

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

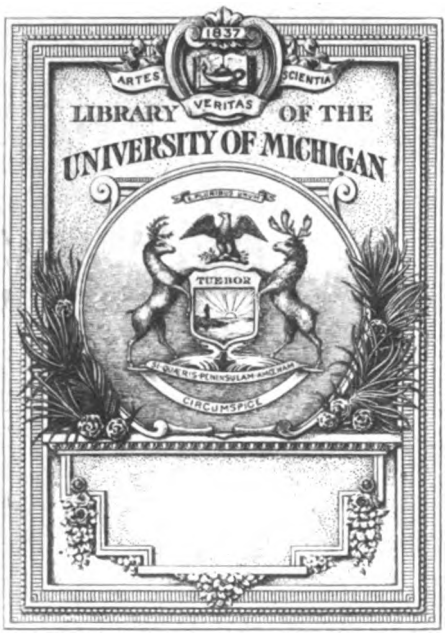
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 578,635

Digitized by Google



Digitized by Google

MATHEMATICS
QA
31
A673
F5
1921

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

LES ŒUVRES COMPLÈTES D'ARCHIMÈDE

Digitized by Google

Digitized by Google

LES

ŒUVRES COMPLÈTES

D'ARCHIMÈDE

Traduites du grec en français

AVEC UNE INTRODUCTION ET DES NOTES

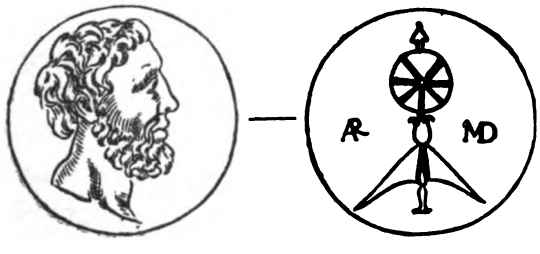
PAR

PAUL VER EECKE

INGÉNIEUR DES MINES (A. I. Lg.)

INSPECTEUR GÉNÉRAL DU TRAVAIL

Δός μοι ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν.
Donne-moi où je puisse me tenir ferme,
et j'ébranlerai la terre.



DESCLÉE, DE BROUWER & Cie

PARIS
30, rue Saint-Sulpice, 30

BRUXELLES
50, rue de la Montagne, 50

1921

Digitized by Google

TOUS DROITS DE REPRODUCTION ET DE TRADUCTION RÉSERVÉS
POUR TOUS PAYS

Copyright by Desclée, De Brouwer & Cie. — Paris, 1921.

Digitized by Google

Hist. of Sci.
Blanchard
3-20-25
11292

PRÉFACE

La traduction française des œuvres d'Archimède que nous publions est le fruit de plusieurs années d'un travail fourni par surcroît au cours de nos fonctions d'ingénieur.

Commencée simplement par goût rétrospectif pour l'étude des origines et du développement historique de diverses sciences dont nous recevons l'enseignement dans leur épanouissement actuel, nous avons poursuivi et achevé cette traduction, grâce aux encouragements d'amis éclairés, curieux comme nous-même, non seulement de connaître Archimède bien au delà de ses inventions familières de la quadrature approchée du cercle, de la quadrature exacte de la parabole et du principe fondamental de l'hydrostatique, mais surtout d'admirer l'un des génies les plus profonds de l'antiquité dans la puissance de ses méthodes synthétiques et dans la rigueur ou la séduction de ses démonstrations originales.

Notre traduction s'étant imposé de ne jamais sacrifier l'exactitude à l'élégance, elle devait, vu la nature du sujet, être absolument littérale, et s'interdire de dénaturer le style d'Archimède par des libertés trop faciles, empruntées au langage de la géométrie moderne. Ceux de nos lecteurs qui sont à même de comprendre le texte grec pourront constater la fidélité scrupuleuse que nous avons mise à rendre toutes les nuances que le grand géomètre pouvait exprimer dans une langue, la plus riche du monde, qui est restée le fonds commun où toutes les sciences exactes sont venues et viennent encore, dès leur naissance, puiser leur terminologie.

Les œuvres d'Archimède seraient trop ardues pour un grand nombre de lecteurs peu familiarisés avec les méthodes des géomètres anciens, si quelque secours ne leur était apporté sous forme de notes aux endroits qui leur paraîtraient obscurs ou difficiles. On ne doit, en effet, pas perdre de vue qu'Archimède n'a pas écrit pour des profanes ou des commençants, mais qu'il s'adressait à des savants de l'école d'Alexandrie, fort au courant des sciences géométrique et mécanique de leur temps,

Digitized by Google

condensées du reste dans les ouvrages d'Euclide, et que par conséquent ses démonstrations ont l'habitude d'invoquer tacitement et d'abandonner à la sagacité du lecteur une foule de relations intermédiaires. C'est pourquoi, à côté de remarques philologiques, tendant à justifier notre interprétation des textes ou à combler conjecturalement certaines lacunes des manuscrits, nous avons jugé utile d'ajouter un grand nombre de notes destinées à reprendre, en notations modernes, d'une manière plus explicite, les passages arides des démonstrations.

Enfin nous avons fait précéder l'ouvrage d'une Introduction *présentant une analyse succincte des œuvres d'Archimède.*

Paul Ver Eecke

Digitized by Google

INTRODUCTION

Sed illum (Archimedem) plures laudant quam legant; admirantur plures quam intelligant.

(TAQUET, géomètre du XVII[e] siècle.)

I

Bien que la renommée d'Archimède ait été extraordinaire dans l'antiquité, on ne possède que peu de renseignements sur sa vie. Eutocius d'Ascalon écrit incidemment dans son commentaire sur le traité *De la Mesure du Cercle* d'Archimède : « Ce livre, comme le dit Héraclide dans sa *Vie d'Archimède*, est d'ailleurs utile aux usages de la vie. » Une biographie d'Archimède, qui ne nous est pas parvenue, aurait donc été écrite par un certain Héraclide, qui était probablement cet ami du même nom dont Archimède nous parle dans le préambule de son traité *Des Spirales*.

Archimède périt tragiquement à la fin du siège de Syracuse, en l'an 212 avant notre ère, et, comme Tzetzès (1) lui attribue une carrière de soixante-quinze années, il serait donc né environ 287 ans avant J.-C.

Archimède nous apprend lui-même qu'il était fils de l'astronome Phidias, car il nous dit dans son *Arénaire* : « Je suppose que le diamètre du soleil est trente fois plus grand que celui de la lune, mais pas davantage, bien que parmi les astronomes qui nous ont précédés, Eudoxe ait déclaré qu'il était neuf fois aussi grand, Phidias, mon père, douze fois aussi grand, et qu'Aristarque ait essayé de démontrer que le diamètre du soleil était plus grand que dix-huit fois et plus petit que vingt fois le diamètre de la lune. »

D'après Polybe et Plutarque, il était parent d'Hiéron, roi de Syracuse, dans l'intimité duquel il semble avoir vécu, sans avoir

1. TZETZÈS, *Chiliade 22*, histoire 35, vers 105.

Digitized by Google

cependant occupé de place dans le gouvernement de sa patrie. C'est d'ailleurs à Gélon, fils d'Hiéron, qu'il adressera, pour ainsi dire à titre de récréation mathématique, ce curieux problème de l'Arénaire, relatif au nombre de grains de sable que pourrait contenir l'univers, et qui nous est resté comme l'un des documents les plus précieux sur l'arithmétique des anciens et surtout sur leur astronomie, en raison de l'allusion qu'il fait, tant de siècles avant Copernic et Galilée, au système héliocentrique de notre monde.

Diodore de Sicile, dans un passage de sa *Bibliothèque historique*, sur lequel nous aurons à revenir, nous dit qu'Archimède voyagea en Egypte. Son séjour dans ce pays, où il put s'initier à la science égyptienne, doit avoir eu la plus grande influence sur l'éclosion de son génie. C'est à l'école d'Alexandrie qu'il devait rencontrer les maîtres les plus célèbres de son temps, et qu'il se lia d'amitié avec des géomètres habiles, tels que Conon de Samos, Eratosthène et Dosithée, dont les noms reviendront souvent dans ses écrits, lorsque, rentré dans sa patrie, il aura pris l'habitude de leur adresser la plupart de ses découvertes en géométrie.

A l'époque où Archimède vint en Egypte, il n'y rencontra sans doute plus Euclide qui y avait été appelé vers l'an 300 avant J.-C. ; à moins cependant que ce maître incontesté de l'école d'Alexandrie n'y eût atteint une extrême vieillesse. En tout cas, Euclide avait laissé un ouvrage célèbre, intitulé *Les Eléments*, dans lequel, réunissant ses propres découvertes en géométrie à celles de ses prédécesseurs connus (1) ou anonymes, il les présente sous la forme de propositions graduées à partir du postulatum auquel son nom est resté attaché, et qui constitue pour ainsi dire une définition déguisée de l'espace absolu, non tel qu'il peut être, mais au moins tel qu'il paraît être à nos sens

1. Ces prédécesseurs connus sont Thalès, auquel on attribue le premier usage de la circonférence du cercle pour la mesure des angles ; Pythagore, dont la proposition relative au carré de l'hypoténuse devait entraîner de si nombreuses applications ; Œnopide de Chio, auteur de problèmes tels que celui de faire un angle égal à un autre, et de diviser un angle en deux parties égales ; Zénodore, qui démontra, contrairement à ce que les géomètres admettaient alors, que l'égalité des périmètres n'entraîne pas l'équivalence des aires ; Hippocrate de Chio, dont les lunules fournissent le premier exemple d'une aire curviligne équivalente à une aire rectiligne ; enfin Platon, dont l'invention des sections coniques devait engager ses disciples Aristée, Eudoxe, Ménechme et Dinostrate très avant dans l'étude des courbes autres que la circonférence du cercle.

Digitized by Google

bornés. C'est dans ce traité, édifice de la logique formelle, demeuré classique jusqu'à nos jours, et qui a pour ainsi dire fixé ataviquement le cerveau humain dans l'attitude euclidienne, au point de rendre les incursions de notre entendement dans la géométrie générale de l'hyper-espace plutôt hésitantes et pénibles, qu'Archimède prit l'habitude de découper la science en propositions hiérarchiquement disposées, et qu'il puisa la méthode de démonstration par la réduction à l'absurde, indirecte, généralement longue, mais satisfaisant toujours l'esprit d'une manière complète.

Quand on considère le grand nombre et surtout l'importance des découvertes qu'Archimède a faites en géométrie et en mécanique, et qu'on réfléchit aux développements que peuvent avoir eus tels de ses ouvrages dont nous ne possédons plus que les titres, on comprend l'admiration que son génie a dû provoquer chez les écrivains de l'antiquité.

Voici dans quels termes Silius Italicus nous parle d'Archimède dans le poème qu'il consacre à la seconde guerre punique (1) : « Il » fut donc à Syracuse un homme élevé par son génie au-dessus de la » sphère de l'humanité et la gloire immortelle de cette ville, sans » être favorisé de grands biens. Tous les ressorts de l'univers lui » étaient connus. Il savait pourquoi les sombres rayons du soleil levant » étaient le présage de la tempête ; si la terre était fixe ou suspendue » sur son axe ; pourquoi la mer, répandue autour du globe, restait » enchaînée sur sa surface ; quelle était la cause de l'agitation de ses » flots, et des différentes phases de la lune ; quelle loi suivait l'océan » dans le flux et le reflux de ses ondes. On peut croire aussi, d'après » la renommée, qu'il eût compté les sables de la terre, lui qui, » par les mains d'une femme seule, savait mettre une galère à flot, » et monter des roches amoncelées contre la pente d'un terrain. »

Plutarque (2), de son côté, nous a laissé l'éloge suivant : « Au » reste, Archimède avait une âme si élevée, un esprit si profond, et » une si grande richesse de théories géométriques, qu'il ne voulut » jamais rien laisser par écrit sur la construction de ces machines qui » lui avaient acquis tant de gloire et lui avaient fait attribuer, non

1. *La seconde guerre punique, poème de Silius Italicus,* traduit par M. Lefèbvre de Villebrune, Paris, 1781, 3 vol. in-12, tome II, liv. XIV, p. 207.

