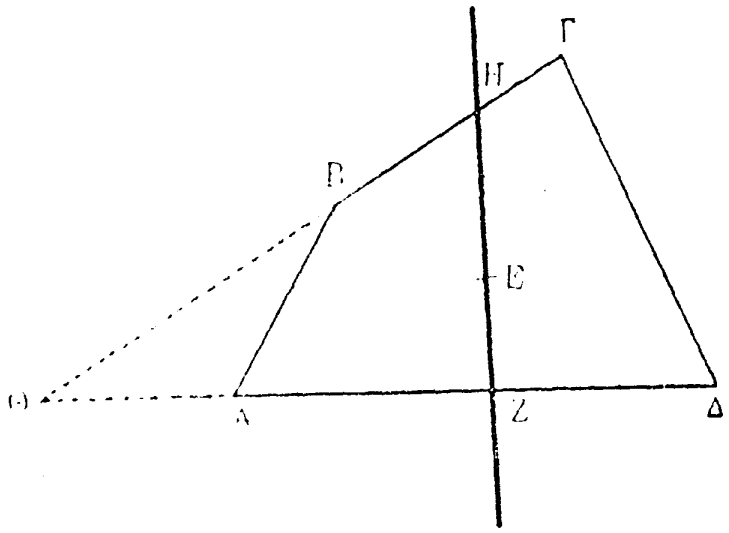


Fig. 97.

domandata è nuovamente ridotta al problema della sezione di spazio.

Ora questi procedimenti risolutori, già di per sè notevolissimi, crescono di pregio quando, con ERONE, si nota che sono sostanzialmente applicabili al problema analogo relativo ad un poligono qualunque. In tal caso si tratta di trovare sopra i lati BΓ e ZE due punti Θ, E tali che la loro congiungente passi per un dato punto Ω e divida il dato poligono in due parti che stiano in un dato rapporto. Per giungere a tale risultato si comincia dal notare che, in conseguenza, si conoscono anche le aree dei due poligoni parziali. Ora se BΓ e ZE sono fra loro parallele (fig. 98) e si conduce la retta ΓE, si vede subito che è nota la somma HE + ΘΓ ed il problema subisce la stessa riduzione di prima: se invece BΓ e ZE s'incontrano in un punto O (fig. 99), si riconosce

(1) A torto H. SCHOENE (*Heronis Opera omnia*, T. III, p. 167, nota) ritiene che di tale triangolo si conosca *anche* la forma.

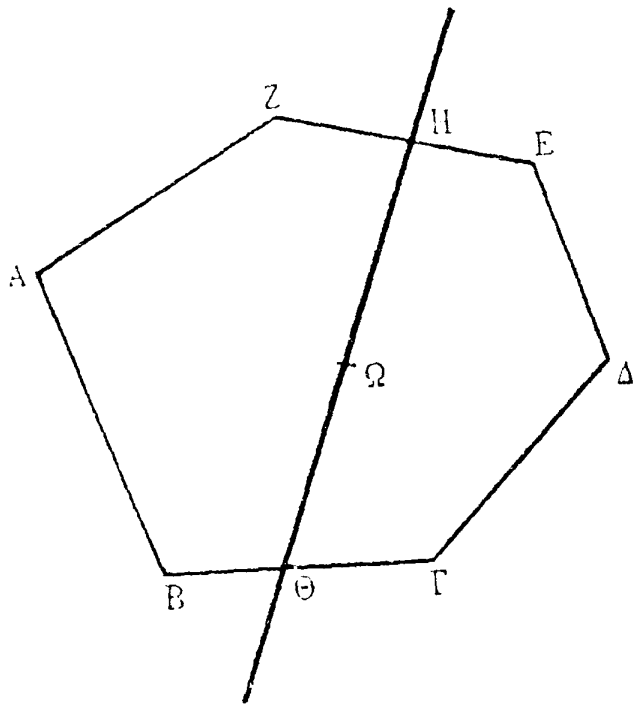


Fig. 98.

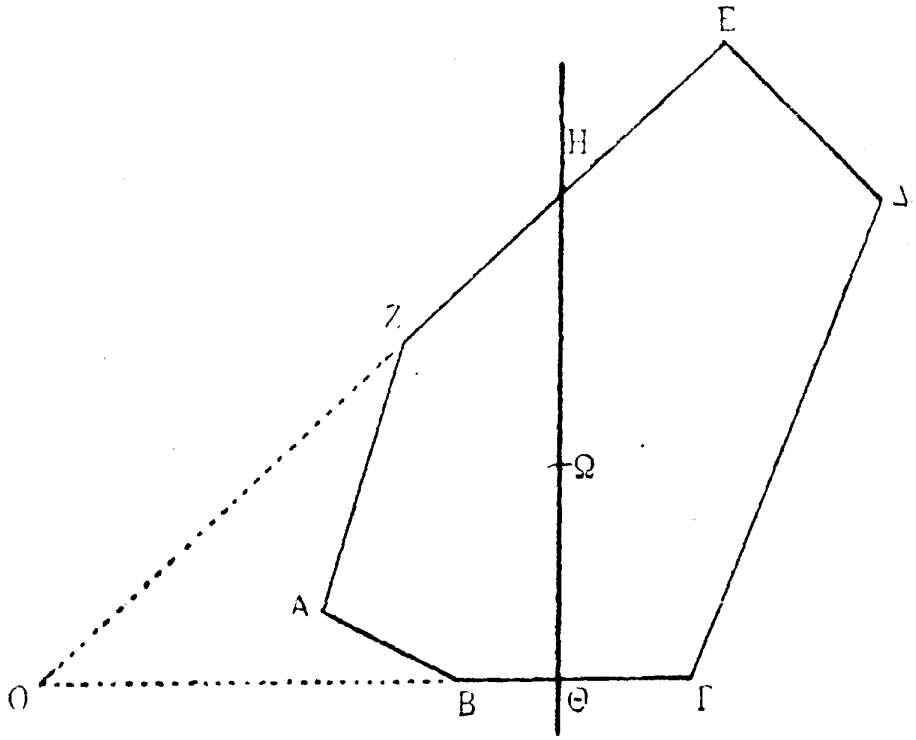


Fig. 99.

senza stento essere nota l'area del triangolo OHΘ, epperò conoscersi anche il prodotto OH + OΘ; donde di nuovo si ottiene la riduzione del problema a quello della sezione di spazio. Tuttavia, quando il punto pel quale deve passare la retta cercata appartenga ad un lato del dato poligono (sia ad es. il punto H del lato EZ), la questione si risolve meglio col seguente procedimento, che pure appartiene al nostro matematico (v. n. XIV): il ragionamento fatto prima dimostra che si conoscono le aree delle due parti in cui il poligono è decomposto dalla trasversale richiesta; p. es. (fig. 100),

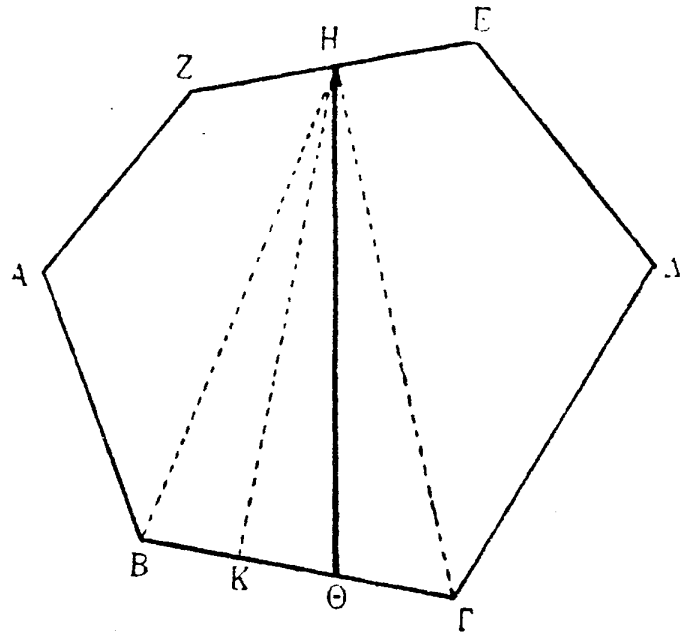


Fig. 100.

sia nota l'area del poligono ΓΔΕΗΘ; si conduca la diagonale ΗΓ; si conosce l'area del quadrangolo ΗΕΔΓ, onde lo stesso può ripetersi per il triangolo ΔΗΘ: ora, condotta l'altezza ΗΚ, si ha triang. $\text{ΗΓΘ} = \frac{1}{2}\,\text{ΗΚ} \times \Gamma\Theta$, onde anche il segmento ΓΘ è conosciuto, epperò il punto Θ si può agevolmente segnare.

75. - Seguitando nella nostra analisi del III Libro dei *Metrica*, faremo un cenno fugace del problema (n. XVII) di dividere una sfera con un piano in due parti tali che le superficie stiano fra loro in un dato rapporto; ERONE applica i risultati esposti da ARCHIMEDE nel II dei suoi Libri *Sopra la sfera ed il cilindro*, e conclude che, per giungere

al risultato voluto, basta dividere un diametro della data sfera in due parti i cui quadrati stiano fra loro nel dato rapporto: il piano condotto per il punto di divisione perpendicolarmente a quel diametro risolve la questione.

Maggior novità e difficoltà presenta il « problema della trisezione del circolo » (n. XVIII); anzi, gli ostacoli che presenta la risoluzione esatta di tale problema sono tali che ERONE si limita ad esporne una soluzione approssimata; ecco in che cosa consiste (fig. 101): Sia A il centro del circolo da dividere, BΓ il lato del triangolo equilatero in-

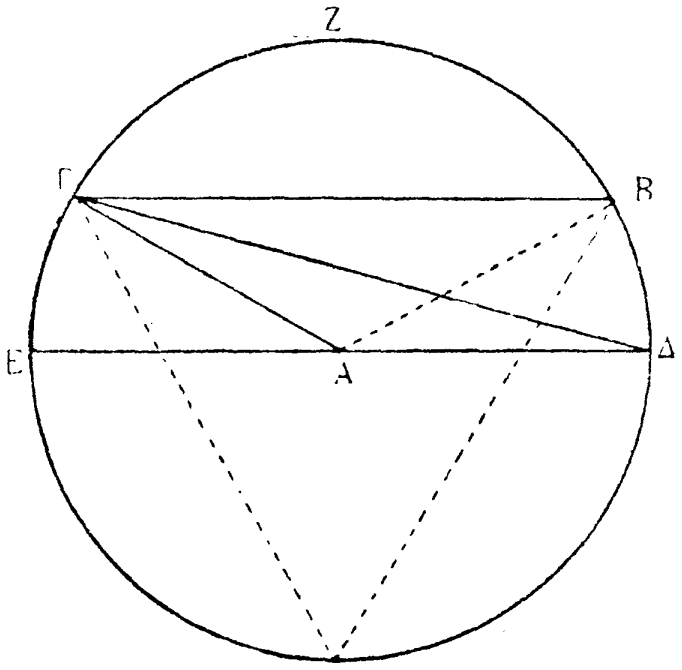


Fig 101.

scritto e ΔE il diametro parallelo; il segmento circolare AΓZBΔ è approssimativamente eguale alla terza parte del dato circolo. Per misurare il grado di approssimazione così raggiunta si osservi che l'angolo ΓAΔ vale $\frac{5\,\pi}{6}$, onde, se r è il raggio del dato cerchio, ERONE afferma essere approssimativamente

$$\frac{r^2}{2}\left(\frac{5\,\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{5\,\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2$$

ossia

$$\pi = 6 \operatorname{sen}\frac{\pi}{6},$$

base agli oggetti che essi servono a contare, chiamandoli ad esempio meliti (*di mele*) o fialiti (*di fiale*). D'altronde, egli non ammette, come fa l'aritmetico, che vi sia un minimo, a meno che non si tratti di qualche genere speciale: così un uomo rispetto ad una moltitudine sarà per lui una misura ed una specie di unità. Alla lor volta l'Ottica e la Canonica derivano dalla Geometria e dall'Aritmetica. La prima impiega le linee visuali e gli angoli che esse formano. Le suddivisioni di essa sono: l'Ottica propriamente detta, che rende conto degli errori dovuti alla distanza nell'aspetto degli oggetti visti, per esempio delle convergenze delle parallele o dell'arrotondamento dei quadrati in circoli (1); la Catottrica, consacrata completamente alla riflessione sugli specchi di qualunque sorta ed allo studio complicato delle immagini, la così detta Scenografia, la quale insegna a fare disegni rappresentanti degli oggetti a distanze ed altezze differenti, pur conservando alla vista la proporzione e la forma di tagli oggetti. Quanto alla Canonica, essa studia i rapporti sperimentali delle lunghezze armoniche e cerca le divisioni canoniche, adoperando sempre i sensi e, come dice PLATONE, mettendo l'orecchio davanti all'intelligenza. Viene poi ciò che si chiama Meccanica, parte dello studio degli oggetti sensibili e materiali; appartengono ad essa: l'Organopeica, per la costruzione di apparati guerreschi, quali sono quelli che, si dice, abbia inventati ARCHIMEDE per difendere Siracusa assediata; la Taumatopeica, sia che essa adoperi ingegnosamente i movimenti dell'aria, come nei trattati di CTESIBIO ed ERONE, sia che con pesi, fili o fibre essa imiti i movimenti e le azioni degli esseri animati. La Meccanica comprende ancora la conoscenza dell'equilibrio in generale e di ciò che si chiama centro di gravità, la Sferopea che imita le rivoluzioni celesti (fu trattata ad esempio da ARCHIMEDE); in una parola tutta la cinetica della materia. Finalmente l'Astrologia si occupa dei movimenti del mondo, delle grandezze e delle forme dei corpi celesti, della loro illuminazione e delle loro distanze dalla Terra, come pure di tutte le questioni analoghe; essa si poggia molto sull'esperienza dei sensi ed ha inoltre molte affinità colla Fisica. Sono parti di essa: la Gnomonica, che si occupa della determinazione dell'ora mediante i gnomoni; la Metereoscopica, che indaga le varie altezze e distanze degli astri ed insegna buon numero di svariati teoremi di Astrologia; la Diottrica che, col mezzo di opportuni strumenti, insegna le posizioni del sole, della luna e dei vari astri (2).

---

(1) Cfr. i teoremi dell'*Ottica* di EUCLIDE riferiti a p. 562.

(2) PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 76-79.

Che GEMINO abbia volto il suo pensiero anche al postulato delle parallele si deduce da un cenno fugace fatto da PROCLO (id., T. II, p. 11) ed è confermato da un manoscritto arabo, che è attualmente in corso di stampa ed in cui il nome di GEMINO ricorre più volte (1) come autore di osservazioni relative al *I Libro di Euclide* e che già si accade di sfruttare (v. p. 596), e più ancora dal commento di ANARIZIO, secondo la versione latina pubblicata da M. CURTZE (2). Si apprende da questo che GEMINO introdusse nella teoria delle parallele il concetto della loro distanza (l. c., p. 9); che egli dimostrò (p. 121) la proposizione: « se due rette sono parallele ogni perpendicolare calata da un punto della prima sulla seconda è perpendicolare anche alla prima », e successiaamente anche i teoremi seguenti nell'ordine indicato: « Se una retta è perpendicolare a due altre, queste sono parallele e quella ne segna la distanza. Se una retta taglia due rette fra loro parallele, risultano eguali gli angoli alterni; di più, un angolo esterno sarà eguale all'interno ed opposto; e due angoli dalla stessa parte saranno supplementari. Se una retta ne incontra due altre per modo che risultino eguali o due angoli interni, o un angolo esterno e l'interno ed opposto, o supplementari due angoli interni dalla stessa parte, queste due rette saranno parallele ».

3. - Da tutto ciò che dicemmo sino ad ora riguardo a GEMINO risulta che i suoi studi geometrici dovevano avere una considerevole estensione; eran dessi consegnati in una unica opera enciclopedica, oppure trovavansi ripartiti in

---

(1) *Codex Leidensis*, 399, 1, ed. BESTHORN et HEIBERG, Parte I, Hauniae, 1893 e 1897, p. 9, 110, 121, 123, 125, 127, 131, 133 e 169.

(2) *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii*. Lipsiae, 1899. p. 13 (le parallele come linee equidistanti), p. 26 (nuova definizione di angolo), pp. 66 e 70-73 (sulla teoria delle parallele). È necessario avvertire che in entrambe queste opere non s'incontra il nome di GEMINO, ma bensì AGANIS, ritenuto per una corruzione di quello da coloro che se ne fecero editori; contro tale identificazione insorse P. TANNERY (*Le philosophe Aganis est-il identique à Geminus?* Bibl. math., III Ser., T. II, 1901), mentre a favore di essa si schierò invece il TITTEL in un articolo che citeremo tra poco (p. 650).

vari scritti? A tale questione PROCLO non dà nemmeno un principio di soluzione. Nè maggior soccorso porgono gli altri commentatori di cui disponiamo: vero è che, non soltanto SIMPLICIO, ma anche PAPPO ed EUTOCIO parlano di GEMINO; ma il primo si limita a citarlo come testimonio dell'abilità di ARCHIMEDE (1), ed il secondo, una volta (2) ne riferisce l'opinione intorno alla natura delle proposizioni indimostrate con cui comincia l'opera sull'*Equilibrio dei piani* di ARCHIMEDE (v. p. 385) ed un'altra volta ne invoca l'autorità per esporre le origini della teoria delle coniche (3). Tuttavia dalla citazione di PAPPO si è dedotto (4) che l'opera di GEMINO aveva per titolo Περί τῆς τῶν μαθεμάτων τάξεως (*Sulla classificazione delle scienze matematiche*), mentre da quella di EUTOCIO si concluse (5) che il titolo cercato è τῶν Μαθεμάτων θεωρίας (*Teoria delle matematiche*), aggiungendo che il precedente compete soltanto ad una sezione di quest'opera. Resta così dimostrato improprio il titolo *Libri geometricarum e arrationum*, adottato nel 1560 da F. BAROZZI (primo traduttore di PROCLO) e poi accettato dalla generalità degli storici, epperò inaccettabile l'opinione del MONTUCLA (6) — divisa dallo CHASLES (7) — che l'opera di GEMINO non fosse che una specie di commento storico-filosofico sulle principali scoperte geometriche: trattavasi invece piuttosto di un « Corso completo di matematiche » o di una « Enciclopedia matematica ». Di tale opera si trovano ancora traccie in molti scritti tuttora esistenti, in particolare nella compilazione, intitolata *Anonymi variae collectiones*, pubblicata da F. HULTSCH in appendice alla sua edizione di ERONE (8): sono osservazioni intorno alla definizione ed allo scopo della geometria, sulla definizione di continuo e sulle tre dimensioni dei corpi, sulla logistica e la geodesia,

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 1026.
(2) *Archimedis Opera omnia*, T. III, p. 308.
(3) *Apollonii Pergaei quae graece extant*, ed. HEIBERG, T. II, Lipsiae, 1893, p. 170. Questo brano venne da noi riferito a p. 154
(4) *Vorlesungen*, T. I (3ª ed., Leipzig, 1907), p. 410.
(5) P. TANNERY, *La géométrie grecque*, p. 19.
(6) *Histoire des mathématiques*, T. I, p. 266 della 2ª ed.
(7) *Aperçu historique*, p. 25.
(8) *Her. Alex. Geom. et Ster. Reliquiae*, p. 246-249.

osservazioni di esiguo pregio e che porgono poco sussidio alla ricostruzione dei lavori matematici di GEMINO.

4. - Ma la letteratura greca annovera un'opera astronomica che porta lo stesso nome d'autore; è un'*Introduzione ai fenomeni* (Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα), ove, in base ai lavori di IPPARCO, vengono esposti gli elementi dell'astronomia di osservazione. Non la menzionammo nel Libro precedente perchè il suo valore — malgrado le numerose edizioni di cui venne onorata (1) — non ci parve tale da meritare molte parole. Se qui ne facciamo cenno gli è che ad essa ricorsero tutti coloro che vollero determinare in quale epoca vivesse GEMINO.

Ed appunto servendosi di essa D. PETAU (1583-1652) (2), e più recentemente il CANTOR (3), sostennero che l'*Introduzione* fu scritta nel 77 a. C., mentre il BONJOUR (4) propose il 137, ed il 140 a. C. il BRANDES (5): similmente il NESSELMANN (6) fece vivere GEMINO mezzo secolo a. C., ed il FRIEDLEIN lo ritenne (7) contemporaneo di CICERONE (106-43 a. C.); ma queste conclusioni sembrano rese inaccettabili dalla citazione del filosofo peripatetico BOETO DA SIDONE (8) condiscepolo di STRARONE (9), onde l'*Isagoge* sa-

---

(1) La prima edizione venne fatta dall'HILDERICH (Altorphii, 1590) e tosto ripetuta (Lugd. Batav., 1603). Segue poi l'inserzione nell'*Uranologium* del PETAU (Lutet. Par. 1630 e Amstel., 1703) e, in principio del nostro secolo, nella *Chronologie de Ptolémée par M. l'abbé* HALMA, Paris, 1819, p. 7-87. L'edizione più recente è quella del MANITIUS citata più innanzi.

(2) V. l'opera *Opus doctrina temporum* (Lut. Par., 1627) ed il succitato *Uranologium*.

(3) *Vorlesungen*, T. I (3ª ed.), p. 409.

(4) *De nomine Josephi a Pharaone imposito*, Romae, 1696.

(5) *Ueber das Zeitalter des Astronomen Geminos und des Geographen Eratostenes* (Jahrb. üb. klass. Phil., T. XIII, Supplem.).

(6) *Die Algebra des Griechen*. Berlin, 1843, p. 6.

(7) *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer*, etc. Erlangen, 1869, p. 10.

(8) Cfr. E. ZELLER, *Die Philosophie der Griechen*, III Tl., I Abt., IV Aufl. Leipzig, 1909, p. 47.

(9) MANITIUS, *Des Geminos Isogoge, nach Inhalt und Darstellung kritisch beleuchtet* (Commentationes Fleckeisenianae, pagine 95-119).

rebbe stata scritta dopo la nascita di Cristo. Oggi si ritiene che il nostro scienziato abbia fiorito intorno al 70 a. C. (1).

Nè minore varietà di opinioni si ha riguardo alla personalità di GEMINO. Infatti, secondo MAX G. P. SCHMIDT (2), egli sarebbe nato a Rodi, sarebbe stato contemporaneo e discepolo di POSIDONIO ed avrebbe scritto l'*Isagoge* in età matura a Roma, tra il 73 ed il 71 a. C.; seguendo invece il BLASS (3) l'opera di GEMINO non sarebbe che un estratto dell'opera di POSIDONIO intitolata Μετεωρολογικὰ ὁ Περὶ μετεώρων, fatto, al più tardi, alla fine del II sec. dell'E. v., essendo citato da ALESSANDRO DI AFRODISIA, il quale professava filosofia ad Atene tra il 198 ed il 210 dell'E. v. Questa tesi, combattuta vigorosamente da P. TANNERY (4), fu recentemente ripresa e, in parte almeno, modificata dal MANITIUS (5). Il quale, osservando lo scarso valore dell'*Introduzione ai fenomeni* e tenendo conto degli errori che ivi s'incontrano, la giudicò un cattivo estratto di opere astronomiche, ma non una riproduzione di quella dovuta a POSIDONIO; e, ritenendo che sarebbe ingiusto attribuire una tale indigesta compilazione ad un uomo di alto intelletto quale ci si presenta il matematico GEMINO, emise l'avviso che questo non dovesse identificarsi coll'autore dell'Εἰσαγωγή. Se tale opinione (6) trionfasse noi vedremmo dileguarci l'unico soccorso su cui ancor potevasi fare assegnamento per gettare qualche luce sulla vita dello scienziato a cui PROCLO attinse a così larga mano; comunque, allo stato attuale delle cose, GEMINO deve collocarsi nella categoria di personalità mal determinate — alla quale eppartengono, ad esempio,

---

(1) C. TITTEL, *De Gemini Stoici studiis mathematicis* (Lipsiae. 1895) e l'articolo *Geminus* nell'*Enciclopedia* del PAULY-WISSOWA.

(2) *Philologische Beiträge zur griechischen Mathematik* (Philologus, T. XLII, 1884), p, 82-110.

(3) *De Gemino et Posidonio.* Kiel, 1883.

(4) *La géométrie grecque*, Cap. III.

(5) V. il lavoro succitato.

(6) Contro di essa si schierò il più recente studioso della questione geminiana, il TITTEL (v. gli scritti succitati); a lui si deve l'osservazione che, benchè la desinenza del nome GEMINO sia romana, i suoi lavori portano una impronta greca e sono scritti in ottimo greco.

ARISTEO (v. p. 160) ed i pretesi continuatori degli *Elementi* di EUCLIDE (v. p. 277) —, di quelle figure incerte che, contemplate attentamente, ci presentano lo strano fenomeno di un inatteso e non desiderato sdoppiamento (1).

---

(1) Ulteriori notizie sulla " questione geminiana „ si troveranno nel § I dell'*Appendice* di C. MANITIUS alla sua edizione di *Gemini Elementa Astronomiae* (Lipsiae, 1898). " La nostra conclusione (scrive l'autore a p. 251-252) è che il filosofo stoico GEMINO, un greco nato probabilmente a Rodi, autore di un'opera di lunga lena sulla divisione delle matematiche, circa verso il 73-67 a. C. compose un commento non meno esteso al trattato elementare di meteorologia del suo maestro Posidonio da Rodi. Da un epitome di esso, composto da lui medesimo ed esistente tuttora nel VI secolo dell'E. v., un autore ignoto del IV o V secolo, che scriveva sul 41° parallelo (a Costantinopoli?), ha fatto degli estratti, col titolo primitivo Ἐκ τῶν Γεμίνου πρὸς εἰσαγωγην εἰς φάφαινόμενα, i quali, con ogni sorta di aggiunte giunsero sino a noi sotto il titolo Γεμίνου πρὸς εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα „.

CAPITOLO II.

Teone Smirneo.

5. - L'inflessibilità dell'ordine cronologico riconduce dinanzi a noi un personaggio, il cui aiuto invocammo nel Libro precedente (p. 465), personaggio del quale determinammo, almeno approssimativamente, l'epoca e della cui opera studiammo la parte concernente l'Astronomia; ora fa mestieri esaminare che cosa contenga la sezione della sua opera che si riferisce alla Geometria. Poco di essenzialmente nuovo apprenderemo, e nulla forse a cui TEONE abbia posto il marchio di fabbrica; tutt'al più ne trarremo qualche ulteriore notizia sopra due individualità eminenti, PITAGORA ed ERATOSTENE, che il nostro commentatore attinge ad uno scienziato imperfettamente noto, di cui già facemmo fugace menzione (p. 467), cioè ADRASTO.

Quanto c'interessa in questo momento dell'opera di TEONE abbraccia i capitoli L-LXI della Seconda Parte (1) e si riferisce alle proporzioni o medietà (μεσότητες), argomento che, come sappiamo (vedi p. 36), veniva dagli antichi aggregato alla geometria. Sorvoliamo sull'esordio, molto prolisso e poco succulento, e rileviamo una proposizione, che sembra sia stata scoperta da ERATOSTENE, e dimostrata completamente da ADRASTO; eccone l'enunciato: « Se a, b, c

(1) *Théon de Smyrne, philosophe platonicien, Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, trad. par J. DUPUIS. Paris, 1892, p. 174-196.

sono tre quantità in progressione geometrica, lo saranno eziandio a , $a + b$, $a + 2b + c$ ». TEONE, come è suo costume, non dimostra in generale questo teorema, ma si limita a verificarlo sopra alcuni esempi; il ragionamento usato per stabilirne la verità generale sarà stato indubbiamente identico al seguente: essendo per ipotesi $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, sarà $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c}$ ovvero $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b+c}$; e da questa nuova proporzione si trae $\frac{a}{a+b} = \frac{a+b}{a+2b+c}$ c. d. d. TEONE si dilunga ad applicare il teorema citato a molti casi particolari; notiamone due: 1.° se $a = b = c = 1$, se cioè si ha la « proporzione di eguaglianza », si dedurranno successivamente le proporzioni:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad , \quad \frac{1}{3} = \frac{3}{9} \quad , \quad \frac{1}{4} = \frac{4}{16} \text{, ecc.:}$$

2.° se $a = n^2$, $b = n$, $c = 1$, il valore comune dei rapporti $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{c}$ sarà n, mentre quello dei rapporti $\frac{a}{a+b}$ e $\frac{a+b}{a+2b+c}$ sarà $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$.

A questo punto egli osserva:

ERATOSTENE dimostra che tutte le figure risultano da qualche proporzione, che per costruirle è forza partire dall'eguaglianza e che in eguaglianza esse si risolvono.

Da queste parole, di colore alquanto oscuro, il commentatore si sente trascinato a discorrere un po' delle figure; accennato al punto, alla linea, alla superficie ed al solido, egli scrive (1):

Fra le linee, la linea retta è quella che è diretta e corre tesa, è quella che, fra due punti dati, è la più breve di tutte quelle aventi gli stessi estremi, e che si estende egualmente

(1) Riferiamo questo questo brano perchè alcune definizioni ivi contenute differiscono da quelle di EUCLIDE.

fra tutti i suoi punti. La linea curva è quella che non possiede tale proprietà. La medesima differenza si trova fra il piano e la superficie curva. Infatti la superficie è il confine apparente di qualunque solido secondo due dimensioni, lunghezza e larghezza. Ora il piano è una superficie tale che, se una retta la tocca in due punti, essa coincide colla superficie in tutta la sua lunghezza. Due rette sono parallele quando, prolungate all'infinito sul medesimo piano, non s'incontrano e conservano sempre la stessa distanza mutua.

Dà poi la classificazione dei quadrilateri e, come analoga quella dei parallelipipedi rettangoli: ritroviamo così i solidi già incontrati nelle *Definizioni* attribuite ad ERONE (p. 603) cioè i *cubi* (κύβοι), i *plinti* (πλινθίδες) ed i *travicelli* (δοκίδες), nonchè i parallelepipedi scaleni. Egli ritorna poi alle medietà « la cui teoria è indispensabile per comprendere gli scritti di PLATONE ».

Vi è medietà, egli scrive, quando, fra due termini omogenei diseguali, si prende un altro termine omogeneo tale che l'eccesso del primo, che è ad un tempo il massimo, sopra questo termine medio, stia all'eccesso di questo sul minimo, come il primo termine sta a sè stesso o ad uno degli altri, ovvero come il più piccolo sta all'uno degli altri.

Questa definizione guida alle sei proporzioni che possono intercedere fra tre numeri $a > b > c$; cioè l'*aritmetica*, la *geometrica*, l'*armonica*, la *sub-contraria all'armonica*, la *quinta* e la *sesta*, esse corrispondono all'essere il quoziente $\frac{a-b}{b-c}$ eguale risp. a $\frac{a}{a}, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}, \frac{b}{a}$; quali esempi di terna di numeri legati da una di tali proposizioni, TEONE adduce i seguenti: 3, 2, 1; 4, 2, 1; 6, 3, 2; 6, 5, 3; 5, 4, 2; 6, 4, 1. « I Pitagorici si sono molto dilungati sopra queste sei medietà e le loro sub-contrarie »; altrettanto non fa TEONE, il quale si limita, prima di passare all'Astronomia, di indicare un metodo per ottenere il termine medio di una proporzione aritmetica, geometrica od armonica. Per l'aritmetica dà tre metodi compendiati nelle espressioni equivalenti che seguono:

$$b = c + \frac{a-c}{2} = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+c}{2},$$

r la geometrica dà l'espressione $b = \sqrt{ac}$ e la corrispon-nte notissima costruzione mediante un semicerchio; final-nte per l'armonica dà in generale la formula

$$b = \frac{(a - c)\ c}{a + c} + c,$$

giungendo che, nel caso particolare

$$a = 3c,$$

servire quest'altra

$$b = \frac{(a - c)^2}{2\ (a + c)} + c.$$

Questo è, se non c' inganniamo, tutto quello che il geo-tra può apprendere da TEONE SMIRNEO; abbandoniamolo ndi un'altra volta, riserbandoci di richiamarlo, nel se-nte Libro, come testimonio delle cognizioni degli antichi rno alle proprietà dei numeri.

CAPITOLO III.

Pappo d'Alessandria.

6. - Se dobbiamo tributare alta e illimitata riconoscenza agli uomini, ai quali la scienza deve incrementi o progressi, non è lecito ritenercene esonerati verso coloro che ci tramandarono notizie intorno a scritti i quali sarebbero altrimenti caduti in completo oblio, e così resero meno malagevole l'intelligenza o più profonda la conoscenza di altri. Fra questi modesti, ma efficaci, cooperatori all'avanzamento del sapere, nessuno può vantare benemerenze più cospicue di PAPPO D'ALESSANDRIA. Gl'innumerevoli usi, che facemmo della celebre *Collezione matematica* (Συναγωγή) da lui composta, ci dispensano da qualunque ragionamento inteso a dimostrare come essa sia una miniera inesauribile di ragguagli indispensabili a chiunque voglia formarsi un concetto adeguato della matematica greca (1). Solamente ricordiamo

(1) Il primo a pubblicare per le stampe la *Collezione* fu F. COMMANDINO (*Pappi Alexandrini Mathematici Collectiones a Fed. Commandino Urbinate in latinum conversae et commentariis illustratae.* Venetis, 1589); un complemento a tale edizione diede il WALLIS nel III Vol. (Cambridge, 1699) delle sue *Opere:* ed a tali fonti ricorsero per più secoli tutti coloro che vollero conoscere uno dei più cospicui monumenti dell'antica geometria ma la loro deficienza fu notata da C. G. J. JACOBI (1804-1851) sin dal 1824 (cfr. L. KÖNIGSBERGER, *C. G. J. Jacobi.* Leipzig, 1904, p. 7). Al principio del nostro secolo vide la luce, a titolo di saggio (Parigi 1824), il testo greco emendato della seconda parte del V Libro p

come nella grande opera di PAPPO s'incontrino, non solo i nomi di quasi tutti i matemateci che già studiammo (APOLLONIO, ARCHIMEDE, ARISTEO, ARISTARCO, AUTOLICO, CLAUDIO TOLOMEO, CONONE, DINOSTRATO, ERATOSTENE, ERONE, EUCLIDE, FILONE DA BISANZIO, GEMINO, IPPARCO, MENECMO, MENELAO, NICOMACO, NICOMEDE, TEONE D'ALESSANDRIA e TEODOSIO DA TRIPOLI), ma ancora quelli di certe persone di cui ogni ricordo sarebbe stato altrimenti cancellato. Tali sono: DEMETRIO D'ALESSANDRIA e FILONE DA TIANA, autori di lavori oggi perduti suile curve (1); ERACLITO, citato a proposito di un problema sulle inserzioni (2), ed un PERICLE, commentatore dello scritto di APOLLONIO *Sulla sezione di ragione* (3); in condizioni analoghe si trovano ERICINO ed il filosofo JERIO, dei quali nulla sappiamo, PANDROSIO — a cui è diretto il III Libro della *Collezione* (4) e di cui è perfino dubbio il sesso (5) —, MEGEZIO, a cui è indirizzato il V Libro (6), ed ERMODORO, figlio di PAPPO, a cui sono dedicati gli ultimi due Libri della *Collezione* (7).

Sgraziatamente nessuno scrittore posteriore completa tali notizie e nemmeno somministra quelle informazioni sulla vita e le opere di PAPPO stesso, che sarebbero necessarie per rendere meno infelice il complesso dei dati relativi, con-

---

cura di E. G. EISEMANN; ma tale impresa fu abbandonata: altrettanto accadde della traduzione tedesca della *Collezione*, di cui il GERHARDT pubblicò (Halle, 1871) i due ultimi libri. Oggi l'edizione completa, in greco e latino, maggiormente pregiata è quella dell'HULTSCH (1876-78) che tanto spesso citiamo. Riguardo ad essa si può con profitto consultare l'auto-resoconto pubblicato nel T. II (1878, p. 320-325) del *Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik;* nel quale è inserito un articolo interessante di JACOBI, escluso senza ragione dalla collezione delle opere complete di questo grande geometra.

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 270.

(2) Id., p. 783.

(3) Id., p. 640)

(4) Id., p. 30.

(5) V. p. 82 dell'*Index graecitatis* posto al termine di PAPPO ed. HULTSCH.

(6) Id., p. 304.

(7) Id., p. 634 e 1022.

tradditori nella loro esiguità. Ci esprimiamo così perchè, oltre agli insufficienti ragguagli bibliografici sul commentatore somministratici dagli Arabi (1), essi può dirsi riducansi alla notizia, data da PROCLO, che PAPPO era a capo di una scuola (2) ed a quella, dovuta a MARINO DA NEAPOLI, che egli commentò i *Dati* di EUCLIDE (3). Le contraddizioni relative all'epoca in cui visse dipendono da ciò che, mentre secondo una nota posta in margine ad un codice appartenente alla biblioteca di Leida, la *Collezione* sarebbe stata scritta durante il regno di DIOCLEZIANO (284-309 dell'E. v.), se si accorda fede al noto lessicografo SUIDA, lo sarebbe stata sotto quello di TEODOSIO I (379-395). Donde la ragione per cui all'opinione di M. CHASLES (4) da tanti accettata (5), che PAPPO appartenga alla fine del IV sec. dell'E. v., si è di recente contrapposta (6) e tende a trionfare quella che fa retrocedere la sua epoca di un intero secolo (7) e che noi pure adottiamo.

7. - Una raccolta di notizie e di illustrazioni sopra opere differenti e di vario argomento non può possedere quel carattere di unità che distingue un'opera originale; onde non è a titolo di critica che noi osserviamo come la *Collezione* di PAPPO abbia piuttosto l'aspetto di un conglomerato che quello di un bel cristallo, geometricamente simmetrico. Più di qualunque altro, uno scritto di tal natura è soggetto a modificazioni, ad aggiunte o mutilazioni da parte dei rico-

---

(1) Nel *Fihrist* si legge riguardo a PAPPO: " I suoi scritti sono: Un commento al libro di TOLOMEO sulla rappresentazione piana della sfera, tradotto in Arabo da THÂBIT; ed un commento al X Libro di EUCLIDE, in due parti „.

(2) PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 206.

(3) *Euclidis Opera omnia*, Vol. VI. Lipsiae, MDCCCXLVI, p. 255.

(4) *Aperçu historique*, II ed., Paris, 1875, p. 28.

(5) V. MONFERRIER, *Dictionnaire des Sciences mathématiques*, T. II, (Paris, 1838) p. 356: POGGENDORFF, *Biogr. litt. Handwörtenbuch*, T. II, (Leipzig, 1863) pag. 356.

(6) Quest'opinione, espressa la prima volta un secolo e mezzo fa da VAN DEN HAGEN (*Observationes in Theonis fastos graecos priores*. Amsterdam, 1735), fu fatta rivivere dall'USENER (*Vergessenes* in *Neues Rhein. Museum*, T. XXVIII, 1873, p. 403).

(7) V. F. HULTSCH nella pref. alla sua ed. di PAPPO; M. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I, 3ª ed., p. 443.

piatori i quali si credono autorizzati ad abbandonare il loro ufficio passivo per migliorare la forma o per sostituire la menzione di un'opera con la citazione di un'altra, a loro parere più degna di prendere posto nei fasti della scienza. Laonde affermerebbe probabilmente il falso chi asserisse essere l'opera di PAPPO uscita dalle mani del suo autore tal quale ci viene presentata nell'ottima edizione critica che oggi ne possediamo. Nello stesso pericolo incorrerebbe, a parer nostro, colui il quale sostenesse che alcuni degli otto libri che compongono la *Collezione* hanno un'origine diversa da quella dei rimanenti; in conseguenza noi ci schieriamo sotto il vessillo del CANTOR (1) per combattere il GERHARDT (2) quando cerca di provare a PAPPO doversi unicamente i Libri III e IV (formanti in origine un solo libro), il VII e VIII. Che poi alla *Collezione* PAPPO non abbia potuto dar l'ultima mano, che anzi alcune parti non siano che lezioni redatte da discepoli, sono opinioni che fece germogliare nella mente dell'HULTSCH lo studio accurato del testo (specialmente per avere osservate le frequenti ripetizioni), e che noi ci limitiamo a riferire come verosimili.

Degli otto Libri di cui, come dicemmo, si compone la *Collezione*, il I è perduto, del II resta soltanto un frammento, del quale ci occuperemo nella seguente sezione della nostra storia, perchè concerne l'Aritmetica dei Greci (3). Che cosa contengano gli altri Libri emerge da quanto ora ci accingiamo ad esporre.

8. - Il III Libro si apre con una prefazione diretta a quel certo PANDROSIO di cui già parlammo (p. 657). Quest'individuo era a capo di una scuola, ma le sue qualità intellettuali e didattiche non dovevano essere molto eminenti, dal momento che i suoi discepoli erano imperiti nell'enunciare i problemi; anzi, è appunto per illuminare il maestro e i discepoli che PAPPO si decise a raccogliere nel primo Libro geometrico della *Collezione* le considerazioni su cui ora

(1) V. la recensione dell'opera citata nella nota seg. (*Zeitschr. f. Math. und Phys.*, T. XXI, 1876, *Hist. litt. Abth.*, p. 37-42).

(2) *Die Sammlung des Pappus von Alexandria* (Eisleben, 1875).

(3) Il WALLIS, primo editore di quanto resta del II Libro della *Collezione*, congettura, assai ragionevolmente, che anche il I si riferisse all'aritmetica.

riferiremo. Tale Libro è composto di quattro parti ben distinte.

Nella prima PAPPO si occupa della inserzione di due medie proporzionali fra due rette date ed esamina anzitutto la soluzione che era stata a lui sottoposta da quel certo JERIO filosofo (p. 657). Ecco in che cosa essa consiste:

Le due rette date AB, AΓ siano disposte (fig. 106) ad angolo retto fra loro: si guidi da B la BΔ parallela alla retta AΓ e si supponga BΔ = AB; condotta ΔΓ essa incontri BA prolungata nel punto E: si conduca da E la EΘ parallela alla retta AΓ e

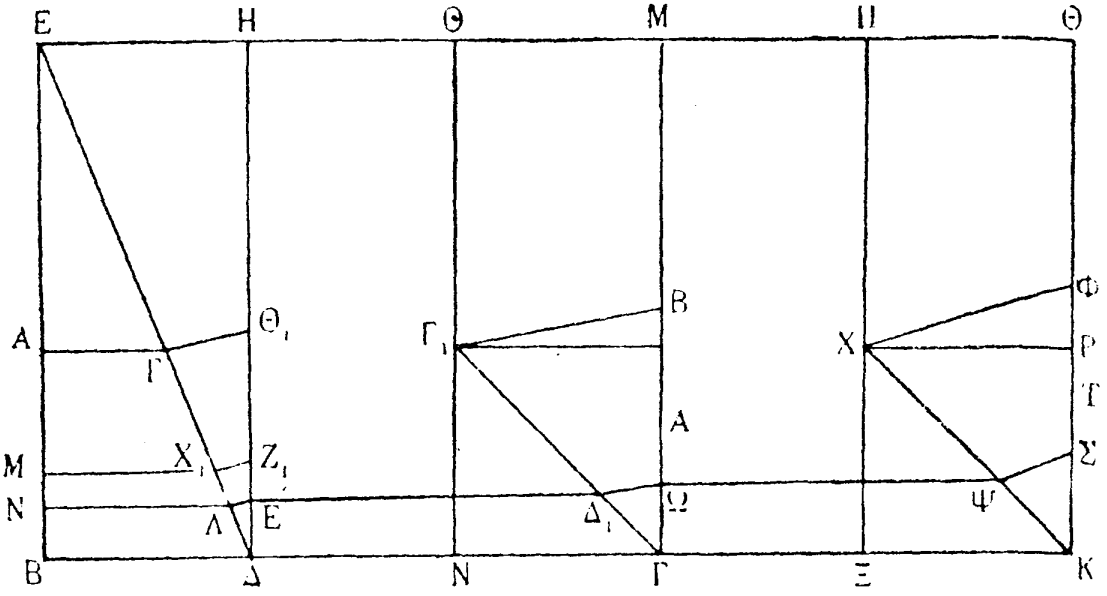


Fig. 106.

si prolunghi BΔ; si conduca dal punto Δ la ΔH parallela alla retta BE e sul prolungamento di BΔ si prenda

$$\Delta N = N\Lambda = \Lambda\Xi = \Xi K = B\Delta$$

e pei punti N, Λ, Ξ, K si conducano NO, ΛM, ΞΠ, KΘ parallele alla stessa BE; si supponga KP = BA e la si divida per metà del punto Ξ e sia

$$K\Theta : \Theta\Sigma = \Sigma\Theta : \Theta T = \Theta T : \Theta\Phi .$$

Dalla retta ΞΠ si stacchi il segmento ΞX eguale alla retta AB e si conducano XΦ e XK; poi da Σ la ΣΨ parallela alla XΦ e da Ψ la ΨΩ parallela ΞK; sia

$$\Lambda M : \Lambda\Omega = \Omega M : MA_1 = MA_1 : MB_1 .$$

Dalla retta ON si tagli $N\Gamma_1$ eguale alla retta AB e si conducano Γ_1B_1 e $\Gamma_1\Lambda$, dal punto Ω si guidi la retta $\Omega\Delta_1$ parallela alla retta $B_1\Gamma_1$ e dal punto Δ_1 la Δ_1E_1 parallela a ΛN; sia

$$\Delta H : HE_1 = HE_1 : HZ_1 = HZ_1 : H\Theta_1 .$$

Condotta $\Theta_1\Gamma$, si traccino ad essa le parallele Z_1K_1 e $E_1\Lambda_1$ e dai **punti** K_1, Λ_1 le K_1M_1, Λ_1N_1 parallele alle rette $A\Gamma$ e $B\Delta$. Ciò posto, M_1K_1 e $N_1\Lambda_1$ *sono medie proporzionali* fra $A\Gamma$ e $B\Delta$.

Tale conclusione è falsa, come PAPPO dimostra. Ma quello che a lui è sfuggito (o che, almeno, non gli parve meritevole di venire rilevato) è (1) che *il procedimento, di cui egli espose le prime fasi, è un metodo per calcolare valori di qualunque radice cubica, sempre più approssimati e tutti espressi razionalmente* (2). E così resta dimostrato che, come ARCHIMEDE concepì (v. p. 323) il problema della quadratura del cerchio nel solo modo capace di condurre a conclusioni attendibili, così un altro Greco, ma probabilmente senza rendersene conto, scoperse la strada per risolvere analogamente (cioè con un metodo di illimitata approssimazione) il problema della duplicazione del cubo (3).

Alla critica del metodo di JERIO, PAPPO fa seguire una esposizione delle difficoltà che presenta la inserzione di due medie proporzionali fra due rette date, e per chiarezza egli premette la classificazione di tutte le proposizioni di geometria.

Gli antichi — egli dice (4) — stabilirono che i problemi di

---

(1) Quest'osservazione fu fatta da J. W. L. GLAISHER (*Jahrb. über die Fortschritte der Math.*, T. V, p. 244) nel resoconto di un articolo di R. PENDLEBURY, *On a method of finding two mean proportionals* (Messenger of mathem., 2ª Ser., T. II, p. 166-169). Essa fu completamente svolta da S. GÜNTHER nell'ultima parte della memoria *Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik* (Abh. der k. böhm. Ges. der Wiss., VI Serie, T. IX, 1878).

(2) Posto $\alpha\beta = a$, $\alpha\chi = b$ si trova ad es.:

$$\beta\xi = \frac{b^2}{a-b} \quad , \quad \theta\tau = \frac{a(a+b)^2}{2(a-b)} \quad , \quad \theta\tau = \frac{(a+b)^2}{4(a-b)} \quad ,$$

$$\theta\tau = \frac{(a+b)^3}{8a(a-b)} \quad , \quad \rho\omega = \frac{a^2(a+b)(5a+b)}{(3a+b)(3a^2+b^2)} \quad , \text{ ecc.}$$

(3) Riguardo a tal metodo di approssimazione v. il § II del lavoro di P. TANNERY, *L'arithmétique des Grecs dans Pappus* (Mém. de la Soc. de Bordeaux, 2ª Serie, T. III, 1880).

(4) PAPPO ed. HULTSCH, p. 54.

geometria possono essere di tre specie, e chiamarono alcuni piani, altri solidi ed altri lineari. Quelli che si risolvono mediante rette e circoli furono per questo chiamati *piani*, considerando che le linee ausiliarie hanno la loro genesi nel piano. Quelli invece la cui soluzione si ottiene coll'aiuto di una o più sezioni coniche, furono chiamati *solidi;* giacchè per la loro costruzione sono necessarie superficie di solidi, cioè di coni. I rimanenti si considerarono appartenere ad un terzo genere e vennero chiamati *lineari,* giacchè nella loro costruzione si adoperano, oltre alle linee suindicate, altre che hanno genesi differenti e complicate, quali sarebbero le spirali, le quadratrici, le concoidi, le cissoidi, che sono dotate di molte proprietà notevoli (1).

Il problema di Delo, aggiunge PAPPO, appartiene alla seconda delle categorie anzidette e fu risolto in vari modi; fra i quali il commentatore alessandrino espone quelli di ERATOSTENE (v. p. 344), di NICOMEDE (p. 408) e di ERONE (p. 575), nonchè quello che noi attribuimmo a DIOCLE (p. 412), ma che egli presenta come ritrovato proprio, vantandone anzi le qualità, perchè abilita a risolvere la questione più generale di trovare un cubo che abbia con un cubo dato un rapporto qualunque prestabilito.

9. - La seconda parte del III Libro della *Collezione* ha un tema molto differente; giacchè ivi PAPPO coglie l'occasione offertagli dal problema di « trovare in un circolo tutte tre le proporzioni » per esporre la teoria delle dieci proporzioni (o medietà), che si solevano considerare ancora ai suoi tempi, seguendo le tradizioni pitagoriche (cfr. p. 36). Egli stabilisce un procedimento per « comporre mediante tre rette α, β, γ in proporzione geometrica, altre tre δ, ε, ζ che formino una qualunque di quelle dieci proporzioni ». Evidentemente questo problema è indeterminato; le soluzioni che egli suggerisce hanno questa particolarità che, supponendo $\alpha = \beta = \gamma = 1$, si ottengono quelle a termini minimi. Le definizioni delle medietà ed il procedimento di PAPPO si apprendono dalla seguente tabella (2):

(1) H. G. ZEUTHEN sostiene (v. l'XI Sez. dell'opera *Die Lehre der Kegelschnitte im Alterthum,* Kopenhagen, 1886) che, contrariamente all'asserzione di PAPPO, si stabilì *prima* la distinzione dei luoghi in tre categorie e *poi* si trasferirono i relativi aggettivi dai problemi alle curve che li risolvono.

(2) Cfr. TEONE SMIRNEO ed. DUPUIS, p. 188-190.

Nome della proporzione	Proprietà caratteristica di essa	Composizione dei suoi termini	Terne di numeri minimi fra cui esiste quella proporzione
aritmetica . . .	$\frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}$	$\delta = 2\alpha + 3\beta + \gamma, \varepsilon = \alpha + 2\beta + \gamma, \zeta = \beta + \gamma$	6, 4, 2
geometrica . . .	$\frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\delta}{\varepsilon}$	$\delta = \alpha + 2\beta + \gamma, \varepsilon = \beta + \gamma, \zeta = \gamma$	4, 2, 1
armonica . . .	$\frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}$	$\delta = 2\alpha + 3\beta + \gamma, \varepsilon = 2\beta + \gamma, \zeta = \beta + \gamma$	6, 3, 2
contrarmonica .	$\frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}$	$\delta = 2\alpha + 3\beta + \gamma, \varepsilon = 2\alpha + 2\beta + \gamma, \zeta = \beta + \gamma$	6, 5, 2
quinta	$\frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$	$\delta = \alpha + 3\beta + \gamma, \varepsilon = \alpha + 2\beta + \gamma, \zeta = \beta + \gamma$	5, 4, 2
sesta	$\frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$	$\delta = \alpha + 3\beta + 2\gamma, \varepsilon = \alpha + 2\beta + \gamma, \zeta = \alpha + \beta - \gamma$	6, 4, 1
settima (1) . . .	$\frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\delta}{\varepsilon}$	$\delta = \alpha + \beta + \gamma, \varepsilon = \alpha + \beta, \zeta = \gamma$	3, 2, 1
ottava	$\frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}$	$\delta = 2\alpha + 3\beta + \gamma, \varepsilon = \alpha + 2\beta + \gamma, \zeta = 2\beta + \gamma$	6, 4, 3
nona	$\frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\delta}{\varepsilon}$	$\delta = \alpha + 2\beta + \gamma, \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma, \zeta = \beta + \gamma$	4, 3, 2
decima	$\frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$	$\delta = \alpha + \beta + \gamma, \varepsilon = \beta + \gamma, \zeta = \gamma$	3, 2, 1

(1) Aggiunta da COMMANDINO e HULTSCH per colmare una lacuna nel testo.

Nella terza parte del III Libro PAPPO fa conoscere alcune ricerche che un certo ERICINO — geometra che P. TANNERY considera molto anteriore a PAPPO (1) — espose in un libro oggi perduto intitolato *Paradossi*. Egli prende le mosse dal teorema degli *Elementi* di EUCLIDE (Lib. I, prop. 21ª) che dice: « le rette che uniscono gli estremi di un lato di un triangolo ad un punto interno sono in somma minori degli altri due lati del triangolo » ed istituisce analoghi paragoni fra il perimetro di un triangolo o di un poligono rettilineo ed una linea poligonale tracciata nel suo interno: la completa dimenticanza in cui caddero cotali investigazioni è la più eloquente attestazione della nessuna importanza che venne in esse ravvisata e ci dispensa da più lungo discorso. Soltanto notiamo che ad esse si può ravvicinare il problema « trovare due rettangoli le cui aree ed i cui perimetri stiano in un dato rapporto », che, come vedremo nel seguente Libro, si trova in uno degli scritti recanti il nome di ERONE (2), e poi al termine del *Manuale di calcolo* di MASSIMO PLANUDE (3).

La rimanente parte del III Libro ha uno stretto legame con l'ultimo degli *Elementi* di EUCLIDE, avendo per iscopo la costruzione dei poliedri regolari. Il procedimento seguito da PAPPO è, come già vedemmo (p. 160), probabilmente desunto da un'opera di ARISTEO e differisce molto da quello adoperato collo stesso scopo da EUCLIDE. Infatti, questi comincia dal costruire ogni poliedro *fuori* della sfera in cui deve alla fine inserirsi, servendosi del diametro di questa soltanto come elemento metrico; finita la costruzione, dimostra l'inscrittibilità del poliedro ottenuto nella sfera data e stabilisce (servendosi del Libro X degli *Elementi*) quale relazione interceda fra il lato del poliedro ed il diametro della sfera. Invece, PAPPO costruisce i poliedri regolari *entro* la sfera che li deve contenere, tracciando alcuni circoli minori, i quali intersecandosi determinano i vertici del solido domandato. In EUCLIDE predominano le considerazioni me-

(1) *La géométrie grecque*, etc., p. 161.

(2) *Heronis Alex. geom. et ster. Reliquia* ed. HULTSCH (Berolini, 1861), p. 218.

(3) *Das Rechenbuch des Maximus Planudes. Herausgegeben von* GERHARDT (Halle, 1865). Uebersetzt von H. WÄSCHKE (Halle, 1878).

triche, in PAPPO quelle di posizione; il metodo del primo è oggi preferito, ma quello dei secondo incontrò più nel gusto degli Arabi, talchè vediamo ABUL-WÂFA (940-998) enunciare il problema dell'iscrizione di un poliedro regolare in una sfera come questione avente per iscopo la divisione di una superficie sferica in poligoni congruenti. Nell'applicare il metodo suindicato PAPPO arreca qualche complemento alla *Sferica* di TEODOSIO (vedi p. 508) e completa un teorema che noi attribuimmo ad ARISTEO (v. p. 159) (1) dimostrando che « una stessa circonferenza è circoscritta alle facce del cubo e dell'ottaedro regolare, ed una stessa alle facce dell'icosaedro e del dodecaedro regolari, supposti tutti questi solidi iscritti nella medesima sfera » (v. p. 272).

E giacchè stiamo segnalando le proprietà metriche che gli antichi avvertirono nei poliedri, è il caso di rilevare incidentalmente, con C. L. IDELER (1766-1846) (2), che ad un certo NICONE DA PERGAMO è attribuita la scoperta del teorema « se ad una sfera è circoscritto un cubo, il rapporto dei volumi dei due solidi eguaglia quello delle loro superficie »; tale teorema sussiste, evidentemente, per qualunque poliedro circoscrittibile alla sfera, il che venne avvertito, da vari geometri, soltanto in epoca a noi vicina (3).

10. - Il IV Libro della *Collezione* è pure ripartito in varie sezioni, aventi temi fra loro differenti, ma che in fondo costituiscono una esposizione delle proprietà possedute da certe curve risolutrici dei tre più celebri problemi geometrici studiati dagli antichi. L'assenza di prefazione ad esso fu addotta da taluno (cfr. p. 659) come prova dell'essere stato in origine il IV Libro unito al III.

---

(1) Il teorema di ARISTEO si ritrova nella *Collezione* più tardi (Libro V, prop. 48).

(2) V. l'articolo *Ueber eine griechische Inschrift mathematischen Inhaltes* (Monatl. Korresp. zur Bef. der Erd-und Himmelskunde, T. XXIII, 1811, p. 257).

(3) F. M. ZANOTTI (1692-1777), *Sur les figures et les solides circonscrites au cercle et à la sphère* (Hist. de l'Academie royale des Sciences (Paris), Année 1748, p. 613-624); A. H. KÄSTNER (1719-1800), *Geometrische Abhandlungen*, II Samml., 1790, p. 90); K. H. L. BUZENGEIGER (1771-1835), *Anmerkung zu der griechischen Inschrift* (Monatl. Korresp. etc., T. XXIV, 1811).

La prima di dette sezioni è quella che presenta minore interesse reale, giacchè non racchiude che proposizioni di « geometria complementare »; fra esse incontriamo per la prima volta la ben nota generalizzazione del teorema di PITAGORA, cioè il teorema: « Se (fig. 107) ABΓ è un triangolo qualunque e si descrivono sui lati AB, BΓ di esso due parallelogrammi arbitrari ABΓΔ, BΓHZ, si prolungano le rette ΔΓ e HZ finchè s'incontrino in Θ e si conduce la retta BΘ, la somma dei parallelogrammi ABΓΔ e BΓHZ è eguale al parallelogrammo compreso fra le rette ΔΓ, ΘB inclinate

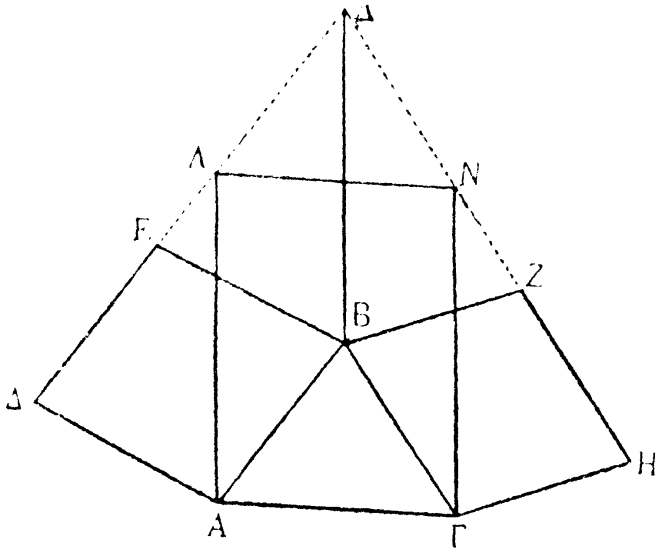


Fig. 107.

di un angolo eguale alla somma degli angoli BAΓ, ΔΘB ». Questo parallelogrammo si costruisce facilmente conducendo i segmenti AΛ, ΓN equipollenti a BΘ ed unendo Λ a N. La proposizione precedente (1) non è soltanto una curiosa estensione del teorema di PITAGORA; giacchè, CHASLES ha osservato (2) che essa equivale al teorema di VARIGNON, tanto utile nella teoria dei moti e delle forze; va di più notato che la dimostrazione esposta da PAPPO è così elegante che non sarebbe indegna di EUCLIDE.

---

(1) Che G. BELLAVITIS (nel n. 58 della sua *Sposizione del metodo delle equipolenze,* Mem. della Soc. Italiana delle Scienze, T. XXV, Parte II) a torto attribuisce a CLAIRAUT.

(2) *Aperçu hist.* (II ed., Paris, 1875), p. 545.

Il commentatore applica poi la teoria insegnata nel X Libro degli *Elementi* (cfr. p. 221-231) a determinare a quale categoria di irrazionali appartengano, alcune linee ottenute mediante certe costruzioni; per dare un'idea delle proposizioni esposte riferiamone la prima: « se (fig. 108) il semicerchio descritto sopra AB ha il diametro razionale, si prolunga AB di una lunghezza BΓ eguale al raggio e si conduce la tangente ΓΔ, la congiungente del punto Γ col punto medio E dell'arco BΔ sarà una delle linee irrazionali che chiamansi *minori* » (1).

Le proposizioni successive — fra cui ritrovansi i *Lemmi* 1, 4, 5 e 6 di ARCHIMEDE (v. p. 329-330) — si riferiscono alla determinazione dei circoli soggetti a certe condizioni e sembrerebbero tolte all'opera di APOLLONIO *Sui contatti* (v. p. 392): scopo di PAPPO è di arrivare a concludere che « se tre cerchi sono dati di posizione e grandezza, il cerchio tangente a

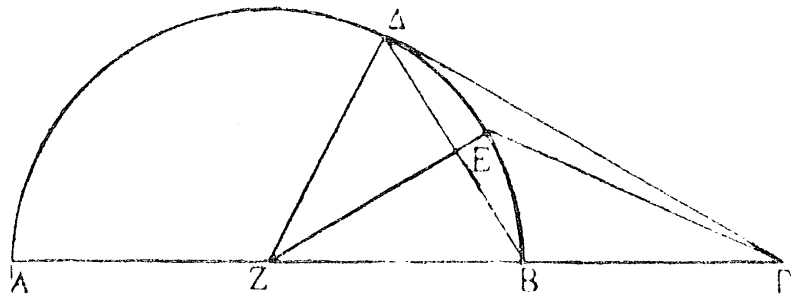


Fig. 108.

tutti è pure dato di posizione ». Per conseguirlo egli premette alcune proposizioni preliminari, che per brevità non riferiamo; raggiuntolo, espone una notevole serie di teoremi che hanno valore permanente e su cui quindi bisogna arrestarsi un istante.

In alcuni libri antichi (2) — egli scrive — si parla di proposizioni di questo genere. Si suppongono dati tre semicerchi fra

(1) EUCLIDE, *Elementi*, X, 76. — La verità di quanto asserisce PAPPO emerge dall'osservare che, per la costruzione, fatta ang $\beta\zeta\delta = \frac{\pi}{3}$, ang $\beta\zeta\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ e quindi $\gamma\varepsilon = \zeta\alpha\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

(2) Quali siano è ignoto, ma probabilmente sono quelli stessi da cui gli Arabi estrassero i *Lemmi* che vanno sotto il nome

loro tangenti (fig. 109) ABΓ, AΔE, EZΓ e nello spazio interpos fra le loro periferie, spazio che essi chiamano ἀρβελος, s' i scrivano quanti si vogliano circoli tangenti ai semicerchi da e fra di loro: si dimostra che la perpendicolare calata d centro H ad AΓ è eguale al diametro del cerchio H (1), che perpendicolare calata dal centro Θ è doppia del diametro d cerchio Θ, che la perpendicolare condotta da K è tripla d diametro del cerchio K, che le perpendicolari condotte succe sivamente dagli altri centri sono multiple dei rispettivi di metri secondo i numeri della serie progrediente per unità. che la stessa cosa accade se l'iscrizione dei cerchi si prolun all'infinito (2).

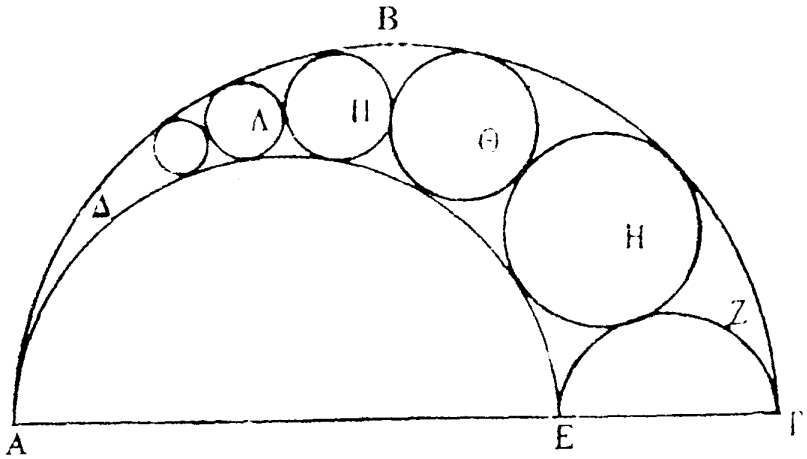


Fig. 109.

Queste eleganti proposizioni, di cui è ignota la provenienz nel secolo scorso vennero ristudiate ed estese da J. STEINE (1796-1863), il quale, negli esordi della sua splendida ca

---

di ARCHIMEDE: lo fa credere l'analogia di argomento. la somi gllanza delle figure considerate da PAPPO coll'*arbelo* ed il s *linon* di ARCHIMEDE.

(1) Se infatti si chiamano r_1, r_2 i raggi dei due semicirco interni, si trova facilmente come espressione del raggio d circolo di centro H

$$\frac{(r_1 + r_2)\, r_1\, r_2}{r_1^2 + r_1\, r_2 + r_2^2},$$

e come misura della perpendicolare calata dal punto H su comune diametro

$$\frac{2\,(r_1 + r_2)\, r_1\, r_2}{r_1^2 + r_1\, r_2 + r_2^2}.$$

(2) PAPPO ed. HULTSCH, p. 208.

riera (1), attrasse su di esse l'attenzione dei geometri. Lo spazio ci manca per riferire le argomentazioni, che dal lato del rigore non lasciano nulla da desiderare, usate dal PAPPO per dimostrare la loro verità (2); soltanto rileviamo, tra le proposizioni ausiliari invocate, quella che (usando la nomenclatura moderna) si enuncia come segue: « se un cerchio ne tocca due altri fra loro tangenti, la retta che unisce i punti di contatto di esso con i due primi passa per un centro di similitudine di questi ».

11. - La seconda sezione del IV Libro della *Collezione* si riferisce alla spirale di ARCHIMEDE (v. p. 301-313), curva la cui invenzione erroneamente PAPPO attribuisce a CONONE e di cui egli si occupa probabilmente perchè essa appartiene alla categoria delle *curve settrici*. Espostane la consueta definizione e dimostrata con nuovo metodo la XII delle proposizioni di ARCHIMEDE, PAPPO osserva come il procedimento da lui preferito sia generalizzabile e guidi alla determinazione dell'area descritta dal raggio vettore, in una fase qualunque del proprio movimento. È dunque il « problema generale della quadratura della spirale » che tratta PAPPO, cioè quello stesso problema di cui si occupò ARCHIMEDE nelle prop. 26ª-28ª del suo celebre libro; PAPPO lo esamina da un punto di vista differente, epperò giunge a conclusioni diverse da quelle conseguite da ARCHIMEDE; esse ci sembrano abbastanza notevoli per venir qui riferite.

L'area $S(\omega)$ descritta dal raggio vettore della spirale $\varrho = a\omega$ quando il raggio vettore parte dall'asse polare e descrive un angolo ω, è misurata da

$$\frac{a^2\omega^3}{6} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\,\varrho \cdot \varrho\omega\right);$$

essa è dunque eguale alla terza parte del settore di ampiezza ω del circolo che ha per raggio la lunghezza del raggio vettore nella sua posizione finale, come appunto trovò PAPPO (Lib. IV, Prop. 23). In particolare

$$S(2\pi) = \frac{4a^2\pi^3}{3}$$

(1) V. la memoria *Einige geometrische Betrachtungen* (*G. di Crelle*, T. I, 1826, *Gess. Werke*, T. I, p. 47).

(2) Altre dimostrazioni leggonsi in RIECKE, *Mathematische Unterhaltungen*, III Heft. Stuttgart, 1873, p. 93-95.

onde

$$\frac{S(\omega)}{S(2\pi)} = \frac{(2a\pi)^3}{(a\omega)^3} = \left(\frac{\Gamma_1}{\omega}\right)^3,$$

ove Γ_1 è la periferia del « primo cerchio »: e questo è un altro teorema di PAPPO (Lib. IV, Prop. 22). Notisi da ultimo che

$$\frac{S\left(\overline{k+1}\,\frac{\pi}{2}\right) - S\left(k\,\frac{\pi}{2}\right)}{S\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 3k(k+1)+1;$$

facendo ivi $k = 1, 2, 3$ si ottengono per questo rapporto i valori 7, 19, 37, pure conformemente ad un'osservazione del commentatore che studiamo (Lib. IV, Prop. 25).

In una sezione seguente della *Collezione*, PAPPO definisce la concoide di NICOMEDE, insegna a costruirne la tangente e ne dimostra le più cospicue proprietà, esponendone poi l'applicazione alla trisezione dell'angolo ed alla duplicazione del cubo: riguardo a questa parte dell'opera di cui trattiamo, è sufficiente riferirci a quanto dicemmo altrove (v. p. 406), solo aggiungendo come PAPPO asserisca essersi egli occupato della prima delle applicazioni suddette, in un'opera, che si connette ad altra (al pari di quella perduta) di un tal DIODORO, che è probabilmente un matematico o filosofo alessandrino, contemporaneo di CESARE e CICERONE.

12. - Nella parte successiva del IV Libro PAPPO, volgendosi al problema della quadratura del circolo, dà notizia della generazione della quadratrice di IPPIA e DINOSTRATO (v. p. 70 e 160) e fa conoscere le critiche che contro tal generazione rivolse SPORO. Tali critiche, a cui già alludemmo nel n. 81 del nostro Lib. I, si riducono in ultima analisi alle due seguenti:

1.° Per regolare i due movimenti, uno di traslazione e di rotazione l'altro, dalla cui coesistenza vien generata la quadratrice, fa mestieri conoscere il rapporto della circonferenza al diametro, cioè avere già risoluto il problema che appunto volevasi sciogliere mediante la quadratrice;

2.° Per trovare la intersezione della quadratrice colla retta, in cui coincidono alla fine del movimento le due rette

mobili, è necessario determinare il punto da considerarsi come la loro intersezione nel momento in cui sono sovrapposte, il che è impossibile.

Queste obbiezioni non mancano di base; alla prima si può rispondere adducendo qualche altra generozione della quadratrice indipendente dalla conoscenza del valore di π; ottenendosi, in tal modo, direttamente la intersezione della quadratrice con la posizione finale delle due rette mobili, verrebbe ovviato anche alla seconda difficoltà. Ma anche prima di far ciò, anche contestando alla quadratrice la prerogativa di servire a quadrare il circolo, essa è indubbiamente meritevole di un bel posto nel gruppo delle curve piane particolari. Tanto più che PAPPO ha dimostrato che, alla costruzione meccanica indicata in origine da IPPIA e DINOSTRATO, se ne può costituire un'altra stereometrica, fondata, cioè, sull'uso dei « loci qui sunt ad superficies ». Il relativo passo della *Collezione* possiede un'importanza straordinaria, che venne segnalata per la prima volta da M. CHASLES (1), e di cui il lettore si renderà conto esaminando gli enunciati dei due seguenti teoremi:

Prop. 28. - Sopra un cilindro circolare retto si immagini descritta un'elica; se da tutti i suoi punti si abbassano le perpendicolari sull'asse, esse formeranno una superficie plettoide(2); per una di quelle rette si conduce un piano opportunamente inclinato sul piano del cilindro; esso taglia la superficie plettoide in una curva, la cui proiezione ortogonale sulla base del cilindo è la quadratrice (3).

---

(1) *Ap. hist.*, p. 30-32.

(2) Cioè un elicoide a piano direttore.

(3) Per dimostrare la verità di quest'asserzione supponiamo che l'elica considerata abbia per equazioni:

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad , \quad z = \frac{p\varphi}{2\pi}.$$

Il corrispondente elicoide a piano direttore sarà rappresentato dall'equazione

$$(1) \qquad \frac{2\pi z}{p} = \mathrm{arc\ tg}\,\frac{y}{x};$$

Si poi

$$(2) \qquad z - \frac{p\varphi}{2\pi} + \lambda\left(\frac{x}{\cos\varphi} - \frac{y}{\mathrm{sen}\,\varphi}\right) = 0$$

l'equazione del piano condotto per la generatrice dell'elicoide

Prop. 29. - Un cilindro retto abbia per base una spirale di ARCHIMEDE; un cono circolare retto abbia per asse la generatrice del cilindro passante pel polo della spirale: questo cono taglierà quel cilindro in una curva a doppia curvatura. Le perpendicolari condotte dai vari punti di questa all'asse del cono stanno in una superficie plettoide. Un piano condotto per una generatrice di questa superficie ed opportunamente inclinato, taglierà la superficie stessa in una curva la cui proiezione ortogonale sul piano della spirale è una quadratrice (1).

Queste considerazioni, le quali stabiliscono relazioni tanto notevoli fra curve piane e superficie, hanno condotto PAPPO a concepire sulla sfera una curva analoga alla spirale di ARCHIMEDE, a studiarla ed a scoprirne una proprietà metrica estremamente notevole; siccome egli si è in tal modo

---

corrisponde al valore $\varphi = \alpha$. Eliminando z fra le (1), (2) si otterrà come equazione della proiezione di cui parla PAPPO

$$\frac{p}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \frac{p\alpha}{2\pi} - \lambda \left(\frac{x}{\cos \varphi} - \frac{y}{\operatorname{sen} \alpha} \right);$$

o, passando a coordinate polari,

$$\frac{p\varphi}{2\pi} = \frac{p\alpha}{2\pi} - \lambda\rho \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \alpha} \right);$$

ovvero

$$\frac{\lambda}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} \rho \operatorname{sen} (\varphi - \alpha) = \frac{p}{2\pi} (\varphi - \alpha).$$

Se, quindi, si sceglie $\lambda = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ e si pone $\omega = \varphi - \alpha$ si otterrà

$$\rho \operatorname{sen} \omega = \frac{p}{4} \frac{\omega}{\frac{1}{2}\pi}.$$

equazione che rappresenta appunto la quadratrice relativa al cerchio di raggio $\frac{p}{4}$.

(1) La dimostrazione analitica di questa proposizione può farsi così: Le due superficie di cui parla PAPPO possono rappresentarsi mediante le equazioni

$$\rho = a\varphi, \; h\rho = r(z - h).$$

L'equazione del luogo delle perpendicolari abbassate dai punti

procacciato un durevole titolo di gloria, così saremo giustificati se riferiremo le parole stesse con cui egl fa conoscere la propria scoperta (1):

Come nel piano si vede nascere una spirale quando sopra una retta descrivente un circolo si muove un punto, come lo stesso accade nello spazio quando ad esempio un punto si muove sopra una retta generante una superficie cilindrica o conica, così anche in una sfera si può concepire un modo simile di derivazione di una spirale.

Sia (fig. 110) nella sfera il circolo massimo ΚΛΜ e Θ il polo di esso; da Θ si descriva il quadrante di circolo massimo ΘΝΚ; questo ruoti sulla superficie sferica attorno al punto fisso Θ

---

della loro intersezione sull'asse del cono si ottiene eliminando ρ, φ fra le due equazioni precedenti e la seguente

$$\frac{x}{\cos\varphi} - \frac{y}{\operatorname{sen}\varphi} = 0,$$

onde è

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{r(z-h)}{ah}. \tag{1}$$

Per la generatrice di questo elicoide corrispondente a $\varphi = \alpha$ conduciamo il piano

$$\lambda\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = z - h\left(1 - \frac{a\alpha}{2}\right). \tag{2}$$

Se, ora, si elimina z tra le (1), (2) si avrà l'equazione in coordinate cartesiane della proiezione segnalata da Pappo; introducendo coordinate polari, nasce la equazione

$$\frac{\lambda\rho}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}\operatorname{sen}(\varphi-\alpha) = -\frac{ah}{r}(\varphi-\alpha).$$

Preso dunque $\lambda = -\operatorname{sen} a\cos\alpha$ e posto $\varphi - \alpha = \omega$ si ottiene

$$\rho\operatorname{sen}\omega = \frac{\pi ah}{2}\frac{\omega}{\frac{1}{2}\pi},$$

equazione che appartiene alla quadratrice relativa al circolo di raggio $\frac{\pi ah}{2}$.

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 264.

nel verso ΛM finchè ritorni alla posizione donde è partito, nello stesso tempo un punto percorra il quadrante mobile:

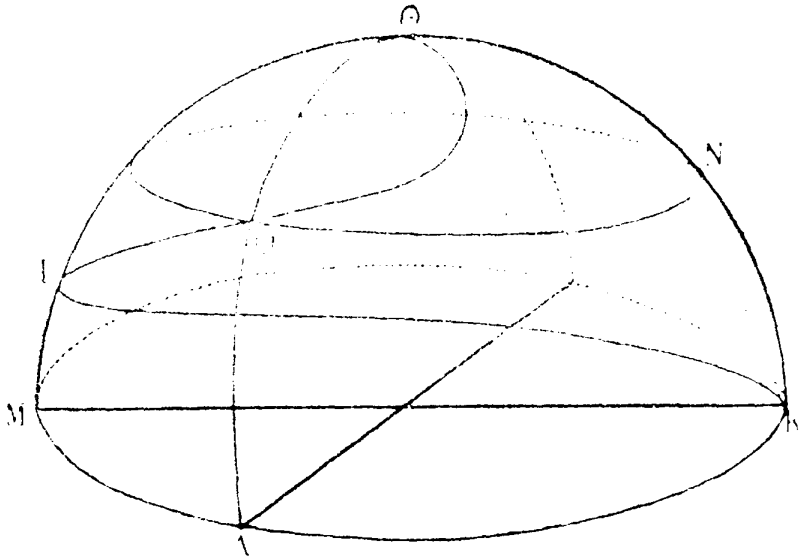


Fig. 110.

partendo da Θ e giungendo a K; esso in conseguenza descriverà sulla sfera una spirale ΘOIK la cui proprietà caratteristica è che, descritta una qualunque circonferenza massima passante per Θ (e secante in Λ la circonferenza KΛM ed in O la spirale), essa avrà all'arco KΛ lo stesso rapporto che ΛΘ ha con ΘO. Ora dico che se si considera sulla sfera un quadrante di circolo massimo ABΓ (fig. 111) avente per centro Δ e si conduce la corda AΓ, la metà della sfera starà alla superficie compresa fra l'elica ΘOIK e la circonferenza ΘNK come il settore ABΓΔ sta al segmento circolare ABΓ (1).

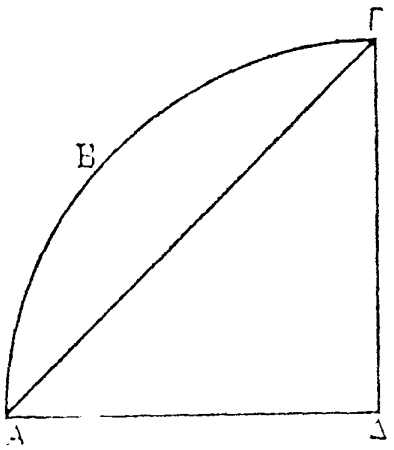


Fig. 111.

(1) Per dimostrare questa elegante proposizione si può oggi procedere come segue: Dette ρ, ω le coordinate polari sferiche aventi Θ per polo e ΘNK per asse polare, si vede facilmente che l'equazione della curva di Pappo è $\omega = 4\rho$. D'altronde, supposto eguale a 1 il raggio della sfera, il differenziale dA dell'area è dato da

$$dA = d\omega\,(1 - \cos\rho) = 4d\rho\,(1 - \cos\rho).$$

Quidi l'area A definita nel testo è data da:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4d\rho\,(1 - \cos\rho) = 4\left[\rho - \operatorname{sen}\rho\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi - 4\,;$$

Quali immensi progressi aveva fatto la sferica, nel periodo interposto fra MENELAO a PAPPO, se era possibile concepire figure e dimostrare relazioni così complicate!

13. - A questo punto il nostro autore comincia ad occuparsi del problema generale di dividere un angolo in un certo numero di parti, delle quali si conoscano i mutui rapporti. Richiamata la classificazione anteriormente esposta dei problemi geometrici (cfr. p. 661), egli fa un cenno, troppo rapido, delle ricerche, oggi perdute, di FILONE TIANEO e DEMETRIO ALESSANDRINO (1) intorno alle curve piane e sghembe, nonchè dei tentativi infruttuosi per dividere in tre parti eguali un angolo dato, mediante la riga ed il compasso. Osserva poi che, se l'angolo da dividersi è acuto, il problema può ridursi ad un'inserzione ed aggiunge che quell'inserzione può effettuarsi segando un circolo con un'iperbola equilatera opportunamente scelta. Se l'angolo dato è retto, alla trisezione si giunge mediante luoghi piani. E se è ottuso il problema può subito ridursi alla trisezione dell'angolo supplementare. Nè a PAPPO sfugge che, anche senza previamente ridurlo ad un' inserzione, il problema della trisezione si può sciogliere segando un'iperbola equilatera con un circolo.

Emerge da ciò essere solido il problema della trisezione dell'angolo; lineare è invece in generale quello di dividere

---

onde

$$\frac{\text{sup. emisfero}}{A} = \frac{2\pi}{2\pi - 4} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}} = \frac{\text{sup. sett. ABΓΔ}}{\text{sup. segm. ABΓ}},$$

come appunto volevasi verificare.

Mentre la spirale d'ARCHIMEDE è una curva trascendente, la spirale di PAPPO è una curva algebrica, razionale e del decimo ordine; è la prima curva gobba algebrica che sia stata scoperta dopo quella usata da ARCHITA (v. p. 101) per risolvere il problema di Delo; chi desidera conoscere alcune delle eleganti proprietà di cui gode consulti la nota intitolata: *La spirale de Pappus* (Arch. f. Math. u. Phys., III Ser., T. XII, 1907).

(1) È questi il cinico, vissuto circa nel 300 a. C., ricordato da DIOGENE LAERZIO (VI, 95)? Oppure il filosofo, assai posteriore, contemporaneo di SENECA? (cfr. E. ZELLER, *Die Philosophie der Griechen*, III Tl., I Abt., IV Aufl. Leipzig, 1909, p. 794.

un angolo in due parti, di cui si conosce il rapporto, e si può sciogliere vuoi coll'aiuto della quadratrice di IPPIA e NICOMEDE (v. p. 71), vuoi colla spirale di ARCHIMEDE; e PAPPO fa notare come, dopo di averlo risolto, siasi in grado di: 1° determinare, sopra due circonferenze diseguali, due archi di egual lunghezza, 2° costruire un triangolo isoscele, di cui si conosca il rapporto dell'angolo al vertice agli angoli alla base, 3° iscrivere in un cerchio un poligono regolare di un dato numero di lati. Egli osserva ancora che la quadratrice può servire a determinare un circolo la cui periferia abbia una data lunghezza, a far passare per due punti un arco di cerchio la cui lunghezza abbia un rapporto assegnato con la sua corda, ed a trovare due angoli che siano tra loro incommensurabili. Allo studio di tali questioni PAPPO connette gli appunti, di cui già facemmo cenno (v. p. 312), sopra una certa inserzione adoperata da ARCHIMEDE, ed incidentalmente dimostra le due proposizioni seguenti, che citiamo perchè ricordano quelle che sarebbero state certamente contenute nei *Luoghi solidi* di ARISTEO, se quest'opera era conforme alla divinazione del VIVIANI (v. L. I, Appendice II):

I. Data una retta a ed un punto A, è un iperbola il luogo dei punti M tali che, detto P il piede della perpendicolare condotta da M a a, si abbia $\frac{MP}{MA} = \text{cost.}$

II. Dati in grandezza e posizione un segmento AB ed in grandezza un secondo segmento l, è pure un' iperbola il luogo dei punti M tali che, detto P il piede della perpendicolare abbassata da M sulla retta AB, si abbia

$$AP \,.\, BP = MP \times l \text{ ».}$$

14. - Maggiore unità dei Libri III e IV possiede il V Libro della *Collezione*, il cui tema è la teoria degli isoperimetri per figure piane (Parte I del detto libro) e solide (Parte III dello stesso) (1); se, come sappiamo (v. p. 418), PAPPO non è il capostipite della famiglia dei coltivatori di

(1) La Parte II vedemmo (p. 333) essere un compendio della teoria dei poliedri semiregolari.

tale disciplina, se egli non rappresenta il primo anello della catena, di cui il secolo scorso costrui il penultimo elemento rappresentato da una celeberrima memoria di J. STEINER, da quanto ora diremo emergerà che ad esso non si può contestare un posto ragguardevole fra i contributori a quella teoria.

Nella bellissima prefazione al V Libro della *Collezione*, che ci duole di non poter qui riferire per intero, PAPPO, espone alcune considerazioni comparative fra l'intelligenza degli uomini e quella degli animali, richiamando l'attenzione del lettore sul fatto sorprendente che le api dànno alle celle, ove depongono il miele, la forma di prismi a base esagonale regolare, scelgono, quindi, come base quel poligono che, a parità di superficie, possiede un perimetro maggiore di quelli che hanno il triangolo equilatero ed il quadrato, poligoni che, al pari dell'esagono, possono adoperarsi per dividere un piano in parti eguali. Nessun fatto poteva essere addotto che fosse maggiormente capace di eccitare la curiosità del lettore, di spingerlo a percorrere quelle pagine che gli avrebbero rivelata l'intima ragione di costumanze così strane. Benchè di quel fatto non venga poi tenuto più parola, pure PAPPO implicitamente lo spiega; che poi la lettura del V Libro della *Collezione* procuri un vital nutrimento intellettuale anche per altre ragioni, si vedrà da quanto ora diremo.

La prima parte è un rimaneggiamento del noto opuscolo di ZENODORO. Infatti delle prime due proposizioni che ivi si leggono una è la prima di quelle che riferimmo a p. 419 e l'altra ne è un complemento, perchè dice che « se un poligono regolare ha il perimetro eguale alla periferia di un cerchio, la sua superficie è minore di quella del circolo », in altre parole il circolo è maggiore di tutti i poligoni regolari isoperimetri. In seguito PAPPO dimostra il teorema di ARCHIMEDE (v. p. 318), che asserisce l'equivalenza di un circolo col triangolo rettangolo i cui lati sono eguali alla periferia ed al raggio, e se ne serve per estendere l'ultima delle proposizioni succitate anche a poligoni irregolari. Istituisce poi il paragone fra le aree dei segmenti circolari aventi archi della stessa lunghezza, giungendo a concludere che il massimo ha la forma di un semicircolo: tale conclusione è notevole, ma (per una ragione che diremo poi) lo sono pure i due seguenti lemmi, che PAPPO premette:

Prop. 15. - Sia ABΓ (fig. 112) un triangolo rettangolo in B; descritto col centro in Γ l'arco circolare AΔ (Δ essendo un punto di BΓ), il rapporto del settore circolare ΔΓA al triangolo mistilineo ABΔ, risulterà maggiore del rapporto di un angolo retto all'angolo BΓA.

Prop. 16. - Sia ancora (fig. 113) ABΓ un triangolo rettangolo in B; descritto col centro in Γ l'arco circolare AΔ (Δ essendo sul prolungamento della retta BΓ), il rapporto del settore circolare AΓΔ al triangolo mistilineo ABΔ, risulterà maggiore del rapporto di un angolo retto all'angolo AΓΔ.

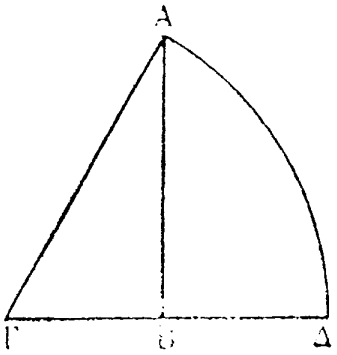


Fig. 112.

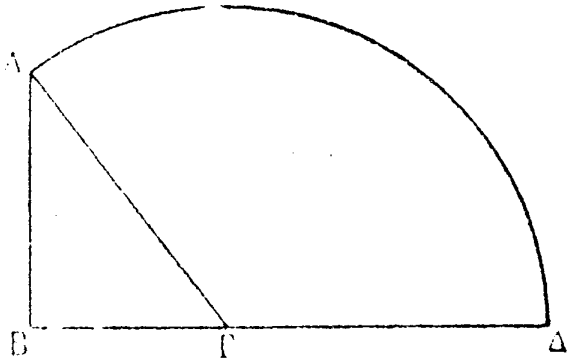


Fig. 113.

Ora, se si cerca di esprimere coi nostri simboli il contenuto di quest'ultima proposizione, si ottiene una relazione del seguente tipo

$$\frac{x}{x - \operatorname{sen} x} > \frac{\pi}{x}\,, \qquad \text{supposto} \qquad 0 < x < \pi\,;$$

relazione che pertanto è da aggiungersi alla collezione di proposizioni trigonometriche nosciute dai Greci.

Dopo un intermezzo sui poliedri d'ARCHIMEDE, di cui già ci servimmo nel II Libro (p. 333), PAPPO s'industria di generalizzare allo spazio le conclusioni precedenti, ma non raggiunge che parzialmente il suo intento. Egli dimostra, cioè, che, a parità di superficie, la sfera è maggiore di qualunque poliedro regolare inscritto, fa vedere anche che, di due poliedri regolari aventi la medesima superficie, è maggiore quello che ha più facce (1), ma non riesce a conclu-

(1) La verificazione di tale ascerto può farsi applicando le formole da noi esposte a p. 272.

dere *quello che asserirono i filosofi* (come egli si esprime) che la sfera è maggiore di qualunque poliedro irregolare iscritto, non vi riesce nemmeno se si completano le sue argomentazioni con certi scoli d'ignota provenienza, pubblicati dall'HULTSCH (ed. cit., p. 1138-1165).

Ma gli sforzi che egli fece per raggiungere questo teorema generale (teorema difficile, che nemmeno STEINER giunse a stabilire con assoluto rigore) non furono infruttuosi, perchè condussero a nuovi teoremi di cui importa far cenno. Un paio (prop. 21 e 22) appartengono alla « trigonometria geometrica » dei Greci (1) e dicono in sostanza che « la proiezione di un segmento è eguale al prodotto della lunghezza del segmento pel coseno dell'angolo che forma la retta a cui appartiene coll' asse di proiezione », e che sussiste l'equazione

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} = \cot \frac{x - y}{2} .$$

La relazione avvertita da EUCLIDE (*Elementi*, Lib. XIII, prop. 9) tra il raggio di un circolo ed il lato del decagono regolare inscritto (« i lati dell'esagono e del decagono regolari inscritti in uno stesso cerchio, costituiscono una retta divisa in media ed estrema ragione, essendo il primo lato la parte maggiore »). viene trasformata in modo conveniente da PAPPO, il quale dimostra che « se si divide il raggio di un cerchio in media ed estrema ragione, la parte maggiore sarà eguale al lato del decagono inscritto ». Più innanzi egli fa vedere che tra i raggi R e r delle sfere, circoscritta ed inscritta, ad un ottaedro passa la relazione

$$R^2 = 3r^2 \quad (2),$$

(1) Usiamo tal nome in opposizione a quello di " trigonometria analitica „ dei moderni.

(2) Per verificarla si ricordi (v. p. es. ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, IV éd., Paris, 1879, II Partie, p. 245) che si ha

$$r = \frac{l\sqrt{6}}{2} , \quad R = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

se l è la comune lunghezza degli spigoli del poliedro considerato.

e che fra il lato l di un icosaedro ed il raggio r della sfera iscritta passa la diseguaglianza

$$12r^2 > 5l^2 \quad (1).$$

Nuove proprietà della divisione di una retta in media ed estrema ragione si apprendono dai §§ XLIX, LI, LII, LIII, e LIX: esse completano le proposizioni che EUDOSSO forse scoperse (v. p. 140) ed EUCLIDE ha raccolte nell'esordio all'ultimo Libro degli *Elementi* (v. p. 239); sono relazioni non soltanto di eguaglianza, ma anche di diseguaglianza, dalle quali emergono dei valori approssimati per $\sqrt{5}$. Analogamente, la limitazione

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

emerge dal § XLIV, mentre dal § LVII (« dodici pentagoni regolari inscritti in un circolo dànno una somma superiore a quella di venti triangoli equilateri inscritti nello stesso circolo ») si trae la relazione

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} > \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3},$$

la quale dà ragione eziandio del teorema contenuto nel § LVIII.