2. Plutarque. *Les Vies des hommes illustres,* traduites par Dominique Ricard. Paris, 1798-1803 (édition princeps), tome V, p. 401.

Digitized by Google

» une science humaine, mais une intelligence divine ; regardant la » mécanique et, en général, tout art qu'on exerce pour le besoin, » comme des arts vils et obscurs, il ne se livra qu'aux sciences dont » la beauté et la perfection ne sont liées à aucune nécessité, et avec » lesquelles toutes les autres ne sauraient entrer en comparaison ; » dans les premières, la démonstration dispute de prix avec le sujet, » l'un donne la grandeur et la beauté, l'autre opère la conviction et » donne une forme merveilleuse. Dans toute la géométrie, on ne » trouverait pas des questions plus difficiles et plus profondes, exposées » en des termes plus simples, et par des principes plus clairs, que » celles qu'Archimède a traitées. Les uns attribuent cette clarté à sa » facilité naturelle ; d'autres à l'excès du travail qui donne un air si » facile à ce qui a le plus coûté. On pourrait bien ne pas découvrir » de soi-même la démonstration de certains problèmes ; mais après » l'avoir lue dans ses écrits, on se persuade qu'on l'aurait trouvée » sans peine, tant le chemin par lequel il mène à la démonstration est » facile et court. Il ne faut donc pas refuser de croire ce qu'on dit » de lui, que sans cesse attiré par la géométrie, comme par une syrène » domestique, il oubliait de boire et de manger, et négligeait tous » les soins de son corps ; traîné souvent par force aux bains et aux » étuves, il traçait sur les cendres du foyer des figures géométriques, » et sur son corps frotté d'huile, il tirait des lignes avec le doigt ; » tant cette étude le ravissait ! tant il était réellement possédé de la » passion des Muses ! Mais quoiqu'il eût fait plusieurs inventions très » belles, il pria, dit-on, ses parents et ses amis de ne mettre, après » sa mort, sur son tombeau, qu'une sphère inscrite dans un cylindre, » et de marquer dans l'inscription de quelle quantité, dans ces deux » solides, le contenant surpasse le contenu. Ce fut par ces connais- » sances profondes en mécanique qu'Archimède se conserva invincible » lui et sa ville, autant qu'il dépendit de lui. »

Plutarque revient ailleurs sur cette préférence qu'Archimède accordait plutôt aux spéculations de la théorie pure qu'aux applications de la mécanique. Parlant des machines de guerre dont Appius, lieutenant de Marcellus, était venu menacer les murs de Syracuse, il dit (1) : « Mais Archimède ne tenait pas grand compte de toutes ses machines, » qui, en effet, n'étaient rien auprès des siennes ; non qu'il les donnât

1. PLUTARQUE, traduction précitée de RICARD, tome V, p. 393.

Digitized by Google

» pour des inventions d'un grand prix ; il ne les regardait lui-même » que comme de simples jeux de géométrie, qu'il n'avait faits que dans » des moments de loisir, et, la plupart, sur les instances du roi Hiéron, » qui ne cessait de l'engager à tourner son art, des choses purement » intellectuelles vers les objets sensibles, et de rendre ses raisonne- » ments en quelque sorte accessibles aux sens et palpables au commun » des hommes en les appliquant par l'expérience à des choses d'usage.»

On a longtemps attribué à Archimède une quarantaine d'inventions mécaniques, sur la foi d'un texte de Pappus qui, ainsi que l'a montré une saine critique, avait été mal interprété dans la traduction latine donnée par Commandin, en 1588 (1). Mais si ses inventions ont été moins nombreuses que ne le dit la légende, c'est à juste titre qu'elles ont excité l'étonnement de ses contemporains, autant par leur nouveauté que par les circonstances mémorables dans lesquelles elles furent réalisées ; et elles conserveront toujours l'admiration de la postérité en raison du rôle primordial qu'Archimède fut le premier à assigner au levier dans la mécanique appliquée.

Plutarque nous parle de la manière suivante des mécanismes qu'Archimède aurait mis en œuvre sur les instances du roi Hiéron (2) : « Archimède avança un jour au roi Hiéron, dont il était le parent et » l'ami, qu'avec une force donnée, on pouvait remuer un fardeau de » quelque poids qu'il fût. Plein de confiance sur la force de sa » démonstration, il se vanta que s'il avait une autre terre, il remuerait » à son gré celle-ci en passant dans l'autre. Le roi, étonné de cette » assertion, le pria de réduire en pratique son problème, et de lui » faire voir une grande masse remuée par une petite force. Archimède » ayant fait tirer à terre, avec un grand travail et à force de bras, » une des galères du roi, ordonna qu'on y mît la charge ordinaire, » avec autant d'hommes qu'elle pourrait contenir ; ensuite, s'étant assis » à quelque distance, sans employer d'effort, en tirant doucement de » la main le bout d'une machine à plusieurs poulies, il ramène à lui » la galère qui glissait aussi légèrement et avec aussi peu d'obstacle,

1. *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones, a* Fed. Commandini *Urbinate in latinum conversae et commentariis illustratae.* Pisauri, 1588, in-4°. Cet ouvrage étant devenu fort rare, on trouvera le passage en question dans la réimpression faite à Bologne, en 1660, in-fol., page 460.

2. Plutarque, traduction précitée de Ricard, tome V, *Vie de Marcellus,* chap. XIX, p. 395.

Digitized by Google

» que si elle avait fendu les flots. Le roi, émerveillé d'un tel pouvoir » de l'art, engagea Archimède à lui faire toutes sortes de machines et » de batteries de siège, soit pour l'attaque, soit pour la défense des » places. »

Proclus (1),dans son commentaire sur Euclide, nous parle également d'un navire qu'Hiéron aurait fait construire pour le roi Ptolémée, et qui, ne pouvant être lancé par les efforts réunis des syracusains, fut agencé mécaniquement par Archimède, de manière qu'Hiéron put le déplacer lui-même ; et il ajoute qu'Hiéron déclara « qu'à partir de ce moment Archimède pouvait être cru sur toute chose qu'il pût avancer. »

Proclus ne nous fournit en réalité aucun renseignement sur la nature de l'appareil qu'Archimède aurait utilisé dans ces circonstances; tandis que Plutarque, qui écrit d'ailleurs en profane sur la mécanique, plus de deux siècles après les événements, le désigne à tort, croyons-nous, comme une espèce de moufle qu'il nomme polyspaste (2), c'est à-dire un engin composé de cordages et d'une série de poulies à gorges, montées dans une même chape, ou sur des axes particuliers, ou sur le même axe. Bien qu'Archimède eût été fort capable de perfectionner cet appareil au point de vue de son agencement différentiel, il est probable qu'il ne l'a pas inventé de toutes pièces, et que l'appareil doit remonter à une antiquité plus haute, tout au moins sous la forme élémentaire de la simple poulie de renvoi. Et d'ailleurs Vitruve, qui est antérieur à Plutarque, nous décrit les différentes espèces de moufles à trois, à cinq et à multiples poulies, qu'il désigne sous les noms de trispastes, pentaspastes (3) et polyspastes (4), sans en faire remonter l'invention à Archimède. Cependant, Vitruve connaissait les œuvres d'Archimède, comme il nous le rapporte lui-même : « Ceux, dit-il, qui » ont traité des machines sont Diadès, Archytas, Archimède, Ctésibius, » Nymphodorus, Philon Byzantin, Diphilos, Charidas, Polyidos, » Pyros, Agesistrates. Or, j'ai pris dans les livres de tous ces auteurs

1. *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii, recognovit* G FRIEDLEIN. Leipzig, in-8°, I, p. 63.

2. πολύσπαστος, littéralement : tirant par plusieurs (poulies).

3. *Les dix livres d'Architecture de Vitruve avec les notes de Perrault,* nouvelle édition augmentée d'un grand nombre de planches et de notes importantes par E. TARDIEU et A. COUSSIN, fils. Paris, Morel, 1850, 2 vol. in-4°, avec planches gravées hors texte. Voir tome II, livre X, chap. III, p. 226.

4. *Ibidem,* tome II, livre X, chap. V, p. 231 et planche 82, fig. 2.

Digitized by Google

» ce dont j'ai jugé pouvoir me servir pour me faire un recueil (1). » On trouve bien, dans les œuvres de Galien (2), un passage où l'invention du polyspaste, ou moufle à plusieurs poulies, est attribué à Archimède ; mais cet auteur peut avoir emprunté ce renseignement à Plutarque qui lui est antérieur. Oribase (3), médecin grec du IV^e^ siècle, ne mérite guère plus de créance lorsque, à propos de l'application d'une petite moufle au traitement des luxations et des fractures, il dit qu'Archimède inventa le trispaste, c'est-à-dire la moufle à trois poulies ou à trois cordages.

Un passage des œuvres d'Athénée (4) mérite toutefois plus d'attention lorsqu'il rapporte, à sa manière, le lancement du vaisseau d'Hiéron : « Comme on s'occupait beaucoup de mettre cette seule » partie à flot, Archimède, ce célèbre mécanicien, l'y mit lui seul, en » faisant agir peu de personnes. En effet, il en vint à bout moyen- » nant une vis qu'il imagina ; et c'est à lui qu'on est redevable de » cette invention. » Il s'agirait donc, dès lors, de l'invention originale soit de la vis qui, avec son écrou, constitue une machine se rapportant à la fois au levier et au plan incliné, soit de la vis sans fin, dont le filet mène les dents successives d'une roue à laquelle il se présente toujours d'une manière uniforme. D'ailleurs, c'est peut-être à ce dernier appareil qu'Eustathe (5) fait allusion, dans le passage de son commentaire sur l'Iliade où il dit qu'Archimède « passe pour avoir » trouvé le premier l'application mécanique de l'hélice, dont il acquit » une grande gloire. » En tout cas, quel que fût en réalité l'appareil utilisé dans cette circonstance, il résolvait le problème qui consiste à soulever un poids donné au moyen d'une force déterminée ; et ce serait, d'après Pappus (6), à l'occasion de cette découverte qu'Archi-

1. *Ibidem,* tome II, livre VII, p. 74.

2. GALENUS, *in Hippocr. de Artic.* IV, édition Kühn, p. 747.

3. ORIBASE. *Œuvres,* texte grec en grande partie inédit, collationné sur les manuscrits, traduites pour la première fois en français avec une introduction et des notes, des tables et des planches, par BUSSEMAKER et DAREMBERG. Paris, 1851-1876, 6 vol. in-8°.

4. ATHÉNÉE. *Banquet des savants,* traduit tant sur les textes imprimés que sur plusieurs manuscrits, par LEFÈBVRE DE VILLEBRUNE. Paris, 1789-1791, 5 vol. Voir : tome II, chap. X, p. 300.

5. EUSTATHIUS, *ad Iliad.,* édition Stahlbaum, III, p. 114.

6. *Pappi Alexandrini Collectiones quae supersunt, edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit* Fred. HULTSCH. Berolini, 1875-1878, 3 vol. in-8°, VIII, prop. X, p. 460.

Digitized by Google

mède aurait prononcé ces fières paroles qui font colossalement image dans toutes les mémoires : « Donne-moi où je puisse me tenir ferme, et j'ébranlerai la terre (1). »

Diodore de Sicile, l'historien grec dont les œuvres nous sont les plus précieuses au point de vue de l'histoire des sciences physiques et naturelles, attribue à Archimède l'invention de l'appareil hydraulique connu sous le nom de limaçon, de pompe spirale ou, plus généralement, de vis d'Archimède. Il s'exprime comme suit dans un premier passage consacré à la description de l'Egypte (2) : « Le terrain allu-» vionnaire et bien arrosé du Nil produit des fruits abondants et » variés. Le Nil y dépose annuellement, après ses crues, du nou-» veau limon, et les habitants peuvent facilement arroser toute l'île » à l'aide d'une machine construite par Archimède de Syracuse, la-» quelle, pour sa forme, porte le nom de limaçon. » Et ailleurs, dans un passage où il parle de l'exploitation des mines en Espagne, il est plus explicite encore (3) : « Les mineurs trouvent quelquefois des » fleuves souterrains dont ils diminuent le courant rapide en les » détournant dans des fossés inclinés, et la soif inextinguible de l'or » les fait venir à bout de leurs entreprises. Ce qu'il y a d'étonnant, » c'est qu'ils épuisent entièrement les eaux au moyen des vis égyp-» tiennes qu'Archimède de Syracuse inventa pendant son voyage en » Egypte. Ils les élèvent ainsi successivement jusqu'à l'ouverture de » la mine et, ayant desséché les galeries, ils y travaillent à leur aise. » Cette machine est si ingénieusement construite que, par son moyen, » on ferait écouler d'énormes masses d'eau et on tirerait aisément un » fleuve entier des profondeurs de la terre à la surface. Mais ce n'est » pas seulement en ceci qu'il faut admirer le talent d'Archimède ; on » lui doit encore beaucoup d'autres ouvrages plus grands et qui sont » célèbres par toute la terre. Nous les décrirons avec soin et en détail » lorsque nous serons arrivés à l'époque d'Archimède. » Malheureu-sement cette dernière phrase renvoie à l'un des livres de Diodore qui ne

1. Δός μοι ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν, phrase rapportée parfois inexactement, et dont nous avons préféré donner la traduction littérale.

2. *Bibliothèque historique de Diodore de Sicile,* traduite du grec par Ferd. Hoefer. Deuxième édition, Paris, 1865, 4 vol., in-12, vol. I, liv. I, chap. XXXIV, p. 37.

3. Diodore de Sicile, édition de la traduction précitée, vol. II, liv. V, chap. XXXVII, p. 39.

Digitized by Google

nous sont pas parvenus, et dans lequel nous aurions sans doute trouvé des détails sur la plupart des inventions d'Archimède.

Lorsque Athénée raconte que le roi Hiéron fit construire un vaisseau destiné à Ptolémée Philopator, il attribue également à Archimède l'invention du limaçon : « Quoique, dit-il, la sentine eût une » extrême profondeur, un seul homme la vidait moyennant la vis sans » fin qu'Archimède inventa (1). »

Malgré ces deux témoignages, le doute plane sur l'origine de cet appareil d'exhaure qui remonte peut-être à une antiquité plus haute. En effet, Strabon (2) mentionne aussi l'usage du limaçon en Egypte, sans en attribuer cependant l'invention à Archimède, dans le passage suivant de sa *Géographie* : « L'une des trois légions chargées aujour- » d'hui de garder l'Egypte y a son cantonnement : une rampe descend » du camp au bord du Nil, et un système de roues et de limaces, » disposé le long de cette rampe, et mu par les bras de cent cinquante » captifs, élève l'eau du Nil jusqu'au camp. » Du reste, l'invention de cet appareil n'est pas attribuée à Archimède, ni dans la description succincte que nous en donne Philon de Byzance (3), ni dans la description plus minutieuse que nous en trouvons dans Vitruve (4).

L'invention des orgues hydrauliques a été attribuée à Archimède sur la foi du passage suivant des œuvres de Tertullien (5) : « Con- » sidère l'étonnante merveille d'Archimède, je veux dire cette machine » hydraulique où tant de rouages, tant de parties diverses, tant d'as- » semblages, tant d'issues pour les voix, tant d'armées de flûtes ne » forment qu'une masse invisible. » Cependant, lorsque Athénée parle de cet instrument de musique, il dit, tout au contraire : « Sache que » c'est une invention qui est due à un alexandrin et qui même était » barbier de profession : il se nommait Ctésibius (6). » D'ailleurs,

1. ATHÉNÉE, édition de la traduction précitée de LEFÈBVRE DE VILLEBRUNE, tome II, liv. V, p. 312.

2. *Géographie de Strabon*, traduction nouvelle par Amédée TARDIEU. Paris, 1880, 3 vol., in-12, vol. III, liv. XVII, p. 433.

3. PHILO BIZANTIUS, édition Pfeiffer, III, p. 330.

4. VITRUVE, édition de la traduction précitée, tome II, chap. XI, p. 256 et planche 87, fig. 2.

5. *Les œuvres de Tertullien*, traduites en français par M. DE GENOUDE. Seconde édition. Paris, 1852, 3 vol., in-8°, vol. II, chap. XIV, p. 25.

6. ATHÉNÉE, édition de la traduction précitée, tome II, livre IV, ch. XXIII, p. 165.

Digitized by Google

Pline Second (1) attribue aussi l'invention des orgues hydrauliques à Ctésibius, et Vitruve (2) nous en donne même une longue description d'après l'ouvrage que ce célèbre mécanicien aurait écrit à ce sujet. Encore, Ctésibius ne fit-il, peut-être, que perfectionner un appareil dont l'invention originale remonterait à Platon, qui avait déjà construit une horloge nocturne, c'est-à-dire une clepsydre qui faisait jouer des flûtes pour faire entendre les heures au moment où on ne peut les voir.

Archimède, initié sans doute par son père à l'astronomie, avait pu se perfectionner à l'école d'Alexandrie, où cette science, la plus belle de toutes, était cultivée avec éclat (3). Il se montre déjà observateur habile dans son *Arénaire*, où il décrit un appareil de son invention pour déterminer le diamètre apparent du soleil, et il construisit d'ailleurs d'autres instruments astronomiques que Plutarque mentionne dans un passage, que nous citerons plus loin, où il raconte les circonstances de la mort d'Archimède.

Tite-Live (4) dit qu'Archimède est « sans rival dans l'art d'observer les cieux et les astres » ; Ammien Marcellin (5) le cite avec les astronomes Méton, Euctémon et Hipparque, parmi ceux qui ont attribué à l'année solaire une durée de trois cent soixante-cinq jours ; tandis que Macrobe (6) fait allusion à ses principales découvertes astronomiques dans le passage suivant de son commentaire du *Songe de Scipion* : « Archimède, il est vrai, croyait avoir trouvé le nombre de stades qu'il » y a de la terre à la lune, de la lune à Vénus, de Vénus à Mercure, » de Mercure au Soleil, du Soleil à Mars, de Mars à Jupiter et de » Jupiter à Saturne. Il croyait également que l'analyse lui avait donné

1. PLINE. *Histoire naturelle,* traduction nouvelle par M. AJASSON DE GRANDSAGNE. Paris, Panckoucke, 1829, 20 vol., in-8°. Voir vol. VI, livre VII, ch. XXXVIII, p. 95.

2. VITRUVE, édition de la traduction précitée, tome II, liv. X, chap. XII, p. 265 et chap. XIII, p. 268 et planche 88 qui donne une reconstitution conjecturale de l'appareil de Ctésibius.

3. Voir : *Histoire de l'Astronomie ancienne depuis son origine jusqu'à l'établissement de l'école d'Alexandrie,* par BAILLY. Paris, 1775, in-4°, planches.

4. *Œuvres de Tite-Live, Histoire Romaine,* avec la traduction en français publiées sous la direction de M. NISARD. Paris, 1850, 2 vol., gr. in-8°, tome I, livre XXIV, chap. 34, p. 652.

5. AMMIEN MARCELLIN, traduit en français par M. MOULINS. Lyon, 1778, 3 vol. in-12. Voir livre XXVI, chap. I.

6. *Œuvres de* MACROBE, traduites par Ch. DE ROSOY. Paris, Didot, 1827, 2 vol., in-8°. Voir : tome I, chap. III, p. 176.

Digitized by Google

» l'intervalle qui sépare l'orbe de Saturne et de la Sphère aplane. »

Archimède construisit une sphère artificielle ou un planétaire d'une haute précision mécanique que Claudien nous décrit comme suit dans une de ses épigrammes (1) : « Un vieillard de Syracuse vient par son » art de transporter sur la terre l'ordre qui régit le ciel, l'harmonie de » la nature et les lois des dieux. Un moteur secret, renfermé dans cette » sphère, dirige tous ces astres et fait tourner régulièrement cette » machine qui semble animée. Un faux zodiaque y parcourt son cercle » annuel, et chaque mois ramène le disque dissimulé de Diane. Un » art audacieux s'applaudit d'imprimer le mouvement au monde qu'il » a créé, et le génie d'un homme gouverne à son gré les astres. »

Cicéron parle une première fois de la sphère artificielle dans ses *Tusculanes* (2) : « Faire, comme Archimède, une sphère qui repré- » sente le cours de la lune, du soleil, des cinq planètes, et, par un » seul mouvement orbiculaire, régler divers mouvements, les uns plus » lents, les autres plus vites, c'est avoir exécuté le plan de ce Dieu » par qui Platon, dans le *Timée*, fait construire le monde. Autant que » les révolutions célestes sont l'ouvrage d'un dieu, autant la sphère » d'Archimède est l'ouvrage d'un esprit divin. » Cicéron revient d'ailleurs plus longuement sur ce sujet dans le dialogue suivant de son livre *De la République* (3) : « Je me souviens que C. Sulpicius Gallus, » un des plus savants hommes de notre pays, comme vous ne l'ignorez » pas, s'étant rencontré par hasard chez M. Marcellus, qui naguère » avait été consul avec lui, la conversation tomba sur un prodige » exactement semblable, et que Gallus fit apporter cette fameuse » sphère, seule dépouille dont l'aïeul de Marcellus voulut orner sa » maison après la prise de Syracuse, ville si pleine de trésors et de » merveilles. J'avais souvent entendu parler de cette sphère qui passait » pour le chef-d'œuvre d'Archimède, et j'avoue qu'au premier coup- » d'œil elle ne me parut pas fort extraordinaire. Marcellus avait déposé » dans le temple de la Vertu une autre sphère d'Archimède, plus

1. CLAUDIEN. *Œuvres complètes*, traduites en français par M. HÉGUIN DE GUERLE. Paris, Garnier, 1865, in-12. Voir : épigramme XVI, p. 555.

2. CICÉRON. *Œuvres complètes* avec la traduction en français, publiées sous la direction de M. NISARD. Paris, 1850, 5 vol. gr. in-8°. Voir : tome III, *Les Tusculanes*, livre I, chap. XXV, p. 637.