Chiuderemo tale nostro cenno sul V Libro notando che esso finisce con una dimostrazione dell'impossibilità di altri poliedri regolari convessi all'infuori di quelli di PLATONE, la quale è identica in sostanza a quella che forma l'epilogo degli *Elementi* di EUCLIDE.

15. - Sul Libro VI della *Collezione* ci è lecito di essere brevi; esso contiene osservazioni e varianti sulle ipotesi fatte e sulle proposizioni esposte nelle opere che formano la « piccola collezione astronomica » (v. p. 494), e precisamente

---

(1) Lo si deduce dall'essere (*l. c.* nella nota prec.)

$$r = \frac{l\sqrt{3}\,(3+\sqrt{5})}{12}.$$

nella *Sferica* di TEODOSIO (p. 506-509), nel libro *Sopra la sfera mobile* di AUTOLICO (p. 499-501), in quello *Su i giorni e le notti* di TEODOSIO (v. p. 505), nell'opuscolo di ARISTARCO che a suo tempo studiammo (p. 480-488), finalmente nell'*Ottica* (p. 537) e nei *Fenomeni* (p. 501-503) di EUCLIDE. Il paragone dei commenti con le opere a cui si riferiscono mostra che lo studio di esse non fu per PAPPO molto suggestivo; chè il Libro VI della *Collezione* è forse quello in cui egli spiegò la minore originalità. Tuttavia nel commentare l'*Ottica* egli trovò modo di esporre alcune verità non insignificanti; vi incontriamo, infatti, le seguenti proposizioni, che si considerano oggi come fondamenti indispensabili di qualunque trattato di stereometria e che certamente erano già note molto tempo prima di PAPPO:

I. Se si abbassa da un punto qualunque M dello spazio la perpendicolare ad un dato piano π e dal piede N di essa la perpendicolare NP ad una retta r del piano π, la retta MP risulterà perpendicolare a r (1).

II. L'angolo di una retta r con la propria proiezione r' su di un piano π è il minimo fra quelli che essa forma con le rette s condotte nel piano π pel punto $r\pi$.

III. L'angolo rs cresce coll'angolo $r's$ e due rette s egualmente inclinate sopra r', formano angoli eguali con r.

Più originale ed importante è la ricerca — che sembra (2) altri affrontasse prima indarno — di determinare l'apparenza di un circolo, visto da un punto qualunque dello spazio (3), di determinare, cioè, gli elementi che individuano l'ellisse che si delinea di fronte all'occhio. PAPPO esegue tale determinazione e ne trae la soluzione del seguente importante problema: « dati un'ellisse ed un punto nel suo interno, determinare la posizione dell'occhio in modo che l'ellisse abbia l'aspetto di un circolo col centro in quel punto ».

16. - Un valore più grande del Libro VI della *Collezione*

(1) È il noto " teorema delle tre perpendicolari „.

(2) PAPPO ed. HULTSCH, p. 558, lin. 20.

(3) Come PAPPO fosse condotto a tale problema vedemmo nel Libro prec. (p. 563). Coloro che concepirono per primi questo problema senza scioglierlo furono (a quanto dice PAPPO) traviati dal preconcetto che l'ellisse apparente avesse per centro la proiezione del centro del circolo obbiettivo.

è posseduto dal VII, il quale si apre con un esordio interessantissimo, che giova di qui riferire:

Il *luogo* che si dice *risoluto* (1), o figlio ERMODORO, è, per dirlo in poche parole, quella certa speciale materia preparata ad uso di coloro che, avendo esauriti i soliti elementi, vogliono divenire destri nel risolvere problemi proposti, eseguendo costruzioni mediante linee. La quale (speciale materia) venne trattata da tre uomini, cioè EUCLIDE, l'autore degli *Elementi*, APOLLONIO PERGEO ed ARISTEO il vecchio: essa procede per *risoluzione* (ἀνάλυσις) e *composizione* (σύνθεσις). La risoluzione è quella via o metodo con cui dalla cosa cercata, ammessa come trovata, passando per quello che successivamente ne deriva, si giunge al punto da cui prende le mosse la composizione. Nella risoluzione, supponendo già eseguito quello che si domanda, si considera ciò da cui scaturisce, poi ancora quello che precede, finchè successivamente indietreggiando, si arriva a qualche cosa che sia noto o evidente; tale modo di procedere si chiamò risoluzione appunto perchè alla soluzione si arriva retrocedendo. Nella composizione invece, ammesso di avere già effettuata la risoluzione, si dispongono le cose nel loro ordine naturale e si combinano fra loro sinchè si arrivi a costruire quello che è domandato; e ciò si chiama composizione.

I generi di risoluzione sono poi due. Uno di essi, avendo per oggetto la ricerca della verità, si chiama *speculativo* (θεωρητικόν), mentre l'altro, servendo a trovare quello che è proposto, si chiama *problematico* (προβλεματικόν). Nel genere speculativo, adunque, supponiamo prima che le cose da trovare esistano realmente, e, passando per le conseguenze derivanti supposte vere e per le ipotesi fatte, giungiamo ad una cosa ammessa: se questa è vera, sarà anche vera quella che cerchiamo e la dimostrazione non sarà che la risoluzione invertita; se, al contrario, c'imbattiamo in qualche cosa notoriamente falsa, sarà dimostrata falsa anche quella che noi cerchiamo. Per converso nel genere problematico, ammettendo già trovato ciò che si cerca ed attraversando le conseguenze che ne derivano, ammesse per vere, passiamo ad una cosa ammessa; se questa esiste e si può costruire (allora i matematici la chiamano *data*) anche la cosa proposta si potrà ottenere e anche in tal caso la dimostrazione sarà la risoluzione invertita; ma se cadiamo in una cosa notoriamente falsa, il problema sarà irresolubile.

---

(1) τόμος ἀναλυόμενος; secondo il Gow (*A short History of the Greek Mathematics*, Cambridge, 1884, p. 211) la traduzione di questa frase sarebbe " collezione di opere di natura analitica „

Questo è quanto andava detto su la risoluzione e la composizione.

L'ordine dei libri che trattano il luogo risoluto è il seguente: I *Dati* di EUCLIDE, in un libro; la *Sezione di ragione* in due libri, la *Sezione di spazio* in due, la *Sezione determinata* in due, ed i *Contatti,* in due, di APOLLONIO; i *Porismi* di EUCLIDE in due tre libri; le *Inserzioni* di APOLLONIO, in due libri, e, dello stesso autore i *Luoghi piani* in due libri, e le *Coniche* in otto: i *Luoghi solidi* di ARISTEO, in cinque libri, i *Luoghi superficiali* di EUCLIDE, in due libri, e le *Proporzioni* di ERATOSTENE, pure in due libri. In totale dunque si hanno trentatre libri, gli argomenti dei quali io esporrò, notando il numero dei luoghi, i diorismi, i casi che sono in ciascun libro, senza sottintendere i lemmi necessari, in modo da non omettere alcuna questione relativa ai libri stessi (1).

Fedele all'impegno preso il commentatore riassume e spiega le principali fra le opere; dei ragguagli, veramente preziosi, che egli porge abbiamo già tratto gran profitto trattando di EUCLIDE (v. p. 255-259 e 265), ERATOSTENE (v. p. 346) ed APOLLONIO (v. p. 387 e segg.), onde non è mestieri qui ritornarvi. Rileviamo soltanto, nel brano che concerne i *Contatti*, un complemento ad un lemma di ARCHIMEDE, (v. p. 331); in quello relativo ai *Porismi*, la generalizzazione di un teorema di EUCLIDE (2); ed in quello relativo alle *Coniche*, oltre una critica di coloro che parlano di « prodotto di quattro linee (3) » ed un modo di evitare tal dicitura nell'e-

---

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 634-638.

(2) Eccone l'enunciato: " Si considerino $n + 1$ rette, n delle quali ruotino attorno alle loro intersezioni con la rimanente: esse si tagliano in altri $\frac{n(n-1)}{2}$ punti: ora, se $n - 1$ di questi punti percorrono altrettante rette date, anche i rimanenti $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ descriveranno ciascuno una retta ". PAPPO, modestamente osserva (ed. cit., p. 654) che ad EUCLIDE non rimase certamente ignota questa proposizione, ma che non la dimostrò, essendo suo intento di esporre soltanto i fondamenti.

(3) Id., p. 680. È in questo punto che PAPPO parla del " problema delle tre o più rette ": è alle sue parole che devesi se questo problema venne chiamato da DESCARTES — nel I Libro della sua *Géométrie* (1637) — *problema di Pappo* e se poi

nunciare il problema delle tre o più rette, le seguenti proposizioni: « Le figure generate da una rotazione completa hanno fra di loro un rapporto composto di ciò che ruota e delle rette condotte similmente sino agli assi delle rotazioni, dai baricentri delle figure mobili. Le figure generate da una rotazione incompleta hanno fra di loro un rapporto composto di ciò che ruota e degli archi descritti durante le rotazioni dai loro baricentri ». Chi non ravvisa in questi enunciati il celebre teorema che a torto si suol attribuire al celebre P. GULDIN (1577-1643), il quale lo fece conoscere circa tredici secoli più tardi (1)?

17. - Indicati gli argomenti dei principali fra gli scritti che compongono il *luogo risoluto*, PAPPO dimostra una folla di lemmi destinati ad agevolarne la intelligenza. Anche qui il paragone di essi con le opere superstiti a cui si riferiscono mostra che, di regola, il commentatore si limita a dimostrare proposizioni ausiliari che l'autore tacque. Ma talora egli si ispira a quelle opere e sa aggiungere del suo qualche cosa d'importante, sicchè alcuni teoremi di PAPPO rappresentano complementi notevoli alle produzioni che appartengono al periodo aureo della geometria greca, epperò hanno il diritto di venir qui segnalati.

Per dimostrare ciò cominciamo dall'osservare che M. CHASLES, con quell'acuto senso critico, chè gli fece conseguire e conservare una posizione tanto eminente fra gli storici della matematica, notò (2) come i lemmi alla *Sezione determinata* di APOLLONIO si possano considerare siccome espressioni di relazioni fra punti in involuzione. Con maggior pre-

---

CHASLES chiamò *teorema di Pappo* (*Ap. historique*, p. 37; *Traitè des sections coniques*, Ier Partie, Paris, 1865, p. 16) quello che afferma essere una conica la curva che risolve il problema delle tre o quattro rette.

(1) " Quantitas rotonda in viam rotationis ducta, producit Potestatem Rotundam uno grado altiorem Potestate sive Quantitate Rotata „. *Centrobaryca*, Lib. II, Cap. VIII, Prop. 3 (Viennae, 1641). " Je n'ai garde néammoins d'accuser Guldin de plagiat, mais il me parait difficile de l'en disculper „, osserva a questo proposito il MONTUCLA (*Hist. des Mathématiques*, 2e ediz, T. I, p. 330), con quella bonomia che forma una delle maggiori attrattive del suo stile.

(2) *Aperçu historique*, p. 39.

isione, le proposizioni 22, 29, 30, 32, 34, 36 e 44 esprimono ltrettante relazioni metriche fra due coppie di punti coniu-;ati ed il punto centrale dell'involuzione; le 37-38 relazioni lella stessa specie fra una coppia di punti coniugati, un)unto doppio ed il punto centrale; le 39-40 relazioni tra due :oppie di punti coniugati ed un punto doppio; e le 45-46, :on i loro casi speciali 41-43, relazioni tra due coppie di)unti coniugati, il punto centrale ed un altro punto.

Ma anche chi fosse riluttante ad ammettere la interpretazione data dal grande geometra francese per questi lemmi, non potrà negare che essi sono altrettanti ingredienti della disciplina chiamata dallo ZEUTHEN *Algebra geometrica* (v. p. 426): a dimostrarlo bastano gli enunciati che ora ne diamo in linguaggio moderno (1).

Prop. 22 e 29. - Se $ax = by$ sarà $\frac{b}{y} = \frac{(a+b)(b+x)}{(a+y)(x+y)}$.

Prop. 25, 30, 32, 34-36 e 44. - Se $(b-a)(b-c) = (d-b)(e-b)$ sarà $\frac{(d-a)(d-c)}{(e-a)(e-c)} = \frac{d-b}{e-b}$.

Prop. 37-38. - Se $\frac{a}{c} = \frac{(a-b)^2}{(c-b)^2}$ sarà $ac = b^2$ (2).

Prop. 39-40. - Se $\frac{(b-a)(e-a)}{(b-d)(e-d)} = \frac{(c-a)^2}{(c-d)^2}$ sarà $\frac{(b-a)(b-d)}{(e-a)(e-d)} = \frac{(b-c)^2}{(e-c)^2}$.

Prop. 45-46. - Se $(d-a)(d-c) = (b-d)(e-d)$ si avrà, qualunque sia x, $(x-a)(x-c) - (x-b)(x-e) = (b-a-c+e)(x-d)$. Facendo ivi successivamente $x = a, b, c, e$ si ottengono le Prop. 41-43 di PAPPO.

Va ancora rilevato che le prop. 61, 62 e 64 risolvono questioni di massimo e minimo; secondo M. CHASLES sono pure

(1) In questa traduzione in formole di relazioni segmentarie vi è sempre un elemento arbitrario, cioè la scelta dell'origine: ma al variare di questa, le relazioni risultanti subiscono soltanto alterazioni superficiali.

(2) Questa relazione si trova anche fra i lemmi di PAPPO al V Libro delle *Coniche* (Prop. 206).

collegate all'involuzione di punti, ad ogni modo esse possono compendiarsi nell'enunciato seguente: « Date su di una retta due coppie di punti M, N e P, Q, trovare sulla stessa un quinto punto X tale che il rapporto

$$\frac{MX \cdot NX}{PX \cdot QX}$$

risulti massimo o minimo ». Non vi è chi non vegga essere questa la questione di algebra geometrica che corrisponde alla ricerca dei valori estremi del rapporto fra due funzioni di secondo grado di una variabile; forse, come tale, venne scelta da FERMAT per sperimentare il proprio metodo *de maximis et minimis* (1).

18. - Proseguendo la nostra descrizione dei lemmi di PAPPO, noteremo, fra quelli che concernono il I Libro delle *Inserzioni*, la soluzione, indicata da un certo ERACLITO, del seguente problema (2): dato un quadrato ABΓΔ (fig. 114) inserire tra il suo lato ΓΔ ed il prolungamento di AΓ un seg-

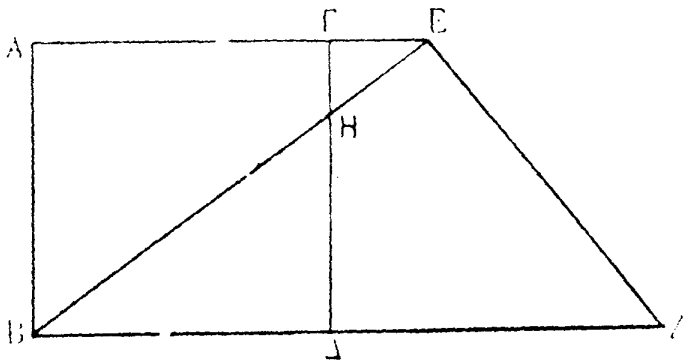


Fig. 114.

(1) *Oeuvres de Fermat* (ed. TANNERY et HENRY), T. I, Paris, 1891, p. 140.

(2) Questo problema, al pari dell'analogo relativo al rombo (di cui si occupò APOLLONIO), ha occupato a lungo i matematici, che lo considerarono da svariati punti di vista, come si apprende dalla dotta nota di R. C. ARCHIBALD, *Discussion and history of certain geometrical problems of Heraclitus and Apollonius* (Proc. of the Edimburgh mathem. Society, T. XXVIII, 1909-10).

mento HE di data lunghezza per modo che il suo prolungamento passi pel vertice B del quadrato»: la soluzione stessa poggia sopra il seguente teorema: « se nel quadrato AΔ (stessa figura) si conduce la trasversale BHE, poi EZ perpendicolare a BE si avrà

$$\overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{ZE}^2 = \overline{\Delta H}^2 \text{ (1) }».$$

Poco dopo troviamo il seguente teorema di minimo: « fra le rette condotte entro un angolo da un punto della bisettrice, la minima è perpendicolare alla bisettrice ».

Di natura differente sono i teoremi che Pappo collega ai II Libro delle *Inserzioni:* a titolo di esempio citiamo il seguente: « Dati (fig. 115) due semicerchi aventi i loro dia-

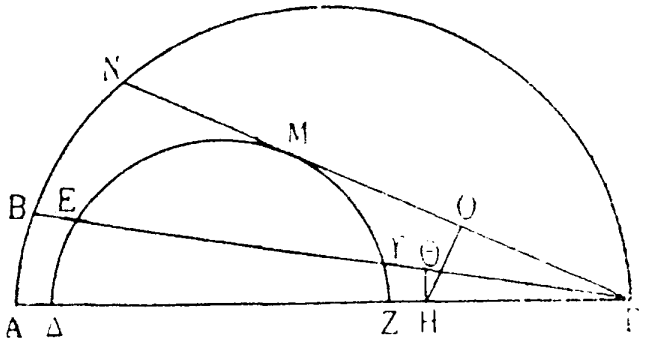


Fig. 115.

metri AΓ, ΔZ sulla stessa retta, si prenda ZH = AΔ; allora una trasversale qualunque condotta pel punto Γ taglia una seconda volta in B il primo di quei semicerchi e nei punti E, Υ il secondo; detta Θ la proiezione ortogonale di H sulla trasversale, i due segmenti BΘ, EΥ avranno lo stesso punto medio. In particolare, se la trasversale tocca in M il secondo cerchio e taglia in N il primo, M sarà il punto di mezzo del segmento che ha per estremi il punto N e la proiezione O del punto H su quella trasversale tangente » (prop. 80 e 81).

Alcune fra le proposizioni, con cui Pappo agevola l'intelligenza dell'opera di Apollonio *Sui contatti,* concernono rette tangenti a circonferenze e circonferenze tangenti fra loro; crediamo superfluo arrestarci su di esse, essendo corollari o

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 780; v. anche p. 1260.

semplici complementi rispetto a quelle raccolte da EUCLIDE nel III Libro degli *Elementi*. Va invece notato il seguente problema: « Dati in un piano un cerchio e tre punti in linea retta ΔEZ, trovare sulla periferia del cerchio un punto A tale che, condotte AΔ, AE a tagliare nuovamente la circonferenza in B, Γ, la retta BΓ passi per Z » (prop. 117), problema di cui il nostro commentatore tratta direttamente il caso che corrisponde al supporre Z all'infinito (prop. 105, 107, 108). Non è superfluo rilevare che, togliendo la condizione della collinearità fra i punti ΔEZ, il problema trattato da PAPPO si trasforma in quello che porta i nomi di G. CRAMER (1704-1752) e G. F. CASTILLON (1708-1791); ma importa notare come le più belle soluzioni di tal problema vennero appunto ottenute ispirandosi al passo surriferito della *Collezione matematica* (1).

Come introduzione al resoconto sui *Luoghi piani* PAPPO fa conoscere una sottile classificazione dei luoghi, tolta, a quanto sembra, da APOLLONIO.

I luoghi in generale, egli scrive (2), sono alcuni ἑφεκτικοί (*fissi*); tali sono, come dice APOLLONIO nell'esordio dei suoi elementi, i punti considerati come luoghi di punti, le linee di linee, le superficie di superficie ed i solidi di solidi —; altri sono διεξοδικοί (*progredienti*), come le linee considerate quali luoghi di punti, le superficie di linee ed i solidi di superficie; altri finalmente sono ἀναστροφικοί (*rientranti*) come le superficie considerate quali luoghi di punti ed i solidi di linee.

Quanto ai lemmi sopra i *Luoghi piani* di APOLLONIO, alcuni sono, come rilevò M. CHASLES (3), legati alla relazione generale fra quattro punti di una retta, che R. SIMSON (1687-1758) scoperse un secolo fa e che a torto porta il nome di M. STEWART (4):

$$\overline{AD}^2 . BC + \overline{BD}^2 . CA + \overline{CD}^2 . AB + BC . CA . AB = 0 :$$

(1) Alludiamo a quelle di ANNIBALE GIORDANO (1769-1835) (cfr. il mio lavoro sopra *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce*, Genova, 1892, p. 50-55) e G. F. MALFATTI, entrambe inserite nel T. IV (1788) delle *Memorie della Società Italiana delle Scienze*.

(2) PAPPO ed. HULTSCH, p. 660-662.

(3) *Aperçu historique*, p. 42.

(4) M. CANTOR, *Vorlesungen*, III Bd., Leipzig, 1899, p. 528.

infatti le prop. 119-124 di PAPPO ne sono corollari e le 125-126 semplici trasformazioni: va notata la relazione

$$\overline{BA}^2 + \overline{A\Gamma}^2 = 2\,(\overline{A\Delta}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2)$$

fra i tre lati di un triangolo ABΓ e la mediana ΓΔ, che il SIMSON generalizzò tanto notevolmente nella sua divinazione dell'opera di APOLLONIO (v. L. II, *Appendice*, n. 14).

Di importanza ancor maggiore sono dotati i trentotto lemmi di PAPPO sui *Porismi*, di cui ventitre concernono figure rettilinee, sette il rapporto anarmonico di quattro punti e otto il circolo: esponiamo il contenuto dei principali (1). La prop. 129 insegna la costanza del rapporto anarmonico dei quattro punti in cui un fascio di quattro raggi è segato da una trasversale: le prop. 136, 137, 140 e 142 sono casi particolari di quella e della reciproca. La prop. 130 esprime una relazione fra i segmenti determinati su una trasversale arbitraria dai lati di un triangolo e dalle rette che ne uniscono i vertici ad un punto qualunque del suo piano (ossia dai lati di un quadrangolo completo). L'essere ogni diagonale di un quadrilatero completo divisa armonicamente dalle altre due si apprende dalla prop. 131, di cui sono casi particolari le prop. 134 (2), 138, 141 e 143; ed il teorema di PASCAL relativo ad una conica degenere dalle prop. 139, 141 e 143. Le prop. 134 e 135 vennero generalizzate da M. CHASLES (3); da quelle che portano i numeri 148-153 e 160 si apprendono le proprietà fondamentali dei gruppi armonici, mentre le 154-157, 159 e 161-163 formano la base della polarità rispetto ad un cerchio; finalmente tra la prop. 157 ed il metodo d'APOLLONIO per determinare i fuochi di una conica è stata recentemente segnalata (4) una relazione assai stretta.

---

(1) Per più minuti particolari vedi: CHASLES, *Les trois livres des porismes d'Euclide.* Paris, 1860, p. 75 e seg.

(2) Ivi s'incontra una nuova specie di quadrangolo che PAPPO dice, chiamarsi βωμίσκος (ed. HULTSCH, p. 878. linea 6).

(3) *Traité de géométrie supérieure* (II ed., Paris, 1880), p. 268 e 249.

(4) T. L. HEATH, *Apollonius of Perga Treatise on conic sections, edited in modern notations*, Cambridge, 1896, p. XXXIX.

19. - I lemmi relativi alle *Coniche* di APOLLONIO non meritano, nel loro insieme, grande considerazione; ricorderemo soltanto alcuni di essi, che si riferiscono alla costruzione di un'iperbola (prop. 204, 205 e 208), altri esprimenti relazioni metriche più o meno complicate tra punteggiate simili (prop. 209, 217, 229 e 231), un nuovo semplicissimo problema d'inserzione (cioè il collocamento entro un angolo, di un segmento di data lunghezza, parallelo ad una retta data) (prop. 218) ed un teorema (prop. 221 e 222) che, tradotto in formole, guida alla nota identità

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{cot} x.$$

Ma, ciò che non deve venir passato sotto silenzio è che, dai lemmi di PAPPO relativi alle *Coniche*, uniti a quelli che leggonsi nelle altre parti della *Collezione*, si traggono gli elementi per giudicare quali progressi abbiano compiuto, da EUCLIDE in poi, due rami importanti della matematica greca, cioè la teoria delle proporzioni e l'algebra geometrica. E poichè è còmpito nostro il descrivere l'evoluzione che essi subirono dall'alba al tramonto della scienza ellèna, analogamente a quanto facemmo parlando di ARCHIMEDE (vedi p. 288, 308 e 314), riassumeremo qui, sotto forma algebrica, le principali proposizioni esposte da PAPPO, non senza aver prima osservato la presenza, nella collezione seguente, di relazioni di diseguaglianza, accanto ad equazioni:

Proporzioni.

LIBRO III.

Prop. 2. - Se $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ e $\frac{a'}{b'} = \frac{b'}{c'} = \frac{c'}{d'}$, e se inoltre $a = a'$ e $b > b'$, sarà $d > d'$.

Prop. 3. - Se $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ sarà $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Prop. 4. - Se $\frac{a}{b} < \frac{d}{e}$ e $\frac{b}{c} < \frac{e}{f}$, sarà $\frac{a}{c} < \frac{d}{f}$.

LIBRO IV.

Prop. 3 e 4. - Se $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$ sarà $\frac{a+b}{b} \gtrless \frac{c+d}{d}$, ove (qui come in seguito) i segni si corrispondono.

Prop. 6 e 7. - Se $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$ sarà $\frac{a}{a-b} \lessgtr \frac{c}{c-d}$ e $\frac{b}{a} \lessgtr \frac{d}{c}$.

Prop. 8 e 9. - Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, $a > c$ e $b > d$, sarà $\frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b} < \frac{a-c}{b-d}$.

Prop. 11. - Se $a > b$ e $c < d$ sarà $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Prop. 16. - Se $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$ sarà $ad \gtrless bc$.

Algebra geometrica (1).

Libro III.

Prop. 1. - Sussiste l'identità $\frac{x \cdot a}{(x-1)\,a} = \frac{(x-1)\,a}{(x-2)\,a + \frac{a}{x}}$.

Libro V.

Prop. 25 e 26. - Identità:

$$2\,(a+b)\,b + b\,(b+c) = \left|(a+b) + (a+b+c)\right|\,b + b^2$$

$$(b+d)\,(b-c) + (b-c)^2 = 2b\,(b-c) + (b-c)\,(d-c).$$

Libro VII.

Prop. 12. - Se $a > x$, $a > y$ e $\frac{x}{a-x} > \frac{y}{a-y}$, sarà $x > y$.

Prop. 13 e 14. - Il prodotto di due numeri, la cui somma è è data, è massimo se i due numeri sono fra loro eguali.

Prop. 15. - Se $a + b = c + d$ e $a > c$ sarà $b < d$.

Prop. 23 e 24. - Sussiste l'identità:

$$(a+b)\,a = (a+b+x)\,(a-x) + (b+x)\,x.$$

Prop. 31, 57, 58 e 63. - Se

$$x + y = b \text{ sarà } (a+x)\,(a+y) = a\,(a+b) + xy.$$

(1) Vanno aggiunte quelle proposizioni che riferimmo a proposito della *Sezione determinata* (p. 685) nonchè quelle connesse al teorema di Stewart (p. 688).

Prop. 65 e *69.* - Se $(x+a)(x-a) \gtrless (y+b)(y-b)$ secondochè $a \gtrless b$ sarà $x+a \gtrless y+b$.

Prop. 178, 179, 192-194. - Identità:

$$(b+2a)b+(a+x)(a-x)=(a+b+x)(a+b-x).$$

Prop. 195. - Identità:

$$4a^2=2\left\{(a-x)(a+x)+(a-y)(a+y)+x^2+y^2\right\}.$$

Prop. 196. - Identità:

$$(a+b-x)^2+(a+b+x)^2=(b-x)^2+(b+x)^2+2(a+2b)a.$$

Prop. 197 e *199.* - Affinchè sussistano le identità:

$(a+x+y)a+x^2=(a+x)^2$, $(x-a)(y+a)+a_2=y^2$, dev'essere $x=y$.

Prop. 200 e *201.* - Identità:

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{a+\frac{a^2}{b}}{a-\frac{a^2}{b}} \quad , \quad (b+a)(b-a)=b\left(b-\frac{a^2}{b}\right).$$

Prop. 207. - Supposto $(b+c)b=2c^2$ sarà $b=c$.

Prop. 210. - Se $a+b=c+d$ sarà $a-c=d-b$ e viceversa.

Prop. 211. - Se $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{p-q}$ sarà $z=x-y$.

Prop. 212. - Se $a-c<d-b$ sarà $a+b<c+d$ e viceversa.

Prop. 223. - Supposto

$a>a'$, $x<a$, $x'<a'$ e $x(a-x)=x'(a'-x')$, sarà $x>x'$.

Prop. 224. - Se $x+y=x'+y'$ e $xy=x'y'$ sarà $x=x'$ e $y=y'$.

Prop. 225. - Supposto $a>a'$, $b<b'$, sarà $a-b>a'-b'$.

Prop. 226. - Se $x'=2x$ e $y'=2y$ sarà $x'y'=4xy$.

Prop. 228. - **Due quantità son date quando si conosca la somma e la differenza dei loro quadrati.**

***Prop.* 232 e 233.** - Se

$a > x$ da $\dfrac{a}{a-x} > \dfrac{b}{b-y}$ segue $\dfrac{a+x}{a} > \dfrac{b+y}{b}$; e viceversa.

***Prop.* 233.** - Se $\dfrac{x+a}{x-a} > \dfrac{y+b}{y-b}$ sarà $\dfrac{a}{x-a} > \dfrac{y}{y-b}$.

LIBRO VIII.

***Prop.* 14.** - Se x, y devono soddisfare le equazioni

$$(x-a)(y+a) = k^2 \quad , \quad (x+a)(y-a) = l^2,$$

x e y saranno dati.

20. - Rileveremo ancora, nel VII Libro della *Collezione*, i lemmi riferentesi ai *Luoghi superficiali* di EUCLIDE ; alcuni di essi (prop. 236-238) insegnano la generazione di una conica mediante un fuoco e la corrispondente direttrice ; PAPPO se ne servì già nel corso del suo IV Libro (1) e, secondo un'ipotesi recente (2), egli li avrebbe estratti dai *Luoghi solidi* di ARISTEO. Il primo dei lemmi citati è di intelligenza difficile; adottando, come molti fanno (3), l'interpretazione suggeritane da P. TANNERY, si dovrebbe intendere che esso esprimesse la proprietà seguente :

« Se una retta AB si muove parallelamente a sè stessa, descrivendo coi suoi estremi due rette fisse concorrenti e trasporta seco un piano che si conserva pure parallelo a sè stesso e nel quale è tracciata una conica per la quale : 1° AB è un diametro, 2° le corrispondenti corde coniugate si conservano parallele ad una direzione fissa, 3° è costante il rapporto del quadrato dell'ordinata al prodotto dei due segmenti del diametro AB, il luogo di questa curva sarà una superficie conica. Se le due rette fisse, invece di essere concorrenti, sono parallele, tale superficie è cilindrica ».

---

(1) T. L. HEATH, *Apollonius of Perga, etc.* (Cambridge, 1896), p. XXXVIII.

(2) PAPPO ed. HULTSCH, p. 284.

(3) ZEUTHEN, *Die Lehre der Kegelschnitte im Alterthum.* Kopenhagen, 1886, p. 424 ; T. L. HEATH, *The Works of Archimedes edited in modern notations.* Cambridge, 1897, p. LXII.

Dalle parole di PAPPO sembra dedursi che EUCLIDE abbia limitate le proprie considerazioni a tal caso, mentre il commentatore sia assurto alla proposizione generale.

Il Libro VII si chiude col teorema (che non sappiamo a qual opera serva di chiarimento): « Se (fig. 116) sui lati AB, BΓ del triangolo ABΓ rettangolo in B si prendono i punti H , Z in modo che sia

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AZ}{ZB} = \frac{BH}{N\Gamma},$$

se si conducono le rette AN , ΓZ e se ne determina la intersezione E, la retta BE riuscirà perpendicolare a AΓ ».

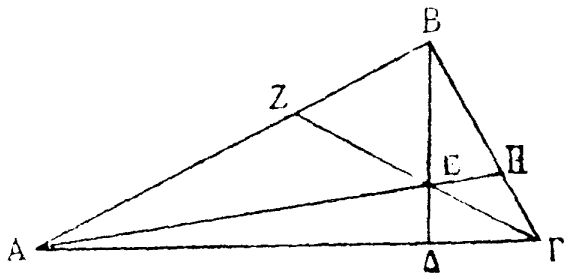


Fig. 116.

21. - L'ultimo libro della *Collezione* « contiene vari e bei problemi meccanici » ed è pure indirizzato a ERMODORO, figlio di PAPPO. Esso comincia con una prefazione interessante, ove sono vantati i pregi e le applicazioni della Meccanica, ne sono descritte le varie diramazioni e sono citati come principali cultori di essa ARCHIMEDE da Siracusa, ERONE d'Alessandria e CARPO d'Antiochia. Quale intento siasi prefisso di raggiungere PAPPO nel detto libro emerge dalle seguenti linee della prefazione:

Essendo l'arte meccanica così composta e ripartita, ho ritenuto lodevole per me il riunire quelle cose che gli antichi dimostrarono geometricamente ed esporre in modo migliore di quello adoperato da coloro che scrissero su quest'argomento, più brevemente e più chiaramente quei teoremi che giudicansi utili. Tali cose sono del genere seguente:

I. Dato un peso, trascinato da una data potenza sopra un piano orizzontale, e dato un piano inclinato sull'orizzonte di

un dato angolo, trovare la potenza con cui quel peso si può trascinare sopra quel piano inclinato.

II. Date due rette diseguali, inserire fra di esse due medie proporzionali.

III. In qual maniera si può fare che una ruota, avente un dato numero di denti, venga apposta ad un'altra ruota, avente pure un dato numero di denti, e come si può determinare il diametro della seconda ruota.

Queste parole inducono a giudicace che la meccanica di PAPPO sia una disciplina di natura geometrica: tale giudizio preventivo vien confermato tanto dallo studio dell' ultimo Libro della *Collezione*, quanto dal riassunto che ora ne esporremo.

PAPPO, al pari di ERONE ritiene che la teoria dei centri di gravità sia la base di tutta la meccanica, e però debba conoscersi da chiunque imprenda lo studio di questa scienza, vuoi con intenti puramente teorici, vuoi in vista delle applicazioni pratiche di cui è suscettibile. E per « centro di gravità » PAPPO (1) intende un punto tale che, sospendendo per esso il corpo, in modo che non possa moversi se non rotandovi intorno, questo si disponga in quiete, qualunque sia la sua posizione iniziale; la presenza di un tale punto in qualsivoglia solido, anche non definito geometricamente, si trovava dimostrata in opere non più esistenti di ARCHIMEDE ed ERONE, delle quali PAPPO si propone di far conoscere le parti meno note (2).

Che la nozione di « centro di gravità » abbia importanza, non solo nella meccanica. ma anche nella geometria emerge dal seguente teorema dimostrato da PAPPO: « Se i lati di un triangolo si dividono nel medesimo rapporto, i punti di divisione sono vertici di un secondo triangolo avente comune col primo il baricentro » (prop. 2) (3); nel corso della

(1) Ed. HULTSCH, p. 1030.

(2) Id., p. 1034.

(3) M. CHASLES (*Aperçu historique*, p. 44) preferisce enunciarlo come segue: " Se tre mobili percorrono nello stesso senso i tre lati di un triangolo, se i moti cominciano nello stesso istante e se le velocità sono proporzionali ai lati relativi, il baricentro del triangolo che ha per vertici quei mobili coincide sempre

dimostrazione PAPPO applica il teorema di MENELAO nel piano e si affretta poi a dimostrarlo (1) (prop. 3) ed a far lo stesso per un'altra proposizione ausiliaria (prop. 4). Egli quindi si volge al problema seguente: « Dato (fig. 117) un rettangolo AΓ, condurre in esso una retta ΓΔ per modo che, sospendendo al punto Δ il trapezio ABΓΔ, le rette AΔ e BΓ riescano orizzontali » (prop. 5), e lo riduce alla deteuminazione sopra BΓ di un punto Λ tale che sia $\overline{\Gamma\Lambda}^2 = 3\overline{B\Lambda}^2$ (prop. 6).

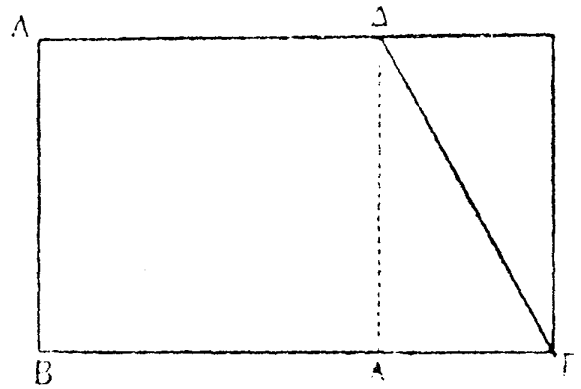


Fig. 117.

22. - Anche la proposizione seguente è geometrica, essendone soggetto una serie notevole di triangoli aventi un angolo comune ed i baricentri situati sopra una stessa retta; invece la prop. 8ª concerne la costruzione di un piano inclinato, la 9ª il *primo* dei problemi meccanici citati da PAPPO nella prefazione e la 10ª (nonchè le 22ª e 23ª) il *terzo* (2). Colla successiva si ritorna invece nel dominio della geometria: essa infatti insegna il seguente procedimento per ridurre ad un'inserzione il problema della ricerca di un cubo che stia ad un cubo dato in un rapporto conosciuto:

---

col baricentro del triangolo dato „. Un teorema analogo sussiste per qualsivoglia poligono; lo notò MONTUCLA nella sua edizione delle *Récréation mathématiques* dell'OZANAM (Paris, 1778) e si verifica con poche linee di calcolo.

(1) Collo stesso metodo che vedemmo adoperato da TOLOMEO (v. p. 540); MENELAO però non è nominato.

(2) A questo proposito PAPPO cita (p. 1060) il celebre detto di ARCHIMEDE: *da mihi, ubi consistam, et terram movebo* „.

Supposto che (fig. 118) BΔ sia il lato del cubo dato e $\frac{B\Delta}{\Delta E} > 1$ il dato rapporto, si descriva il cerchio di centro Δ e raggio ΔB; sia AΔΓ il diametro perpendicolare al raggio BΔ e si conduca la corda ΓEZ: si tracci per A una corda AHΘK tale che il segmento di essa intercetto fra le rette ZE, EB sia eguale a quello

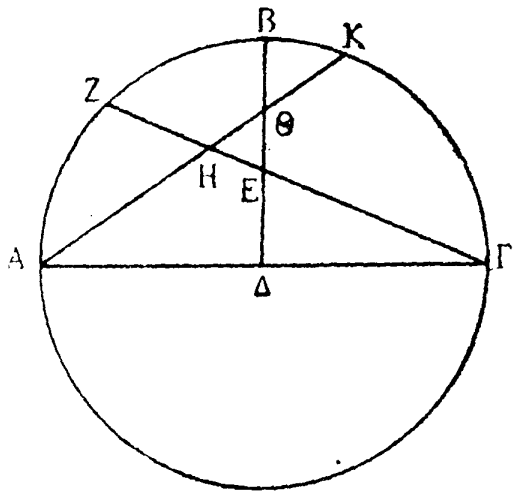


Fig. 118.

intercetto fra la retta EB e la periferia del circolo descritto; si avrà allora

$$\frac{B\Delta}{\Delta E} = \frac{\overline{B\Delta}^3}{\overline{\Delta\Theta}^3}.$$

onde ΔΘ sarà il lato del cubo cercato.

Ad altri e non meno importanti sviluppi geometrici dà luogo un problema che (come osserva il nostro commentatore) gli architetti incontrano spesso nella pratica dell'arte loro; consiste nel determinare il raggio della base, supposta circolare, di una colonna cilindrica di cui si conosce un frammento di forma arbitraria (1). Per risolverlo, il greco commentatore prende arbitrariamente due punti α, β su

(1) Gli è nel corso di questo problema (p. 1074) che s'incontra quella frase la quale fece credere che i Greci conoscessero la "geometria con una sola apertura di compasso„. Che ciò non fosse dimostrò M. Kutta nella nota *Geometrie mit constanter Zirkelöffnung im Alterthum* (Bibl. math., 1896, p. 16) e poi nella memoria *Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung* (Abh. der k. deutsch. Naturf. Gesell., T. LXXI, Halle,

questo frammento e, col mezzo del compasso, determina sullo stesso cinque punti γ, δ, ε, ζ, η i quali siano equidistanti da α e β; essi si troveranno sul piano che biseca ad angolo retto il segmento $\alpha\beta$, onde staranno eziandio sull'ellisse sezione di questo piano colla data colonna, ed è chiaro che l'asse minore di tale ellisse sarà il diametro cercato della colonna. Per trovarlo PAPPO segna su un piano cinque punti Γ, Δ, E, Z, H tali che i triangoli $\Gamma\Delta E$, $\Gamma\Delta Z$, $\Gamma\Delta H$ siano eguali rispettivamente ai triangoli $\gamma\delta\varepsilon$, $\gamma\delta\zeta$, $\gamma\delta\eta$: allora l'ellisse suddetta è eguale a quella individuata dai cinque punti $\Gamma\Delta$EZH. Egli insegna a descriverla (prop. 13) (1) e ne trova alcune coppie di diametri coniugati, in particolare gli assi: così ha raggiunto lo scopo che si è prefisso, percorrendo anzi una strada a cui oggi non si saprebbe suggerire alcun sostanziale miglioramento.

Sorvolando sopra alcune considerazioni di mediocre importanza (ed anche di dubbia autenticità), rileveremo quest'altra questione, a cui PAPPO accordò un posto nella *Collezione* grazie alle applicazioni che riceve: « inscrivere in un dato cerchio sette esagoni fra loro eguali, uno dei quali sia concentrico al dato cerchio e gli altri abbiano ciascuno un lato comune con questo e per lato opposto una corda del dato circolo (2) » (prop. 19).

Va da ultimo notato che, ritornando alla fine dell'VIII Libro sulla costruzione delle ruote dentate, PAPPO fa cenno dell'elica cilindrica e delle proprietà in essa ravvisate da APOLLONIO (v. p. 398) e ricordate da ERONE (v. p. 578). La *Collezione* si chiude con estratti dell'*Elevatore* (v. p. 574 e segg.) del celebre geodeta alessandrino, estratti che costi-

---

1897, p. 69-101). Ciò non ostante quell'opinione trovò un nuovo aderente in M. SIMON (*Gesch. der Mathem. im Alterthum*. Berlin, 1909, p. 371), il quale a torto ritiene che la " geometria con una sola apertura di compasso „ sia identica alla " geometria del compasso „ di L. MASCHERONI.

(1) La costruzione di PAPPO è esposta in linguaggio moderno da T. L. HEATH, *Apollonius of Perga Treatise on Conic sections edited in modern notations*. Cambridge, 1896, p. CLIII e seg.

(2) L'enunciato di questa questione venne certamente ispirato dal teorema, noto ai Pitagorici (v. p. 38), che dice potersi coprire un piano mediante esagoni regolari. Essa si riduce alla risoluzione dell'equazione $7x^2 = R^2$.

tuiscono quanto vi è di veramente meccanico nello scritto di PAPPO, giacchè in tutto il resto le considerazioni fisiche non entrano che incidentalmente, siccome stimolo o pretesto a considerazioni di pura geometria.

23. - Giunti, così, al termine della nostra analisi, ci sentiamo tenuti a spiegare al lettore perchè ci siamo tanto diffusi sul principale lavoro di PAPPO: la ragione è che desso, non soltanto dà un' idea di quanto operò questo insigne scienziato, ma, appunto pel carattere compilatorio che esso possiede, c'insegna quali problemi abbiano affaticati i matematici che seguirono quelli del periodo aureo della geometria greca; la *Collezione* è una vera enciclopedia matematica, epperò deve venire descritta nelle varie sue parti, da chi intende segnalare tutte le varie direzioni in cui ha proceduto il genio matematico dei Greci. D'altronde essa è l'ultima grande opera che annoveri la matematica greca! Gli altri geometri, di cui dobbiamo ancora occuparci, sono di gran lunga inferiori a PAPPO, e di questo altre opere non conosciamo; vero è che MARINO, nella chiusa alla prefazione ai *Dati* di EUCLIDE, dice avere egli chiosata quest'opera (1), che un passo della *Collezione* (2) (confermato dal *Fihrist*) (3) fa conoscere l'esistenza di una illustrazione ad un lavoro sull'*Analemma* (cfr. p. 548) e che varie informazioni portano a concludere che PAPPO fu pure commentatore degli *Elementi;* ma nessuno di questi scritti è giunto completamente sino a noi. Soltanto PROCLO ha serbato tre notizie intorno ad alcune sue osservazioni sugli *Elementi* di EUCLIDE, di cui è dover nostro tenere qui parola.

Una (4) concernente il postulato « tutti gli angoli retti sono fra loro eguali », e consiste in ciò che l'affermazione reciproca non è sempre vera, se non quando si escludano angoli curvilinei; per dimostrare l'asserto PAPPO avverti l'esi-

(1) *Euclidis Opera omnia,* ed. HEIBERG et MENGE. T. XI, Lipsiae, 1896, p. 256.

(2) Ed. HULTSCH. p. 246.

(3) Infatti ivi si legge riguardo a PAPPO: " I suoi scritti sono: un commento al libro di TOLOMEO sulla rappresentazione piana della sfera, tradotto in arabo da THBIT. Un commento al X Libro di EUCLIDE, in due parti „.

(4) PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 9.

stenza di un angolo che, benchè sia eguale ad un angolo retto, pure non si può chiamare tale. S'immaginino, infatti, due rette fra loro eguali AB , BH (fig. 119) e perpendicolari, e descritti su di esse due semicircoli AΓB , BEH ; siccome questi sono fra loro eguali, così l'angolo ABΓ è eguale all'angolo ABE; se si aggiunge a entrambi l'angolo ABE si vedrà che l'angolo retto ABH è bensì eguale all'angolo curvilineo ΓBE, ma non può considerarsi come retto.

L'altra osservazione di PAPPO riferita da PROCLO (1) consiste nell'avere avvertita la necessità di accrescere i postulati di EUCLIDE col seguente: « se a cose eguali aggiungonsi cose diseguali, la differenza fra i risultati ottenuti è eguale

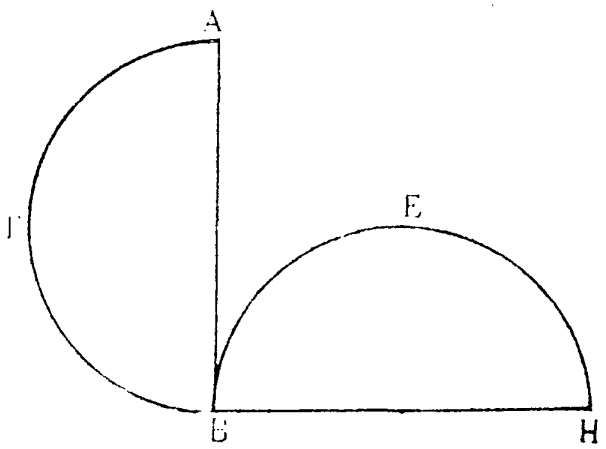


Fig. 119.

a quella fra le cose aggiunte; mentre se a cose diseguali si aggiungono cose eguali, la differenza fra i risultati è eguale a quella fra le cose primitive ».

La terza (2) si compendia in una nuova dimostrazione (mediante sovrapposizione) del V teorema del I Libro degli *Elementi*.

24. - Meno certe, ma più ampie, sono le notizie che ci pervennero intorno a quella parte del commento di PAPPO che concerne il X Libro degli *Elementi;* esse si attingono da un manoscritto arabo fatto conoscere da F. WOEPCKE (3);

(1) Id., T. II, p. 16.

(2) Id., p. 53-54.

(3) Cfr. l'*Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius, etc.* (Mém. des Sav. Étr., T. XIV, 1856, p. 553-568) già citato a p. 233.

ammesso che, come attualmente si ritiene (1), derivi dal lavoro di PAPPO e non appartenga ad un astronomo bizantino del II sec. dell'E. v. (VEZIO VALENTE), come opinava il dotto succitato (2), esso completa in modo così notevole le nostre conoscenze sulla matematica greca che esprimiamo il voto che venga tradotto per intero. Servendoci, intanto, di quanto ne conosciamo diamo qui un indice di quanto esso contiene:

I Libro. - Schizzo storico sullo sviluppo successivo della teoria delle quantità irrazionali presso i Greci.

2. Del finito e dell'infinito come principi della commensurabilità e dell'incommensurabilità.

3. Sguardo alla distribuzione delle proposizioni al X Libro.

4. Differenze tra il rapporto di due quantità finite in generale, quello di due quantità commensurabili e quello di due quantità razionali.

5. Della triade come origine delle quantità irrazionali.

6. Esame comparativo delle teorie di TEETETO e di EUCLIDE sulle quantità commensurabili in lunghezza ed in potenza od in potenza soltanto.

7. Dell'esistenza reale delle quantità commensurabili nelle cose materiali.

8. Principi metafisici (Dio e la materia) delle commensurabilità e dell'incommensurabilità.

9. Le linee razionali esistono per convenzione e non naturalmente. Esistono linee razionali commensurabili in lunghezza e ciò non ostante incommensurabili in lunghezza alla linea proposta come razionale.

10. Differenti opinioni di PLATONE ed EUCLIDE sulla definizione delle linee razionali. Classificazione delle linee razionali.

11. Dello spazio mediale e delle linee mediali.

12. Degli irrazionali formati per addizione e sottrazione e degli sviluppi di cui è suscettibile la teoria di EUCLIDE.

13. Ripartizione del X Libro in tredici sezioni: sommaria indicazione del contenuto di ciacuna.

---

(1) Quest'opinione emessa dall'HEIBERG (*Litteraturgesch. Studien über Euklid.* Leipzig, 1882, p. 170; e *Apollonii Pergaei quae graece extant,* Vol. II, Lipsiae, 1888, p. 119) fu giudicata favorevolmente dal TANNERY (*Géom. grecque*, p. 143).

(2) In ciò il WOEPCKE è seguito dal CANTOR (*Vorlesungen*, T. I, p. 48 e 425 della 3ª ed.), mentre è validamente combattuto da H. SUTER (v. la nota 93 al *Fihrist*).

II Libro. - 1. Dell'ordine degli irrazionali; relazioni che esistono tra gl'irrazionali e gli spazi corrispondenti.

2. Della natura del rettangolo compreso fra due rette.

3. Irrazionali formati per addizione.

4. Giustificazione della nomenclatura di EUCLIDE.

5. Teorema.

6. Irrazionali formati per sottrazione: loro affinità con quelli formati per addizione.

7. Nomi degl'irrazionali formati per sottrazione.

8. Generazione degli spazi formati per addizione e sottrazione.

9. Relazione che passa tra i vari generi di irrazionali ed i tre generi di proporzioni.

10. Generazione mediante la proporzione armonica degli irrazionali formati per sottrazione.

11-12. Dimostrazione di un teorema.

13. Le sei rette binomie ed i sei recisi.

14-15. Teoremi.

16. Osservazioni sull'applicazione del quadrato della mediale. Sguardo all'infinità di irrazionali.

Il WOEPCKE ha data la traduzione francese dei cap. 10 e 12 del I Libro e dei cap. 1 e 16 del II, nonchè un sunto del cap. 10 di questo. Di tutti, quello che sembraci più interessante, è il cap. introduttorio; anzi tante conferme esso porge a quanto dicemmo intorno allo svolgimento della teoria degli irrazionali, che lo riferiamo qui come epilogo a questa parte del nostro lavoro:

Lo scopo del X Libro del trattato di EUCLIDE sugli elementi è lo studio delle quantità commensurabili ed incommensurabili, razionali ed irrazionali.

Questa teoria nacque nella scuola di PITAGORA. Fu considerevolmente svolta da TEETETO Ateniese, il quale diede prova, in questa parte delle matematiche, come in altre, di una sagacia che gli procurò una giusta ammirazione. Inoltre, egli era uno degli uomini più felicemente dotati e si consacrava, con nobile ardore, alla ricerca delle verità contenute in queste scienze, come PLATONE lo testimoniò nel Dialogo che intitolò col suo nome. Quanto alle distinzioni esatte delle quantità suddette, ed alle dimostrazioni rigorose delle proporzioni a cui dà luogo questa teoria, io credo che furono stabilite principalmente da questo matematico; e più tardi, il grande APOLLONIO, il cui genio conseguì nel più alto grado la superiorità matematiche, vi aggiunse, con molti sforzi e lavori, teorie ammirande.

Giacchè TEETETO aveva distinto le potenze commensurabili in lunghezza dalle incommensurabili ed aveva classificate le specie conosciutissime delle linee irrazionali in base alle varie medietà (proporzioni), assegnando le mediali alla geometrica, i binomi all'aritmetica e gli apotomi all'armonica, come riferisce e racconta EUDEMO Peripatetico. Quanto ad EUCLIDE, egli si propose di dare regole rigorose, che egli stabilì relativamente alla commensurabilità ed all'incommensurabilità in generale: precisò le definizioni delle quantità razionali ed irrazionali, espose un grande numero di specie di quantità irrazionali e da ultimo ne dimostrò chiaramente la estensione.

Finalmente APOLLONIO distinse le specie degli irrazionali *ordinati*, e scoprì la dottrina delle quantità irrazionali dette *non ordinate*, di cui costruì un grande numero con metodi esatti.

CAPITOLO IV.

Il Neo-Platonismo

Proclo, Marino, Simplicio.

25. - La mancanza di notizie intorno alla vita di PAPPO è in contrasto stridente coll'abbondanza di particolari intorno a quella dell'altro commentatore che ci servì di costante ausiliare nella nostra narrazione: PROCLO.

Ma prima di parlare di lui (per uniformarci al costume a cui ci attenemmo sempre, e specialmente nel nostro I Libro) bisogna che indichiamo brevemente in qual maniera sorse e si sviluppò la setta filosofica a cui egli appartenne, scuola che, benchè non abbia prodotta alcuna grande opera matematica, pure non è assolutamente priva di benemerenze per le scienze esatte (1). Alludiamo alla setta dei Neo-platonici. La quale, se vanta come suo progenitore AMMONIO SACCA (m. nel 242 circa), ha come vero fondatore PLOTINO (nato a Licopoli in Egitto, nel 204 o 205 dell'E. v.). Ora questi, dopo avere ascoltate per undici anni le lezioni che AMMONIO teneva in Alessandria, nel 244 o 245 si trasferì a Roma, ed ivi gettò le basi di una scuola, che ben presto salì in alta rinomanza e della quale egli tenne la direzione sino alla propria morte (270 dell'E. v.). Le numerose sue opere vennero pubblicate da PORFIRIO (nato a Tiro nel 232 o 233

(1) Oltre a quanto esporremo in questo Cap.. si vegga il n. 5 del Libro V.

morto a Roma il 301 dell'E. v.) (1), commentatore di cospicuo valore (2) al quale si deve, oltre una *Vita di Pitagora* ed un commento alla *Musica* di TOLOMEO, la conservazione e la diffusione delle idee di PLOTINO (3). La tradizione neoplatonica viene continuata, dopo PORFIRIO, da GIAMBLICO (nato a Calcide, vissuto forse in Siria) (4). Ma, anche dopo la di lui morte, accaduta verso il 330 dell'E. v., il neoplatonismo non si spense: si ricordi, infatti, che IPAZIA (cfr. p. 555), la sventurata figlia di TEONE, la gentile commentatrice di APOLLONIO e DIOFANTO, trovavasi a capo di una scuola, che da PLATONE prendeva ispirazione e nome. Nè basta: gli studi sopra ARISTOTELE, che compironsi a Bisanzio nella seconda metà del VI sec., ricondussero i filosofi ad occuparsi di PLATONE, sicchè al principio del secolo veniente, nella patria stessa di questo, troviamo un gruppo di studiosi che meditano sulle sue opere, le commentano e pubblicamente ne professano le dottrine. A PLUTARCO, figlio di NESTORE (e che non deve identificarsi col noto autore delle *Vite parallele*), al di lui successore SIRIANO, e più ancora a PROCLO, le dottrine neo-platoniche sono debitrici del loro assetto definitivo: ed è principalmente alla

(1) La più recente edizione degli scritti superstiti di PORFIRIO è dovuta a A. NAUCK (*Porphirii philosophi platonici Opuscula selecta*. Leipzig, 1886).

(2) In SUTER-FIHRIST, p. 10 è fatto menzione di un suo Libro su gli *Elementi* (di EUCLIDE?).

(3) Che egli siasi occupato di geometria, e precisamente di commentare gli *Elementi*, emerge da quattro o cinque citazioni di PROCLO: sono queste anzi che indussero P. TANNERY (*La géom. grecque*, p. 25) a supporre che egli abbia composto un commento ad EUCLIDE, più tardi utilizzato da PAPPO; a questo PROCLO avrebbe a sua volta ricorso nel redigere le proprie illustrazioni ai teoremi di EUCLIDE

(4) Un passo di questo scrittore ove si parla di una certa "linea a doppio movimento" (*Comment. in Aristotelis Phys.*, ed. DIELS, p. 60) venne interpretato da P. TANNERY (*Pour l'hist. des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité*, § 2, Bull. des Sc. math., 2ª Serie, T. VIII, 1884) come indicazione che gli antichi abbiano conosciuta la cicloide. Precise notizie intorno alle sue opere e relative edizioni si trovano in una nota di F. RUDIO in *Bibl. mathem.*, 3ª Serie, T. VIII, 1907-1908, p. 309-310.

presenza di PROCLO fra i rinnovatori della filosofia platoniana che questi sono debitori della la menzione che di essi facemmo.

La vita di PROCLO ci è nota con grande precisione grazie ad una entusiastica biografia scritta da un ammiratore e discepolo — MARINO DA NEAPOLI — il quale vedeva in PROCLO il tipo dell'uomo fisicamente, moralmente ed intellettualmente perfetto. MARINO ci fa conoscere come egli nascesse a Bisanzio nel 410 dell'E. v. da PATRIZIO e MARCELLA « uniti legalmente in matrimonio ». I parenti di PROCLO erano lici di stirpe, e nella Licia (a Zante) egli venne portato bambino (1). Più tardi il futuro neo-platonico andò ad Alessandria, ove ebbe a maestri il retore LEONAS ed il grammatico ORIONE, e non trascurò di frequentare le scuole dei Romani: ritornato colà più tardi, dopo un viaggio a Bisanzio in compagnia di LEONAS, PROCLO si dedicò alla filosofia sotto la direzione di OLIMPIODORO ed ERONE (non il meccanico), e vi fece tali progressi che da Bisanzio gli fu consigliato di andare ad Atene, per restaurare le dottrine di PLATONE. Tale suggerimento egli seguì; ad Atene divenne discepolo di SIRIANO; ad Atene rimase sempre, tranne durante un viaggio in Lidia; succedette al suo maestro (2) e spirò il 17 aprile 485. Non ebbe moglie, nè lasciò figliuoli: al pari di PITAGORA fu vegetariano, e, se si presta fede a MARINO, alla sua morte ebbe onori quali si concedono soltanto ai cittadini più illustri e benemeriti.

26. - Il biografo di PROCLO, mentre è sì prolisso nel riferire quanto concerne la vita del suo eroe, ci dà notizie assai scarse ed imprecise sulle sue opere: sicchè da lui non si apprende che l'esistenza di un lavoro sul *Tecteto* di PLATONE, e di un commento al *Timeo*, scritto a vent'otto anni ed a cui l'autore attribuiva grande valore. Esso esiste in fatto e fu pubblicato sin dal 1556 (3). Nelle stesse condizioni si trovano un riassunto dell'*Almagesto* intitolato *Ipotiposi* (stampato nell'originale nel 1540 e l'anno appresso in la-

(1) Perciò spesso egli è indicato col nome di PROCLO LICIO.

(2) A questo fatto devesi se a PROCLO si dà spesso l'epiteto di διάδοχος (successore).

(3) Questa e le seguenti notizie vengono tolte da PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 34 e seg.

tino) (1) ed un commento al poema di ESIODO sopra *Le opere ed i giorni* (stampato nel 1603).

Non queste opere astronomiche di PROCLO e tanto meno quelle filosofiche devono venir qui considerate; lo merita soltanto il *Commento agli Elementi di Euclide*, e lo merita indiscutibilmente sia per essere il primo saggio a noi noto (non essendosi salvati quelli di PORFIRIO e GIAMBLICO) di filosofia delle matematiche (2) e perchè fa conoscere ed insegna a misurare i tentativi fatti dagli antichi per rassodare le basi o completare la cima dell'edificio geometrico. Trattiamone, dunque, cominciando da quella parte concernente il I Libro e che sola ci pervenne nella sua integrità (3). E notiamo anzitutto che, se per spiegare un autore è condizione essenziale il condividerne le idee, PROCLO si trovava in una situazione assai sfavorevole al raggiungimento del fine che si era proposto, giacchè le idee filosofiche di cui era impregnato dovevano essergli di ostacolo a che egli coadiuvasse EUCLIDE nella sua opera di espurgazione della geometria da considerazioni ad essa estranee. Ed infatti si può

(1) Un trattato sulla *Sfera* pubblicato nel 1553 e tolto integralmente dai Cap. II, III, IV e XII dell'*Introduzione ai fenomeni* di GEMINO è un falso dovuto ad un amanuense del s. XV.

(2) Le eminenti doti di PROCLO come filosofo si trovano poste in chiara luce nel saggio di N. HARTMANN (*Des Proklus Diadochus philosophische Anfangsgründe der Mathematik nach den ersten zwei Büchern des Euklid Kommentare dargestellt*. Giessen, 1909.

(3) Il *Commento* di PROCLO apparve la prima volta stampato in seguito all'edizione degli *Elementi di Euclide* fatta a Basilea da SIMONE GRYNAEUS nel 1533. Essa servì di fondamento per la traduzione latina fattane da F. BAROZZI (*Procli Diadochi Lycii philosophi ac mathematici probatissimi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarium, ad universam mathematicam disciplinam*. Patavii, 1560), il quale, però, ne migliorò il testo mediante cinque manoscritti: da questa traduzione derivò poi quella inglese del TAYLOR, tante volte da noi citata. A quella edizione del testo attinsero COMMANDINO e CLAVIO. CAMERER e HAUBER, nonchè infiniti altri studiosi di EUCLIDE: tutti però ne riconobbero le deficienze e ne augurarono una migliore: il voto generale fu soddisfatto da FRIEDLEIN nel 1873 (v. p. 6). Per ulteriori ragguagli rimandiamo a L. MAJER, *Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid* (Tübingen, 1875) e HEIBERG, *Litterargesch. Studien*. p. 164-165.

dire che PROCLO abbia proceduto in una direzione diametralmente opposta a quella scelta dal sommo alessandrino: mentre questi aveva pronunciata una sentenza di divorzio tra matematica e filosofia, PROCLO propugnò la loro riconciliazione. La sua voce non rimase inascoltata, anzi le sue idee ebbero corso fino al momento in cui un risveglio dell'assopito spirito d'indagine nel campo della geometria rivelò la necessità di un nuovo distacco di quelle due scienze l'una dall'altra.

27. - Qual'è il metodo adottato da PROCLO nel comporre il suo *Commento*? Ce lo dice egli stesso: sceglie a guida PLATONE ed invoca l'aiuto di tutti coloro che possono prestargli aiuto.

Quale scopo si è egli proposto scrivendolo? Insegnare i rudimenti della geometria, illustrando il migliore trattato che si trovava a sua disposizione.

Quali scritti utilizzò? La questione è ardua (1); adottando il parere, assai verosimile, di colui che più d'ogni altro studiò il *Commento* con acume e profondità (2), PROCLO, nella parte filosofica del suo lavoro, avrebbe parlato in nome proprio, ma, nello scrivere le considerazioni matematiche, si sarebbe servito principalmente di EUDEMO, GEMINO, PORFIRIO e PAPPO, non di ERONE (3), ma, per converso, di un gruppo mal noto di scritti rappresentante la tradizione matematica della scuola Pitagorica (4).

---

(1) Un primo tentativo per risolverla è rappresentato dall'opuscolo di J. H. KNOCHE, *Untersuchungen über des Proklus Diadochus Commentar zu Euclids Elementen* (Herford, 1862). Ad essa è dedicata gran parte dell'opera di P. TANNERY su *La géométrie grecque* e totalmente l'opuscolo di J. G. VON PECH, *De Procli fontibus. Dissertatio ad historiam matheseos grecae pertinens* (Leiden, 1900).

(2) P. TANNERY, op. cit., p. 24 e seg.

(3) Id., p. 176. Il non avere PROCLO utilizzato ERONE sembra essere smentito dal commento di ANARIZIO, ove, come vedemmo a suo tempo (cfr. p. 599), si trovano come pensieri eroniani, certe osservazioni che si leggono, senza indicazione della fonte, nel *Commento* di cui ci stiamo occupando.

(4) A quest'ultimo risultato il TANNERY giunse interpretando una frase di PROCLO in un modo che l'HEIBERG giudica errato (v. l'articolo *Exakten Wissenschaften und Medizin* in GERKEN und NORDEN, *Einleitung in die Alterthumwissenschaft*, Leipzig, 1911,

In qual modo si servì PROCLO degli scritti anteriori? (1). Sembra li saccheggiasse così impudentemente da appropriarsene, non soltanto le idee, ma perfino le parole; la sua principale vittima sembra essere stato GEMINO, da cui probabilmente tolse due brani assai interessanti, che noi già conosciamo, cioè lo schizzo sulla storia della geometria (v. p. 7-10), e le notizie bio-bibliografiche su EUCLIDE (v. p. 188-90).

28. - Il *Commento* di PROCLO al I Libro di EUCLIDE consta di quattro libri. L'autore comincia rilevando quale parte fondamentale la matematica rappresenti nel sistema filosofico di PLATONE; si diffonde poi sopra i principi comuni alle varie branche di essa, esprimendo l'opinione che questi principi universali devono dar materia ad una scienza generale; cerca quale facoltà della mente costituisce il criterio in matematica e si sforza di determinare il carattere ideale ed aprioristico degli oggetti della scienza matematica. Segue l'elogio di questa, la dimostrazione dell'utile che da essa traggono altre discipline e la confutazione di coloro che la pregiano esclusivamente per la sua pratica utilità; PROCLO combatte poi l'affermazione di ARISTOTELE « colui che è dotto in tutte le scienze può giudicare di tutto, mentre colui

---

pag. 110). A complemento di queste notizie diamo qui l'elenco dei nomi ricordati da PROCLO: AMERISTO, AMFINOMO, AMICLA, ANASSAGORA, ANDRONE, APOLLONIO, ARCHIMEDE, ARCHITA, ARISTOTELE, ATENEO, CARPO, CRATISTO, CRISIPPO, CTESIBIO, DINOSTRATO, ENEA, ERATOSTENE, ERMOTIMO, ERONE, EUCLIDE, EUDEMO, EUDOSSO, FILIPPO, FILOLAO, FILONE, GEMINO, IPPOCRATE DA CHIO, IPPOCRATE DA COS, LEODAMANTE, LEONE, MENECMO, MENELAO, NEOCLIDE, NICOMEDE, OINOPIDE, PAPPO, PARMENIDE, PERSEO, PITAGORA, PLATONE, PLUTARCO, PORFIRIO, POSIDONIO, SIRIANO, SPEUSIPPO, STESICORO, SOCRATE, TALETE, TEETETO, TEODORO, TEUDIO, TOLOMEO, ZENOCRATE, ZENODORO, ZENODOTO e ZENONE Tutti questi personaggi hanno il loro posto nella nostra storia, eccettuati ANDRONE, CRASISTO e ENEA, sui quali le informazioni di altra origine sono pressochè nulle; notiamo soltanto che ENEA (da Jerapoli) scrisse un compendio degli *Elementi* (PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 150), ove parecchi teoremi di EUCLIDE si trovano fusi in un solo. Quanto a ZENONE, non si tratta del noto sofista (v. p. 56), ma del filosofo epicureo ZENONE DA SIDONE, vissuto nel II sec. a. C. (E. ZELLER, *Die Philosophie der Griechen*, III Tl., I Abt., IV Aufl., Leipzig, 1909, p. 384).

(1) Cfr. anche le osservazioni esposte a p. 10 e 18.

che è abile soltanto nelle matematiche è soltanto in grado di determinare le relazioni che ivi si presentano ». La divisione della matematica che supposero i Pitagorici e quella in uso fuori della loro scuola — e che noi riferimmo a p. 644 come appartenente a GEMINO —, nonchè alcune notizie intorno all'unità della matematica ed alle ragioni che indussero i Pitagorici ad imporle il nome che essa porta, chiudono il I Libro del *Commento* di cui ci occupiamo.

In principio del II Libro PROCLO assegna alla geometria un posto in tutto lo scibile, inferiore, ma immediatamente successivo, a quello occupato dall'aritmetica: opinione questa che, grazie a GAUSS e GRASSMANN, WEIERSTRASS e KRONECKER, è oggi generalmente considerata per vera. Seguita poi occupandosi della questione, dibattuta a più riprese anche nell'epoca moderna, se gli oggetti della geometria appartengano all'intelligibile od al sensibile, e la risolve in senso contrario a quello oggi preferito, assegnandoli cioè all'intelligibile.

PROCLO s'industria, quindi, a determinare con esattezza i caratteri distintivi della geometria, non senza additare gli stretti rapporti che essa ha coll'aritmetica; sopra una digressione, infiorata di aneddoti concernenti ARCHIMEDE, intesa a dimostrare l'utilità della geometria, non è il caso di arrestarci; il brano che viene poi fu da noi già integralmente riferito (v. p. 7-10). In seguito il commentatore espone una folla di informazioni ed osservazioni sul significato e l'uso delle parole « elementi » ed « elementari », problemi e teoremi, ipotesi, postulati e definizioni, ed afferma che l'intento che si propose EUCLIDE nel I Libro degli *Elementi* è di insegnare i principi della teoria delle figure rettilinee, cioè dei triangoli (prima parte del detto Libro), dei parallelogrammi (seconda parte) e dei triangoli e parallelogrammi considerati insieme (terza parte).

Qui ha termine la sezione esclusivamente filosofica del *Commento;* chè a partire da questo punto PROCLO esamina tutte le proposizioni esposte da EUCLIDE, spiegandole ed illustrandole con osservazioni proprie o di altri. E precisamente al termine del II Libro egli tratta delle *definizioni* (1), nel III

(1) Cfr.: KNOCHE e MAERKER, *Ex Proclis Successoris in Euclidis Elementa def. quartae expositio,* etc. (Herfordiae, 1856), L. MAJER,

si occupa degli *assiomi*, dei *postulati* e delle prime ventisei proposizioni, e nel IV delle rimanenti. Di quanto egli dice noi già traemmo grande profitto, anzi ne riferimmo degli interi brani (cfr. pp. 38, 42, 47, 62 e 253 nota); ora aggiungeremo qualche notizia che non ci accadde di riferire prima. Così val la pena di notare che, al dire di PROCLO, Epicurei e Pirroniani ritenevano che la geometria non avesse basi di indiscutibile solidità (1) e che i primi dicevano che il teorema « in ogni triangolo la somma dei due lati è minore del terzo » (*Elementi*, L. I, prop. 20) « riuscirebbe evidente anche ad un asino, e non ha bisogno di dimostrazione », ed aggiungevano che « è proprio agli ignoranti il considerare meritevoli di dimostrazione le cose evidenti, e accordare il proprio assenso a quelle che sono ignote e di per sè non evidenti » (2).

Nè va taciuto il nome speciale di *omeomere* (3) adoperato dagli antichi per indicare le linee che (come la retta, la circonferenza, e l'elica cilindrica) sono identiche nelle loro parti. Da ultimo rileveremo il metodo — di cui parla PROCLO nel commento alla IV definizione di EUCLIDE — per tracciare meccanicamente un'ellisse mediante un segmento i cui estremi descrivono due rette concorrenti; fu desso inventato da PROCLO? Noi inclíniamo a negarlo; tuttavia andava qui notato il primo cenno che di esso si trova nella letteratura matematica.

In tutto il suo scritto PROCLO sparse a piene mani le notizie storiche; a far questo egli fu bene ispirato, perchè esse fecero del suo *Commento* la principale fonte di informazioni che sia a nostra disposizione intorno alla geometria greca; il larghissimo uso che ne facemmo noi pure, ci dispensa dal trattenerci ora più a lungo su di esso.

29. - Abbiamo già fatto allusione ad un presunto proseguimento del *Commento* in questione oltre al I Libro degli *Elementi*. PROCLO ne parla chiaramente in varie occasioni, annunciando lo sviluppo ulteriore che avrebbero ivi trovato

---

Proklos über die Definitionem bei Euklid, I Theil, Definitionem 1-7, Stuttgart, 1881.

(1) PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 17-18.

(2) Id., T. II, p. 115.

(3) Id., T. I, p. 129.

certe considerazioni (1); ed il suo divisamento è confermato da uno scolio rinvenuto mezzo secolo fa (2). Che tale progetto abbia avuto almeno una parziale attuazione è dimostrato da alcuni frammenti scoperti in un codice vaticano (Urbin. 71) ed in uno milanese (Ambros. I, 84, infer. n. 7) (3); ma alla domanda, che naturalmente si affaccia, « il commento di PROCLO estendevasi a tutta l'opera di EUCLIDE e nelle medesime proporzioni ? » non abbiamo modo di rispondere. Ammessane l'esistenza, la perdita di esso è altamente deplorevole; giacchè, anche chi neghi a PROCLO qualsia valore come matematico, non può non riconoscere che egli era l'uomo indicato per somministrarci quelle notizie intorno allo svolgimento della geometria elementare e complementare dopo EUCLIDE, delle quali ci è così sensibile la deficienza che confina coll'assoluta mancanza.

30. - PROCLO segna l'apogeo del neo-platonismo, chè fra coloro i quali ne professarono in seguito le dottrine cercheremmo invano una persona a cui qualche ramo di scienza sia debitrice di rilevanti progressi; ciò non ostante tra i posteriori che cercarono di illustrare, svolgere e diffondere le idee di PLATONE, tre meritano qui almeno una menzione fugace.

Il primo è MARINO DA NEAPOLI (4), nato a Flavia Neapolis, (città della Palestina), biografo di PROCLO (5) ed autore di

---

(1) Così in un punto (PROCLO-TAYLOR, T. II, n. 181) egli promette di dimostrare che " tra tutte le figure isoperimetre, il il quadrato è massimo ed il romboide (?) è minimo „.

(2) WACHSMUTH, *Handschriftliche Notizen über den Commentar des Proklus über die Elementen des Euklides* (Rhein. Museum für Philol., T. XVIII, 1863, p. 132-135). Cfr.: J. H. KNOCHE, *Untersuchungen über die neuen aufgefundenen Scholien der Proklus Diodoyus zu Euclids Elementen.* Herford, 1865, p. 52 e HEIBERG, *Litt.-gesch. Studien,* etc., p. 167-68.

(3) V. il lavoro citato testè del KNOCHE. — L'HEIBERG inclina però ad attribuire quei frammenti a PAPPO (v. *Philologus*, T. XLIII, 1884, p. 332.

(4) Non da Napoli come erroneamente scrisse una volta il MONTUCLA (*Hist. des Math.*, T. I, p. 215).

(5) Dell'elogio scritto da MARINO, il TAYLOR pubblicò una versione inglese (PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 1-33).

un'edizione doi *Dati* di EUCLIDE, preceduta da una prolissa prefazione (1), destinata specialmente a chiarire che cosa sia un *dato*, di che utilità riesca ed a quale scienza si riferisca, e nella quale sono ricordati — oltre EUCLIDE, APOLLONIO, TOLOMEO e PAPPO — DIODORO, matematico che già incontrammo (p. 405), vissuto ad Alessandria alla fine del I secolo a. C.

A MARINO segue ISIDORO di Alessandria, il quale fu maestro di quel DAMASCIO (2) (v. p. 277) a cui si volle attribuire il cosidetto XIV Libro degli *Elementi* di EUCLIDE; egli era oriundo di Damasco, ma da giovane andò ad Alessandria per studiare sotto la direzione di TEONE; molto peregrinò; si trovò in Atene poco dopo la morte di PROCLO e ne seguì le orme, sicchè è considerato come filosofo neoplatonico ed ultimo διάδοχος Πλατωνικός.

Contemporaneamente a DAMASCIO professò in Atene SIMPLICIO (3), che più volte citammo come famoso illustratore di ARISTOTELE: egli commentò eziandio gli *Elementi* di EUCLIDE (4) e in ogni occasione si rivelò di intelligenza

---

(1) *Euclidis Opera omnia,* ed. HEIBERG et MENGE, T. VI, Lipsiae, 1896.

(2) Nato circa il 458 dell'E. v.

(3) SIMPLICIO è vissuto nella prima metà del VI secolo; per usare le parole dello ZELLER (*Die Philos. der Griechen,* T. III, 2, p. 843) " assieme a DAMASCIO appare come il più eminente dei Platonici del tempo suo (dei quali un considerevole numero di scritti ci è noto, in parte grazie ai suoi lavori) SIMPLICIO da Cilicia, il quale ebbe per maestri prima AMMONIO, poi DAMASCIO. I commenti di questo filosofo sono frutto di grande diligenza ed ampia dottrina; essi furono per noi non soltanto una miniera inapprezzabile di frammenti di antichi filosofi, ma dànno anche, malgrado i travisamenti di cui non è esente alcun commento neo-platonico, una spiegazione del testo accurata e generalmente intelligibile „.

(4) Di tale commento esistono traccie in un autore Arabo che già ci è accaduto di citare in parecchie contingenze (v. *Codex Leidensis* 399. 1, ed. BESTHORN et HEIBERG, Hauniae, 1893 e 1897, p. 9, 13, 17, 19, 21, 27, 29, 119, 131). Ma un altro codice, di cui M. CURTZE ha annunciata e poi curata la pubblicazione (cfr. l'articolo *Alcuni manoscritti relativi alla geometria greca* nel *Bollettino di bibl. e storia delle scienze matematiche,* 1898, p. 157-158; *Anaritii in decem libros priores Element. Euclidis Commentarii,*

ben superiore a quella di cui dà prova il suo omonimo che s' incontra in alcuni celebri dialoghi di GALILEO.

Tale pagano insegnamento sembra incorresse nel biasimo dell'imperatore GIUSTINIANO (allora in procinto di passare al Cristianesimo), il quale, nel 529, decretò la chiusura della scuola di Atene. Così finì in Grecia il neo-platonismo (1); così venne violentemente spenta l'ultima fiammella che attestava come nella patria di PERICLE vi fosse ancora qualcuno che s'interessava alla ricerca, od almeno alla contemplazione del vero (2).

Lipsiae, 1899, contiene completamente la parte del commento di SIMPLICIO relativo alle definizioni del I Libro; i passi relativi si trovano facilmente servendosi dell'indice di nomi con cui si chiude l'ed. di ANARIZIO curata dal CURTZE, e mostrano che le osservazioni di SIMPLICIO sono piuttosto verbali che sostanziali, piuttosto filosofiche che matematiche; esse non hanno nemmeno il pregio di porgere notizie intorno a ricerche anteriori: così è da lamentare che SIMPLICIO siasi limitato a citare (v. p. 35 e 65), senza riferirle, alcune indagini sul postulato di EUCLIDE dovute ad un certo ABTINIATE, personaggio assolutamente ignoto, e ad un DIODORO, che P. TANNERY ritiene (*La géom. grecque*, p. 175) essere lo stesso matematico alessandrino citato a pag. prec.

(1) Più tardi, sott'altro cielo, il neo-platonismo risorse: MANLIO SEVERINO BOEZIO sta ad attestarlo.

(2) La fine dell'Università Ateniese è circa contemporanea al al principio di quella Costantinopolitana: questo istituto in origine fu estraneo alle scienze, ma poi queste vi penetrarono: lo prova la presenza ivi nel VII secolo di STEFANO di Alessandria (cfr. *De Stephano Alexandrino* HERMANNI USENERI *Commentatio*. Bonn, 1880).

CAPITOLO V.

Eutocio.

31. - Fra le autorità del tempo antico, che invocammo più di frequente a sostegno delle nostre asserzioni, l'ultimo posto, vuoi per l'epoca a cui appartiene, vuoi pel valore che possiede, va conferito ad EUTOCIO. Il quale deve avere appartenuto ad una ricca famiglia di Ascalona (città della Palestina) ed avere annoverato fra i suoi antenati un mercenario della Tracia, nomato pure EUTOCIO, di cui SUIDA ha conservata la storia poco edificante. Gli elementi per determinare l'epoca in cui visse si traggono dall'osservare che egli non è citato da alcuno dei geometri in cui ci siamo sino ad ora imbattuti, e notando le persone a cui egli dirige i propri lavori (1) o che egli cita (2). Venne specialmente sfruttata la dichiarazione di EUTOCIO di adoperare,

(1) Sono il filosofo AMMONIO discepolo di PROCLO e capo della scuola d'Alessandria (cfr. E. ZELLER, *Die Philosophie der Griechen*. III Tl., II Abth., Leipzig, 1903, p. 893), il meccanico ANTEMIO DI TRALLE (cfr. p. 398) ed un certo PIETRO.

(2) SONO: APOLLONIO, ARCADIO, ARCHIMEDE, ARCHITA, ARISTOTELE, ANTIFONTE, DIOCLE, DIONISIDORO, ERACLIDE, ERONAS, ERONE, EUDEMO, EUDOSSO, ERATOSTENE, FILONE, GEMINO, ISIDORO, IPPOCRATE DA CHIO, MACNO, MENECMO, NICOMACO, NICOMEDE, PAPPO, PORO, PLATONE, SPORO, TEODOSIO, TEONE, TOLOMEO. Tutti questi pensatori sono noti al lettore della presente storia: va fatta eccezione soltanto per i seguenti: ARCADIO (forse grammatico di Antiochia), citato fugacemente assieme a PAPPO e TEONE (ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. III, p. 140): PORO, critico ingiusto di ARCHIMEDE,

ne' suoi commenti ad ARCHIMEDE, l'edizione fattane da ISIDORO DA MILETO (1): interpretando le sue parole in un certo modo si concluse (2) che EUTOCIO, essendo stato discepolo del celebre architetto della chiesa di S. Sofia a Costantinopoli, fiorì intorno al 550 dell'E. v.: ma poichè quell'interpretazione ha qualche cosa di arbitrario e dà luogo a certe difficoltà, si propose di fare un po' retrocedere l'epoca del nostro commentatore, fissandone la nascita circa al 480 dell'E. v. (3). Dall'accettare l'una piuttosto che l'altra di queste determinazioni cronologiche non dipende il giudizio che devesi formulare sull'opera scientifica del chiosatore ascalonita.

EUTOCIO, oltre un commento, oggi perduto, a TOLOMEO, in giovane età ne compose sopra alcuni lavori di ARCHIMEDE, vale a dire sopra gli scritti *Su la sfera ed il cilindro* *Su la misura del circolo* e *Su l'equilibrio dei piani* e più tardi sui primi quattro libri delle *Coniche* di APOLLONIO (4); negli studi sul Siracusano si servì di una edizione fatta per cura o sotto la direzione di ISIDORO DA MILETO, ma in quelli sopra il Pergeo di una propria. Esamineremo ora questi com-

---

che sembra doversi identificare con SPORO di Nicea; MAGNO, oscuro autore di una logistica (id., p. 302) appartenente al IV o V sec. (v. HULTSCH, *Zur Kreismessung des Archimedes*, Zeitschr. für Math. und Phys., T. XXXIX, Hist.-lit. Abth., p. 113, nota); ERONAS, commentatore di NICOMACO, che il MARTIN (*Recherches sur Héron*, p. 240) identificò arbitrariamente con quell'ERONE da Costantinopoli che fu maestro a PROCLO (v. p. 706) e che è probabilmente da identificarsi con l'HERNUDES o HEROMIDES di ANARIZIO (*Anaritii decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii*. Leipzig, 1899, p. 3-4).

(1) ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. III, p. 260 e 302.

(2) HALLEY (esordio alla sua ed. di APOLLONIO) fa fiorire EUTOCIO sotto GIUSTINIANO. Cfr. HEIBERG, *Ueber Eutokius* in *Phil. Studien zu griech. Mathematikern*, I, Leipzig, 1880.

(3) P. TANNERY, *Eutocius et ses contemporains* (Bull. des Sciences math., 2ª Serie, T. VIII, 1884).

(4) Concordano con queste notizie di fonte greca le notizie del FIHRIST, ove si legge: " Egli (EUTOCIO) compose, un commento al I Libro di ARCHIMEDE *Su la sfera ed il cilindro*. Il libro delle due linee, ove tutto è dimostrato mediante i principi dei matematici filosofi, fu tradotto in arabo da TÂBIT e trovato ottimo. Scrisse anche un commento al libro di TOLOMEO sull'astronomia giudiziaria (de judiciis astrorum) ".

menti e ne diremo il contenuto con studiata brevità, avendo noi da essi già spremute tutte le informazioni storiche che sono in grado di porgere ed essendo ivi completa l'assenza di concetti originali e di nuove proposizioni (1).

32. - Nel commento al I Libro di ARCHIMEDE *Su la sfera ed il cilindro* non troviamo da rilevare altro se non che EUTOCIO avverte, nella proposizione « la linea retta è il più breve cammino tra due punti », il significato di postulato, non quello di definizione che le attribuì a torto PROCLO (2). Nella 2ª prop. del II dei libri succitati ARCHIMEDE adopera l'inserzione di due medie proporzionali fra due rette; ma, contrariamente a quanto avrebbe fatto un fedele seguace di EUCLIDE, non si arresta ad insegnare come si effettui; ora a tale silenzio supplisce EUTOCIO. Il quale, dopo di avere riferito la lettera a noi nota (p. 76-77) in cui ERATOSTENE narra a TOLOMEO EVERGETE le origini favolose del problema dl Delo, espone i metodi a lui noti per risolverlo, escludendo soltanto quello di EUDOSSO, perchè, come sappiamo (p. 146) lo riteneva errato. Questi metodi sono per la maggior parte a noi noti; sono infatti quello di PLATONE (v. p. 124), quelli fra loro analoghi di APOLLONIO (v. p. 400) e di ERONE (p. 575), quello dovuto a DIOCLE (v. p. 411) e ritrovato da PAPPO (3) e SPORO da Nicea (4), nonchè i procedimenti di MENECMO (v. p. 151-153), ARCHITA (p. 99-101), ERATOSTENE (p. 344-356) e NICOMEDE (p. 404-406). Resta soltanto da aggiungere un cenno intorno al metodo suggerito da FILONE da Gadara, noto meccanico del I s. a. C.

Le due rette AB e BΓ fra cui si devono inserire le due medie proporzionali siano disposte ad angolo retto (fig. 120); si completi il rettangolo ABΓΘ, se ne prolunghino i lati ΘA, ΘΓ, e si

(1) Ci serviamo sempre delle edizioni fattene dall'HEIBERG pubblicando ARCHIMEDE ed APOLLONIO.

(2) PROCLO-TAYLOR, T. I, p. 133.

(3) PAPPO ed. HULTSCH, p. 1070.

(4) Secondo P. TANNERY questi sarebbe un maestro di PAPPO od un condiscepolo più attempato, autore di una collezione — intitolata Κηρία — ove erano trattati i problemi della duplicazione del cubo e della quadratura del circolo; v. P. TANNERY, *Sur les fragments d'Eudème de Rhodes relatifs à l'histoire des mathématiques* (Annales de la Fac. des lettres de Bordeaux, T. IV, 1882, p. 70-76) e *Sur Sporos de Nicée* (Id., p. 257-261).

descriva il semicircolo ABΓ di diametro AΓ. Si conduca poi per B una retta tale che, chiamando Δ, E, Z le sue intersezioni con le rette ΘA, ΘΓ e la semicirconferenza anzidetta, risulti BΔ = EZ. Saranno AB e ΓZ le due medie cercate (1).

Per vedere come questa costruzione sia in sostanza identica a quella di APOLLONIO ed ERONE (e quindi indirettamente dimostrarne l'esattezza), si osservi che (se si indica con K il centro del rettangolo considerato), essendo isoscele il triangolo BEK, si ha BK = EK e gli angoli ΔBK e ZEK sono eguali; ed essendo, inoltre, BA = EZ per costruzione,

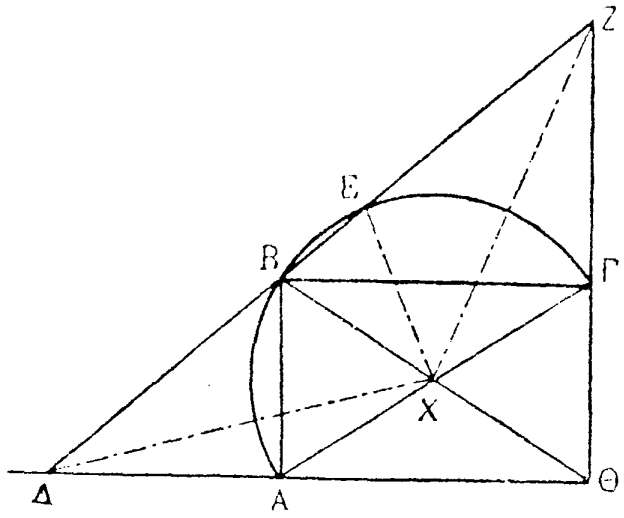


Fig. 120.

i due triangoli KBΔ e KEZ risultano eguali, in particolare KΔ = KZ, onde il problema delle due medie è ridotto a quello stesso problema di inserzione, che vedemmo presentarsi nelle soluzioni citate,

33. - Ricordiamo (v. p. 299) ora che nel II dei libri *Su la sfera ed il cilindro* ARCHIMEDE ridusse il problema di « dividere una sfera in due parti che stiano in un dato rapporto » alla risoluzione di un'equazione cubica priva del secondo termine, senza però indicare come condurne a termine la soluzione. Anche questa lacuna è riempita da EUTOCIO servendosi di considerazioni tolte da un libro di ignoto autore, ma la cui antichità è dimostrata dai nomi di « sezione del cono rettangolo » e « sezione del cono ottusangolo » con cui sono ivi designate la parabola e l'iperbola.

(1) ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. III, p. 300.

Da tale brano noi desumemmo la notizia della soluzione, mediante un'ellisse ed un'iperbola, suggerita da DIOCLE per quel problema di ARCHIMEDE (v. p. 411); ora dallo stesso brano si può trarre un'altra soluzione analoga, indicata da un tal DIONISIDORO, geometra che sembra potersi identificare a quel DIONISIDORO ricordato da STRABONE e PLINIO per i suoi studi sopra le dimensioni della terra; si tratterebbe dunque di un personaggio anteriore all'E. v. (1). Il procedimento da lui imaginato consiste nel ridurre il problema alla ricerca dei punti comuni alla parabola ed all'iperbola rappresentate dalle operazioni:

$$y^2 = \frac{m\,R\,(x + 2\,R)}{l + m}\,,\quad y\,(x - R) = -\,\frac{2m\,R^2}{l + m}\,,$$

ove R è il raggio della sfera data e $\frac{l}{m}$ (> 1) è il dato rapporto; ora eliminando y fra di esse si ottiene

$$x^3 - 3\,R^2\,x + 2\,\frac{l - m}{l + m}\,R^3 = 0\,,$$

che è appunto l'equazione riferita a p. 299. La soluzione di DIONISIDORO, essendo fondata sull'uso di una parabola invece che di un'ellisse, è migliore di quella suscitata di DIOCLE; ben più semplice però è quella che si otterrebbe oggi applicando il metodo di risoluzione geometrica di una equazione cubica, indicato da DESCARTES, chè così basterebbe ricorrere ad un cerchio e una parabola.