3. CICÉRON, édition de la traduction précitée, tome I, *De la République*, livre I, chap. XIV, p. 286.

Digitized by Google

» connue du peuple et qui avait beaucoup plus d'apparence. Mais » lorsque Gallus eut commencé à nous expliquer, avec une science » infinie, tout le système de ce bel ouvrage, je ne pus m'empêcher de » juger qu'il y avait eu dans ce Sicilien un génie d'une portée à laquelle » la nature humaine ne me paraissait pas capable d'atteindre. Gallus » nous disait que l'invention de cette autre sphère solide et pleine » remontait assez haut, et que Thalès de Milet en avait exécuté le » premier modèle, que dans la suite Eudoxe de Cnide, disciple de » Platon, avait représenté à sa surface les diverses constellations atta- » chées à la voûte du ciel ; et que, de longues années après, Aratus, » qui n'était pas astronome, mais qui avait un certain talent poétique, » décrivit en vers tout le ciel d'Eudoxe. Il ajoutait que, pour figurer » les mouvements du soleil, de la lune et des cinq étoiles que nous » appelons errantes, il avait fallu renoncer à la sphère solide, inca- » pable de les reproduire, et en imaginer une toute différente ; que la » merveille de l'invention d'Archimède était l'art avec lequel il avait » su combiner dans un seul système et effectuer par la seule rotation » tous les mouvements dissemblables et les révolutions inégales des » différents astres. Lorsque Gallus mettait la sphère en mouvement, » on voyait à chaque tour la lune succéder au soleil dans l'horizon » terrestre, comme elle lui succède tous les jours dans le ciel ; on » voyait par conséquent, le soleil disparaître comme dans le ciel, et » peu à peu la lune venir se plonger dans l'ombre de la terre, au » moment même où le soleil, du côté opposé... (1). »

Cicéron revient une troisième fois sur ce sujet dans un court passage de son livre *De la Nature des Dieux* (2). Il est encore question de la sphère artificielle d'Archimède dans les *Fastes* d'Ovide (3), dans le curieux ouvrage que Sextus Empiricus a écrit contre la science et les savants (4), ainsi que dans la partie de la petite encyclopédie, intitulée le *Satyricon*, que Martianus Capella consacre à la géométrie (5).

1. La fin de la phrase se perd dans une lacune du texte de Cicéron.

2. CICÉRON, traduction précitée de NISARD : *De la Nature des Dieux*, liv. II, chap. XXXIV.

3. OVIDE. *Œuvres complètes* traduites en français par J. Ch. PONCELIN. Paris, an VII, 7 vol., in-8°, tome V, *Les Fastes*, liv. VI, p. 309.

4. *Sextus Empiricus, ex recensione* J. BEKKERI. Berolini, 1842, in-8°, p. 416.

5. *Martiani Minei Felicis Capellae Carthaginiensis Satyricon, in quo, etc., etc., notis* Hug. GROTII *illustrati. Lugduni Batavorum, ex officina Plantiniana*, 1599. In-12, liv. VI, p. 191.

Digitized by Google

Enfin Lactance en parle dans le passage suivant de ses *Institutions Divines* (1), que nous reproduisons dans la seule traduction française du milieu du XVI[e] siècle que l'on possède : « Je vous demande, Archi-» meides Cicilien, a il peu fabriquer la figure et similitude du monde » en une concave rotondité de cuyvre, en laquelle il a tellement » composé et assis le soleil et la lune, qu'ilz feroient quasi tous les » iours mouvements inesgaulx, et quasi semblables aux révolutions » célestes, et non seulement démonstrer l'orient et occident du soleil, » ou augmentation et diminution de la lune, mais faire, que en tour-» nant ceste rotondité sphérique, lon peut veoir les cours différents » des estoilles errantes, et dieu n'a peu composer et parfaire les choses » vrayes, que l'homme par son art et industrie a par imitation voulu » faire ressembler? »

Le miroir ardent au moyen duquel Archimède aurait incendié la flotte des Romains devant Syracuse est une de ses inventions les plus contestées, ayant donné lieu à d'intéressantes discussions théoriques de la part de Descartes et aux expériences bien connues de Buffon. Il est d'ailleurs étrange que, ni Polybe, presque contemporain des événements, ni Tite-Live, ni Plutarque ne mentionnent le fait d'un incendie provoqué par des miroirs ardents, alors que ces trois auteurs nous racontent d'une manière détaillée la part que prit Archimède à la défense de Syracuse. Lucien (2), au II[e] siècle de notre ère, est le premier qui fasse allusion à l'incendie qui aurait été provoqué par Archimède. Il en parle en ces termes dans le chapitre qu'il consacre à la description des bains magnifiques édifiés par le célèbre architecte Hippias : « C'est sur la liste traditionnelle de ces artistes que nous » voyons figurer Archimède et Socrate de Cnide, qui inventèrent, l'un » les moyens de soumettre à Ptolémée la ville de Memphis, sans » recourir à un siège, mais en détournant et en dérivant le cours du » Nil ; l'autre ceux d'incendier les galères des ennemis. » Il y a lieu de remarquer que, si Lucien ne dit pas qu'Archimède fit usage de miroirs, il donne cependant à entendre que l'incendie ne fut pas provoqué par des moyens ordinaires, tels que le brûlot ou les projectiles

1. LACTANCE FIRMIAN. *Des Divines Institutions contre les Gentilz et Idolâtres.* Traduict de latin en françoys par René FAME. Paris, 1543, in-fol., livre II, chap. V, folio XXXII, verso.

2. *Œuvres complètes* de LUCIEN DE SAMOSATE, traduction par Eugène TALBOT. Paris, 1857, 2 vol., in-12. Tome II, chap. LIII, p. 255.

Digitized by Google

incandescents, puisqu'il ajoute que ce fut à l'aide d'un certain artifice, comme cela ressort d'un mot du texte grec passé sous silence dans la traduction que nous venons de reproduire. Presque à la même époque que Lucien, Galien (1) écrit dans son livre *Des Tempéraments :* « C'est ainsi sans doute, si j'ai bonne mémoire, que l'on dit qu'Archi- » mède incendia les galères ennemies au moyen de matières inflam- » mables (2). » Or, comme le contexte indique qu'il s'agit ici de poix et de résine, la tradition rapportée par Galien ferait plutôt croire à l'invention d'une composition analogue à celle que nous rencontrons plus tard, sous la désignation de feu grégeois, dans l'histoire des combats navals.

Les témoignages positifs que nous possédons en faveur de l'invention des miroirs comburants d'Archimède sont en réalité bien tardifs. Le premier en date serait celui d'Anthemius de Tralles, qui vécut au VI[e] siècle, et que Justinien chargea, avec Isidore de Milet, de construire l'église de Sainte-Sophie. Très versé dans les mathématiques, Anthemius a écrit un ouvrage sur les paradoxes en mécanique (3); et le fragment qui nous en est parvenu traite de quatre problèmes d'optique, dont l'un s'occupe précisément de trouver une machine capable d'enflammer de la matière combustible, à la portée d'un trait, au moyen des rayons du soleil. L'auteur démontre d'abord qu'Archimède, auquel on attribue, dit-il, avoir brûlé les navires ennemis par les rayons solaires, n'aurait pu réussir avec un miroir catoptrique parabolique, parce que cet appareil aurait dû affecter une grandeur démesurée, et eût exigé que les vaisseaux, contrairement à la manière dont ils se présentèrent devant Syracuse, fussent disposés entre l'appareil et le

1. HIPPOCRATES, *ejusdem et* GALENI *opera, graece et latine, cura ac studio* Renati CHARTERII. Lutetiae Parisiorum, 1679, 9 vol., in-fol. Voir : *De Temperamentis,* liv. III, chap. II.

2. Texte que nous traduisons nous-même à défaut d'avoir trouvé une traduction complète des œuvres de Galien.

Nous ferons remarquer ici que, dans son édition du texte grec d'Archimède, donnée à Oxford, en 1792, Torelli invoque (p. 369) le même passage de Galien en faveur de l'invention des miroirs ardents d'Archimède, en traduisant les mots : διὰ τῶν πυρίων, c'est-à-dire au moyen de matières inflammables, par les mots : *per comburentia specula,* c'est-à-dire au moyen de miroirs comburants. Peu après Torelli, Peyrard invoquera le texte de Galien, dénaturé de cette manière en faveur de sa thèse, dans son ouvrage intitulé : *Le miroir ardent d'Archimède.* Paris, 1807, in-4°.

3. *Fragment d'un ouvrage d'Anthemius sur les Paradoxes de mécanique,* revu et corrigé sur quatre manuscrits avec une traduction française et des notes, par M. DUPUY. Paris, 1774, in-4°.

Digitized by Google

soleil. Il cherche ensuite à établir que l'on peut arriver à un résultat en réalisant une chaleur plus considérable par l'assemblage de vingt-quatre miroirs plans, et estime que c'est un arrangement de ce genre qu'Archimède a dû adopter.

L'ouvrage d'Anthemius présente un certain intérêt historique parce qu'il expose théoriquement une conception qui, reprise par Oronce Finé (1), en 1551, ne devait être réalisée expérimentalement qu'en 1646, par le Père Kircher (2), puis, en 1747, par Buffon ; mais il ne lève cependant pas le doute qui plane sur l'invention attribuée à Archimède. En effet, Anthemius ne s'en réfère à aucun auteur plus ou moins contemporain des événements de Syracuse, et l'on ignore si, à son époque, il avait encore à sa disposition certains ouvrages de Héron d'Alexandrie ou de Diodore de Sicile, qui ont disparu, et dans lesquels il aurait été question de l'invention d'Archimède.

Les dernières autorités chez lesquelles on a recueilli l'histoire des miroirs comburants d'Archimède ne remontent guère au delà du XII[e] siècle. Eustathe (3), que nous avons déjà cité, dit encore qu'Archimède, « en employant ce procédé, incendia les navires ennemis » comme s'il y avait porté la foudre ». Zonare (4), le compilateur grec qui, pour la rédaction de ses *Annales*, a puisé principalement dans des auteurs dont les œuvres ne nous sont pas parvenues, nous offre le passage suivant : « Archimède brûla toute la flotte des Romains d'une » manière extraordinaire ; car, ayant dirigé un miroir vers le soleil, » il en recueillit les rayons et, l'air s'étant embrasé à cause de l'épais- » seur et du poli de ce miroir, il alluma une flamme énorme qu'il » dirigea sur tous les vaisseaux qui faisaient route sous le feu, et il les » incendia tous (5). » Zonare ajoute encore, qu'à l'exemple d'Archimède, Proclus aurait brûlé, au moyen de miroirs d'airain, la flotte de Vitalien qui assiégea Constantinople, sous l'empereur Anastase, en l'an

1. *De Speculo ustorio ignem ad propositam distantiam generante.* Authore Oronto FINAEO. Parisiis, 1551, in-4° (opuscule très rare).

2. Ath. KIRCHERI. *Ars magna lucis et umbrae in decem libros digesta.* Romae, 1646, in-fol., fig. Voir : livre X, problème IV.

3. EUSTATHIUS, *ad Iliad.* V, 4 (édition Stahlbaum, II, p. 3).

4. Joh. ZONARAS. *Epitome historiarum, cum* C. DUCANGII *suisque annotat.* Edidit L. Dindorff. Lipsiae, 1868-1875, 4 vol., in-8°. Voir : livre IX, chap. 4.

5. Passage que nous traduisons nous-même, à défaut d'avoir rencontré une traduction française des œuvres de Zonare.

Digitized by Google

514 de notre ère. Enfin Tzetzès (1) qui, dans un poème de plus de douze mille vers, intitulé *Les Chiliades*, cite sans cesse d'anciens ouvrages perdus pour nous, comme s'il les avait lus, mais que la critique moderne a fait voir qu'il ne les connaissait souvent que par leurs commentateurs et leurs abréviateurs, nous fournit cette dernière explication de l'agencement des miroirs d'Archimède : « Lorsque » Marcellus eut situé (ses vaisseaux) à portée de l'arc, le vieillard » (Archimède), qui avait fabriqué un miroir hexagone, disposa, à » distance mesurée, de petits miroirs quadrangulaires de la même » espèce, pouvant se mouvoir sur des lames de métal au moyen de » certaines charnières. Il le disposa aux rayons solaires du midi moyen » d'été et d'hiver. Les rayons étant ensuite réfléchis par ce miroir, il » s'alluma un feu terrible sur les vaisseaux qui furent réduits en cen- » dre à la distance de l'arc (2). » La relation de Tzetzès ne paraît guère plus pertinente que celles qui précèdent, car il ajoute l'avoir puisée, d'une part chez Dion et chez Diodore, qui auraient écrit une histoire d'Archimède que nous ne possédons plus, d'autre part chez des auteurs ayant écrit sur la mécanique, tels que Héron, Philon et Pappus, dans lesquels nous ne trouvons plus rien de semblable, et principalement, dit-il, chez Anthemius dont nous venons de voir combien le témoignage est faible.