Va notato che questa soluzione del celebre problema archimedeo compendiava, sino a poco tempo fa, le benemerenze di DIONISIDORO; ma la scoperta e la pubblicazione dei *Metrica* di ERONE, ci ha rivelato (2) (cfr. p. 613) che a lui (o ad un geometra dello stesso nome) si deve uno scritto *Sopra la spira* (περὶ τῆς σπείρας), nel quale, fra altre cose, era insegnato un modo di calcolare il volume V di di questo solido. Il procedimento insegnato in fondo non differisce da quello che si adoprerebbe anche oggi; giacchè V, secondo

(1) In una nota a p. 137 del T. I delle *Oeuvres complètes de C. Huygens* (La Haye, 1888) è detto invece, ignoriamo con quale fondamento, che DIONISIDORO visse in principio dell'E. v.

(2) *Heronis Alex. Opera Omnia*, T. III, Lipsiae, 1903, p. 128.

DIONISIDORO, si esprime algebricamente con la formola $\pi r^2 . 2\pi a$, ove r è il raggio del cerchio generatore e a la distanza del suo centro dall'asse; così nasce una proposizione elegante e utile in pratica, che non si trova in alcuno scrittore anteriore e di cui sarebbe desiderabile di conoscere la dimostrazione originale (1).

34. - Il commentare l'opuscolo sopra la *Misura del circolo* avrebbe potuto porgere ad EUTOCIO un'ottima occasione per insegnarci qualche cosa intorno all'aritmetica pratica dei Greci; ma, come abbiamo già detto altrove (p. 321), egli non ci somministra alcuno dei desideratissimi ragguagli intorno ai metodi usati a' suoi tempi per estrarre le radici quadrate. Invece, dimostrato che la radice quadrata di un intero non quadrato non può essere un numero intero, egli rimanda alle opere speciali di ERONE, PAPPO e TEONE ALESSANDRINO, e si limita a verificare *a posteriori* l'esattezza delle affermazioni archimedee. Dei calcoli da lui effettuati riparleremo nel Libro seguente: ora (poichè il commento ai due libri sull'*Equilibrio dei piani* non porge argomento a lungo discorso, solo potendo essere utile per chi volesse impratichirsi nel maneggio dell'antica algebra geometrica) dobbiamo invece spendere qualche parola intorno alle osservazioni di cui EUTOCIO corredò i primi quattro libri delle *Coniche* di APOLLONIO.

Il geometra di Perga è assai più facilmente intelligibile del Siracusano, specialmente quando ci si limita ai primi quattro libri della sua grande opera; ed EUTOCIO sgraziatamente ha ristrette le proprie considerazioni alla parte più elementare del lavoro di APOLLONIO, forse perchè essa da sola forma un trattato elementare delle proprietà fondamentali delle curve di second'ordine (cfr. p. 358), forse perchè essa soltanto si trovava a sua disposizione, forse finalmente perchè, limitando così le sue fatiche, egli poteva sfruttare gli analoghi studi di IPAZIA (v. p. 556) e per av-

(1) Contro l'identificazione del DIONISIDORO citato da ERONE, con quello ricordato da EUTOCIO insorse, con qualche ragione, W. SCHMIDT (*Ueber den griechischen Mathematiker Dionysidorus*, Bibl. mathem., III Serie, T. IV, 1903, p. 321-25), spezzando una lancia in favore di DIONISIDORO da Cauno (città della Caria meridionale, vicina a Perga).

ventura anche di SERENO (v. il Capitolo seg.). Tale maligna congettura si presenta spontanea notando che l'impressione prodotta da EUTOCIO in chi lo legge è di un uomo assai diligente e coscienzioso, ma di mediocrissimo ingegno. Infatti l'enumerare per ogni singola proposizione i vari casi che può presentare la figura relativa, l'avvertire le varianti dei manoscritti, il sopperire alla stringatezza del testo ed anche il proporre qualche modificazione ai ragionamenti dell'autore (1), sono tutte cose che esigono molta accuratezza e pregevole erudizione, ma nessuna originalità e non soverchio acume. Il commentatore avrebbe potuto mettere in luce la propria individualità facendo, ad imitazione di PAPPO, ulteriormente fiorire la pianta coltivata da APOLLONIO od almeno completando la serie dei corollari da lui esposti: ma una cosa e l'altra si cercano indarno in EUTOCIO: in tale deserto uniche oasi (e nemmeno molto verdi!) sono alcune considerazioni sulle proporzioni composte (2), e un teorema che insegna a riconoscere la natura della conica a cui appartiene un dato arco. Nè più abbondanti sono le osservazioni sull'insieme dell'opera Apolloniana e sulla connessione delle sue parti, o quelle intorno alla dipendenza fra l'opera stessa ed i lavori congeneri anteriori (3). Solo, per non lasciar nulla nella penna, avvertiremo, finendo, un cenno fatto dall'Ascalonita intorno alla descrizione meccanica di una conica (4) e la sua osservazione che la prop. 17ª del I Libro di APOLLONIO è la generalizzazione della 16ª del III di EUCLIDE (5).

Ed abbandoniamo un commentatore che non lasciò alcuna orma sul glorioso cammino che mena alla verità nella matematica; su di esso a ragione sarebbe stato gettato il velo dell'oblio, ove EUTOCIO non fosse apparso agli storici come una delle poche sorgenti d'informazioni attendibili su quanto i geometri greci pensarono ed operarono.

---

(1) Anzi non è nemmeno certo che EUTOCIO sia l'inventore dei mutamenti che suggerisce.

(2) ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. III, p. 140 e APOLLONIO ed. HEIBERG, T. II, p. 218.

(3) Il principal brano di EUTOCIO relativo a questo argomento venne da noi riferito a p. 154.

(4) APOLLONIO ed. HEIBERG, T. II, Lipsiae, 1893, p. 230-32).

(5) Id., p. 228.

CAPITOLO VI.

Sereno.

35. - Fra i matematici appartenenti al periodo argenteo della geometria greca merita qualche considerazione l'autore di due opuscoli che ci pervennero nella loro integrità: cioè SERENO. Determinare l'epoca in cui egli visse è estremamente difficile; giacchè nessuno dei commentatori che noi conosciamo lo ricorda (1), e, d'altronde, leggendo le sue opere non si può concludere altro se non che è posteriore ad APOLLONIO, essendo frequenti le suecitazioni delle *Coniche*, opera che sembra avere anche commentate (2). Un criterio per determinare il tempo in cui visse SERENO si

(1) M. CANTOR (*Vorlesungen*, T. I, 3ª ed., p. 489) dice che SERENO è citato da MARINO nella prefazione ai *Dati*; ma il nome di SERENO non s'incontra nel testo pubblicato dal MENGE nel T. VI di *Euclidis Opera Omnia*: ed alla frase ὕστερον Ἀρχιμήδους ὁ Σέρηνος ἐθεώρει (lezione proposta da D. GREGORY nella sua edizione di EUCLIDE, invece di altra che condurrebbe a ritenere SERENO anteriore ad ARCHIMEDE) è sostituito nell'or citata edizione (p. 248, lin. 3) ὕστερον Ἀρχιμήδες ἔδειξε.

(2) M. CANTOR, l. c. Il fondamento per tale opinione, emessa per la prima volta dal NIZZE (v. la versione più sotto indicata, che questi ha curato, dell'opuscolo *Sulla sezione del cilindro*) si trova nella dimostrazione della prop. 16, la quale si chiude con le parole: " Questo io ho anche dimostrato geometricamente nei miei commenti „ (ed. HEIBERG, p. 52, lin. 26).

trasse (1) dall'osservare che molti manoscritti ne indicano Antissa per sua patria: ora, poichè questa città dell'isola di Lesbo venne atterrata dai Romani il 167 a. C., si ottenne un limite superiore per la nascita di SERENO e si concluse essere egli nato al più tardi verso il 150 a. C. (2); ma contro tale conclusione si obbiettò che all'antica Antissa una seconda succedette al tempo di STRABONE (66 a. C. - 24 E. v.) (3). Inoltre uno studio di altri codici degni della massima fede condusse l'HEIBERG (4) a concludere che la patria di SERENO non fu già Antissa, ma la città d'Egitto Antinoeia o Antinoupoli; ora questa venne fondata da ADRIANO l'anno 122 dell'E. v. in onore di ANTINOS, onde SERENO si dovrebbe porre più vicino, per luogo di nascita e per tempo, a PAPPO ed a TEONE, entrambi nati e vissuti in Alessandria (5). Adottando siffatte conclusioni noi giudicammo opportuno di occuparci di SERENO nel presente Libro, ed alla fine di esso, perchè il non essere le sue ricerche mai ricordate dai commentatori PAPPO, PROCLO ed EUTOCIO induce a considerarlo come ad essi non anteriore.

Non ci arresteremo su un brevissimo frammento intitolato Σερήνου τοῦ φιλοσόφου ἐκ τῶν Λημμάτων attribuito al nostro geometra e pubblicato da TH. H. MARTIN nella sua edizione (cfr. p. 466) dell'*Astronomia* di TEONE SMIRNEO, perchè esso è pressochè insignificante (6): analizzeremo invece con cura

---

(1) BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*. Leipzig, 1870, p. 184.

(2) Così pensa il BRETSCHNEIDER, d'accordo (ma con maggior precisione) col MONTUCLA (*Histoire*, T. I, p. 315), che fa vivere SERENO in uno dei quattro secoli che precedettero l'E. v.

(3) Osservazione del BLASS riferita dal CANTOR (l. c.).

(4) *Ueber den Geburtsort des Serenos* (Bibl. mathem., p. 97-98).

(5) Tale conclusione è in accordo colle opinioni del BALDI, che dà il 462 come data della nascita di SERENO (*Cronica dei matematici*, Urbino, 1707, p. 59), dello CHASLES, che fa SERENO contemporaneo a PAPPO (*Ap. hist.*, p. 47), e di P. TANNERY, che lo pone fra PAPPO ed IPAZIA (v. l'articolo *Serenus d'Antissa*, in Bull. des Sc. math., 2ª Serie, T. VII, 1883).

(6) Una correzione al testo di questo frammento fu indicata da F. HULTSCH nella nota *Zur Terminologie der griechischen Mathematikern* (Zeitschr. für Math. und Phys., T. XXIV, 1879, Hist.-lit. Abth., p. 41-42).

i due opuscoli geometrici *Sopra la sezione del cilindro* e *Sulla sezione del cono*, i quali vennero giudicati così favorevolmente da ottenere, in tempi diversi, eccellenti edizioni (1) e traduzioni in latino (2) e tedesco (3).

36. - Lo scopo del primo degli opuscoli di SERENO (περὶ κυλίνδρου τομῆς) è dichiarato esplicitamente nella lettera-prefazione con cui esso si apre e che suona così:

Siccome mi accorsi, caro CINO, che parecchi di coloro i quali si occupano di geometria, son d'avviso che la sezione obliqua del cilindro sia essenzialmente differente dalla sezione del cono chiamata ellisse (4), così pensai essere necessario di adoperarsi a che essi non persistessero in tale errore e convincere essi e coloro che pensano nel medesimo modo. È veramente un controsenso quello commesso da certi geometri quando affermano delle proposizioni geometriche senza dimostrarle o solo giustificandole con dimostrazioni apparenti, il che è assolutamente contrario alla geometria. Perciò, dal momento che essi hanno quell'opinione, mentre noi non la condividiamo, vogliamo assodare geometricamente come in entrambi i corpi, nel cono cioè e nel cilindro, nasce una sezione della medesima forma, purchè essi vengano segati con una certa regola e non in modo completamente arbitrario. Ma, come gli antichi i quali trattarono le proprietà del cono, non si limitarono al concetto ordinario di cono (secondo il qual concetto esso viene generato dalla rotazione di un triangolo rettangolo) ma svolsero altre considerazioni più generali costruendo, non solo coni retti, ma anche coni obliqui; così noi pure, studiando la sezione del cilindro, dobbiamo, non soltanto tagliare e conside-

---

(1) L'*editio princeps* è quella dell'HALLEY (Oxonii, 1710); noi ci serviremo di quella più recente curata dall'HEIBERG (*Sereni Antinoensis Opuscula*, Lipsiae, 1896).

(2) *Sereni Antissensis philosophi libri duo, a Federico Commandino Urbinate e graeco conversi.* Bononiae, 1566 e Pistorii, 1696.

(3) *Serenus von Antissa über den Schnitt des Cylinders* (Stralsund, 1860), *Serenus von Antissa über den Schnitt des Kegels* (id. 1861).

(4) La causa di tale errore sta probabilmente nel non avere APOLLONIO accennato mai alle sezioni del cilindro; egli lo fece forse (ZEUTHEN, *Die Lehre von der Kegelschnitte*, etc., p. 416) perchè giudicò assai agevole il sopperire al suo silenzio; da esso, però, ha probabilmpnte origine il fatto che in tutta la letteratura matematica greca si cerca indarno qualche esempio di deduzione delle proprietà dell'ellisse da quelle del cerchio, mediante proiezione parallela.

rare il cilindro retto, ma dare maggiore estensione alle nostre investigazioni trattando anche il cilindro obliquo. Or io so benissimo che tutti ammettono senza difficoltà non essere retto qualunque cilindro, perchè a tale conclusione guida la definizione consueta; ciò non ostante, per maggiore chiarezza credetti opportuno di proporre una definizione più generale; risulta così che la sezione del cilindro retto coincide con l'ellisse del cono retto, mentre nell'ipotesi più generale essa è eguale ad un'ellisse: dimostrar ciò è appunto lo scopo della presente memoria.

La definizione generale a cui allude SERENO è la seguente: « si suppongano dati due cerchi eguali in piani paralleli; se due loro diametri si muovono con la condizione di conservarsi fra loro paralleli, le congiungenti fra loro parallele dei loro estremi formeranno una *superficie cilindrica* ». Da essa segue una definizione generale di *cilindro* e la necessità di distinguere fra i cilindri quelli che sono *retti* da quelli che sono *obliqui*: a queste tengono dietro altre definizioni (35 secondo HALLEY, soltanto 33 secondo HEIBERG), tolte od almeno ispirate da altre che leggonsi nelle *Coniche* di APOLLONIO.

La prima delle proposizioni esposte da SERENO è un semplicissimo lemma di geometria piana, mediante il quale egli fa vedere essere un parallelogramma ogni sezione prodotta in un cilindro da un piano passante per l'asse (prop. 2) o ad esso parallelo (prop. 3). Un altro lemma è la proposizione che afferma essere una circonferenza ogni linea tale che la perpendicolare, calata da un suo punto sopra una corda fissa, sia media proporzionale tra i segmenti di questa corda (prop. 4); il nostro geometra se ne serve per ottenere (prop. 5 e 6) le due serie di sezioni circolari in ogni cilindro, quindi insegna a costrurre la generatrice di un cilindro che passa per un suo punto arbitrario (prop. 7) e fa vedere che, analogamente a quanto avviene nel cono (1), il segmento che congiunge due punti qualunque del cilindro è ad esso interno (prop. 8). Nelle due prop. seguenti entra in scena la sezione prodotta in un cilindro da un piano qualunque; SERENO dimostra che essa non è circolare nè rettilinea; finalmente nelle prop. 11 e 12 si apprende l'esistenza

(1) V. APOLLONIO, Lib. I, prop. 2.

e la costruzione delle corde di un cilindro che son bisecate da un piano (diametrale). Dimostrata poi come lemma una proprietà di due punteggiate simili, SERENO coi teoremi 14-15 stabilisce un certo numero di proprietà di cui gode la sezione del cilindro, che ne manifestano la identità con l'ellisse, e prosegue osservando:

L'identità delle sezioni si può anche verificare su moltissime altre proprietà comuni; ma le più importanti son quelle che vennero già esposte. Dopo di avere spinte le considerazioni sino a questo punto, non è mio intendimento di dimostrare anche tutto il resto e trattenermi sopra cose estranee al mio scopo. Chi vorrà istituire delle indagini precise sull'ellisse dovrà invocare la teoria di APOLLONIO PERGEO; ma facendo ulteriori investigazioni e paragonando quanto esponemmo col I Libro delle *Coniche* di APOLLONIO, constaterà la verità dell'asserto; giacchè mostrerà che tutte le proprietà ivi dimostrate per la sezione conica chiamata ellisse sussistono per la sezione del cilindro. Senz'arestarci sopra questo, io mi limiterò a far conoscere poche altre proposizioni da cui pure emerge l'identità delle sezioni e poi mi volgerò ad altro.

Le proposizioni (20-22) complementari a cui allude SERENO, meritarono le lodi di M. CHASLES (1); esse insegnano la costruzione di un cono e di un cilindro passanti per la medesima ellisse. Notevoli anche sono le analoghe prop. 23, 24 e 26 (mentre la intermedia 25 non è che un lemma di algebra geometrica); nè possono venir passate sotto silenzio quelle che portano i numeri 27 e 28, da cui si apprende la distribuzione in due serie semplicemente infinite delle sezioni di un cono o di un cilindro che sono simili ad una ellisse data.

Narra in seguito SERENO avere un geometra suo amico, di nome PITONE, illustrata la teoria euclidea delle parallele, citando, come esempio di rette fra loro parallele, il contorno dell'ombra che proietta una colonna illuminata da una fiaccola. Tale osservazione spinse SERENO a cercare il luogo dei punti di contatto delle tangenti di un cono o di un cilindro che passano per un punto, ed a scoprire che quel luogo appartiene ad un piano determinato (Prop. 29-32 e 33).

---

(1) *Aperçu historique,* p. 47 della 2ª ed.

Questa conclusione — che, in certo senso può avvicinarsi ad alcuni teoremi di ARISTARCO (v. p. 563) — fece risalire a SERENO i concetti di polare di un punto rispetto ad un angolo, un cono od un cilindro; mentre il teorema « la proiezione centrale di un triangolo fatta su un piano parallelo è un triangolo simile al triangolo obbiettivo » servì (1) per rispondere affermativamente alla questione proposta da CHASLES (2) se, agli antichi fosse nota, come mezzo di ricerca scientifica, la prospettiva; tuttavia, anche chi si associa a siffatta conclusione, non può disconoscere che le loro cognizioni in proposito dovevano essere assai limitate.

37. - Il secondo degli opuscoli di SERENO ha per titolo περὶ κόνου τομῆς; esso consta nell'edizione di HEIBERG di 69 proposizioni, di 63 nella traduzione del NIZZE, ed è preceduto dalla lettera che qui riportiamo:

Mio ottimo CIRO.

Le sezioni prodotte nei coni da piani pei loro vertici sono triangoli e dànno origine a svariate e belle indagini; tuttavia, per quanto mi consta, non vennero ancora studiate. Mi parve, quindi, opportuno di non lasciare intatto questo tema e di esporre tutto ciò che mi è noto sopra di esso. Io credo di averne esposto la maggior parte e quanto sembra esigere uno studio geometrico più profondo. Ma nessuno deve stupirsi di non trovare qui cose che potevano benissimo essere dette, essendo io il primo a trattare tale teoria. E sarà naturale che o tu, addentrandoti nella stessa ricerca, completi ciò che io espongo, oppure che altri sia indotto a farlo. Però alcune cose vennero da me taciute ad arte o perchè erano evidenti o perchè erano state dimostrate da altri. Così, per non mescolare i miei ritrovati a cose esposte da altri, ho lasciato in disparte la proposizione " ogni sezione fatta in un cono da un piano passante pel vertice è un triangolo „ perchè altri la dimostrarono prima (3). Inoltre non giudicai degne di trovare posto qui le cose meno profonde e da tutti concepibili, per non distrarre l'attenzione di chi studia.

Queste parole mostrano qual sia lo scopo del secondo opuscolo di SERENO: è lo studio comparativo delle sezioni pro-

(1) Cfr. C. TAYLOR, *An Introduction to ancient and modern Geometry of conics*. Cambridge, 1881, p. LV.

(2) *Ap. hist.*, p. 74 nota.

(3) APOLLONIO, L. I, prop. 3.

dotte in un cono da piani passanti pel vertice. Per raggiungere il suo intento egli ha bisogno di un buon numero di lemmi, alcuni dei quali hanno una certa importanza, perchè completano la teoria euclidea delle proporzioni ed il quadro dell'algebra geometrica dei Greci; eccone gli enunciati:

1. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ sarà $ad > bc$ (1).

18. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ sarà $\frac{a^2}{b^2} > \frac{c^2}{d^2}$.

19. Supposto

$$a + b = a' + b' \quad , \quad \frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} \quad , \quad a > b \; , \; a' > b' \, ,$$

sarà a la massima e b la minima delle quantità a, b, a', b',

54 e 55. Supposto

$$a > c \geqq b > d \, ,$$

e

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \, ,$$

sarà

$$ab > cd$$

e viceversa.

56. Se $$a + b = c + d \; . \; ab = cd \, ,$$

le quantità a, b sono eguali alle quantità c, d a meno dell'ordine (2).

Altre due proposizioni lemmatiche di SERENO esprimono, nel linguaggio proprio agli antichi geometri, che il coseno è funzione decrescente dell'angolo e che il seno di un angolo acuto è minore dell' unità; vanno notate come in-

---

(1) Cfr. EUCLIDE, *Elementi*, L. VI, prop. 16. Lo stesso teorema di SERENO si trova in PAPPO (ed. HULTSCH, p. 696).

(2) Questa proposizione si trova già (v. p. 692) in PAPPO, sotto forma un po' meno precisa (Lib. VII, prop. 224). È noto che un teorema analogo ha luogo per due gruppi di n quantità; è quello che dice essere desse eguali, a meno dell'ordine, se coincidono le loro funzioni simmetriche semplici.

cedenti forniti dai geometri greci all'odierna teoria delle funzioni circolari. Ritroviamo poi in SERENO dimostrata (prop. 17) la relazione metrica fra i lati di un triangolo ed una mediana, che già notammo (p. 689) in PAPPO: e ciò va rilevato perchè la mediana è un elemento di cui EUCLIDE non parla affatto e di cui ARCHIMEDE non avverti (cfr. p. 287) che l'intervento in questioni meccaniche. SERENO applica quella proposizione (prop. 21 e 26) al paragone delle aree di due triangoli aventi comuni le basi e le corrispondente mediane ed alla costruzione di un triangolo di cui, all'infuori di altri elementi, si conosce una mediana. Passando sopra ad altri teoremi di minore importanza, relativi a triangoli (prop. 8, 19 e 37) e al cerchio (prop. 53), citeremo il seguente che appartiene alla teoria dei massimi e minimi:

53. Se si congiunge un punto qualunque di un arco circolare agli estremi dello stesso si ottengono due corde la cui somma è massima se quel punto è il centro dell'arco.

Chiuderemo quest'enumerazione delle proposizioni lemmatiche esposte da SERENO citando la seguente:

Il luogo delle proiezioni ortogonali del vertice di un cono circolare obliquo su i diametri della base è la circonferenza avente per diametro la retta che unisce il centro della base alla proiezione sulla stessa del vertice del cono.

28. - Prescindendo da questi teoremi ausiliari, l'opuscolo di SERENO può considerarsi composto di tre parti, concernenti la prima i coni retti (prop. 1-13), la seconda gli obliqui (prop. 15-57), l'ultima — probabilmente ispirata ai teoremi 14 e 15 del XII Libro degli *Elementi* di EUCLIDE — il paragone fra due coni; ad essa segue un'appendice che presenta poco legame col resto (1).

Nella prima parte SERENO ha notato un'essenziale diversità di comportamento fra i coni retti acutangoli e gli ottusangoli, o, come egli preferisce dire, fra i coni in cui l'asse

(1) Le prime due parti potrebbero somministrare un buon materiale per esercizi scolastici sulla teoria dei massimi e dei minimi.

h è maggiore del raggio r della base e quelli in cui è minore. Per vedere in che cosa consista tale differenza chiamiamo T l'area di una sezione triangolare del cono, la base della quale abbia la lunghezza $2c$. Sarà

$$T = c\sqrt{r^2 - c^2 + h^2}.$$

Per determinare il massimo di T si osservi che, essendo costante la somma delle quantità c^2, $r^2 - c^2 + h^2$, il loro prodotto, cioè T^2, riuscirà massimo quando quelle due quantità saranno fra loro eguali, cioè quando si avrà

$$c^2 = r^2 - c^2 + h^2,$$

ovvero

$$c = \sqrt{\frac{r^2 + h^2}{2}};$$

ma affinchè a questo valore corrisponda un triangolo reale dev'essere

$$c < r,$$

cioè

$$\sqrt{\frac{r^2 + h^2}{2}} < r,$$

ossia

$$h^2 < r^2,$$

cioè il cono dev'essere ottusangolo; nel caso limiti $c = r$ il triangolo sezione massima è non solo isoscele, ma anche rettangolo (prop. 13).

Ma, se il cono è acutangolo, dall'essere

$$c < r < h$$

segue

$$r^2 - c^2 > 0\ ,\ c^2 - h^2 < 0\ ,\ (r^2 - c^2)\ (c^2 - h^2) < 0\ ,$$

e quindi

$$c^2\ (r^2 - c^2 + h^2) < r^2 h^2$$

cioè

$$T < rh.$$

ora rh misura l'area dei triangoli i cui piani passano per l'asse, dunque questi, *soltanto per coni acutangoli*, rappresentano le sezioni di area massima.

Avvertito questo differente modo di comportarsi, nascono molte questioni, quali sono le seguenti, che SERENO insegna a risolvere:

9. Segare un cono retto acutangolo con un piano pel vertice in modo da ottenere una sezione la cui area abbia un rapporto dato (< 1) con l'area di una sezione assiale.

10-11. Segare un cono ottusangolo in modo che la sezione triangolare ottenuta sia eguale ad una sezione assiale, oppure sia massima.

Passiamo alla seconda parte dell'opuscolo in esame. Chiamiamo S il vertice di un cono obliquo avente per base un circolo di centro C e raggio r; sia H la proiezione di S sul piano della base, e si ponga $CH = d$, $SH = h$; sia finalmente SAB una sezione triangolare del cono e α, β gli angoli che la retta CH forma coi raggi CA e CB. Un facile calcolo mostra che l'area T del triangolo SBB è data dallo formola

$$(1) \qquad T = r \operatorname{sen} \frac{|\alpha - \beta|}{2} \sqrt{h^2 + \left(d \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + r \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2},$$

ove $|\alpha - \beta|$ rappresenta al solito il valore assoluto della differenza tra gli angoli α e β.

Fra le sezioni triangolari del dato cono si distinguono:

1.° le *sezioni assiali*, i cui piani cioè passano per la retta SC;

2.° le *sezioni isosceli*;

3.° le *sezioni parallele*, le cui basi sono parallele alla retta CH; ne indicheremo le aree risp. con T_a, T_i, T_p. Si ottiene una sezione assiale supponendo che la retta AB sia un diametro della base del cono, una sezione isoscele supponendola perpendicolare alla retta CH, ed una sezione parallela supponendola parallela a questa retta. In corrispondenza fra gli angoli α, β sussiste una delle seguenti relazioni:

$$|\alpha - \beta| = \pi \ , \ \alpha + \beta = \pi \ , \ \alpha + \beta = 2\pi$$

e dalla formola (1) si ottengono le tre altre seguenti:

$$T_a = r\sqrt{h^2 + d^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}, \tag{2}$$

$$T_i = r \operatorname{sen} \alpha \sqrt{h^2 + (d + r\cos\alpha)^2}, \tag{3}$$

$$T_p = r\cos\alpha \sqrt{h^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}, \tag{4}$$

nell'ultima delle quali va notata l'assenza di d.

Emerge dalla (2) che i valori estremi di T_a corrispondono ai valori estremi di sen α; onde il massimo di T_a è

$$T_1 = r\sqrt{h^2 + d^2}$$

ed il minimo

$$T_2 = rh\ ;$$

il primo di questi valori compete al triangolo che è ad un tempo isoscele ed assiale, mentre il secondo si riferisce alla sezione assiale perpendicolare alla base. A ragione pertanto SERENO afferma (prop. 24) che « l'area di una qualunque sezione assiale di un cono obliquo oscilla fra l'area della sezione perpendicolare alla base (minimo) e l'area della sezione isoscele (massimo) ». Ciò prova che, per quanto concerne le sezioni assiali, tutti i coni obliqui si comportano nello stesso modo.

Ma altrettanto non si può ripetere per le sezioni isosceli o parallele. Osserviamo infatti che, per essere

$$(r\cos\alpha)^2 + (h^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha) = h^2 + r^2 = \text{cost.},$$

T_p^2 sarà massimo quando

$$r^2 \cos^2 \alpha = h^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

cioè

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{r^2 - h^2}{2r^2}}.$$

Ma affinchè questo massimo sia reale dev'essere $h > r$, e allora come massimo di T_p^2 si ha $\dfrac{r^2 + h^2}{2}$. Se invece è

$$r > h$$

sarà *a fortiori*

$$h^2 > r^2 \cos^2 \alpha$$

e quindi

$$rh > r \cos \alpha \sqrt{h^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

cioè

$$T_p < rh.$$

Ciò prova che, quando il raggio della base del cono è minore della distanza fra il vertice e la base, ed allora soltanto, la sezione parallela massima è quella che contiene l'asse (prop. 29 e 30). Similmente, applicando la formola (3), si conclude, con SERENO (prop. 31, 32, 34-36, 40-44), che, rispetto alle sezioni isosceli, i coni in cui l'asse non è minore del raggio della base si comportano differentemente dagli altri; soltanto pei primi il triangolo assiale è massimo; notevole è il caso, su cui si arresta il nostro geometra (proposizioni 50-51), in cui l'asse è eguale al raggio della base.

Giova ancora accennare ad un teorema (prop. 57) da cui emerge che SERENO ha rivolto la propria attenzione anche ai perimetri dei triangoli assiali, ed ai numerosi problemi da lui trattati aventi per fine la costruzione di triangoli assiali, isosceli o paralleli, le cui aree sian massime o minime, oppure abbiano rapporti dati con quelli di area massima o minima.

39. - Nell'ultima parte del proprio lavoro SERENO instituisce paragoni, non più fra sezioni differenti di un medesimo cono, ma fra certi elementi di coni diversi. Per compendiare i suoi risultati chiamiamo di un cono retto r il raggio della base e h l'altezza, B la base, T l'area del triangolo por l'asse e V il volume: sarà

$$(5) \qquad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \ , \ B = \pi r^2 \ , \ T = rh.$$

Indicando con r' , h' , B' , T' , V' gli elementi analoghi di un secondo cono, le proposizioni stabilite da SERENO possono esprimersi come segue:

58-59. Se $V = V'$ sarà $\frac{T}{T'} = \frac{r'}{r}$ e viceversa.

60-61. Se $T = T'$ sarà $\frac{B}{B'} = \frac{V^2}{V'^2}$ e viceversa.

62-63. Se $r = r'$ sarà $\frac{V}{V'} = \frac{h}{h'}$ e $B = B'$ e viceversa.

64-65. Se $\frac{V}{V'} = \frac{h}{h'}$ sarà $B = B'$ e viceversa.

66-67. Se $\frac{V}{V'} = \frac{B}{B'}$ sarà $\frac{T}{T'} = \frac{r}{r'}$ e viceversa

68. Se $\frac{V}{V'} = \frac{B^2}{B'^2}$ sarà $\frac{T}{T'} = \left(\frac{r}{r'}\right)^3$ e viceversa.

Le relazioni (5) permettono di dimostrare con tutta facilità questi teoremi. Quanto a SERENO, egli ne stabilisce la verità con i procedimenti geometrici in uso ai suoi tempi; il suo stile è semplice, modellato sugli esempi migliori, ma senza la pedanteria di AUTOLICO ed EUCLIDE; il che concorda coll'opinione che egli appartenga all'epoca in cui la geometria greca volgeva al tramonto. Quanto al valore intrinseco dell'opuscolo di SERENO, il lettore è in grado di giudicarlo da quanto esponemmo; basterebbe, secondo noi, l'avere SERENO scoperto il modo diverso di comportarsi dei vari coni rispetto alle aree delle loro sezioni triangolari, per mostrare che egli non era privo della forza per far compiere qualche avanzamento alla scienza geometrica (1).

---

40. - SERENO è l'ultima personalità geometrica ben delineata che ci si presenta nella storia del popolo ellèno; al pari di quanto accadde per la maggior parte degli altri matematici (2) di cui ci siamo finora occupati, è incerta l'epoca in cui egli fiorì, sono ignoti i casi della sua vita e probabilmente è incompleto il catalogo delle sue opere.

Siffatte lacune che in gran numero presenta la storia della

---

(1) Alcune delle proposizioni da lui segnalate porgerebbero materia ad eleganti esercizi scolastici sopra la teoria dei massimi e minimi.

(2) Riandando su quanto esponemmo sinora si vedrà che le uniche date sicure che incontrammo sono quelle della morte di ARCHIMEDE e quelle degli estremi della vita di PROCLO, PLATONE ed ARISTOTELE.

geometria greca rendono mal sicure e barcollanti tutte le deduzioni che potrebbesi essere tentati di trarre intorno al modo in cui questa scienza si svolse. Esse però non impediscono di concludere che i Greci lasciarono ai posteri uno splendido patrimonio geometrico, il quale, giunto che fu nelle mani di chi seppe amministrarlo a dovere, fu fecondo di quell'immensa ricchezza che forma la forza e la gloria dei moderni. Che, all'opposto, altrettanto non possa ripetersi per la maggior parte delle branche della matematica applicata, emerge da quanto esponemmo nel Libro precedente. Al Libro seguente è riserboto di risolvere la questione analoga per l'aritmetica, di decidere, cioè, in qual modo ed in quale misura le indagini compiute dai Greci sulla scienza dei numeri si colleghino a quelle che vennero affrontate e condotte a termine, in Europa specialmente, dopo il Rinascimento.

Libro Quinto

L'ARITMETICA DEI GRECI

PROEMIO

Tutte le idee che campeggiano nella matematica traggono, in ultima analisi, la loro origine da due osservazioni. Consiste la prima nel constatare che qualsia corpo solido, cadente sotto gli organi dei nostri sensi, possiede, indipendentemente da tutte le altre sue proprietà fisiche (colore, temperatura, stato elettrico e simili), una *forma*, la quale, ove non intervengano cause perturbatrici esterne, è invariabile, epperò caratteristica per quell'oggetto. La seconda osservazione si riferisce ad un gruppo di cose, e consiste nel notare che, se si fa astrazione da tutte le proprietà fisiche di queste (la forma inclusa), quel gruppo conserva un *quid* caratteristico che si chiama *numero* di quelle cose. Al concetto di forma di un corpo, logicamente svolto, deve la propria esistenza la scienza dell'estensione figurata, la *geometria*; il concetto di numero invece è il fondamento di tutta l'*aritmetica*, inteso questo vocabolo nel significato più ampio possibile.

Le esperienze quotidiane di qualsia persona intelligente guidano così spontaneamente alla concezione delle più semplici figure geometriche e suggeriscono tanto naturalmente l'investigazione delle loro proprietà, che è impossibile dire chi sia stato il primo individuo od il primo popolo che abbia coltivato la geometria, quale sia stata l'epoca che la vide nascere. Similmente le occasioni al contare sono tanto frequenti e numerose, la relativa operazione è siffattamente connaturata a tutto il nostro meccanismo intellettuale, che vano riuscirebbe ogni tentativo di redigere la fede di nascita

dell'aritmetica. Ben se n'avvide PLATONE, il quale, a chi voleva si attribuisse ad un tal PALAMEDE l'arte del conteggio, argutamente rispose: « E che forse, AGAMENNONE, senza PALAMEDE, avrebbe ignorato quanti piedi aveva? ».

Se, pertanto, riesce sterile qualunque sforzo per determinare chi prima dei Greci, chi prima dei Fenici — che i Greci consideravano loro maestri in aritmetica (1), come in geometria si ritenevano discepoli degli Egiziani (2) —, è possibile e sommamente interessante il determinare quali mezzi ausiliari siansi creati gli uomini per poter eseguire i calcoli sempre più complicati che richiedevano il consorzio civile, le transazioni commerciali e poi le investigazioni scientifiche.

Tali mezzi sono notoriamente la numerazione parlata e la numerazione scritta; essi sono il materiale ogni giorno adoperato nell'Arte del calcolo o Logistica (cfr. p. 645); con la descrizione di quelli fra tali mezzi che adoperò un determinato popolo e della maniera in cui vennero usati, deve aprirsi la storia dell'aritmetica presso questo popolo; epperò gli è dei procedimenti di calcolo adoperati dagli antichi Greci che noi dobbiamo prima di qualunque altra cosa occuparci.

---

(1) Intendiamo parlare dell'aritmetica *pratica,* strumento indispensabile ai primi e più abili commercianti del mondo.

(2) Vedremo presto che, quantunque i Greci non lo riconoscessero, anche nell'aritmetica pratica furono discepoli degli Egiziani.

CAPITOLO I.

La logistica greca

Numerazione parlata.

1. - Per contare e poi calcolare è indispensabile di avere a propria disposizione una collezione di vocaboli, con cui designare i successivi elementi della serie naturale dei numeri. A tale scopo si scelsero in origine delle parole già esistenti; infatti i filologhi insegnano come, in origine, per indicare i numeri di uso più frequente, quali sarebbero

1 , 2 , 3 , 5 , 20,

si adoperassero parole, quali

io, ali, trifoglio, mano, uomo,

il cui significato ha una connessione evidente con quei numeri. Ma è chiaro che, per quanto fervida fosse la fantasia e tenace la memoria degli aborigeni, ben presto si sarà visto essere impossibile di designare con nomi nuovi, scelti quasi a capriccio, tutti i numeri immaginabili e di ricordare le denominazioni adottate. Per rimuovere tale ostacolo — così grave che, ove non fosse stato vinto, l'aritmetica, come arte o come scienza, non avrebbe nemmeno potuto esistere — si pensò di fissare, nella serie omogenea (indifferenziata) dei numeri, alcuni individui (che possono chiamarsi *numeri principali*) succedentisi con una certa legge, i quali fun-

gessero quasi da pietre miliari per giudicare del cammino che il nostro pensiero deve percorrere per arrivare ad un elemento qualunque di quella serie; allora, per indicare uno di tali elementi, non si aveva che da far conoscere a parole di quanto esso si scostasse dal numero principale più prossimo. È questo il concetto che funge da midollo, non soltanto del nostro sistema di numerazione, ma anche di tutti gli altri a noi noti, sistemi i quali differiscono per questo che, mentre noi prendiamo come intervallo fondamentale (cioè come intervallo fra due numeri principali consecutivi) il 10 — probabilmente perchè dieci sono le dita delle mani (1), primi aiutanti del calcolatore — altri popoli preferirono il 5 od il 20, ed altri (i quali si trovano per abitudini intellettuali da noi molto discosti) il 6 o l'11.

2. - Applicando il concetto che testè delineammo, i Greci stabilirono un sistema di numerazione parlata avente per base il numero 10, ma in cui anche al 20 è accordato un posto distinto. Ed invero i primi dieci numeri essi designavano con i seguenti nomi:

1. εἷς ; 2. δύο ; 3. τρεῖς ; 4. τέσσαρες ; 5. πέντε ;
6. ἕξ ; 7. ἑπτά ; 8. ὀκτώ ; 9. ἐννέα ; 10. δέκα

col mezzo di essi componevano i nove seguenti:

11. ἕνδεκα ; 12. δώδεκα ; .... ; 19. ἐννεακαίδεκα.

Ma pel numero seguente usavano un nome speciale

20. εἴκοσι,

col quale e coi numeri 1, 2, ..., 9 componevano i numeri 21, 22, ..., 29. Similmente formavano tutti i numeri del primo centinaio mediante i nomi seguenti:

30. τριάκοντα ; 40. τεσσαρ ακοντα ; .... ; 90. ἐνενήκοντα.

---

(1) Nel libro dei *Problemi*, attribuito ad ARISTOTELE, è posta (XV, 3) la questione " Perchè tutti, tanto i barbari quanto gli Ellèni, contano per decine, e non altrimenti? „, ed è indicato come risposta appunto il fatto che le mani dell'uomo hanno complessivamente dieci dita.

Similmente, da

100. ἑκατόν

deducevano il modo di indicare i numeri sino al 999; poi mediante

1000. χίλιοι

riuscivano a spingersi sino a 9999. Sembra che il numero

10000. μύριοι

rappresentasse il limite al quale si arrestarono in origine i Greci, i quali, a differenza degli Indiani, avevano una certa ripugnanza al considerare e forse l'impossibilità di concepire numeri grandi (1). Vedremo fra breve come ARCHIMEDE (n. 8) e poi APOLLONIO (n. 9) abbiano insegnato a formare con gli elementi testè descritti, tutti i numeri immaginabili.

Calcolo digitale e " numeratio calcularis „.

3. - Trovato un sistema per indicare i numeri che successivamente s'incontrano nella serie naturale dei numeri, si possono (intendendo la parola *potere* in senso astratto) eseguire tutte le operazioni aritmetiche, e, con sufficiente facilità, almeno l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione. Che i Greci sapessero effettuare tal genere di calcolo è attestato da un passo del VII Libro della *Storia* di ERODOTO (V sec. a. C.), ove è eseguito il lungo computo della forza dell'esercito persiano e della quantità di vettovaglie da esso consumate; però un altro passo dello stesso scrittore (2), ove in una divisione è commesso un grave errore, fa credere che la loro abilità logistica fosse di mediocre portata. Che essi poi sapessero aiutarsi con le dita è indicato dalle parole πεμπάζειν che incontrasi nell'*Odissea* (3), ed è confermato da un passo delle *Vespe* di ARISTOFANE (il celebre

(1) Osservazioni dell'HANKEL, *Zur Geschichte der Matematik in Alterthum und Mittelalter*. Leipzig, 1874, p. 17.

(2) Cfr. HEIBERG in *Revue critique d'histoire et de littérature*, T. XI, 1881, p. 379.

(3) V. IV, 142. L'osservazione riferita appartiene a F. HULTSCH; v. il § 5 dell'articolo *Arithmetica* in PAULY-WISSOWA, *Real-Encyklopädie der class. Althertumswissensch.*

commediografo vissuto in Atene nel periodo 444-380 a. C.), ove è proposto di calcolare « sulle dita » tanto le entrate dello stato ateniese, quanto la spesa per pagare i giudici, e di paragonare poi i risultati (1).

Se si tratta di operazioni con numeri non molto grandi, pel calcolo digitale non occorrono artifici speciali; ma appena si oltrepassi un certo limite (non fisso, ma dipendente dall'abilità del calcolatore) questi si rendono indispensabili. Quali fossero quelli usati nell'antichità dai Greci non ci è noto con certezza: è però assai probabile che non differissero da quelli che descrisse un greco dell'Evo Medio (XIII o XIV sec. dell'E. v.), NICOLÒ ARTAVASDE da Smirne, di sopranome RABDA. Di costui esistono e vennero di recente integralmente pubblicate (2) due lettere, la seconda delle quali si dimostra scritta nel 1341 (3), tenendo conto del calcolo della Pasqua ivi eseguito *pel corrente anno*. Quello che a noi interessa in questo momento si legge nella prima di quelle lettere, quella cioè che comincia pomposamente così: « Esposizione abbreviata e chiarissima della scienza del calcolo, improvvisata a Bisanzio di COSTANTINO, da NICOLÒ ARTAVASDE da Smirne, aritmetico e geometra, τοῦ Ῥαβδᾶ, dietro richiesta dell'onoratissimo esattore delle imposte, GIORGIO τοῦ Χατζύκη, facilissima per quelli che hanno voglia di studiarla ». Il brano di essa (4) che si rife-

(1) " E prima di tutto fa un po' il conto, non colle pietruzze, ma sulle dita di quei contributi, che le città in comune ci recano, poi de' balzelli, che si pagano separatamente, dell'uno per cento, che da molte cose si riscuotono, di quel che rendono il pritaneo, le miniere, i porti, i dazi e le confische. La somma di queste cose viene ad essere circa due mila talenti. Ora metti dall'altra parte la paga, che si dà ogni anno ai seimila giudici, chè nel paese non ne fu mai numero maggiore, ed essa ci darà la somma di centocinquanta talenti ". *Commedie di Aristofane*, tradotte da D. CAPELLINA. Torino, 1853, p. 80.

(2) P. TANNERY, *Notices sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas* (*texte et traduction*) in *Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque nationale*, etc., T. XXXII, 1e Partie, 1886, p. 121-252. Dovendo in seguito citare spesso questo lavoro, lo indicheremo coll'abbreviazione RABDA-TANNERY.

(3) P. TANNERY, *Manuel Moschopulos et Nicolas Rhabdas* (Bull. des Sc. math., II Serie, T. VIII, 1884, p. 263-277).

(4) RABDA-TANNERY, p. 147-152.

risce al calcolo digitale dei Greci venne pubblicato varie volte (1): esso ci sembra degno di venir qui riferito integralmente, come unico documento capace di far capire come gli antichi potessero, gesticolando, effettuare delle calcolazioni complicate.

Ecco in qual modo si segnano i numeri sopra le mani; la sinistra serve sempre per le unità e le decine, la destra per le centinaia e le migliaia; per numeri maggiori bisogna adoperare la scrittura, non essendo le mani sufficienti a rappresentare i numeri. Chiudendo il primo dito, quello piccolo chiamato *miope* (μύωψ) e stendendo gli altri quattro, tenendoli ritti, tu hai a sinistra un'unità ed a destra un migliaio. Chiudendo, con lo stesso dito, anche il secondo che lo segue, e che si chiama *parameso* (παραμέσος) e *epibato* (ἐπιβάτης), restando aperti gli altri tre, come sopra ho detto, tu hai a sinistra due ed a destra due mila. Chiudendo il terzo, lo *sfacelo* (σφάκελλος) o dito medio, assieme ai primi due, e lasciando stesi gli altri due, cioè l'indice ed il pollice, hai a sinistra tre e tremila a destra. Chiudendo soltanto il medio ed il *parameso*, sioè il secondo ed il terzo dito, e lasciando aperti i tre altri, pollice, indice e *parameso*, hai quattro a sinistra e quattromila a destra. Chiudendo soltanto il terzo o dito medio e stendendo gli altri quattro, hai cinque a sinistra e cinquemila a destra. Chiudendo soltanto l'*epibato* o secondo dito, e lasciando aperti gli altri quattro, tu hai sei a sinistra e seimila a destra. Stendendo ora il *miope* o primo dito in modo da toccare la palma, e tenendo tesi gli altri, tu hai sette o settemila. Stendendo similmente il secondo o *parameso* ed inclinandolo sino ad avvicinarlo il più possibile al cavo della mano e tenendo tesi, come ho detto, i tre altri, cioè il terzo, il quarto ed il quinto, tu rappresenti otto a sinistra ed ottomila a destra. Dando al terzo dito la stessa posizione che ai due precedenti, hai a destra nove ed a sinistra novemila. Aprendo il pollice senza drizzarlo, ma dirigendolo un po' da una parte, e piegando un po' l'indice sinchè tocchi la prima giuntura del pollice, in modo da formare la lettera τ, le altre tre dita avendo la loro posizione naturale e non essendo staccate le une dalle altre, tu rappresenterai a sinistra dieci ed a destra cento. Stendendo in linea retta e verticalmente il quarto dito o indice in modo da figurare la lettera I, i tre primi restano uniti ma un po' inclinati e formanti un angolo con la palma, infine il pollice sorpassando questi ultimi e toccando l'indice, tu indichi venti e duecento.

(1) Rabda-Tannery, p. 132.

L'indice ed il pollice stesi ed inclinati in modo da toccarsi con le loro estremità, mentre le altre tre dita sono unite e stese secondo la loro posizione naturale, significano trenta e trecento. Le quattro prime dita stese direttamente, mentre che il pollice ha la forma della lettera Γ sorpassando l'indice dal lato esterno, significano quaranta a sinistra e quattrocento a destra. Le quattro prime dita essendo similmente aperte direttamente ed unite, mentre che il pollice figura la lettera Γ dal lato interno sulla base dell'indice, significano cinquanta e cinquecento. Partendo dalla stessa figura e piegando in cerchio l'indice attorno al pollice in modo da fargli toccare la falange intermedia fra la prima e la seconda giuntura, mentre l'estremità dell'indice va a toccare la base del pollice, si indica sessanta e seicento. Le tre prime dita essendo aperte nel modo che più volte indicammo, il pollice applicato contro l'indice e quest'ultimo abbracciando come una spirale l'estremità del pollice, significano settanta e settecento. Le tre prime riunite ed inclinate ad angolo dalla parte del palmo, il pollice sorpassando il dito medio o terzo, toccando la terza falange (quella contigua alla radice) di questo dito, ed applicato sul palmo, mentre che l'indice, disposto sotto il pollice e piegato attorno alla prima giuntura di quest'ultimo, tocca col suo estremo la base del pollice, significa ottanta ed ottocento. Se finalmente si chiude il pugno, tenendo il pollice diritto, e poi si stendono le tre prime dita lasciando l'indice nella posizione di chiusura, si rappresenta a destra novanta e novecento a sinistra (1).

4. - Mediante questo metodo (il quale ricorda assai quello in uso per comunicare con i sordo-muti) si era in grado di designare qualunque numero di quattro cifre, nonchè una miriade (10000). Che i Greci non si siano arrestati a questo limite, lo afferma un poligrafo del V sec. dell'E. v., MARZIANO CAPELLA (2); come lo sorpassarono non è insegnato da alcun antico scrittore; ma il procedimento a cui si attennero è probabilmente quello che il Venerabile BEDA (IX sec. E. v.) descrive nel trattato *De loquela per gesta digitorum* e nel quale si usa porre le mani sul capo o sul seno. Più minuti particolari non ci interessano; ma rilevante per noi è il fatto che i Greci ben presto si avvidero della complicazione dei procedimenti digitali e ricorsero ad

(1) Op. cit., p. 146-152.
(2) *De Nuptiis*, L. VIII, p. 244 dell'ed. curata dal GROZIO nel 1599.

altri espedienti. Primo di questi è l'impiego delle pietruzze (*calculi* dei latini, donde deriva la parola « calcolo »), che si trova menzionato, a tacere di innumerevoli altri luoghi, nel passo delle *Vespe* di ARISTOFANE che citammo nel n. prec. Per effettuare in tal modo le operazioni aritmetiche era in uso, almeno a partire dal III sec. a. C., una tavola, detta ἄβαξ o ἀβάκιον (parola di origine semitica, donde deriva la nostra parola « abaco » nel senso di « ausiliare pel calcolatore ») sulla quale i gettoni venivano allineati in tante orizzontali (1) ; è in sostanza il metodo che nel Medio Evo ebbe tanta diffusione sotto il nome di *numeratio calcularis*. Quello che va avvertito si è che tutti i tentativi fatti sino ad ora per dimostrare nei Greci la conoscenza di macchine aritmetiche, somiglianti a quelle sfruttate da quasi tutti i popoli civili moderni, debbono giudicarsi per non riusciti ; può darsi che ad essi non siano rimaste ignote, ma nulla autorizza ad affermarlo con sicurezza. Tutt'al più si può ritenere che, coll'andare del tempo, sulla tavola per calcolare sia stato sparso uno strato di polvere, su cui scrivere segni rappresentanti i numeri ; ma ciò non può essere accaduto che posteriormente all'invenzione della numerazione scritta, a cui ora ci volgiamo.

Numerazione scritta.

5. - Il modo più semplice e naturale per indicare un numero (tanto semplice e naturale che venne adottato anche da popoli differentissimi (2) e non è ancora completamente scomparso (3)) consiste nel ripetere un medesimo segno (un tratto od un punto) tante volte quante sono le unità conte-

(1) Per la derivazione della parola ἄβαξ, veggasi TH. H. MARTIN, *Les signes numéraux et l'arithmétique*, etc., p. 290 (Annali di matematica, T. V, 1863).

(2) Cfr. Y. MIKAMI, *The influence of abaci on the Chinese and Japonese mathematics* (Jahresber. der Deutsch. Math. Ver., T. XX, 1911), p. 381.

(3) I Cinesi moderni se ne servono tuttora: v. UNGER, *Grundzüge der Geschichte der elementaren Arithmetik*, I Thl. Leipzig, 1883, p. 5.

nute in quel numero (1): che i Greci se ne siano serviti attesta una iscrizione, che risale al 391 a. C., ove trovasi il seguente passo:

ἔτεος | | | | | | (2);

inoltre tale uso viene esplicitamente dichiarato da GIAMBLICO (3).

Questo metodo primitivo di numerazione scritta diviene impraticabile per numeri un po' grandi; non solo lo scriverli riesce fastidioso, ma il leggerli è difficilissimo. Perciò venne surrogato da un altro, che già vedemmo usato da ERODOTO; quello, cioè, di indicare ogni numero colla parola adoperata per esprimerlo (4). Tale sistema ben presto subì una semplificazione spontanea: quella che consiste nello scrivere, invece che questi nomi per esteso, soltanto le loro iniziali. Siffatto concetto, così naturale che sarebbe vano ogni tentativo per determinarne l'inventore, è il fondamento del primo sistema di numerazione scritta, di cui gli Ellèni si servirono. Nel quale, infatti, le lettere

Ι , Π , Δ , Η , Χ , Μ

sono adoperate per indicare rispettivamente i numeri

1 , 5 , 10 , 10 , 1000 , 10000;

(1) A questo sistema fa allusione NICOMACO DA GERASA (v. più avanti, n. 30) nell'esordio del VI Cap. del II Lib. dell'*Aritmetica*; ove si legge: "Anzitutto bisogna riconoscere che ogni lettera indicatrice di un numero, ad es. ι per 10, κ per 20, ecc., per volere dell'uomo e per convenzione, serve a rappresentare quel numero: ma il mezzo naturale, meno artifizioso, epperò più semplice, per indicare i numeri sarebbe l'enumerazione delle unità ivi contenute. Così indicando l'unità con α, α designerebbe *uno*: scrivendo due unità, cioè αα si rappresenterebbe *due*, ecc. Solo così si potrebbero rappresentare i numeri piani e solidi, e dichiararne la natura".

(2) M. CANTOR, *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*. Halle, 1863, p. 113.

(3) NESSELMANN, *Die Algebra der Griechen*. Berlin, 1842, nota 43.

(4) È il concetto stesso che generò le cifre arabico-persiane dette Dîvânî; cfr. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I, 3ª ed., p. 709.

la scelta della prima fra tali lettere fu fatta ispirandosi all'antico sistema dei tratti verticali (v. sopra); la scelta della quarta fu suggerita, secondo la congettura del WALLIS (1), da ciò che in origine per indicare il *cento* serviva la parola Ἑκατόν; e l'elezione delle altre ha per base la considerazione delle iniziali delle parole Πέντε, Δέκα, Χίλιοι, Μυριοι. Il segno Γ, che talvolta trovasi invece di Π, non è altro che una illecita deformazione di questa lettera. Mediante questi simboli se ne costruiscono altri per indicare i numeri

$$50 \ , \ 500 \ , \ 5000 \ , \ 50000$$

ponendo risp. le lettere Δ , H , X , M fra le due aste verticali delle lettere Π. Giustapponendo i nuovi simboli agli antichi è evidentemente possibile di rappresentare qualunque numero; il modo con cui la sovrapposizione vien fatta si apprende dai documenti superstiti, i quali però dimostrano che questo sistema non fu applicato sempre rigorosamente sotto questa forma; le varianti (2) interessano il paleografo e l'epigrafologo, non il matematico.

6. - Il sistema di numerazione scritta delineato nel n. precedente si vede applicato in una celebre tavola marmorea trovata a Salamina nel 1846 (3); esso porta di consueto il nome di ERODIANO (circa 170-240 dell'E. v.), in memoria del grammatico e storico greco, che per primo metodicamente lo espose, desumendolo dall'esame di antiche iscrizioni (4); ma esso venne, in processo di tempo, abbandonato in generale perchè incomodo nelle circostanze più comuni e se ne riserbò l'uso nelle epigrafi (5): si posero in

(1) *Opera mathematica*, T. I. Oxoniae, 1695, p. 45.

(2) Cfr. WOISIN, *De Graecorum notis numeralibus*. Kiliae, 1886, pag. 27.

(3) RANGABÉ e VINCENT in *Revue archéologique*, 1846, p. 296 e 401; A. NAGL, *Die Rechnenmethoden auf dem griechischen Abakus* (Abh. zum Gesch. der Mathem., IX Heft, 1899). Cfr. M. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I, 3ª ed., p. 132. GOW, *A short History of Greek Mathematics*. Cambridge, 1884, p. 33-37.

(4) Veggasi il brano riferito dallo STEPHANUS nell'appendice al *Thesaurus linguae graecae*, T. V, p. 205 e seg.

(5) Similmente in Europa, dopo l'introduzione delle cifre arabe, i numeri Romani sono adoperati soltanto nell'epigrafia.

sua vece altri nei quali alle lettere dell'alfabeto vengono attribuiti significati e valori di numeri.

Il primo di questi nuovi sistemi consiste nella semplice convenzione di indicare i primi 24 numeri della serie naturale con le 24 lettere dell'alfabeto ionico, prese nel loro ordine naturale.

La nessuna elasticità di tal metodo lo fece ben tosto abbandonare per un altro in cui i 27 numeri 1 , 2 , ... , 9 , 10 , 11 , ... , 90 , 100 , ... , 900 sono indicati con le lettere dell'alfabeto ionico, al quale sono aggregati i tre episemi (ἐπίσημα). La corrispondenza stabilita fra numeri e lettere è indicata dalla tabella seguente:

1 = α ,	2 = β ,	3 = γ ,	4 = δ ,	5 = ε ,
6 = ϛ (στίγμα) ,		7 = ζ ,	8 = η ,	9 = ϑ
10 = ι ,	20 = κ ,	30 = λ ,	40 = μ ,	50 = ν ,
60 = ξ ,	70 = ο ,	80 = π ,	90 = ϟ (κόππα)	
100 = ϱ ,	200 = σ ,	300 = τ ,	400 = ϱ ,	500 = φ
600 = χ ,	700 = ψ ,	800 = ω ,	900 = ϡ (σαμπῖ) ;	

i numeri dall'1 al 9 venivano detti (1) μοναδικοί ἀριθμοί, dal 10 al 90 δεκαδικοί e dal 10 al 900 ἑκατονταδικοί.

Col mezzo di questi caratteri si potevano esprimere tutti i numeri di tre cifre, ponendo di regola prima il numero delle centinaia, poi quello delle decine e da ultimo quello delle unità, ordine questo conforme ad un principio generale scoperto da H. HANKEL (2), che governa in generale le numerazioni scritte conosciute ; così, per indicare il numero

(1) RABDA-TANNERY, p. 144.

(2) Tale principio afferma che in tutti i sistemi fondati sulla giustapposizione di caratteri indicanti numeri di ordini differenti, quelli di ordine superiore stanno prima (nel senso in cui procede la scrittura) di quelli di ordine inferiore. Cfr. HANKEL, op. cit., p. 32. Il WOISIN (p. 16 dello scritto succitato) ha giudicata falsa la legge di HANKEL, il che ci sembra esagerato; tuttavia crediamo, ora come molti anni or sono (v. *Biblioteca mathematica*, 1889, p. 120), che sarebbero assai utili studi intesi a determinare il campo di applicabilità della legge suddetta.

783, un antico greco evrebbe scritto ψπγ. Per evitare poi gli equivoci, che avrebbero potuto nascere scambiando i numeri con parole, si soleva porre sui numeri un tratto orizzontale od anche un tratto seguito da un accento (1): quindi propriamente (per riprendere l'esempio precedente) il simbolo di 783 è $\overline{\psi\pi\gamma}$. Aggiungiamo che talora, per iscopi mnemonici, la decomposizione in centinaia, decine, unità veniva surrogata con altre; a dimostrarlo valga il seguente esempio sorto dal desiderio di ricordare con la parola il numero dei giorni dell'anno solare:

$$\nu\varepsilon\iota\lambda\circ\varsigma = 50 + 5 + 10 + 30 + 70 + 200 = 365.$$

L'ambiente aritmetico, a cui si estende l'or delineato sistema di numerazione scritta (2), si manifestò ben presto assai limitato, innumerevoli essendo le contingenze in cui si dovettero considerare numeri superiori a 999. Per estenderne la portata si convenne di indicare con opportuni apici (a destra ed in basso) i primi nove multipli di 1000, di porre cioè:

$$1000 = {}_{1}\alpha\ ,\ 2000 = {}_{1}\beta\ ,\ 3000 = {}_{1}\gamma\ ,\ \ldots\ ,\ 9000 = {}_{1}\vartheta\ ;$$

si ottennero così i χιλιονταδικοί ἀριθμοί (3), e si giunse a rappresentare tutti i numeri inferiori a 10000. Similmente si pose

$$100000 = {}_{1}\iota\ ,\ 200000 = {}_{1}\varkappa\ ,\ 300000 = {}_{1}\lambda\ ,\ \ldots\ ,\ 900000 = {}_{1}\overline{\vartheta},$$
$$1000000 = {}_{1}\varrho\ ,\ 2000000 = {}_{1}\sigma\ ,\ 3000000 = {}_{1}\tau\ ,\ \ldots\ ,\ 9000000 = {}_{1}\overline{\vartheta},$$

(1) Heiberg in *Philologus*, T. XLIII, 1884, p. 329.

(2) Eguale estensione possiede un sistema di numerazione segnalato dall'Heilbronner (*Historia matheseos universae*, Lipsiae, 1742. p, 735; cfr. Nesselmann, op. cit., p. 83-84), nel quale si usano dei curiosi segni speciali, formati ciascuno da un tratto verticale a cui si uniscono dei tratti secondari in alto a destra per le unità, in alto a sinistra per le decine, in basso a destra per le centinaia ed in basso a sinistra per le migliaia. Crediamo estraneo al còmpito nostro l'arrestarci sopra questo sistema, perchè, se ne è dubbia l'origine (Friedlein, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und der Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert*, Erlangen, 1869, p. 11), è certo che non appartiene al popolo di cui ci occupiamo.

(3) Rabda-Tannery, p. 144.

e si fu in grado di scrivere tutti i numeri inferiori a dieci milioni; ad esempio:

$$\overline{{}_{\iota}\psi\ {}_{\iota}\pi\ {}_{\iota}\gamma\ \upsilon\nu\vartheta} = 783459.$$

Invece di adoperare gli apici anche per indicare i numeri superiori a 10000, altri raggiunse lo stesso intento con un altro metodo: si indicò con la lettera M o la sillaba Mυ (scritta talora $\overset{\upsilon}{\mathrm{M}}$) il numero 10000 (μυριάδες) e si considerò ogni numero superiore a 10000 come un multiplo di questo più un numero inferiore allo stesso; così (attenendoci all'esempio precedente) considerando essere

$$783459 = 78 \text{ miriadi} + 3459$$

si scrisse

$$\overline{\text{οη M . }{}_{\iota}\gamma\upsilon\nu\vartheta} \qquad \text{oppure} \qquad \overline{\text{οη Mυ . }\gamma\upsilon\nu\vartheta}$$

A questo metodo alcuni arrecarono delle modificazioni, o surrogando la lettera M (o la sillaba Mυ) con un semplice punto (esempi di questo sistema s'incontrano in Diofanto), o scrivendo il numero delle miriadi sopra la lettera M; esempi di numeri scritti come segue

$$\begin{array}{l}\text{οη}\\ \overline{\text{M }{}_{\iota}\gamma\upsilon\nu\vartheta}\end{array}$$

sono frequenti in Eutocio ed anche in Diofanto. In luogo della lettera M un papiro recentemente scoperto (1), e di cui avremo da occuparci a più riprese, porta uno dei tre segni seguenti:

$$\underset{\cdot}{\mathrm{I}}\ ,\quad \underset{\circ}{\alpha}\ ,\quad \underline{\alpha}\ .$$

L'estensione così acquisita dal primitivo sistema di numerazione è sufficiente nelle circostanze comuni; ma, per la perfezione teorica di esso, era necessario liberarlo dai limiti ad esso imposti: come più tardi e per opera di chi

(1) J. Baillet, *Le papyrus mathématique d'Akmîm.* Paris, 1892, p. 8.

siasi raggiunto questo intento, vedremo fra breve (n. 8 e 9); prima è necessario che brevemente trattiamo la questione delle origini del sistema esposto.

7. - Esso presenta un'analogia sostanziale con quello adoperato dagli Ebrei e dagli Arabi (1), onde per molto tempo si è creduto che i Greci avessero abbandonato il sistema ricostruito da ERODIANO, quando vennero a conoscere quello in uso presso i popoli dell'Oriente; e si è considerato siccome una conferma a tale congettura l'uso dei tre *episemi*, detriti di un antico alfabeto, non adoperato in tempi storici dagli Ellèni. Ma contro di esse vennero addotti i fatti seguenti (2): 1.° L'alfabeto greco deriva da quello fenicio (cfr. p. 740), ma i Fenici non si servirono mai delle lettere dell'alfabeto per indicare i numeri. 2.° Presso gli Ebrei le lettere nel significato di numeri si trovano bensì nei *sicli* (monete) di SIMONE MACCABEO (141-137 a. C.), ma nulla autorizza a farlo risalire ad un epoca anteriore; per converso esistono presso i Greci prove indiscutibili dell'antichità dell'impiego delle lettere per designare i numeri. 3.° L'alfabeto ebraico, contenendo soltanto 22 lettrre, si prestava meno ancora di quello greco alla designazione di numeri. Per tali ragioni, ricordando inoltre la costante tendenza degli scritti biblici a far credere tutto estremamente antico e prettamente autoctono, si concluse a ragione essere assai più probabile che i Greci abbiano essi stessi inventato il sistema numerale dianzi descritto e che l'abbiano poi insegnato agli Ebrei ed agli Arabi.

Accettata o non questa conclusione, resta il problema: a quale epoca risale tale invenzione? Tale questione è tanto importante quanto ardua. Per avvicinarsi alla sua soluzione, si noti che i canti dell'*Illiade* vennero numerati da ZENODOTO (il quale fiorì circa nel 280 a. C.) col mezzo delle 24 lettere dell'alfabeto ionico, e che lo stesso procedimento venne applicato alle opere di ARISTOTELE. D'altronde l'uso degli episemi (lettere abbandonate e per la circostanza esumate)

(1) Cfr. MONTUCLA, *Hist. des Math.*, T. I, 2ª éd., p. 46, e NESSELMANN, p. 78-79, ove sono messi di fronte i segni numerali che usano i Greci, gli Ebrei e gli Arabi.

(2) Gow, op. cit., p. 43-48.

fa credere che quel sistema sia stato, non già una produzione popolare, ma piuttosto frutto degli studi di qualche erudito archeologo. Se, ora, si tien conto del tempo in cui vennero scritti i più antichi papiri ove quel sistema si vede applicato, si arriva a concludere, che, contrariamente a quanto erasi prima ritenuto, tale sistema abbia vista la luce in Alessandria, non prima del III sec. a. C., cioè ai tempi di TOLOMEO FILADELFO (1).

In accordo con tale determinazione cronologica sta il fatto che il perfezionamento ulteriore che (come stiamo per esporre) il sistema medesimo ricevette è opera di due scienziati appartenenti al periodo aureo della geometria greca; sicchè si direbbe che la questione di stabilire una buona numerazione scritta sia stata prima posta e poi conservata all'ordine del giorno durante il periodo greco-alessandrino.

Le "ottadi„ di Archimede.

8. - Il sistema di numerazione dei Greci acquistò illimitata potenza per opera di ARCHIMEDE, il quale a tale questione dedicò uno scritto *ad hoc*, diretto a ZEUSIPPO ed intitolato *Principi* (Ἀρχαί). Tale lavoro andò sgraziatamente perduto, ma perduto non andò il frutto delle speculazioni archimedee, la cui quintessenza è consegnata in un'opera a noi già nota (v. p. 488), quella cioè intitolata nell'originale Ψαμμίτης e nelle prime traduzioni latine *De numero arenae*; noi la designeremo, ora come già facemmo in passato, col nome di *Arenario*, derivato da quello (*Arenarius*) usato dal WALLIS.

Ricordiamo che lo scopo immediato che si propose conseguire con quest'opera il sommo Siracusano è di sradicare il pregiudizio, allora diffusissimo, che il numero dei grani

(1) Questa tesi venne sostenuta dal Gow nel c. l. e poi accolta dai giudici più competenti in materia: veggansi infatti le recensioni dell'opera del Gow fatte da P. TANNERY (Bulletin des Sciences math., 2ª Serie, T. IX, I Partie, p. 160-161), M. CANTOR (Zeitschr. f. Math. und Phys., T. XXX, hist.-lit. Abth., p. 122-127) e S. GÜNTHER (Jahrb. über die Forschritte der Math., T. XVI, p. 3-6). Vedi anche CANTOR, *Vorl. über Gesc. der Math.*, T. I, 3ª ed., pag. 125.

di sabbia sparsi sulla terra fosse infinito (1); gli elementi astronomici della dimostrazione da lui congegnata vennero da noi già enumerati; gli ingredienti aritmetici invece sono racchiusi nel seguente brano:

Furono dati nomi ai numeri sino ad una miriade ed al di là di una miriade i nomi che si diedero sono abbastanza noti; non si fece che ripetere una miriade sino a dieci mila miriadi (2). Orbene i numeri ora indicati e che vanno sino ad una miriade di miriadi siano chiamati numeri *primi* (πρώτοι), mentre una miriade di miriadi di numeri primi sia chiamata unità dei numeri *secondi* (3). Contiamo mediante tale unità per decine, centinaia, migliaia e miriadi di queste unità sino ad una miriade di miriadi. Una miriade di miriadi di numeri secondi sia chiamata unità dei numeri *terzi* (4). Contiamo col mezzo di queste unità per decine, centinaia, migliaia e miriadi di queste unità sino ad una miriade di miriadi; una miriade di miriadi di numeri terzi sia chiamata unità dei numeri *quarti* (5), una miriade di miriadi di numeri quarti sia detta unità dei numeri *quinti* (6), e continuiamo a dare siffatti nomi ai numeri seguenti (7) sino alle miriadi di miriadi di numeri centomilionesimi (8). — Abbenchè questa massa di numeri possa bastare, si può spingersi più innanzi. Infatti i numeri di cui abbiamo parlato si chiamino *numeri del primo periodo* e all'ultimo di essi (9) si dia il nome di *unità dei numeri primi del secondo periodo.* Poi una miriade di miriadi di numeri primi del secondo periodo sia chiamata *unità dei numeri secondi del*

---

(1) Ci sembra non privo d'interesse notare come la questione di contare il numero dei pulviscoli sia eziandio accennata in parecchi passi della *Bibbia.*

(2) V. p. 752.

(3) Esiendo un miriade $= 10^4$, i numeri *primi* sono tutti quelli compresi fra 1 e $10^8 - 1$, i limiti inclusi, e 10^8 è l'unità dei numeri *secondi.*

(4) Esso vale $10^8 \cdot 10^7 = 10^{2 \cdot 8}$.

(5) Il suo valore è $10^8 \cdot 10^{2 \cdot 8} = 10^{3 \cdot 8}$.

(6) È espressa da $10^8 \cdot 10^{3 \cdot 8} = 10^{4 \cdot 8}$.

(7) L'unità dei numeri n^{mi} è $10^{(n-1)8}$.

(8) L'ultimo dei numeri considerati da ARCHIMEDE è pertanto $10^{8 \cdot 10^8}$, cioè il numero che noi scriviamo 1 seguito da 800 milioni di zeri.

(9) Cioè al numero $10^{8 \cdot 10^8}$.

secondo periodo (1). Una miriade di miriadi numeri secondi del secondo periodo si consideri come *unità dei numeri terzi del secondo periodo* (2). E seguitiamo a dare dei nuovi nomi analoghi a tutti i numeri seguenti (3) sino a quelli dell'ordine centomilionesimo (4). Inoltre l'ultimo numero del secondo periodo venga denominato unità dei numeri primi del terzo periodo e continuiamo così (5) sino al periodo centomilamilionesimo (6).

Qui ARCHIMEDE si arresta, ma evidentemente il suo modo di procedere potrebbe venire spinto oltre senz'alcun limite. Egli, infatti, aggiunge:

Denominati così i numeri, se dei numeri continuamente proporzionali, a partire dall'unità sono collocati uno di seguito all'altro e se il numero più prossimo all'unità è 10, gli otto primi numeri, compresa l'unità (7), saranno quelli che chiamammo numeri *primi*: gli otto seguenti saranno quelli che dicemmo *secondi,* e gli altri saranno denominati nello stesso modo a norma della distanza fra la loro ottade (ὀκτάδος) e

---

(1) Essa è eguale a $10^8 \cdot 10^{8 \cdot 10^8} = 10^{8(10^8+1)}$.

(2) Vale $10^8 \cdot 10^{8(10^8+1)} = 10^{8(10^8+2)}$.

(3) Le unità successive hanno tutte le forme

$$10^{8n} \cdot 10^{8 \cdot 10^8}.$$

(4) L'ultimo numero nasce facendo $n = 10^8$ nella formola della nota precedente onde vale

$$10^{8 \cdot 10^8} \cdot 10^{8 \cdot 10^8} = 10^{2 \cdot 8 \cdot 10^8}.$$

(5) L'unità dell' $(n+1)^{mo}$ periodo sarà

$$10^{n \cdot 8 \cdot 10^8}.$$

(6) L'ultimo numero a cui si perviene è espresso da

$$10^{8 \cdot 10^{2 \cdot 8}},$$

che si ottiene facendo $n = 10^8$ nella formola della nota precedente. Per esprimerlo nel nostro sistema bisognerebbe scrivere 1 seguito da 80000 milioni di milioni di zeri.

(7) Cioè $1, 10, 10^2, \ldots, 10^7$.

quella dei numeri primi. Perciò l'ottavo numero della prima ottade sarà mille miriadi, mentre il primo della seconda, essendo il decuplo del precedente sarà una miriade di miriadi: l'ultimo numero della seconda ottade sarà mille miriadi di numeri secondi, e finalmente il primo numero della terza ottade, essendo il decuplo del precedente cioè una miriade di miriadi di numeri secondi. È pertanto evidente che esisteranno quante si vogliano ottadi (1).

Per facilitare il computo con questi numeri ARCHIMEDE espone un teorema che noi esprimeremmo coll'identità: $10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$ (2); applicando esso e tutti gli altri principi geometrici, astronomici ed aritmetici da lui previamente stabiliti, il celebre geometra giunge a concludere esistere un numero inferiore a 10^{63}, rappresentante il numero dei grani di sabbia che capirebbero in una sfera concentrica alla terra e giungente alle stelle fisse. E finisce dicendo:

Io penso, o GELONE (3), che queste cose sembreranno poco credibili a quelli che non sono versati nelle matematiche; ma appariranno dimostrate a coloro che coltivarono queste scienze e si applicarono a conoscere le distanze e le grandezze della terra, del sole, della luna e del mondo intero.

Ed invero nessuno può negare che ARCHIMEDE abbia conseguito l'intento che si era prefisso: ma egli fece ancor ben più; coll'*Arenario* egli insegnò ai suoi connazionali, rifuggenti dal considerare numeri grandi, che questi sono enti aritmetici trattabili al pari di quelli che li precedono nella serie naturale; inoltre rivolse la loro attenzione verso l'infinitamente grande aritmetico, come, coltivando il metodo

---

(1) Una qualunque è del tipo seguente:

$$10^{8k} \ , \ 10^{8k+1} \ , \ \ldots \ , \ 10^{8k+7} \ (k = 1 \ , \ 2 \ , \ \ldots)$$

(2) Questo teorema, il quale abilita a surrogare una moltiplicazione con una addizione, venne da taluni considerato come germe della teoria dei logaritmi; anzi alcuni spinsero la cosa al punto da chiamare *di Archimede* i logaritmi a base 10: v. p. 72 della Dissertazione di S. CANOVAI che segue il suo *Elogio di A. Vespucci*, stampato a Firenze nel 1788; inoltre una nota del DELAMBRE in *Oeuvres d'Archimède*, trad. PEYRARD, T. II, Paris, 1808, p. 428.

(3) Personaggio a noi già noto (v. p. 281).

di esaustione, li aveva resi famigliari coll'infinitamente piccolo geometrico. Basti questo a dimostrare come l'*Arenario*, ultima fra le produzioni autentiche che dovremo considerare della vittima di MARCELLO, meriti un posto cospicuo non solo nella raccolta delle opere di ARCHIMEDE, ma eziandio nella letteratura matematica dei Greci.

Le " tetradi „ di Apollonio.
Il preteso 0 dei Greci.

9. - L'*Arenario* ci si presenta come un lavoro si bene architettato, le indagini aritmetiche ivi consegnate sono condotte in modo così esauriente, che non deve far meraviglia il non avere ARCHIMEDE trovati imitatori o seguaci. Il campo sembrava così esausto dopo il passaggio dell'abilissimo coltivatore, la miniera si presentava talmente povera di metallo dopo il soggiorno del Siracusano, che pochi devono essersi sentiti incoraggiati a seguirne le orme. Tuttavia PAPPO ha commentato, nel II Libro della sua *Collezione matematica* (1), un'opera aritmetica di APOLLONIO PERGEO, nella quale la distribuzione in gruppi di tutti i numeri immaginabili proposta da ARCHIMEDE viene un po' modificata. Se quest'opera apolloniana fosse, come taluno crede (2), quella da EUTOCIO citata sotto il nome di Ὠκυτόκιον (3) ed avente

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 2-28, e 1212-1217. Nel giudicare il contenuto di questa parte della *Collezione* bisogna tener conto di due fatti; cioè che PAPPO non distingue quello che toglie da APOLLONIO da ciò che aggiunge del suo, e che quella parte è assai deturpata e corrotta. Si veggano le correzioni proposte dal NESSELMANN (*Die Alg. der Griechen*, p. 129) e discusse da P. TANNERY (*L'arithmétique des Grecs dans Pappus*, Mém. de la Societé de Bordeaux, II Serie, T. III, 1880, p. 355-356).

(2) HEIBERG, *Philologus*, T. XLIII, 1884, p. 488. Non dissimile è il parere del FRIEDLEIN (op. cit., p. 78), secondo cui l'Ὠκυτόκιον avrebbe contenuto le tavole di moltiplicazione, applicate poi al calcolo del rapporto della circonferenza al diametro. Per altre congetture sul contenuto di quell'opera, veggasi il § dell'articolo di F. HULTSCH, *Zur Kreismessung des Archimed* (Zeitschrift für Math. und Phys., T. XXXIX, 1894).

(3) ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. III, p. 300.

per iscopo di spingere l'approssimazione di π oltre il limite raggiunto da ARCHIMEDE, non possiamo asserire come (se escludiamo tale identità), non possiamo accertare le relazioni che avrebbero esistito fra le eventuali due opere del celebre Pergeo. Quello che va osservato si è che il lavoro illustrato da PAPPO doveva venire ritenuto come classico nell'antichità, dal momento che questo commentatore, designandolo due volte come στοιχεῖον, lo pone allo stesso livello degli *Elementi* di EUCLIDE (cfr. p. 194).

La modificazione al metodo di ARCHIMEDE insegnata nel frammento superstite nel II Libro della *Collezione* consiste nel surrogare le « ottadi » del Siracusano con periodi minori detti « tetradi ». In conseguenza i numeri compresi fra 1 e 10000 si riguardavano come costituenti una classe i cui elementi erano detti μονάδες ed indicati col segno μ^{α}. I multipli di 10000 non superiori a 10000^2 si ritenevano come costituenti una seconda classe di numeri, indicati col nome di μυριάδες ἁπλαῖ e col simbolo μ^{β}. Similmente i multipli di 10000^2 non superiori a 10000^3 si consideravano come appartenenti ad una terza categoria di numeri chiamati μυριαδές διπλαῖ e rappresentate col simbolo μ^{γ}; e così via dicendo. In conseguenza ogni numero veniva scritto sotto la forma $\Sigma A_r \,.\, \overline{10000}^r$, ove gli A_r sono numeri interi inferiori a 10000; parecchi esempi del modo in cui venivano scritti i numeri in base a questo procedimento sono offerti da PAPPO (1).

Da tutto ciò emerge che a base del sistema di APOLLONIO sta lo stesso concetto che usò ARCHIMEDE. Ad APOLLONIO, però, spetta il merito di avere adattate le considerazioni esclusivamente teoriche di ARCHIMEDE alle esigenze della pratica, estendendone la portata dalla numerazione parlata alla numerazione scritta. A ciò si deve probabilmente l'avere il procedimento apolloniano finito per trionfare su quello archimedeo.

La persistenza di quello è dimostrata da una serie di simboli numerali che un noto umanista, G. CAMERARIO (1500-1574), segnalò (2), che venne poi giudicata parto di ricopia-

(1) PAPPO ed. HULTSCH, p. 24.

(2) *De graecis latinisque numerorum notis*, etc. Lipsiae, 1569; cfr. NESSELMANN, op. cit., p. 81.

tori moderni (1) inspirandosi all'esempio degli Ebrei (2), ma che oggi si deve considerare come appartenente alla letteratura greca, dopo che la si trovò adoperata nei manoscritti delle *Lettere* del RABDA (3). Esso consiste nell'indicare un multiplo di 10000 ponendo due punti al disopra del numero corrispondente; ponendone quattro si indica un multiplo di 10000^2, ponendo sei uno di 10000^3, ecc.; si ha ad esempio:

$$\ddot{\beta} = 20000 \quad ; \quad \overset{::}{\delta} = 4000000000 \quad ; \quad \overset{:::}{\alpha} = 1000000000000 \text{ (4).}$$

10. - Prima di chiudere questa esposizione dei segni numerali in uso presso gli antichi Greci, non possiamo esimerci dal far cenno di una questione importante sollevata dal DELAMBRE, e cioè la seguente: ebbe quel popolo cognizione dello *zero*? Ad essa il celebre astronomo, fedele alla sua tendenza di attribuire agli antichi molte nozioni possedute dai moderni, era convinto si potesse dare risposta affermativa (5), e si credette poi autorizzato a pronunciarsi in questo senso, dopo di avere rilevato che, nell'*Almagesto*, TOLOMEO, quando ha da indicare un angolo col metodo sessagesimale, scrive o ogniqualvolta nella misura di esso angolo mancano i minuti, o i secondi. Il perchè di tale uso di quel segno fu trovato dal DELAMBRE in ciò che questa lettera, significando 70, non riceve applicazioni quando si usino frazioni sessagesimali, essendo un numero di minuti o di secondi al massimo 59. L'opinione del DELAMBRE, probabilmente per la grande autorità di chi la sostenne, venne generalmente accettata in Francia (6). Tuttavia la debolezza

(1) FRIEDLEIN, op. cit., p. 11.

(2) UNGER, *Grundzüge der Geschichte der elementaren Arithmetik*, I Tl. Leipzig, 1883, p. 8.

(3) RABDA-TANNERY, p. 146.

(4) È forse a questo sistema che si inspirò NEWTON nel proporre il suo sistema di notazioni per le flussioni successive di una stessa quantità?

(5) " Sans doute Archimède avait un caractère qui lui tenait lieu de notre zéro „. *Oeuvres d'Archimède*, trad. PEYRARD, T. II Paris, 1808, p. 428.

(6) V. p. es. CHASLES, *Ap. historique*, II ed., Paris, 1875, p. 475-6 VINCENT in *Journ. de math. pures et appliquées*, T. IV, 1839, p. 267

dell'argomento, con cui egli credette dimostrarla, fu avvertita dal NESSELMANN (1), il quale fece osservare che o altro non è che l'iniziale della parola οὐδέν (nulla), naturalmente chiamata a segnalare l'assenza di gradi o di frazioni di grado: osservazione questa che a ragione riscosse l'assentimento generale (2). Ma, tutti non essendo persuasi di tale replica, ad altri argomenti si ricorse, per puntellare il crollante edificio eretto dal DELAMBRE. Infatti, il sommo storico B. G. NIEBUHR (1776-1860) (3), s'illuse di trovare un argomento a favore della tesi suddetta in un palimpsesto vaticano; ma un'analisi accurata di questo (4) rivelò la fragilità di quel preteso puntello. D'altronde il CANTOR (5) dimostrò inaccettabile la spiegazione data dal BÖCKH per un passo di un'iscrizione ateniese, in cui sembrava si trovasse uno zero. Per conseguenza, in base ai documenti scoperti e decifrati sino ad oggi, siamo autorizzati a negare che i Greci usassero lo zero nel senso e nel modo in cui lo adoperiamo noi.

Frazioni.

11. - Tre sorta di frazioni s'incontrano negli scritti aritmetici dei Greci.

I. In origine, adottando il concetto costantemente in uso presso gli Egiziani, gli Ellèni adoperavano soltanto frazioni aventi per numeratore l'unità (6); consideravano, quindi, ogni numero come una somma di termini della serie, illimitata in due sensi:

$$\ldots, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots;$$

(1) Op. cit., p. 139.

(2) V.: WOEPCKE in *Journal asiatique*, VI Ser., T. I, 1863, p. 466; FRIEDLEIN, op. cit., p. 81: GOW, op. cit., p. 49: ecc.

(3) *M. Tullii Ciceronis Orationum*, etc. Roma, 1820, p. 16-17.

(4) V. una lettera dello SPEZI inserita nei *Math. Beiträge*, etc. del CANTOR, p. 386-388.

(5) *Math. Beitr.*, p. 124-126: cfr. anche FRIEDLEIN, op. cit., p. 74.

(6) Le designeremo brevemente col nome di frazioni *fondamentali*; i Greci adoperavano invece il vocabolo μόρια.

in tale costume F. HULTSCH (1) trovò la spiegazione della frase μκνάς ἐστιν εἶπον ανιθμοῦ καί μοθίων μεθόριον, attribuita ad alcuni Pitagorici (2). In casi eccezionali un numero veniva rappresentato, non con la somma di un intero e di frazioni fondamentali, ma come differenza fra interi e frazioni o tra frazioni; valgano a provarlo i due esempi seguenti tolti, il primo da ERONE (3), ed il secondo da RABDA (4):

$$\sqrt{63}\text{ circa} = 8 - \frac{1}{16} ; \frac{36}{109} \left[= \frac{1}{3}\,\frac{108}{109} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{109}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{327} .$$

Per indicare una frazione fondamentale i Greci, al pari degli Egiziani, scrivevano il denominatore (5) sormontato da un accento semplice o doppio, o da altro segno variamente conformato. Segni speciali erano riserbati (anche qui conformemente alle consuetudini egiziane) alle frazioni $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}\left(= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)$. La prima (chiamata ἥμισυ) era indicata, come praticavano gli Etruschi (6), con un simbolo speciale variabile da manoscritto a manoscritto, ma che in generale è simile ad un angolo ottuso aperto verso destra e coi lati non rigorosamente rettilinei oppure all'antica sigma (ς). La genesi di tal segno non è nota; taluni lo considerano come proveniente dal dimezzamento del simbolo O, usato dagli

---

(1) *Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung*, I Abhand. (Abh. d. k. Sächs. Ges. der Wiss., T. XVII, 1895), p. 22.

(2) *Iamblici in Nicomaci Arithmeticam Introductionem Liber*, ed. PISTELLI. Lipsiae, 1894, p. 11, linee 10-11.

(3) *Heronis Alex. geom. et ster. reliq.*, ed. HULTSCH, Berolini, 1864, p. 163.

(4) RABDA-TANNERY, p. 169.

(5) I Greci consideravano il denominatore come l'omonimo della frazione e questa per l'omonima di quello (τὸ ὁμώνυμον αὐτοῦ μόριον).

(6) Cfr. CANTOR, *Vorlesungen*, T. 1, 3ª ed.. p. 526; il simbolo etrusco è ∩.

antichi Beoti per indicare l'obolo (1). L'altra delle frazioni notevoli, cioè $\frac{2}{3}$, era indicata col nome δίμοιρον e pure con un segno particolare somigliante alla lettera ω (2), che probabilmente proviene dalla riunione del simbolo di $\frac{1}{2}$ con quello (ς) con cui designavasi $\frac{1}{6}$.

II. Il sistema delle frazioni fondamentali, malgrado gli inconvenienti che presenta, si conservò a lungo, tanto che si trova in iscritti greci sino all'epoca bizantina, quali sono la *Geometria* di G. PEDIASIMO (guardasigilli del patriarca di Costantinopeli sotto il regno di ANDROMICO II, 1328-1341) e gli scritti (di poco posteriori e tuttora inediti) di ISACCO ARGIRIO (3). Tuttavia le *Opere* di ERONE e le *Lettere* del RABDA fanno vedere come i Greci conoscessero non solo la trasformabilità di ogni quoziente in una somma di frazioni e viceversa, ma anche la utilità che tale trasformazione possiede nella pratica dell'aritmetica; cosicchè ivi le frazioni fondamentali si trovano soltanto nei dati e nei risultati. Più metodicamente si trovano usate le frazioni a numeratore qualunque in EUTOCIO e DIOFANTO; sembra però che sempre fossero riguardate come quozienti di due interi, non come numeri di specie particolare.

Per designare una frazione qualunque bisogna indicare numeratore e denominatore, ed alcuni Greci solevano scrivere semplicemente il secondo al di sopra del primo; siffatto costume è attestato dal seguente esempio

$$\frac{\iota\theta'}{\rho\pi\zeta} = \frac{187}{19},$$

che s'incontra in un manoscritto esistente ad Oxford (4). Questo metodo non differisce da quello adoperato da Dio-

(1) HEIBERG in *Philologus*, T. XLIII, 1884, p. 330.

(2) Cfr. *Diophanti Alexandrini Opera omnia*, ed. TANNERY, T. I, Lipsiae, 1893, p. 272 e 274 e T. II, Lipsiae, 1895, p. XLIII.

(3) BAILLET, op. cit., p. 37.

(4) HEIBERG, *Philologus*, T. XLIII, 1884, p. 329.

FANTO, se non per una lineetta orizzontale, che questi suol porre fra i due termini della frazione: per chiarire questo sistema citiamo gli esempi seguenti:

$$\frac{\iota\varsigma}{\varrho\varkappa\alpha} = \frac{121}{16} \text{ (DIOFANTO-TANNERY, I, 102);}$$

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{5}{4} \text{ (ivi)} \quad , \quad \frac{\iota\varsigma}{\delta} = \frac{4}{19} \text{ (ivi);}$$

$$\frac{\alpha \cdot \omega\iota\varsigma}{\iota\gamma \cdot \tau\varkappa\alpha} = \frac{130331}{10816} \text{ (Id., I, 312).}$$

Ma DIOFANTO spesso indica una frazione, facendo seguire al numero cardinale, designante il numeratore, il numero ordinale (con la particella finale ων) corrispondente al denominatore, sistema analogo al nostro di considerare una frazione qualunque come multiplo di un *quantesimo*. Ecco alcuni esempi di questo metodo:

$$\overline{\gamma\varrho\varkappa\alpha}^{\omega\nu} = \frac{3}{121} \text{ (DIOFANTO-TANNERY, I, p. 120);}$$

$$\overline{\varrho\varkappa\alpha} \cdot \overset{\Upsilon}{M}\alpha \cdot {}_{\iota}\delta\chi\mu\alpha^{\omega\nu} = \frac{121}{14641} \text{ (ivi).}$$

Una modificazione dello stesso concetto si trova in DIOFANTO stesso; il quale talvolta scrive il numeratore, poi le parole ἐν μοριῷ o semplicemente μοριον (abbreviato in μοϱ.), e quindi il denominatore: come esempio serva la frazione:

$$\overline{\tau\varsigma} \cdot \overline{{}_{\iota}\vartheta}\,\mu o\varrho \cdot \overline{\lambda\gamma} \cdot \overline{{}_{\iota}\alpha\psi o\varsigma} = \frac{3069000}{331776} \text{ (DIOFANTO-TANNERY, I, 308).}$$

Del resto va rilevato che la considerazione di una frazione come multiplo di un quantesimo si trova chiaramente già in ARCHIMEDE, il quale, al termine del suo opuscolo sulla *Misura del circolo*, scrisse δέκα οα′′ per $\frac{10}{71}$ (1).

(1) ARCHIMEDE ed. HEIBERG, T. I, p. 270, linea 9. Riguardo a queste notazioni va in generale osservato che nulla abilita a decidere se esse appartengono tutte agli autori o a posteriori amanuensi.

Più originali sono le due seguenti notazioni che si incontrano in ERONE (1).

$$\beta' \varepsilon'' \varepsilon'' = \frac{2}{5} \quad ; \quad \gamma' \delta'' \delta'' = \frac{3}{4} .$$

Una circostanza che va notata è che gli antichi non consideravano come obbligo del calcolatore il ridurre un numero frazionario alla sua più semplice espressione; lo provano due passi dell'*Aritmetica* di DIOFANTO, ove, come valori dei numeri cercati sono dati rispettivamente

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{4}{8} \qquad \text{e} \qquad \frac{\eta}{\beta} = \frac{2}{8} .$$

III. I Greci, nell'astronomia matematica, seguendo l'esempio dato dai Babilonesi, adoperarono, almeno a partire da IPSICLE (v. p. 504), un sistema di frazioni di cui l'*Almagesto* serbò notizia e che noi chiameremo *sessagesimali* (2). L'origine di esso sta nell'abitudine di dividere anzitutto la periferia di ogni cerchio in 360 parti, chiamate da TOLOMEO, una volta (3) τμήματα, ma di regola μοῖραι (lat. *partes*); ogni parte veniva divisa in 60 porzioni minori chiamate ἑξηκοστά o anche λεπτά (lat. *minuta*); le nuove parti si scomponevano alla lor volta ciascuna in 60 δεύτερα ἑξηκοστά (lat. *secunda*), ognuna di queste in 60 τρίτα ἑξηκοστά (lat. *tertia*), ecc

Per conformarsi a questo procedimento, il citato astronomo soleva dividere anche il raggio del cerchio in 60 τμήματα, su ciascuna delle quali operava la suddivisione sessagesimale. E, per indicare un numero rappresentato con tale sistema, egli scriveva prima il numero delle parti, poi quello dei minuti con un accento, quello dei secondi con due, ecc., come si pratica ancora oggi.

---

(1) ERONE ed. HUTSCH. p. 9, 158, ecc.

(2) Nel Medio Evo si chiamavano *fractiones astronomicae* o *physicae*.

(3) *Almagesto*, ed. HALMA, T. I, p. 26.

Le prime quattro operazioni aritmetiche nella logistica greca.

12. - Come alla descrizione di qualsisia strumento deve seguire la indicazione del modo in cui esso funziona, così al catalogo, che abbiamo testè redatto, del materiale aritmetico adoperato dai Greci, deve ora seguire l'esposizione del modo in cui esso veniva adoperato. Le fonti a cui ricorrere per ottenere informazioni in proposito non sono numerose nè abbondanti. Sia che la logistica venisse considerata troppo umile materia per servire di argomento a trattati speciali; sia che i Greci abbiano nell'aritmetica seguito il costume dei sacerdoti egiziani loro maestri, avvolgendo in una nube di mistero le vie che guidano alla scoperta del modo di trattare i numeri; sia infine che il trionfo del sistema decimale abbia fatto trascurare dai posteri tutto che concerneva il funzionamento di un altro sistema che era (od almeno sembrava) di tanto inferiore: fatto sta che, alla splendida fioritura di opere geometriche greche, fa triste riscontro l'assenza totale di veri manuali di calcolo (1). Sicchè, per formarsi un'idea del come procedevano i calcolatori greci, altro non vi è che spiarli e sorprenderli nel momento in cui operano: gli è perciò che possiedono un grande valore per lo storico dell'aritmetica greca le *Opere* di Erone, l'*Almagesto* di Tolomeo, il *Commento* a quest'ultimo redatto da Teone Alessandrino e finalmente alcuni Scoli al X Libro degli *Elementi* di Euclide pubblicati da J. L. Heiberg (2) e studiati da F. Hultsch (3); aggiungendo l'opuscolo sulla *Misura del circolo* di Archimede, con le relative chiose di Eutocio, i resti del II Libro della *Collezione* di

(1) Forse un tale manuale era rappresentato dai primi due libri della *Collezione* di Pappo; analogo era probabilmente uno scritto sulle frazioni attribuito a Diofanto (v. più avanti n. 30).

(2) V. *Euclidis Opera omnia*, T. V, 1883; Heiberg, *On Scholien und til Euklids Elementen* (Deutsche Videsk. Selsk. Skr.: hist. phil. Afd., VI Ser., T. II, 1888) e *Paralipomene zur Euklid.* Hermes, T. 38, 1903.

(3) *Die Sexagesimalrechnung in den Scholien zu Euklids Elementen* (Bibl. mathem., III Ser., T. V, 1904).

PAPPO e le *Lettere* aritmetiche del RABDA, avremo esaurita l'enumerazione degli scritti a noi noti a cui potremo e dovremo rivolgerci attualmente per aiuto. Ad essi vanno annessi tre altri lavori, due dei quali non ci accadde sino ad ora di nominare. Uno è un modesto quaderno scolastico, scritto da un mediocre scolaro, del secolo VI o del XII, sopra un papiro trovato nell'alto Egitto, e precisamente nella necropoli di Akhmîm (l'antica Panopoli); venne decifrato da J. BAILLET ed attualmente si conserva nel Museo di Gizeh (1); nella storia della matematica va sotto il nome di « papiro di Akhmîm ». Un secondo appartiene ad epoca posteriore essendo dovuto ad un matematico bizantino; è il *Manuale* di calcolo scritto da MASSIMO PLANUDE (2), monaco del secolo XIV (3). Il terzo è un semplice frammento segnalato da F. HULTSCH (4) e pubblicato più tardi da C. HENRY (5); chi ne sia l'autore (DIOFANTO? PAPPO? oppure un ignoto?) non sappiamo; solo possiamo dire che, se questi non scrisse altro, bene merita l'oblio in cui è caduto; se invece egli ha già un posto nella storia della matematica, la considerazione di cui gode non può essere aumentata da quel lavoro; ciò non ostante, tale è l'esiguità dei documenti a nostra disposizione, che è dovere dello storico di tenerne qualche conto.

13. - Prima di raccogliere ed ordinare le informazioni somministrateci da queste fonti (6), nell'intento di porgere

(1) V. *Le papyrus mathématique d'Akhmîm* (*Mémoires publiés par les membres de la mission archéologique française au Caire*, T. IX, 1892). Verrà citato in seguito coll'abbreviazione BAILLET.

(2) Fu edito nell'originale dal GERHARDT, Halle, 1865: noi ci riferiremo in seguito a *Das Rechenbuch des Maximus Planudes aus dem Griechischen übersetzt* von H. WÄSCHKE, Halle, 1878.

(3) Egli, nel 1327, venne a Venezia come ambasciatore: nel 1352 era ancor vivo.

(4) PAPPO ed. HULTSCH, pref. al Vol. III, p. XVI.

(5) *Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus Diophanti vel Pappo attribuendum.* Halis San., 1879). Molte e sostanziali correzioni al testo vennero indicate da F. HULTSCH in Zeitschr. für Math. und Phys., Hist.-Lit. Abth., T. XXIV, 1879, p. 199-203 e T. XXVI, 1881, p. 38-39. Secondo P. TANNERY (Id., T. XXXIX, p. 13) l'autore di detto frammento sarebbe posteriore a SIRIANO, maestro di PROCLO (V Sec. dell'E. v.).

(6) Il primo che si occupò di fare questo utile lavoro fu il DELAMBRE: le sue conclusioni sono esposte nella nota *De l'arith-*

quanto le 11 parti rimanenti. Riducendolo in primi, avremo 660. Raddoppiamo poi EZ = 67, e poichè EZ è moltiplicato per due, consideriamo ZH come prolungamento di EZ, e dividiamo i 660 primi per 134. Tale divisione dà 4 primi ed abbiamo così le due rette ET, HK. Completando i parallelogrammi TZ, ZK avremo in totale 536, cioè 268 per ciascuno di essi. Riducendo poi i restanti 121 primi in 7440 secondi, torremo il parallelo-

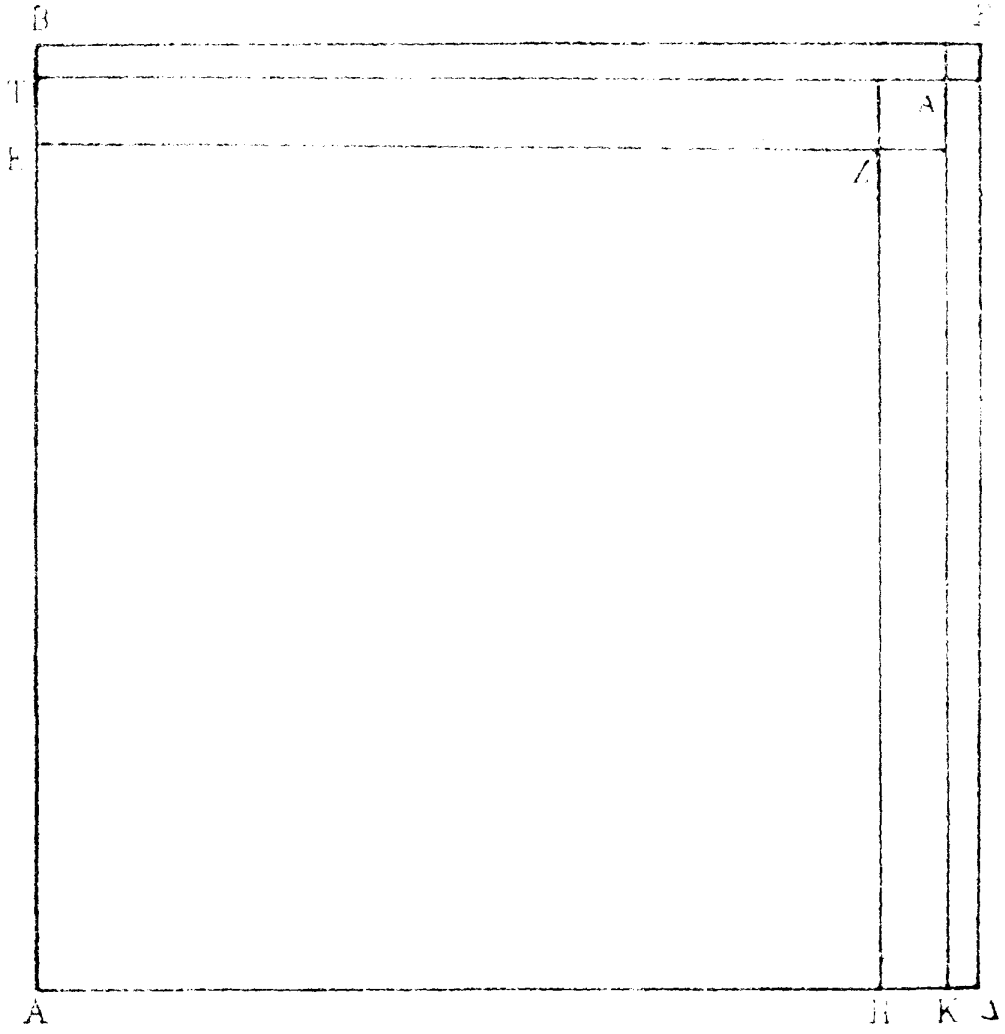


Fig. 121.

gramma ZΛ = 16 secondi; dimodochè aggiungendo il gnomone al primitivo quadrato, otterremo il quadrato ΛΛ costruito sul lato 67.4′, di 4497.56′.16″. Finalmente il gnomone residuo BΛΛ è di 2.3′.44″, cioè di 7424 secondi. Raddoppiando dunque ancora TΛ, o dividendo questi 7424 secondi per 134.8′ verrà come quoziente approssimativamente 55″, valore delle TB e KΛ. Completando i parallelogrammi BΛ e ΛΛ li avremo complessivamente di 7377 secondi e 20 terzi e ciascuno di 3688 secondi 40 terzi: restano ancora 46″.40‴ che fanno circa il quadrato

il cui lato è 55′′. Dunque il lato del quadrato ΑΒΓΔ = 4500, è circa 67.4′.55′′ (1).

Il procedimento descritto in questo brano, e che TEONE enuncia in termini generali, evidentemente non differisce nella sostanza da quello che noi adoperiamo; esso traducesi infatti nella regola seguente: « Per estrarre la radice quadratica di un numero dato N si cerchi il lato del massimo quadrato contenuto in N; si faccia la differenza fra questo e quel quadrato; si divida il resto, trasformato in secondi, pel doppio della radice trovata; il quoziente aggiunto al lato del quadrato massimo venga elevato a quadrato: ciò che risulta si tolga dal numero dato, e così si continui ». È la stessa regola che si incontra, con alterazioni senz'importanza, nel *Manuale* di MASSIMO PLANUDE (2); applicandola si giunge ai valori delle radici quadrate dei numeri da 2 a 102, espresse mediante frazioni astronomiche, fatti conoscere dall'HEIBERG in altra parte della succitata memoria.

18. - Chiuderemo questa esposizione della logistica greca con un cenno intorno alla più difficile operazione aritmetica conosciuta dagli antichi, cioè l'estrazione delle radici cubiche. Già trovammo (v. p. 660) nella *Collezione matematica* un procedimento per effettuare la « moltiplicazione del cubo », senza però potere addurre alcuna prova che PAPPO avesse ravvisato in esso un vero metodo di approssimazione. È pertanto di inestimabile valore un brano dei Μετρικά, ove ERONE calcola $\sqrt[3]{100}$; saremo perciò pienamente giustificati se presentiamo qui, dinnanzi agli occhi del lettore, questa gemma recentemente dissepolta (3):

Come poi si possa trovare la radice cubica di 100 unità, vogliamo dire ora: Prendi i due cubi più prossimi a 100 (4), il

(1) In cifre decimali il valore di questo lato è 67,07194... mentre dovrebbe essere 67,08203...

(2) P. 47-54 della citata traduzione tedesca.

(3) M. CURTZE, *Quadrat-und Kubikwurzeln bei den Griechen nach Heron's neu aufgefundenen* Μετρικά (Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. XLII, 1877, Hist.-lit. Abth., p. 113-120); *Heronis Opera* ed. SCHÖNE, T. III, pag. 179.

(4) Questa frase fa supporre che ERONE disponesse di una tavola di cubi.

maggiore ed il minore; sono 125 e 64; e determina di quanto il primo è maggiore (di 100), cioè 25, e di quanto il secondo è minore, cioè 36. Moltiplica allora 36 per 5; risulta 180. Aggiungendo 100, si ottiene 280: [dividendo 180 per 280 viene $\frac{9}{14}$]. Aggiungi questo alla radice del cubo minore, cioè a 4, e risulterà $4\frac{9}{14}$. Questa è la radice cubica di 100 con la massima esattezza possibile (1).

Secondo una congettura, mediocremente attendibile, formulata dal primo editore di questo passo, la regola generale che ERONE applica sarebbe la seguente: sieno p^3 e q^3 i due cubi consecutivi fra cui è compreso il numero A di cui si cerca la radice cubica; posto

$$A = p^3 - a = q^3 + b\,,$$

si avrà approssimativamente

$$\sqrt[3]{A} = q + \frac{b\sqrt{a}}{A + b\sqrt{a}}\,.$$

Più verosimile di questa è una divinazione del procedimento eroniano immaginata, indipendentemente l'uno dall'altro, da G. WERTHEIM e A. KERBER (2), la quale consiste in una speciale applicazione del metodo di falsa posizione (cfr. p. 781, nota). Per dichiararla, osserviamo che, supposti a^3 e $(a+1)^3$ i due cubi consecutivi fra cui è compreso A, si ha (detto x il cercato valore di $\sqrt{A}$)

$$x^3 - a^3 = (x - a)\,(x^2 + xa + a^2)\,,$$

onde approssimativamente

$$A - a^3 = (x - a)\,.\,3xa\,;$$

(1) Infatti è circa

$$\left(4\,\frac{9}{14}\right)^3 = 100\,\frac{1}{12}\,.$$

(2) V. l'articolo del primo *Herons Ausziehung*, etc. citato nella nota (4) a p. 783.

ossia, indicando con e_1 l'errore $A - a^3$,

$$e_1 = (x - a) \cdot 3ax .$$

Detto similmente e_2 l'errore $(a + 1)^3 - A$, si trova con analogo ragionamento per approssimazione

$$e_2 = (a + 1 - x) \cdot 3 (a + 1) x ;$$

onde sarà, entro gli stessi limiti,

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{(x - a) a}{(a + 1 - x) (a + 1)} ;$$

se ne trae

$$x = \sqrt[3]{A} = \frac{(a + 1)^2 e_1 + a^2 e_2}{(a + 1) e_1 + a e_2} .$$

Orbene i citati autori ritengono che ERONE abbia operato secondo la regola espressa da tale formola; ed infatti, per $A = 100$, $a = 4$, $e_1 = 35$, $e_2 = 25$ si ottiene $x = 4 + \frac{9}{14}$. Applicandola ad altri esempi si ottengono valori altrettanto approssimati al vero; sgraziatamente, però, nessuno di tali nuovi esempi è offerto da ERONE stesso!

Con questa notizia intorno alla più elevata delle operazioni aritmetiche eseguite dai Greci, abbandoniamo la logistica, per volgerci all'enumerazione delle proprietà che essi avvertirono nei numeri. Più brusco trapasso non ci potrebbe essere; chè, mentre il tema da cui ci stacchiamo si riferisce alla più umile fra le diramazioni della matematica, quello che stiamo per affrontare tocca (almeno secondo i concetti di coloro che per primi se ne occuparono) il soggetto più elevato che mente di scienziato possa concepire, cioè la determinazione delle leggi numeriche da cui sono governati tutti i fenomeni fisici, la scoperta delle relazioni che intercedono fra numeri e cose.

CAPITOLO II.

L'aritmetica nella scuola di Pitagora

Sguardo generale sopra l'aritmetica pitagorica.

19. - Il lettore che ricorda quanto dicemmo intorno a TALETE (v. p. 11) sarà inclinato a supporre che questi, come in Grecia diede il primo impulso allo studio della geometria, abbia posto la prima pietra anche dell'aritmetica greca; ma tale ipotesi non è conforme a quanto vien riferito, giacchè l'unico pensiero aritmetico attribuito al saggio di Mileto è la considerazione del numero come collezione di monadi (1), che GIAMBLICO gli attribuisce, ma che, in realtà, egli non fece che trasportare dall'Egitto in patria (2).

Colui, invece, che sta alla testa degli aritmetici Greci è PITAGORA, di cui già conosciamo le elucubrazioni intorno all'applicazione della scienza dei numeri all'interpretazione dei fenomeni naturali (v. p. 27). Sgraziatamente i risultati positivi di tali indagini andarono o perduti o frammischiati a quelli dovuti ai Neo-Pitagorici ed ai Neo-Platonici,

(1) P. TANNERY, *Pour l'hist. de la Science hellène.* Paris, 1887, p. 62.

(2) Id., p. 369-391, nonchè l'articolo di P. TANNERY, *Sur l'arithmétique pythagoricienne* (Bull. des Sc. math., II Série, T. IX, 1885. p. 69-89). La persistenza nella letteratura matematica di quella considerazione è provata dalla presenza di essa in BOEZIO; egli scrisse infatti: " numerus est unitatum collectio „ (v. *Boetii de institutione arithmetica,* etc., ed. FRIEDLEIN, Lipsiae, 1867, p. 13).

sicchè nulla è più malagevole del redigerne un catalogo completo e non esuberante; la principale ragione di tale dispersione o miscela probabilmente sta nel non esistere più (e forse non venne mai scritta!) un' esposizione metodica dell'aritmetica pitagorica e nell'essere perite, non soltanto le opere di ARCHITA *Sulla decade* e di FILOLAO *Sulla natura* (1), ma anche quella di ARISTOTELE intitolata *Il Pitagorico*, la quale, per fermo, conteneva la quintessenza dei pensieri, aritmetici e non, del celebre filosofo di Samo. In tale mancanza di documenti coevi, non v'ha che ricorrere a quelli meno lontani da PITAGORA e cercarvi quanto è a costui esplicitamente attribuito.

Così facendo troviamo che a lui si fa merito di avere stabilita nettamente la distinzione fra l' aritmetica (scienza astratta) e la logistica (arte del calcolo) (2), sulla quale distinzione probabilmente venne modellata quella fra γεωδαιρία e γεωμετρία, che si trova in ARISTOTELE; ARISTOSSENO aggiunge essere stato PITAGORA colui che elevò l'aritmetica al dissopra dei bisogni dei mercanti, il che non viene contraddetto da alcuno dei più antichi documenti recentemente dissepolti.

Inoltre un passo di GIAMBLICO, ove il nostro filosofo è presentato nell'atto di iniziare un giovane ai misteri aritmetici mediante figure tracciate sopra un ἄβαξ, rende verosimile la supposizione che PITAGORA abbia conosciuto (probabilmente per merito degli Egiziani) e diffuso fra i suoi discepoli l'uso di una tavola ricoperta di polvere, per eseguire i calcoli.

20. - Scendendo, ora, a particolari più minuti, ricorderemo le ampie nozioni che i Pitagorici possedevano sulle proporzioni (v. p. 36-38) probabilmente limitate a numeri interi, e la scoperta da essi fatta delle quantità irrazionali (v. p. 50). Notevoli poi, ancor più della sottile distinzione da essi avvertita fra l'*uno* (essere isolato indivisibile) e la *monade* (essere generatore del numero), sono gli sforzi (3)

(1) Citate da TEONE SMIRNEO (ed. DUPUIS, p. 174).

(2) Cfr. la *Classificazione delle discipline matematiche* riferita a p. 35 come opera di PITAGORA.

(3) Cfr. gli analoghi tentativi per connettere tali numeri a figure geometriche, ricordati a p. 35.

che essi fecero per scoprire qualità specifiche ammirande in ogni numero della prima decade (1). Così nell'1 notarono la proprietà di essere indivisibile ed anche immutabile perchè $1 \times 1 = 1$; nel 3, numero per essi sacro, ravvisarono il primo ente aritmetico dotato di principio, mezzo e fine; ciò induce a considerare nota nella scuola di Crotone la distinzione dei numeri in *pari* e *dispari*, il che è confermato, tanto da un'opinione di ARCHITA, riferita da TEONE SMIRNEO (2), quanto dal trovarsi, nell'elenco delle « categorie » di ARISTOTELE, una composta di « pari e dispari » e da una definizione di tali numeri che BOEZIO attribuisce ai pitagorici (3). Così questi notarono essere il 6 eguale alla somma delle proprie parti (1, 2, 3), donde forse furono guidati al concetto di *numero perfetto* (τέλειος); e nel 7 essi rilevarono la proprietà di non essere divisore o multiplo di alcun numero della decade; e questo fa credere conosciuta ai pitagorici la distinzione dei numeri in *primi* e *composti*. A questa si connette la considerazione dei *numeri amici* (φίλοι ἀριθμοί), di cui, al dire di GIAMBLICO, sembra PITAGORA conoscesse almeno la coppia 220 e 284 (4). Nel numero 4, primo quadrato pari, non riuscirono, malgrado i loro sforzi, a scoprire proprietà aritmetiche rilevanti, ma per compenso ne trovarono tante rappresentazioni (5) che, nel loro

---

(1) TEONE SMIRNEO ed. DUPUIS, p. 132 e seg.

(2) Ivi, p. 34.

(3) BOEZIO ed. FRIEDLEIN, p. 13.

(4) Dopo di avere detto che " certi numeri vennero detti amici da coloro che assimilarono i numeri e le virtù alle abitudini più eleganti „, GIAMBLICO aggiunge che " 284 e 220 sono numeri di tale specie, perchè le parti di ciascuno generano l'altro, come venne dimostrato da PITAGORA. Infatti, avendo un tale domandato *che cosa è un amico*, egli rispose *un altro io* (ἕτερος ἐγώ), dimostrando accadere ciò appunto per quei due numeri ". È noto che la scoperta di una regola per trovare coppie di numeri amici appartiene, non ai Greci, ma agli Arabi (vedi *Vorlesungen*, T. I, 3ª ed., p. 735).

(5) LO SMIRNEO ne enumera non meno di undici (v. ed. cit, p. 154-162); ad es. i quattro elementi (fuoco, aria, acqua, terra), i quattro corrispondenti poliedri regolari (tetraedro, ottaedro, icosaedro, cubo), le quattro facoltà dello spirito (il pensiero, la scienza, l'opinione, il senso), ecc.

entusiasmo per colui che primo le aveva rivelate, composero il celebre giuramento: « giuro per colui che trasfuse nelle nostre anime il quaternario, sorgente della natura eterna ! ». Il 5 è media aritmetica di ciascuna delle coppie

$$1\ ,\ 9\ ;\ 2\ ,\ 8\ ;\ 3\ ,\ 7\ ;\ 4\ ,\ 6\ ;$$

ciò lo Smirneo (1) rappresentò collo schema seguente:

α	δ	ζ
β	ε	η
γ	ς	θ

1	4	7
2	5	8
3	6	9

è questo il primo cenno a noi noto di quadrati almeno parzialmente magici.

Emerge dal fin qui detto che, per quanto i tentativi dei pitagorici fossero extra-scientifici, e fors'anche ànti-scientifici, pure non furono assolutamente sterili, dal momento che condussero a qualche nozione fondamentale ed a qualche verità non ispregevole (2). Tale giudizio riceve, forse, qualche conferma da un'opera scritta da S. Ippolito (3) nella prima metà del III sec., nella quale è, fra l'altro,

---

(1) Ed. Dupuis, p. 166.

(2) Fra queste merita indubbiamente un posto distinto la proposizione (*Elementi,* II, 10) espressa dall'identità

$$(a+b)^2 + b^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}+b\right)^2,$$

che recenti documenti fanno risalire alla scuola di Pitagora (v. F. Hultsch, *Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen*, Bibl. math., 3ª Serie, Vol. I, 1900, p. 3-12).

(3) Veggasi il IV Libro dell'opera: *Refutationis omnium haeresiorum librorum decem quae supersunt* (ed. Duncker, Gottinga, 1859).

esposto un metodo per prevedere gli avvenimenti futuri che è intimamente connesso alle considerazioni da noi esposte a p. 773-776: esso viene designato col nome di *calcolo pitagorico*, il quale è giustificato da altri documenti di più antica data (1). Riferiamo qui i passi più interessanti di questo brano, per poi dedurne qualche conseguenza relativa all'aritmetica pitagorica:

Coloro che pretendono predire mediante calcoli sopra numeri, lettere e nomi, hanno come punto di partenza della loro teoria ciò che chiamano *pitmene* di ogni numero. Per le migliaia è eguale a tante unità quante migliaia: così per sei mila il *pitmene* è 6 unità: per settemila 7 unità: per ottomila 8 unità, e così per gli altri. Per le centinaia, il loro *pitmene* è tante unità quante centinaia: così per settecento, essendovi 7 centinaia, il *pitmene* è 7; per seicento, essendovi 6 centinaia, il *pitmene* è 6 unità. Similmente per le decine: per ottanta 8 unità, per sessanta 6 unità, per quaranta 4 unità, per dieci 1 unità. Per le unità il *pitmene* è il numero stesso delle unità: così per nove è 9, per otto 8, per sette 7.

Ora per le lettere bisogna fare lo stesso: perchè ogni lettera rappresenta un numero determinato; così ν vale cinquanta unità, il *pitmene* di cinquanta unità è 5, onde il *pitmene* di ν sarà pure 5.

Debbasi ora prendere il *pitmene* di un nome, per esempio Ἀγαμέμνων. Si prende per α, 1; per γ, 3; pel secondo ν, 1; per μ, 4: per ε, 5; per μ, 4: per ν, 5; per ω, 8; per ν, 5. Facendo la somma

$$1 + 3 + 1 + 4 + 5 + 4 + 5 + 8 + 5 = 36.$$

Si prendono ancora i *pitmeni* di queste unità λε; quello di λ è 3, e quello di ε, 6; la somma è $3 + 6 = 9$, il cui *pitmene* è 9. Il nome Ἀγαμέμνων ha dunque per *pitmene* 9.

Applicato lo stesso procedimento al nome Ἕκτωρ, il citato autore prosegue:

È più facile di procedere come segue: dopo di avere trovata la somma dei *pitmeni* delle lettere, per esempio 19 per Ἕκτωρ, lo si dividerà per 9: il resto sarà il *pitmene*. Quindi io divido

(1) Pubblicati da P. Tannery (*Notice sur des fragments d'onomatomancie arithmétique*, in *Notices et Extraits des manuscrits, etc.* T. XXXI, 2e Partie, 1886, p. 231-260).

19 per 9, resta 1, poichè 9 volte due fa 18, che tolto dà 19 da 1; perciò il *pitmene* di Ἕκτωρ è 1.

Inoltre egli applica questo metodo al nome Πάτροκλος ed aggiunge:

Se si calcola secondo la " regola del novenario „, si dividerà per 9 la somma dei *pitmeni*, ed il resto sarà il *pitmene;* altri seguendo la " regola del settenario „ dividono per 7. Così pel nome Πάτροκλος si trovò 34 come somma dei *pitmeni;* dividendo per 7 resta 4, essendo 4 volte 7 eguale a 28, resta 6.... Bisogna osservare che se, dividendo, si ottiene un quoziente intero... il *pitmene* è il numero 9 stesso... Quando calcolando sui nomi si trova due volte la stessa lettera, non se ne tien conto che una volta....

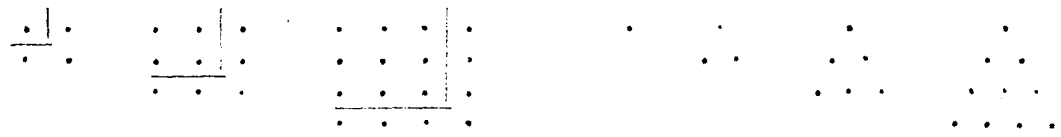
L'importanza pel matematico delle notizie somministrate da tali squarci è considerevole per varie ragioni. In primo luogo, ammesso come realmente pitagorico il calcolo indicato, la nozione di *pitmene* — nel senso attribuito a questa parola da PAPPO (p. 774) — dovrebbe farsi risalire ad un'epoca molto anteriore ad APOLLONIO DI PERGA. In secondo luogo (1), il procedimento per calcolare il *pitmene* di una parola è identico al calcolo per addizione, sopra un numero scritto nel sistema numerale dei Greci, del resto della divisione di questo numero per 9, che è il preliminare della « prova per 9 », operazione che si trova applicata da MASSIMO PLANUDE nel suo *Manuale* ed ivi presentata come un ritrovato indiano, trasmessoci dagli Arabi.

Ma queste notizie (confermate da GIAMBLICO, nella sua *Vita di Pitagora*) sono in flagrante contraddizione, non soltanto con alcuni fatti di cui parleremo fra breve (p. 800), ma anche con la data di nascita che vedemmo (p. 753-754) attribuirsi al sistema di indicare i numeri con lettere, dal momento che il « metodo pitagorico » per divinare il futuro ha come base tale sistema, nè riesce chiaro su quale altra si potrebbe erigerlo. In qual modo conciliare tutte queste cose ci sembra difficile, specie perchè tutte le fonti a cui si potrebbe ricorrere sono tanto torbide, che mal potrebbero dis-

(1) Oltre il lavoro ultimamente citato, si vegga: P. TANNERY, *Sur l'invention de la preuve par neuf* (Bull des Sc. math., 2e Sér., T. VI, p. 142-144).

setare l'indagatore avido di verità. Comunque, ridotto al minimo il valore dei documenti che abbiamo citati, essi costituiscono una prova assai seria per attribuire ai Greci la conoscenza della « prova per nove » (1), la cui prima radice si era cercata indarno nella letteratura indiana, spinti dal fatto che in essa se ne incontrano molteplici applicazioni; se poi gli è a PITAGORA che se ne è debitori, è questione tuttora aperta e che possiede grande valore, non foss'altro per la sua evidente connessione con la ricerca delle origini dell'ultimo sistema di numerazione scritta usato dagli Ellèni.

21. - Ai discepoli di PITAGORA sembra doversi far risalire anche la rappresentazione dei numeri sopra opportune figure, anzi, gli è probabilmente così che essi giunsero, col mezzo dei diagrammi seguenti, a trovare le relazioni fra numeri dispari e quadrati e fra i numeri della serie naturale ed i triangoli:



siffatte relazioni sono algebricamente espresse dalle formole:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 ,$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2} ,$$

la prima delle quali insegna la ragione per cui i numeri dispari furono chiamati, a partire da FILOLAO, *numeri gnomonici* (2).

---

(1) Il TANNERY si esprime a questo riguardo così: " Que Pythagore ait connu la pratique des calculs de la preuve par neuf appliqée au système de numération alphabétique des Grecs, on ne serait en droit de le supposer que si l'on avait d'abord démontré que de son temps ce système de numération était déjà en viguer, ce qui, dans l'état actuel de la science, paraft au moins douteux. Mais rien n'empèche d'admettre qu'il connaissait le principe de ces calculs et savait l'appliquer sur l'abaque à jetons „ (*Notices sur des fragments*, etc., p. 244).

(2) Riguardo al vocabolo *gnomone* v. p. 42. — A ragione F. HULTSCH (v. Götting. Nachrichten, 1893, p. 371) osserva che, sic-

Ancora più esplicita è l'attribuzione a PITAGORA di un metodo (il primo conosciuto) per costruire infiniti triangoli rettangoli a lati razionali; preso come primo cateto un numero dispari a, PITAGORA prescriveva, al dire di PROCLO (1), di prendere come secondo cateto $\frac{a^2-1}{2}$ e, quindi, per ipotenusa $\frac{a^2+1}{2}$: applicando tale regola si ottiene una serie illimitata di triangoli, i cui lati sono:

(2 , 4 , 5) , (5 , 12 , 13) , (7 , 24 , 25) , (9 , 40 , 41), ecc.

Per quale via il grande filosofo sia giunto a formulare il problema così risoluto è facile immaginare. Riconosciuta, ed appresa dagli Egiziani, l'esistenza di un triangolo rettangolo di lati 3, 4, 5, in altri termini, visto che l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti 3 e 4 è un numero razionale (ῥητὸς ἀριθμός); riconosciuto d'altronde che in moltissimi casi (ad esempio per un triangolo rettangolo isoscele) presi per cateti due numeri razionali si giungeva ad un ἄρρητον per l'ipotenusa e ad un ἄλογον per ciascuno dei rapporti fra l'ipotenusa ed un cateto, da un lato i Pitagorici arrivarono a concepire le quantità irrazionali, dall'altro a chiedersi se, oltre al triangolo classico di lati 3, 4, 5, esistessero altri triangoli rettangoli aventi tutti i lati razionali. Si vede pertanto che il problema di cui indicammo la soluzione si adatta perfettamente al quadro delle investigazioni che condussero alla scoperta del teorema di PITAGORA e delle quantità irrazionali (2). Del come, forse, si è giunti alla soluzione di quel problema ci occuperemo tra poco (p. 812), studiandone una seconda soluzione.

---

come FILOLAO usa la parola γνώμων come termine tecnico concretato dall'uso, così è probabile che il corrispondente concetto appartenga a PITAGORA.

(1) PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 205. BOEZIO (ed. FRIEDLEIN, p. 408) lo attribuisce ad ARCHITA.

(2) Che sia stata invece la ricerca dei triangoli rettangoli in numeri quella che guidò al teorema di PITAGORA, è un'opinione di V. FLAUTI che ci sembra poco accettabile (v. *Analisi algebrica elementare,* III ed., Napoli, 1830, p. XII).

Rileviamo da ultimo che PLUTARCO attribuisce ai Pitagorici l'osservazione che i numeri 16 e 18 possiedono ciascuno la proprietà di misurare ad un tempo l'area ed il perimetro di un rettangolo (1). Se notarono anche essere dessi gli unici numeri in possesso di tale proprietà, non sappiamo: tuttavia è tanto semplice ed elementare il ragionamento che conduce a tale conclusione che nulla vieta ammetterlo per immaginato nella scuola di Crotone. Ed invero la ricerca di due numeri interi positivi x , y aventi la proprietà suddetta equivale alla risoluzione dell' equazione indeterminata $xy = 2(x + y)$, ossia dalla seguente $(x - 2)(y - 2) = 4$, cioè alla determinazione di due numeri tali che il prodotto del primo diminuito di due, pel secondo, pure diminuito di 2, sia 4; perciò $x - 2$ e $y - 2$ saranno eguali uno a un fattore di 4 e l'altro al fattore complementare; per conseguenza non esistono che le due soluzioni $x = 4$, $y = 4$ e $x = 3$, $y = 6$ che danno pel prodotto xy appunto i valori 16 e 18 segnalati da PITAGORA.

La pretesa origine pitagorica del sistema decimale

22. - Con ciò abbiamo esaurita l'enumerazione delle più attendibili notizie intorno al sapere aritmetico de' Pitagorici.

Ma prima di volgerci ad esaminare quale sviluppo, o eventuale trasformazione, abbia subito la scienza dei numeri passando dalla scuola di PITAGORA a quella di PLATONE, è dovere nostro l'arrestarci a spiegare come e perchè il nome del sommo filosofo di Samo si trovi implicato nella grande questione dell'introduzione in Europa delle cifre di cui oggi ci serviamo.

Ricordiamo all'uopo che, in forza dell'imponente autorità del WALLIS (2), ebbe per assai tempo valore di verità indiscutibile l'opinione che le cifre ordinariamente dette *arabe* (quantunque gli Arabi non si vantassero mai di esserne gli

(1) Cfr. due lettere scritte da R. F. de SLUSE e HUYGENS il 4 ottobre 1657 ed il 25 ottobre 1658 ed inserite nel T. II (La Haye. 1889) delle *Oeuvres complètes de* C. HUYGENS.

(2) Cfr. Cfr. *De Algebra tractatus* in *Opera mathematica,* Vol. II (1693), p. 7 e seg.

inventori) siano state immaginate dagli Indiani (1), da cui i seguaci di MAOMETTO le avrebbero apprese, per quindi insegnarle ai popoli europei: in particolare la Spagna sarebbe stato il paese che primo usufruì dell'importante ritrovato, ed a Siviglia e Cordova lo avrebbe imparato GERBERTO (morto nel 1003 come Papa SILVESTRO II), il quale l'avrebbe in seguito diffuso fra tutti i cristiani del resto d'Europa. Ora tale ricostruzione storica è contraddetta da un passo della *Geometria* di MANLIO SEVERINO BOEZIO (morto nel 524 dell'E. v.) (2), segnalato verso la metà del secolo XVII dal celebre erudito ISACCO VOSSIO (1577-1649) (3); ivi l'autore, dopo di avere insegnati parecchi termini tecnici, che poco ci premono (fra cui si trovano *digiti* ed *articuli*), e di avere esposte alcune considerazioni filosofiche, che ci interessano ancora meno, prosegue testualmente così (4):

Alcuni uomini di somma perspicacia, appartenenti alla scuola pitagorica, si occuparono, in qualità di investigatori della sapienza platonica, di speculazioni notevoli, ponendo al vertice di tutta la filosofia le proprietà dei numeri. Ed infatti, chi mai potrà intendere la misura dell'accordo musicale se non lo crede dipendente dai numeri? Chi potrà, ignorando la natura dei numeri, riconoscere le costellazioni formate dalle stelle del firmamento e concepire il sorgere ed il tramontare dei segni dello zodiaco? Da ultimo, che deggio dire dell'aritmetica e della geometria, le quali non si presentano che sotto forma irriconoscibile, quando siano perdute le proprietà dei numeri? Ma di questo si è già parlato abbastanza nell'*Aritmetica* e nella *Musica;* ritorniamo pertanto a quello di cui dobbiamo occuparci ora. I Pitagorici, che si manifestarono sempre pieni di genio inventivo sottile, per evitare di commettere errori nelle moltiplicazioni, divisioni e misure, si servirono di una figura

(1) V. anche una esplicita dichiarazione in questo senso fatta da MASSIMO PLANUDE nell'esordio del suo *Manuale di calcolo.*

(2) Osserviamo qui che BOEZIO cita come sua principale fonte di informazione un certo ARCHITA, che per molto tempo fu distinto dal celebre Tarantino (v. p. 98 e seg.), epperò chiamato ARCHITA *Latino*. Ma una osservazione dell'ALLMAN (*Greek geometry from Thales to Euclid,* Dublin, 1889, p. 110) induce a identificare i due personaggi.

(3) POMPONII MELAE *libri tres de situ orbis, cum observationibus,* I. VOSSII, II ed., Hagae, 1658, p. 85.

(4) BOEZIO ed. FRIEDLEIN, p. 395.

tracciata in modo particolare, la quale, in onore del loro maestro, chiamavano Tavola pitagorica (*mensa pythagorea*) perchè, riguardo alle cose ivi rappresentate, le prime discipline erano dovute a quel maestro. Chi venne dopo chiamò tale figura *Abaco*. Essi pensavano che quanto era frutto di una meditazione profonda sarebbe stato più facilmente conosciuto da tutti, ove fosse stato presentato dinnanzi agli occhi in un certo modo; in conseguenza diedero a quella figura il seguente aspetto.

Dopo di che, nella *Geometria* di Boezio si trova una tabella, che per molto tempo venne scambiata per una tavola di moltiplicazione a doppia entrata, donde la ragione del nome di « tavola pitagorica » od « abaco pitagorico » (1) dato impropriamente alle tavole di moltiplicazione in uso nelle scuole (2). In quelle tabelle i numeri sono indicati con segni speciali (gli *apici* di Boezio), di forma assai simile ai nostri 1, 2, ... , 9, ed accompagnati da nomi, abbastanza eterocliti, nei quali è percepibile qualche ingrediente orientale; Boezio aggiunge una spiegazione dei vari valori che hanno i detti segni a norma della differente posizione che occupano sulla tabella a colonne, e da ultimo mostra come, col loro mezzo, si effettuino la moltiplicazione e la divisione.

Ognuno vede la straordinaria importanza delle dichiarazioni di Boezio, sicchè nessuna meraviglia se molti studi sono stati fatti per determinarne l'attendibilità e, possibilmente, trovarne conferme; ci conceda il lettore che, per non scostarci troppo dal nostro tema, sorvoliamo sui lavori che vennero pubblicati prima del 1837 (3), chè la loro influenza appare ben piccola, se paragonata con quella eser-

---

(1) Montucla, *Hist. des Mathém.*, T. II, 2e éd., an VII, p. 13.

(2) Questo errore venne rilevato dal Mannert nella dissertazione *De numerorum, quos Arabicos vocant, vera origine pythagorica*. Norimb., 1801, e poi da Chasles (*Aperçu historique*, II ed., 1875, p. 468). Ciò non ostante esso perdurò ancora; v. infatti T. Taylor, *Theoretic Aritmetic*. London, 1816, p. 41: F. von Drieberg, *Die Arithmetik der Griechen*. Leipzig, 1819, p. 77, ecc. Per altri dati al riguardo si veda A. Favaro nel Bull. di bibliogr. e storia, ecc., T. XII, 1880, p. 146-149.

(3) I più cospicui sono segnalati nelle *Recherches concernant les origines de notre système de numération* (Revue archéologique, T. XIII, 1856), di T. H. Martin.

citata dagli scritti di M. CHASLES (1): il quale, appoggiandosi sopra un manoscritto dell'XI secolo esistente nella Biblioteca di Chartres, interpretò completamente le parole di BOEZIO e congegnò una spiegazione del fatto strano, che, fino a GERBERTO, sia rimasta lettera morta l'invenzione di un sistema di numerazione, il quale di tanto eccelleva su quello in uso presso i Greci.

Le opinioni dello CHASLES trovarono tosto un oppositore assai gagliardo in G. LIBRI (1803-1863); il quale nel II volume della *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (2) espose idee molto differenti, intorno alla genesi del nostro sistema di numerazione. Un'attitudine, in certo modo, intermedia fra lo CHASLES ed il LIBRI venne assunta dal VINCENT (3), il quale, dopo di avere paragonato il succitato codice di Chartres col ms. n. 343 del British Museum, confermò in parte le conclusioni del celebre divinatore dei porismi; però sostenne che i Pitagorici, di cui è parola nella *Geometria* di BOEZIO, non sono immediati discepoli del filosofo di Samo, ma tardi aderenti alle idee insegnate nella Scuola di Crotone, i quali erano imbevuti dei concetti professati dai cabalisti giudeo-alessandrini. Una riprova di tale opinione venne da lui trovata nei nomi stessi con cui BOEZIO indica i numeri 1, 2, ..., 9, nomi nei quali egli trovò una miscela di radici greche e di radici semitiche relative a parole collegate al misticismo neo-pitagorico. Così il significato del passo di BOEZIO venne a subire una modificazione profonda — di cui non tennero conto nè il NESSELMANN (4), nelle sue considerazioni intorno alle indagini dello CHASLES, nè ALESSANDRO HUMBOLDT, nel fare completa adesione alle conclusioni di quest'ultimo (5) — modificazione che trasfor-

(1) Oltre alla nota XII dell'*Aperçu historique*, si veggano gli articoli inseriti nei *Comptes-rendus* delle sedute che tenne l'Istituto di Francia nei giorni 21 gennaio, 7 e 14 ottobre 1939; 23 e 30 gennaio, 6 febbraio, 26 giugno e 24 luglio 1843.

(2) Paris, 1838, p. 290 e seg. Cfr. anche *Comptes-rendus*, 14 ottobre 1839.

(3) *Note sur l'origine de nos chiffres et sur l'Abacus des Pythagoriciens* (Journ. de Mathématiques, T. IV, 1839, p. 261-280).

(4) *Die Algebra der Griechen*, Berlin, 1842, p. 100-104.

(5) *Kosmos*, T. II, Stuttgart und Augsburg, 1847, p. 263.

mava una questione relativa all'alba dell'aritmetica greca, in altra relativa al declivio di essa; una questione concernente un presunto elemento greco vetustissimo, esistente forse nella nostra logistica, in altra concernente l'epoca in cui il genio matematico greco stanco, spossato ed esausto mendicava aiuto ed alimento presso popoli di altra stirpe.

Gli argomenti con cui il VINCENT sostenne la propria tesi meritarono l'approvazione di M. CANTOR (1) e di TH. H. MARTIN (2), i quali, tuttavia, vi arrecarono alcune modificazioni: non importa qui indicarle, giacchè non si riferiscono alla parte di quella tesi che a noi interessa, cioè all'essere gli *apici* di BOEZIO stati appresi dai Neo-Platonici presso popoli extra-europei e poi da essi insegnati ai loro conterranei.

Nel frattempo la questione, di cui andiamo delineando le fasi, subiva una alterazione ancora più profonda e decisiva.

Ed invero, circa contemporaneamente ed indipendentemente gli uni dagli altri, l'HALLIWELL (3), il BOECKH (4) ed il NESSELMANN (5) sollevavano alcuni dubbi intorno all'autenticità della *Geometria* di BOEZIO, o tutt'almeno del passo che ci interessa (6), dei quali è palese la somma importanza: giacchè, ove potesse venire dimostrato che quell'opera proviene da un falsario posteriore a GERBERTO, quel brano perderebbe ogni importanza, e non vi sarebbe che riprendere l'antica congettura del WALLIS, intorno alla genesi del nostro sistema di numerazione, rimpiangendo il tempo e la fatica sprecati. Ora l'esame dei migliori manoscritti della *Geometria* di BOEZIO non sembra capace di risolvere

---

(1) *Mathem. Beiträge zum Kulturleben der Völker.* Halle, 1863 p. 199-262; a base delle considerazioni ivi svolte sta il ms. n. 288 della Biblioteca di Erlangen, già dianzi studiato dal WEIDLER (negli anni 1727 e 1755) e dal MANNERT (nel 1801).

(2) *Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyendge* (Ann. di Mat., T. V, 1863).

(3) *Rara mathematica.* London, 1841, p. 107.

(4) *Index lectionum per sem. aestivum.* A. 1841, Berolini, 1841.

(5) Op. cit., p. 102.

(6) Un primo sintomo di tali dubbi trovasi già in MONTUCLA (*Hist. des math.*, T. I, p. 122-123): il quale però più tardi (id. 379) spiega a suo modo le parole di BOEZIO come fossero autentiche.

definitivamente quella che chiamasi oggi « questione boeziana », onde il campo degli storici è tuttora diviso in due schiere: in quella capitanata dal BOECKH troviamo coloro che giudicano essere la *Geometria* di BOEZIO una collezione di estratti di varie opere, diffuse per iscritto od a voce, e sono il FRIEDLEIN (1), più tardi editore di BOEZIO, il WEISSENBORN (2) e l'HEIBERG (3); l'altra schiera, sulla cui bandiera sta scritto « autenticità della *Geometria* di BOEZIO », annovera come suo principale campione il MARTIN (4), chè M. CANTOR, che per lungo tempo ne fece parte, ora accenna a staccarsene (5). La questione non è ancora definitivamente risolta e probabilmente non lo sarà che il giorno in cui verrà dissepolto qualche altro documento decisivo.

Va però notato come, frattanto, un gran passo verso la soluzione del problema storico che ci occupa, concepito nella sua forma primitiva, sia stato compiuto dall'orientalista WOEPCKE, con due importantissime memorie. Nella prima di esse (6) egli spianò la via ad ulteriori ricerche, colla pubblicazione del testo del passo controverso, quale risulta da due manoscritti della Biblioteca Nazionale di Parigi; pubblicazione allora indispensabile, giacchè quel passo è pressochè inintelligibile tanto nell'edizione di BOEZIO fatta a Venezia nel 1499, quanto in quelle fatte a Basilea nel 1546 e nel 1570. In una memoria posteriore (7), di ancor più grande valore, egli propose una spiegazione attendibilissima della nascita che ebbe e delle peregrinazioni che compì il

(1) Oltre ad articoli sparsi in vari periodici tedeschi, si veda l'opuscolo *Gerbert. die Geometrie des Boetius und die indische Ziffern.* Erlangen. 1861, nonchè vari squarci dell'opera *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und der Römer,* etc. Erlangen. 1869 e BOEZIO ed. FRIEDLEIN.

(2) Si vegga specialmente la memoria *Die Boetius-Frage* nel II fascicolo delle *Abh. zur Geschichte der Mathem.* Leipzig. 1875, p. 185-240.

(3) *Philologus*, T. TLIII. 1884. p. 508-518.

(4) V. la memoria succitata.

(5) *Vorlesungen,* 3ª ed. del T. I. 1907.

(6) *Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident.* Roma. 1859.

(7) *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens* (Journal Asiatique, IV Série, T. I, 1863).

nostro sistema di numerazione. Premesso che esistono due specie distinte di cifre arabe, usate una esclusivamente dagli Arabi orientali e l'altra da quelli che occuparono l'Africa settentrionale e la Spagna, il WOEPCKE fece notare che soltanto queste ultime (dette « cifre *gubar* ») sono di forma simile a quelle da noi adoperate. Osservata poi, col VINCENT, l'esistenza di elementi extra-ellèni nei nomi con cui BOEZIO designa i numeri 1, 2 .... , 9, e tenuto conto dell'avere il MARTIN dimostrato (1) inammissibile il soggiorno di GERBERTO presso gli Arabi di Spagna (2); ricordando ancora quali vivaci rapporti commerciali ed intellettuali esistessero fra gl'Indiani ed i Greci residenti in Alessandria e come tutto induca ad attribuire l'invenzione delle nostre cifre agli Indiani dei primi secoli dell'E. v.; rilevando da ultimo la somiglianza fra gli *apici* di BOEZIO e le iniziali dei numerativi sanscriti, concluse essere estremamente probabile che l'invenzione del nostro sistema numerale appartenga agli Indiani e sia stata poi comunicata ai Greci di Alessandria nell'epoca classica del Sincretismo. Da essi sarebbe passata ai Neo-Pitagorici (di cui è notoria la propensione ad accogliere le idee braminiche), l'ultimo dei quali è appunto MANLIO SEVERINO BOEZIO; da questo l'avrebbe appresa GERBERTO, il quale, a sua volta, l'avrebbe diffusa in tutta Europa, non esclusa la Spagna; quivi gli Arabi l'avrebbero trovata e se ne sarebbero impadroniti.

Se era nostro imprescindibile dovere fare menzione di un documento che, se fosse stato quale apparve ai primi che lo esaminarono, avrebbe fatto splendere di luce nuova ed abbagliante la scuola di Crotone, ora che sembra dimostrato come (ammessolo per degno di fede) non si riferisca se non ai bassi tempi della matematica greca e dia notizia di una pianta esotica dai fatti dimostrata incapace di allignare sotto il cielo dell'Ellade, la questione a cui si riferisca non deve occuparci più a lungo (3). D'altronde, supposto anche per un istante vero tutto quanto si legge nella *Geometria* di

(1) V. il § IV delle *Recherches* più sopra citate.

(2) Cfr. MONTUCLA, *Hist. des Math.*, T. I, p. 500.

(3) Le indagini più recenti a noi note sull'argomento che abbiamo sfiorato sono riassunte a p. 109-119 dello scritto di E. GOBLET D'ALVIELLA intitolato *Ce que l'Inde doit à la Grèce*. Paris, 1897.

Boezio, l'invenzione di Pitagora meriterebbe poco più di una fugace menzione nella nostra storia, dal momento che i Greci, mentre si lasciarono adescare dalle fantasticherie matematiche da lui insegnate, avrebbero lasciato cadere nella polvere il gioiello più fulgido, ornante la sua corona di scienziato.

Timarida.

24. - Alla comunità pitagorica sembra indubbiamente appartenesse un Timarida, di cui Giamblico tramandò ai posteri una pregevole invenzione e che venne esumato dal Bouillaud (1). Identificato prima da M. Cantor con un immediato discepolo di Pitagora (2), fu dal Martin considerato, invece, per Timarida da Paros (3); in conseguenza fu giudicato dal Cantor (4), come già aveva fatto il Nesselmann (5), per, circa, contemporaneo di Teone Smirneo. Ma, più tardi, in conseguenza di alcune osservazioni di P. Tannery (6), il Cantor stesso ritornò alla sua prima opinione sull'epoca, pur mantenendo quella relativa alla patria (7). Ed a ragione, chè ci sembra estremamente verosimile essere il matematico di cui ci dobbiamo ora brevemente occupare l'antico pitagorico Timarida da Paros.

A Timarida si attribuisce la definizione di unità come *quantità terminante* (περαίνουσα ποσότης) ed il nome di *rettilinei* (εὐθυγραμμικοί) pei numeri primi; gli è appunto questa denominazione, la cui antichità è attestata da un noto frammento di Speusippo (v. p. 128), che serve come argomento principale per determinare l'epoca a cui appartiene Tima-

(1) Cfr. Montucla, *Hist. des Math.*, T. I, p. 317.
(2) *Math. Beiträge*, etc., p. 97.
(3) Ann. di Matematica, T. V. 1863, p. 281.
(4) *Vorlesungen*, T. I, 1ª ed., Leipzig, 1880, p. 370.
(5) *Die Algebra der Griechen*, p. 232.
(6) V. gli articoli *Sur l'âge du phytagoricien Thymaridas* (Ann. de la Fac. des Lettres de Bordeaux, T. III, 1881, p. 101-104) e *Sur l'arithmétique pythagoricienne* (Bull. des Sc. math., II Série, T. IX, 1885): inoltre *Pour l'histoire de la science hellène*. Paris, 1887, p. 382-386.
(7) *Vorlesungen*, T. I, 2ª ediz., Leipzig, 1894, p. 147 e 3ª ediz., Leipzig, 1907, p. 158.

RIDA. Ma non quella definizione, nè questo nome sono i i maggiori suoi titoli di gloria. Lo è invece un metodo, che egli ha inventato e che GIAMBLICO ha serbato, per dedurre il valore di x da un sistema di equazioni della forma seguente:

$$x + x_1 = a_1 \ , \ x + x_2 = a_2 \ , \ \ldots . \ , \ x + x_n = a_n \ ,$$
$$x + x_n + \ldots . + x_n = a \ .$$

Il metodo di TIMARIDA è espresso dalla formola

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots . + a_n - a}{n - 1} \ (1) \ ,$$

la quale evidentemente si ottiene sottraendo l'ultima equazione dalla somma delle prime n e dividendo il risultato per $n - 1$. Il metodo stesso è chiamato da GIAMBLICO ἐπάνθημα (2) (donde il nome *florida sententia* usato dal TENNULIO, primo editore di GIAMBLICO); ma non è a credere fosse questo un nome esclusivo al ritrovato di TIMARIDA, giacchè il nome di *epantema* (che potrebbesi tradurre con *iperfioritura*) veniva attribuito a tutti gli sviluppi aggiunti ai trattati classici di aritmetica, per uso degli studenti di filosofia (3).

Dell'*epantema* di TIMARIDA, GIAMBLICO fa applicazione alla ricerca delle soluzioni in termini minimi dei due sistemi indeterminati seguenti:

$$x_1 + x_2 = 2 \ (x_3 + x_4) \ , \ x_1 + x_3 = 3 \ (x_2 + x_4) \ ,$$
$$x_1 + x_4 = 4 \ (x_2 + x_3) \ ;$$

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \ (x_3 + x_4) \ , \ x_1 + x_3 = \frac{4}{3} \ (x_2 + x_4) \ ,$$

$$x_1 + x_4 = \frac{5}{4} \ (x_2 + x_3) \ .$$

(1) Il primo ad interpretare le oscure parole, in cui GIAMBLICO fa conoscere il procedimento di TIMARIDA, fu il NESSELMANN (v. op. cit., p. 232-236).

(2) Θυμαριδείον ἐπανθήμα (GIAMBLICO ed. PISTELLI, p. 62.

(3) *Notices et extraits des manuscrits,* etc., T. XXXI, 2e Partie, 1886, p. 244. V. anche P. TANNERY, *Pour l'histoire de la science hellène.* Paris, 1887, p. 386.

Per vedere come si possa effettuare lale applicazione si osservi che ad es. il primo di questi sistemi, se si pone

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = S ,$$

diviene

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{2} S , \quad x_1 + x_3 = \frac{3}{4} S , \quad x_1 + x_4 = \frac{4}{5} S$$

e dà anzitutto

$$x_1 = \frac{73 S}{120} ;$$

quindi

$$x_2 = \frac{7 S}{120} , \quad x_3 = \frac{17 S}{120} , \quad x_4 = \frac{23 S}{120} ;$$

ciò prova che la soluzione minima corrisponde a $S = 120$ ed è pertanto

$$x_1 = 73 , \; x_2 = 7 , \; x_3 = 17 , \; x_4 = 23 .$$

Similmente, per il secondo sistema.

Che tale applicazione sia proprio dovuta a TIMARIDA, non possiamo asserire; ma, il fatto solo che esiste basta a crescere il valore dell'*epantema*.

CAPITOLO III.

L'aritmetica nell'Accademia

25. - Altre notizie sulla scienza aritmetica dei Pitagorici si ottengono indirettamente esaminando (come ora ci apprestiamo a fare) le cognizioni sopra i numeri possedute dal più illustre dei discepoli del filosofo di Samo (1), cioè PLATONE (2).

Rileviamo, anzitutto, che alle sue opere si deve in massima parte se si è conservata la schietta distinzione, formulata da PITAGORA, fra l'aritmetica teorica e l'aritmetica pratica, fra lo studio delle proprietà dei numeri e la determinazione dei procedimenti di calcolo, fra ἀριθμητική e λογιστική. Della prima soltanto si è occupato il « divino filosofo », ritenendo che « l'aritmetica, per sua natura, sembra appartenere a tutto ciò che eleva l'anima verso la pura intelligenza e la guida alla contemplazione dell'essere (3) »; e confermava le sue preferenze sentenziando che « l'arte del calcolo non deve essere trattata come fa il volgo, ma in modo da condurre gli uomini a conoscere l'essenza dei

---

(1) " I Pitagorici, di cui PLATONE addotta spesso il parere „, scrive TEONE SMIRNEO (ed. DUPUIS, p. 18); " Plato, studiosissimus Pythagorae „ dice BOEZIO (ed. FRIEDLEIN, p. 139).

(2) Riguardo a PLATONE come matematico, veggansi i lavori citati nella nota (4) a p. 109. Maggiori notizie su tale soggetto si avrebbero se si potesse ritrovare l'opera *Il Platonico*, composta da ERATOSTENE e ricordata da TEONE SMIRNEO (ed. DUPUIS, p. 99).

(3) TEONE ed. DUPUIS, p. 6.

numeri (1) ». Dai suoi maestri tolse la distinzione dei numeri in pari e dispari, assegnando, come facevano i Pitagorici, ai primi il posto più onorevole; ma, mentre questi posero l'unità tanto fra i pari che fra i dispari, egli a ragione la pose nella categoria dei secondi. Egli conobbe eziandio la distinzione dei numeri non primi in quadrati ed oblunghi, in cubi e non cubi, nonchè le grandezze irrazionali quadratiche e subiche (2); anzi, come sappiamo (v. p. 51), in uno de' suoi più celebri dialoghi, egli ha reso conto di alcuni risultati ottenuti sopra tale argomento dal suo maestro TEODORO da Cirene.

Inoltre ARISTOTELE afferma che conobbe la distinzione degli ἀριθμοὶ εἰδητικοί dagli ἀριθμοὶ μαθηματικοί, comprendendo egli sotto questo nome i numeri generali che EUCLIDE rappresentava mediante segmenti rettilinei e che noi soliamo rappresentare con lettere. Dei *numeri armonici* (ἀριθμοὶ ξυμφωνοι), pure considerati dal divino filosofo, non si è serbato che il nome, il quale attesta la loro connessione con la teoria della musica. Ignoto è pure il valore del *numero nuziale*, a cui egli, ispirandosi al misticismo aritmetico inaugurato da PITAGORA, assegnò un ufficio sociale di straordinaria importanza (3). Nè va taciuto che le sue cognizioni sulla divisibilità, dovevano essere di qualche estensione, chè, altrimenti, come avrbbbe potuto asserire, nel V Libro delle *Leggi*, che il numero 5040 possiede 59 divisori, fra cui non è compreso 11, e che basta togliervi 2 per ottenere un multiplo di 11?

26. - Inoltre molti passi di quelle opere attestano la profonda conoscenza che PLATONE possedeva delle proporzioni, il che concorda con l'essere egli annoverato fra i matematici discepoli di PITAGORA, nella cui scuola, come sappiamo (p. 36), le proporzioni sorsero forse e certo prosperarono. Aggiungasi che NICOMACO da Gerasa attribuisce a PLATONE i teoremi (*Elementi* di EUCLIDE, Lib. VIII, prop. 12 e 12) « fra due quadrati vi è una media proporzionale, fra due

(1) Id., p. 8.

(2) B. ROTHLAUF, *Die Mathematik zu Platon's Zeiten und seine Beziehungen zu ihr*. München, 1878, p. 27.

(3) V. l'*Appendice* al presente Libro.

cubi ve ne sono due (1) ». Finalmente PROCLO (2) fa merito a lui di avere inventato un procedimento per costruire un triangolo rettangolo in numeri, analogo a quello dovuto a PITAGORA (v. p. 799), ma differente e quasi complementare di esso. Ecco in che cosa consiste: si prenda come primo cateto un numero pari arbitrario a, allora, come secondo cateto, si potrà assumere $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1$ e, come ipotenusa, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$. Applicandolo si trovano successivamente i seguenti triangoli:

$$(4, 3, 5), (6, 8, 10), (8, 15, 17), (10, 24, 26), \ldots;$$

alcuni di essi si ottengono con un semplice raddoppiamento dei lati di triangoli già noti, mentre altri sono totalmente nuovi.

Quale sentiero abbia battuto PLATONE per giungere all'enunciata regola, è difficile dire; ma vi è un ragionamento che conduce ad essa, nonchè a quella di PITAGORA (3), tanto semplice che crediamo opportuno indicarlo come quello che forse (sia pure sott'altra forma) avranno adoperato gli antichi:

Siano x, y, z tre numeri interi fra loro primi od aventi 2 per massimo comune divisore; x, y siano cateti e z ipotenusa di un triangolo rettangolo. Essendo

$$x^2 + y^2 = z^2$$

sarà

$$(1) \qquad x^2 = (z + y)(z - y).$$

A questa relazione si soddisfa ponendo

$$z + y = x^2 \quad , \quad z - y = 1$$

---

(1) B. ROTHLAUF (op. cit., p. 35-38) ha rilevato un passo delle opere di PLATONE ove tale proposizione è applicata e così tolse ogni indeterminatezza all'asserzione fatta da HANKEL (*Zur Geschichte d. Mathem.*, etc., Leipzig, 1874, p. 131) scrivendo: " diese zwei Theoreme werden wohl schon den Platonikern im Wesentlichen bekannt gewesen sein „.

(2) PROCLO-TAYLOR, T. II, p. 206.

(3) A quest'ultima si può giungere con un metodo ancora più elementare che venne segnalato da R. KLIMPERT (*Storia della geometria*, trad. P. FANTASIA, Bari, 1901, p. 24).

onde

$$y = \frac{x^2 - 1}{2} \quad , \qquad z = \frac{x^2 + 1}{2}$$

affinchè y e z risultino interi dev'essere x dispari, ed allora y e z sono dati dalla regola di PITAGORA. Ma la relazione (1) è verificata anche ponendo

$$z - y = 2 \quad , \qquad z + y = \frac{x^2}{2} ,$$

onde

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 \quad , \qquad z = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 \; ;$$

qui, affinchè y e z risultino interi, x deve essere pari, ed in tale supposizione si ritrova la regola di PLATONE.

Ognun vede come nulla autorizzi a negare a PITAGORA e PLATONE la capacità di immaginare la sostanza di questa elementarissima argomentazione. E si noti che la stessa guida al metodo più generale indicato da EUCLIDE nel X Libro degli *Elementi* (prop. 28 e 29 ; v. p. 232) ; posto infatti $x = bc$, la (1) diviene

$$b^2c^2 = (z + y)(z - y) ,$$

a cui si può soddisfare ponendo

$$z + y = b^2 \quad , \qquad z - y = c^2 ,$$

onde

$$y = \frac{b^2 - c^2}{2} \quad , \qquad z = \frac{b^2 + c^2}{2} ,$$

conformemente alla regola di EUCLIDE.

Riguardo al metodo di PLATONE per costruire triangoli rettangoli in numeri razionali, va notato che, nella *Geometria* che porta il nome di BOEZIO (cfr. p. 804), esso viene attribuito ad ARCHITA ; onde è verosimile (1) che esso sia stato realmente inventato dal celebre tarantino; che questi

(1) ALLMAN, *Greek geometry from Thales to Euclid.* Dublin, 1889, p. 108.

lo abbia poi insegnato a PLATONE, il quale, più tardi, lo avrà pubblicato senz'indicare la fonte a cui aveva attinto.

27. - Ritorniamo per un momento ancora al passo già citato (p. 811) della *Repubblica*, ove PLATONE parla del « numero nuziale », per fare due osservazioni.

La prima si riferisce alla frase « diametro razionale di 5 » ivi adoperata; con essa PLATONE intendeva di designare il numero 7 come massimo intero contenuto nella diagonale del quadrato avente per lato 5, cioè in $\sqrt{50}$; basta questa semplice frase per fare risalire — come vorrebbe P. TANNERY (1) — a PLATONE la generazione che tra poco (p. 835) vedremo esposta da TEONE SMIRNEO (2) dei « numeri diametrali e laterali » ossia la soluzione delle due equazioni indeterminate

$$2x^2 - y^2 = \pm 1 \text{ ?}$$

Noi incliniamo a rispondere negativamente, giacchè la considerazione del massimo intero contenuto in un numero razionale è così spontanea, che non presuppone, nè tampoco trae seco, quella assai più artificiosa e riposta di numeri diametrali e laterali.

Nel medesimo passo è fatto cenno di un *numero perfetto* concernente la generazione divina, cioè di un numero che regola le rivoluzioni degli astri. Qual era tal numero? Esclusa l'ipotesi che la parola « perfetto » fosse presa nel consueto suo significato aritmetico, si può adottare l'opinione di ARISTIDE QUINTILIANO (3), che il numero perfetto di PLATONE fosse 360, cioè il prodotto di 3, per 10 e per 12, perimetro del celebre triangolo rettangolo avente per lati 3, 4, 5. Ma è forse miglior consiglio il seguire F. HULTSCH (4), il quale, escludendo che PLATONE alludesse ad alcuno dei numeri (1, 3, 4, 6, 7, 10) nei quali gli antichi avvertirono qualche perfezione (5), suggerì di riserbare lo studio di quella

(1) *L'éducation platonicienne*, II Article (Revue philosophique, T. XI, 1881, p. 291.

(2) Ed. DUPUIS, p. 70.

(3) V. TH. H. MARTIN, *Le nombre nuptial et le nombre parfait de Platon* (Revue archéol., T. XIII, 1857).

(4) Zeits. f. Math. u. Phys., T. XXVII, 1882, Hist.-lit. Abth., p. 56.

(5) DEMME, *Die Platonische Zahl* (Zeitschr. f. Math. und. Phys., Math. u. Phys., T. XXXII, 1887).

frase a quando si sarà in possesso di notizie sicure intorno alle osservazioni astronomiche, i cui risultati vennero trasportati in Grecia dall'Egitto e da Babilonia anteriormente a PLATONE. Per tale ragione non è il caso di arrestarci sulla determinazione di un numero il quale, anche se fosse noto, avrebbe più interesse per lo storico dell'astronomia che per quello dell'aritmetica. Ma un cenno almeno ne andava fatto, per presentare una novella conferma di ciò che risulta da tutto quanto esponemmo in questo Capitolo, dell'essere, cioè, PLATONE matematico tutto imbevuto delle idee di PITAGORA, le quali egli non faceva che esporre, talvolta svolgere e più spesso applicare.

28. - Tale indirizzo prettamente pitagorico, che ebbero le ricerche aritmetiche nell'Accademia, anche dopo la scomparsa di PLATONE (1), è confermato da un passo, di cui già ci occupammo (v. p. 129), dei *Theologumena arithmetica*, ove si legge la seguente notizia:

> SPEUSIPPO, figlio di POTONE, sorella di PLATONE, a cui egli succedette nell'Accademia prima di ZENOCRATE, non smise di studiare le lezioni dei Pitagorici e sopratutto gli scritti di FILOLAO; egli compose un graziosissimo libro che intitolò *Sui numeri pitagorici*. Dal principio sino alla metà egli tratta con rara eleganza: 1.° dei numeri lineari, poligonali, piani e solidi di ogni specie; 2.° di cinque figure che si attribuiscono agli elementi del mondo, delle loro proprietà e simili; 3.° delle proporzioni continue e discontinue. La seconda metà del libro è consacrato alla decade.

Questa opera di SPEUSIPPO andò perduta; egual sorte toccò a quella *Sui numeri* ed alla *Teoria dei numeri* che DIOGENE LAERZIO attribuisce a SENOCRATE, successore di SPEUSIPPO: sicchè il quadro che ci sta innanzi dell'opera aritmetica della scuola platonica è assai incompleto.

E poco meno imperfetta è la nostra cognizione dell'influenza che esercitarono, oltre i confini dei giardini di ACCADEMO, le incessanti esortazioni di PLATONE allo studio delle proprietà dei numeri. Coloro che erano destinati a subirla direttamente erano gli scienziati adunati nel Museo di Ales-

(1) Cfr. E. ZELLER, *Die Philosophie der Griechen*, II Tl., I. Abt., IV Aufl., Leipzig, 1889, p. 982 e segg.

sandria ed i loro contemporanei o discepoli; ma questi non lasciarono una collezione di lavori aritmetici comparabile a quella che determinò il periodo aureo della geometria greca. Vero è che nei libri aritmetici di EUCLIDE (v. p. 218-234) troviamo ottimamente sistematizzati i fondamenti dell'aritmetica; ma l'abbigliamento geometrico, nel quale questa viene ivi presentata da EUCLIDE, per quanto elegante, fu riguardato dai posteri piuttosto come un travestimento che importava togliere: sicchè, se in geometria tutti, volenti o nolenti, dobbiamo riguardarci per discepoli del sommo alessandrino, in aritmetica dobbiamo piuttosto considerarci per seguaci di PITAGORA. Nè come veri e propri capi-scuola in aritmetica sono da considerarsi ARCHIMEDE ed APOLLONIO, malgrado gli studi che già conosciamo (v. p. 754 e 758) ed altri che ci occuperanno poi (n. 60). Nè tampoco merita tale dignità ERATOSTENE, almeno se giudicato in base al suo procedimento empirico per costruire una tavola di numeri primi (v. p. 348-349), nè IPSICLE per avere formulato alcune proposizioni notevoli sulle progressioni (v. p. 504) e per avere concepito in generale, come attesta DIOFANTO (v. n. 57), i numeri poligonali.

Una prova indiretta dell'assenza durante il periodo greco-alessandrino di una vera scienza aritmetica, una nel metodo, ma varia ne' risultati, sta in ciò, che più tardi fu ritenuto utile al progresso della scienza l'abbandono delle considerazioni aritmetico-geometriche preferite da EUCLIDE e da' suoi contemporanei, per riprendere l'esame diretto della serie naturale dei numeri: gli è quanto venne fatto dai Neo-Pitagorici e dai Neo-Platonici. Quali risultati siansi così ottenuti vedremo nel Cap. seguente. Ma fin d'ora va notato come la sconfinata ammirazione per PITAGORA e PLATONE abbia vietato ai loro seguaci di purificare l'aritmetica, eliminandone l'elemento mistico; in conseguenza le aggiunte fatte hanno lo stesso stile delle teorie antiche, il che rende estremamente malagevole il discernere i residui di queste dalle addizioni posteriori.

CAPITOLO IV.

L'aritmetica mistica

29. - Le varie fasi di sviluppo della geometria greca presentano fra di loro quella concatenazione che lega causa ad effetto, antecedente a conseguente, concatenazione tanto salda che non fu turbata nemmeno dai cambiamenti nella sede degli studiosi, nè dalla diversità delle razze a cui appartennero. Assurta, dopo TALETE, per merito specialmente di PITAGORA, alla dignità di scienza, essa presentasi tosto sotto quei lineamenti rigorosamente scientifici, che erano destinati ad accentuarsi durante il periodo aurea della geometria greca ed a non perdersi nemmeno nell'èra dei commentatori, nell'epoca di decadenza, in quello che noi chiamammo periodo argenteo.

Per converso nella storia dell'aritmetica dei Greci si possono notare due indirizzi schiettamente distinti. L'uno — che ha il suo fondamento principale nella rappresentazione dei numeri mediante segmenti di retta e dei loro prodotti mediante aree rettangolari — ha la propria ragione di essere nella spiccata vocazione del popolo ellènico per lo studio dei fenomeni plastici ed ha oggi come proprio unico rappresentante EUCLIDE (Lib. VII-X degli *Elementi*), non essendosi sottratte all' ingiuria del tempo le altre opere congeneri, che certamente avranno esistito. Nell'altro indirizzo procedono quelle esposizioni veramente pure, non contenenti, cioè, alcun elemento estraneo alla natura del numero; le scaturigini ed il primo stadio di svolgimento di tale procedimento esistono nella scuola di PITAGORA. L'aritmetica

così concepita diviene proprietà di tutti in Atene, grazie all'insegnamento di PLATONE, ma bentosto scompare, ecclissata forse dalla disciplina sorella, imperante dispoticamente per volere di EUCLIDE; però finisce per riprendere il sopravvento nell'istante della rinascita del Pitagorismo. È di questo ritorno all'antico che dobbiamo ora occuparci (1), specialmente perchè esso è preludio, e forse preparazione del sorgere di una stella di prima grandezza, l'ultima che troveremo nel cielo matematico dei Greci, cioè della comparsa di DIOFANTO.

Nicomaco da Gerasa.

30. - La prima opera di aritmetica pura che si presenta al nostro esame è quella *Introduzione aritmetica* (Εἰσαγωγὴ ἀριθμητική) in due libri che scrisse NICOMACO (2), nato a Gerasa, città di ubicazione mal nota, ma probabilmente sita in Arabia. Siccome in uno scritto di NICOMACO sulla *Musica* è citato TRASILLO, che visse sotto TIBERIO, e siccome NICOMACO è ricordato da PAPPO, così è probabile che egli abbia vissuto sullo scorcio del I secolo dell'E. v. od al principio del II. Che le sue opinioni lo facessero ascrivere alla scuola dei Neo-Pitagorici, si deduce dal fatto che PAPPO lo designa col nome di Νικόμαχος ὁ Πυθαγορικός (3).

---

(1) I risultati che esso diede sono compendiati nella già citata *Theoretic Arithmetic* di T. TAYLOR (London, 1816) " containing the substance of all has been written on this subject, by Theo of Smirna, Nicomachus, Iamblichus, and Boetius. Together with some remarquable particulars respecting perfect, amicable ad other numbers wich are not to be found in the writings of any ancient or modern mathematicians. Likewise a specimen of the manner in which the Pythagoreans philosophized aboud number; and a developement of theier mystical and theological arithmetic „.

(2) La più antica edizione di quest'opera fu fatta a Parigi nel 1538; ad essa segue quella dell'AST (Lipsia, 1817); l'ultima e migliore uscì nel 1866 per cura dell'HOCHE. Cfr. TH. M. MARTIN, *Chapitres IX e XX du Livre second de l'Introduction arithmétique de Nicomaque de Gérase* (Annali delle Sc. matem. e fis., T. VIII, 1857, p. 429-446).

(3) PAPPO ed. HULTSCH, p. 84.

Malgrado la fama straordinaria che ebbe l'*Introduzione* (1), intorno al suo autore non sappiamo, se non quel poco che testè riferimmo, onde non è il caso di arrestarci ulteriormente sopra la sua biografia. Volgendoci all'opera matematica che di lui conosciamo, noteremo essere dessa indirizzata agli studenti in filosofia: essa surrogò tutti gli scritti anteriori, divenne la base dell'insegnamento, ebbe innumerevoli commenti (2) e, grazie alla versione latina fattane da BOEZIO, la sua influenza si prolungò per tutto il Medio Evo. Tale enorme successo è ingiustificato: chè, se anche è esagerata l'asserzione di ISIDORO di Siviglia, che NICOMACO non espone se non i ritrovati aritmetici dei Pitagorici, pure è indubitato che molta parte di quanto egli insegna risale al tempo di PITAGORA e di PLATONE. Di più il suo stile, paragonato a quello di EUCLIDE, segna un indiscutibile regresso, dal momento che egli sembra privo della cognizione di ciò che s'intende per «dimostrazione di un teorema sopra i numeri», giacchè ritiene di avere stabilita una siffatta proposizione, non appena l'abbia riscontrata vera in qualche caso particolare. Se per giustificare tale modo di procedere antiscientifico

---

(1) Per dimostrare la rinomanza di NICOMACO, T. TAYLOR (op. cit., p. XXXII) e poi il NESSELMANN (*Die Alg. der Griechen*, p. 220) riferirono la frase di LUCIANO " tu calcoli come NICOMACO di Gerasa! „ la quale, sotto aspetto proverbiale, è riferita da FABRICIUS (*Bibl. graeca*, T. V, p. 635). Il GOW ha rintracciato in LUCIANO (*Philopatris*, p. 12) quel verso, attribuendovi lo stesso significato laudativo notato dal TAYLOR e dal NESSELMANN (v. *A short history of greek mathematics*, Cambridge, 1984, p. 89). Ma, secondo P. TANNERY (v. *Bull. des Sc. math.*, II série, T. IX, 1885, p. 158-9), il verso citato non è un complimento rivolto ad un calcolatore, ma sibbene un'ironia che non depone a favore di NICOMACO. A noi sembra che, anche ammessa tale interpretazione, il verso di LUCIANO attesta la grande notorietà di cui NICOMACO godeva, anche fra i non matematici, nel II sec. dell'E. v.

(2) Ricordiamo fra i chiosatori di NICOMACO, oltre a PROCLO e GIAMBLICO, del quale ci occuperemo presto, il platonico e sofista APULEJO di Madaura (II sec. dell'E. v.), GIOVANNI D'ALESSANDRIA (*Johannes Philoponus in Nicomachi Introductionem Arithmeticam*, ed. HOCHE, Lipsiae, 1864 e Berolini, 1867) e ASCLEPIO da Tralle (inedito) discepolo di AMMONIO e poco più giovane di SIMPLICIO (v. P. TANNERY in *Notices et extraits*, etc., T. XXXII, 1886, 1ère partie, p. 122).

valga il considerare che NICOMACO, essendosi proposto soltanto di accendere nell'animo del suo lettore l'amore per l'aritmetica, soppresse le tediose dimostrazioni, ponendo in loro vece più o meno brillanti considerazioni filosofiche, altri giudichi; quello che è certo si è, che tal modo di procedere, forse, poteva stimolare allo studio dell'aritmetica, ma non avrà somministrato ad alcuno le forze e gli ordigni necessari per risolvere un problema o per compiere una pur che sia investigazione originale.

31. - Premesse queste osservazioni generali sull'indole della *Introduzione aritmetica*, la percorreremo rilevando ciò che vi si trova di più saliente. Saltiamo a piè pari i primi sei capitoli perchè costituiscono un preludio esclusivamente filosofico (1), ed osserviamo che nel recinto prettamente aritmetico si penetra mediante la definizione di numero. Segue la distinzione de' numeri in pari (ἄρτιοι) e dispari (περιττοί), seguita dalla proposizione « ogni numero è la semisomma dei due ad esso contigui $\left(a = \frac{\overline{a-1} + \overline{a+1}}{2}\right)$, eccetto l'unità, che è eguale alla metà del numero che la segue ». Si incontrano poi le definizioni dei numeri ἀρτιάκις ἄρτιοι, ἀρτιοπέριττοι e περισσάρτιοι, che sono quelli delle forme: 2^n , $2(3m+1)$ e $2^{n+1}(2m+1)$; sono i nomi stessi che si incontrano negli *Elementi* di EUCLIDE (Lib. VII, def. 8-10), ma con significati un po' differenti e scelti con criteri che segnano un progresso sul metodo dell'Alessandrino. Con i numeri della terza delle suddette categorie si formi il seguente quadro:

$$\begin{array}{ccccccc} 2^2\times 1 & , & 2^2\times 3 & , & .. & 2^2(m+1) \\ 2^3\times 1 & , & 2^3\times 3 & , & .. & 2^3(m+1) \\ \vdots & : & \vdots & :: & & \vdots \\ 2^{n+1}\times 1 & , & 2^{n+1}\times 3 & , & .. & 2^{n+1}(2m+1) \end{array}$$

e si vedrà tosto che (come osserva il Geraseno) « in ogni orizzontale la somma dei due estremi è eguale alla somma

(1) M. SIMON ha di recente tradotto in tedesco e commentato questo esordio: v. l'articolo *Die ersten 6 Kapiteln des Institutio arithmetica des Nikomachos* (Festschrift M. CANTOR anlässlich seines LXXX Geburtstage, Leipzig, 1909).

dei medi se m è pari od al doppio del termine medio se m è dispari; invece in ogni verticale il prodotto dei due estremi è eguale al prodotto dei termini medi se n è pari od al quadrato del termine medio se n è dispari».

I cap. 11-13 del I Libro della *Introduzione* sono dedicati ai numeri primi ed ai numeri composti: qui NICOMACO, trascinato dai principi della scuola a cui era affigliato (e precisamente dalla massima generale che ogni collezione di cose doveva ammettere una distinzione in tre categorie) divide tutti i numeri in primi assoluti, composti e primi relativi, violando così la legge, da rispettarsi in qualsiasi classificazione, che ogni elemento di una classe non entri in alcuna delle altre. Nell'ultimo dei citati capitoli incontriamo lo staccio di ERATOSTENE; già lo descrivemmo (v. p. 348) onde è superfluo riparlarne (1); solo osserviamo che NICOMACO dà torto ad EUCLIDE per avere posto il 2 fra i numeri primi, fondando la sua accusa sul puerile pretesto che la tavola di numeri primi costruiti da ERATOSTENE si apre col numero 3!

Nei cap. 14-16 egli fa conoscere la sostanza di quanto EUCLIDE lasciò scritto intorno ai numeri esuberanti, perfetti e deficienti e, applicando il metodo insegnato negli *Elementi* (v. p. 220), trova essere 6, 28, 496 e 8128 i primi quattro numeri perfetti. Osserva poi quanto raramente numeri siffatti s'incontrino nella serie naturale, giacchè se ne trova uno nella prima decina, uno nel primo centinaio, uno nel primo migliaio ed uno nella prima miriade; nota pure che le ultime cifre di quei quattro numeri sono alternativamente 6 e 8 ed aggiunge che il procedimento euclideo può applicarsi indefinitamente (almeno teoricamente, chè in pratica la complicazione dei calcoli costringe ad abbandonarlo), asserzione questa di cui, nemmeno oggi, siamo in grado di misurare l'esattezza, perchè è ancora ignoto se esistano infiniti numeri primi della forma $2^n - 1$.

Il cap. 17 si apre colle parole:

Dopo di avere esposto nelle pagine precedenti le nozioni preliminari relative alle grandezze prese separatamente, passo ora allo studio delle relazioni scambievoli fra le grandezze.

(1) Cfr. anche BOEZIO ed. FRIEDLEIN, p. 33.

La relazione fra una grandezza ed un'altra è in generale di due specie, cioè eguaglianza e diseguaglianza. Sull'eguaglianza non c'è nulla a dire, perchè di due grandezze eguali nessuna può avere qualche particolarità che non sia posseduta anche dall'altra. Due facce invece ha la diseguaglianza, cioè la grandezza maggiore e la minore. A norma delle varie specie di dipendenza reciproca, tanto la grandezza maggiore quanto la minore hanno dei nomi speciali. Ed in realtà si sogliono distinguere cinque sorta di relazioni.

Cioè può accadere:

1.° (cap. 18) che una delle grandezze date sia divisibile per l'altra; allora la maggiore è un *multiplo* (πολλαπάσιος) della minore e questa invece un *summultiplo* (ὑποπολλαπλάσιος) di quello;

2.° (cap. 19) che la grandezza maggiore stia alla minore nel rapporto $\frac{p+1}{p}$ ed allora prima dicesi ἐπιμόριος (lat. *superparticularis*) e la seconda ὑπεπιμόριος (lat. *subsuperparticularis*). Al rapporto fra le due grandezze si dànno poi nomi speciali a norma del valore di p, nomi caduti in dimenticanza e che non vale la pena di richiamare;

3.° (cap. 20 e 21) che la grandezza maggiore (detta ἐπιμερής, lat *superpartiens*) stia alla minore (detta ὑπεμιμερής, lat. *subsuperpartiens*) nel rapporto $\frac{2m+n}{m+n}$; anche qui il rapporto $\frac{2m+n}{m+n}$ prende nomi speciali in corrispondenza a valori particolari del rapporto $\frac{m}{n}$;

4.° (cap. 22) che la grandezza più grande stia alla più piccola come $mn+1$ sta a n; quella porta, in tal caso, il nome di πολλαπλασιεπιμόριος, questa, invece, il nome di ὑποπολοαπλασιεπιμόριος;

5.° (cap. 23) che finalmente il rapporto fra le grandezze considerate sia $\frac{p(m+n)+m}{m+n}$.

Per quanto queste distinzioni siano poco importanti (sicchè assieme alla conseguente nomenclatura, vennero, in processo di tempo eliminate dall'aritmetica) pure era indispensabile farne cenno perchè rimasero classiche in tutto l'Oc-

cidente, sino a che venne importata in Europa l'aritmetica degli Indiani e degli Arabi.

NICOMACO chiude le esposte classificazioni facendo notare che « dall'eguaglianza, come fonte unica e primordiale, scaturiscono tutte le varie forme di diseguaglianza e le loro differenze ».

32. - Maggiore importanza possiede il II Libro dell'*Introduzione*, ove sono sparse molte considerazioni relative a serie, i cui termini si seguono secondo una determinata legge.

Premesse alcune osservazioni atte a cementare questo Libro col precedente, NICOMACO osserva (cap. 3) che se, partendo dalla propressione geometrica

$$u_n = r^n \ (n = 0 , 1 , 2 , \ldots),$$

si costruisce la serie

$$u'_n = r^{n-1} + r^n \ (n = 1 , 2 , \ldots),$$

il rapporto di un termine della seconda al termine omologo della prima è della specie di quelli a cui è consacrato il cap. 19 del Libro I ; ed infatti

$$\frac{u'_{n+1}}{u_n} = \frac{r + 1}{r} .$$

La stessa proprietà ha luogo se si parte da una progressione geometrica il cui primo termine sia diverso da 1 ; in particolare (cap. 4) se si opera sulla serie u'_n come si operò sopra u_n. Così facendo e proseguendo nello stesso modo si ottiene la seguente serie di serie :

$$\begin{array}{lllll}
1 & r & r^2 & r^3 & , \ \ldots \\
 & r + 1 & r^2 + r & r^3 + r^2 & , \ \ldots \\
 & & r^2 + 2r + 1 & r^3 + 2r^2 + r & , \ \ldots \\
 & & & r^3 + 3r^2 + 3r + 1 & , \ \ldots \\
 & & & \ldots\ldots\ldots & \\
\ldots , & r^n \ \ldots & & & \\
\ldots , & r^n + r^{n-1} \ \ldots & & & \\
\ldots , & r^n + 2r^{n-1} + r^{n-2} \ \ldots & & & \\
\ldots , & r^n + 3r^{n-1} + 3r^{n-2} + r^{n-3} , \ \ldots & & & \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & &
\end{array}$$

i cui primi termini sono le potenze successive di $r + 1$. Va notato che il procedimento che serve a ottenere questa successione di numeri è lo stesso che, applicato alla serie 1 , 2 , 3 , ... , dà il celebre « triangolo aritmetico » (1).

Ai numeri poligonali NICOMACO arriva osservando come qualunque numero sia somma di alcuni termini della progressione geometrica (di ragione 1)

$$1 , 1 , 1 , \ldots \text{ (2)};$$

partendo invece dalla progressione aritmetica

$$1 , 2 , 3 , \ldots$$

e sommandone alcuni primi termini NICOMACO ottiene un numero *triangolare*. La stessa operazione eseguita sulla serie

$$1 , 3 , 5 , \ldots$$

dà un numero *quadrato*. Queste cose erano probabilmente già note a PITAGORA. Estendendo la portata del metodo or ora usato, applicandolo, cioè, alla progressione

$$1 , 4 , 7 , \ldots ,$$

NICOMACO ottiene un numero che chiama *pentagonale*, per un'ovvia ragione geometrica. Similmente nascono i numeri *esagonali*, *ettagonali*, ecc. In generale, se si considera la progressione

$$1 , 1 + d , 1 + 2d , \ldots , 1 + (n - 1)\, d , \ldots$$

si arriva al *numero poligonale* (n^{mo} e di $d + 2$ lati)

$$\frac{2 + (n - 1)\, d}{2}\, n,$$

già considerato da IPSICLE a quanto afferma DIOFANTO (v. n. 57). Questi numeri sono legati da molte relazioni, di cui

---

(1) V. B. PASCAL, *Traité du triangle arithmétique* (*Oeuvres de Blaise Pascal*, T. V, La Haye. 1775).

(2) A questa osservazione si collega il passo di NICOMACO che riferimmo nella nota (1) a p. 748).

Nicomaco dà parziale notizia; egli osserva, ad esempio, che «ogni numero quadrato è somma di due triangolari» (1) e più generalmente che «l'n^{mo} numero poligonale di $d+2$ lati è eguale all'n^{mo} numero poligonale di $d+1$ lati aumentato dell'$(n-1)^{mo}$ numero triangolare» (2).

Le riferite definizioni ed i relativi teoremi ebbero senza dubbio la loro radice in considerazioni geometriche; analoghi sono i fondamenti della considerazione dei *numeri solidi*. Tra i quali notiamo i *piramidali* a base qualunque, ognuno dei quali è la somma di un certo numero di numeri poligonali simili; così la somma dei primi n numeri poligonali di $d+2$ lati è il numero

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left\{k+d\,\frac{k(k-1)}{2}\right\}=\frac{n(n+1)}{2}+d\,\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{6}\ (3).$$

Togliendo da questo il numero 1 nasce un numero poligonale *troncato* (κόλουρος); toglienda anche il seguente numero poligonale il numero è *bitroncato* (δικόλουρος), ecc.;

---

(1) Infatti

$$n^2=\frac{(n-1)\,n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}.$$

(2) Infatti

$$\frac{2+(n-1)\,d}{2}\,n=\frac{2+(n-1)\,(d-1)}{2}\,n+\frac{n(n-1)}{2}.$$

(3) Questa espressione non è data da Nicomaco. Proseguendo la costruzione indicata si arriva a nuovi numeri, cioè ai seguenti:

$$\sum_{k=n}^{k=1}\left\{\frac{k(k+1)}{2}+d\,\frac{(k-1)\,k\,(k+1)}{6}\right\}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}+d\,\frac{(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}.$$

Spingendosi ancor più innanzi sulla stessa via si ottengono dei numeri iperpiramidali la cui espressione generale è:

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p!}+d\,\frac{(n-1)\,n\,(n+1)\ldots(n+p-2)}{(p+1)!}.$$

tutti questi numeri si possono considerare come differenza tra due numeri piramidali a basi simili.