L'œuvre théorique considérable qu'Archimède avait écrite ne pouvait être appréciée de son vivant que par une élite de savants auxquels il avait pris l'habitude de communiquer par correspondance ses découvertes en géométrie, habitude que l'on retrouvera chez les géomètres à partir de la Renaissance jusqu'au XVII[e] siècle. Il n'est donc pas étonnant que les historiens de l'antiquité se soient presque exclusivement attachés aux manifestations extérieures du génie d'Archimède, dont l'esprit des contemporains avait été frappé, qu'ils aient exagéré le nombre de ses inventions, et qu'ils aient été amenés surtout à faire

1. TZETZÈS. *Chiliade II, histoire 35.* Le texte grec du poème de Tzetzès se trouve à la suite de l'édition suivante de l'ouvrage de LYCOPHRON : *Lycophronis Alexandra sive Cassandra, etc., adjectus est Joan. Tzetzae varios historiarum liber, etc., graec. cum interpret. lat.* Pauli LACISII. Basileae, 1546, in-fol.

2. Il n'y a pas de traduction française de l'œuvre complète de Tzetzès. La traduction du passage qui précède est celle que nous proposons nous-même comme plus exacte que celle qu'en donne Peyrard dans son mémoire précité sur le miroir ardent d'Archimède, et comme moins libre que celle qu'en donne BOSSUT dans son *Essai sur l'histoire générale des mathématiques* (Paris, 1802, 2 vol. in-8°).

Digitized by Google

l'éloge des éminentes qualités d'ingénieur militaire dont il fit preuve au cours du siège de Syracuse par les Romains.

C'est Polybe (1), l'historien le plus rapproché des événements, qui nous donne la première relation des hauts faits d'Archimède : « Tout » étant préparé, les Romains se disposaient à attaquer les tours; mais » Archimède avait aussi de son côté construit des machines propres à » lancer des traits à quelque distance que ce fût. Les ennemis étaient » encore loin de la ville qu'avec des balistes et des catapultes plus » grandes et plus fortement bandées, il les perçait de tant de traits » qu'ils ne savaient comment les éviter. Quand les traits passaient au » delà, il en avait de plus petites proportionnées à la distance, ce » qui jetait une si grande confusion parmi les Romains, qu'ils ne » pouvaient rien entreprendre ; de sorte que Marcellus ne sachant quel » parti prendre, fut obligé de faire avancer sans bruit ses galères » pendant la nuit. Mais quand elles furent vers la terre à la portée » du trait, Archimède inventa un autre stratagème contre ceux qui » combattaient de dessus leurs vaisseaux. Il fit percer à hauteur » d'homme et dans la muraille des trous nombreux et de la largeur » de la main. Derrière ces meurtrières, il avait posté des archers et des » arbalétriers qui, tirant sans cesse sur la flotte, rendaient inutiles tous » les efforts des soldats romains. De cette manière, soit que les ennemis » fussent éloignés ou qu'ils fussent près, non seulement il empêchait » tous leurs projets de réussir, mais encore il en tuait un grand » nombre. Et quand on commençait à dresser des sambuques, des » machines disposées au dedans des murailles, et que l'on n'apercevait » pas la plupart du temps, s'élevaient alors sur les forts et étendaient » leurs becs bien loin en dehors des remparts. Les unes portaient des » pierres qui ne pesaient pas moins de six cents livres, les autres des » masses de plomb d'une égale pesanteur. Quand les sambuques s'ap- » prochaient, alors on tournait avec un câble les becs de ces machines » où il était nécessaire, et, par le moyen d'une poulie que l'on lâchait, » on faisait tomber sur la sambuque une pierre, qui ne brisait pas seule- » ment cette machine, mais encore le vaisseau, et jetait ceux qui s'y » trouvaient dans un extrême péril. Il y avait encore d'autres machines » qui lançaient sur les ennemis qui s'avançaient, couverts par des

1. *Ouvrages historiques de Polybe, Hérodien et Zozime,* traduction de J. A. C. Buchon. Paris, 1836, gr. in-8° Voir : livre VIII, fragment IV, p. 257.

Digitized by Google

» claies, afin de se garantir contre les traits lancés des murailles, des » pierres d'une grosseur suffisante pour faire quitter la proue des » navires à ceux qui y combattaient.

» Outre cela, il faisait tomber une main de fer attachée à une » chaîne, avec laquelle celui qui dirigeait le bec de la machine comme » le gouvernail d'un navire, ayant saisi la proue d'un vaisseau, abaissait » l'autre bout du côté de la ville. Quand, soulevant la proue dans les » airs, il avait dressé le vaisseau sur la poupe, alors liant le bras du » levier pour le rendre immobile, il lâchait la chaîne par le moyen » d'un moulinet ou d'une poulie. Il arrivait nécessairement alors que » les vaisseaux ou bien tombaient sur le côté, ou bien étaient entière- » ment culbutés ; et, la plupart du temps, la proue retombant de très » haut dans la mer, ils étaient submergés, au grand effroi de ceux » qu'ils portaient. Marcellus était dans un très grand embarras : tous » ses projets étaient renversés par les inventions d'Archimède ; il faisait » des pertes considérables, les assiégés se riaient de tous ses efforts. » Cependant il ne laissait pas que de plaisanter sur les inventions du » géomètre. Cet homme, disait-il, se sert de nos vaisseaux comme de » cruches pour puiser de l'eau, et il chasse ignominieusement nos sam- » buques à coups de bâton, comme indignes de sa compagnie. »

Tite-Live (1), qui suit Polybe comme historien dans l'ordre des temps, nous rapporte à son tour le siège de Syracuse, et nous fait le récit suivant des obstacles stratégiques qu'Archimède opposa à ses » ennemis : « Le succès n'eût pas manqué à une attaque menée avec » tant de vigueur, sans la présence d'un seul homme que possédait » alors Syracuse, c'était Archimède, homme sans rival dans l'art d'ob- » server les cieux et les astres, mais plus merveilleux encore par son » habileté à inventer, à construire des machines de guerre, à l'aide » desquelles, par un léger effort, il se jouait des ouvrages que l'ennemi » avait tant de peine à faire agir. Les murs s'étendaient sur des collines » inégales en hauteur ; le terrain était presque partout fort élevé et » d'un abord difficile ; mais il se rencontrait aussi quelques vallées » plus basses et dont la surface plane offrait un accès facile. Selon la » nature des lieux, Archimède fortifia ce mur par toute espèce d'ou- » vrages. Marcellus, avec ses quinquérèmes, attaquait le mur de

1. TITE-LIVE, *Œuvres*, édition de la traduction précitée, tome I, livre XXIV, chap. XXXIV, p. 652.

Digitized by Google

» l'Achradine, baigné, comme nous l'avons déjà dit, par la mer. Du
» haut des autres vaisseaux, les archers, les frondeurs et même les
» vélites, dont les traits ne peuvent être renvoyés par ceux qui n'en
» connaissent pas l'usage, ne permettaient à personne, pour ainsi dire,
» de séjourner impunément sur le mur. Comme il faut de l'espace
» pour lancer ces traits, ces vaisseaux étaient assez éloignés des
» murailles. Aux quinquérèmes étaient attachés deux par deux d'autres
» vaisseaux dont on avait enlevé les rangs de rames de l'intérieur afin
» de les attacher bord à bord. Ces appareils étaient conduits comme
» des vaisseaux ordinaires par les rangs de rames de l'extérieur ; ils
» portaient des tours à plusieurs étages et d'autres machines destinées
» à battre les murailles. A ces bâtiments ainsi préparés, Archimède
» opposa sur les remparts des machines de différentes grandeurs. Sur
» les vaisseaux qui étaient éloignés, il lançait des pierres d'un poids
» énorme ; ceux qui étaient plus proches, il les attaquait avec des
« projectiles plus légers, et par conséquent lancés en plus grand
» nombre. Enfin, pour que les siens pussent, sans être blessés, accabler
» les ennemis de traits, il perça le mur depuis le haut jusqu'en bas
» d'ouvertures à peu près de la hauteur d'une coudée, et à l'aide de
» ces ouvertures, tout en restant à couvert eux-mêmes, ils attaquaient
» l'ennemi à coups de flèches et de scorpions de médiocre grandeur.
» Si quelques vaisseaux s'approchaient pour être en deçà du jet des
» machines, un levier, établi au-dessus du mur, lançait sur la proue de
» ces vaisseaux une main de fer attachée à une forte chaîne. Un
» énorme contrepoids en plomb ramenait en arrière la main de fer qui,
» enlevant ainsi la proue, suspendait le vaisseau droit sur la poupe ;
» puis, par une secousse subite, le rejetait de telle sorte qu'il paraissait
» tomber du mur. Le vaisseau, à la grande épouvante des matelots,
» frappait l'onde avec tant de force que les flots y entraient toujours,
» même quand il retombait droit. Ainsi fut déjouée l'attaque du côté
» de la mer, et les Romains réunirent toutes leurs forces pour assiéger
» la ville par terre. Mais de ce côté encore elle était fortifiée par toute
» espèce de machines, grâce aux soins,aux dépenses d'Hiéron pendant
» de longues années, grâce surtout à l'art merveilleux d'Archimède.
» Et ici la nature était venue à son aide, car le roc qui supporte les
» fondements du mur est, sur une grande étendue, tellement disposé
» en pente, que non seulement les corps lancés par les machines, mais
» même ceux qui ne roulaient que par leur propre poids, retombaient

Digitized by Google

» avec violence sur l'ennemi. Par la même raison, il était bien difficile » de gravir cette côte et d'y assurer sa marche. Marcellus tint un » conseil où il fut décidé que, toutes ses tentatives d'attaque étant » déjouées, le siège serait suspendu, et la ville seulement bloquée de » manière à ce qu'on ne pût y recevoir aucun convoi par terre ni » par mer. »

Une troisième version des mêmes faits nous est enfin donnée dans les termes suivants par Plutarque (1) : « Les Romains donc, ayant » donné l'assaut de deux côtés différents, les Syracusains consternés » restaient dans le silence, craignant de ne pouvoir résister à de si » grands efforts et à une puissance si redoutable. Mais quand Archi- » mède eut mis ces machines en jeu, elles firent pleuvoir sur l'infan- » terie romaine une grêle de traits de toute espèce et des pierres d'une » grosseur énorme, qui volaient avec tant de raideur et de fracas, que » rien n'en pouvait soutenir le choc, et que, renversant tous ceux qui » en étaient atteints, elles jetaient le désordre dans tous les rangs. Du » côté de la mer, il avait placé sur les murailles d'autres machines qui, » abaissant tout à coup sur les galères de grosses antennes en forme » de crocs, et cramponnant les vaisseaux, les enlevaient par la force » du contrepoids, les laissant retomber ensuite, et les abîmaient dans » les flots ; il en accrochait d'autres par la proue avec des mains de » fer ou des becs de grue ; et après les avoir dressées sur leur poupe, » il les enfonçait dans la mer, ou les amenait vers la terre par le » moyen de cordages qui tiraient les uns en sens contraire des autres ; » là, après avoir pirouetté quelque temps, elles se brisaient contre les » rochers qui s'avançaient de dessous des murailles ; et la plupart de » ceux qui les montaient périssaient misérablement. On voyait sans » cesse des galères enlevées et suspendues en l'air, tourner avec rapi- » dité, et présenter un spectacle affreux ; quand les hommes qui les » montaient avaient été dispersés et jetés bien loin comme des pierres » lancées avec des frondes, elles se fracassaient contre les murailles, » ou les machines venant à lâcher prise, elles retombaient dans la » mer. La machine que Marcellus faisait avancer sur huit galères liées » ensemble, était appelée Sambyce, à cause de sa ressemblance avec » l'instrument de musique de ce nom. Elle était encore assez loin des

1. PLUTARQUE, édition précitée de la traduction de RICARD, tome V, *Vie de Marcellus*, chap. XX et XXI, p. 396.

Digitized by Google

» murailles, lorsque Archimède lança contre elle un rocher du poids » de dix talents ; ensuite un second, puis un troisième, qui, la frappant » avec un sifflement et un fracas horrible, en détachèrent les appuis, » et donnèrent aux vaisseaux de si violentes secousses, qu'ils se sépa- » rèrent les uns des autres. Marcellus, ne sachant plus que faire, se » retira promptement avec ses galères, et envoya l'ordre aux troupes » de faire aussi leur retraite.