Dalla considerazione dei fattori di un numero provengono altri enti aritmetici considerati da NICOMACO: precisamente i *cubi*, i *travi* (ροκίδες o στηλίδες), i *tetti* (πλινθιδες) ed i *cunei* σφηνίσκοι) (1); sono numeri delle seguenti forme:

$$m^3 \quad , \quad m^2(m+n) \quad , \quad m^2(m-n) \quad , \quad m \times n \times p \, ;$$

in particolare un numero del tipo $m^2(m+1)$ è un *parallelepipedo*. Similmente fra i numeri piani emergono i *quadrati* e gli *eteromechi* (ἑτερομήκεις, numeri della forma $m(m+1)$), i quali sono legati ai numeri triangolari da notevoli relazioni, su cui NICOMACO si estende con visibile compiacenza e che devono venir qui riferite. Posto

$$q_n = n^2 \, , \; e_n = n(n+1) \, , \; t_n = \frac{n(n+1)}{2} \, ,$$

tali relazioni si possono esprimere come segue:

$$\frac{e_n}{q_n} = \frac{n+1}{n} \, , \; e_n - q_n = n \quad , \quad \frac{q_n}{e_{n-1}} = \frac{n}{n-1} \, , \; \frac{q_n}{e_n} = \frac{e_n}{q_{n+1}}$$

$$q_{n+1} - q_n = 2n+1 \quad , \quad e_{n+1} - e_n = 2n+2$$

$$q_n + q_{n+1} + 2e_n = q_{2n+1} \quad , \quad e_n + e_{n+1} + 2q_{n+1} = q_{2n+2}$$

$$q_n + e_n = t_{2n} \quad , \quad q_{n+1} + e_n = t_{2n+1} \, .$$

NICOMACO avverte ancora che « fra due quadrati consecutivi cade sempre uno ed un solo eteromeco » (è la media geometrica di quelli), e che « se q è un quadrato $q \pm \sqrt{q}$ sono due eteromechi ». Sopra tutti questi teoremi eccelle quello che insegna potersi « qualunque cubo ottenere come somma di un certo numero di termini di una progressione aritmetica »; tale notevole fatto è espresso dalle seguenti identità:

$$(n^2+n+1) + (n^2+n+3) + \ldots + (n^2+3n+1) = (n+1)^3 ,$$

(1) Questi nomi furono già da noi incontrati nelle *Definizioni* attribuite ad ERONE (v. p. 603).

di cui NICOMACO conosce almeno i più semplici casi particolari (1). Addizionando tutte quelle che nascono da essa facendo $n = 0, 1, \ldots, r - 1$ si conclude

$$1^3 + 2^3 + \ldots + r^3 = \left[\frac{r\,(r+1)}{2}\right]^2;$$

ora, benchè questa formola non si trovi nè in NICOMACO nè in altra opera greca, pure è probabile sia stata osservata da qualche compatriota di EUCLIDE, dal momento che i Romani la conoscevano (2).

Aggiungiamo che fra i numeri piani NICOMACO considera ancora i *circolari* e fra i solidi gli *sferici;* i primi sono quadrati di numeri che terminano con una delle cifre 1, 5, 6; i secondi sono i cubi dei medesimi; questi numeri godono essi pure la proprietà di avere come ultime cifre 1, 5 o 6.

Quale importanza tali numeri possedessero agli occhi dei nuovi ed antichi seguaci di PITAGORA risulta da quel passo del *Commento* di SIMPLICIO che fu così prezioso ausiliare nella determinazione dei meriti scientifici d'IPPOCRATE da Chio (v. p. 78). Ivi infatti si legge:

> Ma alcuni, dice ALESSANDRO (d'Afrodisia), credono che quando si fosse trovato un numero quadrato che fosse anche ciclico, allora anche fra le grandezze geometriche si sarebbe trovata una quadratura del cerchio. Ora un numero quadrato, egli dice, è un numero tale, che proviene dalla moltiplicazione di un numero per sè stesso: chiamansi invece ciclici i numeri tali che risultano da numeri dispari consecutivi, p. es. dall'addizione di 1, 3, 5, 7, 9, 11. Ora se essi avessero trovato fra i risultanti numeri un quadrato che fosse in pari tempo ciclico, come ad es. 36 (quadrato perchè risulta dalla moltiplicazione di 6 per sè stesso, e ciclico, perchè risultante dalla addizione dei numeri dispari 1, 3, 5, 7, 9, 11), allora ritenevano di avere trovata anche una quadratura del cerchio. Ma la dimostra-

(1) B. BONCOMPAGNI in una dottissima nota *Intorno ad una proprietà dei numeri dispari* (Bull. di Bibl. e storia, T. VIII, 1875) fece rilevare che lo stesso fatto aritmetico venne ritrovato un gran numero di voltè dopo NICOMACO.

(2) CANTOR, *Vorlesungen,* T. I (3ª ed.), p. 559.

zione, egli dice, non si deduce da principi geometrici, ma da principi aritmetici: perchè sono principi geometrici quelli, in base a cui si dice che un numero costituito in un certo modo è ciclico ed un altro quadrato. Ora quando ALESSANDRO dice questo bisogna riflettere che anzitutto gli aritmetici non definiscono i numeri ciclici in base all'addizione di numeri dispari consecutivi, ma tenendo conto che essi terminano come il numero di partenza. Così 25 è ciclico perchè 5 per 5 dà 25, e 36 perchè 6 per 6 fa 36; ma 4 non è ciclico, nè 9, nè 16, benchè si ottengano addizionando dei numeri dispari consecutivi, ma sono semplicemente quadratici; giacchè addizionando dei numeri dispari si ottengono dei numeri quadratici. Forse colui che ci tramandò dall'anticità tale ricerca non disse che tutti i numeri nascenti dall'addizione dei numeri dispari fossero senz'altro ciclici, ma che i numeri ciclici dovessero ricercarsi fra quelli provenienti dall'addizione dei numeri dispari consecutivi, benchè ciò non succeda sempre: poichè mentre 125, essendo eguale a 5 per 25, e 216 essendo eguale a 6 per 36, sono ciclici, pure essi non si possono generare per addizione di numeri dispari consecutivi; quindi, tali numeri dovevano, non essere ciclici, ma dedotti ciclicamente da numeri ciclici a due dimensioni. Forse coloro che trovarono fra i numeri uno che fosse ad un tempo quadratico e ciclico, arrivarono a pensare che fra le grandezze geometriche fosse anche da cercarsi la quadratura del circolo. Ma il nostro maestro AMMONIO disse che forse non è necessario che, se anche questa si possa trovare fra i numeri, si possa anche trovare fra le grandezze geometriche. Giacchè retta e circonferenza sono grandezze eterogenee. E non deve affatto meravigliare, egli proseguiva, se un cerchio non sia eguale ad una figura rettilinea, perchè un fatto analogo s'incontra anche riguardo agli angoli. Giacchè non è possibile costruire un angolo rettilineo che sia eguale all'angolo del semicerchio nè al suo complemento, il così detto angolo cornicolare. Ed è appunto per ciò forse, egli dice, quel teorema, benchè cercato da persone eminenti, quali ARCHIMEDE, non venne ancora scoperto. Io però dissi al Maestro, se tuttavia venne quadrata la lunola che poggia sopra il lato del quadrato (poichè ciò venne inconfutabilmente dimostrato), lunola che per essere limitata da archi di circolo è analoga al cerchio, che cosa vieta che anche il cerchio si possa quadrare? È vero che, a cagione degli angoli, la lunola è differente dal circolo, ma quella lunola è anche differente da una figura rettilinea: eppure si può quadrare la lunola sopra il quadrato. A dir vero gli angoli, sia quello del semicerchio, sia quello cornicolare, i quali risultano entrambi da un arco circolare ed una retta, sono non soltanto eterogenei con gli angoli rettilinei, ma anzi incomparabili con essi. Perciò io non ritengo

quella ragione sufficiente a far dubitare della possibilità della quadratura del cerchio. Ed infatti GIAMBLICO, nel suo *Commento alle Categorie*, dice che ARISTOTELE non ha peranco trovata la quadratura del cerchio, ma che essa fu trovata dai Pitagorici, come risulta chiaramente dalle dimostrazioni del pitagorico SESTO, che trasmise per tradizione l'antico metodo di dimostrazione. Egli aggiunge che poi la costruirono anche ARCHIMEDE col mezzo della spirale e NICOMEDE mediante la linea detta appunto quadratrice, e APOLLONIO mediante una certa linea da lui chiamata sorella della concoide, la quale però non differisce da quella di NICOMEDE (?) ed anche CARPO mediante una certa linea che egli chiamò semplicemente " da duplice movimento „ (*forse la cicloide o meglio l'elica cilindrica*?) ed ancora molti altri. Ma tutti eseguirono meccanicamente la costruzione del teorema.

33. - L'ultimo argomento trattato da NICOMACO è la teoria delle proporzioni, che, secondo lui, è necessaria per lo studio « delle scienze naturali, della musica, della sferica, della planimetria ed in generale per lo studio degli antichi matematici ». A questa parte dell'opera che studiamo si deve se la teoria delle proporzioni riprende nella matematica il suo posto naturale, cessando, cioè, di essere un capitolo della geometria.

A tale teoria sono dedicati gli ultimi capitoli del II Libro dell'*Introduzione*. Ivi si legge che, date tre o quattro grandezze, se passano fra di esse rapporti di eguaglianza, essi si comportano a coppie ἀνὰ λόγον, perciò l'eguaglianza di due rapporti si chiama ἀναλογία. Se le grandezze considerate sono tre, la proporzione dicesi *continua* (ἀναλογία συνημμένη oppure συνεχής), se sono quattro *separata* (διεζευγμένη). Quattro grandezze a, b, c, d sono in proporzione aritmetica quando $a - b = c - d$; lo sono tre a, b, c se $a - b = b - c$, nel quale caso è $b^2 - ac = (a - b)^2 = (b - c)^2$. Si ha invece una proporzione geometrica se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oppure se $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$; in quest'ultimo caso, detto ϱ il valore comune dei due rapporti considerati, si ha

$$a - b = (\varrho - 1)\, b \quad , \quad b - c = (\varrho - 1)\, c \, ,$$

onde

$$(a - b) - (b - c) = (\varrho - 1)\,(b - c).$$

Finalmente si ha una proporzione detta *sub-contraria* (ὑπεναντία) o (forse dietro proposta di FILOLAO) *armonica* se $\frac{a}{b} = \frac{a-b}{b-c}$; in tal caso si ha $2ac = b(a+c)$, e $\frac{a}{b} > \frac{b}{c}$, mentre, se $a > b > c$ fossero tre numeri in proporzione aritmetica, si avrebbe $\frac{a}{b} > \frac{b}{c}$ (1).

Sorvolando sulle proprietà musicali della proporzione armonica, svolte nel cap. 26 dell' *Introduzione*, notiamo che ivi NICOMACO riferisce l'osservazione di FILOLAO, che i numeri degli elementi (facce, spigoli, vertici) di un cubo formano una proporzione armonica, cioè la seguente

$$\frac{12-8}{8-6} = \frac{12}{6}.$$

Il nostro autore insegna poi che fra « due numeri, entrambi pari od entrambi dispari, esiste una media aritmetica, una media geometrica ed una media armonica », ma dimentica di dire che, per la presenza della seconda, il prodotto dei due numeri dati dev'essere un quadrato, e che anche la

---

(1) Infatti se

$$b = c + \delta, \quad \text{e} \quad a = b + \delta = c + 2\delta$$

si ha

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{\delta}{c+\delta}, \qquad \frac{b}{c} = 1 + \frac{\delta}{c}$$

onde

$$\frac{a}{b} < \frac{b}{c}.$$

Posto

$$a = \frac{1}{a_1}, \qquad b = \frac{1}{b_1}, \qquad c = \frac{1}{a_1},$$

a_1, b_1 e c_1 saranno in proporzione armonica e la relazione precedente diverrà

$$\frac{b_1}{c_1} < \frac{a_1}{b_1}$$

cioè

$$\frac{a_1}{b_1} > \frac{b_1}{c_1} \text{ c. d. d.}$$

terza (sempre, ben inteso, in numeri interi) non esiste sempre.

Oltre alle tre proporzioni dianzi definite fra tre numeri a , b , c ed altre tre ad esse contrarie

$$\frac{a}{c} = \frac{b-c}{a-b} \quad , \quad \frac{b}{c} = \frac{b-c}{a-b} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{b-c}{a-b} \, ,$$

le quali furono considerate da ARCHITA ed IPPASO e divulgate da EUDOSSO, posteriormente ad ERATOSTENE altre quattro vennero introdotte (per attestazione di GIAMBLICO) dai Pitagorici MIONIDE (1) ed EUFRANORE (2); sono le seguenti:

$$\frac{a}{c} = \frac{a-c}{b-c} \quad , \quad \frac{a}{c} = \frac{a-c}{a-b} \quad , \quad \frac{b}{c} = \frac{a-c}{b-c} \quad , \quad \frac{b}{c} = \frac{a-c}{a-b} \, .$$

Le tre ultime abbiamo già incontrate in PAPPO (v. p. 262); ma, mentre questi le designa ordinatamente come proporzioni *nona*, *decima* e *settima*, NICOMACO le chiama successivamente *ottava*, *nona* e *decima*. Osserviamo, finalmente, che il nostro autore fa cenno della proporzione

$$a : \frac{a+b}{2} :: \frac{2ab}{a+b} : b \, ,$$

che egli, al pari di PITAGORA, che trasportolla da Babilonia in Grecia (v. p. 36), considerava come dotata della massima perfezione,

Tali sono i concetti ed i teoremi che agli occhi nostri presentano maggiore valore fra quelli che s'incontrano nella *Introduzione* di NICOMACO. Se non sono così numerosi ed originali da indurre a collocare il suo autore in prima linea fra le personalità cospicue che presenta la matematica greca, pure bastano a conferirgli un posto onorevole: tanto più

---

(1) Adottiamo (come fa il PISTELLI nella sua edizione di GIAMBLICO, p. 116) la lezione περί τε Μυωνίδην proposta dal TANNERY (*Pour l'hist. de la science hellène*, p. 381) in luogo della περὶ Τεμνωνίδην suggerita da TENNULIO.

(2) Costui è noto anche per avere scritto sopra la musica.

che egli è il primo scrittore a noi noto di aritmetica pura e che i suoi successori gli sono (come vedremo) inferiori.

Due cose vanno rilevate prima di lasciare questo matematico.

La prima si è che, oltre ad un lavoro sulla *Musica* che già citammo (p. 818), oltre a un'*Introduzione alla geometria*, ricordata nell'opera che testè analizzammo, venne a lui attribuito quello scritto, da noi già sfruttato, intitolato Θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς che F. AST fece stampare a Lipsia nel 1817; ora, benchè sia probabile che NICOMACO abbia composto un lavoro di tale natura, pure quello che ci sta innanzi sembra piuttosto una collezione di estratti dall'*Introduzione* testè esaminata e da altri scritti di ANATOLIO e di altri (1).

La seconda è (2) che uno scrittore del sec. XII, O'CREAT, il quale attingeva a fonti orientali, parla di una *Regula Nichomachi* per elevare a quadrato un numero di una sola cifra; eccola: « Se a è il numero dato, si calcoli $d = 10 - a$; sarà allora $a^2 = 10\,(a - d) + d^2$ ». Applicandola, il calcolo di a^2 è ridotto a quella di d^2, il che reca una semplificazione quando $d < a$. L'origine di tale regola e del nome che porta sta indubbiamente (3) nel teorema seguente dato da NICOMACO: « se n è la media aritmetica fra m e p, si ha

$$mp = n^2 - \left(\frac{m - p}{2}\right)^2 \text{»};$$

ed invero, facendo in questa

$$m = a + d = 10 \quad , \quad n = a \quad , \quad p = a - d$$

si ottiene

$$10\,(a - d) = a^2 - d^2 \qquad \text{ossia} \qquad a^2 = 10\,(a - d) + d^2\,,$$

conformemente alla regola riferita.

---

(1) Questo giudizio, pronunciato da A. DE MORGAN mezzo secolo fa (*Arithmetical Books*, etc. London, 1847, p. 88), è oggi considerato in generale per conforme al vero.

(2) Cfr. M. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I, 2ª ed., 1891, p. 433.

(3) Congettura attendibilissima di P. TANNERY: v. *Bull. des Sciences mathém.*, 2e série, T. VIII, p. 291.

Teone da Smirne.

34. - Il secondo degli scrittori di aritmetica dei quali ci dobbiamo occupare è quel mediocre compilatore a cui già attingemmo notizie intorno alle idee astronomiche di PLATONE (v. p. 465) e di cui riferimmo altrove alcune osservazioni su le figure e le proporzioni (v. p. 652-655): cioè TEONE da Smirne.

La sezione aritmetica della sua *Esposizione delle cognizioni matematiche utili per la lettura di Platone* è una semplice raccolta di proposizioni, accatastate senza criterio e semplicemente verificate sopra esempi. Dopo una introduzione, sull'ordine in cui si devono studiare le matematiche, TEONE tratta successivamente: dell'unità e della monade; del numero pari e del numero dispari; del numero primo o indecomposto e del numero composto; delle varie specie di numeri pari; dei numeri quadrati, eteromechi, parallelogrammi e promechi (1); dei numeri triangolari e dei poligonali; dei numeri piramidali; dei numeri laterali e diametrali. Gli intenti prettamente matematici che egli si propose raggiungere sono di far conoscere i vari concetti secondo cui si classificarono i numeri della serie naturale, di stabilire uno o più modi di generazione per ciacuna classe e di mettere in chiaro le relazioni che passano fra numeri della stessa classe o di classi differenti. Sono, in ultima analisi, gli stessi che si è proposto ed ha raggiunto NICOMACO; per ciò e per la coincidenza sostanziale fra questo e lo Smirneo, è superfluo dilungarci in una analisi esauriente dell'opera che ora ci sta sott'occhio: basterà segnalare in essa quanto non si trova nell'*Introduzione all'aritmetica.*

Alcune osservazioni di TEONE sono estremamente semplici; tali sono le seguenti: i numeri della serie naturale ed i

(1) Secondo il DUPUIS il " numero promeco " sarebbe della forma $a(a+2)$, intermedio fra l'eteromeco $a(a+1)$ ed il parallelogramma $a(a+b)$. Secondo TANNERY invece (*Bull. des Sc. math.*, 2e série, T. XVII, 1893, p. 283) promeco e parallelogramma sarebbero nomi differenti dati da autori diversi ad ogni numero della forma $a(a+b)$.

loro quadrati sono alternativamente pari e dispari, ma gli eteromechi sono invece tutti pari; nella serie $1, a, a^2, a^3, a^4 \ldots$ sono quadrati i numeri $1^o, 3^o, 5^o, \ldots$, sono cubi il 1°, $4^o, 7^o, \ldots$ e così via; la media proporzionale fra due quadrati consecutivi è un eteromeco, ma la media geometrica fra due eteromechi consecutivi non è mai un quadrato. Maggior valore ha la proposizione: « Ogni numero quadrato è divisibile per 3 o per 4 o lo diviene se sia diminuito di 1 » (1); onde non vi è alcun quadrato della forma $3h + 2$, $4h + 2$, $4h + 3$. Il teorema riferito può anche enunciarsi dicendo che sono contemporaneamente interi $\frac{m^2}{3}$ e $\frac{m^2}{4}$, oppure $\frac{m^2}{3}$ e $\frac{m^2 - 1}{4}$, oppure $\frac{m^2 - 1}{3}$ e $\frac{m^2}{4}$, oppure finalmente $\frac{m^2 - 1}{3}$ e $\frac{m^2 - 1}{4}$. Teone non dimostra nessuna di queste varie forme della riferita proposizione; tuttavia è certo che ai suoi tempi erasi in grado di congegnare il seguente semplicissimo ragionamento per stabilirla: Qualunque numero (m) essendo di una delle forme seguenti

$$6k \quad , \quad 6k \pm 1 \quad , \quad 6k \pm 2 \quad , \quad 6k \pm 3 ,$$

ogni quadrato (m^2) è di una delle seguenti forme:

$$36k^2 \quad , \quad 36k^2 \pm 12k + 1 \quad , \quad 36k^2 \pm 24k + 4 \quad , \quad 36k^2 \pm 36k + 9 ;$$

per quelli del primo tipo sono interi tanto $\frac{m^2}{3}$ quanto $\frac{m^2}{4}$, mentre per quelli del secondo lo sono $\frac{m^2 - 1}{3}$ e $\frac{m^2 - 1}{4}$; per quelli del terzo sono invece interi $\frac{m^2}{4}$ e $\frac{m^2 - 1}{3}$, e finalmente per quelli del quarto sono interi $\frac{m^2}{3}$ e $\frac{m^2 - 1}{4}$: come appunto erasi enunciato. Quei quadrati divisi per 3 o 4 danno per resti 0 o 1, onde nessuno ha la forma $3h + 2$, $4h + 2$, $4h + 3$; pure d'accordo con una proposizione precedente.

35. - Ancora più rilevante è la considerazione esposta da Teone di due serie illimitate di numeri aventi fra loro la

(1) Teone Smirneo ed. Dupuis, p. 60.

relazione seguente: il quadrato di un termine qualunque di una di esse differisce per una unità, positiva o negativa, dal doppio del quadrato del termine omologo dell'altra serie; i primi termini di entrambe valgono 1. Gli elementi delle serie considerate chiamansi risp. *numeri laterali* e *numeri diametrali* (1); indicando con

$$l_1 = 1 \ , \ l_2 \ , \ \dots \ , \ l_n \ , \ \dots$$

i primi e con

$$d_1 = 1 \ , \ d_2 \ , \ \dots \ , \ d_n \ , \ \dots$$

i secondi, TEONE insegna per costruirli un metodo che si esprime oggi mediante le relazioni seguenti:

$$(1) \qquad l_n = l_{n-1} + d_{n-1} \ , \ d_n = 2l_{n-1} + d_{n-1} \ ;$$

ma che si può anche esprimere mediante la fig. 122, ove

$$AB = BC \ , \ CD = EB \ , \ DG = BD \ , \ GH = FD \ , \ \dots$$

$$AB = l_1 \ , \ BD = l_2 \ , \ DH = l_3 \ , \ \dots .$$

$$EB = d_1 \ , \ FD = d_2 \ , \ HK = d_3 \ , \ \dots \ (2).$$

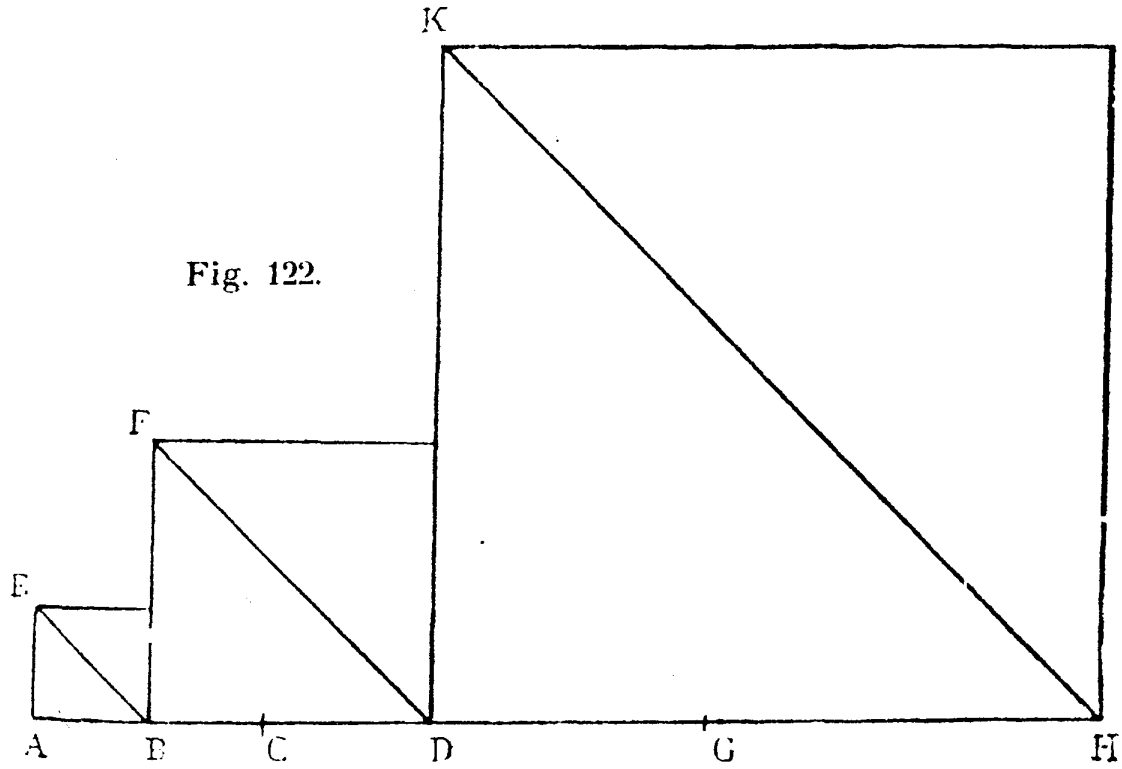


Fig. 122.

(1) TEONE SMIRNEO ed. DUPUIS, p. 70.

(2) F. HULTSCH, *Die Pytagoreische Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihen ganzer Zahlen* (Bibl. mathem., III Reihe, T. I, 1901).

Applicando la prima delle (1) per $n = 2$, si ottiene $l_2 = 1 + 1 = 2$, onde la seconda di $d_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$; ritornando alla prima si cava $l_3 = 2 + 3 = 5$, perciò la seconda porge $d_3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$; così proseguendo si ottengono le due seguenti serie illimitate:

numeri laterali: 1 , 2 , 5 , 12 , 29 , ...
numeri diametrali: 1 , 3 , 7 , 17 , 41 , ...

Si noti ora che le (1) danno

$$d_n^2 - 2l_n^2 = (-1)\,(d_{n-1}^2 - 2l_{n-1}^2);$$

e siccome

$$d_1^2 - 2l_1^2 = -1,$$

si conclude

$$d_n^2 - 2l_n^2 = (-1)^n, \tag{2}$$

che esprime algebricamente la relazione, enunciata più sopra, fra due numeri omologhi delle due serie. Notisi che dalla relazione (2) ei trae

$$\sum_{n=1}^{n=2m} (d_n^2 - 2l_n^2) = 0;$$

o, più esplicitamente,

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_{2m}^2 = 2\,(l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_{2m}^2). \tag{3}$$

Per dimostrare come i numeri laterali o diametrali non siano oggetto di semplice curiosità, consideriamo le due equazioni indeterminate (cosidette di PELL)

$$2x^2 + 1 = y^2 \quad , \quad 2\xi^2 - 1 = \eta^2;$$

un semplice calcolo prova che, se

$$x = m \quad , \quad y = n$$

è una soluzione della prima,

$$\xi = m + n \quad , \quad \eta = 2m + n$$

sarà una soluzione della seconda; e viceversa che se

$$\xi = \mu \quad , \quad \eta = \nu$$

è una soluzione della seconda

$$x = \mu + \nu \quad , \quad y = 2\mu + \nu$$

sarà una soluzione della prima. Ora 1, 1 è una soluzione della seconda, e, se si parte da questa coppia di numeri, si otterrà la coppia 2, 3 come soddisfacente la prima equazione, quindi la coppia 5, 7 come soluzione della seconda, poi la coppia 12, 17 come soluzione della prima, e così via illimitatamente; ebbene, tutte queste coppie altro non sono che paia di elementi omologhi nelle serie dei numeri laterali e diametrali.

Non basta. Sviluppando $\sqrt{2}$ in frazione continua, si ha

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ldots}}},$$

le cui ridotte successive sono evidentemente

$$\frac{1}{1} \; , \; \frac{3}{2} \; , \; \frac{7}{5} \; , \; \frac{17}{12} \; , \; \ldots ;$$

ora i loro numeratori costituiscono le serie

$$1 \; , \; 3 \; , \; 7 \; , \; 17 \; , \; \ldots$$

dei numeri diametrali, mentre i denominatori formano le serie

$$1 \; , \; 2 \; , \; 5 \; , \; 12 \; , \; \ldots$$

dei numeri laterali.

Queste applicazioni delle due serie considerate provano quanto queste serie siano importanti e mostrano che TEONE SMIRNEO, anche se non avesse fatto altro che serbarne notizia, avrebbe ben meritato della scienza (1).

---

(1) Delle relazioni (1) P. BERGH ha indicata una rappresentazione geometrica (*Seiten-und Diametralzahlen bei den Griechen*, Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. XXXI, 1886, Hist.-lit. Abth., p. 135; cfr. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I, 3ª ed., p. 437) che M. CANTOR ha qualificato di " überaus gestreiche Vermuthung „; non la riferiamo perchè tutto l'edificio eretto dal dotto norvegese poggia sull'ardita ipotesi che esista un triangolo contemporaneamente equilatero e rettangolo.

Giamblico da Calcide.

36. - Alla scuola dei Neo-Pitagorici, di cui furono membri NICOMACO GERASENO e TEONE SMIRNEO, fa riscontro quella dei Neo-Platonici, di cui fa mestieri che ora segnaliamo i contributi dati all'aritmetica, come complemento a quanto accennammo (v. p. 339) intorno alle loro ricerche sopra la teoria dei poliedri.

Coloro a cui sono specialmente dovuti sono due discepoli di PORFIRIO (v. p. 704), cioè ANATOLIO d'Alessandria, vescovo di Laodicea nella seconda metà del III secolo dell'E. v., ed il suo scolaro GIAMBLICO. Del primo va segnalato un opuscolo *Sopra la decade ed i numeri in essa contenuti*, esistente in un manoscritto della Biblioteca di Monaco (Baviera) e che venne di recente pubblicato (1); ma non ne faremo più di una fugace menzione, giacchè non contiene alcuna verità matematica degna di nota, ma soltanto l'enunciazione delle qualità mirabili che, nelle scuole di PITAGORA e di PLATONE, si credettero ravvisare nei numeri $1, 2, \ldots, 10$, simboli di varie virtù e rappresentanti di fatti collegati alla vita dell'uomo, cose tutte su cui la scienza moderna passa oltre, sorridendo sdegnosamente. Invece il secondo è degno di ottenere nella nostra storia un posto non inferiore a quello che ebbe TEONE SMIRNEO.

GIAMBLICO nacque a Calcide, città della Celesiria (Asia Minore); in qual epoca non si sa con certezza, ma probabilmente nella seconda metà del III secolo dell'E. v. Appartenne a una famiglia ricca e considerevole, studiò a Roma sotto PORFIRIO ed ANATOLIO; ritornato nella sua terra natale fondò una scuola, destando ne' suoi ascoltatori siffatta ammirazione che essi solevano chiamarlo *divino*. Di lui si conoscono uno scritto intorno alla *Caldea* ed un'opera di maggior lena dal titolo *Collezione delle dottrine pitagoriche* (2).

---

(1) J. L. HEIBERG, *Anatolius sur les dix premiers nombres* (Annales intern. d'histoire, 5e Sect., Paris, 1901).

(2) A lui, come a NICOMACO (v. p. 832), vennero senza ragione attribuiti i *Theologumena arithmetica*.

Constava questa di dieci parti intitolate risp.: I. Vita di PITAGORA. II. Introduzione filosofica. III. Introduzione matematica. IV. Commento a NICOMACO. V. Teorie fisiche. VI. Teorie etiche. VII. Teorie teologico-aritmetiche. VIII. Mucica. IX. Geometria. X. Sferica. Esistono tuttora le sezioni I, II, III, IV e VII; la prima sarebbe di gran valoce per la conoscenza del Pitagorismo, ove si potessero accettare come verità le informazioni ivi date, ciò che sgraziatamente non è, come già sappiamo; un pregio indiscutibile possiedono invece le parti seconda e terza, ciò che spiega le edizioni che anche recentemente se ne fecero (1).

37. - Crediamo superfluo il seguire passo passo GIAMBLICO nell'atto in cui chiosa (anzi spesso semplicemente parafrasa) NICOMACO; riteniamo per converso sufficiente segnalare i cambiamenti e le aggiunte che egli propone a le discipline ed i teoremi del Geraseno.

Rileviamo anzitutto la proposizione « se all'ottuplo di un numero triangolare si aggiunge l'unità si ottiene un quadrato » (2). GIAMBLICO non ne è l'inventore perchè già PLUTARCO (40-120 dell'E. v.) la conosceva. A lui appartiene invece, forse, il teorema « aggiungendo l'unità al prodotto di un numero per lo stesso aumentato di 2 si ottiene un quadrato » (3) e l'espressione seguente

$$n^2 = (1 + 2 + \ldots + n) + \overline{n-1} + (\overline{n-2} + \overline{n-3} + \ldots + 2 + 1)$$

del teorema di NICOMACO « ogni numero quadrato è la somma di due triangolari »: per tal modo il nostro autore fu condotto all'altra relazione analoga:

$$n(n-1) = (1 + 2 + \ldots + \overline{n-2}) +$$

$$+ \overline{n-1} + n + (\overline{n-2} + \overline{n-3} + \ldots + 2).$$

(1) *Iamblichi de communi mathematica scientia liber*, ed. FESTA (Lipsiae, 1891); *Iamblichi in Nicomachi Aritmeticam introductionem liber*, ed. PISTELLI (Lipsiae, 1894). Della prima di queste opere esistono molte edizioni anteriori (1668, 1781, 1813, 1815 1817), ma della seconda non si conosce che quella imperfettissima del TENNULIO (1668).

(2) Infatti $8\frac{n(n+1)}{2} + 1 = (2n+1)^2$.

(3) $n(n+2) + 1 = (n+1)^2$.

Maggior valore avrebbero i complementi dati dal discepolo di ANATOLIO a quanto NICOMACO espose sopra la distribuzione nella serie naturale dei numeri perfetti, se non contenessero alcune inesattezze (1). Ed invero, il Geraseno ha con ragione osservato quanto raramente s' incontrino dei numeri perfetti nella serie naturale dei numeri; GIAMBLICO aggiunge di suo che, come esiste un numero perfetto sia nella prima che nella seconda specie di miriadi, se ne trova anche uno in ciascuna delle seguenti. Orbene, dopo i quattro numeri perfetti noti a NICOMACO (v. p. 821), si conoscono i cinque seguenti:

$2^{12}(2^{13}-1) = 33\ 550\ 336$
$2^{16}(2^{17}-1) = 8\ 589\ 869\ 056$
$2^{18}(2^{19}-1) = 137\ 438\ 691\ 328$
$2^{30}(2^{31}-1) = 2\ 305\ 843\ 008\ 139\ 952\ 128$
$2^{60}(2^{61}-1) = 2\ 658\ 455\ 991\ 569\ 831\ 744\ 654\ 962\ 615\ 953\ 842\ 176$;

di essi il primo è $< 10000^2$, il secondo e il terzo sono minori di 10000^3, il quarto è inferiore a 10000^5, e l'ultimo lo è a 10000^{10}, onde è chiaro che non in ogni intervallo determinato di due termini consecutivi delle serie

$$10000\ ,\quad 10000^2\ ,\quad 10000^3\ ,\quad \ldots$$

si trova uno ed un sol numero perfetto, come credeva l'autore di cui ci occupiamo. Questi osserva poi che il fatto (rilevato da NICOMACO sopra i quattro numeri perfetti a lui noti) dell'essere l'ultima cifra di un numero perfetto 6 o 8, sussiste anche pei numeri perfetti seguenti. Per verificarlo si ricordi che l'espressione generale di un numero perfetto euclideo (v. p. 220) è $2^n(2^{n+1}-1)$, supposto che $2^{n+1}-1$ sia numero primo; ora l'ultima cifra di 2^n è uno dei numeri

$$2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 6,$$

quindi l'ultima di 2^{n+1} è in corrispondenza

$$4\ ,\ 8\ ,\ 6\ ,\ 2$$

(1) V. per ciò che segue: HULTSCH, *Erläuterungen zu dem Berichte des Iamblichus über die volkommenen Zahlen* (Götting. Nachrichten, 1895), e una nota al termine della memoria *Poseidonius über die Grösse und Entfernung der Sonne* (Götting. Abhandlnugen, Hist.-Phil. Klasse, Neue Folge, I Bd., 1892).

è l'ultima di $2^{n+1} - 1$

$$3 \ , \ 7 \ , \ 5 \ , \ 1 \ .$$

La terza ipotesi è da escludersi perchè se $2^{n+1} - 1$ termina con 5 non è primo, onde le coppie ammissibili come ultime cifre dei due termini del prodotto $2^n (2^{n+1} - 1)$, sono:

$$2 \ , 3 \ ; \ 4 \ , 7 \ ; \ 6 \ , 1 \ ,$$

epperò l'ultima cifra del prodotto è 6 o 8. Che poi (contrariamente all'opinione di BOEZIO (1)) queste cifre non si presentino sempre alternativamente, come accade nel gruppo dei primi quattro numeri perfetti, è dimostrato dalla semplice ispezione dei valori che hanno i nove primi numeri perfetti successivi.

Ci limitiamo a segnalare di passaggio un perfezionamento teorico riferito da GIAMBLICO relativo al sistema delle tetradi apolloniane (2) per arrestarci, finendo, sopra una notevole proposizione di cui egli ha serbata notizia. Eccola: « dati tre numeri consecutivi, il maggiore dei quali sia multiplo di tre, se ne faccia la somma; del numero risultante si addizionino le cifre; si ripeta la stessa operazione sul risultato e così proseguasi finchè ciò è possibile; si finirà per ottenere 6 ». Questo teorema è evidentemente collegato alla considerazione dei *pitmeni* che trovammo applicata da APOLLONIO (v. p. 775) e che vedemmo stare a base del metodo di onomatomanzia che S. IPPOLITO chiama *calcolo pitagorico* (v. p. 795); una traccia di siffatta considerazione in una *Collezione di dottrine pitagoriche* non deve dunque recare meraviglia! Che poi al tempo di GIAMBLICO si fosse in grado di dimostrare quella proposizione, si vede osservando potersi questa stabilire con un ragionamento elementare che ora esporremo, dopo di avere notato che, se nel presentarlo qui ci serviamo, come nei casi analoghi, di notazioni moderne e di concetti appartenenti all'odierna teoria dei numeri, è soltanto per essere più concisi. Sia

$$N = n_0 + 10n_1 + 10^2 n_2 + \ldots$$

(1) BOEZIO ed. FRIEDLEIN, p. 42.
(2) HULTSCH, *Erläuterungen*, etc., p. 6-9 dell'estratto.

un numero scritto nel sistema decimale; chiamisi $S(N)$ la somma delle sue cifre, $S^{(2)}(N)$ la somma delle cifre di $S(N)$ e così via. Si osservi essere

$$N - S(N) = 9\,(n_1 + 11n_2 + 111n_3 + \ldots)$$

e si dedurrà

$$N \equiv S(N) \pmod 9.$$

Similmente

$$S(N) \equiv S^{(2)}(N) \pmod 9$$

e così via. Sia

$$S^{(k-1)}(N) \equiv S^{(k)}(N) \pmod 9$$

l'ultima possibile di tali relazioni; $S^{(k)}(N)$ sarà un numero

$$N' \leqq 9\,.$$

Addizionando membro a membro tutte le trovate congruenze si conclude:

$$N \equiv N' \pmod 9 \text{ colla condizione } N' \leqq 9\,.$$

Ora, se N è la somma di tre numeri consecutivi di cui il maggiore è divisibile per 3, si può porre

$$N = (3p + 1) + (3p + 2) + (3p + 3) = 9p + 6\,;$$

la congruenza precedente diverrà quindi

$$9p + 6 = N' \pmod 9\,,$$

ossia

$$N' \equiv 6 \pmod 9 \text{ colla condizione } N' \leqq 9\,.$$

Ma l'unico numero della prima decina divisibile per 6 è il 6 stesso, dunque $N' = 6$, conformemente al teorema di GIAMBLICO (1).

---

(1) Lo stesso ragionamento fatto prova che se dei tre numeri consecutivi considerati fosse il minimo divisibile per 3 si otterrebbe *tre* invece di sei; e se fosse il medio *nove*.

Domnino da Larissa (1).

38. - I due libri d'*Introduzione all'aritmetica* di NICOMACO sono caratterizzati agli occhi del matematico dall'abbandono di quell'apparato geometrico di cui si servì EUCLIDE e che venne adoperato anche da coloro che, dopo di lui, coltivarono la scienza del numero. Nel coro di lodi con cui quell'opera venne accolta ed accompagnata nel corso della sua fortunata carriera, una voce stonata è rappresentata da un oscuro trattatello compilato da un certo DOMNINO (nato a Larissa in Siria), nel quale è predicato coll'esempio il ritorno al metodo euclideo.

DOMNINO (2) era un condiscepolo di PROCLO. Il loro maestro SIRIANO li trattava da eguali, sicchè alla sua morte si divisero il primato nella scuola di ATENE. La loro rivalità, visibile sin da quando viveva SIRIANO, scoppiò in una polemica aperta, nella quale (se si presta fede a DAMASCIO (v. p. 277), citato da SUIDA) DOMNINO ebbe la peggio. Fu probabilmente in seguito a tale discussione vivace che DOMNINO cedette il campo a PROCLO e si ritirò, forse a Laodicea di Siria, lasciando in Atene dietro a sè fama di uomo integro e di aritmetico valoroso. Ci resta di lui un *Manuale di introduzione all'aritmetica*, il quale fu fatto conoscere dal BOISSONADE in uno dei cinque volumi di *Anecdota graeca* da lui pubblicati negli anni 1829-1833; ma egli deve avere composto anche un *Trattato elementare di aritmetica* (Στοιχείωσις ἀσιθμητική), del quale si lamenta la perdita.

Nel *Manuale* gli argomenti trattati sono circa gli stessi di cui si occuparono gli scritti discorsi in questo capitolo, in particolare l'*Introduzione* del Geraseno; nei punti in

(1) P. TANNERY, *Domninus de Larissa* (Bull. d. Sc. Math., 2ᵉ série, T. VIII, 1884, p. 288-298) e F. HULTSCH, art. *Domninos* in PAULY-WISSOWA, *Real-Enciklopädie der class. Alterthumwiss.*

(2) Tale nome fu sfigurato in *Domnenus*, *Domnius*, *Dominus*; il che indusse l'HARLESS ad emettere l'ipotesi (v. *Bibl. graeca*, T. V, p. 648) che il citato manuale fosse di ELIODORO da Larissa e che quel nome di grafia incerta non fosse un nome proprio, ma sibbene un titolo onorifico (*dominus*).

cui (specialmente nelle definizioni) questi si trova in disaccordo con EUCLIDE, è al primo che DOMNINO dà ragione; aggiungasi che questi esclude ogni figurazione di numeri basati sull'addizione e quindi dà l'ostracismo ai numeri poligonali e piramidali, che sono appunto generati addizionando un certo numero di termini di una serie.

Non fa mestieri arrestarci più oltre su questo autore, il quale merita un posto nella storia della matematica greca per ciò solo che tentò riporre l'aritmetica su una via veramente scientifica; chè, se tale è quella battuta da EUCLIDE, tale non è certamente quella percorsa da NICOMACO, TEONE e GIAMBLICO, i quali surrogarono le rigorose dimostrazioni con semplici verificazioni, sempre inconcludenti e talora traditrici. Oltre a questo difetto, l'aritmetica, quale si trova (trattata con monotonia desolante) nei citati autori, sembra mancare delle doti che assicurano ad una disciplina un brillante avvenire: se non altro perchè, coloro che la coltivarono, scambio di applicare le teorie già mature alla soluzione di nuovi problemi, si limitarono ad illustrare i concetti che PITAGORA aveva stabiliti e tutt'al più ad aggiungere qualche nuovo teorema empirico, reso manifesto dall'esame reiterato della serie naturale dei numeri. Chi per primo si accorse che, affinchè la scienza del numero potesse soddisfare le giuste aspettative dei matematici, doveva irrobustirsi col cimentarsi a sciogliere problemi non ancora tentati, ci è ignoto; ma quello nelle cui opere tale innovazione è attuata, colui che dimostrò luminosamente l'utilità del novello indirizzo, è l'ultimo grande scienziato di cui dobbiamo occuparci: DIOFANTO.

CAPITOLO V.

La teoria dei numeri

Diofanto.

39. - I matematici di cui trattammo sino ad ora, nella varietà delle investigazioni che compirono, delle discipline che preferirono, della terra in cui nacquero e delle epoche in cui vissero, hanno una caratteristica comune, quella cioè di *non* avere lasciato memoria esatta delle circostanze in cui si svolse la loro esistenza. Quando videro la luce ci è per molti ignoto, onde la relativa cronologia deve in gran parte restringersi ad una semplice constatazione — spesso basata soltanto sopra ragioni intrinseche — di quale fra essi abbia preceduto gli altri. Che cosa abbiano operato, all'infuori dei lavori superstiti o di cui si è almeno conservato il titolo, non sappiamo; sicchè i loro scritti, in luogo di formare per essi un gruppo di note caratteristiche, compendiano tutto quello che intorno ad essi sappiamo.

A tal sorte comune non si sottrasse che (tacendo di coloro i cui trionfi sono registrati nei fasti della filosofia) ARCHIMEDE, e, non già per la luce di gloria che su di lui proiettano le sue immortali scoperte, ma sibbene per essere vissuto sui gradini di un trono e per essersi trovato tragicamente connesso ad un avvenimento clamoroso, come è l'assedio e l'espugnazione di Siracusa. Per converso al destino comune ai matematici greci non si sottrasse DIO-

FANTO (1) d'Alessandria (2), colui che rappresenta nella storia dell'aritmetica una parte somigliante a quella che la sorte affidò ad EUCLIDE per la geometria ed a TOLOMEO per l'astronomia. Ed invero le notizie sicure che lo concernono si compendiano in poche linee.

Una la porge egli stesso, quando nel frammento superstite di uno scritto *Sui numeri poligonali* cita IPSICLE (3); ora, poichè sappiamo (v. p. 269) essere questo geometra di poco posteriore ad EUCLIDE ed APOLLONIO, otteniamo la data 200 a. C. come limite inferiore per l'esistenza di DIOFANTO (4). Un limite superiore si otterrebbe ricorrendo a quel passo (v. p. 556) del lessicografo SUIDA, ove è detto che IPAZIA commentò un'opera astronomica di DIOFANTO; ma chi garantisce che si parli ivi dell'aritmetico di cui dobbiamo occuparci e non piuttosto di un astronomo naufragato nel gran mare dell'oblio? Fortunatamente il medesimo intento si raggiunse tenendo conto della citazione di DIOFANTO « aritmetico » fatta da TEONE d'Alessandria (5), segnalata da PIETRO DE LA RAMÉE (1515-1572) (6) e più tardi rintrac-

(1) La lezione DIOFANTE, su cui tanto dottamente si discusse (P. COSSALI, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra*, T. I, Parma, 1797, p. 61; NESSELMANN, *Die Algebra der Griechen*, p. 244-245; T. L. HEATH, *Diophantos of Alexandria*, 2ª ed., Cambridge, 1911, p. 1-2), sembra da respingere, dopo che vennero segnalate citazioni ove si trova il nome di DIOFANTO al nominativo.

(2) Gli antichi lo indicavano come Ἀλεξανδρεύς per indicare che in Alessandria nacque od almeno visse a lungo. Altri personaggi di nome DIOFANTO sono ricordati dal COSSALI nel loc. cit. Che quello che ci interessa abbia appartenuto al Museo (HOCHE, *Hypatia die Tochter Theons*, Philologus, T. XV, 1860, p. 435-474) è opinione prodotta da un'induzione naturalissima, non da dati positivi.

(3) *Diophanti Alexandrini Opera omnia*, ed. TANNERY, T. I, Lipsiae, 1893, p. 470-472.

(4) Il NESSELMANN (op. cit., p. 246-7), fondandosi sul fatto che un teorema sui numeri poligonali trovasi in NICOMACO sotto forma meno perfetta che in DIOFANTO, concluse essere IPSICLE posteriore a NICOMACO. Ma tale argomentazione non ci sembra conclusiva.

(5) TEONE ed. HALMA, T. I, p. 111. Cfr. *Diophanti Alex. Opera omnia*, T. II, Lipsiae, 1895, p. 35.

(6) *Scholae mathem.*, p. 37.

ciata da NESSELMANN (1); ora, se si ricorda che il citato commentatore fiorì sotto TEODOSIO il Grande, si conclude che DIOFANTO visse certo prima del 350 dell'E. v.; è quindi inaccettabile l'opinione di A. DE MORGAN (2), che egli appartenga al VII secolo dell'E. v.; per converso a ragione il COSSALI (3) scrisse: « penso che il filosofico riserbo esiga di contentarci a dire, che verisimilmente (DIOFANTO) fiorì nel corso dei secoli da 200 anni prima a 400 dopo l'epoca cristiana ».

Che però DIOFANTO abbia vissuto in epoca più prossima al limite superiore trovato che all'inferiore emerge dal non essere egli citato nè da TEONE SMIRNEO nè da NICOMACO: il suo nome si trova invece in uno scolio anonimo al IV Libro del *Commento* di GIAMBLICO a NICOMACO (4), ma questo dato serve ben poco essendo ignoto chi lo somministri. Una più esatta determinazione fu proposta da ABULFARAGIO (celebre storico arabo del XIII sec.), secondo la quale DIOFANTO avrebbe vissuto sotto GIULIANO l'Apostata (361-363 dell'E. v.); benchè questa data concorderebbe col fatto che DIOFANTO sembra appartenere a un'epoca di decadimento scientifico e con la sua identificazione a colui che (come narra SUIDA) fu maestro a LIBORIO (5), pure fu dimostrata da P. TANNERY (6) come da abbandonarsi, perchè riposa sopra un equivoco. Insostenibile è pure l'identificazione, suggerita dal BACHET DE MÉZIRIAC (1587-1638), del nostro DIOFANTO con un astrologo contemporaneo a NERONE (7). Per converso l'essere vissuto DIOFANTO sotto ANTONINO PIO (138-161 dell'E. v.) è un'opinione di R. BOMBELLI la quale, per quanto trattata dal NESSELMANN come « ipotesi arbitraria » (8), acquistò in

(1) Op. cit., p. 249-250.
(2) *Arithmetical Books*, etc. London, 1847.
(3) Op. cit., T. I, p. 66.
(4) DIOFANTO ed. TANNERY, T. II, p. 72.
(5) Cfr. NESSELMANN, op. cit., p. 252-4.
(6) V. l'articolo *À quelle epoque vivait Diophante?* (Bull. des sc. math., 2e serie, T. III, 1879), p. 264.
(7) V. la prefazione (p. IX-XI) alla trad. tedesca di DIOFANTO fatta dallo SCHULZ; nonche il succitato articolo del TANNERY, pag. 265.
(8) Op. cit., p. 245.

questi ultimi anni molto favore, dopo che P. TANNERY ne scoperse il fondamento storico (1), ed ancor più dopo che se ne trovò una conferma in una lettera di PSELLO (2). Ivi la « serie di sette gradi » costituita dalla unità e dalle prime sei potenze di un numero, che i *Philosophumena* attribuiscono a PITAGORA (3) e che troveremo in DIOFANTO (v. n. 43), viene prolungata sino alla decima potenza (4); e tale aggiunta è attribuita ad ANATOLIO d'Alessandria (v. p. 601). Nella stessa lettera è detto che questi compose uno scritto sopra la logistica egiziana e lo dedicò a DIOFANTO. Questi deve essere stato, pertanto, anteriore al celebre vescovo di Laodicea; ciò che si accorda coll'essere egli citato da TEONE Alessandrino come un classico.

Da tutto ciò sembra emergere che facendo vivere DIOFANTO fra il 150 ed il 250 dell'E. v. non si può commettere grave errore (5).

Altre notizie su di lui non è possibile ottenere (neppure ricorrendo agli Arabi), a meno che non accettiamo le informazioni fornite da un epigramma, di cui ci occuperemo poi (n. 61), alla qual cosa siamo repugnanti, per ragioni che esporremo a suo luogo.

40. - Di DIOFANTO possediamo un'*Aritmetica* (Ἀριθμητικά) ed un frammento *Sopra i numeri poligonali*; di un preteso suo lavoro di *Musica* è pressochè dimostrata l'inesistenza (6) e così di un altro intitolato *Porismi*; finalmente un suo trattato sul *Calcolo frazionario* (Μοσιαστικά) non è ricordato che da uno scolio a GIAMBLICO, di mano ignota (7).

---

(1) *À quelle âge,* etc., p. 265-267.

(2) P. TANNERY, *Psellus sur Diophante* (Zeitschr. f. Math. und Phys., T. XXXVII, 1892, Hist.-lit. Abh., p. 41-45). V. anche DIOFANTO ed. TANNERY, T. II, p. 37-42.

(3) *Doxographi graeci,* ed. DIELS, Berlin, 1879, p. 557.

(4) In particolare le potenze quinta e settima, sono chiamate da PSELLO ἄλογος πρωτος e ἄλογος δεντερος per ricordare che non sono quadrati nè cubi.

(5) Una probabile conferma troveremo più avanti (n. 53). — F. HULTSCH (nell'art. *Diofanto* della *Encyklopädie* di PAULY-WISSOWA) ammette che DIOFANTO abbia fiorito nel 250 dell'E. v.

(6) DIOFANTO ed. TANNERY, T. II, p. VIII.

(7) GIAMBLICO ed. PISTELLI, p. 127. linea 11.

Dalla prefazione della prima fra queste opere e dalle intitolazioni dei codici in cui essa trovasi emerge che (al pari degli *Elementi* di EUCLIDE e dell'*Almagesto*) era ripartita in tredici libri; ma di questi, malgrado le affermazioni in contrario (1), sei soli sono tuttora esistenti. La scomparsa parziale di opere antiche è un fatto non raro (APOLLONIO e PAPPO informino!), e che non può nemmeno recare meraviglia, tali e tante essendo state le vicissitudini che attraversarono i manoscritti in cui sono consegnate. Ogniqualvolta essa si presenta, sorge la questione di divinare e, se possibile, ricostruire, ciò che fu vittima dell'ingiuria del tempo. Ora, se tale divinazione e riedificazione fu relativamente facile per alcuni lavori geometrici — ad es. per l'ultimo libro delle *Coniche* apolloniane (v. p. 436-538) — è impossibile per un autore, come DIOPANTO, di cui ci sono sconosciuti i predecessori e pel quale è ignoto quanto i discepoli immediati (gli Arabi) aggiunsero del proprio a ciò che il maestro aveva pensato e scritto. Ciò spieghi la disparità delle ipotesi intorno alla entità della parte perduta dell'*Aritmetica* di DIOFANTO; citiamo le più cospicue.

R. BOMBELLI, considerando forse quanto sapore diofanteo abbia la famosa soluzione data da LODOVICO FERRARI (1522-1565) per le equazioni di quarto grado, riteneva che nei libri scomparsi dell'*Aritmetica* il matematico greco insegnasse la soluzione delle equazioni cubiche e biquadratiche (2). Il MONTUCLA (3) e O. SCHULZ (1781-1849) (4) invece credevano che ivi fosse contenuta la teoria delle « triple equazioni » che P. FERMAT (1608-1665) diede (5) come estensione di quella delle « doppie equazioni » inventate (v. più

(1) Cfr. NESSELMANN, p. 257, ove esse sono dimostrate insussistenti.

(2) Per dimostrare la poca probabilità di tale ipotesi, basta osservare che gli Indiani e gli Arabi non conobbero la risoluzione delle equazioni di grado superiore al secondo.

(3) *Hist. des Mathém.*, T. I, p. 321.

(4) V. la trad. tedesca di DIOFANTO citata più innanzi.

(5) *Oeuvres de Fermat*, ed. TANNERY et HENRY, T. I, p. 324 e T. III, p. 269.

avanti n. 52) dall'autore di cui attualmente ci occupiamo. Di natura essenzialmente differente da quelle testè riferite è una terza congettura emessa da H. T. COLEBROOKE (1765-1837) (1), sostenuta dal NESSELMANN (2) e recentemente accettata dall'HANKEL (3): secondo essa la mutilazione subita dall'opera di DIOFANTO sarebbe assai meno considerevole di quanto risulta dal semplice paragone dei numeri tredici e sei; essa proverrebbe piuttosto da perdite sofferte nel corpo di essa (specialmente fra i Libri I e II) e dalla soppressione dell'antica suddivisione, che dalla scomparsa completa dei sette ultimi libri: cosicchè il piano originario dell'opera diofantea sarebbe quello che appare dall'esame che oggi può farsene. Questa tesi è così consolante che non domanderemmo di meglio di poterla presentare come conforme od almeno prossima al vero; ma, sgraziatamente, uno studio accurato di tutti i codici dell'*Aritmetica* (4) non somministra alcun argomento a favore di essa; sicchè noi non possiamo adottarla e preferiamo augurare che le continue ricerche che si vanno facendo nelle più ricche biblioteche, da persone dotte nella filologia classica e nella orientale, conducano riguardo a DIOFANTO ad una clamorosa scoperta analoga a quelle che tanta luce proiettarono sulla fisonomia scientifica di ARCHIMEDE (v. p. 325) e sopra la questione eroniana (v. p. 605).

Oltre ai sei primi libri dell'*Aritmetica*, di DIOFANTO possediamo (come dicemmo già) un frammento *Sui numeri poligonali;* la natura delle proposizioni ivi contenute (sono teoremi, non problemi come nell'*Aritmetica*) e la forma in cui è scritto (cioè l'intervento di rappresentazioni geometriche, le quali sono di regola bandite dall'*Aritmetica* (5)) lo designano come appartenente ad un lavoro che nulla ha

---

(1) *Algebra with Arithmetic and Mensuration*, London, 1817, pag. LXI.

(2) Op. cit., p. 265.

(3) *Zur Geschichte der Math. in Alterthum und Mittelalter*. Leipzig, 1874), p. 158.

(4) P. TANNERY, *La perte de sept livres de Diophante* (Bull. des sciences math., 2e série, T. VIII, 1884).

(5) Una sola eccezione si presenta nel probl. V, 10.

a che vedere con l'*opus magnum* di DIOFANTO. Ciò non ostante il NESSELMANN, a sostegno e complemento della riferita « tesi di consolazione », ne formò una sezione di quello, opinione questa che trova oggi scarsi aderenti. Nè basta. Nell'*Aritmetica* DIOFANTO cita più volte alcune proposizioni ausiliari, a cui dà il nome di « porismi » (1); ciò indusse i primi editori di DIOFANTO ad ammettere che tali proposizioni fossero estratte da un'opera speciale intitolata appunto *Porismi;* ma questa ipotesi sembra poco probabile, se non altro perchè le citate proposizioni non hanno la forma porismatica, e d'altronde pare che all'epoca di DIOFANTO la parola « porisma » non avesse più (v. p. 253) che il significato di « corollario » (2). È questo l'avviso che, prima di P. TANNERY (3), manifestò il NESSELMANN. Ma questi aggiungeva che i porismi diofantei non formavano un'opera a sè, ma costituivano una sezione dell'*Aritmetica* secondo il piano primitivo di DIOFANTO; unendo così i sei libri superstiti dell'*Aritmetica* allo scritto *Sui numeri poligonali* ed ai *Porismi*, NESSELMANN credette di avere ricomposti i *disjecta membra* del lavoro capitale di DIOFANTO, ed addusse come conferma alle sue idee che il titolo (*Cose aritmetiche*) di tale lavoro venne scelto appunto per segnalare la varietà dei temi ivi trattati.

Non ci dilunghiamo su tale fantastica ricostruzione che è atterrata dall'ispezione dei codici diofantei: e piuttosto segnaliamo, dopo tante questioni irrisolubili concernenti DIOFANTO e le sue opere, un problema storico suscettibile almeno di una soluzione approssimata, il problema cioè di determinare l'epoca in cui l'*Aritmetica* di DIOFANTO subì le torture che la ridussero nello stato in cui essa si trova. Ora, notando che il commento a DIOFANTO attribuito a MAS-

(1) Va notato che esse gettano ben poca luce sulla questione dei porismi (v. p. 252) non essendo certo che fossero date da DIOFANTO come proposizioni di tal fatta e non piuttosto come ausiliari.

(2) Sotto forma prettamente porismatica troviamo invece il Lemma al probl. V, 8, che suona così: dati tre quadrati, esistono altri tre quadrati i cui prodotti binari sono eguali ad essi.

(3) Mem. citata a pag. prec.

simo Planude (1) suppone che, almeno i primi due libri, fossero sin d'allora nello stato in cui li possediamo oggi, si acquista la certezza che quel misfatto letterario fu compiuto dai Greci prima del sec. XIV; ma l'esame di fonti arabe abilita poi a farlo retrocedere al sec. XI e fors'anche al X (2).

41. - L'*Aritmetica* di Diofanto, che venne tradotta in arabo nella seconda metà del X sec., esiste in parecchi codici fra loro concordanti (3). Essa venne pubblicata per la prima, tradotta in latino, nel 1571 per cura di G. Holtzmann (1532-1576) (4): malgrado i suoi innegabili difetti, tale lavoro rimarrà un solido titolo di gloria imperitura per chi, recandolo a buon fine, ha richiamato alla memoria un grande scrittore completamente dimenticato; l'influenza esercitata dalla esumazione di Diofanto è così straordinaria che, per misurarla, converrebbe far l'inventario di parte dell'algebra odierna e di tutta la teoria dei numeri.

Il testo greco dell'opera di cui ci occupiamo apparve mezzo secolo dopo, per merito di Bachet de Meziriac, accompagnato da savi commenti e dotte annotazioni (5); una seconda edizione di quest'opera fu pubblicata nel 1670 da S. Fermat, figlio del celebre matematico (6): è inferiore

---

(1) Riguardo alla legittimità di tale attribuzione vennero sollevati dei dubbi da P. Tannery (Bull. des Sc. math., 2e série. T. VIII, 1884, p. 271).

(2) Heath, op. cit., p. 19.

(3) Cossali, op. cit., T. I, p. 61; Nesselmann, op. cit., p. 256; Heiberg, *Philologus*, T. XLIII, p. 500-501; Heath, op. cit., p. 4 e segg.; Diofanto ed. Tannery, T. II, pref. Uno di tali mss. fu esaminato da Jacobi nel 1844 mentre trovavasi a Roma (L. Königsbenger, *C. G. J. Jacobi*, Leipzig, 1904, p. 319), nell'intento di preparare una nuova edizione dell'*Aritmetica* (id., p. 464), che non venne poi mai fatta.

(4) *Diophanti Alexandrini Rerum Arithmeticorum libri sex, quorum primi duo adjecta habent scholia* Maximi (*ut conjectura est*) Planudi, etc. *A* Guil. Xylandro. Basileae, 1571.

(5) *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Nunc primum Graece et Latine edidit,* etc. *Auctore* C. G. Bacheto Meziriaceo. Lutetiae Paris, 1621.

(6) *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex,* etc. *Cum commentariis* G. G. Bacheti *et observationibus* D. P. Fermat. etc. Tolosae, 1670.

come correzione tipografica alla precedente, ma è assai pregiata e ricercata perchè ivi videro la luce quelle importantissime *Osservazioni sopra Diofanto* mediante cui P. FERMAT può dirsi abbia gettati i fondamenti della moderna aritmetica superiore. Oggi siamo in possesso di una edizione critica di DIODANTO, capace di soddisfare le esigenze più severe; è quella di P. TANNERY che già citammo ed a cui costantemente ci riferiremo (1).

In veste moderna DIOFANTO cominciò a presentarsi al pubblico quando F. T. POSELGER tradusse in tedesco il libro *Sui numeri poligonali* (2). Tale esempio fu tosto seguito da O. SCHULZ, al quale siamo debitori di un'ottima traduzione nella stessa lingua di quanto ci resta delle opere del celebre aritmetico greco (3). Di recente una nuova versione tedesca, ancora più pregevole della precedente, fu condotta a termine a G. WERTHEIM (4). Ma prima TH. L. HEATH, in un lavoro già da noi ricordato (5), riprendendo un progetto in

---

(1) Il lettore avvertirà un disaccordo fra i numeri con cui noi, seguendo P. TANNERY, designeremo i problemi di DIOFANTO e quelli che i problemi stessi portano nell'edizione di BACHET; la ragione sta in ciò che BACHET indicò coi numeri successivi tutte le proposizioni di ogni libro, mentre il TANNERY si limitò ai soli problemi. Quindi il DIOFANTO di BACHET comprende

$$43 + 36 + 24 + 46 + 33 + 26 = 208$$

proposizioni, mentre in quello di TANNERY si trovano

$$39 + 35 + 21 + 40 + 30 + 24 = 189$$

problemi. Siccome il TANNERY indicò anche la numerazione antica, così la corrispondenza si stabilisce molto agevolmente, ricorrendo all'edizione da noi adoperata.

(2) *Diophantos von Alexandrien über die Polygonzahlen, übersetzt mit Zusätzen.* Leipzig, 1810.

(3) *Diophantus von Alexandrien arithmetische Aufgaben nebst dessen Schrift über die Polygon-Zahlen.* Berlin, 1822.

(4) *Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonzahlen des Diophantus von Alexandrien.* Leipzig, 1890.

(5) *Diophantus of Alexandria, a Study in the History of Greek Algebra,* II ed., Cambridge, 1910.

parte effettuato da ALBERTO GIRARD (m. 1633) e SIMONE STEVINO (1548-1720) (1), ha esposto sotto forma moderna e succinta tutta la materia trattata da DIOFANTO, facilitando così l'intelligenza dell'opera greca ed accrescendo il numero di coloro che l'ammirano. Con questo scritto chiudiamo l'elenco delle edizioni e traduzioni che ebbe DIOFANTO, e ci volgiamo ad esaminare di quale natura e di quale entità è il contributo che egli diede alle nostre cognizioni sui numeri.

42. - L'*Aritmetica* di DIOFANTO è una collezione di problemi, parte determinati e parte non, risoluti, in generale, senza ricorrere alla rappresentazione geometrica, costantemente usata da EUCLIDE (2), col mezzo di artifici ingegnosi e felicissimi, ma che oggi non tutti si giudicherebbero come legittimi (3). Tali artifici non vengono esposti in generale, sicchè le parole di DIOFANTO non porgono il mezzo di determinarne, con qualche esattezza, il campo di applicabilità, nè dànno alcun indizio dei motivi per cui egli se ne servì in queste piuttosto che in altre questioni. Il metodo sintetico governa, dunque, l'aritmetica di DIOFANTO come vedemmo dominare nella geometria di EUCLIDE; ora, mentre non gravi inconvenienti hanno origine dall'essere rimasta gelosamente celata la via che condusse ai teoremi che questi espone, gran danno proviene, a chi vuol addestrarsi nella difficile arte di risolvere i problemi, dall'essere avvolte nel mistero le considerazioni teoriche che guidarono a conce-

---

(1) Cfr. COSSALI, op. cit., T. I, p. 71.

(2) Fa solo eccezione il problema 10 del Libro V, che HANKEL (op. cit., p. 150) ritenne interpolato, ipotesi non confermata dai manoscritti.

(3) Per confermare mediante un esempio questo giudizio si offre spontaneamente il problema IV, 7, ove si tratta di risolvere il sistema:

$$y^3 + x^2 = u^3 \qquad z^2 + x^2 = v^3.$$

DIOFANTO, a tale scopo, introduce arbitrariamente la condizione $v = y$, e così semplifica tanto la questione (la riduce a sciogliere l'equazione $z^2 + 2x^2 = u^2$) da poterla risolvere: ma non si accorge di ottenere soltanto una soluzione particolarissima.

pire e poi risolvere le questioni trattate da DIOFANTO: ciò spiega, forse, perchè questi non abbia dietro a sè uno stuolo e nemmeno un drappello di seguaci. Nè va taciuto che tal modo di procedere reca sorpresa al lettore, il quale a tutt'altro si attendeva leggendo la prefazione generale dell'opera, che suona così:

Onoratissimo DIONISIO, Siccome mi avvedo che tu ti sforzi assiduamente ad imparare la soluzione dei problemi di aritmetica, così ho tentato di esportene scientificamente il metodo, cominciando dal considerare la natura e le proprietà dei numeri, poichè su di questo poggia tutto il resto. La materia ti sembrerà forse un po' difficile perchè non la conosci ancora ed i principianti hanno poca fiducia d'imparare; ma diligenza da parte tua e quanto ti espongo io ti renderanno agevole tutto, giacchè si apprende presto quando si accoppiano buona voglia ed istruzione.

Una raccolta di problemi, composta mediante criteri non dichiarati (1) nè percepibili senza ambiguità, si presta, non meno di un'opera quale è la *Collezione* di PAPPO (cfr. p. 658), a venire modificata da ricopiatori infedeli, i quali di loro arbitrio si accordano la facoltà di sopprimere qui un problema, che a loro non piace, per aggiungerne altrove un altro, suggerito dall'analogia, senza accorgersi che così trasformano un'opera sapientemente architettata, quale era probabilmente in origine l'*Aritmetica* di DIOFANTO, in un indigesto centone, quale in vari punti essa oggi si presenta (2). Per dimostrare quali e quante licenze si permisero coloro che ci conservarono mediante la scrittura l'opera che ci occupa, citiamo qualche esempio.

I problemi 1-7 del II Libro si connettono in modo così naturale a quelli con cui si chiude il I, che vien fatto di domandarsi a quali concetti siasi ispirato il geometra greco

---

(1) La norma di passare dal semplice al composto, alla quale DIOFANTO dice di attenersi, è troppo vaga per potersi ascrivere fra i rigorosi criteri regolatori.

(2) Tale stato dell'opera di DIOFANTO esonera dall'addentrarsi in uno studio dello stile in cui è scritta, in particolare dispensa dal rilevarne le diseguaglianze.

nel decidere la presente ripartizione della materia nei vari libri che possediamo; ora, dal rispondere a tale difficile questione si è esonerati osservando che il più recente editore di DIOFANTO ritiene che quei problemi facessero parte in origine un antico commento al I Libro e che qualche amanuense poco intelligente li abbia collocati in testa al II Libro, invece che in coda al I, ove essi avevano il loro posto naturale. Lo stesso può ripetersi riguardo ai primi quattro problemi del III Libro, i quali meriterebbero di stare uniti a quelli con cui si chiude il Libro precedente. Dallo stesso ipotetico commento vennero presumibilmente estratti i problemi 17 e 18 del II Libro, che sono pressochè identici a quelli del I Libro recanti i numeri 22 e 23, e le seconde soluzioni dei problemi 5, 6 e 15 del III Libro. Aggiungasi che i problemi 14 e 15 del II Libro si incontrano di nuovo, senz'alcuna ragione, nel Libro successivo, ove portano i numeri 20 e 21.

43. - Prima di esporre la soluzione dei problemi che costituiscono il midollo della sua opera, il geometra greco si indugia a far conoscere un gruppo di teoremi ed un sistema di abbreviazioni (simboli) che esigono, da parte nostra, una analisi alquanto particolareggiata.

Cominciamo dal notare che DIOFANTO considera, al pari di TALETE (v. p. 792), ogni numero come collezione di unità, onde nell'*Aritmetica* la parola *numero* è sinonimo di *numero intero*: ciò non ostante *di ogni problema indeterminato egli cerca, non già le soluzioni* **positive intere** *(come è costume fra i moderni), ma semplicemente quelle* **positive razionali**.

Dopo di avere rilevato essere la serie dei numeri illimitata, egli distingue in essa i quadrati (τετράγωνος), i cubi (κύβος), i biquadrati (δυναμοδύναμις), i quadrato-cubi (δοναμό- κυβος) ed i bicubi (κυβόκυβος); queste cinque specie di numeri assieme alla prima potenza ed all'unità costituiscono la «serie di sette gradi» attribuita a PITAGORA.

« Considerando (dice DIOFANTO) la somma, o la differenza, o il prodotto o il rapporto di questi numeri fra di loro o combinati con i loro lati, si arriva ad enunciare una folla di problemi, alla cui soluzione si giunge pel cammino che insegnerò ». Da tale dichiarazione emerge che le questioni

trattate da DIOFANTO non furono suggerite dalla geometria (1) o da altre scienze e nemmeno dalla pratica; ed infatti le uniche figure considerate dal nostro autore sono i triangoli rettangoli, ma in numeri, e di questioni enunciate sotto forma di « problème plaisant et délectable » ve ne è una sola (Lib. V, 30): approfittando appunto di questa indipendenza delle sue considerazioni da rappresentazioni concrete, DIOFANTO si è ritenuto autorizzato ad addizionare quadrati con cubi e con linee, cosa illecita nel sistema euclideo di aritmetica geometrica.

Per indicare l'unità DIOFANTO adopera il simbolo $\overset{o}{M}$ (abbreviazione di μόνας) e per indicarne i multipli lo fa seguire dalle relative indicazioni di questi (esempio: $\overset{o}{M}\kappa' = 20$). Un segno speciale serve a designare un numero incognito (detto ἀριθμός); tale simbolo veniva declinato come una parola, ma per indicarne il plurale DIOFANTO preferiva scrivere due volte il simbolo stesso: da ciò trae forse origine il sistema di scrivere nn in luogo di n^2, che continuò sino a tutta la prima metà del secolo XIX. Le prime cinque potenze dell'incognita erano indicate coi simboli seguenti:

$$\Delta^{Y} \quad , \quad K^{Y} \quad , \quad \Delta\Delta^{Y} \quad , \quad \Delta K^{Y} \quad , \quad KK^{Y}$$

di cui DIOFANTO (lo dichiara egli stesso) non è l'inventore; per le potenze successive non vennero introdotti simboli speciali, probabilmente perchè non avrebbero trovata applicazione in alcuno dei problemi trattati.

Riguardo a questa simbolica va notato che essa ha due gravi inconvenienti: uno si è che non manifesta l'intima relazione esistente fra l'incognita e le sue potenze; l'altra si è che mal si presta a trattare i problemi con parecchie incognite (2), ed infatti DIOFANTO è costretto a considerare

(1) Fa eccezione il probl. 16 del VI Libro e forse (v. p. 878) quello che porta il n. 39 nel I.

(2) È il medesimo inconveniente che ha la simbolica dello STEVINO e de' suoi contemporanei: i quali, come si sa, per indicare $x, x^2, x^3, \ldots$ ponevano entro un circoletto i numeri $1, 2, 3, \ldots$.

queste separatamente, applicando a ciascuna, volta per volta, gli stessi simboli. Riguardo poi al segno con cui viene designata l'incognita, rileveremo come per molto tempo venne scambiato con un *sigma* finale e si giustificò tale applicazione osservando (1) che questa è l'unica lettera dell'alfabeto greco priva di valore numerico (v. p. 750). Che però quello sia, invece, un segno *ad hoc* fu osservato, anche prima della comparsa dell'edizione critica di DIOFANTO, da T. L. HEATH (2). Il quale, inoltre, sollevò la questione intorno alla genesi di quel segno e la risolse considerando questo come proveniente da una contrazione della sillaba ας iniziale della parola ἀριθμός, e confermò tale ipotesi osservando che analoga è l'origine dei simboli che DIOFANTO adopera per indicare le potenze successive dell'incognita. Le argomentazioni dell'HEATH furono combattute dal GOW (3) e poi riconfermate dal loro autore (4) ed approvate in massima da M. CANTOR (5); esse posseggono il grande merito di avere agitata e rischiarata una questione assai importante, quella, cioè, di sapere se la simbolica diofantea sia un semplice sistema di abbreviazioni, oppure uno sviluppo del sistema aristotelico (6) di indicare ogni concetto con una lettera, se, quindi, essa rappresenti o non il primo stadio dell'algebra da noi adoperata.

A questo punto della sua nomenclatura e della sua simbolica non si arresta DIOFANTO. Accadendo, infatti, assai spesso di dovere considerare le frazioni che hanno per numeratore l'unità e per denominatore le prime sei potenze (dalla prima alla sesta) dell' incognita, egli adopera per indicarle ordinatamente i nomi seguenti : αριθμοστόν, δυναμοστόν, κυβοστόν, δυναμοδυναμοστόν, δυναμοκυβοστόν, κυβοκυβοστόν ; nomi, che in parte si trovano in ERONE (7), ai quali

(1) NESSELMANN, p. 290-291.

(2) *On a point of notation in the Arithmetics of Diophantus* (Journ. of philology, T. XIII).

(3) *A short History of greek Mathematics.* Cambridge, 1884, p. IX.

(4) *Diophantos of Alexandria,* etc., p. 36.

(5) *Vorlesungen,* T. I, 3ª ed., p. 470.

(6) V. ad es. *Fisica,* VII, 5.

(7) Cfr. l'*Index verborum* che si trova al termine del Vol. III di *Heronis Opera omnia.*

corrispondono altrettanti simboli, che si ottengono scrivendo al di sopra di quelli adoperati per l'incognita e le sue potenze un segno speciale (che non è, come venne asserito, una semplice lineetta).

I numeri delle tredici categorie considerate da DIOFANTO, moltiplicati fra di loro, dànno luogo ad altri numeri analoghi, come provano le relazioni seguenti, da lui segnalate per valori di m e n la cui somma sia inferiore a 6:

$$1 \cdot x^m = x^m \; ; \; x^m \cdot \frac{1}{x^m} = 1 \cdot x^m = x^{m+n} \; ;$$

$$\frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{x^m} = \frac{1}{x^{m+n}} \; ; \; \frac{1}{x^m} \cdot x^n = \begin{cases} x^{n-m} \text{ se } n > m \\ \dfrac{1}{x^{m-n}} \text{ se } m > n \, . \end{cases}$$

Queste identità sono il fondamento della moltiplicazione e della divisione dei monomi. Per la moltiplicazione dei polinomi fa mestieri sapere che « meno per meno fa più » e « meno per più fa meno »: ora è notevole che DIOFANTO conosce questi teoremi, benchè gli manchi il concetto di numero negativo isolato; anzi, siccome egli non si arresta a dimostrarli, è evidente che erano noti ai suoi tempi, e venivano probabilmente stabiliti con quel ragionamento geometrico che si legge in uno scolio (di MASSIMO PLANUDE?) al relativo passo di DIOFANTO (1).

E qui va notato che, mentre DIOFANTO indica l'addizione algebrica scrivendo semplicemente di seguito i termini da sommarsi, invece adopera, quanto si tratti di una sottrazione, un simbolo speciale /|\ che (come egli dice) « assomiglia ad una Ψ rovesciata e tronca », e del quale è ignota l'origine (2); questo sistema è in disaccordo con quello che

(1) DIOFANTO ed. TANNERY, T. II, p. 139.

(2) Per una ipotesi relativa v. HEATH, *Diophantos of Alexandria*, p. 42-43. — Siccome tale simbolo s'incontra in uno ms. dei *Metrica* di ERONE anteriore al più antico ms. noto dell'*Aritmetica* di DIOFANTO, così è presumibile non sia stato inventato dal grande aritmetico greco. Cfr. P. TANNERY, *Sur le*

il sommo egittologo E. C. BRUGSCH (1) ha segnalato in alcuni papiri, ove invece la « lineola obliqua » serve come simbolo di addizione, un « uncius semilunari » per la sottrazione ed un terzo segno per indicare il totale.

I due membri di un'eguaglianza vengono chiamati da DIOFANTO εἶδος, donde *species* dei Latini; sono scritti di seguito, divisi dalla parola ἴσος o ἴσοι abbreviata in ισ o ι; ecco un semplicissimo esempio dell'aspetto sotto cui le equazioni si presentano nell'*Aritmetica* che percorriamo:

$$\Delta^{Y}\ \overline{\kappa\varepsilon}\ \text{ἴσαι}\ \overline{\varsigma\sigma}\quad (25x^2 = 200x)$$

44. - Col mezzo di questa simbolica, di cui ognun vede l'analogia e le differenze con quella che noi oggi adoperiamo, DIOFANTO esegue tutte le operazioni sui polinomi e l'applica, per primo forse (2), a trasformare e trattare le equazioni in cui egli s'imbatte: infatti egli suggerisce di effettuare la riduzione dei termini simili e, combinandola, occorrendo, col trasporto di termini da un membro all'altro, di ottenere che nei due membri non restino che termini positivi fra loro dissimili. Se, fatte tutte queste operazioni, si ottiene un'*equazione binomia*, il problema proposto potrà sciogliersi nel modo che emerge dall'esposizione diofantea; ma se la riduzione, per quanto spinta innanzi, conduce ad un'*equazione trinomia*, occorrono nuovi procedimenti, che DIOFANTO promette di insegnare, ma che indarno si cercano nei libri superstiti dell'*Aritmetica*; anzi, tale assenza è uno degli argomenti fondamentali che vennero addotti per sostenere che questi non rappresentano la totalità dell'opera diofantea. Si ritiene di consueto che i summenzionati procedimenti non raggiungessero se non le equazioni quadratiche

---

symbole de soustraction chez les Grecs (Bibl. mathem., III Serie, T. V, 1904).

(1) *Numerorum apud veteres Aegyptios demoticorum doctrina* (Berolini, 1849), p. 31.

(2) " Bei Diophant treten denn auch zuerst algebraische Gleichungen auf.... „ (HANKEL, *Zur Geschichte,* etc., p. 150).

complete; così si riduce il sapere dell'aritmetico greco ad un *minimum* irriducibile e che nulla autorizza ad affermare sia stato da lui oltrepassato; tuttavia, così facendo, si va incontro a problemi storici difficilissimi, di cui a suo tempo terremo parola.

Qui intanto osserviamo che il nostro matematico, dopo avere fatte conoscere le generalità dottrinali di cui testè ci occupammo, passa a risolvere i problemi che gli piace studiare.

Per far conoscere al lettore di quale natura siano, nulla di meglio ci sembra che il presentare (p. 862-874) in un quadro le equazioni a cui conducono i problemi stessi; nel riferirle ci permettiamo però di surrogare quasi sempre le costanti numeriche dell'originale con altrettante costanti letterali, e di disporre secondo un certo ordine le equazioni considerate: ci affrettiamo a dichiarare subito che tale ordine era certamente ben lungi dalle idee di DIOFANTO, al quale è rimasta ignota la fondamentale differenza che passa tra problema *indeterminato* e problema *determinato* (1). Per converso egli si è accorto dell'analogia che esiste fra parecchi problemi trattati, sicchè questi formano tanti gruppi; ebbene nel seguente quadro una graffa serve a collegare i membri di ciascun gruppo. Notisi poi che in molti casi il nostro autore riduce un problema ad un altro; ora è chiaro che questo secondo aveva diritto di un posto nella nostra tabella, e noi glielo accordammo, scrivendo accanto alla relativa equazione in parentesi i numeri che indicano la collocazione del problema primitivo. Similmente facemmo per i problemi funzionanti da lemmi. Notiamo da ultimo che, con un asterisco apposto al simbolo di collocazione di un problema, vogliamo avvertire che questo si suppone interpolato.

---

(1) Tanto vero che egli crede lecito di rendere determinato un problema che non lo sia, assumendo ad arbitrio il valore di una incognita o di qualche sua funzione.

Elenco delle equazioni risolute da Diofanto.

Equazioni di 1.° grado ad un'incognita.

I, 7. $\dfrac{x-a}{x-b}=\lambda$ (1)

I, 8. $\dfrac{x+a}{x+b}=\lambda$

I, 9. $\dfrac{a-x}{b-x}=\lambda$

I, 10. $\dfrac{a+x}{b-x}=\lambda$

I, 14. $\dfrac{x+a}{x-b}=\lambda$

I, 39.
$$\begin{cases} (a+b)\,x+(b+x)\,a=2(a+x)\,b \\ (a+x)\,b+(b+x)\,a=2(a+b)\,x \\ (a+x)\,b+(a+b)\,x=2(b+x)\,a \end{cases}$$

Sistemi determinati di equazioni lineari.

I, 1. $x+y=a\,,\ x-y=b$

I, 2. $x+y=a\,,\ \dfrac{x}{y}=\mu$

I, 4. $x-y=a\,,\ \dfrac{x}{y}=\mu$

(1) L'identità dei probl. 7 e 9 non è avvertita da DIOFANTO.

I, 3. $x+y=a\ ,\ \dfrac{x-b}{y}=\rho$

I, 5. $x+y=a\ ,\ \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=b$

I, 6. $x-y=a\ ,\ \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=b$

I, 12. $x_1+x_2=a\ ,\ y_1+y_2=a\ ,\ x_1=\lambda_1 y_1\ ,\ x_2=\lambda_2 y_2$

I, 13. $x_1+x_2=a\ ,\ y_1+y_2=a\ ,\ z_1+z_2=a\ ,\ y_1=\lambda z_2\ ,\ z_1=\mu x_2\ ,\ x_1=\nu y_2$

I, 15. $\dfrac{x+a}{y-a}=\alpha\ ,\ \dfrac{y+b}{x-b}=\beta$

I, 16. $y+z=a\ ,\ z+x=b\ ,\ x+y=c$

I, 17. $y+z+u=a\ ,\ z+u+x=b\ ,\ u+x+y=c\ ,\ x+y+z=d$

I, 18. $-x+y+z=a\ ,\ x-y+z=b\ ,\ x+y-z=c$

I, 19. $-x+y+z+u=a\ ,\ x-y+z+u=b\ ,\ x+y-z+u=c$
$x+y+z-u=d$

I, 20. $x+y+z=a\ ,\ \dfrac{x+y}{z}=p\ ,\ \dfrac{y+z}{x}=q$

I, 21. $x+y=\dfrac{z}{p}\ ,\ y-z=\dfrac{x}{q}\ ,\ z-a=\dfrac{x}{r}$

II, 18. $x+y+z=a\ ,\ x-\left(\dfrac{y}{m}+a\right)+\left(\dfrac{z}{p}+c\right)=y-\left(\dfrac{y}{n}+b\right)+$

$$+\left(\frac{x}{m}+a\right)=z-\left(\frac{z}{p}+c\right)+\left(\frac{y}{n}+b\right)$$

Sistemi determinati di equazioni riducibili al I e II grado.

I, 26. $ax = (bx)^2$

I, 27. $x + y = 2s \ , \ xy = p$

I, 30. $x - y = 2d \ , \ xy = p$

I, 28. $x + y = 2s \ , \ x^2 + y^2 = 2q^2$

I, 29. $x + y = 2s \ , \ x^2 - y^2 = 4q^2$

I, 31. $\frac{x}{y} = \mu \ , \ \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \nu$

I, 32. $\frac{x}{y} = \mu \ , \ \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \nu$

I, 33. $\frac{x}{y} = \mu \ , \ \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \nu$

I, 34. $\frac{x}{y} = \mu \ , \ \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \nu$

I, 34. Coroll. $\frac{x}{y} = \mu \ , \ \frac{xy}{x \pm y} = \nu$

I, 35. $\frac{x}{y} = \mu \ , \ \frac{y^2}{x} = \nu$

I, 36. $\frac{x}{y} = \mu \ , \ \frac{y^2}{y} = \nu$

I, 35. Coroll. $\frac{x}{y} = \mu \ , \ \frac{x^2}{y} = \nu$; $\frac{x}{y} = \mu \ , \ \frac{x^2}{x} = \nu$

I, 37. $\frac{x}{y} = \mu \ , \ \frac{y^2}{x - y} = \nu$

I, 38. $\frac{x}{y} = \mu \ , \ \frac{y^2}{x - y} = \nu$

I, 38. Coroll. $\frac{x}{y} = \mu \ , \ \frac{x^2}{x - y} = \nu$; $\frac{x}{y} = \pi \ , \ \frac{x^2}{x + y} = \nu$

II, 6.* $x - y = m \ , \ (x^2 - y^2) - (x - y) = n$

IV. 1. $x^3 + y^3 = 2a \ , \ x + y = 2b$

IV. 2. $x^3 - y^3 = 2a \ , \ x - y = 2b$

IV, 15. $(y + z)x = a \ , \ (z + x)y = b \ , \ (x + y)z = c$

IV, 34. $yz+(y+z)=a^2-1, zx+(z+x)=b^2-1, xy+(x+y)=c^2-1$

IV, 35. $yz-(y+z)=a^2-1, zx-(z+x)=b^2-1, xy-(x+y)=c^2-1$

IV, 36. $\frac{yz}{y+z}=\alpha\ ,\ \frac{zx}{z+x}=\beta\ ,\ \frac{xy}{x+y}=\gamma$

IV, 37. $yz=\alpha(x+y+z)\ ,\ zx=\beta(x+y+z)\ ,\ xy=\gamma(x+y+z)$

Lemma a V, 8. $yz=a^2\ ,\ zx=b^2\ ,\ xy=c^2$

[VI, 22.] $x^2+y^2=z^2\ ,\ x+y+z=2p\ ,\ xy=2s$

Diseguaglianze con un'incognita.

[IV, 25.] $x<\frac{8}{x(x+1)}<x+1$

[IV, 31.] $\frac{b}{a+1}<x^2<\frac{b+1}{a}$

Analisi indeterminata di I grado.

I, 14. $\frac{xy}{x+y}=\lambda$

I, 22. $x-\frac{x}{m}+\frac{z}{p}=y-\frac{y}{n}+\frac{x}{m}=z-\frac{z}{p}+\frac{y}{n}$

I, 23. $x-\frac{x}{m}+\frac{u}{q}=y-\frac{y}{n}+\frac{x}{m}=z-\frac{z}{p}+\frac{y}{n}=u-\frac{u}{q}+\frac{x}{p}$

I, 24. $x+\frac{y+z}{m}=y+\frac{z+x}{n}=z+\frac{x+y}{p}$

I, 25. $x+\frac{y+z+u}{m}=y+\frac{z+u+x}{n}=z+\frac{u+x+y}{p}=n+\frac{x+y+z}{q}$

II, 17.* (cf. II, 18)
$$x-\left(\frac{x}{m}+a\right)+\left(\frac{z}{p}+c\right)=y-\left(\frac{y}{n}+b\right)+\left(\frac{x}{m}+a\right)=$$
$$=z-\left(\frac{z}{p}+c\right)+\left(\frac{y}{n}+b\right)$$

IV, 33. $$\frac{x+\frac{y}{z}}{y-\frac{y}{z}}=\alpha\ ,\quad \frac{y+\frac{x}{z}}{x-\frac{x}{z}}=\beta$$

Lemma IV, 84. $xy+(x+y)=a$

Lemma IV. 35. $xy-(x+y)=a$

Analisi indeterminata di II grado.

II, 1.* (cf. I, 31) $\frac{x^2+y^2}{x+y}=\nu$

II, 2.* (cf. I, 34) $\frac{x^2-y^2}{x-y}=\nu$

II, 4.* (cf. I, 32) $\frac{x^2+y^2}{x-y}=\nu$

II, 5.* (cf. I, 33) $\frac{x^2-y^2}{x+y}=\nu$

II, 3.* $\frac{xy}{x\pm y}=\nu$

II, 7.* $\frac{(x^2-y^2)-a}{x-y}=\nu$

II, 8. $x^2+y^2=a^2$

II, 9. $x^2+y^2=a^2+b^2$

II, 10. $x^2-y^2=d$

II, 11. $a+x=u^2\ ,\ b+x=v^2$

II, 12. $a-x=u^2\ ,\ b-x=v^2$

II, 13. $x-a=u^2\ ,\ x-b=v^2$

II, 14 = III, 21. $y+z=a\ ,\ y+x^2=u^2\ ,\ z+x^2=v^2$

II, 15 = III, 20. $y+z=a\ ,\ x^2-y=u^2\ ,\ x^2-z=v^2$

II, 16. $\frac{x}{y}=m\ ,\ x+a^2=u^2\ ,\ y+a=v^2$

II, 19. $\dfrac{x^2-y^2}{y^2-z^2}=\lambda$

II, 20. $x^2+y=u^2\ ,\ x^2+y^2=v^2$

II, 21. $x^2-y=u^2\ ,\ y^2-x^2=v^2$

II, 22. $x^2-(x+y)=u^2\ ,\ y^2-(x+y)=v^2$

II, 23. $x^2-(x+y)=u^2\ ,\ y^2-(x+y)=v^2$

II, 24. $(x+y)^2+x=u^2\ ,\ (x+y)^2+y=v^2$

II, 25. $(x+y)^2-x=u^2\ ,\ (x+y)^2-y=v^2$

II, 26. $xy+x=u^2\ ,\ xy+y=v^2\ ,\ u+v=a$

II, 27. $xy-x=u^2\ ,\ xy-y=v^2\ ,\ u+v=a$

II, 28. $x^2y^2+x^3=u^2\ ,\ x^2y^2+y^2=v^2$

II, 29. $x^2y^2-x^2=u^2\ ,\ x^2y^2-y^2=v^2$

II, 30. $xy+(x+y)=u^2\ ,\ xy-(x+y)=v^2$

II, 31. $xy+(x+y)=u^2\ ,\ xy-(x+y)=v^2\ ,\ x+y=w^2$

II, 32. $y^2+z=u^2\ ,\ z^2+x=v^2\ ,\ x^2+y=w^2$

II, 33. $y^2+z=u^2\ ,\ z^2-x=v^2\ ,\ x^2-y=w^2$

II, 34. $x^2+(x+y+z)=u^2, y^2+(x+y+z)=v^2, z^2+(x+y+z)=w^2$

II, 35. $x^2-(x+y+z)=u^2, y^2-(x+y+z)=v^2, z^2-(x+y+z)=w^2$

III, 1.* $(x+y+z)-x^2=u^2, (x+y+z)-y^2=v^2, (y+y+z)-z^2=w^2$

III, 2.* $(x+y+z)^2+x=u^2, (x+y+z)^2+y=v^2, (x+y+z)^2+z=w^2$

III, 3.* $(x+y+z)^2-x=u^2, (x+y+z)^2-y=v^2, (x+y+z)^2-z=w^2$

III, 4.* $x-(x+y+z)^2=u^2, y-(x+y+z)^2=v^2, z-(x+y+z)^2=w^2$

III, 5. $x+y+z=t^2, -x+y+z=u^2, x-y+z=v^2\ ,\ x+y-z=w^2$

III, 6. $x+y+z=t^2\ \ ,\ \ y+z=u^2\ \ ,\ \ z+x=v^2\ \ ,\ \ x+y=w^2$

III, 7. $x+y=y-z\ ,\ y^2+z^2=u^2\ ,\ z^2+u^2=v^2\ ,\ x^2+y=w^2$

III, 8. $x+y+z-a=t^2, y+z+a=u^2, z+x+a=v^2, x+y+a=w^2$

III, 9. $x+y+z-a=t^2, y+z-a=u^2, z+x-a=v^2, x+y-a=w^2$

III, 10. $yz+a=u^2\ ,\ zx+a=v^2\ ,\ xy+a=w^2$

III, 11. $yz-a=u^2\ ,\ zx-a=v^2\ ,\ xy-a=w^2$

III, 12. $yz+x=u^2\ ,\ zx+y=v^2\ ,\ xy+z=w^2$

III, 13. $yz-x=u^2\ ,\ zx-y=v^2\ ,\ xy-z=w^2$

III, 14. $yz+x^2=u^2\ ,\ zx+y^2=v^2\ ,\ xy+z^2=w^2$

III, 15. $yz+(y+z)=u^2\ ,\ zx+(z+x)=v^2\ ,\ xy+(x+y)=w^2$

III, 16. $yz-(y+z)=u^2\ ,\ zx-(z+x)=v^2\ ,\ xy-(x+y)=w^2$

III, 17. $xy+(x+y)=u^2\ ,\ xy+x=v^2\ ,\ xy+y=w^2$

III, 18. $xy-(x+y)=u^2\ ,\ xy-x=v^2\ ,\ xy-y=w^2$

III, 19. $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \pm x_i = u_i^2$ per $i=1.2.3.4.$

IV, 5. $x^2+y=u\ ,\ x+y=u^2$

IV, 13. $x+1=t^2\ ,\ y+1=u^2\ ,\ x+y+1=v^2\ ,\ x-y+1=w^2$

IV, 14. $x^2+y^2+z^2=(x^2-y^2)+(x^2-z^2)+(y^2-z^2)$ supposto $x>y>z$

IV, 16. $x+y+z=t^2\ ,\ x^2+y=u^2\ ,\ y^2+z=v^2\ ,\ z^2+x=w^2$

IV, 17. $x+y+z=t^2\ ,\ x^2-y=u^2\ ,\ y^2-z=v^2\ ,\ z^2-x=w^2$

IV, 19. $yz+1=u^2\ ,\ zx+1=v^2\ ,\ xy+1=w^2$

IV, 20. $x_ix_k+1=u_{ik}^2 \qquad (i\ ,\ k=1.2.3.4)$

IV, 21. $x-y=u^2, x-z=v^2, y-z=w^2, xz=y^2$ supposto $x>y>z$

IV, 22. $xyz+x=u^2\ ,\ xyz+y=v^2\ ,\ xyz+z=w^2$

IV, 23. $xyz-x=u^2\ ,\ xyz-y=v^2\ ,\ xyz-z=w^2$

IV, 29. $(x^2+y^2+z^2+u^2)+(x+y+z+u)=a$

IV, 30. $(x^2+y^2+z^2+u^2)-(x+y+z+u)=a$

IV, 31. $x+y=1\ ,\ (x+a)(y+b)=u^2$

IV, 32. $x+y+z=a\ ,\ xy+z=u^2\ ,\ xy-z=v^2$

IV, 39. $\dfrac{x-y}{y-z}=\lambda\ ,\ y^2+z^2=u^2\ ,\ z^2+x^2=v^2\ ,\ x^2+y^2=w^2$

IV, 40. $\dfrac{x^2-y^2}{y-z}=\lambda\ ,\ y+z=u^2\ ,\ z+x=v^2\ ,\ x+y=w^2$

V, 1. $xz=y^2\ ,\ x-a=u^2\ ,\ y-a=v^2\ ,\ z-a=w^2$

V, 2. $xz=y^2\ ,\ x+a=u^2\ ,\ y+a=v^2\ ,\ z+a=w^2$

V, 3. $x-a=u^2\ ,\ y+a=v^2\ ,\ z+a=w^2\ ,$
$yz+a=u_1^2\ ,\ zx+a=v_1^2\ ,\ xy-a=w_1^2$

V, 4. $x-a=u^2\ ,\ y-a=v^2\ ,\ z-a=w^2\ ,$
$yz-a=u_1^2\ ,\ zx-a=v_1^2\ ,\ xy-a=w_1^2$

V, 5. $y^2z^2+y^2=u^2\ ,\ z^2x^2+y^2=v^2\ ,\ x^2y^2+z^2=w^2\ ,$
$y^2z^2+y^2+z^2=u_1^2\ ,\ z^2x^2+z^2+x^2=v_1^2\ ,\ x^2y^2+x^2+y^2=w_1^2$

V, 6. $x-2=\xi^2\ ,\ y-2=\eta^2\ ,\ z-2=\zeta^2\ ;$
$yz-x=u^2\ ,\ zx-y=v^3\ ,\ xy-z=w^2\ ;$
$yz-(y+z)=u_1^2\ ,\ zx-(z+x)=v_1^2\ ,\ xy-(x+y)=w_1^2$

Lemma a V, 7. $xy+x^2+y^2=u^2$

V, 7. $x^2\pm(x+y+z)=u^2\ ,\ y^2\pm(x+y+z)=v^2\ ,\ z^2\pm(x+y+z)=w^2$

V, 8. $yz\pm(x+y+z)=u^2\ ,\ zx\pm(x+y+z)=v^2\ ,\ xy\pm(x+y+z)=w^2$

V, 9 (cf. II, 11) $x+y=1\ ,\ x+a=u^2\ ,\ y+a=v^2$

V, 11. $x+y+z=1\ ,\ x+a=u^2\ ,\ y+a=v^2\ ,\ z+a=w^2$

V, 10. $x+y=1\ ,\ x+a=u^2\ ,\ y+b=v^2$

V, 12. $x+y+z=1\ ,\ x+a=u^2\ ,\ y+b=v^2\ ,\ z+c=w^2$

V, 13. $x+y+z=a\ ,\ y+z=u^2\ ,\ z+x=v^2\ ,\ x+y=w^2$

V, 14. $u+x+y+z=a\ ,\ x+y+z=v^2\ ,\ u+y+z=t^2\ ,$
$u+x+z=v^2\ ,\ u+x+y=w^2$

V, 21. $x^2y^2z^2 + x^2 = u^2$, $x^2y^2z^2 + y^2 = v^2$, $x^2y^2z^2 + z^2 = w^2$

V, 22. $x^2y^2z^2 - x^2 = u^2$, $x^2y^2z^2 - y^2 = v^2$, $x^2y^2z^2 - z^2 = w^2$

V, 23. $x^2 - x^2y^2z^2 = u^2$, $y^2 - x^2y^2z^2 = v^2$, $z^2 - x^2y^2z^2 = w^2$

V, 24. $y^2z^2 + 1 = u^2$, $z^2x^2 + 1 = v^2$, $x^2y^2 + 1 = w^2$

V, 25. $y^2z^2 - 1 = u^2$, $z^2x^2 - 1 = v^2$, $x^2y^2 - 1 = w^2$

V, 26. $1 - y^2z^2 = u^2$, $1 - z^2x^2 = v^2$, $1 - x^2y^2 = w^2$

V, 27. $y^2 + z^2 + a = u^2$, $z^2 + x^2 + a = v^2$, $x^2 + y^2 + a = w^2$

V, 28. $y^2 + z^2 - a = u^2$, $z^2 + x^2 - a = v^2$, $x^2 + y^2 - a = w^2$

V, 30. $8x + 5y = u^2$, $u^2 + 60 = (x + y)^2$

[III, 15]. $xy + (x + y) = u^2$, $\dfrac{x + 1}{y + 1} = v^2$

[III, 16. $xy - (x + y) = u^2$, $\dfrac{x + 1}{y + 1} = v^2$

[IV, 31]. $\dfrac{9}{4} + 18(1 + x^2) = u^2$

[IV, 32]. $\dfrac{x - 1}{x + 1} = \dfrac{u^2}{v^2}$

[V, 2]. $\dfrac{x^2}{4} > a$, $x^2 + a = v^2$

[V, 21]. $x^2 + 1 = u^2$, $y^2 + 1 = v^2$, $z^2 + 1 = w^2$

Analisi indeterminata di III grado.

IV, 3. $x^2y = u$, $xy = u^3$

IV, 6. $y^3 + x^2 = u^3$, $z^2 + x^2 = v^2$

IV. 7. $y^3 + x^2 = u^2$, $z^2 + x^2 = v^3$

IV, 8. $y^3 + x = u^3$, $y + x = u$

IV, 9. $y^3 + x = n$, $y + x = u^3$

IV, 10. $x^3 + y^3 = x + y$

IV, 11. $x^3 + y^3 = x - y$

IV, 12. $x + y = x^3 + y^3$ (1)

IV, 18. $x^3 + y = u^2$, $x + y^2 = v^2$

IV, 24. $x + y = a$, $xy = u^3 - u$

IV, 25. $x + y + z = a$, $xyz = \{(x - y) + (x - z) + (y - z)\}$
supposto $x > y > z$

IV, 16. $xy + x = u^3$, $xy + y = v^3$

IV, 27. $xy - x = u^3$, $xy - y = v^3$

IV, 28. $xy + (x + y) = u^3$, $xy - (x + y) = v^3$

[IV, 28]. $\left(\frac{x^3 - y^3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^3 + y^3}{2}\right) = u^2$

IV, 38. $(x + y + z)x = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$, $(x + y + z)y = \eta^2$, $(x + y + z)z = \xi^3$

V, 15. $(x + y + z)^3 + x = u^3$, $(x + y + z)^3 + y = v^3$, $(x + y + z)^3 + z = w^3$

V, 16. $(x + y + z)^3 - x = u^3$, $(x + y + z)^3 - y = v^3$, $(x + y + z)^3 - z = w^3$

V, 17. $x - (x + y + z)^3 = u^3$, $y - (x + y + z)^3 = v^3$, $z - (x + y + z)^3 = w^3$

V, 18. $x + y + z = t^2$, $(x + y + z)^3 + x = u^2$, $(x + y + z)^3 + y = v^2$,
$(x + y + z)^3 + z = w^2$

V, 19. $x + y + z = t^2$, $(x + y + z)^3 - x = u^2$, $(x + y + z)^3 - y = v^2$,
$(x + y + z)^3 - z = w^2$

[V, 19]′. $x + y + z = t^2$, $x - (x + y + z)^3 = u^2$, $y - (x + y + z)^3 = v^2$,
$z - (x + y + z)^3 = w^2$

[V, 19]″. $x + y + z = a$, $(x + y + z)^3 + x = u^2$, $(x + y + z)^3 + y = v^2$,
$(x + y + z)^3 - z = w^2$

---

(1) L'identità dei probl. IV 10 e 12 non è notata da DIOFANTO.

[V, 19]'''. $x+y+z=a$, $(x+y+z)^3-x=u^2$, $(x+y+z)^3-y=v^2$, $(x+y+z)^3-z=w^2$

V, 20. $x+y+z=a$, $x-(x+y+z)^2=u^2$, $y-(x+y+z)^3=v^2$, $z-(x+y+z)^3=w^2$ (1)

[IV, 8]. $x+y=1$, $x^3-y^3=u^2$

[IV, 9, 10]. $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}=\dfrac{u^2}{v^2}$

[IV, 11]. $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}=\dfrac{u^2}{v^2}$

[V, 17]. $x^3+y^3+z^3+3=u^2$

Analisi indeterminata di IV grado.

V, 29. $x^4+y^4+z^4=u^2$

[V, 19]. $x^2+y^2+z^2-3=u^4$

Costruzione di triangoli rettangoli in numeri razionali.

NB. - Nei problemi seguenti è sottintesa la equazione $x^2+y^2=z^2$ e le analoghe.

Lemma a V, 7. $xy=x_1y_1=x_2y_2$

VI, 1. $z-x=u^3$, $z-y=v^3$

VI, 2. $z+x=u^3$, $z+y=v^3$

---

(1) I problemi [V, 19]' , [V, 19]'' e [V, 19]''' colmano una lacuna, che deturpa il testo del BACHET, e che il NESSELMANN ha per primo segnalata (*Die Algebra der Griechen*, p. 410-412).

VI, 3. $\frac{1}{2}xy + a = u^2$

VI, 4. $\frac{1}{2}xy - a = u^2$

VI, 5. $a - \frac{1}{2}xy = u^2$

VI, 6. $\frac{1}{2}xy + x = a$

VI, 7. $\frac{1}{2}xy - x = a$

VI, 8. $\frac{1}{2}xy + (x + y) = a$

VI, 9. $\frac{1}{2}xy - (x + y) = a$

VI, 10. $\frac{1}{2}xy + (x + z) = a$

VI, 11. $\frac{1}{2}xy - (x + z) = a$

VI, 12. $\frac{xy}{2} + x = u^2$, $\frac{xy}{2} + y = v^2$

VI, 13. $\frac{xy}{2} - x = u^2$, $\frac{xy}{2} - y = v^2$

VI, 14. $\frac{xy}{2} - x = u^2$, $\frac{xy}{2} - z = v^2$

VI, 15. $\frac{xy}{2} + x = u^2$, $\frac{xy}{2} + z = v^2$

VI, 16. Trovare un triangolo rettangolo del quale la bisettrice d'un angolo acuto sia razionale.

VI, 17. $\frac{xy}{2} + z = u^2 \ , \ x + y + z = v^3$

VI, 18. $\frac{xy}{2} + z = u^3 \ , \ x + y + z = v^2$

VI, 19. $\frac{xy}{2} + x = u^3 \ , \ x + y + z = v^2$

VI, 20. $\frac{xy}{2} + x = u^2 \ , \ x + y + z = v^3$

VI, 21. $x + y + z = u^2 \ , \ \frac{xy}{2} + (x + y + z) = v^3$

VI, 22. $x + y + z = u^3 \ , \ \frac{xy}{2} + (x + y + z) = v^2$

VI, 23. $z^2 = u^2 + u \ , \ \frac{z^2}{x} = v^3 + v$

VI, 24. $x = u^3 \ , \ y = v^3 - v \ , \ z = w^3 + w$

Lemma a VI, 12. $x = u^2 \ , \ x - y = v^2 \ , \ \frac{xy}{2} + y = w^2$

[VI, 6]. $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} xy = u^2$

[VI, 8]. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} xy = u^2$

[VI, 10]. $\left(\frac{x+z}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} xy = u^2$

[VI, 15]. $u^2 (z + x) - \frac{1}{2} xy \, . \, x (z - x) = v^2$

45. - La semplice ispezione di questo prospetto manifesta subito quali siano stati i criteri di analogia da cui si è lasciato guidare DIOFANTO nel formulare le questioni trattate.

In primo luogo egli ha considerato, quando ciò era pos-

sibile, i problemi fra loro corrispondenti in due, tre, ecc. variabili; nacquero così le coppie: I, 16 e 17; I, 22 e 23; I, 24 e 25; V, 9 e 11; V, 10 e 12; V, 13 e 14, coppie le quali potrebbersi agevolmente trasformare in terne, quaterne, ecc., cosa indubbiamente notata dal geometra greco.

In secondo luogo egli ha considerati molti problemi le cui equazioni formano sistemi aventi primi membri di uno dei tre tipi seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, x_2, \dots, x_n) + F(x_i), \\ f(x_1, x_2, \dots, x_i - 1, x_i + 1, \dots, x_n) + a_i \\ f(x_1, \dots, x_i - 1, x_i + 1, \dots, x_n) + \\ \qquad + F(x_1, \dots, x_i - 1, x_i + 1, \dots, x_n) \end{array}\right\} (i = 1, 2, \dots, n)$$

ove f e F sono funzioni simmetriche dei relativi argomenti; orbene in moltissimi casi egli ha trattati gli analoghi sistemi i cui primi membri sono

$$\pm \{ f(x_1, x_2, \dots, x_n) - F(x_i) \}$$

$$\pm \{ f(x_1, x_2, \dots, x_i - 1, x_i + 1, \dots, x_n) - a_i) \}$$

$$\pm \{ f(x_1, x_2, \dots, x_l - 1, x_i + 1, \dots, x_n) - \\ - F(x_1, x_2, \dots, x_i - 1, x_i + 1, \dots, x_n) \}.$$

Come esempi di tali terne di equazioni addurremo i seguenti: II, 11, 12 e 13; II, 34, 35 e III, 1; III, 2, 3 e 4; V, 15, 16 e 17; V, 18, 19 e 19′; V, 19″, 19‴ e 20.

Tuttavia (bisogna notarlo) DIOFANTO non considera sempre tutti tre i sistemi di ogni terna, come provano le coppie seguenti che sarebbe facile di ampliare in terne: II, 20 e 21; II, 22 e 23; II, 24 e 25; II, 26 e 27; II, 28 e 29; II, 32 e 33; III, 8 e 9; III, 10 e 11; III, 12 e 13; III, 14; III, 15 e 16; III, 17 e 18; IV, 16 e 17; IV, 22 e 23; IV, 29 e 30; V, 1 e 2; V, 3 e 4; V, 27 e 28.

Altri criteri di analogia fecero trattare di seguito le seguenti quaterne di equazioni: I, 31, 32, 33 e 34; I, 35, 36 assieme a due contenute nel corollario del problema I, 38; I, 37, 38 e due contenute nello stesso corollario; II, 1, 2, 4 e 5.

La catena che unisce le equazioni di ciascuna quaterna è messa in evidenza da un esame, anche superficiale, delle equazioni citate; essa è di tale natura che reca meraviglia il non trovare in seguito ai problemi I, 28 e 29 i due traducentisi nei sistemi seguenti:

$$x - y = 2d \quad , \quad x^2 + y^2 = 2q^2$$
$$x - y = 2d \quad , \quad x^2 - y^2 = 2q^2 .$$

Tale osservazione, combinata con quella già fatta intorno alle terne incomplete di sistemi di equazioni, prova che DIOFANTO, nello scegliere i problemi da risolvere, non ha proceduto con regole rigorosamente uniformi: a meno che non si ammetta che DIOFANTO lo abbia realmente fatto e che ogni divergenza da quella regola provenga da una lacuna nei manoscritti. Ora, questa supposizione ci sembra talmente arbitraria che non ci saremmo nemmeno arrestati a farne cenno, ove non avessimo riflettuto che taluno potrebbe credere che FERMAT l'abbia applicata in qualche caso, che, in particolare, abbia suggerita una reintegrazione all'*Aritmetica* di DIOFANTO, quando (1) annettè alle coppie

VI 8 e 9 ; VI 10 e 11 ; VI 12 e 13

risp. le equazioni seguenti

$$x + y - \frac{1}{2} xy = a \quad ; \quad x + z - \frac{1}{2} xz = a \quad ;$$
$$x - \frac{xy}{2} = u^2 \quad , \quad y - \frac{xy}{2} = v^2 .$$

Aggiungasi che quella supposizione è estremamente pericolosa per le conseguenze a cui condurrebbe se venisse applicata in tutta la sua estensione: infatti se si completassero tutti i gruppi imperfetti dell'*Aritmetica* di DIOFANTO, si otterrebbe un'opera, certamente più consona alle esigenze della scienza moderna, ma così disforme da quella che si

(1) *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 329. T. III, p. 266.

legge in tutti i manoscritti conosciuti, da non potere ragionevolmente recare il nome dello scienziato che studiamo.

46. - I metodi con cui DIOFANTO risolve le equazioni in cui si imbatte non sono da lui esposti in generale (1), ciò che indusse l'HANKEL a negare persino l'esistenza di procedure universali (2); ma, che si trovino allo stato latente, è dimostrato ad evidenza dallo studio accurato delle varie classi di problemi trattati nell'*Aritmetica*, quale è quello che fece già il NESSELMANN (3), quale è quello che noi ora imprendiamo, con la scorta però di altri concetti direttori.

Prima di entrare in materia osserviamo che, nel riferire le soluzioni di DIOFANTO, noi (come facemmo redigendo l'*Elenco* dianzi riferito) surrogheremo i numeri dati con costanti letterali; ciò non altera in alcun modo l'essenza delle cose perchè (ben lo sa chi abbia letto l'*Aritmetica*) i ragionamenti ivi adoperati sono sempre indipendenti dai numeri a cui sono applicati; se egli li espone sotto forma particolare è probabilmente perchè non disponeva di una simbolica per le costanti somigliante a quella da lui usata per designare le incognite (v. p. 857).

Per trattare i problemi che si traducono in equazioni di I grado con un'incognita (4) (v. *Aritmetica*, Lib. I, probl. 7-11 e 39) basta applicare le regole di trasformazione e riduzione delle equazioni che vedemmo insegnate da DIOFANTO nell'esordio della sua opera; così egli procede, aggiungendo in fine una verifica dei risultati. Fra tutti quei problemi il più notevole è l'ultimo, su cui crediamo bene di arrestarci un'istante. Eccone anzitutto l'enunciato: « Dati due numeri a e $b < a$, trovare un terzo x tale che moltiplicando ciascuno dei tre numeri a, b, x per la somma degli altri due

(1) Onde non ci sembra potersi dire, come fa il Gow (op. cit., p. 105), che l'*Aritmetica di* DIOFANTO sia " a treatise on algebra „ o parlare, come fa l'HEATH a proposito di DIOFANTO di una " greek algebra „, tanto più che, come vedemmo, i simboli da lui usati sono abbreviazioni di natura dottrinale differente dai simboli nostri.

(2) Op. cit., p. 164.

(3) *Die Algebra der Griechen*, Cap. IX.

(4) Sono gli stessi che gli Egiziani risolvevano col loro calcolo *Hau* (CANTOR, *Vorlesungen*, 1 Bd., 3. Aufl., p. 74).

si ottengono prodotti equidifferenti ». Per risolverlo nel modo di DIOFANTO osserviamo che, dei tre prodotti

$$(a + x)\,b \quad , \quad (b + x)\,a \quad , \quad (a + b)\,x$$

di cui parla il problema, il primo è minore del secondo, dal momento che $b < a$, onde, riguardo alla loro grandezza relativa, non possono presentarsi che i tre casi seguenti:

$$(a + b)\,x < (a + x)\,b < (b + x)\,a$$
$$(a + x)\,b < (a + b)\,x < (b + x)\,a$$
$$(a + x)\,b < (b + x)\,a < (a + b)\,x\,.$$

In corrispondenza, come equazione del problema, si ottiene una delle tre seguenti:

$$(a + b)\,x + (b + x)\,a = 2\,(a + x)\,b$$
$$(a + x)\,b + (b + x)\,a = 2\,(a + b)\,x$$
$$(a + x)\,b + (a + b)\,x = 2\,(b + x)\,a$$

dalle quali si ricava risp.

$$x = \frac{ab}{2a - b} \quad , \quad x = \frac{2ab}{a + b} \quad , \quad x = \frac{ab}{2b - a}\,.$$

Ora, siccome queste relazioni equivalgono alle seguenti

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{x} \quad , \quad \frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad , \quad \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{x}\,,$$

così è evidente essere il problema aritmetico considerato equivalente al problema geometrico seguente: costruire un gruppo armonico $OABX$ di cui sono noti tre elementi O, A, B, nelle tre ipotesi X coniugato a A, X coniugato a O, X coniugato a B; se tal fatto sia stato avvertito da DIOFANTO è possibile, non certo.

Notisi che, essendo $a > b$, i due primi valori trovati per x sono sempre positivi, il terzo lo è soltanto se $2b > a$: ora i valori $a = 5$, $b = 3$ scelti da DIOFANTO soddisfanno a tale condizione, circostanza analoga a molteplici altre (v. p. es. p. 886) e che attesta in lui delle cognizioni aritmetiche superiori a quelle visibili immediatamente.

Passando ai sistemi determinati di equazioni lineari, osserveremo che il nostro autore, in ogni caso riduce la questione alla determinazione di una sola incognita; è in sostanza il procedimento che adoperiamo noi pure; ma, mentre per noi è un semplice artificio di calcolo, pel geometra greco è un'imprescindibile necessità, dal momento che la sua simbolica non comporta che la presenza di una incognita per volta (v. p. 857). La riduzione indicata viene di frequente eseguita col notissimo metodo di sostituzione, ma molto spesso DIOFANTO preferisce invocare l'aiuto di un'incognita ausiliare, come si vede dagli esempi seguenti.

Nel problema I, 5 (1) egli prende come incognita principale $\xi = \frac{x}{m}$; ottiene in conseguenza $x = m\xi$, $y = n(b - \xi)$ e per determinare ξ la equazione $m\xi + n(b - \xi) = a$. Analogamente nel problema II, 18.

Nel problema I, 15 l'incognita principale è $y = \xi + a$, quindi si ha $x = \alpha\xi + a$ e per determinare ξ serve la equazione $\xi + a + b = \beta(\alpha\xi + a - b)$.

Nel problema I, 16 DIOFANTO assume per incognita principale la somma ω dei tre numeri incogniti; questi in conseguenza varranno risp. $\omega - a$, $\omega - b$, $\omega - c$ e per determinare ω servirà l'equazione $\omega = (\omega - a) + (\omega - b) + (\omega - c)$. Similmente nel probl. I, 17.

Per risolvere il problema I, 18 nulla di meglio che addizionare due a due le equazioni date, ma questo metodo non è applicabile al problema analogo I, 19; invece DIOFANTO si serve di un'incognita ausiliare ω, che è la semisomma dei numeri cercati, questi allora sono espressi come segue: $\omega - \frac{a}{2}$, $\omega - \frac{b}{2}$, $\omega - \frac{c}{2}$, e per determinare ω si ha l'equazione $\omega = \left(\omega - \frac{a}{2}\right) + \left(\omega - \frac{b}{2}\right) + \left(\omega - \frac{c}{2}\right)$. In modo somigliante si tratta il problema successivo.

47. - Meno solido terreno si trova sotto i piedi colui che si accinge a studiare le equazioni di secondo grado in DIOFANTO. Moltissime di tali equazioni sono risolute; ma quali

(1) Il lettore troverà le equazioni relative ai problemi citati nell'*Elenco* esposto nel n. 44.

erano le considerazioni teoriche di cui egli si serviva? Egli non lo dice, sicchè per rispondere a tale domanda si è costretti ad introdurre qualche elemento ipotetico.

Ora se si considera che nell'unica opera teorica che possediamo (l'opuscolo *Sui numeri poligonali*) è adoperata abilmente l'algebra geometrica, della quale inoltre si fa uso nella soluzione del problema V, 10, e che del procedimento algebrico-geometrico per risolvere le equazioni quadratiche si giovarono tutti coloro che vanno considerati come immediati discepoli di DIOFANTO; sembra essere inevitabile concludere che il metodo da lui usato fosse nella sostanza identico a quello che già incontrammo negli *Elementi* (v. p. 216) di EUCLIDE. Onde a tale conseguenza, che già riscosse l'approvazione della generalità degli storici (1), noi pure facciamo adesione. Riteniamo poi che per risolvere l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0\,,$$

egli si servisse del procedimento che adoperarono sempre gli Indiani (2) e gli Arabi (3); che, cioè, quell'equazione moltiplicasse per a e ne deducesse l'altra

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c\,;$$

per potere proseguire dev'essere $\frac{b^2}{4} - c$ eguale ad un quadrato (4), cioè $\frac{b^2}{4}$ dev'essere superiore a c e la differenza

(1) COSSALI. op. cit., T. I, p. 91; NESSELMANN, op. cit., p. 328; P. TANNERY, *De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide* (Mém. de Bordeaux, II Série, T. IV, p. 396-416), § III; L. RODET, *L'algèbre d'Al-Khârizmi et les méthodes indienne et grecque* (Journal Asiatique. VIII Série, T. VIII, 1878), p. 13, ecc. L'HANKEL (op. cit., p. 162) è invece di parere opposto; per lui DIOFANTO è un aritmetico non invocante mai l'aiuto della geometria.

(2) COLEBROOKE, op. cit., p. 347.

(3) Cfr. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I, p. 770-71 della 3ª ediz.

(4) V. DIOFANTO ed. TANNERY, T. I, p. 444.

dev'essere il quadrato di un intero o di una frazione (1). In tale ipotesi dall'equazione ultima scritta si trae, con una estrazione di radice,

$$ax + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

e poi trasportando

$$x = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}}{a}.$$

Questa è la forma di soluzione delle equazioni quadratiche che DIOFANTO, con ogni probabilità, adoperava in ogni circostanza. Che egli poi abbia considerate separatamente le sei forme

$$ax^2 = bx \quad , \quad ax^2 = c \quad , \quad bx = c$$
$$ax^2 + bx = c \quad , \quad ax^2 + c = bx \quad , \quad bx + c = ax^2 ,$$

che si ritennero classiche dagli Arabi (2) e dagli algebristi vissuti dopo il Rinascimento, non è certo, ma è probabile, se non altro perchè l'*Aritmetica* offre esempi di tutte quelle sei forme.

Non meno importante della ricerca del metodo con cui risolve un'equazione quadratica è la questione; conobbe egli le due radici di una tale equazione, almeno nel caso in cui sono entrambe positive? Il NESSELMANN la risolse negativamente (3), senza però addurre alcun argomento giustificante tale attitudine, mentre la risposta desiderata deve trarsi, non già da considerazioni aprioristiche, ma dall'esame approfondito di tutti quei problemi trattati da DIOFANTO, che si traducono in equazioni quadratiche.

---

(1) M. CANTOR, interpretando diversamente le parole di DIOFANTO, si stupisce che questi sopprima la prima parte di tale condizione (*Vorlesungen*, T. I, 3ª ed., p. 473).

(2) Cfr. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I, 2ª ed.), p. 719.

(3) Op. cit., p. 353.

Per vedere a quali conseguenze mena tale esame, cominciamo dall'escludere le seguenti equazioni:

IV, 31:	$5x^2 - 3x - 18 = 0$	
IV, 39:	$x^2 - 3x - 9 = 0$	
V, 29:	$x^2 - 5x - 60 = 0$;	$x^2 - 8x - 60 = 0$
VI, 6 e 7:	$84x^2 \pm 7x - 7 = 0$	
VI, 8 e 9:	$630x^2 \pm 73x - 6 = 0$	
VI, 10 e 11:	$630x^2 \pm 81x - 4, = 0$	

perchè tutte, presentando una sola variazione di segno, hanno una sola radice positiva, epperò sono inconcludenti pel nostro scopo. Due variazioni invece presenta l'equazione

$$(VI, 24)\quad 172x = 336x^2 + 24,$$

ma DIOFANTO, appena incontratala, l'abbandona (1) perchè non ha radici razionali. Altre equazioni quadratiche fornite di due radici positive s'incontrano in alcuni passi importantissimi (2) dell'*Aritmetica* ove egli tratta, forse per primo, le diseguaglianze; sopra tali passi bisogna, quindi, fermarsi.

Per giudicarne il valore ricordiamo che, se α e $\beta < \alpha$ sono le radici dell'equazione

$$x^2 + px + q = 0,$$

affinchè sia

$$(1)\qquad x^2 + px + q > 0$$

dev'essere

$$(I)\qquad x < \beta \quad \text{oppure} \quad x > \alpha,$$

mentre affinchè sia

$$(2)\qquad x^2 + px + q < 0$$

dev'essere

$$(II)\qquad \beta < x < \alpha.$$

---

(1) DIOFANTO ed. TANNERY, T. I, p. 444.

(2) Da essi risulta, fra l'altro, che il nostro autore era in grado di calcolare per approssimazione le radici irrazionali delle equazioni quadratiche.

Anzi, se si chiamano α_1 , α_2 , β_1 , β_2 quattro numeri tali che si abbia

$$\beta_1 < \beta < \beta_2 < \alpha_2 < \alpha < \alpha_1 ,$$

affinchè la (1) sia soddisfatta basta che si abbia

(I′) $\qquad x \leqq \beta_1 \qquad$ oppure $\qquad x \geqq \alpha_1 ,$

e affinchè lo sia la (2) basta che si abbia

(II′) $\qquad \beta_2 \leqq x \leqq \alpha_2 ;$

le (I′ , II′) saranno da preferirsi alle (I , II) quando α e β sono irrazionali. Entrambi i tipi (1) e (2) di diseguaglianze si incontrano nel problema V, 10 ove DIOFANTO deve determinare per x un valore tale che si abbia

(3) $$\frac{17}{12} < \frac{6x}{x^2 + 1} < \frac{19}{12} ,$$

tale cioè che siano soddisfatte le due diseguaglianze

$$19x^2 - 72x + 19 > 0 \quad , \quad 17x^2 - 73x + 17 < 0 .$$

Ora le radici del trinomio $19x^2 - 72x + 19$ essendo

$$\frac{36 \pm \sqrt{935}}{19} ,$$

si può porre

$$\alpha_1 = \frac{67}{19} \quad , \quad \beta_1 = \frac{5}{19}$$

e la prima diseguaglianza è soddisfatta se

(4) $$x \geq \frac{67}{19} \qquad \text{oppure} \qquad x \leq \frac{5}{19} ;$$

invece, del trinomio $17x^2 - 72x + 17$ le radici sono

$$\frac{36 \pm \sqrt{1007}}{17} ,$$

quindi si può supporre

$$\alpha_2 = \frac{67}{17} \quad , \quad \beta_2 = \frac{5}{17}$$

e la seconda diseguaglianza è soddisfatta se

$$(5) \qquad \frac{5}{17} \leqq x \leqq \frac{67}{17} .$$

Ne viene che la limitazione (3) sarà soddisfatta se lo saranno le (4) e (5) simultaneamente, cioè se si avrà:

$$\frac{67}{19} \leqq x \leqq \frac{67}{17} .$$

È la conclusione a cui giunge DIOFANTO (1); siccome per ottenerla si adoperano soltanto le radici dei trinomi di secondo grado corrispondenti al radicale positivo, così tale ricerca proietta poca luce sullo questione se il geometra greco abbia conosciute anche le altre.

Più utile torna la limitazione

$$(6) \qquad 22x < x^2 + 60 < 24x ,$$

che s'incontra risolvendo il problema V, 30. Ora se si considera che le radici del trinomio $x^2 - 22x + 60$ sono $11 \pm \sqrt{61}$ si vedrà che affinchè risulti $x^2 - 22x + 60 > 0$ basta che si abbia

$$x \leqq 3 \qquad \text{oppure} \qquad x \geqq 19 ;$$

se si osserva invece che le radici del trinomio $x^2 - 24x + 60$ sono $12 \pm \sqrt{84}$ si vedrà che, affinchè risulti $x^2 - 24x + 60 < 0$, dev'essere

$$3 \leqq x \leqq 21 .$$

Combinando questi risultati si vede che la (6) è soddisfatta se $x = 3$ oppure se

$$19 \leqq x \leqq 21 ;$$

la prima maniera emerge dalla considerazione delle radici date dai *radicali negativi*, la seconda invece dalla conside-

(1) DIOFANTO ed. TANNERY, p. 342, ove però invece di $\frac{67}{19}$ sta $\frac{66}{19}$.

razione delle radici a *radicali positivi*; la prima, a parità di tutte le altre circostanze, è evidentemente preferibile, dando per x un valore più piccolo; DIOFANTO invece preferisce la seconda ed assume $x = 20$. Non è forse questa una valida ragione per far credere che egli *non* conoscesse se non le radici che si ottengono prendendo i radicali positivamente?... Ad ulteriore conforto di tale conclusione (1) osserviamo che nell'*Aritmetica* si cerca indarno una relazione identica del tipo $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + px + q$ (α e β positivi), la quale avrebbe potuto porre DIOFANTO sulla strada della scoperta delle due radici di un'equazione quadratica (2).

48. - La stessa varietà e genialità di espedienti, che vedemmo (p. 879) adoperati da DIOFANTO per risolvere i sistemi determinati di equazioni lineari, si ritrovano nella soluzione dei problemi dipendenti da equazioni di grado superiore. Tacendo dei sistemi binomi in cui una delle equazioni ha la forma $\frac{x}{y} = \mu$ (I, 31 e 38), i quali, per sostituzione, si riducono subito ad un'equazione unica (3), noteremo che nei problemi I, 27 e 28, DIOFANTO introduce come incognita ausiliaria la semidifferenza delle incognite principali e così giunge

---

(1) Contro di essa non sta che una frase ambigua del matematico arabo ALKARCHI (rilevata dal CANTOR, T. I, p. 770 della 3ª ed.), il quale, dopo avere trovate le due radici di un'equazione quadratica, fa cenno di procedura "alla maniera di DIOFANTO „.

(2) In DIOFANTO-TANNERY, T. I, p. 274 è effettuato il prodotto

$$\left[\frac{7}{3}x - 1\right](x + 1)$$

e a p. 438 il prodotto $(3x + 2)(x + 1)$, ma questi non sono del tipo indicato; invece a p. 286 è eseguita la moltiplicazione di $x - 3$ per $x - 4$, ma incidentalmente per ottenere il denominatore della frazione che nasce dalla moltiplicazione di due altre.

(3) È forse per attenersi ad un procedimento uniforme che DIOFANTO non utilizzò la circostanza che le seconde equazioni dei problemi I, 33 e 34 sono riducibili alle forme $x \mp y = \nu$, mentre la seconda del problema I, 36 dà subito $y = \nu$?

a ridurre il problema alla soluzione di un'equazione quadratica pura; altrettanto vien fatto nel problema seguente, certo per uniformità di procedimento, chè del resto assai meglio era notare che il relativo sistema equivale all'altro $x + y = 2s$, $x - y = \frac{2q^2}{s}$ già risoluto (I, 1). Lo stessa incognita ausiliare serve a risolvere il problema IV, 1, mentre nei problemi I, 30 e IV, 2 serve assai bene la semidifferenza. Riguardo al problema IV, 1 osserviamo che, posto $x - y = 2\xi$, si ha $x = b + \xi$ e $y = b - \xi$, onde la prima equazione del problema diviene $b^3 + 3b\xi^2 = a$ e dà $\xi^2 = \frac{a - b^3}{3b}$; scelte, quindi, ad arbitrio le costanti a e b, ξ è irrazionale e così lo sono x, y; DIOFANTO però assume $a = 185$ e $b = 5$, così ha $\xi = 2$, $x = 7$, $y = 3$ e mostra incidentalmente di sapere *determinare due numeri* a, b *tali che* $\frac{a - b^3}{3b}$ *risulti un quadrato.*

Osservazioni congeneri alle precedenti possono farsi riguardo ai sistemi con tre incognite. Quando è possibile DIOFANTO adopera il metodo di sostituzione (1), ma non dimentica che un'incognita ausiliare opportunamente scelta è di inestimabile utilità. Prendiamo ad esempio il probl. IV, 37, in cui egli elegge quale incognita principale la somma $x + y + z = \omega$; allora può scrivere $x = \frac{c\omega}{y}$, $z = \frac{a\omega}{y}$ e dedurre $y^2 = \frac{ac}{b}\omega$. Pone, quindi, $\omega = \frac{ac}{b}\xi^2$ e può, in conseguenza, sostituire alle equazioni che precedono le seguenti:

$$x + y + z = \frac{ac}{b}\xi^2 \quad , \quad y = \frac{ac}{b}\xi \quad , \quad x = c\xi \quad , \quad z = a\xi$$

---

(1) P. es., nel Lemma al probl. V, 8, egli ricava dalla equazione prima e terza

$$z = \frac{a^2}{y} \quad , \quad x = \frac{c^2}{y} \, ,$$

valori che sostituiti nella seconda la trasformano in

$$b^2 = \frac{a^2 c^2}{y^2} \, ;$$

similmente nel Problema IV, 36.

da cui, eliminando x , y , z , deduce:

$$\xi = \frac{bc + ca + ab}{ac}$$

e quindi

$$x = \frac{bc + ca + ab}{a}, y = \frac{bc + ca + ab}{c}, z = \frac{bc + ca + ab}{c}.$$

In altre cicostanze egli ricorre ad artifici ancor più riposti. Così nel problema IV, 15 assume per incognita principale z e quindi scrive la terza delle equazioni date sotto la forma $x + y = \frac{c}{z}$; pone quindi $x = \frac{\alpha}{z}$, $y = \frac{\beta}{z}$, α e β essendo costanti da determinare, fra le quali deve passare la relazione $\alpha + \beta = c$. Sostituendo quei valori di x , y nelle prime due equazioni date si ottiene

$$\frac{\alpha\beta}{z^2} + \alpha = a \quad , \quad \frac{\alpha\beta}{z^2} + \beta = b ,$$

per la cui consistenza dev'essere $\alpha - \beta = a - b$. Questa condizione, assieme alla precedente $\alpha + \beta = c$ dà

$$\alpha = \frac{a - b + c}{2} \quad , \quad \beta = \frac{-a + b + c}{2} ,$$

onde:

$$z = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha - \alpha}} = \sqrt{\frac{(a - b + c)(-a + b + c)}{2(a + b - c)}},$$

$$x = \frac{\alpha}{z} = \sqrt{\frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2(-a + b + c)}},$$

$$y = \frac{\beta}{z} = \sqrt{\frac{(-a + b + c)(a + b - c)}{2(a - b + c)}}.$$

Il procedimento testè riferito, benchè un po' artificioso ed indiretto, non sarebbe indegno di prendere posto in un trattato moderno. Si noti che, affinchè x , y , z risultino razio-

nali, a , b , c devono essere tali che si abbia, indicando con α , β , γ tre interi qualunque,

$$-a+b+c=2\beta\gamma \quad , \quad a-b+c=2\gamma\alpha \quad , \quad a+b-c=2\alpha\beta ,$$

cioè

$$a=\alpha(\beta+\gamma) \quad , \quad b=\beta(\gamma+\alpha) \quad , \quad c=\gamma(\alpha+\beta),$$

fatto che probabilmente non rimase sconosciuto al geometra greco, le cui ipotesi ($a=27$, $b=32$, $c=35$) corrispondono ai valori $\alpha=3$, $\beta=4$, $\gamma=5$.

Non meno notevole è la via battuta da DIOFANTO nel risolvere i problemi IV, 34 e 35; lo è tanto che non sappiamo resistere alla tentazione di riprodurne qui il tracciato. Le equazioni del primo fra i citati problemi possono scriversi come segue:

$$(y+1)(z+1)=a^2 \quad , \quad (z+1)(x+1)=b^2 ,$$
$$(x+1)(y+1)=c^2 ,$$

onde, se si prendono per incognite le quantità $x+1$, $y+1$, $z+1$, si ricade nel sistema di equazioni trattato nel lemma al probl. V, 8. Benchè DIOFANTO non abbia effettuata tale riduzione, pure egli ha intuito che la questione proposta si semplifica fissando la propria attenzione su quelle somme; egli prese, infatti, per incognita principale $\xi=y+1$ e trasformò così la prima e la terza delle equazioni date nelle seguenti:

$$x=\frac{c^2}{\xi}-1 \quad , \quad z=\frac{a^2}{\xi}-1 ;$$

in conseguenza la seconda diviene

$$\frac{a^2c^2}{\xi^2}=b^2$$

e dà $\xi=\frac{ac}{b}$. In conseguenza

$$x=\frac{bc}{a}-1 \quad , \quad y=\frac{ca}{b}-1 \quad , \quad z=\frac{ab}{c}-1 .$$

Prima di passare allo studio dei problemi di analisi inde-

terminata trattati da DIOFANTO, rileviamo la seguente equazione cubica

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3$$

di cui a ragione egli dice che $x = 4$ è una radice (1). Come l'ottenne?.... Probabilmente (2) servendosi delle regole da lui insegnate per trasformare e ridurre qualsia equazione algebrica razionale; infatti, applicandole, essa si muta nella seguente

$$x^3 + x = 4x^2 + 4$$

la quale, scritta sotto la forma

$$x\,(x^2 + 1) = 4\,(x^2 + 1)\,,$$

mette in evidenza la radice $x = 4$.

49. - Da quanto esponemmo nei tre nn. precedenti scaturisce che, nel trattare i problemi determinati, DIOFANTO procede in modo sostanzialmente identico a quello oggi in uso. Ben diversamente accade per quanto concerne l'analisi indeterminata. Infatti, mentre per noi risolvere un problema non pienamente determinato significa trovare l'*espressione generale* dei numeri *interi* che soddisfanno alle condizioni assegnate (3), egli in generale si contenta di trovare *un* numero *razionale e positivo* soddisfacente la questione, od un gruppo di tali numeri, se questa comprende parecchie incognite; tutte le altre soluzioni (le immaginarie come le irrazionali e le negative) sono considerate come impossibili (ἀδύνατα (4)) od assurde (ἄτοπα (5)). Che in origine i Greci si siano proposti di ottenere soluzioni generali (di esprimere, cioè, le incognite in funzioni razionali di certe quantità ausiliarie), e che poi, vinti dalle difficoltà, si siano acquetati

(1) DIOFANTO ed. TANNERY, T. I, p. 66.

(2) COSSALI, op. cit., T. I, p. 75 e SCHULZ, p. 589 dalla sua traduzione di DIOFANTO. La proposta divinazione non fu approvata dal CANTOR (*Vorlesungen*, I, p. 478).

(3) Le condizioni di essere intere le soluzioni si trova osservata dagli aritmetici Indiani, primo BHĀSKARA.

(4) DIOFANTO ed. TANNERY, T. I, p. 250, lin. 15.

(5) Id., p. 312, lin. 18.

al raggiungimento di quelle speciali, è opinione di P. TANNERY (1) che nessun documento suffraga.

Dal punto di vista di DIOFANTO, evidentemente, *non esiste* il problema fondamentale dell'odierna analisi indeterminata di primo grado; ma egli è in grado di dare di ogni problema non determinato la soluzione che comportano le sue idee. Data, infatti, un'equazione del tipo $ax + by = c$, a qualunque valore razionale di x corrisponde un valore razionale di y, $y = \frac{c - ax}{b}$, il quale è positivo purchè x si prenda inferiore a $\frac{c}{a}$; onde nulla di più facile del trovare una soluzione (nel senso diofanteo) di quella equazione. In conseguenza il nostro matematico non tratta che incidentalmente (v. I, 14 e Lemmi a IV, 34 e 35) speciali problemi traducibili immediatamente in un'equazione della forma suindicata. Ma, invece, si occupa *ex professo* di questioni che dànno luogo a sistemi di n equazioni con $n + 1$ incognite; e le tratta col ridurle determinate, assumendo ad arbitrio il valore di una delle incognite, oppure una relazione fra queste. Così nei problemi I, 14, 22 e 23 sceglie per y un certo valore e deduce quelli delle altre incognite; nel problema I, 24 prende di sua volontà il valore di $y + z$ e nel successivo quello di $y + z + u$, mentre nel problema II, 17 elegge siccome nuovo dato il rapporto $\frac{x}{y}$. Va notato che certi sistemi diofantei (I, 22-25) sono omogenei, epperò divengono determinati considerando i rapporti di tutte meno una le incognite alla rimanente (2); DIOFANTO non effettua tale riduzione, ma si giova dell'omogeneità per dedurre da una soluzione razionale una soluzione intera. Una menzione speciale va fatta dei lemmi ai problemi IV, 34 e 35, i quali hanno per iscopo di trovare l'« espressione generale » dei numeri soddisfacenti una delle equazioni $xy \pm (x + y) = a$;

(1) *Études sur Diophante* (Bibl. math., 1887, p. 82).

(2) V. ad es. il sistema IV 33 il quale ha per soluzione

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}, \quad z = \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{\alpha\beta - 1}.$$

per raggiungere questo intento DIOFANTO non trasforma queste equazioni nelle due altre $(x \pm 1)(y \pm 1) = a + 1$, onde ridurre il problema alla ricerca dei fattori maggiori di 1 del numero $a + 1$, ma attribuisce ad una delle incognite (x per esempio) un valore speciale, ricava il corrispondente valore di y, e poi indaga la genesi del risultato, per scoprire come questo muti al variare di x. Tale procedimento è assai comune in DIOFANTO, ma è così caratteristico e così poco noto ai moderni che è bene chiarirne la natura col riferire le parole stesse da lui adoperate in un caso speciale:

Trovare due numeri in termini generali (ἐν τῷ ἀορίστῳ), *tali che il loro prodotto più la loro somma faccia un dato numero.*

Il numero sia 8. Si ponga: I numero cercato $= x$, II numero cercato $= 3$: sarà $I \cdot II + I + II = 4x + 3$. Onde $4x + 3 = 8$, $x = \frac{5}{4}$ e $I = \frac{5}{4}$, $II = 3$. Considero ora in qual modo x risulta eguale a $\frac{5}{4}$. Questo numero è il quoziente di 5, eccesso di 8 su 3, per 4, che è 3 aumentato di 1. Perciò, se al II dei dati numeri attribuiamo un valore qualunque x, per avere il valore del I basterà dividere per $x + 1$ l'eccesso di 8 sopra x. Ponendo ad esempio $II = x - 1$, sarà $8 - II = 9 - x$ e quindi il

$$I = \frac{9 - x}{x} = \frac{9}{x} - 1.$$

Tale è la soluzione in termini generali della questione: prodotto più somma eguale a 8. La soluzione è in termini generali perchè comunque si scelga x si ottiene una soluzione.

50. - Importanza ancora maggiore possiede quella parte dell'*Aritmetica* di DIOFANTO che si riferisce all'analisi indeterminata di grado superiore al primo (1). Taccio dei problemi II, 1, 2, 4 e 5, che si trasformano in determinati (e precisamente nei problemi I, 31-34), assumendo ad arbitrio il valore del rapporto $\frac{y}{x}$: essi si ritengono interpolati, al

(1) Molti dei problemi di tale specie passarono nell'*Algebra* di EULERO e quindi conseguirono grande diffusione ed invidiabile notorietà.

pari dei problemi II, 3 (similmente riducibile a quello contemplato nel corollario alla prop. I, 34) e II, 7 (che è trasformabile in I, 1 prendendo a capriccio la differenza $x - y$). Arrestiamoci, invece, un momento sui problemi II, 8, 9, 10 i quali hanno per iscopo di « decomporre in due quadrati un quadrato dato o la somma di due quadrati, oppure di trovare due quadrati di cui sia nota la differenza ». Per risolvere questi problemi — che furono certamente ispirati dalle investigazioni di PITAGORA e PLATONE esposte a p. 799 e 812 — il grande aritmetico greco sfrutta il seguente concetto generale: esprime i lati dei due quadrati ignoti in funzione razionale di certe costanti arbitrarie λ, μ, ... e di una variabile indipendente ξ scelta in modo che, in forza delle condizioni del problema, soddisfaccia ad un'equazione lineare; risolta questa, i lati ignoti saranno razionali. In qual modo DIOFANTO applichi questo concetto ai problemi citati emerge dalle seguenti formole, che esprimono le soluzioni da lui esposte.

(II, 8) $\quad x^2 + y^2 = a^2$ (1)

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi \\ y &= \lambda\xi - a \end{aligned}\right\} \quad x^2 + y^2 = \xi^2 + \lambda^2\xi^2 - 2a\lambda\xi + a^2 = a^2 \ , \quad \xi = \frac{2a\lambda}{1+\lambda^2}$$

Soluzione:

$$x = \frac{2\lambda}{\lambda^2+1}\,a \ , \quad y = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\,a$$

(II, 9) $\quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (2)

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda\xi - a \\ y &= \mu\xi - b \end{aligned}\right\} \quad x^2 + y^2 = (\lambda^2+\mu^2)\xi^2 - 2(\lambda a + \mu b)\xi + a^2 + b^2 = a^2 + b^2,$$

$$\xi = 2\,\frac{\lambda a + \mu b}{\lambda^2 + \mu^2}$$

---

(1) Questo problema ha suggerito a P. FERMAT il celebre teorema sull'impossibilità in numeri razionali della equazione $x^n + y^n = z^n$ (*Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 291 e T. III, p. 241). Il caso particolare $n = 3$ era già stato almeno intuito dagli Arabi; v. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I, 3ª ed., p. 752 e 785).

(2) La questione analoga per due cubi fu enunciata e risolta da FERMAT (*Oeuvres*, T. I, p. 297 e T. III, p. 246).

Soluzione:

$$x = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)\,a + 2\lambda\mu b}{\lambda^2 + \eta^2} \quad , \quad y = \frac{(\mu^2 - \lambda^2)\,b + 2\lambda\mu a}{\lambda^2 + \mu^2}$$

(II, 10) $\quad x^2 - y^2 = d$

$$\left.\begin{matrix} x = \lambda + \xi \\ y = \xi \end{matrix}\right\} \; x^2 - y^2 = \lambda^2 + 2\lambda\xi = d \quad , \quad \xi = \frac{d - \lambda^2}{2\lambda}$$

Soluzione:

$$x = \frac{d + \lambda^2}{2\lambda} \quad , \quad y = \frac{d - \lambda^2}{2\lambda} \; (1).$$

Ora il concetto surriferito, del quale potremmo citare molte altre applicazioni, nell'*Aritmetica* di DIOFANTO ne campeggia un altro, non meno ampio e fecondo; è il seguente: per risolvere in numeri razionali un sistema indeterminato, si esprimano alcune o tutte le incognite mediante tali funzioni di una indeterminata, che tutte le equazioni date *meno una* o (se a tanto non si può giungere) tutte *meno due* siano soddisfatte: quell'indeterminata si determini poi razionalmente, mediante la equazione o le equazioni escluse.

È chiaro che questa idea è suscettibile di infinitiformi applicazioni e DIOFANTO se ne giova con abilità veramente ammirabile; se volessimo far conoscere tutti i geniali artifici mediante cui egli seppe rivolgere ai propri fini quel concetto, dovremmo qui riferire la miglior parte dell'*Aritmetica*; ci limiteremo a quelli che ci sembrano i più cospicui, augurando che da essi emani tale seduzione che il lettore sia spinto a prendere diretta conoscenza di un'opera bellissima fra le belle che l'antica Grecia ci ha regalate.

(II, 11) $\quad a + x = u^2 \quad , \quad b + x = v^2 .$

Si ponga $x = \xi^2 - a$: così sarà *ipso facto* soddisfatta la condizione che $a + x$ sia un quadrato; affinchè sia un qua-

---

(1) Questa si ottiene direttamente sostituendo alla equazione data le due seguenti:

$$x - y = \lambda \quad , \quad x + \lambda = \frac{d}{\lambda} .$$

drato anche $b + x = b + \xi^2 - a$, si scelga ad arbitrio un numero λ e si ponga $\xi^2 - a + b = (\xi - \lambda)^2$. Verrà $\xi = \frac{\lambda^2 + a - b}{2\lambda}$ ed il dato sistema di equazione sarà risolto in numeri razionali.

Ammettono soluzioni analoghe i problemi II, 12 e 13.

(II, 14) $\quad y + z = a \quad , \quad y + x^2 = u^2 \quad , \quad z + x^2 = v^2 .$

Scelti arbitrariamente due numeri μ, ν si ponga $y = \xi$, $y = 2\mu\xi + \mu^2$, $z = 2\nu\xi + \nu^2$; allora $y + x^2$ e $z + x^2$ saranno quadrati, cioè saranno soddisfatte le ultime due equazioni del problema, e la prima diverrà $2(\mu + \nu)\xi + \mu^2 + \nu^2 = a$ e ci darà $\xi = \frac{a - (\mu^2 + \nu^2)}{2\mu\nu}$; x, y, z assumono in conseguenza valori razionali.

Similmente si può risolvere il problema II, 15.

II, 34: $x^2 + (x + y + z) = u^2 \quad , \quad y^2 + (x + y + z) = v^2 \quad ,$
$z^2 + (x + y + z) = w^2 .$

Detta ξ una quantità da determinarsi e m una costante arbitraria, si ponga

(1) $\qquad x + y + z = m\xi^2$

e si decomponga m in tre modi differenti in due fattori:

$$m = \alpha\alpha = \beta\beta' = \gamma\gamma' ,$$

ove si suppone, come è lecito,

$$\alpha > \alpha' \quad , \quad \beta > \beta' \quad , \quad \gamma > \gamma' .$$

Facendo poi

(2) $\quad x = \frac{\alpha - \alpha'}{2}\xi \quad , \quad y = \frac{\beta - \beta'}{2}\xi \quad , \quad z = \frac{\gamma - \gamma'}{2}\xi ;$

$$u = \frac{\alpha + \alpha'}{2}\xi \quad , \quad v = \frac{\beta + \beta'}{2}\xi \quad , \quad w = \frac{\gamma + \gamma'}{2}$$

risulteranno soddisfatte tutte tre le equazioni date. Quanto

a ξ, essa si determinerà eliminando x, y, z fra le equazioni (1) e (2); si ottiene così:

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha'+\beta'+\lambda')}{2}\xi = m\xi^2$$

onde

$$\xi = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha'+\beta'+\gamma')}{2m}.$$

Siffatto schema di soluzione può adattarsi ad altri problemi, quali sono: II, 35 e III, 1, 2, 3 e 4.

(IV, 38) Questo problema si enuncia a parole così: « trovare tre numeri x, y, z la cui somma moltiplicata successivamente per ciascuno dia per prodotti risp. un numero triangolare, un quadrato ed un cubo ».

Per risolverlo si noti che dalle tre equazioni

$$(x+y+z)\,x = t\ ,\ (x+y+z)\,y = q\ ,\ (x+y+z)\,z = c$$

si trae

$$t+q+c = (x+y+z)^2,$$

onde si vede facilmente che tutta la difficoltà del problema è ridotta a « trovare un numero triangolare, un quadrato ed un cubo la cui somma sia un quadrato ». Si ponga per ciò

$$(3) \qquad t+q+c = \xi^2\ ,\ q = (\xi-a)^2\ ,\ c = b^3,$$

e si otterrà

$$t = 2a\xi - a^2 - b^3;$$

se t risultasse un numero triangolare il problema sarebbe risolto. Ora, affinchè ciò accada, è necessario e sufficiente che $8t+1$ sia un quadrato (1), onde porremo

$$(4) \qquad 8(2a\xi - a^2 - b^3) + 1 = (\lambda\xi + \mu)^2.$$

Il valore di ξ soddisfacente a questa relazione non risulta razionale, ma tale risulterebbe se nel primo membro si tro-

(1) Infatti da

$$(8t+1) = (2n+1)^2 \qquad \text{si trae} \qquad t = \frac{n(n+1)}{2}.$$

vasse a^2 invece di a e ξ^2 invece di ξ, e se nel secondo fosse $\lambda = 4a$; in conseguenza DIOFANTO pone, in luogo delle (3), le relazioni

$$(3') \qquad t + q + b = \xi^4 \quad , \quad q = (\xi^2 - a^2)^2 \quad , \quad c = b^3 ,$$

e quindi giunge, per determinare ξ, all'equazione

$$(4') \qquad 8(2a^2\xi^2 - a^4 - b^3) + 1 = (4a\tau + \mu)^2 ;$$

ora questa dà per ξ un valore razionale e quindi valori di tale specie anche per x, y, z. Non possiamo tacere che il problema potrebbe anche risolversi (anzi più semplicemente) conservando le equazioni (3) e surrogando la (4) con l'equazione

$$8(2a\xi - a^2 - b^3) + 1 = \lambda^2 .$$

51. - Per quanto pregevole sia il concetto di soluzione indicato nel n. prec., non è lecito affermare che le conseguenti soluzioni siano sempre le migliori immaginabili. Valga a provarlo il problema III, 5. « Trovare tre numeri tali che sia un quadrato tanto la loro somma quanto la differenza tra la somma di due qualunque fra essi ed il terzo » (1). Per sciogliere il quale DIOFANTO pone

$$x + y + z = (\xi + a)^2 \ , \ x + y - z = a^2 \ , \ -x + y + z = \xi^2 ,$$

---

(1) Lo stesso appunto può muoversi ai problemi 15 e 16 del III Libro. Nel primo di essi si tratta di rendere quadrati tre trinomî $yz + y + z$, $zx + z + x$, $xy + x + y$. Ora per conseguire tale scopo il modo più semplice è di procedere, non già come fece DIOFANTO, ma nel modo seguente: Le equazioni del problema si scrivano come segue:

$$(y + 1)(z + 1) = u^2 + 1 \quad , \quad (z + 1)(x + 1) = v^2 + 1 ,$$
$$(x + 1)(y + 1) = w^2 + 1 .$$

Ora mediante il problema II, 10 si determinano tre coppie di quadrati la cui differenza sia 1:

$$a^2 + 1 = A^2 \quad , \quad b^2 + 1 = B^2 \quad , \quad c^2 + 1 = C^2 .$$

Se allora si fa $u = a$, $v = b$, $w = c$, si trova (v. Lemma, V, 8)

$$x = \frac{BC}{A} - 1 \quad , \quad y = \frac{CA}{B} - 1 \quad , \quad z = \frac{AB}{C} - 1 ,$$

ed il problema è risolto. Similmente nel problema III, 16.

e così tre delle equazioni del problema risultano soddisfatte; ora, siccome da queste posizioni si trae

$$z = \frac{\xi^2 + 2a\xi}{2}, \quad x = \frac{a^2 + 2a\xi}{2}, \quad y = \frac{a^2 + \xi^2}{2}, \quad x - y + z = 2a\xi,$$

così, affinchè sia verificata anche l'equazione rimanente, basta porre $2a\xi = k^2$, k essendo un numero qualunque. Il problema è così risoluto. Ma, se si osserva che le tre ultime equazioni del problema addizionate dànno

$$x + y + z = u^2 + v^2 + w^2,$$

si vedrà che il problema può trattarsi molto più elegantemente così: Si scelgano tre numeri a, b, c i cui quadrati diano per somma un nuovo quadrato k^2, e si ponga

$$-x + y + z = a^2, \quad x - y + z = b^2, \quad x + y - z = c^2,$$

risulterà

$$x + y + z = k^2$$

e tutte le condizioni del problema saranno soddisfatte; il problema stesso ha dunque la seguente notevolissima soluzione

$$x = \frac{b^2 + c^2}{2}, \quad y = \frac{c^2 + a^2}{2}, \quad z = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Essa pure si trova nell'*Aritmetica* di DIOFANTO, ma il TANNERY inclina a considerarla per interpolata. A tale conclusione non guida alcuna considerazione intrinseca, perchè in mille occasioni DIOFANTO si è mostrato capace di escogitare soluzioni originalissime ed oltremodo eleganti; a convincerne il più scettico lettore bastano i due esempi seguenti:

(III, 19). Per « trovare quattro numeri x_1, x_2, x_3, x_4 tali che il quadrato della loro somma non cessi di essere un quadrato aggiungendovi ciascuno dei numeri dati », DIOFANTO si giova dell'osservazione seguente: se al quadrato dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo si aggiunge o si toglie il doppio dell'area, si ottiene un altro quadrato (cfr. più avanti p. 910). Ne viene che, considerando quattro triangoli rettangoli

aventi per comune ipotenusa c e per cateti $a_1, b_1; \ldots;$ a_4, b_4, e ponendo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = c\xi \ , \ x_1 = 2a_1b_1\xi^2 \ , \ \ldots \ , \ x_4 = 2a_4b_4\xi^2 \ ,$$

tutte le condizioni del problema saranno soddisfatte; della indeterminata ξ si troverà il valore eliminando le x fra queste cinque equazioni, ed infatti si ottiene

$$\xi = \frac{c}{2\,(a_1b_1 + \ldots + a_4b_4)} \ .$$

Si vede che tutta la difficoltà del problema è ora concentrata nella determinazione di quattro triangoli rettangoli che abbiano l'ipotenusa comune. Per effettuarla si prendano (seguendo le traccie di DIOFANTO) due triangoli rettangoli in numeri: α, β, γ ; α', β', γ', di cui γ e γ' siano le ipotenuse; saranno $\alpha\gamma', \beta\gamma', \gamma\gamma'$; $\alpha'\gamma, \beta'\gamma, \gamma'\gamma$ due triangoli rettangoli aventi $\gamma\gamma'$ per comune ipotenusa. Orbene, si rifletta che, essendo

$$(\gamma\gamma')^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\,(\alpha'^2 + \beta'^2) = (\alpha\alpha' - \beta\beta')^2 + \\ + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2 = (\alpha\alpha' + \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2,$$

le altre due coppie di numeri $|\,\alpha\alpha' - \beta\beta'\,|$, $\alpha\beta' + \alpha'\beta$ e $\alpha\alpha' + \beta\beta'$, $|\,\alpha\beta' - \alpha'\beta\,|$ misureranno i cateti di altri due triangoli rettangoli entrambi aventi $\gamma\gamma'$ per ipotenusa, epperò costituenti con i due precedenti la cercata quaterna di triangoli. Onde il problema proposto è risolto completamente e con piena generalità.

(IV, 29) $\qquad (x^2 + y^2 + z^2 + u^2) + (x + y + z + u) = a$

Si scriva l'equazione proposta come segue:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 = a + 1 \ .$$

Ora, se $a + 1$ è eguale alla somma di quattro quadrati $m^2 + n^2 + p^2 + q^2$, eguagliando i numeri $x + \frac{1}{2}$, $y + \frac{1}{2}$, $y + \frac{1}{2}$, $x + \frac{1}{2}$, ai numeri m, n, p, q si otterrà una so-

luzione del problema. Se invece $a + 1$ è somma di tre quadrati $m^2 + n^2 + s^2$, decomponendo (v. probl. II, 8) s^2 in due quadrati $p^2 + q^2$ si ricadrà nel caso precedente; se $a + 1$ è la somma di due quadrati $r^2 + s^2$, decomporremo tanto r^2 che s^2 nella somma di due quadrati e ci ritroveremo nelle ipotesi precedenti; similmente se $a + 1$ è un quadrato. Onde il problema è risoluto in ogni caso.

Similmente si può sciogliere il problema IV, 30.

52. - Nel corso della soluzione di parecchi problemi DIOFANTO s'imbatte nella seguente questione: « date due funzioni algebriche razionali intere lineari o quadratiche di una variabile, determinare un valore razionale di questa tale che quelle funzioni divengano simultaneamente quadrati ». Il corrispondente sistema di equazioni è da DIOFANTO designato col nome di *equazione doppia* (διπλοισότης) e risoluto con metodo uniforme, ma soggetto ad incomode limitazioni; ciò spiega perchè il geometra greco ne faccia l'uso più parco ed insegni anzi come evitarlo e perchè il BACHET DE MEZIRIAC abbia giudicato necessario arrecarvi alcuni complementi.

Il caso che più di frequente s'incontra è quello in cui le due equazioni costituenti l'equazione doppia siano lineari. I loro primi membri hanno allora la forma: $a_1 x + b_1$, $a_2 x + b_2$. Non sempre un'equazione doppia di tal fatta è risolubile (1), ma per ciò è necessario che i coefficienti a, b soddisfacciano a condizioni speciali. Frequentissima (v. II, 11 e 13, III, 12, 15 e 16, IV, 32) è la supposizione che sia $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}$, ossia $a_1 = \sigma\lambda_1^2$, $a_2 = \sigma\lambda_2^2$. I primi membri delle equazioni proposte sono allora

$$\sigma\lambda_1^2 x + b_1 \quad , \quad \sigma\lambda_2^2 x + b_2 ;$$

e poichè (come DIOFANTO sa) i primi membri delle equazioni costituenti un'equazione doppia si possono sempre moltiplicare o dividere ciascuno per un quadrato arbitrario, così essi possono sostituirsi con i seguenti:

$$\varrho y + \beta_1 \quad , \quad \varrho x + \beta_2$$

(1) DIOFANTO ed. TANNERY, T. I, p. 270.

ove

$$\varrho = \varrho\lambda_1^2\lambda_2^2 \quad , \quad \beta_1 = b_1\lambda_2^2 \quad \text{e} \quad \beta_2 = b_2\lambda_1^2 .$$

Si supponga, per fissare le idee, $\beta_1 > \beta_2$, si formi la differenza $\beta_1 - \beta_2$ e la si decomponga in due fattori m, n (1); osservando che in conseguenza è

$$\beta_1 - \beta_2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 .$$

si vedrà che le due seguenti equazioni

$$\varrho x + \beta_1 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \quad , \quad \varrho x + \beta_2 = \left(\frac{m-n}{2}\right)^2$$

sussistono simultaneamente e dànno per x lo stesso valore razionale

$$x = \frac{1}{\varrho}\left\{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \beta_1\right\} = \frac{1}{\varrho}\left\{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 - \beta_2\right\} :$$

ciò prova che ad ogni decomposizione in due fattori della differenza $\beta_1 - \beta_2$ è annessa una soluzione della doppia equazione considerata.

Un altro caso in cui DIOFANTO risolve (IV, 39) una equazione doppia è quello in cui b_1 e b_2 siano quadrati. Posto $b_1 = \sigma^2\mu_1^2$, $b_2 = \sigma^2\mu_r^2$, le due equazioni proposte, previamente divise per μ_1^2 e μ_2^2, hanno i loro primi membri della forma: $\lambda_1 x + \sigma^2$, $\lambda_2 x + \sigma^2$. Supponendo $\lambda_1 > \lambda_2$ se ne formi la differenza; osservando essere

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, x = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4\sigma}\, x + \sigma\right)^2 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4\sigma}\, x - \sigma\right)^2 ,$$

si vedrà che, se si sceglie x in modo che sia

$$\lambda_1 x + \sigma^2 = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4\sigma}\, x + \sigma\right)^2 ,$$

---

(1) Si ponga ad esempio:

$$m = \frac{p}{q}(\beta_1 - \beta_2) \quad , \quad n = \frac{q}{p} .$$

risulterà pure

$$\lambda_2 x + \sigma^2 = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4\sigma}\, x - \sigma\right)^2,$$

cioè la doppia equazione sarà verificata, x avendo il valore (razionale)

$$\frac{8\,(\lambda_1 + \lambda_2)\,\sigma^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}.$$

Per risolvere la stessa doppia equazione con maggiore generalità DIOFANTO suggerisce il seguente procedimento: si ponga

$$\lambda_1 x + \sigma^2 = (y + \sigma)^2,$$

così la prima equazione sarà soddisfatta dal valore razionale

$$x = \frac{y^2 + 2\sigma y}{\lambda_1};$$

è in conseguenza

$$\lambda_2 x + \sigma^2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,(y^2 + 2\sigma y) + \sigma^2;$$

si ponga ora

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,(y^2 + 2\sigma y) + \sigma^2 = (\varrho y - \sigma)^2$$

e si sarà soddisfatta anche la seconda delle equazioni date, y avendo il valore

$$2\sigma\,\frac{\varrho + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}{\varrho^2 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}};$$

emerge da ciò che, per ogni valore di ϱ, si ha una soluzione della doppia equazione proposta.

Di analogo trattamento sono suscettibili le equazioni doppie i cui primi membri hanno la forma $x^2 + \lambda_1 x + \sigma^2$, $\lambda_2 x + \sigma^2$ e delle quali DIOFANTO offre più di un esempio (V, 1; VI, 6 e 22); si formi, infatti, la differenza dei primi membri e si noti essere:

$$x\,\{\,x + (\lambda_1 - \lambda_2)\,\{ = \left(x + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^3 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2;$$

si vedrà tosto che, se x è scelto in modo che sia

$$\lambda_2 x + \sigma_2 = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2,$$

sarà

$$x^2 + \lambda_1 x + \sigma^2 = \left(x + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2$$

e la doppia equazione sarà soddisfatta razionalmente.

In DIOFANTO non mancano nemmeno esempi di equazioni doppie a primi membri quadratici. Questi sono sempre della forma $\varrho^2 x^2 + \alpha_1 x + \delta_1$, $\varrho^2 x^2 + \alpha_2 x + \beta_2$. Siffatte equazioni possono risolversi considerando la differenza $(\alpha_1 - \alpha_2)\, x + (\beta_1 - \beta_2)$ dei loro primi membri. Se $\beta_1 = \beta_2$ (III, 13; IV, 27; VI, 8), se ne chiami β il comune valore, e si noti essere

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\, x = \left(\varrho x + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4\varrho}\right)^2 - \left(\varrho x - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4\varrho}\right)^2,$$

si vedrà allora che coesistono le equazioni

$$\varrho^2 x^2 + \alpha_1 x + \beta = \left(\varrho x + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4\delta}\right)^2,$$

$$\varrho^2 x^2 + \alpha_2 x + \beta = \left(\varrho x - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4\varrho}\right)^2$$

e sono verificate dal valore razionale

$$x = \left\{ \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4\varrho}\right)^2 - \beta \right\} : \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Se poi $\beta_1 \lesseqgtr \beta_2$, si scriva la differenza dei secondi membri della data equazione doppia come segue:

$$(\beta_1 - \beta_2) \left\{ \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} x + 1 \right\} = \left\{ \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2(\beta_1 - \beta_2)} x + \frac{1 + \beta_1 - \beta_2}{2} \right\} -$$

$$- \left\{ \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2(\beta_1 - \beta_2)} x + \frac{1 - \beta_1 + \beta_2}{2} \right\}^2;$$

allora si sarà indotti a porre

$$\varrho^2 x^2 + \alpha_1 x + \beta_1 = \left\{ \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2(\beta_1 - \beta_2)} x + \frac{1 + \beta_1 - \beta_2}{2} \right\}^2$$

$$\varrho^2 x^2 + \alpha_2 x + \beta_2 = \left\{ \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2(\beta_1 - \beta_2)} x + \frac{1 - \beta_1 + \beta_2}{2} \right\}^2 ;$$

così la doppia equazione è soddisfatta; ma in generale x non risulterà razionale; lo sarà però supponendo

$$| \varrho | = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2(\beta_1 - \beta_2)} :$$

in tali condizioni trovasi appunto l'unica equazione doppia del detto tipo trattata da DIOFANTO (III, 13).

Questo è quanto sa, od almeno insegna, il nostro autore intorno alla risoluzione delle equazioni doppie; non fa mestieri spendere molte parole a dimostrare quanto ingegno ed abilità egli abbia spiegati in tale circostanza, ma è dovere convenire che i risultati da lui stabiliti hanno limitata generalità.

53. - Intento e natura differente dall'intento e dalla natura che ha il metodo della doppia equazione possiede un altro procedimento usato da DIOFANTO (V, 9, 11, 12, 13 e 14) e da lui chiamato « metodo di approssimazione » (παρισότητος ἀγωγή), perchè serve ad avvicinarsi ai valori che hanno certe quantità soggette a determinate condizioni. In che consista si vede dalla seguente questione in cui DIOFANTO lo applica.

Per potere " dividere l'unità in tre parti tali che ciascuna, aumentata di un numero dato a, divenga un quadrato „ bisogna che a non sia della forma $8k + 2$ (v. più avanti p. 913); prendiamo quindi $a = 3$. Siccome dalle equazioni date, eliminando x, y, z, si deduce $u^2 + v^2 + w^2 = 10$, così se dividiamo 10 in tre quadrati e da ciascuno togliamo tre unità i residui saranno i valori di x, y, z.

Ma affinchè queste sottrazioni siano effettuabili devono quei tre quadrati essere maggiori di 3; onde il problema è ridotto a " trovare tre quadrati maggiori di 3 e la cui somma sia 10 „. A questo intento cominciamo dal determinare un numero che aggiunto a $\frac{10}{3}$ formi un quadrato, ossia, moltiplicando tutto

per 9, un numero che aggiunto a 30 formi un quadrato. Ora se $30 + \frac{1}{x^2}$ è un quadrato, lo è pure $30x^2 + 1$ e viceversa, onde, scelto ad arbitrio un numero z, si potrà porre $30x^2 + 1 = (zx + 1)^2$ e si avrà $x = \frac{2z}{30 - z^2}$. Preso $z = 5$, si avrà $x = 2$, epperò $30 + \frac{1}{4}$ sarà un quadrato, e così lo sarà quel numero diviso per 9; e realmente $\frac{10}{3} + \frac{1}{36} = \left(\frac{11}{6}\right)$. Ciò posto, il problema suenunciato può intendersi ridotto a " determinare tre quadrati approssimativamente eguali a $\left(\frac{11}{6}\right)^2$ ed aventi per somma 10 „. Per risolverlo si osservi l'identità

$$10 = 3^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

e si considerino le frazioni

$$3 \quad , \quad \frac{3}{5} \quad , \quad \frac{4}{5} \quad , \frac{11}{6};$$

notando essere

$$3 - \frac{35}{30} = \frac{11}{6} \quad , \quad \frac{3}{5} + \frac{37}{30} = \frac{11}{6} \quad , \quad \frac{4}{5} + \frac{31}{30} = \frac{11}{6}$$

nasce spontanea l'idea di prendere

$$3 - 35\xi \quad , \quad \frac{3}{5} + 37\xi \quad , \quad \frac{4}{5} + 31\xi$$

come lati dei quadrati cercati, ξ essendo una quantità da determinarsi mediante l'equazione

$$(3 - 35\xi)^2 + \left(\frac{3}{5} + 37\xi\right)^2 + \left(\frac{4}{5} + 31\xi\right)^2 = 10.$$

Se ne trae $\xi = \frac{116}{3555}$, epperò tre numeri che risolvono la questione primitiva sono:

$$x = \left(3 - \frac{35 \cdot 116}{3555}\right)^2 - 3 \quad , \quad y = \left(\frac{3}{5} + \frac{37 \cdot 116}{3555}\right)^2 - 3 \, ,$$

$$z = \left(\frac{4}{5} + \frac{31 \cdot 116}{3555}\right)^2 - 3.$$

54. - L'ultimo dei libri superstiti dell'*Aritmetica* di DIOFANTO possiede quell'unità di argomento che si cerca indarno nei precedenti: esso, infatti, tratta esclusivamente della costruzione di triangoli rettangoli in numeri (razionali) soddisfacenti a certe condizioni (1); per risolvere i relativi problemi il geometra greco si giova, oltre che dei concetti che anteriormente indicammo, di altri due, che si desumono dallo studio e dal paragone dei vari procedimenti da lui usati. Uno consiste nell'esprimere i lati x, y, z del triangolo ignoto in funzione di una variabile indipendente (per modo, cioè, che l'equazione $x^2 + y^2 = z^2$ sia verificata identicamente) e determinare per questa un valore tale che siano soddisfatte tutte le condizioni del problema. L'altro è, in un certo senso, un metodo per tentativi, in altro senso un metodo di riduzione; consiste nel supporre che il triangolo domandato sia simile ad un triangolo ausiliare λ, μ, ν, che cioè i suoi lati abbiano espressioni della forma $\lambda\xi$, $\mu\xi$, $\nu\xi$, essendo $\lambda^2 + \mu^2 = \nu^2$; allora le condizioni date traduconsi in equazioni fra λ, μ, ν le quali di regola non sono soddisfatte (anche scegliendo ξ convenientemente) se non si elegge in modo speciale il triangolo ausiliare: onde il problema proposto viene surrogato con altro congenere, il quale però è generalmente più facile.

A togliere quanto di vago possiedono tali indicazioni, riferiamo tre esempi nei quali quei metodi si vedono in azione; in uno è applicato il primo e nell'altro il secondo, mentre nel terzo il metodo dei triangoli simili si atteggia in un modo speciale, su cui attiriamo l'attenzione del lettore; per il primo e terzo esporremo lo schema della soluzione in linguaggio moderno, ma del secondo riferiremo la soluzione diofantea fedelmente tradotta.

(VI, 19). Determinare un triangolo rettangolo tale che l'area aumentata di un cateto faccia un cubo ed il cui perimetro sia un quadrato.

Si osservi che, dall'applicazione del metodo di PITAGORA, per costruire i triangoli rettangoli in numeri (v. p. 799), emerge che, qualunque sia ξ, i tre numeri $2\xi + 1$, $2\xi(\xi + 1)$, $2\xi^2 + 1$

(1) Però di triangoli rettangoli DIOFANTO si servì già nei libri precedenti: v. III, 19 V, 7, 8, 21, 27.

misurano i lati di un triangolo rettangolo, onde lo stesso potrà ripetersi riguardo agli altri

$$\frac{2\xi + 1}{\xi + 1}, \quad 2\xi, \quad \frac{2\xi^2 + 2\xi + 1}{\xi + 1}.$$

Le condizioni del problema si traducono quindi nelle equazioni:

$$2(2\xi + 1) = u^2 \quad , \quad 2\xi + 1 = v^3.$$

Da esse si trae $2v^3 = u^2$ a cui si soddisfa ponendo $u = 4b^3$, $v = 2b^2$ epperò $\xi = \frac{8b^6 - 1}{2}$. Ad ogni valore di b corrisponde un triangolo soddisfacente alle condizioni del problema; per $b = 1$ si ha quello considerato dal geometra greco.

(VI, 6). Determinare un triangolo rettangolo tale che l'area ed un cateto formino una data somma.

La somma data sia 7. Il triangolo cercato sia di data specie; $3x$, $4x$, $5x$.

Sarà $6x^2 + 3x = 7$. Alla metà del coefficiente di x moltiplicato per sè stesso si aggiunga il prodotto del coefficiente di x^2 e del termine noto; il risultato dovrebbe essere un quadrato, mentre questa circostanza non si verifica: per ciò bisogna trovare un triangolo rettangolo tale che il quadrato di un semicateto più il settuplo dell'area sia un quadrato. Uno dei cateti sia x e l'altro 1. Si avrà $3\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$; e moltiplicando tutto per 4 : $14x + 1 = \textit{quadrato}$; affinchè il triangolo sia costruito in numeri razionali è poi necessario che si abbia: $x^2 + 1 = \textit{quadrato}$. La differenza (dei primi membri) è $x^2 - 14x$ (1); ne sono fattori x e $x - 14$; il quadrato della loro semidifferenza è 49, eguagliandolo al quadrato minore si ottiene $x = \frac{24}{7}$. Ritornando ora al problema primitivo pongo un cateto ausiliare eguale a $\frac{24}{7}$ e l'altro eguale a 1, o, moltiplicando tutto per 7, un cateto eguale a 24 e l'altro eguale a 7, epperò l'ipotenusa eguale a 25. Moltiplicando tutto per x si ottiene l'equazione $84x^2 + 7x = 7$, onde si ricava $x = \frac{1}{4}$. Il triangolo che soddisfa

(1) Qui DIOFANTO applica il metodo della " doppia equazione „ (v. p. 899).

alla questione ha dunque per lati: 6 , $\frac{7}{4}$, $\frac{25}{4}$ (1).

(VI, 16). *Trovare un triangolo ABC rettangolo in A di cui siano razionali i lati e la bisettrice BD di un angolo acuto* (2).

Prendiamo un triangolo rettangolo ausiliare avente per cateti λ e $\mu > \lambda$ e per ipotenusa ν; detta poi ξ una quantità da determinarsi, supposta minore di 1, si ponga:

$$AC = \lambda \ , \ AD = \lambda\xi \ , \ AB = \mu\xi \ , \ BD = \nu\xi \ .$$

Sarà

$$CD = \lambda(1 - \xi);$$

ma, per la proprietà caratteristica della bisettrice, è

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD},$$

quindi

$$BC = \mu(1 - \xi).$$

Essendo poi

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

sarà

$$\xi = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{2\mu^2},$$

epperò:

$$AB = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{2\mu} \quad , \quad AC = \lambda \quad , \quad BC = \frac{\mu^2 + \lambda^2}{2\mu},$$

$$BD = \frac{\nu(\mu^2 - \lambda^2)}{2\mu^2} \quad , \quad AD = \frac{\lambda(\mu^2 - \lambda^2)}{2\mu^2} \quad , \quad CD = \frac{\lambda(\mu^2 + \lambda^2)}{2\mu^2}.$$

Si ottiene così un triangolo rettangolo ABC con i lati e la bisettrice BD razionali; moltiplicando per $2\mu^2$ i valori trovati se ne ottiene un altro con tutti quegli elementi misurati da numeri interi.

---

(1) Se la somma data è a, si trova similmente:

$$x = \frac{2a}{a+1} \quad , \quad y = a - 1 \quad , \quad z = \frac{a^2 + 1}{a + 1}.$$

(2) Perchè DIOFANTO non ha trattato l'analogo problema: " trovare un triangolo rettangolo ABC di cui siano razionali i lati e la bisettrice dell'angolo retto „? Evidentemente perchè sapeva che esso è impossibile dal momento che (detti a, c i cateti) quella bisettrice è espressa come segue: $\frac{ac}{a+c}\sqrt{2}$.

55. - L'indicazione delle più notevoli questioni risolute da DIOFANTO conterrebbe una lacuna ben grave se non vi si trovasse una menzione dell'unica questione presentata dal matematico greco sotto forma concreta. Ne faremo, quindi, un cenno rapido, tanto più giustificato in quanto che, come vedremo, dall'enunciato di essa il TANNERY volle dedurre una indicazione sull'epoca in cui visse il geometra che ci occupa.

(V, 30) *Un tale ha comperate due qualità di vino, uno a 8 dramme, l'altro a 5 dramme il congio. Il prezzo pagato è dato da un quadrato tale che, aggiungendovi un dato numero* (60), *si ottiene un secondo quadrato, avente per lato la somma delle quantità dei due vini. Quanto vino di ciascuna qualità venne acquistato?*

Le equazioni del problema sono evidentemente

$$8x + 5y = u^2 \ , \ u^2 + 60 = (x + y)^2 ,$$

ossia, eliminando u ed introducendo la nuova incognita

$$x + y = \xi ,$$
$$8x + 5y = \xi^2 - 60.$$

Eliminando una volta y e un'altra x si ottiene la seguente coppia di relazioni:

$$\xi^2 - 60 = 5\xi + 3x \ , \ \xi^2 - 60 = 8\xi - 3y ;$$

onde

$$\xi^2 - 60 > 5\xi \ , \ \xi^2 - 60 < 8\xi$$

epperò

$$\xi \geqq 11 \ , \ \xi \leqq 12$$

cioè

$$11 \leqq \xi \leqq 12 .$$

Ora, poichè $\xi^2 = 60$ dev'essere un quadrato, porremo $\xi^2 - 60 = (\xi - \alpha)^2$ ed otterremo $\xi = \dfrac{\alpha^2 + 60}{2\alpha}$; α però deve scegliersi in modo che si abbia

$$11 \leqq \frac{\alpha^2 + 60}{2\alpha} \leqq 12$$

donde si vede che

$$19 \leqq \alpha \leqq 21 .$$

DIOFANTO assume $\alpha = 20$ e conclude $x = \dfrac{59}{12}$, $y = \dfrac{79}{12}$. Sap-

piamo (p. p. 884) che si poteva prendere anche $z = 3$; è notevole che a tale nuovo valore corrispondono i medesimi valori di x e y.

Senza arrestarci a rilevare che questa soluzione prova l'abilità di DIOFANTO nel calcolare i valori approssimati delle radici quadrate e la sua famigliarità col maneggio delle disuguaglianze (1), notiamo che i prezzi del vino, non essendo stati assunti in base ad alcuna considerazione teorica, dal momento che i valori ottenuti per le incognite non hanno nulla di notevole, devono, secondo P. TANNERY (2), essere stati scelti tenendo conto delle condizioni del mercato. E siccome sono molto alti, così è a credere che DIOFANTO abbia vissuto in epoca di carestia. Siccome tale situazione critica si è cominciata ad avvertire in Grecia all'epoca dei Trenta tiranni, così sembra scaturire da ciò una conferma della supposizione che il nostro matematico abbia vissuto verso la metà del III sec. Tale argomentazione non è certamente molto robusta; noi ne facemmo cenno soltanto considerando che, nella scarsità di elementi per determinare la cronologia degli antichi matematici, non va trascurato alcun dato, per quanto poco efficace possa sembrare.

56. - Esaurita così l'enumerazione delle più cospicue questioni trattate da DIOFANTO ed indicati per sommi capi i procedimenti mediante i quali egli le risolve, bisogna che percorriamo un'altra volta l'*Aritmetica* per segnalare le proprietà dei numeri ivi applicate.

Di alcuni fra i relativi teoremi DIOFANTO si giova per risolvere le equazioni proposte, altri intervengono nei diorismi, cioè nella determinazione delle condizioni di risolubilità (3); certuni esprimono semplici identità algebriche, ma

(1) Secondo il TANNERY (*Diofanto*, T. I, p. 26) egli sarebbe stato il primo nell'immaginare una trattazione delle diseguaglianze, analoga a quella delle eguaglianze.

(2) *A quel âge vivait Diophante?* (Bull. des Sc. math., 2e Série, T. III, 1879, p. 261-269).

(3) È bene notare che tali condizioni non sono sempre enunciate; ad es. nel probl. V, 10 non è detto che $a + b + 1$ deve essere la somma di due quadrati; e nel problema V, 20 non è detto che $a - 3a^3$ deve essere somma di tre quadrati, cioè non della forma $8m + 7$.

in altri stanno racchiuse importanti prerogative di certi numeri, epperò essi furono germe di indagini importanti. Della maggior parte è ignota la fonte, ma alcuni sono tratti dall'opera sui *Porismi* (p. 851), ove è presumibile DIOFANTO avesse ammassati i fondamenti teorici delle soluzioni che egli ha tramandate ai posteri.

Riferiremo gli enunciati dei teoremi di cui è parola, scrivendo accanto il numero del problema in cui essi trovansi adoperati.

(I, 31). Se un numero è doppio di un altro, si ottengono due quadrati tanto addizionando alla somma dei loro quadrati il loro doppio prodotto, quanto sottraendo questo da quella (1).

(I, 32). Se un numero è eguale al doppio di un altro più uno, addizionando al primo il quadrato del secondo si ottiene un quadrato (2).

(I, 33). Se un numero è eguale al doppio di un altro meno uno, sottraendo il primo dal quadrato del secondo si ottiene un quadrato (3).

(I, 34). Se al prodotto di due numeri si aggiunge il quadrato della loro semidifferenza si ottiene un quadrato (4).

(III, 15). Affinchè sia risolubile la doppia equazione, di cui $a_1x + b_1$ e $a_2x + b_2$ sono i primi membri, a_1 e a_2 devono stare fra di loro come due quadrati (5).

(III, 19). In ogni triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa rimane un quadrato aumentandolo o diminuendolo del quadruplo dell'area (6).

(III, 19). Il prodotto di due numeri di cui ciascuno è somma di due quadrati è in due modi differenti somma di due quadrati (7).

---

(1) Se $b = 2a$ è $a^2 + b^2 + 2ab = (3a)^2$ e $a^2 + b^2 - 2ab = a^2$.

(2) Se $b = 2a + 1$, è $a^2 + b = (a + 1)^2$.

(3) Se $b = 2a - 1$, è $a^2 - b = (a - 1)^2$.

(4) $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (Cfr. p. 208).

(5) Da quanto esponemmo a p. 900 si vede che tale condizione è necessaria e sufficiente *per l'applicabilità del metodo di* DIOFANTO; ma è dessa necessaria *in generale?*

(6) Se $c^2 = a^2 + b^2$ è $c^2 \pm 2ab = (a \pm b)^2$.

(7) V. la soluzione del probl. III, 19 che esponemmo a p. 897.