» Il tint donc conseil, et il fut résolu que le lendemain, avant le » jour, on s'approcherait, s'il était possible, des murailles, parce que les » machines d'Archimède ayant beaucoup de portée,lanceraient les traits » par-dessus leurs têtes, et que celles qu'il pourrait employer de près » seraient sans effet, le coup n'ayant point de force à si peu de distance. » Mais Archimède avait, de longue main, préparé pour cela même des » machines qui portaient à toutes les distances, et des traits plus » courts qui se succédaient presque sans interruption. Il avait fait aux » murailles des trous fort près les uns des autres, où il avait placé des » scorpions d'une médiocre portée, que les ennemis ne pouvaient aper- » cevoir, et qui faisaient de fréquentes blessures à ceux qui s'en » approchaient. Arrivés au pied des murailles où ils se croyaient bien » à couvert, ils furent encore assaillis d'une grêle de traits, ou accablés » de pierres, qui tombaient à plomb sur leurs têtes ; il n'y avait pas » un endroit de la muraille d'où l'on ne tirât sur eux. Ils prirent donc » le parti de reculer ; mais ils s'étaient à peine éloignés, qu'Archimède » fit pleuvoir sur eux, dans leur retraite, une si grande quantité de traits, » qu'il leur tua beaucoup de monde et fracassa un grand nombre de » leurs vaisseaux, sans qu'ils pussent eux-mêmes faire aucun mal aux » ennemis ; car Archimède avait dressé la plupart de ses machines à » couvert derrière les murailles ; les Romains, accablés de toutes parts, » sans voir d'où les coups partaient, semblaient combattre contre les » dieux. Cependant Marcellus, échappé de ce danger, se mit à railler » les ingénieurs et les ouvriers qu'il avait dans son camp, de ce qu'Ar- » chimède, en se jouant, plongeait ses vaisseaux dans la mer, comme » des coupes à puiser de l'eau et outrageait honteusement sa Sambyce. » Il est vrai que les Syracusains n'étaient que comme le corps de ces » machines d'Archimède, et que seul il était l'âme qui faisait tout » mouvoir et agir. Tous les autres moyens de défense étaient suspendus; » la ville ne se servait que de ceux d'Archimède, soit pour l'attaque, » soit pour la défense. Enfin, Marcellus voyant les Romains si effrayés,

Digitized by Google

» qu'à la vue seule d'une corde ou d'un pieu de bois qui paraissait » sur la muraille, ils tournaient le dos en prenant la fuite, en criant » que c'était quelque nouvelle machine qu'Archimède allait lancer » contre eux, cessa toutes les attaques et changea le siège en blocus. »

Bien que Marcellus eût donné l'ordre d'épargner son génial adversaire, Archimède fut tué au cours du pillage qui suivit la prise de Syracuse, dans des circonstances que Plutarque nous raconte comme suit (1) : « Mais rien n'affligea tant Marcellus que la mort d'Archimède. » Ce philosophe était alors chez lui, appliqué à quelque figure de » géométrie, et, comme il donnait à cette méditation tout son esprit » et tous ses sens, il n'avait pas entendu le bruit des Romains qui » couraient de toutes parts dans la ville, et il ignorait qu'elle fût en » leur pouvoir. Tout à coup il se présente à lui un soldat qui lui » ordonne de le suivre pour aller trouver Marcellus. Il refuse d'y aller » jusqu'à ce qu'il ait achevé la démonstration de son problème. Le » Romain, irrité, tire son épée et le tue. D'autres disent qu'un soldat, » étant allé d'abord à lui, l'épée à la main pour le tuer, Archimède » le pria instamment d'attendre un moment, afin qu'il ne laissât pas » son problème imparfait, et que le soldat, qui se souciait fort peu » de sa démonstration, le perça de son épée. Un troisième récit, c'est » qu'Archimède étant allé lui-même porter à Marcellus, dans une » caisse, des instruments de mathématiques, tels que des cadrans au » soleil, des sphères et des angles avec lesquels on mesure la grandeur » du soleil, des soldats qui le rencontrèrent, croyant que c'était de l'or » qu'il portait dans cette caisse, le tuèrent pour s'en emparer. Mais ce » qui est avoué de tous les historiens, c'est que Marcellus fut très » affligé de sa mort, qu'il eut horreur du meurtrier comme d'un sacrilège, » et, qu'ayant fait chercher les parents d'Archimède, il les traita de » la manière la plus honorable. »

Valère Maxime nous rapporte la mort d'Archimède d'une manière un peu différente dans le passage suivant de l'ouvrage intitulé : *Faits et paroles mémorables*, qu'il dédie à Tibère (2) : « Marcellus, enfin » maître de Syracuse, n'ignorait pas que c'étaient les machines de ce

1. PLUTARQUE, édition précitée de la traduction de RICARD, *Vie de Marcellus*, tome V, chap. XXV, p. 407.

2. VALÈRE MAXIME, *Œuvres complètes*, avec la traduction en français, publiées sous la direction de M. NISARD. Paris, 1879, gr. in-8°, livre VIII, chapitre VII, p. 864.

Digitized by Google

» géomètre qui avaient si longtemps retardé sa victoire. Toutefois, » plein d'admiration pour son rare génie, il donna ordre d'épargner » ses jours, se promettant presque autant de gloire de la conservation » d'Archimède que de la prise de Syracuse. Mais tandis que celui-ci, » l'œil et l'attention fixés sur la terre, y traçait des figures, un soldat, » qui s'était jeté dans sa maison pour la piller, leva sur lui son glaive, » en lui demandant qui il était. Archimède, tout entier au problème » dont il cherchait la solution, ne put lui dire son nom ; mais lui » montrant des deux mains le sable sillonné de lignes : « De grâce, » lui dit-il, ne brouille point cela ! » Le soldat, voyant dans cette » réponse une insulte au pouvoir des vainqueurs, lui trancha la tête, et » le sang d'Archimède confondit l'ouvrage de sa science. »

L'histoire nous rapporte, comme dernier épisode, la découverte du tombeau d'Archimède, faite environ deux siècles après la mort du grand géomètre, par Cicéron, qui nous dit dans *Les Tusculanes* (1) : « Pendant que j'étais en Sicile, je fus curieux de m'informer de son » tombeau à Syracuse, où je trouvais qu'on le connaissait si peu, qu'on » disait qu'il n'en restait aucun vestige ; mais je le cherchai avec tant » de soins, que je le déterrai enfin sous des ronces et des épines. Je » fis cette découverte à la faveur de quelques vers, que je savais avoir » été gravés sur son monument, et qui portaient qu'on avait placé au- » dessus une sphère et un cylindre. M'étant donc transporté hors de » l'une des portes de Syracuse, dans une campagne couverte d'un » grand nombre de tombeaux, et regardant de toutes parts avec atten- » tion, je découvris sur une petite colonne qui s'élevait par-dessus les » buissons, le cylindre et la sphère que je cherchais. Je dis aussitôt » aux principaux Syracusains qui m'accompagnaient, que c'était sans » doute le monument d'Archimède. En effet, sitôt qu'on eut fait venir » des gens pour couper les buissons et nous faire un passage, nous » nous approchâmes de la colonne, et lûmes sur la base, l'inscription, » dont les vers étaient encore à demi lisibles, le reste ayant été effacé » par le temps. Et c'est ainsi qu'une des plus illustres cités de la Grèce, » et qui a autrefois produit tant de savants, ignorerait encore où est » le tombeau du plus ingénieux de ses citoyens, si un homme de la » petite ville d'Arpinum n'était allé le lui apprendre. »

1. CICÉRON, édition précitée de la traduction NISARD : *Les Tusculanes*, tome IV, livre V, chap. XXIII, p. 61.

Digitized by Google

Le souvenir qui ramena Cicéron au tombeau d'Archimède fut peut-être moins celui d'une renommée scientifique que celui d'une vaine gloire militaire que le grand géomètre avait acquise comme malgré lui, lorsque, tiré de ses méditations fécondes, il avait apporté les ressources suprêmes de son génie à la défense de sa patrie. Car, on ne doit pas oublier que Cicéron appartenait à ce peuple romain, épris avant tout des arts du gouvernement et de la guerre, qui est toujours resté étranger aux spéculations mathématiques, dont l'astronomie fut d'ailleurs purement physique et chez lequel la géométrie n'a jamais dépassé le simple arpentage. Ce n'est du reste pas la civilisation romaine, à laquelle les sciences exactes ne doivent presque rien, qui nous a transmis les écrits d'Archimède et qu'elle semble avoir méconnus ; car les copies incomplètes qui nous en sont parvenues, échappées à la destruction de la bibliothèque d'Alexandrie, devaient rester enfouies dans le tombeau des couvents grecs, les unes jusqu'à la Renaissance, et, les autres, jusqu'à nos jours.

La statuaire antique ne nous a pas conservé les traits d'Archimède, et les trois portraits, fort dissemblables, qui ornent respectivement le titre de l'édition d'Oxford, le frontispice d'une édition de Paris et le corps de l'ouvrage de Gronovius, intitulé : *Thesaurus graecarum antiquitatum*, ne sont que de belles compositions de l'art classique, ne reproduisant en réalité aucun document authentique, marbre, bronze ou camée de la sculpture grecque. La numismatique nous offrirait cependant une représentation, assez fruste il est vrai, de la figure d'Archimède ; car nous trouvons la reproduction de deux pièces antiques, l'une d'argent, l'autre de bronze, dans le célèbre ouvrage de Paruta sur les médailles de la Sicile (1). La première médaille, dont l'attribution nous paraît cependant fort douteuse, est à l'effigie d'un homme coiffé du casque, aux traits rudes et au visage glabre, tandis que le revers est simplement frappé de deux étoiles et d'un croissant de lune. La seconde médaille, qui se rapporte incontestablement au grand géomètre, pré-

1. PARUTA. *La Sicilia descritta con medaglie.* Palermo, 1612, in-fol. fig.

Comme les exemplaires de cette première édition, ainsi que ceux de l'édition subséquente, fort augmentée, donnée à Rome, en 1649, sont devenus assez rares, nous renvoyons de préférence à la dernière édition de Lyon, intitulée : *La Sicilia di Filippo Paruta descritta con medaglie, e ristampata con aggiunta da Leonardo Agostini* In Lione, 1697, in-fol., voir planche 102.