(IV, 19). Affinchè $a^2x^2 + bx + c$ sia un quadrato dev'essere $c = d^2$ e $b = ad$ (1).

(IV, 23). Affinchè il binomio $ax + b$ sia divisibile per il binomio $a'x + b'$ dev'essere $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

(IV, 25). Dati tre numeri diseguali, la somma delle loro mutue differenze è eguale al doppio della differenza fra gli estremi (2).

(IV, 29). Dalla soluzione che esponemmo di questo problema, emerge che DIOFANTO riduce la proposta questione alla decomposizione di un numero razionale (che può sempre supporsi intero) in quattro quadrati. Il fatto che egli non si è occupato dei problemi corrispondenti in una, due o tre variabili, fa credere che, forse empiricamente (3), ne abbia almeno intravvisto l'irrisolubilità; in altri termini che egli abbia almeno intuito il celebre teorema di FERMAT « ogni numero razionale è somma di quattro quadrati o di un numero minore (4) ».

Questa conclusione è disforme dal modo di vedere dell'HANKEL (5), ma è, a parer nostro, confermata dal fatto che, mentre nei problemi V, 9 e 11 DIOFANTO assegna certe condizioni per la decomponibilità di un numero in due o tre quadrati, non ne pone alcuna quando nel probl. V, 14 s'imbatte in una decomposizione in quattro quadrati.

(IV, 38). L'ottuplo di un numero triangolare aumentato di 1 è un quadrato (cfr. p. 839).

(IV, 39). L'equazione doppia, avente $a_1x + b_1$, $a_2x + b_2$ per primi membri, è risolubile se b_1 e b_2 sono quadrati (v. p. 900).

(V, 3, porisma). Se tanto due numeri quanto il loro prodotto divengono quadrati per l'addizione di uno stesso nu-

---

(1) Infatti, la condizione $b^2 = 4a^2c$ dà $c = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$; onde, posto $\frac{b}{2a} = d$, si ottiene $c = d^2$ e $b = 2ad$.

(2) Se $a > b > c$ è $(a - b) + (a - c) = 2(a - c)$.

(3) COSSALI. op. cit., T. I, p. 100.

(4) *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 305 e T. III, p, 252).

(5) Op. cit., p. 168-170.

mero, essi sono eguali ai quadrati di due numeri consecutivi diminuiti di quel numero (1).

(V, 5, porisma). Se si considerano i quadrati di due numeri consecutivi ed il doppio della somma di tali quadrati aumentata di 1, si avranno tre numeri tali che il prodotto di due qualunque aumentato della somma degli altri due o del terzo è eguale ad un quadrato (2).

(V, 9). Se $2a + 1$ è eguale alla somma di due quadrati, a è pari e $2a + 1$ non ha alcun divisore della forma $4a + 1$ (3).

Questo teorema appare come diorisma al problema V, 9; infatti dalle relative equazioni (v. p. 869) eliminando x, y si trae $u^2 + v^2 = 2a + 1$, onde il numero a non può scegliersi ad arbitrio; DIOFANTO dice che $2a + 1$ è un numero o primo o di cui tutti i fattori hanno la forma $4a + 1$.

In qual modo si arrivi a quest'enunciato si vede facilmente. Suppongasi, infatti, $2a + 1$ primo e si osservi che: 1.° $2a + 1$ non può essere che somma del quadrato di un pari e del quadrato di un dispari, 2.° il quadrato di un pari ha la forma $4p$ ed il quadrato di un dispari la forma $4q + 1$;

---

(1) L'essere i due numeri di cui è parola di tale forma è *sufficiente*, ma non sembra *necessario*. Suppongansi infatti $x + a = p^2$, $y + a = q^2$, sarà $xy + a = p^2q^2 - a(p^2 + q^2) + a + a^2$, se inoltre (*) $xy + a = (pq - a)^2$ sarà $(p - q) = \pm 1$, onde $q = p \pm 1$, $x = p^2 - a$ e $y = (p \pm 1)^2 - a$: come appunto trova DIOFANTO. Ma la relazione (*) è forse necessaria?

(2) Infatti dall'essere

$$x = z^2 \quad , \quad y = (z + 1)^2 \quad , \quad z = 2(z^2 + \overline{z + 1}^2 + 1)$$

risulta:

$$xy + x + y = (z^2 + z + 1)^2 \quad , \quad xy + z = (z^2 + z + 2)^2$$
$$xz + x + z = (2z^2 + z + 2)^2 \quad , \quad xz + y = (2z^2 + z + 1)^2$$
$$yz + y + z = (2z^2 + 3z + 3)^2 \quad , \quad yz + x = (2z^2 + 3z + 2)^2.$$

(3) Cfr. JACOBI, *Ueber die Kenntnisse des Diophantus von der Zusammensetzung der Zahlen nebst Emendation der Stelle Probl. arithm.* V, 12 (Berliner Monatsberichte 1847; *Ges. Werke*, T. VII, 1891, p. 332-344), ove sono proposte alcune varianti al testo greco ed è fatta conoscere una divinazione delle considerazioni che guidarono DIOFANTO all'enunciato riferito.

dunque $2a + 1$ avrà di necessità la forma $4(p + q) + 1$, cioè $4a + 1$. Ora il prodotto di due numeri ciascuno dei quali è la somma di quadrati è pure la somma di due quadrati (v. sopra), onde un numero non primo, che sia somma di due quadrati, avrà per fattori numeri ciascuno dei quali è la somma di due quadrati, epperò della forma $4a + 1$. Che viceversa i numeri primi della forma $4a + 1$ ed i numeri nascenti dal moltiplicare numeri di tale forma, siano tutti e soli quelli che sono somme di due quadrati, è una proposizione che probabilmente DIOFANTO ignorò e di cui a P. FERMAT (1) appartiene l'enunciato ed a L. EULERO (2) la prima dimostrazione.

(V, 11). Se il numero $3a + 1$ è eguale alla somma di tre quadrati, a non può avere la forma $8k + 2$.

Questo teorema s'incontra come diorisma al probl. V, 11; infatti dalle relative equazioni (v. p. 869) eliminando x, y, z si ottiene $u^2 + v^2 + w^2 = 3a + 1$. DIOFANTO dice che a non si può scegliere ad arbitrio; e pone una limitazione giusta; giacchè, se fosse $a = 8k + 2$, sarebbe $3a + 1 = 24k + 7$, cioè della forma $8k + 7$; ora A. M. LEGENDRE (1752-1833) dimostrò (3) che i numeri di questa forma sono gli unici non decomponibili in tre quadrati.

(V, 16, porisma). Ogni numero somma di due cubi è eguale alla differenza di due altri (4).

---

(1) *Oeuvres de Fermat*, T. II, 1896, p. 431; oppure *Oeuvres complètes de Huygens*, T. II, 1889, p. 459.

(2) Nova Comment. Acad. Petrop., T. IV, VI e VIII, Cfr. LEGENDRE, *Zahlentheorie, deutsch von* H. MASER, T. I, Leipzig, 1886, p. 208.

(3) Vol. or cit., p. 386.

(4) Il BACHET, nella sua edizione già citata, dimostra questa proposizione osservando che, se

$$x = \frac{a}{a^3 + b^3}(a^3 - 2b^3) \quad , \quad y = \frac{b}{a^3 + b^3}(2a^3 - b^3),$$

si ha

$$x^3 + y^3 = a^3 - b^3$$

Per una deduzione di quelle formole vedi un metodo del POSELGER riferito dall'HEATH (op. cit., p. 124 della I ed., Cambridge, 1885).

(V, 29). Questo problema, il quale ha per iscopo la risoluzione della equazione $x^4 + y^4 + z^4 = u^2$, dovrebbe essere preceduto da quello che consiste nel risolvere l'equazione $x^4 + y^4 = u^2$. Perchè invece DIOFANTO non se n'è occupato? La risposta venne data da P. FERMAT (1), col dimostrare la impossibilità di tale equazione; perciò è probabile che di tal fatto siasi accorto DIOFANTO, probabilmente però senza saperlo stabilire in generale.

(VI, 12, secondo lemma). Se a e b sono due numeri la cui somma sia un quadrato, esistono infiniti numeri che rendono $ax^2 + b$ eguale ad un quadrato (2).

Va notato come curiosità che, nel problema III, 10, DIOFANTO dice essere impossibile rendere $52x^2 + 22$ eguale a un quadrato; eppure $52 + 12 = 8^2$!

(VI, 14). Affinchè esista un valore (razionale) di x che renda $a\,x^3 - b^2$ eguale ad un quadrato, è necessario che a sia somma di due quadrati (3).

Invece quella condizione non è indispensabile per un binomio del tipo $a\,x^2 - b$, come prova l'esempio $266\,x^2 - 10$, incontrato da DIOFANTO nel problema III, 13; ma va rilevato che, quantunque facendo $x = 1$ si ottenga $266\,x^2 - 10$

---

(1) *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 327 e T. III, p. 264.

(2) Se $a + b = q^2$, si ponga $x = \xi + 1$ e si avrà

$$ax^2 + b = a\xi^2 + 2a\xi + q^2;$$

preso, quindi, un numero arbitrario ς si faccia

$$a\xi^2 + 2a\xi + q^2 = (q - \varsigma\xi)^2$$

e si otterrà

$$\xi = \frac{2\,(a + \varsigma q)}{\varsigma^2 - a} \quad , \quad x = \frac{a + 2a\varsigma q + \varsigma^2}{\varsigma^2 - a};$$

qualunque sia ς, questo è un valore razionale di x che rende $x^2 + b =$ quadrato.

(3) Infatti, se per $x = \frac{p}{q}$ è $ax^2 - b^2 = l^2$, risulta

$$a = \left(\frac{lq}{p}\right)^2 + \left(\frac{bq}{p}\right)^2.$$

$= 16^2$, il nostro autore nega la possibilità di trovare un valore di x che renda quadrato quel binomio (1).

(VI, 15, lemma). Se $ax^2 - b$ diviene eguale ad un quadrato per un certo valore di x, esisteranno altri valori maggiori di x godenti della medesima proprietà.

Per $a = 2$, $b = \pm 1$ questa proposizione scaturisce dalle proprietà dei numeri laterali e diametrali (v. p. 835); in generale si dimostra osservando che, se per $x = x_0$ risulta $a x^2 - b = q^2$, e si pone

$$x = x_0 + \xi \quad , \quad a(x_0 + \xi)^2 - b = (q - \varrho\xi)^2 ,$$

risulterà

$$\xi = \frac{2(ax_0 + \varrho q)}{\varrho^2 - a} \quad \text{e} \quad x = x_0 \frac{2(ax_0 + \varrho q)}{\varrho^2 - a} ,$$

valore razionale e maggiore di x_0 se si sceglie $\varrho^2 > a$.

(VI, 17). Nel corso di questo problema DIOFANTO trova che la equazione $u^2 + 2 = v^3$ ammette la soluzione $u = 5$, $v = 3$; seppe egli che questa fosse l'unica soluzione intera di quell'equazione? Probabilmente no (2). Ma quello che presumibilmente egli conobbe, almeno come frutto di esperienza, è che « non esiste alcun triangolo rettangolo a lati razionali la cui area sia un quadrato » (3); lo fa credere il fatto che egli non pose mai tale condizione negli enunciati dei problemi del Libro VI, mentre ne pose di più complicate (ma possibili) nei problemi 6-20 di questo libro.

---

(1) Quest'errore ne ricorda un altro commesso da DIOFANTO, il quale, nel problema IV, 27, negò la possibilità di trasformare in un cubo il quadrinomio: $8x^3 + 8x - x^2 - 1$, mentre eguagliandolo a $\left(2x - \frac{1}{12}\right)^3$ oppure a $\left(\frac{8}{3}x - 1\right)^3$ si ottiene per x un valore razionale (DIOFANTO ed. TANNERY, p. 251 del T. I; v. anche: NESSELMANN, *Anmerkungen zu Diophant*, Zeitschr. für Math. und Phys., T. XXXVII, 1892, Hist.-lit. Abth., p. 171).

(2) Questo fatto notevole venne avvertito esplicitamente per primo dal FERMAT; vedi *Oeuvres*, T. II, p. 431, e anche *Oeuvres complètes des Huygens*, T. II, 1889, p. 460.

(3) Anche quest'osservazione appartiene al FERMAT; v. *Oeuvres*, T. I, p. 340, T. 2, p. 431 e T. III p. 271.

57. - Lasciamo al lettore di valutare l'importanza delle or riferite proposizioni, in cui si trovano, oltre ad altre cose, i primi elementi della teoria della decomponibilità di un numero in un certo numero di quadrati e le prime proposizioni sulla risolubilità dell'equazione $ax^2 \pm b = y^2$: occupiamoci invece della questione storica importantissima dell'originalità di DIOFANTO.

È una questione analoga ad altre che incontrammo trattando degli *Elementi* di EUCLIDE e della *Composizione matematica* di TOLOMEO; è una questione che sembra inevitabilmente collegata a tutti i capilavori, ma è sempre assai ardua e spinosa, perchè da questi irraggia tutt'intorno tale e tanta luce che fa impallidire e talora scomparire tutto ciò che li circonda. Ora alle domande: «di chi fu discepolo DIOFANTO? quali precursori ebbe egli? » il BOMBELLI rispose asserendo che a DIOFANTO furono maestri gli Indiani; ma a base di tale asserzione sta un equivoco(1) l'avere, cioè, BOMBELLI giudicato scritto da DIOFANTO uno scolio, dovuto invece probabilmente a MASSIMO PLANUDE. Per trovare altra risposta si ricorra alla prefazione dell'*Aritmetica* (v. p. 855); si vedrà intanto che DIOFANTO non si vanta di insegnare a DIONISIO cose nuove, ma di presentarle sotto una forma da lui plasmata, nell'intento di renderne facile l'intelligenza (2). Tale limitata originalità è confermata dall'osservazione che DIOFANTO enuncia semplicemente buon numero di proposizioni tutt'altro che evidenti (esempio: « meno per meno fa più »), le quali, se fossero state nuove, avrebbero avuto bisogno di dimostrazione, mentre ad altre allude in modo da affermare la novità (esempio: risoluzione delle equazioni trinomie). D'altronde esistono traccie indiscutibili di investigazioni compiute da Greci nei campi stessi ove DIOFANTO si atteggia a sovrano. Ed infatti l'epantema di TIMARIDA (v. p. 808) non si riferisce forse ai sistemi di equazioni di primo grado? Ed altrettanto vedremo nel Cap. seg. accadere di altre que-

(1) Cfr. NESSELMANN, op. cit., p. 284-285.

(2) SCHULZ, trad. citata, p. XXII-XXIV, COLEBROOKE, p. LXII e NESSELMANN, p. 287. COSSALI, p. 85-87) ritiene che DIOFANTO abbia spiegata la propria originalità nell'analisi indeterminata non nella determinata.

stioni con cui i Greci ebbero grande famigliarità. Inoltre la soluzione delle equazioni di secondo grado trovammo già nella sua sostanza in EUCLIDE, e gli Orientali attribuirono (cfr. p. 522) ad IPPARCO un lavoro sopra tali equazioni. Finalmente le applicazioni che esponemmo (p. 808-9) dell'epantema di TIMARIDA sono di pertinenza dell'analisi indeterminata di primo grado, mentre a quella di secondo appartengono le ricerche sui numeri laterali e diametrali (v. p. 835) ed un difficilissimo problema che vedremo (v. p. 932 e segg.) venire attribuito ad ARCHIMEDE.

Queste notizie sono certamente incomplete ed alcune troppo vaghe; a parer nostro però sono sufficienti a far escludere essere l'*Aritmetica* di DIOFANTO *prolem sine matre creatam;* al contrario esse ci fanno apparire il suo autore siccome un valente matematico, un abile trattatista, che aduna i materiali raccolti da' suoi predecessori e ne compone un tutto organico, completando e aggiustando quello che appariva ai suoi occhi imperfetto.

58. - Tale giudizio sull'indole scientifica di DIOFANTO è confermato dall'esame del frammento superstite dell'opuscolo *Sui numeri poligonali.* Ivi, infatti, non è adoperato alcun metodo nuovo, ma semplicemente quel procedimento esposto da EUCLIDE nel II Libro degli *Elementi* e detto dal COSSALI « aritmetica lineare » e dallo ZEUTHEN « algebra geometrica » (v. p. 423); nè è esposta alcuna teoria essenzialmente originale, ma è suggerito un rimaneggiamento dell' antica teoria dei numeri poligonali: mentre prima si consideravano anzitutto i numeri triangolari, poi i quadrati, quindi i pentagonali, ecc., DIOFANTO tratta subito dei numeri poligonali in generale. La connessione delle sue indagini con quelle di IPSICLE a noi già note (v. p. 504), è da DIOFANTO candidamente riconosciuta; essa riesce evidente con una semplice ispezione delle proposizioni da lui esposte; eccole:

1. Se tre numeri sono equidifferenti, aggiungendo a otto volte il prodotto del massimo e del medio il quadrato del minimo si ottiene il quadrato della somma del massimo e di due volte il medio (1).

(1) Viceversa: se $8xy + z^2 = (x + 2y)^2$ sarà $(x + z - 2y)\cdot(x - z - 2y) = 0$ onde $x - y = y - z$ oppure $x - y = y - (-z)$, onde sono equidifferenti x, y, z oppure $x, y, -z$.

2. Dati quantisivogliano (n) numeri equidifferenti, la differenza tra il massimo ed il minimo è eguale a $n-1$ volte la differenza tra due consecutivi fra i numeri dati.

3. Dati quantisivogliano (n) numeri equidifferenti, la somma degli estremi moltiplicata per n dà il doppio della somma di tutti i numeri dati.

4. Data la serie $u_1 = 1, u_2 = 1 + d, \ldots, u_n = 1 + (n-1)d$, si ha

$$8d(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + (d-2)^2 = \{(2n-1)d + 2\}.$$

In queste ipotesi $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ è un numero poligonale di $d+2$ lati e $n+1$ vertici; onde, posto

$$d + 2 = l \quad , \quad n + 1 = v \quad , \quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n = P_{v,l}$$

la formola precedente diverrà

$$(1) \qquad 8(l-2)P_{v,l} + (l-4)^2 = \{(2v-3)(l-2) + 2\}^2.$$

Questa generalizzazione di un teorema sui numeri triangolari, che si trova in GIAMBLICO, serve a risolvere la seguente importante questione di analisi indeterminata: in quanti modi un dato numero può essere poligonale? Coll'*enunciato* di essa si chiude il brano superstite dell'opuscolo di DIOFANTO. Essa, non che alcune frasi che la seguono, sono giudicate da P. TANNERY (1) per un « commentatoris vanum tentamen ». Ma G. WERTHEIM dimostrò (2) come, servendosi esclusivamente di considerazioni analoghe a quelle esposte da DIOFANTO, dato un valore a $P_{v,l}$ si possa risolvere, quando è possibile (3), l'equazione (2) (che è quadratica indeterminata in l, v), e negli altri casi dimostrare che è

---

(1) DIOFANTO ed. TANNERY, T. I, p. 477.

(2) *Die Schlussaufgabe in Diophants Schrift über Polygonzahlen* (Zeitschrift für Math. und Phys., T. XLII, 1897; Hist.-lit. Abth., p. 121-126).

(3) Ci esprimiamo così perchè esistono numeri che non si possono in alcun modo considerare come poligonali; quasi per compenso, altri numeri sono più volte poligonali.

irrisolubile (1); onde ci sembra che nulla si opponga ad ammettere che DIOFANTO abbia proposto ed anche risoluto, almeno in casi particolari, la questione che chiude lo squarcio che possediamo dell'unica sua opera teorica che ci pervenne.

---

(1) La questione studiata dal WERTHEIM era già stata affrontata dal BACHET; FERMAT (*Oeuvres*, T. II, p. 435 o *Oeuvres complètes de Huygens*, T. II, p. 461) ne aveva trovata una soluzione, della quale però si dichiarava insoddisfatto, di cui quindi non diede notizia al pubblico. V. anche il Cap. VII della II Parte dell'*Algebra* di EULERO.

CAPITOLO VI.

Ricreazioni matematiche dei Greci

I problemi dell'" Antologia greca ,,.

59. - Già dicemmo ed in più circostanze ripetemmo che i Greci, seguendo i dettami di PITAGORA divulgati da PLATONE, solevano distinguere nettamente l'arte del calcolo aritmetico della scienza dei numeri: quella abbassavano al livello di un semplice ausiliare del mercante e dell'agrimensore, ma questa equiparavano alle discipline più nobili ed elevate. Estranea all'una ed all'altra, ma porgente la mano ad entrambe, sta la disciplina risultante dai metodi per sciogliere i problemi pratici, in cui sono numeri i dati e numeri le incognite, disciplina della massima importanza, se non altro perchè serve sempre di stimolo potentissimo a sforzi per affinare tanto la logistica quanto l'aritmetica. Le opere di ERONE, ove sono trattate aritmeticamente tante belle questioni con scheletro geometrico, e l'*Aritmetica* di DIOFANTO, ove si può misurare quanto fecondo sia stato il connubio della scienza con l'arte del calcolo, provano che a quella disciplina non rimasero estranei gli antichi pensatori. E ciò è confermato (oltre che da altri fatti in cui ci imbatteremo nel corso del presente Capitolo) da una collezione di questioni aritmetiche, enunciate in versi, sotto forma di epigrammi, ed aventi per soggetti, non l'applicazione dell'aritmetica alla geometria, non numeri astratti,

ma sibbene fatti naturali o collegati alla vita civile; sono problemi analoghi all'ultimo di quelli trattati nel V Libro di DIOFANTO (v. p. 908) il quale, anzi, fu accolto in quella collezione. Sono problemi notevoli, ma non abbastanza teorici perchè i Greci accordassero loro un posto nell'aritmetica; i quarantotto « Problemi dell'*Antologia greca* » (1) (tale è il titolo comunemente dato alla raccolta di cui è parola), venivano pertanto relegati nella logistica; è merito del BACHET DI MÉZIRIAC di averli additati all'attenzione degli storici, pubblicandone una parte, tradotti in versi latini, nella sua edizione di DIOFANTO (2).

Autore di quella raccolta vien detto un tal METRODORO, senza però che si adduca alcun argomento per dirigere la scelta tra METRODORO DA SCEPSI (3) e METRODORO DA BISANZIO (4), grammatico ed aritmetico che il JACOBS fa vivere sotto COSTANTINO MAGNO (306-307 dell'E. v.), cioè poco dopo DIOFANTO. METRODORO compose forse alcuni degli epigrammi

---

(1) Cfr. SUSEMIHL, *Geschichte der griechischen Literatur in der Alexandrinerzeit,* II Bd., Leipzig, 1892, p. 566-573 e l'articolo *Anthlogie* di L. SCHMIDT in PAULY-WISSOWA, *Real-Encyklopädie der class. Alterthumswiss.*

(2) Il lettore li troverà, tranne l'ultimo, nelle più recenti edizioni dell'*Antologia*, fra cui ricordiamo come ottima quella di F. JACOBS (Leipzig, 1791 e 1813). Le questioni riferite dal BACHET passarono nelle storie dell'HEILBRONNER (*Historia matheseos universae.* Lipsiae, 1742, p. 845-73) e del MONTUCLA (T. I, p. 325 della II ed.) e nella edizione tedesca di DIOFANTO curata dallo SCHULZ. Tutti si trovano tradotti in tedesco nella monografia dello ZIRKEL. *Die aritmetischen Epigramme der griechischen Anthologie* (Programm des k. Gymnasiums zu Bonn, 1853) ed in appendice alla citata traduzione di DIOFANTO fatta dal WERTHEIM; siccome l'ordine in cui essi si trovano in queste due opere non è lo stesso, così noi designeremo ogni epigramma con due numeri, cioè con quello con cui lo indica lo ZIRKEL e poi con quello datogli dal WERTHEIM. Gli epigrammi 1, 3, 17, 18, 28, 29, 34 e 36 dello ZIRKEL si ritrovano nella II parte del *Räthselschatz herausg. von* E. S. FREUND (Leipzig, Reclam, 1885) ove portano i numeri 115, 102, 144, 143, 142, 129, 141 e 122. Veggasi finalmente DIOFANTO ed. TANNERY, T. II, p. 43-72.

(3) SUSEMIHL, op. cit., T. II, p. 352-355.

(4) Id., T. I, p. 851.

che adunò, ma non tutti; infatti, oltre quello estratto dall'*Aritmetica* diofantea, uno è attribuito ad un certo SOCRATE, uno ad EUCLIDE ed uno ad ARCHIMEDE.

Un gruppo di questioni di ignota provenienza e semplicemente enunciate sparge di regola ben poca luce sul sapere del popolo nel cui seno venne prodotto; tuttavia i problemi dell'*Antologia greca* meritano uno studio accurato da parte nostra perchè, ponendoli in relazione con altre questioni risolute dai Greci e con certe investigazioni da essi recate a buon termine, si viene a dimostrare che gli Ellèni erano in grado di scioglierli e che, quindi, non esistono argomenti intrinseci per espellerli dall'antica letteratura della gente di cui esponiamo i titoli di nobiltà scientifica.

60. - Per procedere alla dimostrazione di questa tesi fa mestieri esaminare il contenuto della collezione citata, il che ci trarrà un po' in lungo, perchè le questioni trattate sono mescolate senz'ordine: alcune sono semplicissime, mentre altre sono abbastanza difficili, anzi una è tal nodo gordiano, che soltanto ARCHIMEDE ne potè essere l'ALESSANDRO.

Fra le prime notiamo la seguente:

45. 40.

Risposta data da OMERO alla domanda di ESIODO: " di quanti combattenti si componeva l'esercito degli Elleni durante la guerra di Troja? „ Sette schiere erano infiammati di eguale ardore; ognuna disponeva di cinquanta spiedi con infilzati altrettanti pezzi di carne; e ciascuno spiedo aveva d'intorno novecento Achei.

Il numero cercato è evidentemente $7 \times 50 \times 900 = 315000$; per trovarlo basta sapere eseguire la moltiplicazione degli interi, onde quella questione non possiede alcun interesse matematico. Se la riferimmo, fu per osservare che i dati di essa, benchè presentati con tanta serietà, furono indubbiamente scelti a capriccio; infatti, oltrechè le notizie intorno alla guerra di Troja sono tutte vaghe e immeritevoli di fede, è facile vedere che colui che formulò quel problema non si appoggiò nemmeno alle informazioni date da OMERO nel II Libro della *Iliade* sulle forze degli eserciti belligeranti

pel possesso di Troja (1). Tale osservazione ci sembra consigliare ad essere estremamente cauti nel trarre delle illazioni dei dati di qualche problema dell'*Antologia* (v. p. 909 e più avanti, p. 926).

Un po' più difficili sono i problemi numerati dallo ZIRKEL 6, 28, 29, 30, 31, 32 e dal WERTHEIM 43, 23, 24, 25, 26, 27; sono del notissimo tipo designato col nome di « problemi delle fontane » (alcuni dei quali s'incontrano anche in opere attribuite ad ERONE), come il lettore si persuaderà del seguente esempio:

6. 43.

Io sono un leone di bronzo. Sono fontane i miei occhi, e la bocca e la pianta del piede destro. L'occhio destro riempirebbe la vasca in due giorni, il sinistro in tre ed in quattro il piede; finalmente alla bocca basterebbero sei ore per riempirlo. In qual tempo verrà riempita se versano acqua ad un tempo gli occhi, il piede e la bocca?

La stessa natura ha evidentemente quest'altro problema:

34. 29.

Mattoniere, io voglio finire questa casa. Oggi il tempo non è nuvoloso, guarda! Orbene, a me occorrono trecento mattoni.

---

(1) Infatti OMERO dichiara (*Iliade*, trad. MONTI, II, 644)

« Sol dunque i duci e sol le navi io canto «.

E dai versi seguenti emerge che l'esercito assediante contava 1167 navi; riguardo al primo gruppo OMERO dice che

« . . . . ognuna cento prodi e venti,
« Fior di Beozia gioventù, portava » (id., v. 667-668),

mentre le navi

« Di Metodo, Tammácia e Melibèa
E dell'aspra Olizone . . . . .
. . . . . .
. . . . . carca
Di cinquanta gagliardi era ciascuna » (id., 960-963).

Si può quindi considerare che le navi recanti a Troja l'esercito assalitore contenessero in media ciascuna un centinaio di

Altrettanti ne puoi fabbricare tu stesso in un giorno, mentre tuo figlio chiude il suo lavoro giornaliero con duecento e tuo genero con duecentocinquanta. Lavorando insieme quante ore vi bisogna per servirmi?

Risolubile con un semplice ragionamento è il seguente:

8. 8.

CRESO dedicò sei coppe pesanti in totale sei mine, ognuna delle quali pesava una dragma (centesima parte di una mina) più della precedente.

Per trovare il peso in dragme della prima coppa basta evidentemente dividere per 6 la differenza

$$600 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 585,$$

onde è $97\frac{1}{2}$.

Esaminiamo ora il problema:

11. 4.

Fabbricami una corona di sessanta mine, mescolando opportunamente fra loro oro, rame, stagno e ferro. L'oro ed il rame formino $\frac{2}{3}$ della corona, l'oro e lo stagno $\frac{3}{4}$, l'oro ed il ferro $\frac{2}{5}$. Orbene! dimmi esattamente la quantità di oro, di rame, di stagno e di ferro che devi prendere.

Tale questione si traduce evidentemente nel seguente sistema di equazioni:

$$o + r + f + s = 60\ ,\ o + r = 40\ ,\ o + s = 45\ ,\ o + f = 24,$$

per risolvere il quale non vi è che da applicare l'epantema di TIMARIDA (v. p. 808).

Molte questioni della raccolta che ci occupa — 5, 26, 27, 32, 37, 38, 39, 40 secondo lo ZIRKEL; 9, 21, 22, 27, 32, 33,

---

combattenti e che quindi l'esercito stesso annoverasse circa cento mila uomini, numero ben diverso da quello assegnato dall'epigramma.

34, 35 secondo di WERTHEIM (1) — si riducono alla divisione di un dato numero in parti proporzionali a numeri dati; valga a dimostrarlo il seguente esempio:

37. 32.

O DIODORO, luminare dell'astronomia (2), fammi conoscere il tempo trascorso dall'istante in cui le ruote dorate del sole cominciarono a girare nell'estremo Oriente; tre quinti del tempo trascorso presi quattro volte danno quello che rimane del corso prima di giungere al fiume dell'Esperidi.

È chiaro che DIODORO per rispondere al quesito non aveva che da dividere 12 in due parti tali che una di essa fosse $\frac{12}{5}$ dall'altra.

Non meno numerose sono le questioni — 1, 2, 3, 4, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 35 e 36 secondo lo ZIRKEL; 1, 41, 2, 42, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 46, 18, 19, 20, 30 e 31 secondo il WERTHEIM — le quali sono riducibili alla soluzione di un'equazione del tipo:

$$(1) \qquad \frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \ldots + a = x .$$

Come esempio scegliamo la seguente:

24. 19.

Ecco la tomba che racchiude DIOFANTO — una meraviglia da contemplare! Con un artificio aritmetico la pietra insegna la di lui età: Dio gli concesse di rimanere fanciullo un sesto della sua vita, dopo un altro dodicesimo le sue guancie germogliarono; dopo un settimo egli accese la fiaccola del matrimonio; e dopo cinque anni gli nacque un figlio. Ma questi — fanciullo disgraziato e pur tanto amato! — aveva appena raggiunta la metà dell'età a cui doveva arrivare suo padre, quando morì. Quattro anni ancora, mitigando il proprio dolore coll'occuparsi della scienza dei numeri, attese DIOFANTO prima di raggiungere il termine della sua esistenza.

---

(1) Si potrebbe aggiungere la questione 41 dello ZIRKEL, 36 del WERTHEIM.

(2) Si tratta forse di DIODORO SAMIO, ricordato nella *Geografia* di CLAUDIO TOLOMEO (I, 7).

Ove si presti fede a questo epigramma DIOFANTO si sarebbe serbato fanciullo sino a 14 anni, a 21 avrebbe messo barba, a 33 avrebbe preso moglie, a 38 sarebbe divenuto padre, ad 80 avrebbe perso il proprio figlio e ad 84 sarebbe morto. Se il lettore inclina ad accettare per veri questi dati biografici intorno al sommo aritmetico greco, noi non lo distoglieremo; ma siamo restii a seguire questo presunto esempio, perchè le condizioni del problema riferito ci sembrano troppo ben combinate per essersi realmente verificate, e, d'altronde, più sopra adducemmo un esempio che giustifica il poco valore che noi attribuiamo ai dati dei problemi che ci occupano (1).

Analoga alla (1) è l'equazione

$$(2) \qquad \frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \ldots = a$$

che, in un caso particolare, s'incontra nel problema seguente:

12. 5.

O fabbro, della coppa di argento prendi un terzo, un quarto ed un dodicesimo; fanne tutto un mucchio e portalo nella fornace: agita a dovere ed estrai fuori la massa, che pesa una sola mina.

61. - Ancor più notevoli sono tre problemi (43, 44, 46 secondo lo ZIRKEL; 38, 39, 45 secondo il WERTHEIM), la cui soluzione dipende da un sistema di equazioni del tipo seguente:

$$(3) \qquad x + a = m\,(y - a) \quad , \quad y + a = n\,(x - a)\,;$$

riferiamo di essi il seguente, che è attribuito ad EUCLIDE:

46. 45.

Un mulo ed un'asina andavano insieme carichi di grano. L'asina gemeva sotto il gran peso. Il mulo se n'avvide e disse alla compagna: « Madre, perchè gridi tanto e ti lamenti come una ragazza piagnucolosa? Se tu mi dessi un medimmo del

(1) H. WEBER ha suggerita un'altra interpretazione dell'enunciato del problema, secondo la quale DIOFANTO avrebbe vissuto anni $65\ 1/3$; v. M. CANTOR, *Vorlesungen*, T. I, 3ª ed., p. 465.

tuo peso io porterei il doppio di te, mentre se tu ne prendessi uno noi porteremmo un egual peso „. O abile geometra, determina il peso portato da ciascun animale.

Dei due problemi seguenti il primo dipende da due equazioni del tipo

$$(4) \qquad x + y = s \quad \frac{x}{m} - \frac{y}{n} = a$$

ed il secondo da due del tipo

$$(5) \qquad x + y = s \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = a \text{ (1).}$$

7. 7.

Ordino che le mille monete da me possedute vengano ripartite fra i miei due figli per modo che la quinta parte del figlio legittimo superi di dieci la quarta parte dell'eredità del figlio spurio.

9. 44.

Sopra le tre cariatidi di ZETONE, di AMFIONE e della loro madre sta scritto: " Noi due insieme, io, ZETONE, e mio fratello pesiamo insieme venti mine. Prendi un terzo del mio peso ed un quarto di quello di AMFIONE; troverai sei mine, che è proprio il peso di nostra madre „.

Un altro problema dell'*Antologia* (13 dello ZIRKEL, 6 del WERTHEIM) si risolve mediante tre equazioni lineari con altrettante incognite; due altri (10, 42 o 3, 47) sono indeterminati (2) giacchè si traducono in equazioni lineari omogenee, non capaci che di individuare i rapporti delle incognite. Perciò di tutti questi problemi quello di gran lunga più difficile è il problema estratto, come dicemmo dalla *Aritmetica* di DIOFANTO (p. 908). Ma dell'*Antologia greca* fa parte un altro problema estremamente più arduo, perchè appartiene all'analisi indeterminata di secondo grado. Prima di occuparcene vogliamo far cenno di altre questioni risolute dai Greci, le quali si trovano circa allo stesso livello di quelle enumerate nel n. presente.

---

(1) V. il problema 5 del Libro I di DIOFANTO.

(2) Il primo, riferendosi alla ripartizione di mele fra certe persone, sembra modellato sulle indicazioni di PLATONE (p. 768).

Il "problema della corona,, di Archimede.

62. - Narra VITRUVIO (1) — nell'esordio al cap. III del IX Libro della sua *Architettura* — quanto segue:

JERONE, nobilitato della regia podestà della città di Siracusa, essendogli le cose prosperamente successe, ed avendo deliberato di porre al tempio una corona d'oro votiva, per grandissimo prezzo la diede a fare, fornendo a colui, che si prese il carico di farla, a peso la quantità dell'oro. Questi a tempo debito apportò al Re l'opera sottilmente fatta con le mani, e parve che al giusto peso dell'oro restituisse la corona. Ma poichè venne indiziato, che levatane una quantità di oro, altrettanto di argento in quella avesse posto, JERONE sdegnato di essere stato beffato, nè avendo a sua disposizione un mezzo per dimostrare il furto, pregò ARCHIMEDE che prender volesse la cura di riconoscere il fatto, pensandovi molto ben sopra. Avendo ARCHIMEDE allora posto il suo pensiero sopra di ciò, per caso entrò in un bagno. E disceso nella tinozza gli venne veduto che quanto del suo corpo entrava, tanto di acqua usciva. Per il che avendo ritrovato il metodo di poter dimostrare la proposta, non rimase più oltre nell'acqua, ma uscitone con grande allegrezza, andando ignudo verso casa, dimostrava ad alta voce d'avere ritrovato quello che cercava, perchè correndo tuttavia gridava *eureka, eureka,* cioè *ho trovato, ho trovato.* Dappoichè egli ebbe il principio di quella invenzione, fece due masse di peso uguale ciascuna alla corona, delle quali una era di oro, l'altra di argento; fatto ciò, empì d'acqua sino all'orlo un ampio vaso, prima vi pose dentro la massa d'argento, della quale quanto entrò di grandezza tanto uscì di umore, così trattane la massa rifuse tanta acqua sin che il vaso fosse nuovamente pieno, avendola col sestario misurata, sì che all'istesso modo di prima s'agguagliasse col labbro. E da quello egli ritrovò quanto ad un determinato peso d'argento, certa e determinata misura d'acqua rispondesse. Ottenuto questo, depose la massa d'oro nel vaso similmente ripieno, trattala poi fuori, con lo stesso metodo aggiuntavi la misura, trovò che non era uscita altrettanta acqua, ma tanto meno, quanto in grandezza del corpo con lo stesso peso era la massa dell'oro minore della massa dell'argento. Infine riempito il vaso e posta nella stessa acqua la corona trovò che più acqua era uscita fuori per la corona che per la massa dell'oro

(1) Vissuto sotto AUGUSTO e TIBERIO.

dello stesso peso, e così facendo la ragione da quello, che era più della corona che dalla massa uscito, comprese che ivi era mescolato l'oro con l'argento, e fece manifesto il furto di colui che aveva preso l'incarico di fabbricar la corona.

In questa soluzione del celebre « problema della corona » il fisico scorge il primo cenno del concetto di peso specifico. Il matematico osserva che essa riposa in ultima analisi sopra un sistema di equazioni del tipo (1). Detta infatti P il peso della corona, x e y i pesi delle quantità di argento e di oro adoperate, si ha tosto

$$x + y = P ;$$

se poi si chiamano V_c , V_a , V_o i volumi della corona e di due masse egualmente pesanti di argento e oro, verrà l'equazione

$$\frac{x}{\left(\frac{P}{V_a}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{P}{V_o}\right)} = V_c \qquad \text{cioè} \qquad V_a\, x + V_o\, y = P V_c \, .$$

E da queste equazioni, essendo $V_o < V_c < V_a$, si trae

$$x = P\,\frac{V_c - V_o}{V_a - V_o} \quad , \quad y = P\,\frac{V_a - V_c}{V_a - V_o} \, ,$$

come ottenne ARCHIMEDE. Ciò basta a provare quanto antica sia la considerazione e la risoluzione di equazioni del citato tipo (1).

La seconda lettera del Rabda.

63. - Altre indicazioni intorno ai metodi usati dagli antichi per risolvere i problemi del genere di quelli che incontrammo nell'*Antologia greca*, si ottengono ricorrendo al

(1) Le surriferite parole di VITRUVIO sono così esplicite che ci sembra a torto il MONTUCLA (*Histoire*, T. I, p. 229) abbia supposto che la soluzione data da ARCHIMEDE pel problema della corona riposasse sul *principio* che porta il di lui nome.

papiro di Akhmîm (cfr. p. 767) e la seconda delle lettere aritmetiche del RABDA (1).

Ed invero i problemi designati con i numeri 3, 5, 10, 11 nel primo degli or citati documenti si traducono nella ripartizione di numeri in parti proporzionali a numeri dati. Infatti, il 3° e il 4° hanno per iscopo la distribuzione di una data somma fra certe persone con la condizione che le porzioni abbiano fra di loro rapporti assegnati; nel 10° invece si tratta di vendere una casa di dato valore a tre riprese in modo che le somme ottenute riescano proporzionali a dati numeri; e nell'11° (2), conoscendo la « tassa di inaffiamento » totale pagata da tre agricoltori, seminanti assegnate quantità di grano, si domanda quanto pagò ciascuno. Similmente nei problemi 47-49 si suppone di mescolare tre tesori e di togliere poi dal totale una certa somma, e si chiede quale porzione si sottrasse da ognuno. Ad equazioni di 1° grado ad un'incognita del tipo

$$(6) \qquad x - \frac{x}{a} - \frac{1}{b}\left(x - \frac{x}{a}\right) - \cdot$$
$$- \frac{1}{c}\left[x - \frac{x}{a} - \frac{1}{b}\left(x - \frac{x}{a}\right)\right] - \ldots = m$$

dànno luogo i problemi 13 e 17; è un tipo che s'incontra anche come risolutore dei problemi che portano i numeri IX, XI e XVII nella seconda lettera del RABDA. Nella medesima si trovano poi non meno di cinque problemi (I, III, X, XIII e XVI) che conducono ad equazioni del tipo (2); il che non recherà meraviglia a chi ricordi come il così detto calcolo « Hau » del *Manuale del calcolatore* egiziano (3), abbia appunto per intento la soluzione di equazioni di quella

---

(1) La parte che ci interessa in questo momento è intitolata *Metodo pei calcoli della vita comune* (μέθοδος πολιτικῶν λογαριασμῶν).

(2) Per ulteriori notizie v. F. HULTSCH, *Das elfte Problem des mathematischen Papyrus von Akhmîm* (Historische Forschungen Ernst Förstemann gewidmet, Leipzig, 1894, p. 39-56).

(3) EISENLOHR, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter.* Leipzig, 1891, II ed., p. 42.

forma. Per dimostrare come le soluzioni date dal RABDA coincidano nella sostanza con quelle oggi in uso, riferiremo enunciato e soluzione di una fra quelle cinque questioni:

I. Taluno dice ad un altro: $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}$ delle argirie (1) che io possiedo fanno insieme 21; quante argirie possiedo? Il secondo, che ha lo spirito fine ed esercitato in tal fatta di questioni, gli risponde prontamente: Ne hai in tutto $57\frac{1}{3}$; infatti $\frac{1}{5}$ ne è argirie $11\frac{5}{11}$ e $\frac{1}{6}$ ne è $9\frac{6}{11}$; e la somma è 21.

Ecco il metodo per giungere alla risposta: Moltiplica i denominatori dei quantesimi, cioè 5 a 6; avrai 30; moltiplica il risultato per 21, verrà 630. Aggiungi ora 5 a 6; viene 11; dividi 630 per 11; viene $57\frac{3}{11}$, appunto il numero che rispose l'interrogato.

Emerge da ciò che, per risolvere l'equazione

$$\frac{x}{m} + \frac{x}{n} = a,$$

RABDA dà quella regola che noi oggi compendiamo nella formola

$$x = \frac{m\,n\,a}{m + n}.$$

Similmente nel problema VI (divisione di una somma in parti proporzionali a numeri dati) il RABDA risolve un sistema di equazioni del tipo

$$x + y = a \quad , \quad mx = ny$$

mediante il procedimento simboleggiato nelle formole seguenti:

$$x = \frac{1}{m}\,\frac{m\,n\,a}{m+n} \quad . \quad y = \frac{1}{n}\,\frac{m\,n\,a}{m+n}.$$

Egli incontra poi un sistema della forma (2) in un problema somigliantissimo a quello che trovammo (p. 926) nell'*Antologia* sotto il nome di EUCLIDE. È opportuno riferirlo:

(1) Monete d'argento.

V. Un tale dice ad un altro: dammi 6 delle tue assarie (1), così io ne avrò il doppio di te. No, rispose l'altro, dammene piuttosto 6 delle tue, così ne avremo lo stesso numero.

Uno aveva 42 assarie e l'altro 30. Ecco come lo si trova; quintuplica e settuplica il numero di assarie richiesto da ciascuno; il numero risultante dalla moltiplicazione per 5 sarà ciò che possiede uno, e quello risultante dalla moltiplicazione per 7 ciò che possiede l'altro.

Il nostro autore non fa che verificare il risultato; il quale nasce dal porre $a = 6$, $m = 2$, $n = 1$ nelle formole

$$x = a\left\{1 + 2\frac{m+1}{mn-1}\right\} \quad , \quad y = a\left\{1 + 2\frac{n+1}{mn-1}\right\}$$

risolutrici del sistema (3). Quando avremo aggiunto che egli mostra, nei problemi II e XV, di essere in grado di sciogliere un'equazione del tipo

$$x - \frac{x}{m} - \frac{x}{n} - \ldots = a$$

e, nell'VIII, un sistema della forma

$$x + \frac{y}{n} = y + \frac{x}{n} = a,$$

potremo ritenere di avere dimostrata l'affinità esistente tra i problemi contenuti nell'*Antologia greca* e quelli risoluti nella seconda delle *Lettere* in questione.

Il "problema dei buoi,, di Archimede.

64. - Due problemi escludemmo sino ad ora dalle nostre considerazioni intorno ai problemi dell'*Antologia greca*. Uno è la riproduzione di quello con cui si chiude il V Libro di

(1) Monete di rame.

DIOFANTO, e nulla abbiamo da aggiungere a quanto dicemmo su di esso (p. 908). L'altro appartiene pure all'analisi indeterminata di secondo grado ed è tanto difficile che nell'antichità « problema di ARCHIMEDE » era sinonimo di questione estremamente ardua e spinosa (1). Quantunque citato da GEMINO (2) e ricordato in uno scolio a noi noto (p. 668), del *Carmide* di PLATONE, esso venne escluso dalle prime edizioni dell'*Antologia*. Scoperto nel 1773, da G. E. LESSING (1729-1781) nel codice *77 Gud. Graec.* della Biblioteca di Wolfenbüttel, venne da lui pubblicate (3) e da allora in poi fu oggetto di ricerche reiterate da parte di filologi e matematici.

Nell'elenco di coloro che se ne occuparono i più antichi sono J. (1755-1841) e K. L. STRUVE (4), padre e figlio, il primo dei quali lo attribuì, non al Siracusano, ma ad un mediocre matematico ispiratosi all'*Odissea* di OMERO (5), mentre il secondo liberò quel problema da gran parte della sua difficoltà col sopprimerne l'ultima parte, cioè i versi 31-44, che, come vedremo presto, contengono le condizioni più complicate. Quell'attribuzione e questa soppressione vennero nel 1828 gagliardamente combattute da GOTTFR. HER-

---

(1) Cfr. MAZZUCHELLI, *Notizie istoriche e critiche intorno alla vita, alle invenzioni e agli scritti di Archimede Siracusano.* Brescia, 1737, p. 89.

(2) *Heronis Alex. geom. et stereom. reliquae,* ed. HULTSCH, Berolini, 1864, p. 218.

(3) *Zur Geschichte der Literatur. Aus den Schätzen des Herzogl. Biblioihek zu Wolfenbüttel,* II Beitrag (Braunschweig, 1773). Ivi il LESSING inserì anche uno scolio anonimo contenente una pretesa soluzione del problema archimedeo ed un tentativo nello stesso senso di C. LEISTE.

(4) *Altes griechisches Epigramm mathematisches Inhalts.* Altona, 1821.

(5) Lo STRUVE alludeva al seguente passo:

> « Allora incontro ti verran le belle
> Spiagge della Trinacria isola, dove
> Pasce il gregge del Sol, pasce l'armento.
> Sette branchi di buoi, d'agnelle tanti,
> E di teste cinquanta i branchi tutti ».
>
> *Odissea,* trad. PINDEMONTE, XII, 165-169.

MANN, il quale, in un programma pubblicato dall'Università di Lipsia, sostenne l'autenticità dell'epigramma contenente il προβλημα βοεικὸν, facendo notare come di esso parli il succitato scolio al *Carmide:* è da rilevare che l'HERMANN afferma (dietro informazioni somministrate dal MOLLWEIDE) che GAUSS era in possesso di una soluzione del problema di ARCHIMEDE.

Della questione occupossi poi il NESSELMANN (1), negando l'autenticità dell'epigramma in base alla considerazione che ivi entra un numero triangolare, mentre, secondo lui, tali numeri non s'incontrano nella letteratura greca anteriormente a NICOMACO. Invece il VINCENT (2), accrescendo la portata di un procedimento mutilatore suggerito dallo STRUVE figlio, espose l'idea che il problema proposto da ARCHIMEDE non comprendesse in origine che i primi sedici versi dell'epigramma e ne ridusse così il valore matematico a proporzioni insignificanti.

Un'attitudine recisamente opposta a quella scelta da quest'ultimi assunse l'HEIBERG (3), il quale cercò di mostrare come sull'autenticità del problema in questione non fosse ragionevole sollevare alcun dubbio. A tale scopo egli fece valere: 1.° la grande celebrità *apud veteres* del problema in questione, dimostrata, oltrechè da quello scolio al *Carmide*, da due passi di CICERONE; 2.° le relazioni notorie di ARCHIMEDE con matematici della scuola d'Alessandria, quali CONONE e DOSITEO (v. pp. 281, 301, 314, 326), 3.° il fatto che i numeri triangolari erano indubbiamente noti assai prima di NICOMACO. Tali ragioni hanno un valore che non tenteremo negare, ma però non bastano a troncare ogni discussione sull'argomento. Infatti, anzitutto lo scolio al *Carmide* è di mano e perfino di epoca ignota, onde non può servire a misurare l'antichità dell'apprezzamento ivi contenuto sul

(1) Op. cit., p. 481 e seg.

(2) *Sur les problème des boeufs attribué à Archimède* (Nouv. Ann. de Mathématiques, T. XIV, 1855, e T. XV, 1856). Cfr. anche l'articolo anonimo (del TERQUEM?) *Sur un problème d'analyse indeterminée attribué à Archimède et dit " de bovino "* nel primo degli or citati volumi.

(3) *Questiones Archimedeae*, Hauniae, 1879, p. 66-69.

problema che ci occupa; e quanto ai passi di CICERONE, nulla assicura che le frasi vaghe che ivi si leggono alludano a questo problema e non ad altri risoluti dal Siracusano. D'altronde la forma epigrammica appartiene ad un'epoca posteriore ad ARCHIMEDE; onde è possibile che chi compilò l'ultimo problema dell'*Antologia* (1) siasi giovato delle notorie relazioni di questo con i matematici del Museo, per dare al suo scritto tal forma che ne fosse ammissibile la provenienza dal Siracusano. Per ciò la prudenza consiglia a ritenere ancora come sospetta la legittimità dell'attribuzione ad ARCHIMEDE dell'epigramma *sotto la forma* in cui l'incontriamo nell'*Antologia;* ma nulla vieta di attribuirgli la paternità *della sostanza,* ricordando essere noto (v. p. 340) che il Siracusano non isdegnò di occuparsi di un giuoco matematico e che la proposta di un problema praticamente insolubile, quale è quello di cui si tratta, concorda, come atto di carattere, con la enunciazione dei teoremi falsi, che ARCHIMEDE vantavasi (2) di avere fatta, allo scopo di dimostrare bugiardi certi geometri, che certamente si sarebbero affrettati a dichiararsi in possesso delle relative dimostrazioni (3).

65. - Riferito così intorno ai vari pareri che vennero manifestati riguardo al problema di ARCHIMEDE, prima di occuparci della soluzione di esso, ne presenteremo qui l'enunciato tradotto (4), indicando, per comodità di richiamo, con un numero in parentesi il principio di ogni verso dell'originale.

---

(1) Secondo F. HULTSCH, la redazione non sarebbe posteriore al principio del II sec., v. il § 18 dell'articolo *Archimedes* in PAULY-WISSOWA, *Real-Encyklopädie der class. Alterthumswiss.*

(2) Prefazione alle *Spirali.*

(3) Quest'osservazione è del TANNERY; v. l'articolo *Sur le problème des boeufs d'Archimède* (Bull. des Sc. math., II Serie, T. V, 1881, p. 25-30).

(4) Ci serviamo del testo emendato che leggesi nella prima parte della memoria (che può giudicarsi come definitiva) di KRUMMBIEGEL e AMTHOR, *Das Problema bovinum des Archimedes* (Zeitschr. f. Math. und Phys., T. XXV, 1880, Hist.-lit. Abth., p. 125-136 e 153-171); dalla seconda parte dello stesso lavoro togliemmo la sostanza degli sviluppi matematici esposti nel presente n.

Problema che Archimede trovò fra (gli) epigrammi ed inviò a coloro che si occupavano in Alessandria di cose di tal genere mediante lettera indirizzata ad Eratostene da Cirene.

(I) Calcola, o amico, il numero dei buoi del Sole, (II) operando con cura, se possiedi qualche scienza; (III) calcola in qual numero essi pascolavano una volta sulle pianure (IV) dell'isola sicula Trinacria, distribuiti in quattro gruppi (V) di vario colore; uno di aspetto bianco latteo, (VI) il secondo splendente di color nero, (VII) il terzo poi di un bruno dorato, il quarto screziato; in ogni (VIII) gregge i tori erano in quantità considerevole distribuiti (IX) nei rapporti seguenti: ritieni i bianchi (X) come eguali alla metà ed alla terza (XI) parte (1) di tutti i neri ed ai bruni; (XII) i neri poi eguali alla quarta parte (XIII) ed alla quinta degli screziati e a tutti i bruni; (XIV) i restanti screziati considerali poi (XV) come eguali alla sesta e alla settima parte (XVI) dei tori bianchi e di nuovo a tutti i bruni (XVII). Le giovenche erano invece distribuite nei rapporti seguenti: (XVIII) le bianche erano eguali precisamente alla terza (XIX) e quarta parte di tutto il gregge nero; (XX) le nere (XXI) alla quarta parte assieme alla quinta delle screziate (XXII) prese assieme ai tori; le screziate (XXIII) erano precisamente eguali alla quinta parte ed alla sesta (XXIV) di tutti gli animali del gregge bruno; (XXV) le brune poi vennero valutate eguali alla metà della terza parte (XXVI) ed alla settima parte del gregge bianco. (XXVII). Quando avrai determinato esattamente, o amico, quanti erano i buoi del Sole, (XXVIII) avrai distinto quanti erano i tori (XXIX) ed avrai anche trovato quanti erano di ciascun colore, (XXX) non ti si chiamerà certamente ignorante nè inabile nei numeri; (XXXI) però non ti si annovererà ancora fra i saggi. Ma ora (XXXII) bada bene a questi altri rapporti fra i buoi del Sole. (XXXIII) Quando i tori bianchi mescolavansi ai neri (XXXIV) formavano un gruppo equilatero (XXXV) in altezza e larghezza (2); le vaste pianure della Trinacria (XXXVI) erano allora tutte

---

(1) Notisi che tutte le frazioni considerate sono decomposte in frazioni fondamentali.

(2) Il Wurm (*Jahrb. für Phil. und Pädag.*, T. XIV, 1830, p. 194) interpretò diversamente il testo greco ne dedusse che i buoi formavano una figura rettangolare; in conseguenza il problema subisce una notevole semplificazione: v. il § 5 della memoria di Krummbiegel e Amthor.

piene di buoi; (XXXVII) invece i bruni e gli screziati riuniti (XXXVIII) costituivano una figura (XXXIX) triangolare (1). (XLI) Quando avrai trovato tutto questo e l'avrai esposto sotto forma intelligibile (XLII) e avrai anche trovata la quantità totale dei buoi, (XLIII) allora, o amico, per quanto hai fatto va superbo come un vincitore (XLIV) e sta sicuro di venire considerato ricco di quella scienza.

Per chiarire la natura e l'entità delle difficoltà che offre questo problema risolviamolo con i procedimenti che oggi sono a tutti famigliari. Indichiamo perciò con v , x , y , z i numeri dei tori che entrano nei quattro greggi, con v' , x', y' , z' i corrispondenti numeri di giovenche, finalmente con p , q due interi. Sussisteranno allora, per dato, le equazioni:

$$v = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) x + y \quad , \quad x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) z + y$$

$$z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) v + y \quad , \quad v' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(x + x')$$

$$x' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(z + z') \quad , \quad y' = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(v + v')$$

$$z' = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(y + y') \quad , \quad v + x = p^2$$

$$y + z = \frac{q\,(q+1)}{2}.$$

Dalle tre prime equazioni si trae:

$$v = \frac{2226}{891}\,y \quad , \quad x = \frac{1602}{891}\,y \quad , \quad z = \frac{1580}{891}\,y.$$

Ora, dovendo essere interi i valori delle incognite, y sarà un multiplo di 891, onde potremo porre:

$$v = 2226\,\mu \quad , \quad x = 1602\,\mu \quad , \quad z = 1580\,\mu \quad , \quad y = 891\,\mu\,.$$

---

(1) Nel tradurre, compendiammo, e così andò perduto il verso XL.

Sostituiamo questi valori nelle quattro equazioni del problema che seguono le tre prime e risolviamo le equazioni risultanti rispetto alle quattro incognite non ancora considerate; otterremo così

$$v' = \frac{7206360}{4657}\,\mu \quad , \quad x' = \frac{4893246}{4657}\,\mu ,$$

$$y' = \frac{5439213}{4657}\,\mu \quad , \quad z' = \frac{3515820}{4657}\,\mu .$$

Tenendo poi conto della condizione che anche v', x', y', z' devono risultare interi, si conclude che μ dev'essere un multiplo di 4657 ($\mu = 4657\,\nu$) e quindi si potrà scrivere;

$$\begin{aligned} v &= 10366482\,\nu \quad , \quad x = 7460514\,\nu \\ v' &= 7206360\,\nu \quad , \quad x' = 4893246\,\nu \\ y &= 4069197\,\nu \quad , \quad z = 7358060\,\nu \\ y' &= 5439213\,\nu \quad , \quad z' = 3515820\,\nu \text{ (1).} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori ottenuti per v, x nella penultima equazione data si trova

$$17826996\,\nu = p^2 \qquad \text{ossia} \qquad p^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4557\,\nu ,$$

equazione alla quale si soddisfa ponendo

$$\nu = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657\,\xi^2 = 445749\,\xi^2 ,$$

ξ essendo una nuova incognita. Si ha in conseguenza:

$$\begin{aligned} v &= 46\,200\,808\,287\,010\,\xi^2 \quad , \quad v' = 32\,116\,937\,723\,640\,\xi^2 \\ x &= 33\,249\,638\,308\,986\,\xi^2 \quad , \quad x' = 21\,807\,969\,217\,254\,\xi^2 \\ y &= 18\,492\,776\,362\,863\,\xi^2 \quad , \quad y' = 24\,241\,207\,098\,537\,\xi^2 \\ z &= 32\,793\,026\,546\,940\,\xi^2 \quad , \quad z' = 15\,669\,127\,269\,180\,\xi^2 \end{aligned}$$

---

(1) Facendo $\nu = 80$ si ottiene quella pretesa soluzione che, come dicemmo, venne pubblicata dal LESSING.

Per determinare ξ si deve tener conto dell'ultima equazione del problema, la quale, in forza dei valori trovati per y e z, assume il seguente aspetto:

$$\frac{q\,(q+1)}{2} = 3 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 29 \,.\, 353 \,.\, 4657^2 \,.\, \xi^2 \,.$$

Moltiplichiamo per 8 e poniamo

$$2q + 1 = t \quad , \quad 2 \,.\, 4657\, \xi = u \,;$$

essa diverrà

$$t^2 - 4\,729\,494\, u^2 = 1 \,.$$

È un'equazione indeterminata (cosidetta di PELL) di cui fa mestieri scoprire una soluzione tale che il corispondente valore di u sia multiplo di 2.4657; il quoziente di ogni tale valore per questo numero è un valore di ξ, a cui corrisponde una soluzione del problema de' buoi. Orbene alla minima fra tali soluzioni corrisponde un numero di buoi del Sole espresso da 7766 seguito da 206541 zeri. È un numero astratto che l'autore dell'*Arenario* era certamente capace di concepire, ma è un numero di buoi che la Sicilia non può racchiudere! Per dare un'idea approssimativa dell'enormità di quel numero, osserviamo che le ordinarie tavole logaritmiche portano in ogni pagina circa 50 linee con 50 cifre ciascuna, cioè in ciascuna pagina a un dipresso 2500 cifre; onde per iscrivere ciascuno dei valori trovati per $x, y, z, v, x', y', z', v'$ occorrerebbero più di 82 pagine, e per iscriverli tutti un volume di 660 pagine.

Da quanto precede risulta che il problema di ARCHIMEDE merita di essere ascritto fra i più belli che annoveri la letteratura aritmetica, cosi bello che non ci sovviene alcuno che lo superi per eleganza di forma e valore di sostanza. Esso è difficile assai; ma chi può arrogarsi il diritto di negare ad un genio cosi originale e potente, qual era il Siracusano, la capacità di concepirlo e risolverlo?

Moscupolo ed i matematici di Bisanzio.

66. - Le questioni trattate nell'*Antologia greca* appartengono a quella categoria di problemi figurati chiamati « ricreazioni matematiche », a quei problemi che indussero LEIBNIZ a sentenziare « les hommes ne sont jamais plus ingénieux que dans l'invention des jeux ». Alla stessa classe appartiene la questione di « distribuire nelle n^2 caselle di un quadrato i numeri $1, 2, \ldots n^2$ per modo che la somma dei numeri scritti in una qualunque linea longitudinale, trasversale o diagonale sia sempre $\frac{1}{2} n (n^2 + 1)$ ».

Di questo problema — che a prima giunta non si vede se sia possibile o non, determinato o meno — le origini sono oscure. Osservando che esso si può considerare come relativo ad una scacchiera e ricordando che l'invenzione del giuoco degli scacchi viene attribuita agli Indiani (1), taluno si credette autorizzato a ritenere che anche i così detti « quadrati magici » abbiano vista la luce sulle rive del Gange. Tale argomentazione non ci sembra conclusiva, giacchè nulla prova che i Greci, senza ricorrere a considerazioni fondate sopra quel celebre giuoco, non abbiano potuto giungere almeno ad immaginare quel problema; basta a provarlo il quadrato parzialmente magico che incontrammo in TEONE SMIRNEO (p. 795). Inoltre S. GÜNTHER pubblicò per primo (2) e con molta dottrina commentò (3) un trattatello

(1) LASSEN, *Indische Alterthumskunde,* IV Tl., Bonn, 1862, p. 905.

(2) *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften.* Leipzig, 1876, p. 195-203. Molti emendamenti al testo greco vennero indicati da A. EBERHARD in *Hermes*, T. XI, p. 434. Una nuova e migliore edizione fu fatta da P. TANNERY, giovandosi di un manoscritto esistente nella Biblioteca Nazionale di Parigi (*Le traité de Manuel Moschopulos sur les carrés magiques.* Annuaire de l'Ass. pour l'encorragement des études grecques, T. XX, 1886).

(3) Id., p. 203-213. V. anche due addizioni di A. LABOSNE alla IV ed., Paris, 1879, dei *Problèmes plaisant et délectables per* G. C. BACHET, *sieur de* MÉZIRIAC (p. 97 e 111).

greco, esistente nella Biblioteca di Monaco (Cod. Gr. Fol. 100), ove sono esposte senza dimostrazione due costruzioni pei quadrati magici contenenti $(2\,m + 1)^2$ elementi ed una per quelli che ne contengono $(4\,m)^2$, mentre pei quadrati di $(4\,m + 2)^2$ elementi non si trova alcun metodo.

L'autore dello scritto è un certo EMANUELE MOSCOPULO (1), la cui epoca fu determinata (2) osservando che quello scritto è dedicato a NICOLA ARTAVASDE RABDA, di cui conosciamo una lettera scritta nel 1341 ; e siccome il lavoro sui quadrati magici è opera senile, così la nascita di MOSCOPULO dev'essere avvenuta in principio del sec. XIV. Egli va pertanto ascritto al periodo in cui i Greci avevano smesso di parlare ed agire per proprio impulso e limitavansi a ripetere quanto avevano detto e fatto i loro maggiori, o a divulgare quanto avevano appreso in contatto coi popoli Orientali, che, da loro discepoli, erano divenuti loro maestri (ed infatti MOSCOPULO non si atteggia a matematico originale !). Sicchè non è illegittima la supposizione che quanto egli ci ha tramandato sia una pianta esotica di cui egli volle far gustare ai Greci i frutti saporiti. Tuttavia, sia perchè ciò è ben lungi dall'essere dimostrato, sia perchè è impossibile compilare un catalogo esatto e completo della flora matematica indigena ellèna, sia finalmente perchè si tratta del più antico documento relativo a figure di origine ignota e che esercitarono la sagacia di molti matematici, era dover nostro di far cenno della presenza nell'antica letteratura matematica di una teoria, a perfezionare la quale i matematici poteriori contribuirono assai ; tanto più che si trova ivi per la prima volta il concetto di *ordine circolare* (ὥσπερ ἀνακυκλοῦντες) di più cose, che tanta importanza acquistò in processo di tempo.

67. - EMANUELE MOSCOPULO si connette ai dotti che in Bisanzio tennero ancora accesa la vacillante fiammella della ricerca scientifica nel campo matematico. A capo di essi

(1) Il trattato di MOSCOPULO era stato tradotto dal DE LA HIRE, ma la versione non venne pubblicata (v. *Nouvelles constructions et considérations sur les carrés magiques.* Mém. de l'Ac. Royale des Sciences, Paris, 1705).

(2) P. TANNERY, *Manuel Moschopulos et Nicolas Rhabdas* (Bull. des Sc. math. et astr., 2e Série, T. VIII, 1884, p. 263-277).

starebbe, secondo il parere di un eminente filologo (1), un tal LEONE, da cui daterebbe il Rinascimento bizantino dei secoli IX e X, al quale, in particolare, saremmo debitori della conservazione dell'unico manoscritto di ARCHIMEDE che tuttora possediamo. Fra essi troviamo poi MICHELE PSELLO (2), la cui autorità già invocammo a p. 97 per chiarire il senso di un ragionamento attribuito a BRISSONE ed a p. 848 per determinare l'epoca in cui visse DIOFANTO. Benchè soprannominato « primo dei filosofi », egli non ci lasciò che una povera esposizione delle divagazioni aritmetiche dei rinnovatori del Pitagorismo e del Platonismo (3). Altri matematici dello stesso periodo sono: il celebre monaco BARLAAM da Seminara (Calabria) (4) di cui è nota una *Logistica* (5), ove è insegnato il calcolo con interi e frazioni (6), e di cui CORRADO DASIPODIO pubblicò nel 1564 una *Arithmetica demonstratio eorum quae in II libro Elementorum ab Euclides sunt in lineis et figuris planis demonstrata* quale commento alla grande opera di EUCLIDE; GIOVANNI PEDIASIMO la cui *Geometria* trovò nel FRIEDLEIN un dotto editore (7); NICOLA RABDA, che in più occasioni ci prestò

(1) HEIBERG, *Der byzantinische Mathematiker Leon* (Biblioteca mathematica, 1888, p. 33-36).

(2) L'ultimo scritto del PSELLO è datato 1092.

(3) Ψέλλου τῶν περὶ ἀριθμητικῆς συνοψις (Parigi, 1538). Servendosi della traduzione latina fattane da XILANDRO nel 1556, il KÄSTNER ha fatto un accurato riassunto di quest'opera nel T. I (p. 279-282) della sua *Geschichte der Mathematik*, Göttingen, 1796). Un brano estratto da GIAMBLICO si trova in un manoscritto dell'Escuriale pubblicato da P. TANNERY (*Psellus sur les nombres*; Revue des études grecques).

(4) Occupò posizioni eminenti nella gerarchia ecclesiastica e vuolsi insegnasse a DANTE ed a PETRARCA; morì nel 1348. Per altri particolari vedi MAZZUCHELLI, *Gli scrittori d'Italia*, articolo BARLAAM.

(5) Pubblicata prima a Strasburgo nel 1592 e poi a Parigi nel 1600, in greco ed in latino. I punti di contatto che presenta con i libri aritmetici di EUCLIDE vennero segnalati dall'HEIBERG nelle note all'edizione da lui curata degli *Elementi*.

(6) Altre edizioni sono ricordate dall'HEIBERG, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*. Leipzig, 1882, p. 12.

(7) *Programm der Studienanstalt*, Ansbach, 1866.

ottimi servigi; e MASSIMO PLANUDE, altro trattatista di cui ci siamo giovati ed il cui *Manuale* si chiude con due problemi, di cui riferiremo gli enunciati, perchè essi entrano nella cornice del quadro, che tentammo delineare nel presente capitolo.

I. Un tale, trovandosi in punto di morte, si fece portare il suo scrigno e divise fra i suoi figli il proprio denaro con le parole seguenti: " Io voglio ripartire equamente il mio denaro fra i miei figliuoli; il primo avrà una moneta ed un settimo del rimanente, il secondo ne avrà due ed un settimo del resto, il terzo tre ed un settimo del resto „. Giunto a questo punto il padre morì, senza essere arrivato al termine nè nel denaro nè dell'enumerazione dei figli. Voglio sapere quanti erano i figli e quanto il danaro.

II. Trovare un rettangolo avente lo stesso perimetro di un altro e la cui area sia un multiplo dell'area di questo.

Nel primo di questi problemi il PLANUDE indica e verifica la soluzione; come questa venne ottenuta non è facile indovinare (1).

Pel secondo egli suggerisce di prendere come lati di uno dei cercati rettangoli, se λ è il rapporto delle due aree, $\lambda^3 - \lambda$ e $\lambda - 1$, e come lati del secondo $\lambda^3 - \lambda^2$ e $\lambda^2 - 1$; da chi egli apprese questa soluzione, che certamente non è farina del suo sacco, non sappiamo dire; essa è abbastanza elegante per fare onore a colui che l'ha inventata.

68. - Questo problema presenta una somiglianza con alcune questioni di applicazione dell'algebra alla geometria (2), parte determinate, parte non, che si leggono nello stesso Codice di Costantinopoli, nel quale R. SCHÖNE trovò i *Me-*

---

(1) Detto x il numero delle monete contenute nello scrigno, sussisterà la relazione

$$1 + \frac{x-1}{7} = 2 + \frac{1}{7}\left\{x - \left(1 + \frac{x-1}{7} + 2\right)\right\}$$

onde $x = 36$; il primo figlio ebbe quindi 6 monete e altrettante ne ricevettero gli altri cinque. Questo problema venne generalizzato da BACHET DE MÉZIRIAC (v. *Problèmes plaisants et délectables*, IV ed., Paris, 1879, p. 158).

(2) J. L. HEIBERG e H. G. ZEUTHEN, *Einige griechische Aufgaben der umbestimmten Analytik* (Bibl. math., III Ser., T. VIII, 1907-8).

trica di ERONE (v. p. 605). Esse sarebbero di somma importanza ove si conoscesse l'epoca a cui appartengono; ma ad ogni modo meritano un cenno in una storia della matematica greca. Tenendo conto del loro contenuto geometrico sarebbero da avvicinare alle opere di ERONE, mentre chi badi a quanto contengono di aritmetico deve collegarli agli scritti di DIOFANTO.

Le due prime vennero già da tempo notate in un manoscritto eroniano, epperò considerate da M. CANTOR nel sue ricerche sopra gli agrimensori Romani e le fonti a cui attinsero (1). Essi hanno per iscopo la ricerca di due rettangoli (x, y e u, v) le cui aree ed i cui perimetri sono legati da relazioni di uno dei seguenti tipi:

$$\begin{array}{lll} (1) & x\,y = u\,v & n\,(x+y) = u+v \\ (2) & x+y = u+v & x\,y = n\,.\,u\,v \end{array}$$

ove u è un numero dato (3 nel primo caso, 4 nel secondo); le soluzioni date sono risp.

$$(1) \quad x = 2\,n^3 - 1\,,\ y = 2\,n^3\ ;\ u = n\,(4\,n^3 - 2)\,,\ v = n$$
$$(2) \quad x = n^2 - 1\,,\ y = n^2\,(n-1)\ ;\ u = n-1\,,\ v = n\,(n^2-1).$$

Determinato è invece il terzo dei problemi in discorso, giacchè ha per iscopo la ricerca di un quadrato di cui si conosce l'area più il perimetro; esso si traduce nella equazione $x^2 + 4\,x = \textit{numero dato}$, e l'anonimo ne trae l'unica radice positiva.

La ricerca dei triangoli rettangoli di dato perimetro proposto nel quarto problema può compiersi in infiniti modi; l'anonimo la rende determinata e facile aggiungendo la condizione che la figura cercata sia simile al triangolo di PITAGORA avente per lati 3, 4, 5.

L'analoga ricerca dei triangoli rettangoli di data area, proposta nel quinto problema, è notevole perchè nel ragionamento esposto è fatto uso del teorema « l'area di un triangolo rettangolo a lati interi è un intero divisibile per 6 ».

I tre problemi seguenti sono di nuovo determinati, avendo

(1) *Die römische Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmessungkunst.* Leipzig, 1875, p. 62.

per iscopo la determinazione di un triangolo rettangolo di cui si conosca un lato e l'area.

Invece gli ultimi tre sono indeterminati, avendo per fine la ricerca di un triangolo rettangolo del quale si conosca la somma del perimetro ($2p$) e del raggio (r) del cerchio inscritto. Sono interessanti perchè manifestano nel risolutore la conoscenza delle seguenti relazioni fra i cateti a, b di un triangolo rettangolo, l'ipotenusa c, la superficie S e le lunghezze r, p:

$$S = pr = \frac{1}{2} ab \ , \ p + r = a + b \ , \ p = c + r \ ,$$

a cui guida agevolmente la semplice ispezione della figura.

Con queste produzioni, di valore scarso e di provenienza oscura ed incerta, si chiude la letteratura aritmetica, anzi la letteratura matematica in generale, dei Greci antichi. L'astro di abbagliante splendore che durante tanti secoli aveva meravigliato il mondo dei pensatori, tramonta per non più risorgere. Ma non scompaiono i benefici effetti della luce che, nel suo corso glorioso, esso aveva diffusa sull'umanità intera. Chè, non soltanto gli immortali geometri nati sul fecondo suolo dell'Ellade sono meritamente da noi considerati come maestri e guide e posti al livello di modelli, che si può sforzarsi di eguagliare, ma che è follia industriarsi di sorpassare, ma tutta la nostra aritmetica teorica è impregnata dei concetti (se non informata ai metodi) che stabilirono PITAGORA e PLATONE, NICOMACO e DIOFANTO e che i loro discepoli commentarono, perfezionandoli e svolgendoli. Infatti, se è lungi dalle idee moderne la tendenza a seguire i due primi, quando, abbandonandosi alla corrente di un morboso misticismo aritmetico, sognarono un rapporto universale fra numeri e cose, non c'inspiriamo forse ai loro esempi, quando coltiviamo gli studi intorno alle più riposte qualità della serie dei numeri naturali? E non è forse nelle loro opere immortali che esistono le scaturigini delle indagini sopra i numeri figurati e quindi, se non le vere basi della odierna analisi combinatoria, almeno il primo cenno sulla fertilità dell'idea d'introdurre considerazioni geometriche nella pura scienza del numero? E non è forse l'assiduo studio dei frammenti superstiti dell'opera diofantea che ispirò

il FERMAT nelle fondamentali sue investigazioni, le quali lo fanno, senza contrasto, considerare come padre dell'odierna teoria dei numeri? (1)

Inchiniamoci, dunque, dinnanzi agli aritmetici Greci, con riverenza non disforme da quella che ci fa piegare le ginocchia dinnanzi ai geometri del periodo aureo ed agli astronomi capitanati da IPPARCO; tributiamo ad essi, non la fredda e sterile ammirazione, che suolsi accordare ad opere omai estranee al ciclo dei nostri pensieri e delle nostre occupazioni, ma quel fervido entusiasmo, di cui sogliono infiammare le fonti eterne di solida istruzione e sublime diletto.

Possa siffatto sentimento diffondersi e trasformare in numerosa legione il piccolo drappello di credenti nella inestinguibile vitalità delle opere dei matematici Greci. Questo augurio facciamo, convinti che, soltanto in tal maniera, potranno venire debellate le resistenze che tuttora oppongono le molte importanti questioni storiche, a delineare e chiarire le quali modestamente aspira l'opera a cui in questo istante viene posta la parola *fine*.

---

(1) La pubblicazione integrale, da tanti invocata, delle ricerche di JACOBI sulla matematica greca, condurrà probabilmente a stabilire anche molti punti di contatto tra DIOFANTO e l'autore dei *Fundamenta nova*.

APPENDICE

Sul numero di Platone.

Spiegata la costituzione della città ideale ed esposte le leggi relative all'organizzazione delle famiglie, PLATONE, in principio dell'VIII Libro della *Repubblica*, pretende indicare le cause delle rivoluzioni degli stati, cause fatali e possenti, a cui non resiste nemmeno l'organismo di cui egli tracciò il piano, per quanto fosse da lui giudicato di solidità veramente granitica.

La dissoluzione dello stato comincia, secondo le idee del divino filosofo, colla dimenticanza di quelle leggi misteriose che governano i matrimoni e la procreazione dei figli. E qui il sommo pensatore, invocate le Muse, si propone di assegnare il numero che rappresenta la parte fondamentale in questo lato dell'ordinamento sociale, quel numero (da lui detto ἀριθμὸς γεωμετρικός) che è « arbitro delle nascite buone e cattive, non conoscendo il quale, se i governanti congiungono fuor di tempo una sposa ad uno sposo, nasceranno figli di cattiva indole e disgraziati », quel numero che è chiamato, per ricordare il suo ufficio, *numero nuziale* (1). La conoscenza di tal numero non poteva, secondo il modo di vedere platonico, essere comunicata al volgo, onde PLATONE lo pre-

(1) Della determinazione del valore di tal numero si occupò JACOBI, come fa fede una comunicazione (tuttora inedita) da lui fatta all'Accademia di Berlino il 1° novembre 1849; vedi L. KÖNIGSBERGER, *C. G. J. Jacobi*. Leipzig, 1904, p. 493.

senta come quello che risolve una specie di enigma, che egli pone in bocca al personaggio di SOCRATE.

Esiste – dice questi — pel generato divino un periodo abbracciato da un numero perfetto, ma per l'umano vi è un primo numero, somma di quantità generatrici e generate, comprendente tre intervalli a quattro termini di quelli che danno cose simili e dissimili, che crescono o decrescono, e non presentano che rapporti analogici e razionali. La base epitrite presa fra questi rapporti, aggiunta a 5, dà una somma che, moltiplicata tre volte, offre due armonie, una quadrata eguale a 100 volte 100, l'altra della stessa lunghezza in un senso ed allungata nell'altro per 100 cubi di 3 e 100 quadrati di diametri razionali di 5, questi quadrati essendo diminuiti ciascuno di un'unità, o di 100 quadrati delle diagonali irrazionali, questi quadrati essendo diminuiti ciascuno di 2 unità. Gli è questo numero geometrico intero che ha la proprietà di presiedere alle generazioni buone e cattive.

La grande oscurità di questo passo non dipende dall'essere il testo relativo corrotto o dall'essere necessario per intenderlo famigliarità con il linguaggio e le idee di PLATONE: infatti i filologhi più competenti intorno all'esegesi platoniana garantiscono che quel testo ci è pervenuto sotto forma perfetta; d'altronde, se la laconicità dei commentatori più antichi (ad es. di ARISTOTELE) condurrebbe a ritenere che quel passo fosse intelligibile ai posteri immediati di PLATONE, è noto che la difficoltà di interpretarlo era proverbiale sin dall'epoca di CICERONE. E siccome, in generale, si ebbe fede nell'esistenza di un numero soddisfacente a tutte le condizioni assegnate da PLATONE (1), così innumerevoli sono i tentativi fatti per trovarli, e numerosissime le soluzioni dell'indovinello proposto dal fondatore dell'Accademia. Queste, ottenute come frutto di pazienti investigazioni, accompagnate da ardite congetture, vennero accolte dagli uni con entusiasmo e con disprezzo dagli altri. Tutte hanno come base un'analisi microscopica del testo, onde appar-

(1) Tal fede non è condivisa da D. B. MUNRO il quale scrisse: " the number of Plato was woven of fragments from waching realities und may still serve to indicate what these realities were „ (*The Number of Plato,* in Journal of Philology, T. VIII, p. 275 e seg.).

tengono più alla filologia che alla matematica: ciò non ostante val la pena di indicare i fondamenti e le conclusioni delle più salienti, meno per far misurare al lettore la entità delle divergenze esistenti fra di esse, che per segnalare quali cognizioni aritmetiche vennero in conseguenza presupposte in PLATONE.

Cominciamo a ricordare le soluzioni di più antica data (1). Tacendo di PROCLO — il quale non volle o non seppe spiegare il passo in questione e, ad ogni modo, non arrecò alcun contributo alla questione che ci occupa — noteremo l'opinione di FILONE, secondo cui il numero nuziale sarebbe semplicemente $3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$, mentre VOLTERRANO oscillava tra $(3 + 4 + 5)^3 = 1828$ e $(3 + 4 + 5)^4 = 20736$.

CARDANO propose $2^6 (2^7 - 1) = 8128$, il P. MERSENNE 729, SCHNEIDER e SCHLEIERMACHER $216^2 = 46656$ e FRIES 5040; T. TAYLOR invece suggerì 10000 (2), come numero esprimibile sotto la forma seguente: $7 \times 989 + 300 + 77 + 100 \times 3^3$.

Una più elaborata base ha l'interpretazione che il VINCENT ha proposta (3) e TH. H. MARTIN ha sviluppata (4); essa ha come piattaforma la considerazione delle quattro seguenti proporzioni geometriche:

$$1 : 1 : 1 : 1$$
$$1 : 2 : 4 : 8$$
$$1 : 3 : 9 : 27$$
$$1 : 6 : 36 : 216,$$

---

(1) Cfr. S. GÜNTHER, *Die Platonische Zahl* (Berichte der k. Leop.-Akad., XVIII Heft, p. 148 e seg.) e *Mathematisch-Philologisches über eine Stelle im Platonischen "Staat"* (Blätter für des Bayr. Gymnasialwesen, XIX Bd., p. 119 e seg.). Altre di cui non ci è nota che l'esistenza provengono da FRANCESCO BAROZZI (*Commentarius in locum Platonis obscurissimum*; Bononiae, 1556) e dal BRAMIS (*De numero Platonis*, Vratislaviae, 1830).

(2) *Theoretic Aritmetic*, London, 1816, p. 150-160.

(3) *Sur le nombre de Platon (L'Institut*, n. 39, settembre, 1845); cfr. anche *Notice sur divers manuscrits grecs relatifs à la musique* (Notices et extraits des manuscrits, etc., T. VI, 2e Partie, p. 184-194).

(4) *Le nombre nuptial et le nombre parfait de Platon. Explication d'une enigme mathématique qui se trouve au commencement du VIII Livre de la République* (Revue archéol., T. XIII, 1857).

e di un triangolo rettangolo simile a quello avente per lati i numeri 3, 4, 5 ed il cui cateto minore è il numero

$$216 = 1^3 \times 2^3 \times 3^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3 ;$$

di tale triangolo sono lati i numeri 216, 288, 360; il suo perimetro (864) sarebbe, secondo gli eruditi testè citati, il numero nuziale, perchè gode delle proprietà espresse dalle seguenti identità:

$$864 = 216 + \frac{3+4+5}{3} = 8^2 + 8 \times 100 = 7 \times 100 + 2 + 3^3 \times 6.$$

Invece, nelle *Opere di Platone*, ed. Didot (Vol. III, Paris, 1873), viene proposto il numero 7500; è la proposta che fece J. Hunziker e che il Rothlauf (1) adottò, osservando essere

$$3 : 4 = 7500 : 10000 .$$

P. Tannery, nel proporre una nuova soluzione (2), ammise che Platone abbia fatto parlare Socrate nel modo più esplicito e ne dedusse che il numero cercato è $100 \times 3^3 = 2700$: non è il caso di arrestarci sopra questa interpretazione, che l'autore stesso ha abbandonata (3) dopo di avere conosciute le indagini di J. Dupuis (4). Secondo le quali il numero cercato sarebbe il prodotto di 100 pel minimo numero divisibile per tutti i termini delle due progressioni:

$$1 : 2 : 4 : 8 \qquad 1 : 3 : 9 : 27 ;$$

siccome $8 \times 27 = 216$ è questo numero minimo, cosi il numero di Platone sarebbe $21600 = 100 (3^3 + 4^3 + 5^3)$. Riguardo

---

(1) Mem. cit., p. 29.

(2) *Le nombre nuptial dans Platon* (Revue philosophique, T. I, 1876, p. 170 e seg.).

(3) *Revue philosophique,* T. XV, 1883, p. 568. V. anche l'articolo *Y a-t-il un nombre géometrique de Platon?* (Revue des études grecques, 1903), ove il precedente è detto " juvenile tentamen „.

(4) *Le nombre géomttrique de Platon. Interprétation nouvelle.* Paris, 1881.

a tale soluzione noteremo che, mentre il TANNERY (1), quantunque dissentisse dal DUPUIS in alcuni punti secondari, ammise essere dessa la più plausibile, non soltanto fra quelle proposte prima, ma anche, fra quelle che si possono sperare, un altro giudice non meno competente (2) la dichiarò assolutamente inammissibile dal punto di vista filologico ed in conseguenza sentenziò che, anche dopo gli sforzi del DUPUIS, il passo in questione resta avvolto in un'oscurità impenetrabile.

Sembra che il DUPUIS stesso abbia riconosciuto, in parte almeno, la giustezza degli appunti rivoltigli, giacchè abbandonò la sua proposta e suggerì invece (3) come numero nuziale il 760000, numero che dà luogo alle relazioni seguenti:

$$760000 = 100 \times 100 + 100 \{ 27 \times 100 + 48 \times 100 \{ =$$
$$= \left(5 + \frac{4}{3}\right) \times 3 \times 4 \times 10000 = \left(5 + \frac{4}{3}\right) \times$$
$$\times 3 \times 1000\,(4 + 8 + 12 + 16).$$

Senza far eco alle lodi entusiastiche che vennero tributate a questa nuova proposta da chi (4) proclamò essere le tenebre state finalmente dissipate dal DUPUIS, aggiungendo che questi ha trionfato su un testo riputato inintelligibile e che pertanto è finalmente risoluto un problema che ha tanto esercitata la sagacia di commentatori e traduttori, preferiamo asserire, con P. TANNERY (5), che con i lavori testè citati del DUPUIS il problema di determinare il numero di PLATONE ricevette delle dilucidazioni parziali, ma definitive. Tale giudizio è condiviso in gran parte da

---

(1) *Revue philosophique*, T. XIII, 1881, p. 210.

(2) J. L. HEIBERG in *Revue critique d'histoire et de littérature* (Nouv. Série, T. XII, 1881, p. 28.

(3) *Le nombre géométrique de Platon. Seconde interprétation* (Paris, 1882) e *Le nombre de Platon. Mémoire définitif*, in appendice alla edizione già citata di TEONE SMIRNEO.

(4) P. A. BERTAULD nel *Bull. di Bibl. e storia delle Scienze matem. e fisiche*, T. XVIII, 1885, p. 441-450.

(5) *Revue philosophique*, T. XV, 1883, p. 573.

F. HULTSCH (1), il quale, però, dissentendo in certi punti dall'interpretazione data dal DUPUIS, ritenne che il numero nuziale debba essere assai grande ed esprimibile tanto come un quadrato, quanto come un rettangolo; in conseguenza, ed in base ad altre considerazioni, suggerì come numero di PLATONE

$$12960000 = \overline{3600}^2 = \left(700\sqrt{\frac{48}{7}}\right)\left(2700\sqrt{\frac{48}{7}}\right) \text{ (2).}$$

Alla medesima conclusione arrivò, per via differente J. ADAM (3), il quale si giovò degli studi precedenti e si fondò sulle identità

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 \quad , \quad [(3 + 4 + 5)\,5\,]^4 = \overline{3600}^2 = 4800 \times 2700\,;$$

siccome nulla autorizza considerare che PLATONE le conoscesse, così, come osserva M. CANTOR (4), manca ancora qualche cosa perchè si possa ammettere coll' ADAM che quella da lui proposta sia la soluzione completa del problema di determinare il numero di PLATONE.

Chiuderemo questa rassegna notando che, anteriormente al lavoro dell'ADAM, ma dopo quello di F. HULTSCH, furono proposte due nuove soluzioni, una in Inghilterra e l'altra in Germania.

Quella (5) ha per base una interpretazione delle riferite frasi di PLATONE che si desume dagli scoli di ALESSANDRO d'Afrodisia alla *Metafisica* di ARISTOTELE, ed ha per con-

---

(1) *Die geometrische Zahl in Platon's VIII Buch von Staat* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. XXVII, 1882, Hist.-lit. Abth., p. 41 e seg.). Cfr. P. TANNERY in *Revue philosophique,* T. XV, p. 567-573 e J. L. HEIBERG in *Philologus,* T. XLIII, 1884, p. 473.

(2) *The Plato's number: its solution and significance.* London, 1891.

(3) V. anche lo scritto dello stesso HULTSCH *De numero Platonis a Proclo enarr. Disputatio* pubblicato dallo SCHNELL in *Procli Commentariorum in Reimp. Platonis partes ineditae.*

(4) Zeitschr. f. Mathem. und Phys., T. XXXVII, 1892, Hist.-lit. Abth., p. 55.

(5) Gow, " *Platos* „ *number* in The Academy, 1882, p. 322.

clusione che il numero di PLATONE è

$$3600 = 3^2 \times 4^2 \times 5^2 = 9 \times 16 \times 25 .$$

L'altra (1) ha come su fondamento dottrinale la seguente quadruplice decomposizione del numero 100:

$$9 + 9 + 9 + 9 + 16 + 16 + 16 + 16 \ , \ 9 + 27 + 64 \ , \ 6^2 + 8^2 \ , \ 2 \times 50 ;$$

secondo essa il numero cercato sarebbe 1000.

L'indole, matematica non filosofica o filologica, dell'opera presente, ci sconsiglia di discutere le soluzioni proposte. Soltanto, come chiusa, diamo l'elenco dei sedici numeri che, per quanto ci consta, vennero suggeriti come rispondenti alle condizioni imposte; eccoli in ordine di grandezza crescente: 50, 829, 864, 1000, 1728, 2700, 3600, 5040, 7500, 8128, 10000, 20736, 21600, 46656, 760000, 12960000. Mentre questi sono di valori assai differenti fra loro, le argomentazioni us ate per dimostrare che soddisfanno alle condizioni del problema hanno comune l'ipotesi che PLATONE disponesse di vaste cognizioni aritmetiche e di una notevole famigliarità con i numeri della serie naturale, cose l'una e l'altra attestate dalle immortali sue opere.

---

(1) DEMME, *Die Platonische Zahl* (Zeitschr. f. Math. und Phys., T. XXXII, 1887, Hist-lit. Abth., p. 81 e 121).

INDICE ALFABETICO DEI NOMI

AVVERTENZA. — I numeri stampati in carattere grassetto indicano i passi più importanti relativi al corrispondente scrittore.

A

Abulfaragio 847.
Abû 'l Wâfa 338, 339, 427, 522, 599, 609, 665.
Academo 108, 815.
Achille, eroe d'Omero 59.
Achille Tazio 270.
Adam 951.
Adrasto 467, 458, 469, 652.
Adriano 723.
Agamennone 740.
Aganis 596, 647.
Agatarco 64, 104.
Agesilao 138.
Aguillon 549.
Ahmed ben Musas 353.
Ahmes **168-172.**
Aldrich 436.
d'Alembert 464, 550.
Alessandro d'Afrodisia 93, 95, 96, 190, 650, 827, 828.
Alessandro d'Etolia 467.
Alessandro Magno 3, 131, 150, 183, 184, 187, 461, 556, 922.
Alessandro Severo 632.
Alhadschdschadsch 597.
Alhazen 250, 571.
Alkarchi 885.
Al-Kindi 192, 970.
Allman 4, 5, 7, 11, 16, 17, 19, 22, 31, 33, 34, 37, 38, 43, 46, 50, 54, 64, 65, 66, 69, 74, 75, 78, 79, 98, 101, 104, 113, 126, 127, 138, 139, 141. 145, 149, 153, 155, 160, 162, 165, 208, 293, 801, 813.
Al-Narizii (*vulgo* Anarizio) 593, 596, 597, 599, 600, 642, 708.
Amari 570.
Amasi 21.
Ameristo 8, 709.
Amfinomo 709.
Amfione 927.
Amicla 9, 130, 138, 709.
Ammirato Eugenio 569, 570.
Ammonio Sacca 704, 713, 714, 715, 819, 828.
Amru ben Alas 186.
Amthor 935, 936.
Anacarsi 12.
Anassagora 9, **63-64,** 104, 165, 452, 455, 456, 560, 709.
Anassimandro **23-24,** 26, 27, 43, 64, 453, 454, 456, 467, 477.
Anassimene **24,** 27, 64, 454, 467.
Anatolio Alessandrino vescovo di Laodicea 605, 768, 832, 838, 840, 848.
Anderson 259, 391, 397.
Andromico II 763.
Androne 709.
Anfinomo 263.
Antemio di Tralle 398, 414, 415, 715.

Antifonte 88, 91, 92, **94-96**, 133, 190, 454, 715.
Antinos 728.
Antiochio Epifanio 364.
Anton 54.
Antonino Pio 847.
Apelt 473.
Apollo 72.
Apollodoro 13, 16.
Apollonio Pergeo 7, 47, 68, 128, 134, 154, 156, 157, 158, 159, 165, 177, 178, 179, 193, 194, 233, 234, 254, 267, 270, 271, 278, 282, 312, 315, 319, 339, **350-402**, 403, 405, 416, 421, 424, 425, 434, 435, 436, 437, 439, 440, 441, 442, 462, 512, 517, 525, 528, 546, 556, 575, 578, 586, 635, 637, 642, 644, 657, 667, 682, 683, 686, 687, 688, 689, 690, 698, 702, 703, 705, 709, 715, 716, 717, 718, 720, 721, 722, 724, 725, 726, 727, 743, **758-759**, 773, 775, 776, 797, 816, 829, 841, 846, 849.
Apollonio Astronomo 352.
Apollonio da Tiana 352.
Apollonio Carpentiere 192, 193.
Aposedonio 596.
Apulejo 22, 565, 819.
Arago 183.
Arato da Soli 281, 441, 499, 502.
Arcadio 715.
Arcesilao Pitaneo 499.
Archelao 456.
Archibald 686.
Archimede 23, 66, 92, 95, 99, 123, 143, 144, 145, 146, 149, 151, 163, 165, 188, 192, 193, 237, 238, 265, 266, **277-341**, 350, 356, 357, 361, 373, 378, 380, 381, 396, 398, 399, 403, 408, 410, 411, 413, 419, 421, 435, 453, 462, 467, **388-491**, 494, 509, 516, 517, 528, 530, 535, 538, 553, 554, 555, 557, 564, 565, 566, **571-574**, 578, 583, 585, 586, 603, 609, 611, 612, 613, 614, 623, 631, 632, 635, 636, 637, 642, 646, 648, 657, 661, 667, 668, 669, 672, 675, 676, 677, 678, 683, 690, 694, 695, 696, 709, 710, 715, 716, 717, 718, 719, 721, 722, 729, 734, 743, **754-758**, 759, 764, 766, 768, 783, 784, 816, 828, 829, 845, 850, 322, **928-929**, **932-949**, 941, 970.
Archita Tarantino 9, 36, 37, 77, **98-105**, 108, 112, 122, 123, 124, 137, 138, 147, 235, 242, 266, 267, 342, 416, 447, 467, 473, 519, 675, 709, 715, 717, 793, 794, 799, 800, 313, 831.
Archita Latino 801.
Argirio Isacco 763.
Aristarco da Samo 461, **480-488**, 509, 517, 535, 557, 563, 657, 777, 783.
Aristeo il Giovane 157, 357, 651.
Aristeo il Vecchio **157-160**, 174-179, 197, 149, 267, 270, 287, 387, 416, 436, 657, 164, 665, 676, 681, 682, 683, 693.
Aristide Quintiliano 814.
Aristofane 165, 743, 744, 747.
Aristosseno 469, 476.
Aristotele 4, 7, 21, 30, 33, 51, 57, 66, 74, 78, 79, 92, 93, 94, 95, 114, **131-136**, 164, 165, 166, 168, 184, 185, 189, 201, 217, 218, 244, 373, 421, 467, 471, 476, 477, 484, 489, 490, 495, 499, 549, 557, 558, 568, 574, 577, 705, 709, 713, 715, 734, 742, 753, 793, 794, 811, 829, 947.
Aristotero 499.
Artavasde *vedi* Rabda.
Artemone 363.
Asamites (o Asahmithes) 506.
Asclepio da Tralle 819.
Ast 129, 818, 832.
Ateneo da Cizico 10, 130, 709.
Attalo (amico d'Apollonio) 372, 375, 380, 382.
Attalo da Rodi 502.
Attalo I 351.
August 42, 52, 120.
Augusto imperatore 186, 467, 580, 928.
Aureliano 601.
Auria 502.
Autolico Pitaneo 476, 495, 498, **499-501**, 502, 505, 508, 657, 181, 734.
Ayer **634-635**.

B

Bachet de Méziriac 847, 852, 872, 799, 913, 919, 921, 943.
Bahaskâra 889.
Baillet 171, 752, 467, 777.

Bailly 450, 452, 491.
Baldi 22, 30, 31, 98, 130, 583, 723.
Ball (Rouse) 236.
Balsam 351, 855, 372, 378.
Baltzer 306, 335, 386.
Barbieri M. 21.
Barlaam **942**.
Barozzi F. 648, 707, 948.
Barrow 212, 325, 332.
Basilide da Tiro 270.
Bassi 5.
Batteux 19.
Baulliaud 305.
Beaudeux 331, 410.
Beda Venerabile 746.
Belger 398, 414, 415.
Bellavitis 666.
Benecke 121, 122.
Berenice 192.
Berger 343.
Bergh 837.
Bernard 387, 388, 389.
Bernhard 355.
Bernhardy 342, 343, 348.
Bernoulli 417, 474, 534.
Bertauld 950.
Bertini 214.
Besso 485.
Besthorn 198.
Bettazzi 295.
Biancani 132, 134.
Biernatzki 49.
Biot 970.
Bitone 564, 587.
Björnbo 509, 510, 511, 512, 513, 515, 516, 547, 565, 596, 970.
Blass 69, 109, 116, 280, 497, 650, 723.
Bobynin 776, 783.
Böckh 149, 479, 761, 804, 805.
Boeto 649.
Boezio 34, 99, 714, 792, 794, 799, 801, 802, 803. 804, 805, 806, 813, 819, 821, 841.
Boissonade 843.
Boll 523.
Bombelli 947, 849, 916.
Boncompagni 6, 250, 287, 349, 419, 567, 570, 601, 827.
Bonghi 51.
Bonjour 649.
Borelli 328, 354.
Bossut 266.
Bouillaud 466, 807.
Brahe Ticone 194, 458, 461.
Bramis 948.
Brandes 649.
Brandis 474.
von Braunmühl 454, 549.
Bressieu 527.
Breton (de Champ) 254, 260, 262.
Bretschneider 4, 5, 7, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 31, 38, 47, 49, 54, 63, 64, 69, 74, 75, 78, 79, 94, 96, 98, 101, 138, 139, **141**, 142, 149, 153, 155, 156, 159, 164, 270, 404, 411, 416, 503, 723.
Brill 386.
Brissone **96-98**, 133, 190, 941.
Bruges (Roberto da) 547.
Brugham 259.
Brugsch 860.
Brunet de Presle 497.
Bruno (F.) 301.
Buchbinder 245, 254.
Buffon 454.
Bulliaud 259, 260.
Burja 133.
Burrow 440.
Buteo 197.
Buzengeiber 665.

C

Cadmo 5.
Calippo 467, 476, 479.
Callimaco 342, 343.
Cambise 138.
Camerer 212, 393, 707, 759.
Campano 194, 197.
Canovai 757.
Cantor G. 57.
Cantor M. 4, 5, 11, 14, 16, 17, 22, 24, 32, 41, 48, 62, 65, 69, 71, 95, 98, 99, 101, 109, 113, 121, 134, 139, 145, 155, 168, 169, 171, 191, 194, 199, 210, 244, 250, 252, 268, 270, 291, 301, 332, 340, 352, 376, 386, 392, 404, 406, 407, 414, 416, 419, 433, 435, 438, 466, 496, 522, 556, 557, 584, 590, 596, 599, 605, 609, 638, 649, 658, 659, 688, 722, 748, 749, 754, 761, 762, 778, 783, 804, 805, 807, 827, 832, 837, 858, 877, 880, 881, 885, 889, 892, 926, 943, 951.

Capella (Marziano) 746.
Capellina D. 714.
Cardano 638, 948.
Carmandro 394, 403, 441, 442.
Carneade 363.
Carnot 259, 306, 324, 534.
Carpo 694, 709, 829.
Carra de Vaux 353, 574, 575, 578, 584.
Cassini 418.
Castillon 688.
Catalan 220.
Catullo 281.
Cauchy 497.
Caussin 570.
Cavalieri 317, 323, 328, 564.
Caverni 292.
Censorino 478, 479.
Cesàro 221.
Ceulen 319.
Chaignet 27.
Chasles 17, 54, 65, 113, 158, 159, 223, 250, 255, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 270, 315, 360, 375, 386, 391, 416, 424, 432, 433, 434, 489, 513, 518, 534, 586, 648, 658, 666, 671, 684, 685, 688, 689, 695, 723, 726, 727, 760, 802, 803.
Christensen 199, 221.
Cicerone 24, 108, 453, 491, 583, 649, 670, 934, 947.
Ciro, amico di C. Tolomeo 548.
Ciro, amico di Sereno 724, 757.
Ciziceno 10.
Clairaut 207, 666.
Clausen 85.
Clavio 48, 194, 199, 506, 581, 707.
Cleonte Stoico 461.
Clebsch 205.
Cleomede 491.
Clifford 133, 205.
Clinia 130.
Codro 107.
Cognetti 30.
Cohen 109.
Colebrooke 850, 880, 916.
de Comberousse 679.
Commandino 194, 251. 254, 292, 354, 394, 432, 480, 485, 547, 548, 549, 656, 707, 724.
Commodo imperatore 468.
Comte 443, 456.
Conone da Samo 281, 301, 372, 373, 403, 657, 669, 934, 935.
Copernico 460, 525, 526.
Cossali 221, 250. 846, 847, 852, 854, 880, 889, 911, 916, 917.
Costantino imperatore 186, 744, 921.
Costantino VII 604.
Cramer 61, 62, 688.
Crasisto 709.
Cremona 264, 335.
Creso 12.
Crisippo 137, 709.
Cronert 363.
Ctesibio 478, 583, 646, 709.
Curtze 250, 340, 410, 519, 575, 596, 599, 605, 647. 713, 785, 789.
Curtius 6, 13, 24, 31, 64, 98, 107, 138, 344.
Curzio Trajano 292.

D

Damascio 277, 339, 713, 843.
Damaso 11.
Damiano 566, 567, 569.
Dante 96, 417, 458, 478, 615, 942.
Danti 560, 565, 566, 567.
Dario II 138.
Dasipodio 601, 608, 942.
Debeaune (*vulgo* de Beaune) 370.
Decker 11, 14, 16.
Dedalo 203.
Dee 251, 426,
Delambre 450, 480, 491, 501, 502, 503, 513, 518, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 547, 548, 549, 757, 760, 761, 767.
Demetrio Alessandrino 657, 675.
Demetrio Falereo 185.
Demetrio Sotero 364.
Demme 121, 171, 321, 814, 952.
Democrito 10, **65-67**, 69, 104, 130, 143, 155, 165, 212, 456.
Demostene 467, 637.
Dercillide 467.
Desargues 431.
Descartes 335, 368, 375, 386, 425, 564, 571, 637, 683, 719.
Dicearco 467, 489.
Didot 129, 949.
Diels 13, 57, 79, 452, 583, 584, 705.

Diesterweg 391.
Dilling 4, 54. 62, 68, 105, 142, 281, 301, 416.
Dinostrato 70, 138, **160-164**, 318, 657, 670, 671, 709.
Diochasimus 696.
Diocle 300, **410-415**, 416, 418, 662, 715, 717, 719.
Diocleziano 658.
Diodoro astronomo 925.
Diodoro geometra 405, 670, 713, 714.
Diodoro Siculo 15, 168, 282.
Diofante 846.
Diofanto 265, 270, 277, 505, 111, 556, 705, 752, 762, 765, 767, 816, 818, 824, 844, **845-919**, 920, 921, 925, 926, 927, 933, 941, 943, 945.
Diogene d'Apollonia 456.
Diogene Babilonese 363.
Diogene Laerzio 7, 11, 16, 21, 22, 23, 27, 31, 54, 65, 102, 129, 130. 132, 137, 453, 499, 675, 815
Dionigi 601.
Dionisidoro 613, 715, 719, 720.
Dionisidoro da Cauno 363, 364, 720.
Dionisio (amico di Diofanto) 855, 916.
Dodgson 206.
Domiziano 510.
Domnino da Larissa **843-844**.
Dositeo 281, 301, 314, 403, 934.
Drieberg 802.
Dühring 285.
Duhem 573.
Dupin 558.
Dupuis 111, 121, 833, 949, 950, 951.

E

Ebeling 109.
Eberhard 940.
Ecfanto 460.
Echelles (Abramo d') 354.
Eibe 198.
Eisemann 259, 657.
Eisenlohr 168, 169, 172, 931.
Elicone 138.
Eliodoro 560, 566, 667, 569, 843.
Elisabetta d'Inghilterra 251.
Empedocle 452, 456.
Enea 709.
Eneström 199, 432, 584.
Engel 551.
Enriques 86.
Epicuro 364, 455.
Epifanio 552.
Eraclide Pontico 282, 287, 288, 455, 461, 715.
Eraclito d'Efeso 32, 64, 455, 657, 686.
Eratostene 76, 77, 78, 99, 112, 126, 136, 146, 151, 184, 189, 281, 326, **342-349**, 387, 403, 467, 489, 491, 522, 544, 553, 636, 649, 652, 653, 657, 662, 683, 709, 715, 717, 810, 816, 821, 831, 936.
Ericinio 657, 664.
Ermodoro 657, 682, 694.
Ermotimo 10, 128, 188, 197, 393, 116, 709.
Erodiano 749, 753.
Erodoro 96.
Erodoto 168, 743, 748.
Erofilo 467.
Eronas 715, 716.
Erone Alessandrino 22, 123, 144, 153, 168, 192, 202, 244, 252, 277, 278, 285, 322, 325, 334, 337, 389, 401, 416, 422, 523, 528, 550, 564, 567, 568, 572, **574-579**, **580-629**, 631, 632, 634, 635, 636, 642, 646, 648, 654, 657, 662, 664, 694, 695, 698, 706, 708, 709, 715. 717, 718, 719, 720, 762, 763, 765, 783, 785, **789-790**, 791, 824, 858, 859, 920, 933, 943, 970.
Erone da Costantinopoli 706.
Erone il Giovane 582, **630-632**.
Erone, maestro a Proclo 582.
Erone III 630, 637.
Eschilo 64.
Eschine 137.
Esiodo 451, 478, 707.
Euclide Alessandrino 7, 10, 18, 19, 38, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 66, 79, 80, 91, 95, 106, 107, 114, 127, 130, 132, 135, 136, 139, 141, 142, 144, 145, 149, 150, 157, 158, 164, 165, 179, 184, **188-268**, 269, 270, 278, 279, 281, 285, 293, 316, 318, 323, 348, 350, 351, 353, 356, 357, 358, 373, 375, 387, 388, 399, 401, 403, 416, 419, 421, 425, 426, 427, 431, 432, 433,

447, 484, 485, 494, 495, 496, 798, 499, **501-504**, 505, 506, 507, 508, 511, 512, 513, 516, 517, 518, 521, 526, 550, 551, **557-564**, 565, 566, 569, 574, 575, 581, 585, 586, 587, 589, 590, 596, 597, 600, 606, 607, 608, 612, 613, 615, 632, 635, 636, 642, 643, 644, 646, 651, 653, 657, 658, 664, 666, 667, 679, 680, 681, 682, 683, 688, 690, 693, 694, 198, 699, 700, 701, 703, 705, 707, 709, 710, 711, 712, 713, 717, 721, 728, 729, 734, 759, 766, 811, 813, 815, 818, 819, 820, 821, 827, 844, 846, 849, 854, 916, 917, 922, 926, 931, 942, 970.
Euclide Ateniese 166.
Euclide Megarese 193.
Eudemo da Pergamo 403.
Eudemo da Rodi 7, 16, 17, 18, 20, 42, 47, 48, 50, 62, 65, 78, 79, 80, 95, 99, 103, 136, 149, 234, 351, 357, 363, 364, 372, 456, 459, 467, 469, 642, 703, 708, 709, 715, 717.
Eudosso da Cnido 9, 10, 37, 77, 107, 122, 128, **636-148**, 212, 213, 236, 237, 239, 242, 294, 420, 467, **470-475**, 476, 478, 479, 480, 489, 496, 502, 519, 558, 564, 583, 709, 715, 717.
Eufranore 831.
Eulero 335, 393, 511, 656, 891, 913, 919.
Euripide 76, 166.
Euristo 108.
Eutocio 7, 97, 92, 99, 124, 126, 146, 149, 153, 154, 156, 267, 278, 282, 285, 286, 300, 319, 321, 339, 350, 356, 357, 373, 398, 399, 408, 411, 414, 582, 642, 648, **715-721**, 423, 752, 758, 763, 766, 768, 769, 771.
Evandro 467.

F

Fabricius 61, 233, 505, 819.
Fagnano 427.
Fantasia 812.
Favaro 121, 195, 215, 222, 250, 283, 327, 802, 970.
Federoff 271.
Ferecide 452.
Fergola Nicola 369, 393, 397, 534, 688.
Fermat Pietro 260, 323, 369, 393, 394, 396, 427, 431, 432, 440, 441, 442, 518, 637, 686, 849, 852, 853, 876, 892, 911, 913, 914, 915, 919, 945.
Fermat Samuele 852.
Ferrai 121.
Ferrari Lodovico 849.
Ferrari Sante 27.
Ferri 29.
Ferrucci 537.
Festa 99, 839.
Fidia 281, 480, 489.
Filippo geometra 10, 130, 709.
Filippo di Macedonia 131.
Filippo Opunzio 464, 465.
Filolao 30, 108, 128, 459, 460, 465, 467, 709, 793, 798, 799, 830.
Filone Alessandrino 401, 709.
Filone Bizantino 657.
Filone da Gadara 319, 717, 948.
Filone Tianeo 657, 675, 715.
Filonide 363, 419.
Finger 4, 23, 54, 62, 63.
Fink 28.
Flauti 103, 195, 199, 215, 246, 247, 397, 799.
Fleischer 86.
Flügel 191.
Förster 281.
Fontenelle 435.
Fortia d'Urban 480.
Foster 328.
Fracastoro 477.
Freund 921.
Friedlein 4, 6, 8, 52, 60, 121, 142, 269, 270, 277, 601, 604, 649, 704, 751, 758, 759, 761, 805, 942.
Fries 948.
Frisch 238, 334.
Frontera 57.
Fuss 393.

G

del Gaizo 354.
Galileo 149, 222, 436, 526, 574, 714.
Galois 497.
Gambioli 286.
Gartz 198, 427.
Gauss 551, 710, 934.

de Gelder 466.
Gelone 149, 181, 488, 757.
Gelzer 13.
Gemino 18, 130, 154, 156, 285, 356, 411, 464, 478, 596, 601, **643-651**, 657, 707, 708, 709, 710, 715, 768, 933.
Gerberto (Papa Silvestro II) 801, 803, 804, 806.
Gergonne 370, 393.
Gerhardt 657, 659, 664, 767.
Gerken 6, 80, 708.
Gerling 57.
Gerolamo da Rodi 21.
Gherardo da Cremona 524, 596, 597.
Ghetaldi (Marino) 392, 397, 438, 439.
Giamblico 30, 33. 36, 99, 339, 705, 707, 748, 762, 774, 792, 493, 794, 797, 807, 808, 819, 829, 831, **838-842**, 844, 847, 848, 918, 942.
Giordano (Annibale) 688.
Giorgio, amico di Rabda 744.
Giovanni (Filopone) d' Alessandria 74, 95, 96, 819.
Girard 259, 854.
Giuliano l'Apostata 847.
Giulio Cesare 168, 580, 670.
Giustiniano imperatore 583, 714, 716.
Gladisch 29.
Glaischer 661.
Glauco 76.
Goblet d'Alviella 806.
Görland 133.
Goodspeed Johnson 634.
Gorgia sofista 67.
Govi 570.
Gow 70, 196, 221, 222, 268, 281, 496, 682, 749, 453, 854, 761, 819, 858, 877, 951.
Grassmann 710.
Graves 243, 328.
Gregory 199, 203, 214, 251, 355, 502, 559, 565, 722.
Grozio 746.
Gruson 393, 443.
Grynaeus 707.
Günther S. 40, 48, 171, 235, 321, 380, 580, 661, 754, 940, 942, 948.
Guldin 684.
Gudermann 515.

H

Haas 557.
Haase 583.
Hachette 443.
van den Hagen 658.
Haggag ibn Jusuf 197.
Halley 254, 355, 370, 384, 388, 391, 436, 437, 438, 510, 515, 716, 724, 725.
Halliwell 804.
Halma 524, 549, 649.
Hamilton 243, 558.
Hankel 17, 32, 38, 40, 48, 49, 63, 69, 109, 113, 145, 203, 213, 214, 216, 218, 244, 247, 254, 391, 743, 750, 812, 850, 854, 860, 877, 880, 911.
Hardy 245, 246, 269.
Harless 233, 843.
Hartmann 707.
Hârum-Arraschid 524.
Hauber 707.
Hauck 235.
Heath 52, 53, 133, 198, 283, 332, 355, 448, 480, 576, 689, 693, 846, 852, 853, 858, 859, 913.
Heiberg 5, 6, 7, 30, 66, 69, 76, 79, 80, 93, 96, 121, 128, 132, 135, 141, 150, 158, 190, 194, 196, 197, 198, 199, 204, 206, 214, 224, 231, 233, 235, 239, 244, 247, 252, 254, 258, 262, 963, 266, 267, 271, 277, 280, 281, 283, 284, 291, 292, 293, 302, 306, 307, 312, 316, 318, 819, 321, 323, 325, 339, 340, 344, 353, 356, 357, 399, 415, 488, 495, 496, 502, 504, 511, 524, 548, 559, 565, 605, 701, 707, 708, 712, 716, 717, 723, 724, 725, 727, 743, 751, 758, 762, 766, 767, 786, 789, 805, 838, 852, 934, 941, 942, 943, 950, 970.
Heilbronner 132, 751, 921.
Heilermann 321.
Henning 340,
Henrion 581.
Henry 121, 260, 340, 767.
Hérigone 391, 438.
Hermann G. 934.
Hermann J. 534.
Heronides 596, 716.
Herundes 596, 716.

Hilal ben Abi Hilal 353.
Hilderich 649.
Hiller 466.
Hoche 555, 818, 846.
Hoffmann 121.
Holtzmann 852, 942.
Hoppe 584, 970.
Horseley 397, 439, 440.
de l'Hospital 305, 348.
Housel 356, 366, 371, 386.
Hugo L. 13, 40.
Hultsch 5, 4, 45, 52, 101, 188, 190, 254, 255, 258, 159, 265, 267, 283, 286, 295, 301, 306, 313, 317, 318, 321, 329, 330, 333, 336, 344, 346, 351, 379, 419, 448, 461, 489, 491, 495, 496, 499, 506, 523, 567, 581, 584, 592, 604, 648, 657, 658, 659, 716, 723, 743, 758, 762, 766, 767, 779, 783, 795, 798, 814, 834, 840, 841, 843, 848, 930, 935, 951.
Humboldt 456, 458, 803.
Hunrath 321.
Hunziker 949.
Huygens 292, 301, 379, 397, 407, 408, 439, 800, 915, 919.

I

Ibico 467.
Ibn Abî Jacqub an Nadîm 191.
Iceta 460.
Ideler 11, 14, 61, 107, 137, 470, 477, 479, 631, 665.
Ipazia 548, 552, **595-596**, 705, 720, 723.
Ipparco 270, 448, 449, 458, 462, 467, 468, 470, 471, 477, 479, 487, 497, 513, **521-523**, 526, 528, 543, 544, 548, 558, 587, 609. 649, 657, 917, 945.
Ippaso 33, 36, 37, 831.
Ippia d'Elea 9, 10, **67-72**, 160, 164, 165, 637, 670, 671, 676.
Ippocrate da Chio 9, 46, 63, **74-94**, 103, 126, 133, 145, 155, 165, 166, 190, 197, 237, 243, 288, 306, 333, 396, 709, 715, 827.
Ippocrate da Cos 145, 709.
Ippolito (Sant') 795, 841.
Ipsicle Alessandrino 259, 160, 192, 269, 270, 271, 272, 276, 277, 293, 397, 403, **504-505**, 512, 528, 765, 816, 824, 846, 917.
Ishâq ibn Hunein 197.
Isidoro d'Alessandria 276, 277, 713.
Isidoro da Mileto 153, 276, 277, 715, 716.
Isidoro da Siviglia 819.
de l'Isle (Romé) 337.
Isocrate 168.

J

Jacobi 456, 550, 607, 656, 852, 912, 945, 946.
Jacobs 921.
Jahn 189.
Jerio 657, 660, 661.
Jerone 281, 928.
Jolao 363.
de Jonquières 335, 349.
Junge 52, 190, 970.

K

Kädi-zâdeh Ar-Rûmi 191.
Kästner 45, 199, 665, 942.
Kant 28, 454.
Keill 199.
Kempe 204.
Keplero 165, 194, 222, 235, 317 334, 370, 526.
Kerber 790.
Klamroth 193, 197.
Klimpert 812.
Klingestierna 432.
Kluge 269, 277.
Knaack 342, 502.
Knoche 33, 127, 142, 708, 710, 712.
Königsberger 607, 656, 852, 946.
Kronecker 224, 710.
Krümmbiegel 905, 936.
Künnsberg 137, 139, 144, 145 198, 471, 473.
Kummer 216, 558.
Kutta 697.

L

Labosne 940.
Lachmann 20.
Lacroix 86.
Lagrange 294, 573.
de la Hire 940.
Landau 86.
Laplace 454.
Laso 467.
Lassen 940.
Lasswitz 295.
Lawson 259, 391, 393, 432.
Leadbetter 548.
Lebesgue 220.
Legendre 214, 245 349, 913.
Legrand 572.
Leibniz 323, 341, 350, 421, 939.
Leicester (Conte di) 251.
Leiste 933.
Leodamante 9, 113, **126**, 709.
Leonardo da Pisa 250, 287, 349, 419.
Leonardo da Vinci 28, 339, 609.
Leonas 706.
Leone Bizantino **941**.
Leone, discepolo di Platone 122, **126-127**, 166, 147, 243, 719.
Leonelli 92.
Leopardi 455.
Leptimio **497-498**.
Leslie 262, 393, 432, 443.
Lessing 933.
Letronne 449, 497, 582, 631.
Leucippo 65, 360.
Lhuillier 259.
Liborio 847.
Libri 281, 282, 305, 354, 489, 803.
Lindemann 40, 205, 323, 338.
Liouville 497.
Lisania 342.
Lisia 467.
de Luca 31.
Lucas 220, 221.
Luciano 819.
Lühmann 391.

M

Maass 502.
Mach 286.
Macrì 510.
Maerker 710.
Maffei (Scipione) 29.
Magno 715, 716,
Mahler 173.
Mahly 70.
Mai 291, 414.
Majer 707, 710.
Malfatti 688.
Malus 558.
Mamerco 8, 22, 68, 70.
Mamertino 8.
Mamerzio 8.
Mandriato 22.
Mangini 194.
Manitius 504, 524, 649, 650, 651.
Mannert 802, 804.
Mansion 145, 205, 420.
Manzoni (Alessandro) 363.
Maometto 801.
Maometto da Bagdad 251.
Marcella 706.
Marcello 281, 282, 758.
Marco Aurelio 641.
Marie 292, 325, 347, 425.
Marino da Neapoli 246, 247, 269, 658, 699, 706, **712-713**, 722.
Marre 50.
Martin 13, 149, 270, 277, 449, 450, 451, 456, 459, 460, 461, 462, 463, 466, 468, 471, 476, 499, 560, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 582, 583, 484, 586, 592, 604, 630, 631, 632, 723, 747, 802, 804, 805, 814, 818, 948.
Martini 5, 6.
Mascheroni 698.
Maslem 547.
Maspero 452.
Matthiessen 215.
Maurolico 219, 254, 434, 435, 502, 511, 511, 513, 515.
Mazzuchelli 99, 282, 283, 340, 933, 942.
Megezio 657.
Meier (R.) 584, 601.
Mela (Pomponio) 801.
Melisso 56, 96.
Memo 353, 354.
Menecmo 9, 10, 77, 138, **149-157**, 164, 166, 189, 416, 467, 475, 504, 657, 709, 715, 717.
Mencemo da Sicione 150.
Menelao 264, 494, **509-520**, 526, 527, 528, 531, 541, 542, 543, 544, 554, 657, 675, 696, 709.

Menge 198, 245, 246, 722.
Menius 63.
Menone 115, 120, 122.
Mentelio 504.
Mercatore 550.
Meri 8.
Mersenne 518, 948.
Metone 165, 479.
Metrodoro da Bisanzio 921.
Metrodoro da Scepsi 921.
Mikami 747.
Milhaud 14.
Mino 76.
Mionide 831.
Mnesarco 31.
Möbius 476.
de Mörbecke 291, 548, 568.
Molk 224.
Mollweide 934.
Montferrier 464, 658.
Monti (Vincenzo) 923.
Montucla 17. 22, 23, 54, 62, 64, 68, 74, 78, 86, 94, 103, 113, 165, 253, 266, 270, 301, 344, 347, 370, 375, 400, 404, 410, 411, 439, 450, 552, 577, 584, 648, 684, 696, 712, 723, 753, 802, 804, 306, 807, 849, 926, 929.
Monge 103, 168.
Morehead 349.
Morelli 548.
de Morgan 222, 236, 268, 832, 847.
Moscopulo 744, **939-941**.
Mullach 136.
Müller F. 216, 416,
Müller G. 6, 13.
Müller I. H. T. 216.
Müller O. 65.
Munro 947.
Mûsâs 352, 353.
Mydorge 158.

N

Naber 35.
Nagl 749.
Napoleone 111.
Narducci 21, 31, 98, 570.
Nassir-ed-Dîn 191, 197.
Natorp 10.
Nauck 705.
Naucrate 191, 192, 358, 403.
Navarrus 38.
Nectanabi 138.
Nemorario (Giordano) 250, 609.
Neoclide 9, 126, 709.
Nepero 970.
Nerone imperatore 16, 468, 847.
Nesselmann 37, 191, 221, 259, 270, 317, 468, 556, 649, 748, 751, 753, 758, 759, 761, 803, 804, 807, 808, 818, 846, 847, 849, 850, 851, 852, 858, 872, 877, 880, 881, 915, 916, 634.
Newcomb 14.
Newton 248, 323, 331, 339, 341, 367, 368, 410, 421, 439, 606, 760.
Nicomaco Geraseno 36, 348, 403, 404, 584, 657, 715, 716, 748, 811, **818-832**, 833, 838, 839, 846, 847, 934, 945.
Nicomede 68, 70, 398, **404-410**, 416, 418, 657, 662, 670, 676, 709, 715, 829.
Nicone 665.
Nicotele 372, 403.
Niebuhr 761.
Nilosseno 21.
Nix 355, 574.
Nizze 283, 301, 480, 506, 722, 727.
Nokk 480.
Nöther 386.
de Noferi 355.
Norden 6, 80, 708.
Nucerello 506, 567.

O

O' Creat 832,
Ofterdinger 38, 48, 144, 145, 206, 211, 248, 325, 391, 426.
Oinopide da Chio 9, **61-63**, 459, 467, 469, 709.
Olimpiodoro 706.
Oliva 6, 13.
d'Omerique 439.
Omero 451, 478, 585, 636, 922, 923, 933.
Oppermann 308.
Orazio 99.
Orione 706.
Oronzio Fineo 197.
Oughtred 208.
Ovidio 203.
Ozanam 581, 696.

P

Paci 349.
Paciuolo (Luca) 45, 250, 337.
Padula 301.
Painlevé 426.
Palamede 740, 771.
Pamfila 16.
Pandrosio 657, 659.
Pappo 6, 7, 18, 70, 71, 72, 123, 157, 158, 159, 160, 162, 263, 164, 190, 194, 222, 333, 243, 245, 246, 247, 253, 259. 261, 262, 264, 265, 267, 278, 286, 295, 301, 306, 307, 312, 313, 317, 318, 329, 333, 334, 335, 345, 346, 347, 356, 357, 368, 379, 384, 386, 387, 389, 390, 392, 396, 397, 398, 404, 406, 407, 408, 410, 414, 418, 426, 431, 432, 433, 436, 438, 489, 440, 441, 442, 443, 453, 481, 487, 494, 499, 501, 503, 504, 506, 507, 510, 518, 519, 563, 572, 574, 593, 616, 642, 648, **656-703**, 704, 705, 708, 709, 713, 715, 717, 720, 721, 723, 728, 729, 758, 759, 767, 768, 774, 775, 789, 797, 818, 831, 849, 855, 970.
Parmenide 56, 57, 64, 96, 459, 709.
Parthey 186, 343.
Pascal (Blaise) 290, 205, 206, 214, 689, 824.
Pascal (Stefano) 410.
Patrizio 706.
Patz 120.
Pauly-Wissowa 16, 76, 188, 283, 342, 351, 352, 411, 448, 499, 502, 567, 601, 743, 843, 848, 921, 935.
Pausania 31.
Peano 212, 216, 221.
von Pech 708.
Pediasimo 763, **942**.
Peletario 197.
Pell 836.
Pemberton 368.
Pendelbury 661.
de la Pène 197, 506, 559.
Pericle Ateniese 63, 638, 641, 714.
Pericle geometra 657.
Pernety 31.
Perseo 68, **415-418**, 709.
Pétau 649.
Petrarca 194, 942.
Peyrard 197, 245, 246, 269, 277, 279, 283, 301, 335, 502, 564.
Pietro 715.
Pindaro 342, 636.
Pindemonte 933.
Pistelli 831, 839.
Pitagora 9, **26-55**, 36, 60, 61, 64, 73, 77, 91, 98, 109, 115, 120, 123, 129, 157, 165, 173, 206, 207, 208, 209, 214, 215, 216, 233, 242, 243, 278, 281, 357, 401, 456, 459, 460, 463, 465, 467, 495, 496, 525, 531, 593, 600, 635, 652, 666, 702, 705, 706, 709, 771, 774, **792-800**, 807, 810, 811, 812, 813, 815, 816, 817, 819, 824, 827, 831, 838, 839, 844, 848, 892, 920, 944, 945.
Pitone 726.
Planude (Massimo) 664, 767, 789, 797, 801, 852, 859, 916, **942-943**.
Platone Ateniese 4, 7, 9, 10, 24, 34, 46, 51, 56, 57, 61, 64, 70, 73, 76, 98, 104, **107-126**, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 150, 151, 165, 166, 168, 189, 192, 193, 194, 203, 233, 243, 263, 278, 293, 334, 337, 343, 346, 420, 421, 457, 459, 461, **463-465**, 466, 467, 468, 469, 470, 474, 475, 476, 525, 557, 559, 560, 576, 603, 642, 643, 646, 654, 680, 701, 702, 705, 706, 707, 708, 709, 712, 715, 717, 734, 640, 768, 800, **810-815**, 816, 818, 819, 833, 838, 892, 920, 933, 945, **946-953**.
Platone Tiburtino 506, 567.
Playfair 262, 432.
Plinio 453, 458, 523, 584, 719.
Plotino 704, 705.
Plutarco 5, 21, 22, 46, 66, 102, 108, 109, 126, 280, 282, 453, 461, 564, 709, 800, 839.
Plutarco, figlio di Nestore 705.
Poggendorff 658.
Poinsot 301.
Polemarco 475, 476.
Polibio 782.
Policrate 31, 166.
Pompei 280, 282.
Pompeo 491.
Poncelet 264.
Porfirio 18, 30, 593, 599, **704-705**, 707, 708, 709, 838.
Poro 715.

Poselger 852, 913.
Posidonio da Apamea 583.
Posidonio da Rodi 467, **489-492**, 650, 709.
Potone 815.
Poudra 559.
Powers 220.
Proclo 6, 7, 10, 16, 17, 18, 19, 20, 34, 34, 34, 35, 38, 40, 42, 47, 48, 50, 52, 56, 57, 61, 62, 63, 65, 68, 69, 70, 75, 77, 99, 107, 113, 122, 126, 127, 128, 130, 132, 135, 136, 139, 141, 142, 150, 151, 160, 188, 191, 195, 198, 202, 235, 244, 250, 251, 253, 263, 268, 278, 280, 294, 318, 346, 350, 398, 399, 401, 406, 407, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 453, 474, 518, 523, 548, 550, 553, 592, 593, 594, 596, 597, 599, 642, 643, 644, 646, 647, 648, 650, 658, 699, 700, **704-712**, 713, 716, 717, 723, 767, 780, 799, 812, 819, 743.
Prodico 67.
Protagora 66, 67.
Protarco 270.
Psammetico 12.
Psello 97, 848, **941-942**.

R

Raab 57.
Rabda 744, 745, 750, 751, 760, 762, 763, 767, 768, 771, 772, 773, 774, 778, 786, **929-932**, 741, 742.
Ramus (P. de la Ramée) 159, 196, 202, 212, 222, 846.
Rangabé 749.
Ravius 354.
Regiomontano 194, 516, 549.
Reimer 76, 78, 123, 134, 139, 146, 266, 344, 400, 404, 411.
Reinach 326.
Renaldini 259.
Revillout 169.
Rhind 168, 171.
Rhode 188.
Riccardi 194, 199, 345, 353.
Richard 354.
Richter 391.
Riecke 669.
Robert 7.
Roberval 462, 520.
Robinson 326
Rodet 880.
Röth 29.
Romolo 641.
Rosenberg 343.
Rosenberger 123.
Rothlauf 109. 116, 123, 463, 811. 812.
Rouché 672.
Rudio 88, 95, 98, 165, 317, 705.
Runge 319.
Ruggero (re) 570.

S

Salomone 30.
Sambelichus 596.
di San Vincenzo (Gregorio) 93, 474.
Sartorius 452.
Saville 251.
Scheil 172.
Schiaparelli 137, 149, 343, 352, 450, 456, 458, 459, 460, 461, 462, 465, 470, 471, 473, 474, 477, 486, 490, 491.
Schleiermacher 948.
Schmidt L. 921.
Schmidt M. C. P. 28, 149, 650.
Schmidt W. 79, 285, 291, 419, 574, 583, 585, 601, 720.
Schneider 948.
Schnell 951.
Schönborn 321.
Schöne H. 621.
Schöne R. 567, 605, 943.
Schooten 259, 349, 396, 441, 442.
Schröder 30.
Schubert H. 203, 486, 490, 491, 522, 539.
Schultz 121.
Schulz 556, 847, 849, 853, 889, 916, 921.
Schwarz A. H. 970.
Scorza 368.
Sédillot 250, 328, 449, 464.
Seelhoff 220.
Seleuco Babilonese 461.
Seneca 675.
Senocrate 465, 815.
Senofane 27, 32, 56, 455, 457.
Senofonte 106, 448.
Sereno d'Antinouopoli 721, **722-734**.

Sereno grammatico 149.
Serret J. A. 537.
Servais 221.
Sesostri 168.
Sesto Pitagorico 54, 829.
Sesto Giulio Africano **632-633**.
Silio Italico 282.
Simon Jules 185.
Simon Max 86, 132, 168, 198, 199, 212, 698, 820.
Simone Maccabeo 753.
Simplicio 57, 78, 79, 80, 89, 91, 92, 93, 94, 301, 396, 398, 474, 476, 549, 569, 596, 648, **713-714**, 819, 827.
Simson 201, 212, 214, 257, 260, 261, 262, 265, 391, 366, 431, 483, 442, 688.
Sinesio 548, 556.
Siriano 705, 706, 709, 767, 780, 843.
de Sluse 800.
Smith G. 23, 64.
Smith D. E. 326, 771.
Snellio W. 319, 343, 391, 392, 271.
Socrate 30, 70, 94, 106, 107, 108, **115-120**, 127, 166, 421, 448, 706, 922, 947, 949.
Sofocle 637.
Solari 203.
Solone 6, 12, 117, 478.
Spengel 78, 136.
Speusippo 128, 129, 130, 263, 709, 774, 807, **815**.
Spezi 761.
Sporo da Nicea 164, 670, 715, 716, **717**.
Stäckel 551.
Staudt 359.
Stefano d'Alessandria 714.
Steiner 402, 421, 669, 677.
Steinschneider 199, 252.
Stephanus 749.
Stesicoro 9, 23, 709.
Stevin 221, 222, 260, 574, 854, 857.
Stewart 431, 688, 691.
Stiehle 342.
St'ius 596.
Stobeo 149, 168, 454.
Stolz 237, 295.
Strabone 523, 659, 719, 723.
Stratone 462, 583.
Struve J. V. 933, 934.
Struve K. L. 934.
Sturm A. 23, 67.
Sturm C. 497.
Suida 5, 7, 22, 23, 127, 131, 149, 556, 658, 715, 843, 846, 847.
Susemihl 139, 186, 281, 419, 462, 502, 583, 921
Suter 109, 191, 192, 198, 199, 269, 340, 353, 510, 701, 705.
Sylvester 220.

T

Tâbit ben Kurra 192, 353, 658, 699, 716.
Tacquet 144, 581.
Talete 8, 10, **11-24**, 26, 27, 31, 62, 164, 201, 205, 214, 215, 420, 452, 453, 454, 463, 467, 469, 493, 587, 709, 792, 817, 856.
Tannery 5, 7, 11, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 28, 32, 36, 42, 57, 60, 66, 69, 71, 79, 104, 112, 113, 121, 126, 128, 129, 130, 136, 138, 142, 147, 154, 156, 159, 165, 179, 190, 195, 202, 205, 221, 244, 250, 260, 263, 266. 277, 301, 305, 307, 313, 317, 318, 323, 332, 347, 351, 352, 371, 379, 398, 399, 404, 406, 411, 414, 416, 417, 424, 425, 452, 458, 460, 465, 470, 471, 478, 479, 480, 496, 497, 501, 504, 505, 519, 525, 527, 560, 561, 565, 584, 593, 594, 601, 605, 644, 645, 647, 648, 650, 661, 664, 693, 701, 705, 708, 716, 817, 723, 744, 754, 758, 767, 779, 780, 788, 785, 792, 796, 797, 798, 807, 808, 814, 819, 832, 833, 843, 847, 848, 850, 851, 852, 853, 859, 880, 897, 908, 909, 918, 933, 940, 942, 949, 950, 951.
Tartaglia 194, 243, 291, 292, 592, 638.
Taylor C. 156, 370, 727.
Taylor T. 7, 708, 802, 819, 827, 948.
Teeteto 9, 10, 53, **126-128**, 188, 224, 233, 234, 242, 401. 701, 702, 703, 709.
Temistio 94, 95.
Tennulio 808, 818, 831, 839.
Teodoro 9, **51-53**, 108, 127, 709, 811.
Teodosio 495, 502, **505-509**, 510, 512, 657, 665, 681, 715.

Teodosio imperatore, (detto il Grande) 555, 658, 847.
Teofrasto da Lesbo 136, 499.
Teone Alessandrino 196, 197, 278, 418, 455, 464, 467, 508, 510, 513, 524, 528, 531, **552-556**, 559, 561, 565, 642, 657, 705, 713, 715, 720, 723, 766, 768, 769, 780, 782, 785, 787, 789, 846, 848.
Teone Smirneo 111, 112, 208, 278, 295, 347, 449, 452, 454, 455, 456, 457, 458, 459, **465-470**, 471, 478, 487, 489, 525, 552, 603, 642, **652-655**, 662, 723, 793, 794, 795, 810, 814, **833-837**, 838, 844, 847, 940, 950.
Terquem 370, 934.
Teudio 9, 130, 197, 243, 709.
Thevenot 572.
Thiele 321.
von Thimus 30.
Thurot 572.
Tiberio imperatore 193, 467, 567, 818, 928.
Tideo 970.
Timarida da Paros o da Taranto **807-809**, 916, 917, 924.
Timeo da Locri 108, 457, 459.
Timoteo 467.
Tiraboschi 29, 354.
Tisserand 13.
Tito Livio 282.
Tittel 582, 647, 650.
Tolomeo Claudio 196, 270, 278, 321, 401, 422, 447, 455, 458, 460, 462, 468, 470, 477, 479, 485, 494, 504, 510, 514, **523-552**, 567, 568, 569, 570, 571, 584, 587, 636, 649, 657, 658, 699, 705, 709, 713, 715, 716, 760, 765, 766, 768, 780, 783, 846, 916, 925.
Tolomeo III detto Evergete I 76, 99, 149, 185, 188, 343, 344, 351, 717.
Tolomeo Evergete II 583.
Tolomeo II detto Filadelfo 185, 186, 461, 754.
Tolomeo IV detto Filopatore 351.
Tolomeo Lago o Sotero 185, 186, 467, 499.
Torelli (Giuseppe) 283.
Traiano imperatore 510.
Trasideo 372, 403.
Trasillo 467. 469.
Trembley 120.
Treutlein 50.
Tschrinhausen 86.
Tucidide 419.
Tzetze 5, 7, 110.

U

Unger E. S. 216.
Unger F. 747, 760.
Usener 79, 658, 714.

V

Vacca 219.
Vailati 575.
Valerio Massimo 193, 194, 282.
Valla 343, 480.
Varignon 666.
Venturi 568, 569, 582, 586, 592.
Veronese 204.
Vespucci 757.
Vezio Valente 233, 702.
Viani 251.
Vico 29.
Vieta 95, 305, 392.
Vignola 195.
Vincent 48, 254, 447, 581, 586, 587, 589, 630, 731, 632, 749, 760, 803, 804, 806, 934, 948.
Violet-le-Duc 29.
Virgilio 281.
Vitruvio 64, 65, 584, 928. 929.
Vivanti 210.
Viviani 159, **174-179**, 212, 283, 355, 435, 436, 519, 676, 970.
Vogl 565, 970.
Vogt 53.
Volterrano 948.
Vossio 801.

W

Wachsmuth 414, 712.
Wäschke 664, 767.
Wales 391.
Wallace 259.
Wallerius 86.
Wallis 317, 341, 480. 656, 659, 449, 754, 800, 804.
Wantzel 220.

Weber H. 926.
Weidler 804.
Weierstrass 212, 710.
Weissenborn 199, 202, 321, 603, 805.
Wenrich 199.
Wertheim 783, 790, 853, 918, 921, 923, 925, 926, 927.
Wex 109, 120.
Weyr Em. 169.
Whewell 212, 449, 469, 477, 557.
Widboe 432.
Wilberg 526.
Wilde 558, 564.
Wilkinson 432.
Willamowitz 346.
Woepcke 121, 244, 251, 285, 338, 339, 401, 426, 427, 574, 700, 702, 761, 805, 806.
Woisin 749, 750.
Wolf R. 13, 49, 64, 98, 107, 123, 491.
Wronski 262.
Wüstenfeld 199.
Wurm 48, 936.

X

Xylander *vedi* Holtzmann.

Y

Yrinus 596.

Z

Zamberti 194, 197, 502.
Zanotti 665.
Zeller 6, 13, 16, 23, 24, 52, 56, 63, 65, 66, 68, 70, 93, 98, 107, 138, 149, 343, 424, 452, 155, 456, 461, 555, 649, 709, 713, 815.
Zenarco 191.
Zenocrate 128, 709, 815.
Zenodoro 363, **218-420**, 677, 709.
Zenodoto 63, 709, 753.
Zenone d'Elea **56-61**, 165, 461, 709.
Zetone 927.
Zeusippo 754.
Zeuthen 42, 48, 53, 155, 156, 158, 159, 177, 179, 203, 205, 212, 217, 264, 165, 301, 308, 316, 321, 325, 326, 340, 343, 347, 355, 357, 358, 366, 368, 369, 370, 371, 372, 375, 476, 379, 382, 384, 386, 391, 394, 411, 415, **423-426**, 433, 438, 549, 637, 662, 685, 693, 724, 917, 943.
Zirkel 921, 923, 924, 925, 926, 927.
Zotenberg 292.

1200 MANUALI HOEPLI

Pubblicati a tutto Settembre 1913.

Che cosa sono i Manuali Hoepli?

I. — *Una raccolta iniziata e continuata col proposito di diffondere la cultura; che tratta in forma popolare le lettere, le scienze, le arti e le industrie.*

II. — *I Manuali Hoepli sono sempre scritti da specialisti della materia e sempre ove occorre illustrati copiosamente, e, ad ogni ristampa corretti ed arricchiti di nuove aggiunte per tenerli al corrente delle più recenti conquiste della scienza.*

III. — *Nella Collezione dei Manuali Hoepli ognuno può trovare un testo che interessi i suoi studi, ed ove non ve lo trovasse, rintraccierà sempre uno o più*

capitoli per lui interessanti nei Manuali di indole affine.

IV. — *I Manuali Hoepli sono un' Enciclopedia permanente di scienze, lettere ed arti perchè la loro grande diffusione permette all'editore di rinnovarli e rifarli di continuo.*

AVVERTENZE

☞ I libri si spediscono *franchi di porto* nel Regno e nelle Colonie italiane dietro semplice invio di una cartolina vaglia. — Per le spedizioni all'estero aggiungere il *dieci per cento in più* sul prezzo del libro.

☞ Le spedizioni sono fatte con cura e puntualità, ma i volumi non raccomandati viaggiano a *rischio* e *pericolo* del committente.

☞ Per ricevere i libri raccomandati — onde evitare smarrimenti dei quali l'editore non si rende responsabile — aggiungere *cent. 25 in più.*

☞ Si fanno anche spedizioni per assegno, ma siccome le spese d'assegno sono ingenti, è meglio di *inviare sempre* l'importo anticipato con cartolina vaglia.

CORREZIONI DEGLI ERRORI
CHE ALTERANO OD OSCURANO IL SENSO

Pag. 34 linea 12 dall'alto invece di 10 si legga 19.
„ 38 „ 4 „ „ „ 23 „ 22.
„ 70 „ ultima „ „ 350 „ 250.
„ 97 „ 4 dall'alto „ „ 65 „ 67.
„ 219 „ 12 „ „ „ (1) „ (2).
„ 15 „ „ „ (2) „ (1).
Si scambïno fra loro le ultime due note in calce.
„ 221 linea 5 dal basso invece di T. si legga P.
„ 222 linee 13-12 dal basso invece di CASTELLINI si legga CASTELLI.
„ 226 linea 11 dall'alto invece di *copie* si legga *coppie*.
„ 233 „ 1ª „ „ „ *ha* „ *abbia*.
„ 279 linee 18-17 dal basso si legga *presentavano e, in conseguenza, comporne*.
„ 370 linea ultima invece di GORGONNE si legga GERGONNE.
„ 392 „ 6 dal basso invece di *Bathovus* si legga *Batavus*.
„ 393 „ 7 dall'alto invece di GERGOENE si legga GERGONNE.
„ 402 „ 9 „ „ „ *amesse* si legga *emesse*.
„ 419 „ 12 dal basso invece di *n. 68* si legga *p. 398*.
„ 521 „ ultima invece di *Monitius* si legga *Manitius*.
„ 546 „ 12 dall'alto si tolga *non*.
„ 649 „ 21 dal basso invece di STRARONE si legga STRABONE.
„ 676 „ 3 dall'alto invece di NICOMEDE si legga DINOSTRATO.
„ 750 „ 15 dall'alto si legga $10 = c$.
„ 760 „ 1ª dall'alto invece di *inspirandosi* si legga *inspispirantisi*.
„ 794 „ 6 dal basso prima di *Vorlesungen* si aggiunga M. CANTOR.

AGGIUNTE

Pag. 190, nota (3). — G. JUNGE ha esposte nell'articolo *Die Lebenzeit Euklids* (Bibl. math., III Ser., T. XIII, 1913, p. 193-202) le ragioni filologiche e storiche in base a cui egli ritiene che EUCLIDE sia nato verso il 365 a. C., abbia fiorito intorno al 325 ed abbia composto gli *Elementi* nel periodo 330-320.

Pag. 283, nota (1). — Della II edizione delle *Opere* di ARCHIMEDE edite dall'HEIBERG durante la stampa dell'opera presente è uscito il Vol. II (Lipsiae, 1913). Notizie precise intorno alla traduzione del VIVIANI si apprendono da una comunicazione di A. FAVARO inserita negli *Atti della Società italiana per il progresso delle Scienze.* VI Riunione, Genova, 1912, p. 872-875.

Pag. 565, nota (1). — L'opera *De Speculis* attribuita ad EUCLIDE si trova pubblicata con estesi commenti nel lavoro di A. A. BJÖRNBO e S. VOGL, *Alkindi, Tideus und Pseudo-Euklid drei optische Werke* (Abh. zur Gesch. d. math. Wiss.. XXVI Heft, 1911).

Pag. 584, nota (7). — E. HOPPE è ritornato sulla questione dell'epoca in cui visse ERONE nel suo libro intitolato *Mathematik und Astronomie im klassischen Alterthum* (Heidelberg, 1911, p. 335) dichiarandosi propenso ad ammettere che il grande geodeta greco abbia fiorito intorno al 100 a. C.

Pag. 683. — Il passo della *Collezione* di PAPPO relativo ai *Porismi* fu interpretato in un modo totalmente nuovo da H. A. SCHWARZ, in una comunicazione fatta all'Accademia di Berlino il 6 aprile 1906, ma non ancora pubblicata.

Pag. 757, nota (2). — Le relazioni che intercedono fra le osservazioni di ARCHIMEDE e l'invenzione di NEPERO furono esattamente determinate da J. B. BIOT in un articolo inserito nel *Journal des Savants* (1835) e riprodotto nel T. II, p. 393-525, dei *Mélanges scientifiques et littéraires* (Paris, 1858).

ELENCO COMPLETO DEI MANUALI HOEPLI

disposti in ordine alfabetico e per materia

I manuali Hoepli non esistono in brochure; essi sono tutti solidamente ed elegantemente legati.

ELENCO COMPLETO DEI MANUALI HOEPLI

disposti in ordine alfabetico per materia

	L.	C.
Abbreviature latine ed italiane (Dizionario di) usato specialmente nel medio evo, di A. CAPPELLI, 2ª ediz., di pag. LXVIII-528 (legato in tutta pergamena)	6	50
Abitazioni animali domestici di U. BARPI, 2ª ediz. p. XVI-479 e 255 figure	4	50
Abitazioni popolari (Case operaie) di E. MAGRINI, 2ª ediz. pag. XVI-465 e 219 incisioni	5	50
Abiti per signora. Taglio e confezione di E. BONETTI — pag. XX-296, 55 tavole e 31 figurini . . .	4	—
Acciai. Lavorazione e tempera. Indurimento del ferro e cementazione, di A. MASSENZ, pag. XVI-118 e 36 inc.	2	—
Accumulatori — vedi: Correnti alternate - Elettrotecnica - Illuminazione elettrica - Ingegnere elettricista Operaio elettrotecnico - Sovratensioni - Ricettario dell'elettricista.		
Acetilene (L') di S. CASTELLANI. 2ª ediz. di p. XVI-164	2	—
Acido solforico, nitrico, muriatico, ecc. (Fabbricazione dell') di V. VENDER, di pag. VIII-312 e 107 incis.	3	50
Acqua potabile (Condottura di), di P. BRESADOLA, di p. XVI-334 e 37 fig.	3	50
Acque minerali e termali d'Italia di L. TIOLI, di pag. XXII-552	5	50
Acque minerali artificiali, acque gazose, ecc., di M. GIUA, con 42 illustrazioni.	2	—
Acque sotterranee e giacimenti minerali, di M. GROSSI di pag. XVI-380, con 68 incis. e una tavola	4	50
Acrobatica e atletica di A. ZUCCA, di pag. XXX-267, 100 tav. e 42 incis.	6	50
Acustica musicale, di A. TACCHINARDI, di p. XII-189, con 85 inc.	2	50

L. C.

Alimentazione di G. STRAFFORELLO, di p. VIII-122 . 2 —

Alimentazione del bestiame di MENOZZI e NICCOLI 2ª ediz. p. XVI-407 . . . . . 4 —

Alligazione (Tavole di) per l'oro e l'argento di F. BUTTARI, p. XII-220 . . . . . 2 50

Alluminio (L') di C. FORMENTI, di p. XXVIII-324 . . 3 50

Alpi (Le) di I. BALL, traduz. di I. Cremona, p. IV-120 . 1 50

Alpinismo di G. BROCHEREL, di p. VIII-312 . . . 3 —

Amatore (L') di oggetti d'arte e di curiosità di L. DE MAURI, 2ª ediz., di p. XV-720, con 100 tavole e 280 inc. 10 50

Amministrazioni comunali, provinciali e opere pie, pei Segretari e aspiranti Segretari comunali di E. MARIANI, di p. XXXII-979, legato in pelle 9 50

Ampelografia. Viti per uve da vino e da tavola, di G. MOLON, p. XLIV-1243, 2 vol. . . . . 18 —

Analisi chimica qualitativa di sostanze minerali ecc., di P. E. ALESSANDRI, di p. XII-384, 14 incisioni e 5 tavole (in ristampa).

Analisi chimiche per Ingegneri di L. MEDRI, di p. XIV-313 e 80 figure 3 50

Analisi delle urine (L'urina nella diagnosi delle malattie), di F. JORIO, di p. XVI-216 . . . . 2 —

Analisi del vino, di M. BARTH e E. COMBONI, 2ª ed., di p. XVI-140 . . . . . 2 —

Analisi volumetrica dei prodotti comm. e industriali di P. E. ALESSANDRI, di p. X-342 . 4 50

Anatomia e fisiologia comparate di R. BESTA, p. VII-229 e 59 incis. 1 50

Anatomia microscopica, di D. CARAZZI, di p. XI-211, con 5 incis. 1 50

Anatomia pittorica, di A. LOMBARDINI, 4ª ediz. a cura di V. LOMBARDINI di p. XII-195 e 56 incis. . 2 —

Anatomia topografica di C. FALCONE, 3ª ediz., di p. XII-887 e 48 fig. 7 50

Anatomia vegetale di A. TOGNINI, di p. XVI-274 e 41 incis. . . . . 3 —

Anfibi d'Italia (Gli), di C. VANDONI (in corso di stampa).

Animali da cortile. Polli, Tacchini, Fagiani, Oche, Conigli, ecc. di F. FAELLI, di p. XVIII-372, 56 incis. e 19 tavole, 2ª ediz. (in lavoro).

— — vedi: Colombi domestici - Coniglicoltura - Fagiani - Malattie dei polli - Pollicoltura - Uccelli canori.

Animali domestici. — vedi: Abitazione degli - Cammello - Cane - Cani e gatti - Cavallo - Maiale - Porco Razze bovine - Zebra.

Animali parassiti dell'uomo di F. MERCANTI, di p. IV-179, con 33 incis. 1 50

Antichità greche, pubbliche, sacre e private, di V. INAMA, 2ª ediz. di p. XV-224 e 19 tav. . 2 50

L. C.

Antichità private dei romani, di N. MORESCHI e W. KOPP, di p. XVI-181, illustr. 1 50

Antichità pubbliche romane, di I. G. HUBERT e W. KOPP, di p. XIV-324 . . . . . 3 —

Antologia provenzale, di E. PORTAL, di p. VIII-674 4 50

Antologia stenografica, di E. MOLINA, p. XI-199 2 —

Antropologia, di G. CANESTRINI, (esaurito).

Antropologia criminale, di G. ANTONINI, di pagine VIII-167 . . . . . 2 —

Antropometria. di R. LIVI, di p. VIII-237 e 32 incis. 2 50

Ape latina. Dizionario di frasi, sentenze ecc., a cura di G. FUMAGALLI, p. XVI-353 . . . . . 3 50

Apicoltura, di G. CANESTRINI, 7ª ediz. a cura di V. ASPREA, pag. VIII-224 con 51 incis. . . . . 2 —

Appalti di opere pubbliche, di A. CUNEO (in lavoro).

Apprendista meccanico, di V. GOFFI (in lavoro).

Arabo parlato in Egitto. Grammatica e vocabolario, di A. NALLINO, 2ª ediz., di pag. XXVI-531 . . 7 50

Arabo parlato in Libia. Grammatica e repertorio di vocaboli e frasi di E. GRIFFINI, di pag. LII-378 . 5 —

— vedi: Grammatica Italo-Arabo.

Araldica (Grammatica), ad uso d. italiani di F. TRIBOLATI. 4ª ediz. a cura G. CROLLALANZA, di p. XI-187, e 274 incis. 2 50

Araldica zootecnica di E. CANEVAZZI, di p. XIX-342 e 43 incis.. . . . . 3 50

Arazzo (L'arte dell') (Gobelins) di G. B. ROSSI, di p. XV-239 e 130 illustr. . . . . 5 —

Archeologia e storia dell'Arte greca di I. GENTILE, 3ª ediz. rifatta da S. Ricci, di p. XLVIII-270 e 215 tavole, due vol. 11 50

Archeologia e storia dell'Arte Italica, Etrusca e Romana, di GENTILE-RICCI (esaurito).

Archeologia — vedi: Atene - Antichità greche - Antichità romane - Epigrafia - Paleografia - Rovine Palatino - Topografia di Roma.

Architettura italiana antica e moderna, di A. MELANI. 5ª ediz., di p. XXXII-688, con 180 tavole . 12 —

— vedi: Stili architettonici.

Archivista (L'), di P. TADDEI, Mon. teorico pratico, di p. VIII-486 . . . . . 6 —

Archivisti (Manuale per gli), di P. PECCHIAI, di pagine VI-229 . . . . . 3 —

Argentatura — vedi: Enciclopedia galvanica - Galvanizzazione - Galvanoplastica - Galvanostegia - Metallocromia - Metalli preziosi - Piccole industrie - Ricettario dell'elettricista.

Argentina (Repubblica), storia e condizioni geografiche di E. COLOMBO, di p. XII-330 . . . . . 3 50

L. C.

Aritmetica pratica, di F. PANIZZA, 2ª ediz., di p. VIII-188. . . . . 1 50

Aritmetica razionale, di F. PANIZZA, 6ª ediz., di p. XII-210 . . . . . 1 50

— (Esercizi di) F. PANIZZA, di pag. VIII-150 . . . 1 50

Aritmetica e geometria dell'operaio, di E. GIORLI. 3ª ediz., di pag. XII-228 e 76 figure . . . 2 —

Armi antiche (Guida del raccoglitore) di I. GELLI di p. VIII-389, 23 tav. e 432 incis. 6 50

Armonia, di G. BERNARDI, 2ª ediz., di pag. XX-338 . 3 50

Aromatici e nervini nell'alimentazione, di A. VALENTI, di p. XV-338 . . . . . 3 —

Arsenico (L') nella scienza e nell'industria, di L. MAURANTONIO, di p. XII-256 . . . . . 2 50

Arte decorativa antica e moderna, di A. MELANI, 2ª ediz. di p. XXVII-551, 83 incis. e 175 tav. . 12 —

Arte del dire (Retorica) di D. FERRARI, 9ª ediz. di p. XVI-340 . . . . . 1 50

Arte della memoria. Storia e teoria di B. PLEBANI, 2ª ediz., di pag. XXVI-235 con 13 illustrazioni. . . 2 50

Arte nei mestieri di I. ANDREANI, in 3 volumi.

I. Il falegname, di p. IX-295, con 264 incis. e 25 tav. 3 —

II. Il fabbro, di p. VIII-250, con 266 incis. e 50 tav. 3 —

III. Il muratore, di p. VIII-273, con 235 incis. . . 3 —

Arti grafiche fotomeccaniche, di P. CONTER. 4ª ediz., di p. XII-228, 43 incis. e 8 tav. 2 50

Asfalto (Fabbricazione e applicazione), di E. RIGHETTI, di p. VIII-152 e 22 incis. . . . . 2 —

Assicurazione (Manuale di), di G. ROCCA, p. XIX-634 5 50

Assicurazione in generale, di U. GOBBI, di pagine XII-308 . . . . . 3 —

Assicurazioni sulla vita, di C. PAGANI, di pagine VI-161 . . . . . 1 50

Assicurazioni e stima danni aziende rurali di A. CAPILUPI, di p. VIII-284 e 17 incis. . . 2 50

— vedi: Matematica attuariale - Scienza attuariale.

Assistenza infermi, di C. CALLIANO, 2ª ediz., di p. XXIV-148 e 7 tav. 4 50

Assistenza degli infermi — vedi: Epidemie esotiche - Malattie infanzia - Malattie dei lavoratori - Malat. paesi caldi - Medicatura antisettica - Medicina sociale - Medicina d'urgenza - Medico pratico - Rimedi - Soccorsi d'urgenza - Tisi - Tisici e sanatori - Tubercolosi.

Assistenza dei pazzi, di A. PIERACCINI, e pref. di E. Morselli, 2ª ediz., p. XX-279 . . . . . 2 50

Astronomia, di J. N. LOCKYER e G. CELORIA. 5ª ed., di p. XVI-275 e 54 incis. 1 50

Astronomia nautica, di G. NACCARI, 2ª ediz., di p. XVI-348 e 48 fig. 3 50

	L. C.
Astronomia antico testamento, di G. V. SCHIAPARELLI, di p. 204	1 50
Atene antica e moderna. Cenni, di S. AMBRROSOLI, di p. LV-170, e 22 tavole	3 50
Atlante geografico storico d'Italia, di G. GAROLLO, p. VIII-67 e 24 tav.	2 —
Atlante geografico universale di R. KIEPERT e testo di G. Garollo, di p. VIII-88 e 27 carte. 11ª ed.	2 50
Attrezzatura navale, di F. IMPERATO, 2 volumi, 5ª ediz.	
I. Attrezzatura navale, di pag. XVI-530, con 403 fig.	5 50
II. Manovra delle navi a vela e a vapore, segnalazioni marittime, di pag. XX-904, 294 inc. e 29 tav.	8 50
Autocromista (L'). Fotografia a colori, di I. PELLERANO, di pag. XXXII-544 con 75 fig. e 38 tavole .	9 50
Autografi (L'Amatore di) di E. BUDAN, p. XIV-426 e 361 facsimili	4 50
Autografi (Raccolte e raccoglitori di), di C. VANBIANCHI, di p. XVI-376 e 102 tav.	6 50
Automobilista (Man. del) a guida pei meccanici conduttori d'automobili, di G. PEDRETTI, 3ª ediz. di p. XX-900 con 984 illustrazioni	9 50
Automobili — vedi: Caldaie a vapore - Chauffeur - Ciclista - Locomobili - Motociclista - Trazione a vapore.	
Avarie e sinistri marittimi, Manuale del liquidatore di V. ROSSETTO, p. XV-496 e 23 fig. . .	5 50
Aviazione (Navig. aerea di A. DE MARIA, di p. XVI-338 e 103 fig.	3 50
Avicoltura — vedi: Animali da cortile - Colombi - Fagiani - Malattie dei polli - Ornitologia - Pollicoltura - Uccelli canori - Uovo di gallina.	
Bachi da seta, di F. NENCI, 4ª ed., p. XII-300 e 46 fig.	2 50
Balbuzie. Cura dei difetti d. pronuncia di A. SALA, di p. VIII-214	2 —
Ballo (Manuale del), di I. GAVINA, 2ª ediz., p. VIII-265 e 103 fig.	2 50
Bambini — vedi: Balbuzie - Malattie d'infanzia - Nutrizione del bambino - Ortofrenia - Rachitide.	
Bandiere, insegne e distintivi dei principali Stati del Mondo, di F. IMPERATO, di pagine XVI-220, con 50 tavole a colori	5 50
Barbabietola da zucchero. Storia, lavorazione, ecc., di A. SIGNA p. XII-225 e 29 fig.	2 50
Barbabietola da zucchero. Coltivazione di B. R. DEBARBIERI, p. XVI-220 e 12 fig.	2 50
Batteriologia, G. CANESTRINI. 2ª ed., p. X-274, 37 fig.	1 50
Beneficenza (Manuale della), di L. CASTIGLIONI e G. ROTA, di p. XVI-340	3 50
Bestiame e agricoltura in Italia, di F. ALBERTI. 2ª ed. di U. BARPI p. XII-322, 47 tav. e 118 fig.	4

L. C.

Bestiame — vedi ai singoli titoli: Abitazioni di animali - Alimentazione del bestiame - Araldica zootecnica - Cavallo - Coniglicoltura - Igiene veterinaria - Majale - Malattie infettive - Polizia sanitaria - Pollicoltura - Razze bovine - Veterinario - Zoonosi - Zootecnia.

Biancheria. Disegno, taglio e confezione di E. BONETTI. 4ª ediz.. di p. XX-269 e 71 tav. . . . . 6 —

Bibbia (Manuale della), di G. ZAMPINI, 2ª ediz. di pagine XX-312 . . . . . 3 —

Bibliografia, di G. OTTINO. 2ª ediz. di p. IV-166 e 17 incis. . . . . 2 —

Bibliotecario (Man. del), di G. PETZHOLDT, traduzione di G. Biagi e G. Fumagalli, di p. XX-361-CCXIII 7 50

Biliardo (Giuoco del), di I. GELLI, 2ª ediz., di p. XII-175 e 80 ill. 2 50

Biografia — vedi: C. Colombo - Dantologia - Dizionario di botanica - Dizionario biografico - Manzoni - Napoleone I - Omero - Shakespeare.

Biologia animale, di G. COLLAMARINI, di p. X-426 e 23 tav. . . . . 3 —

Birra, fabbricazione, ecc., di S. RASIO e F. SAMARANI, di p. 279 e 25 fig. 3 50

Bonificazioni. Amministrazioni, ecc., di G. MEZZANOTTE, p. XII-294 . . . . . 3 —

Boschi e pascoli. Storia, importanza idro-geologica, ecc., di E. FERRARI, di pag. 380, con 15 tavole . . 3 50

Botanica, di I. D. HOOKER-PEDICINO N., 5ª ediz. a cura G. Gola. di p. XVI-144 e 74 fig. 1 50

Botanica — vedi ai singoli titoli: Ampelografia - Anatomia vegetale - Barbabietola - Caffè - Dizionario di botanica - Fisiologia vegetale - Floricoltura - Funghi Jucca - Garofano - Giardiniere - Malattie crittogamiche - Orchidee - Orticoltura - Piante e fiori - Piante erbacee a seme oleoso - Piante industriali - Pomologia - Prodotti del tropico - Rose - Selvicoltura - Uve - Tabacco.

Bottaio (Il). Fabbricazione e misura delle botti, di L. PAVONE, riveduto da A. Strucchi, di p. XXIV-214, con 127 fig. . . . . 3 —

Bromatologia. I cibi dell'uomo, di S. BELLOTTI, di p. XV-251 . . . . . 3 50

Buddismo, di E. PAVOLINI, di p. XVI-164 . . . 1 50

Cacciatore (Manuale del), di G. FRANCESCHI, 4ª ediz., di p. X-386 con 55 fig. . . . . 3 —

Caffè. Suo paese e importanza, di B. BELLI, di p. XXIV-395 e 48 tav. 4 50

Caffettiere e sorbettiere, di L. MANETTI, di pagine XII-311 e 65 fig. 2 50

L. C.

Calcestruzzo (Costruzioni in) ed in cemento armato, di G. VACCHELLI, 5ª ediz., di p. XIX-387 e 274 fig. . 4 50

Calci e cementi, di L. MAZZOCCHI. 3ª ediz., di pagine XII-243 e 61 fig. 2 50

Calcolazioni mercantili e bancarie — vedi: Affari - Calcoli fatti - Commerciante - Computisteria - Contabilità - Interesse e sconto - Prontuario del ragioniere - Monete inglesi - Ragioneria - Usi mercantili - Valori pubblici.

Calcoli fatti. 90 tabelle di calcoli fatti di E. QUAIO. 2ª ediz. di p. XII-342 . . . . . 4 50

Calcolo dei canali in terra e in muratura, di C. Sandri, di p. VIII-305 . . . . . 3 50

Calcolo infinitesimale, di E. PASCAL:

I. Calcolo differenz., 3ª ediz., p. XII-310, 16 incis. . 3 —

II. Calcolo integrale, 3ª ediz., di p. VIII-330, 16 inc. 3 —

III. Calcolo delle variazioni e delle diff. finite, p. XII-300 . . . . . 3 —

— **Esercizi critici di calcolo differenziale e integrale**, di E. PASCAL, di p. XVI-275 . . . . . 3 —

Calcolo infinitesimale — vedi ai singoli titoli: Determinanti - Funzioni analitiche - Funzioni ellittiche - Gruppi di trasformazione - Matematiche superiori.

Caldaie a vapore e istruzione ai conduttori, di L. CEI, 3ª ediz. di p. XVI-474 e 282 fig. . . . . 4 —

Calderaio pratico e costruttore di caldaie a vapore, di G. BELLUOMINI. 2ª ediz., di p. XII-248, con 220 inc. 3 —

Calligrafia. Cenni storici e insegnamento di R. PERCOSSI, 2ª ediz., di p. XII-151 e 66 tav. 5 50

Calore, di E. JONES, trad. U. Fornari, p. VIII-296 e 98 fig. . . . . 3 —

Camera di Consiglio Civile, di A. FORMENTANO, di p. XXXII-574 . . . . . 4 50

Cammello (Il) di E. PLASSIO, di pag. XII-303 con 2 tav. 3 —

Campicello scolastico (Il). Agricoltura pratica pei maestri di E. AZIMONTI e C. CAMPI; di p. XI-175 e 126 incis. 1 50

Cane (Il), razze, allevamento, ecc., di A. VECCHIO, 3ª ed. con appendice " Le malattie dei cani „ di P. A. PESCE, di p. XX-521 e 168 incisioni nero e colori . . 8 50

Cani e gatti, costumi e razze, di F. FAELLI, di p. XX-429 e 153 fig. 4 50

Camottaggio, del Cap. G. CROPP, di p. XXIV-456, 387 incis. e 91 tavole 7 50

Cantiniere (Il). Man. di vinificazione di A. STRUCCHI. 4ª ediz., di p. XII-260 e 62 incis. . . . . 2 —

Canto (Il) nel suo meccanismo, di P. GUETTA, di p. VIII 253 e 24 incis.. . . . . 2 50

	L.	C.
Canto (Arte e tecnica del), di G. MAGRINI, di p. VI-166	2	—
Canto gregoriano, di A. OTTOLENGHI, di p. XVI-119	2	—
Caoutchouc e guttaperca, di L. SETTIMI, di pagine XVI-253 e 14 ill.	3	—
Capomastro (Man. del). Impiego di materiali idraulici-cementizi, di G. RIZZI, 2ª ediz., di p. XII-340 e 31 incisioni (in ristampa).		
Capomastro (Il) pratico, G. VIVARELLI (in lavoro).		
Cappellaio, di L. RAMENZONI, di p. XII-222 e 68 incis.	2	50
Carboni fossili inglesi, Coke, Agglomerati, di G. GHERARDI, di p. XII-586 e 5 carte geogr.	6	—
Carni conservate col freddo artificiale, di U. FERRETTI, di p. XVI-499 e 83 fig.	5	—
Carta (Industria della), di L. SARTORI, di p. VII-322 e 106 inc.	5	50
Carte fotografiche. Preparazioni, ecc. di L. SASSI, p. XII-353	3	50
Cartografia. Teoria e storia di E. GELCICH, di p. VI-257, con 36 fig.	2	—
Cartografia — vedi ai singoli titoli: Catasto - Celerimensura - Compensazione errori - Disegno topografico - Estimo - Lettura delle carte - Telemetria - Topografia - Triangolazioni.		
Casa dell'avvenire (La). Vade-mecum dei costruttori, ecc. di A. PEDRINI, 2ª ed. di p. XVII-917 e 445 fig.	9	50
Caseario (Man. del), di L. MORELLI. Fabbricazione del burro e del formaggio di p. XII-258 con 124 incis.	2	50
Case operaie — vedi: Abitazioni popolari - Casa dell'avvenire - Casette popolari - Città moderna - Fabbricati civili - Progettista moderno.		
Caseificio, di G. FASCETTI, storia e teoria della lavorazione del latte, di p. XX-550, con 98 incis..	5	50
Casette popolari, villini economici e abitazioni rurali, di I. CASALI. 2ª ediz. di p. VIII-406, con 470 fig.	5	50
Catasto italiano, di E. BRUNI, di p. VII-346	3	—
Cavallo (Il), di C. VOLPINI, 4ª ediz., di p. XX-593, con 131 fig. e 3 tav.	6	50
— (Proverbi sul) raccolti da C. VOLPINI, di p. XIX-172	2	50
Cavi telegrafici sottomarini, di E. JONA, di p. XVI-338 e 188 fig.	5	50
Celerimensura e tav. logarit. di F. BORLETTI. 2ª edizione, di pag. XVI-298 e 30 incisioni	4	—
Celerimensura (Tavole di) di G. ORLANDI, di p. 1200	18	—
Cellulosa, celluloide, ecc., di G. MALATESTA, di p. VIII-176	2	—
Cemento armato — vedi: Calcestruzzo - Calci e cementi - Capomastro - Mattoni - Vocabolario tecnico vol. VIII.		

L. C.

Centrali elettriche — vedi: Correnti alternate - Elettrotecnica - Illuminaz. elettrica - Ingegn. elettricista.

Ceramiche — vedi: Prodotti ceramici - Maioliche e Porcellane - Fotosmaltografia applicata alle.

Cere — vedi: Imitazioni e succedanei - Industria stearica - Materie grasse - Merceologia tecnica - Ricettario industriale.

Chauffeur (Guida del) e conducente d'automobili, e di motori d'aviazione di G. PEDRETTI. 3ª edizione di pagine XXIII-902 con 881 illustrazioni 6 50

Chimica, di H. E. ROSCOE, 7ª ediz. a cura E. Ricci, di pag. VIII-238 . . . . . 1 50

Chimica agraria, di A. ADUCCO, 3ª ediz. ampliata di pag. XII-560 . . . . . 4 —

Chimica agraria — vedi: Adulterazione vino - Alcool - Birra - Casaro - Caseificio - Cognac - Densità dei mosti - Distillazione vinacce - Enologia - Fecola - Fermentazione e fermenti - Fosfati - Humus - Liquorista - Malattie vini - Terreno agrario - Zucchero.

Chimica analitica di W. OSTWALD, trad. di A. Bolis, 2ª ediz. (in corso di stampa).

Chimica applicata alla igiene — vedi: Analisi chimica qualitativa - Bromatologia - Chimica clinica - Chimica legale - Chimica delle sostanze alimentari - Disinfezioni - Elettrochimica - Farmacista - Igienista - Spettrofotometria - Urina - Veleni.

Chimica applicata alle industrie — vedi: Acido solforico - Alcool industriale - Alluminio - Analisi volumetrica - Birra - Chimica sostanze alimentari, coloranti - Chimico - Conservazione prodotti, sostanze - Colori e vernici - Distillazione legno - Enologia - Esplodenti - Gas illuminante - Industria della carta, frigorifera, saponiera, stearica, tartarica, tintoria - Metallocromia - Merceologia - Imitazioni e succedanei - Pirotecnia - Ricettario domestico, dell' elettricista, industriale - Sale e saline - Soda caustica - Specchi - Tintore - Vetro - Zolfo - Zucchero.

Chimica clinica, di R. SUPINO, di p. XII-202 . . 2 —

Chimica fotografica, di R. NAMIAS, di p. XII-230 . 2 50

Chimica legale (Tossicologia), di N. VALENTINI, di p. XII-243 . . . . . 2 50

Chimica delle sostanze alimentari, ad uso dei Medici, dei Farmacisti, ecc., di P. E. ALESSANDRI. 2ª ediz. di p. XV-627, due tav. e 149 incis. . . . 6 50

Chimica delle sostanze coloranti (Tintura d. fibbre tessili di A. PELLIZZA, di p. VIII-480 . . . 5 50

Chimico (Man del) e dell'Industriale di L. GABBA, 5ª ediz. colle tavole di H. Will (in corso di stampa).

L. C.

Chiromanzia e tatuaggio, di G. L. CERCHIARI, di p. XX-232 e 60 ill. 4 50

Chirurgia operativa, di R. STECCHI e A. GARDINI, di p. VIII-322, con 118 inc. . . . . 3 —

Chitarra (Studio della), di A. PISANI, di p. XVI-138, 52 fig. e 27 esempi . . . . . 2 —

Cibi — vedi: Aromatici - Bromatologia - Carni conservate - Conservazione sostanze alim. - Macelli moderni - Gastronomo moderno - Pane - Pasticciere - Pastificio - Patate - Tartufi e funghi.

Ciclista (Manuale del), di U. GRIONI, 3ª ediz., di p. XVI-496, 285 incis. e 8 tav. . . . . 5 —

Cinematografo e industria delle Films, di G. MORELLI (in lavoro).

Città moderna, (La), ad uso degli ingegneri, di A. PEDRINI, di p. XX-510, 194 fig. e 10 tav. . . . . 6 —

Classificazione delle scienze, di C. TRIVERO, di p. XVI-292 . . . . . 3 —

Climatologia, di L. DE MARCHI, di p. X-294 e 6 carte 1 50

Codice del bollo. Testo unico commentato da E. CORSI, di p. C-564 . . . . . 4 50

Codice cavalleresco italiano, di J. GELLI, 11ª ediz. di p. XV-307 . . . . . 3 —

Codice civile del Regno, riscontrato e coordinato da L. FRANCHI, 4ª ediz. p. 232 . . . . . 1 50

Codice di commercio, riscontrato da L. FRANCHI, 5ª ediz. dip. IV-158 . . . . . 1 50

Codice doganale italiano, commentato da E. BRUNI, di p. XX-1078 . . . . . 6 50

Codice dell'Ingegnere Civile, Industriale, Navale, Elettrotecnico, di E. NOSEDA, 2ª edizione rifatta, di pag. XXIV-1005 . . . . . 9 50

Codice nuovo del lavoro. Manuale di legislazione sociale, di E. NOSEDA, di pag. XXIII-605 . . . . 6 50

Codice di marina mercantile, 4ª ediz a cura di L. FRANCHI, di p. IV-290 . . . . . 1 50

Codice penale e nuovo codice di procedura penale, a cura di L. FRANCHI, 4ª ediz., di p. IV-209 1 50

Codice penale per l'esercito e penale militare marittimo per L. FRANCHI, 2ª ediz. di p. 179 . . 1 50

Codice del perito misuratore, di L. MAZZOCCHI e E. MARZORATI, 3ª ediz., di p. VIII-582 e 18 ill. . . 5 50

Codice di procedura civile, riscontrato da L. FRANCHI, 3 ediz., di p. 181 . . . . . 1 50

Codice del teatro, di N. TABANELLI, di p. XVI-328 3 —

Codici (I cinque) del Regno d'Italia (Civile - Procedura civile - Commercio - Penale e nuovo Codice di Procedura penale), edizione Vade-mecum, a cura di L. FRANCHI, 5ª ediz., di pag. 782, legatura in pelle . . 5 —

L. C.

Codici e leggi usuali d'Italia, riscontrati sul testo ufficiale e coordinati e annotati da L. FRANCHI, raccolti in cinque grossi volumi legati in pelle.

Vol. I. Codici — Codice civile - di procedura civile - di commercio - penale - procedura penale - della marina mercantile - penale per l'esercito - penale militare marittimo *(otto codici)* 3ª ediz. di pagine VIII-1261 . . . . . 9 50

Vol. II. Leggi usuali d'Italia. Raccolta coordinata di tutte le leggi speciali più importanti e di più ricorrente ed estesa applicazione in Italia; con annessi decreti e regolam. e disposte secondo l'ordine alfabetico delle materie. 2ª ediz. riveduta e aumentata, divisa in 3 parti.

Parte I. Dalla voce " Abbordi di mare , alla voce " Dominii collettivi „ di p. VIII-1458 (in ristampa).

Parte II. Dalla voce " Ecclesiastici , alla voce " Polveri piriche , p. 1459 a 2855 . . . . . 12 50

Parte III. Dalla voce " Posta , alla voce " Zucchero , p. 2857 a 4030 . . . . . 12 50

Parte IV. Appendice, contenente le leggi dal 15 maggio 1905 al 1° gennaio 1911, di p. 1910 a due colonne, legatura in tutta pelle 10 50

Vol. III. Leggi e convenzioni sui diritti d'autore, raccolta generale delle leggi italiane e straniere di tutti i trattati e le convenzioni esistenti fra l'Italia ed altri Stati. 2ª ediz. di p. VIII-617 . . . . . 6 50

Vol. IV. Leggi e convenzioni sulle privative industriali. Disegni e modelli di fabbrica. Marchi di fabbrica e di commercio. Legislazione italiana e straniera. Convenzioni fra l'Italia ed altri Stati, di pagine VIII-1007 . . . . . 6 50

Cognac. Spirito di vino e distillazione delle fecce e d. vinacce, di DAL PIAZ-PRATO. 2ª ediz. a cura di A. F. Sannino, di p. XII-210, con 38 incis. . . . . 2 —

Coleotteri italiani, di A. GRIFFINI, di p. XVI-334 e 215 incis. . . . . 3 —

Collaudazione di materiali, di V. GOFFI, di p. XV-260, 25 incis. e 8 tav. 3 50

Colle animali e vegetali, gelatine e fosfati d'ossa, di A. ARCHETTI, di p. XVI-195 . . . . . 2 50

Colombi domestici e colombicoltura, di P. BONIZZI, 3ª ediz., di p. X-212 e 26 fig. . . . . 2 —

Colonie. Manuale coloniale, di P. REVELLI (in corso di stampa).

Colori (La scienza dei) e la pittura, di L. GUAITA, 2ª ediz., di p. IV-368 . . . . . 3 —

Colori e vernici, ad uso dei pittori di M. MEYER e P. BONOMI DA-PONTE. 5ª ediz. del Man. GORINI-APPIANI di pag. XVI-308 con 39 incisioni . . . . . 3 —

Coltura montana, di G. SPAMPANI, di p. VIII-424 e 171 incis. 4 50

	L.	C.
Commerciante (Manuale del), di C. DOMPÉ, 3ª ediz., di p. XIV-663	6	50
Commercio (Storia del) di R. LARICE, 2ª ed., p. XII-299	3	—
Commercio — vedi ai singoli titoli: Affari - Codice di comm., doganale - Corrispondenza - Geografia economica, commerciale - Produzione e commercio vino - Scritture affari - Storia del Comm. - Usi mercantili.		
Commissario giudiziale — vedi: Curatore dei fallimenti		
Compensazione degli errori e rilievi geodetici, di F. CROTTI, di p. IV-160	2	—
Composizione delle tinte nella pittura a olio e ad acquerello, di G. RONCHETTI, di pagine VIII-186	2	—
Computisteria, di V. GITTI: Vol. I. Computisteria commerciale, 7ª ediz. di p. VII-206	1	50
— Vol II. Computisteria finanziaria, 5ª ediz., p. VIII-157	1	50
Computisteria agraria, di L. PETRI, 3ª ediz. di p. VII-210	1	50
Concia delle pelli. L'Arte del conciatore, del cuoiaio e del pellicciaio, di G. VENTUROLI. 4ª ediz., del Manuale di G. GORINI, di pag. XVI-206.	2	50
Concia e tintura delle pelli, di V. CASABURI, di pag. 445 e XXX tabelle	4	50
Conciatore (Manuale del) di A. GANSSER, di pagine XXIV-382 con 22 incisioni e 2 tavole.	4	50
Conciliatore (L'ufficio di Conciliazione) di C. CAPALOZZA, di p. XLIII-461, con 144 formule di atti	4	50
Concimi, di A. FUNARO, 3ª ediz. di p. VIII-306	2	50
Condottura d'acqua potabile, di P. BRESADOLA, di p. XV-334, con 37 fig.	3	50
Coniglicoltura pratica, di G. LICCIARDELLI, 4ª ediz., di p. XIX-268 e 62 fig.	2	50
Conservazione delle sostanze alimentari, di G. GORINI, 4ª ediz. a cura Franceschi e Venturoli, di p. VIII-231	2	—
Conservazione prodotti agrari, di C. MANICARDI, di p. XV-220	2	50
Conserve alimentari (L'industria delle) di G. D'ONOFRIO, di pag. XX-654, con 165 incisioni	5	50
Consigli pratici — vedi: Assistenza infermi - Caffettiere - Infortuni lavoro - Liquorista - Medicina d'urgenza - Pasticciere e confettiere - Ricett. domestico - Ricett. d. elettricista - Ricett. fotografico - Ricett. industriale - Ricettario industrie tessili - Ricettario di metallurgia - Soccorsi d'urgenza.		
Consoli, Consolati e Diritto consolare, di M. ARDUINO, di p. XV-277	3	—
Consorzi difesa del suolo. Idraulica, rimboschimento, di A. RABBENO, di p. VIII-296	3	—
Contabilità azienda rurale, di A. DE BRUN, di p. XIV-539	4	50

L. C.

Contabilità comunale, di A. DE BRUN, 2ª ediz., di p. XVI-650 . . . . . 5 50

Contabilità domestica per le famiglie e le scuole, di O. BERGAMASCHI, 2ª ediz. (in lavoro).

Contabilità e amministrazione imprese elettrotecniche, di F. MIOLA, di p. XVI-262 . 3 —

Contabilità generale dello Stato, di E. BRUNI, 3ª ediz., di p. XVI-420 . . . . . 3 —

Contabilità — vedi: Computisteria commerciale - Computisteria finanziaria - Computisteria agraria - Contabilità comunale, domestica - Contabilità generale dello Stato - Interessi e sconti - Logismografia - Paga giornaliera - Ragioneria - Ragioneria delle Cooperative - Ragioneria industriale, pubblica - Scritture d'affari - Società di mutuo soccorso - Valori pubblici.

Contadino (Manuale del) di ALLIEVI (in corso di stampa).

Contrappunto, di G. BERNARDI, di p. XVI-238 . . 3 50

Conversazione italiana neo-ellenica, di E. BRIGHENTI, di p. XII-143 . . . . . 2 —

Conversazione italiana-tedesca, di A. FIORI e G. CATTANEO. 9ª ediz., di p. VIII-484 . . . . 3 50

Conversazione francese-italiana, di E. BAROSCHI-SORESINI, 2ª ediz., di p. XV-288 . . . . 2 50

Cooperative rurali, di V. NICCOLI. 2ª ediz., di pagine VIII-394 . . . . . 3 50

Cooperazione nella sociologia e nella legislazione, di P. VIRGILII, di p. XII-228 . . . 1 50

Correnti elettriche alternate, ecc., di A. MARRO, 3ª ediz. (in corso di stampa).

Corrispondenza commerciale poliglotta, Italiana, Francese, Tedesca, Inglese e Spagnuola, di G. FRISONI, in sei parti

I. Parte italiana, 5ª ediz., pag. XX-520 . . . 4 —
II. » spagnuola, p. XX-440 . . . . . 4 —
III. » francese, 3ª ediz., p. XX-449 . . . . 4 —
IV. » inglese, di p. XVI-448 . . . . . 4 —
V. » tedesca, 2ª ediz., di pag. XX-512 . . . 4 —
VI. » portoghese (in lavoro).

Corrispondenza telefonica. Norme di servizio, ecc., di O. PERDOMINI, di p. XII-375 . . . . . 3 50

Corse. Dizionario delle voci più in uso, di G. FRANCESCHI, di p. XII-305 . . . . . 2 50

Corti d'Assise. Guida dei dibattimenti, di C. BALDI, di p. XX-401 . . . . . 3 50

Cosmografia, di B. M. LA LETA (esaurito).

Costruttore navale, di G. ROSSI, 2ª ediz. (in corso di stampa).