Digitized by Google

sente, à l'avers, une tête barbue, sans légende, tandis que le revers, orné d'une sphère posée sur un pied, porte les lettres A. R. M. D., qui constituent le monogramme d'Archimède (1).

II

Les œuvres mathématiques d'Archimède forment un ensemble imposant, malgré les altérations et les pertes subies au cours des siècles. Nous les rangerons dans l'ordre le plus rationnel qui semble pouvoir leur être assigné, ordre qui diffère d'ailleurs dans les divers manuscrits et dans les éditions anciennes successives :

I. *De la Sphère et du Cylindre*, livres I et II.
II. *De la Mesure du Cercle.*
III. *Des Conoïdes et des Sphéroïdes.*
IV. *Des Spirales.*
V. *De l'Equilibre des Plans*, livres I et II.
VI. *L'Arénaire.*
VII. *De la Quadrature de la Parabole.*
VIII. *Des Corps flottants*, livres I et II.
IX. *Le Stomachion.*
X. *De la Méthode relative aux théorèmes mécaniques.*
XI. *Les Lemmes.*
XII. *Le Problème des Bœufs.*

Le livre premier *De la Sphère et du Cylindre* est précédé d'une lettre d'envoi au géomètre Dosithée dans laquelle Archimède nous apprend incidemment que c'est à Eudoxe de Cnide que l'on doit la mesure de la pyramide et du cône. Après une série de six définitions relatives aux lignes courbes, aux surfaces concaves, au secteur sphérique et au rhombe, Archimède nous présente cinq postulats qui, en l'absence de toute considération de l'infini mathématique, seront nécessaires et suffisants pour permettre la démonstration des propositions qui vont suivre. Il y a lieu de remarquer ici qu'Archimède place la notion de la ligne droite parmi ses postulats, qu'il ne cherche pas à démontrer, et qu'il se sépare ainsi de la manière peu satisfaisante de son prédécesseur Euclide, qui présente la notion de la ligne droite parmi ses

1. Cette dernière médaille est reproduite sur le titre du présent ouvrage.

Digitized by Google

définitions. Le corps du livre comporte quarante propositions. Les premières concernent les polygones inscrits et circonscrits au cercle, ainsi que l'aire et le volume du cône et du cylindre. Utilisant ces propositions préliminaires, concurremment avec une série de lemmes déjà démontrés par ses devanciers, Archimède passe à l'évaluation de l'aire et du volume des figures qui sont engendrées par la révolution de figures planes inscrites et circonscrites au grand cercle de la sphère. C'est ainsi qu'il aboutit à la belle découverte de l'aire de la sphère équivalente à quatre grands cercles, puis à celle du rapport en surface et en volume de la sphère au cylindre qui lui est circonscrit. Ce sont d'ailleurs les emblèmes géométriques de cette dernière proposition qu'Archimède avait désiré posséder sur son tombeau, en souvenir, peut-être, des longues méditations consacrées à cette admirable ordonnance des propositions préparatoires, toutes originales et démontrées avec une rigueur impeccable, qui aboutissent à sa découverte (1). Le reste du livre comporte une série de propositions relatives au segment sphérique, qui mènent aux deux propositions remarquables de l'aire du segment sphérique équivalant à celle du cercle ayant pour rayon la corde menée du sommet à la circonférence de base du segment ; puis du secteur sphérique équivalant au cône de base équivalente à l'aire du segment sphérique correspondant au secteur et de hauteur égale au rayon de la sphère.

Le livre deuxième *De la Sphère et du Cylindre* débute par un préambule, adressé au géomètre Dosithée, dans lequel Archimède rappelle les principales découvertes du livre précédent ; tandis que le corps du livre comporte neuf problèmes importants. Le premier problème consiste à trouver une sphère équivalente à un cône ou à un cylindre donné. C'est dans la solution de ce problème, difficile à son époque, qu'Archimède fait intervenir pour la première fois, à titre subsidiaire, et sans en donner lui-même une solution, le problème des deux moyennes proportionnelles entre deux droites données. Ce problème avait déjà été posé, mais non résolu, longtemps avant Archimède, par Hippocrate de Chio, qui lui avait subordonné la solution du

1. On pourra consulter à ce sujet une brochure de 16 pages de J. GUTENACKER, intitulée: *Das Grabmal des Archimedes, ein Beitrag zur Charakteristik dieses grossen Mathematikers*. Wurzburg, 1833, in-4°.

Digitized by Google

fameux problème déliaque de la duplication du cube (1). Bien que le problème des deux moyennes proportionnelles ne puisse être résolu par la géométrie élémentaire, il faut croire que, pour avoir osé l'invoquer, Archimède devait en connaître quelque solution au moyen des sections coniques. La seconde proposition démontre préalablement le rapport dans lequel se présentent le segment sphérique et le cône ayant même base et même hauteur que ce segment. Puis viennent divers problèmes sur les segments sphériques, tels que ceux qui consistent à couper une sphère par un plan de manière que les aires des segments soient entre elles dans un rapport donné ; à couper une sphère de manière que les volumes des segments soient entre eux dans un rapport donné, et à construire un segment sphérique semblable à un segment sphérique donné dont le volume soit équivalent à celui d'un autre segment sphérique donné. La neuvième proposition, qui termine ce second livre, démontre que l'hémisphère est le plus grand des segments de sphères compris sous des aires équivalentes. On possède sur les deux livres *De la Sphère et du Cylindre* un commentaire écrit au VI[e] siècle par le géomètre grec Eutocius d'Ascalon. Ce commentaire accompagne généralement le traité en question dans les manuscrits et dans les éditions anciennes du texte.

Plusieurs propositions du traité *De la Sphère et du Cylindre* semblent difficiles ou obscures parce que le texte passe continuellement sous silence des relations intermédiaires,qu'Archimède suppose connues chez les savants auxquels il s'adresse, et qui avaient été déjà démontrées, soit dans les *Eléments* d'Euclide, soit dans d'autres traités perdus de géomètres, tel que celui d'Aristée. C'est dans les passages de ce genre que le commentaire d'Eutocius intervient généralement, sans cependant être toujours très clair lui-même. Ce commentaire est cependant particulièrement précieux à l'endroit de la seconde proposition du deuxième livre, où se présente, à titre subsidiaire, le problème des deux moyennes proportionnelles ; car il reproduit à cette occasion les principales solutions de ce problème données par les anciens. Ces

1. On pourra consulter à ce sujet les ouvrages suivants :

I. *Historia problematis duplicandi cubi* a Ch. Henr. BIERING. Copenhague, 1844.

II. *Historia problematis de cubi duplicatione, auctore* N. Th. REIMER. Gottingae, 1798, in-8°.

III. *Solution du problème déliaque démontrée par* J. CASANOVA DE SEINGALT. Dresde, 1790, in-4°.

Digitized by Google

solutions sont intéressantes, bien que partiellement empiriques et, sans Eutocius, nous n'aurions pas connu celles que nous devons à Platon, Philon, Apollonius, Dioclès et Pappus, ni les deux solutions de Ménechme, ni celle d'Eratosthène, ni enfin celle d'Architas reproduite des mains secondes d'Eudème (1).

Le livre *De la Mesure du Cercle* est l'écrin dans lequel nous ont été conservées les propositions originales relatives au rapport de la circonférence du cercle au diamètre, livre qui suffisait seul à la gloire d'Archimède. La première des trois propositions de cet ouvrage énonce que l'aire du cercle équivaut à celle du triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce cercle. La seconde proposition démontre que le rapport du cercle au carré du diamètre est le même que celui de 11 à 14. Enfin, dans la dernière proposition, Archimède, employant la méthode des périmètres, part de l'hexagone pour s'arrêter aux polygones réguliers inscrits et circonscrits de 96 côtés, et démontre que le rapport de la circonférence au diamètre est compris entre $3\frac{1}{7}$ et $3\frac{10}{71}$.

La lecture de cette dernière proposition, telle qu'elle nous est parvenue, ne laisse pas que d'être excessivement laborieuse ; car elle comporte une longue suite de résultats numériques obtenus par produit, par quotient et par extraction de racine carrée, au moyen de méthodes qu'Archimède n'a pas exposées. Il adopte d'ailleurs, dès le début de la démonstration, deux valeurs approchées de $\sqrt{3}$, sur le procédé d'investigation desquelles il ne s'explique pas davantage (2). On possède un long commentaire d'Eutocius sur la mesure du cercle d'Archimède, particulièrement précieux au point de vue des calculs arithmétiques dont il nous donne les détails (3).

---

1. *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, iterum edidit* J. L. Heiberg. Lipsiae, 1910-1915, 3 vol., in-12. Voir : tome III, p. 54.

2. On pourra consulter à ce sujet les travaux suivants :

1° *Sur la mesure du cercle d'Archimède* par P. Tannery (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2me série, IV, 1882, p. 313-337).

2° *The Works of Archimedes edited in modern notations* by T. L. Heath. Cambridge, 1897, in-8°. (Voir : page 80, paragraphe 7, intitulé : *Archimedes approximation to* $\sqrt{3}$.)

3° Hultsch. *Zur Kreismessung des Archimedes* (*Zeitschrift für Mathematik*, Hist. litt. Abtheilung, XXXIX, 1894, p. 121-161).

3. Voir édition précitée de Heiberg, vol. III, p. 228.

Digitized by Google

Le livre *Des Conoïdes et des Sphéroïdes* débute par un long préambule, dans lequel Archimède fait pour ainsi dire l'analyse de son ouvrage, et où il donne les définitions des figures qu'il appelle conoïde rectangle, conoïde obtusangle, et sphéroïdes. Ces dénominations résultent d'ailleurs logiquement de la notion particulariste des courbes du second degré, seule admise à l'époque d'Archimède, et qui consistait à les considérer comme obtenues respectivement par une section plane perpendiculaire à une génératrice des cônes droits rectangle, obtusangle et acutangle. Ce n'est que plus tard, environ cinquante ans après Archimède, que les sections coniques seront considérées par Apollonius comme étant obtenues indifféremment par une section plane d'un même cône quelconque, et que ces courbes recevront les noms d'ellipse, de parabole et d'hyperbole que nous leur donnons encore. Il en résulte que, chez Archimède, la parabole est toujours désignée par la circonlocution de section de cône droit rectangle, et la révolution de cette courbe autour de son axe engendre la figure appelée le conoïde rectangle, c'est-à-dire la figure que nous appelons le paraboloïde de révolution. D'autre part, l'hyperbole est toujours désignée comme une section de cône droit obtusangle, et sa révolution autour de l'axe transverse engendre le conoïde obtusangle, c'est-à-dire notre hyperboloïde de révolution. Enfin, l'ellipse, exclusivement désignée sous le nom de section de cône droit acutangle, donne, par révolution autour de l'un ou de l'autre de ses axes, les figures qu'Archimède appelle sphéroïdes allongé ou aplati, c'est-à-dire nos deux ellipsoïdes de révolution. Le livre comporte trente-deux propositions. Les deux premières, dont la lecture demande une assez forte contention de l'esprit, constituent en réalité des théorèmes d'arithmétique, démontrés à la manière des anciens, par la géométrie pure. Ces théorèmes qui paraissent sans rapport avec le titre du livre, interviennent cependant d'une manière ingénieuse dans la démonstration des plus belles propositions relatives aux paraboloïdes. Les quatre propositions suivantes traitent des segments de parabole, des rapports de l'ellipse avec le cercle et du rapport des ellipses entre elles. Ces dernières propositions sont immédiatement suivies de trois problèmes qui consistent à trouver des cônes et des cylindres dont les surfaces latérales soient capables d'ellipses données. Quelques propositions envisagent les sections planes des conoïdes et des sphéroïdes, tandis que d'autres sont relatives aux plans tangents à ces mêmes figures. Une série de propositions considèrent des

Digitized by Google

figures inscrites et circonscrites aux conoïdes et aux sphéroïdes, en sorte qu'elles mènent avec un art consommé aux propositions capitales de l'ouvrage. Parmi ces dernières propositions, nous citerons, par exemple, les suivantes :

Le segment de paraboloïde de révolution vaut une fois et demie le cône ayant même base et même axe que ce segment.

Si deux segments découpés d'un paraboloïde de révolution par des plans, l'un perpendiculaire, l'autre non perpendiculaire à l'axe, ont des axes égaux, ils sont équivalents.

Deux segments découpés d'un paraboloïde de révolution par des plans quelconques sont entre eux comme les carrés de leurs axes.

Les sept dernières propositions, excessivement longues en raison de la méthode de la double réduction à l'absurde qui préside à leur démonstration, sont relatives au volume de l'hyperboloïde et des deux ellipsoïdes de révolution.

C'est dans ce bel ouvrage qu'Archimède fait l'application la plus large de cette méthode d'exhaustion d'où la notion de l'infini mathématique devait dégager plus tard le véritable calcul intégral. Il y considère continuellement la grandeur à évaluer en surface ou en volume comme enveloppant une grandeur déjà connue et comme enveloppée par une autre grandeur analogue également mesurable, tandis que la différence entre les deux grandeurs auxiliaires pouvant devenir moindre que toute grandeur donnée, il arrive à une limite commune donnant la mesure cherchée.

Le livre *Des Spirales* présente une étude admirablement ordonnée de la courbe, à laquelle Archimède a laissé son nom, décrite par un point qui se meut d'un mouvement uniforme sur une droite tournant elle-même d'un mouvement uniforme autour de l'un de ses points.

L'ouvrage comporte vingt-huit propositions, dont les onze premières constituent en réalité une préparation savante à l'étude de la spirale même. Deux premiers théorèmes sont relatifs à une droite sur laquelle un point se déplace d'une manière uniforme. Puis viennent sept problèmes concernant les sécantes que des cercles et leurs tangentes interceptent sur des longueurs données, et deux théorèmes sur les progressions par différence, comportant de longues démonstrations géométriques. La douzième proposition, précédée de définitions relatives à la génération et aux éléments de la spirale, inaugure la seconde série des propositions qui nous révèlent les belles propriétés de cette courbe

Digitized by Google

transcendante, à laquelle Archimède mène des tangentes, dont il compare les spires avec les cercles correspondants, et dont finalement il mesure l'aire. Ce sont d'ailleurs ces propriétés que le génie de Pascal couronnera lorsque, en 1658, comparant à la manière des anciens deux lignes de différente nature, il démontrera son fameux théorème de l'égalité des lignes spirale et parabolique (1).

La lecture du traité *Des Spirales* est assez difficile en raison de la longueur de certaines démonstrations laquelle expose souvent à en perdre le fil, et en présence de la concision du texte qui sous-entend une foule de relations intermédiaires (2). Malgré cela, ce magnifique ouvrage, que Viète accusa un moment de fausseté, mais que les calculs différentiel et intégral devaient complètement confirmer plus tard (3), confond l'esprit par la rigueur de ses déductions et par la somme des difficultés surmontées avec une force de tête que la géométrie analytique n'exige plus de la part des géomètres modernes (4).

Le traité *De l'Equilibre des Plans* ou de leurs centres de gravité est le titre principal d'Archimède à l'immortalité. C'est dans cet ouvrage célèbre que, rompant avec les notions aristotéliques confuses et même fausses sur la nature de l'équilibre, il nous donne la première théorie de l'équilibre du levier, et qu'il devient ainsi le véritable fondateur de la Statique, branche de la Mécanique qui ne se développa que bien des siècles plus tard, lorsque le principe du levier eut été complété par les deux autres principes généraux des vitesses virtuelles et de la composition des forces.

Archimède divise son traité en deux livres, qu'il base sur l'hypothèse des corps parfaitement homogènes ou uniformément denses en tous leurs points. Le premier livre comporte sept axiomes et quinze propositions. Les trois premières propositions considèrent un levier,

---

1. *Œuvres complètes* de BLAISE PASCAL. Paris, Hachette, 1865, 3 vol., in-8°, vol. III, p. 450-464.

2. Nous avons tâché de faciliter la lecture de ce traité au moyen des notes nombreuses accompagnant notre traduction.

3. On pourra consulter à ce sujet l'ouvrage déjà ancien : *De Lineis Spiralibus.* EM. AUG. LUD. a TEUBEN. Lipsiae, 1790, in-4°.

4. On pourra consulter les études suivantes sur le livre des *Spirales* d'Archimède :

1° SHERLING, *Die Arch. Spirallinie.* Lübeck, 1865, in-4°.

2° JUNGE. *Die Spirale des Archimedes.* Zeitz, 1826, in-4°.

3° LEHMANN. *Die Archimed. Spirale m. Rücksicht auf ihre Geschichte.* Freiburg, 1862.

Digitized by Google

des corps pesants suspendus à chacune de ses extrémités et un point d'appui. Elles établissent dès lors successivement que, lorsque les bras du levier sont égaux, les poids supposés en équilibre sont aussi égaux, et que des poids inégaux s'équilibrent à des distances inégales du point d'appui, le plus grand poids correspondant à la plus petite distance. Les deux propositions suivantes déterminent la position du centre de gravité de l'ensemble de deux grandeurs de même poids, puis de l'ensemble d'un nombre quelconque de grandeurs. Bien que ces propositions établissent l'existence d'un centre général d'efforts, appelé centre de gravité, dans toute grandeur définie, considérée comme un système composé d'autres grandeurs, il n'en résulte cependant pas qu'Archimède ait été le premier à dégager la notion du centre de gravité. Car, se bornant à déterminer les caractères géométriques de ce centre, sans le définir explicitement, il ne semble pas le présenter comme un principe nouveau, mais s'en rapporter plutôt à une notion admise par ses devanciers ; à moins cependant qu'il ait encore été le premier à proclamer cette notion dans un de ses ouvrages qui ne nous sont pas parvenus.

Les sixième et septième propositions complètent la théorie de l'équilibre du levier en établissant successivement que des grandeurs commensurables et incommensurables s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles à leurs poids. Considérant enfin les surfaces planes pour ainsi dire comme des tranches microtomiques de corps solides homogènes auxquelles la qualité de graves est conservée, et dont la position du centre de gravité ne dépend donc plus que de la figure géométrique, les dernières propositions recherchent le centre de gravité du parallélogramme, du triangle et du trapèze rectiligne.

Le livre second, qui comporte dix propositions, est consacré à la détermination du centre de gravité du segment de parabole. La première proposition applique d'abord au cas particulier de deux segments de parabole les conditions d'équilibre que les sixième et septième propositions du livre premier déterminent pour deux surfaces soumises à une description rectiligne. Les six propositions suivantes recherchent le centre de gravité de figures rectilignes définies inscrites dans le segment de parabole, et la huitième proposition détermine enfin le centre de gravité du segment de parabole lui-même.

La neuvième proposition, relative à une propriété des progressions géométriques, est remarquable au point de vue de l'ordonnance et de

Digitized by Google

la rigueur de ses déductions, exclusivement basées sur les propositions d'Euclide concernant les grandeurs proportionnelles, encore seules admises par les géomètres de l'époque d'Archimède. Cette proposition est l'une de celles dont la lecture présente le plus de difficultés, tant à cause de son extrême longueur, qu'en raison du silence qu'elle garde sur toutes les opérations intermédiaires, du moins pour ceux qui sont peu familiarisés avec les méthodes des anciens. Archimède utilise dès lors cette proposition pour démontrer la dernière de son traité qui détermine le centre de gravité du trapèze parabolique.

L'ouvrage intitulé *L'Arénaire* est rédigé sous la forme d'une longue lettre dans laquelle Archimède détrompe le roi Gélon de l'idée que l'on ne pourrait écrire un nombre assez grand pour représenter la quantité prodigieuse de grains de sable que contiendrait une sphère aussi grande que la sphère étoilée, et il démontre que ce nombre serait en définitive inférieur à celui qui, dans notre système de numération, serait représenté par l'unité suivie de soixante-trois zéros.

Bien que l'*Arénaire* ait les apparences frivoles d'une récréation mathématique, il constitue en réalité un document des plus précieux sur l'astronomie et sur le système de numération des Grecs. L'ouvrage débute par quelques données sur l'état des connaissances astronomiques chez les anciens, puis nous expose une méthode ingénieuse et nous décrit un appareil construit par Archimède lui-même pour évaluer le diamètre apparent du soleil. Au cours de ces préliminaires, on trouve incidemment un renseignement bien digne d'être remarqué, et qu'on ne rencontre nulle part ailleurs, d'après lequel Aristarque de Samos aurait écrit un ouvrage dans lequel il avait déjà émis et défendu des hypothèses relatives au système héliocentrique du monde. La notation arithmétique des Grecs, utilisant les lettres de l'alphabet, incommode pour les calculs, avait pour limite la myriade de myriade ou cent millions. Archimède introduit ici un système de numération plus étendu, qui lui permettra d'exprimer les nombres immenses auxquels il doit aboutir. Il prend la myriade carrée comme unité nouvelle et appelle nombres du second ordre ceux qui sont formés de ces unités nouvelles ; il prend de même la quatrième puissance de la myriade comme unité nouvelle pour en former les nombres du troisième ordre, et il continue ainsi à former des nombres de l'ordre $n+1$ en prenant pour unité la puissance $2n$ de la myriade. Faisant dès lors usage de deux progressions, l'une arithmétique, l'autre géométrique, dont la première sert à

Digitized by Google

trouver un terme quelconque de la seconde, il évalue le nombre de grains de sable contenus dans des sphères de plus en plus grandes, en commençant par la sphère extrêmement petite de la graine de pavot, pour s'arrêter enfin à la sphère des étoiles fixes. Il arrive ainsi,en passant par des nombres qui dépassent bien vite l'entendement, à celui qui, dans notre numération, s'exprimerait au moyen de soixante-quatre figures.

La lecture de l'*Arénaire* exige une assez grande application de l'esprit ; car, non seulement Archimède y invoque des théorèmes de géométrie qu'il suppose déjà connus, mais il se borne continuellement à indiquer de quel ordre sera le produit de deux termes quelconques d'une progression géométrique dont la raison est dix, et il abandonne tous les calculs à la sagacité du lecteur (1).

Le livre *De la Quadrature de la Parabole*, qui comporte vingt-quatre propositions, est consacré à la belle découverte qu'Archimède fut le premier à faire de la quadrature exacte d'une aire curviligne. Cet ouvrage est d'autant plus remarquable qu'il nous offre la démonstration de la quadrature de la parabole, non seulement par la géométrie pure, mais encore par une méthode toute nouvelle, basée sur les principes de statique développés dans le traité *De l'Equilibre des Plans*. A la suite d'un court préambule adressé à Dosithée, dans lequel il déplore la mort de son ami Conon et loue la grande habileté de ce géomètre. Archimède rappelle trois propositions élémentaires sur les sections coniques, pour la démonstration desquelles il renvoie à des ouvrages que nous ne possédons plus, et il donne deux autres propositions sur ces mêmes courbes, accompagnées de ses propres démonstrations. Vient ensuite une première série de douze propositions mécaniques, hiérarchiquement disposées, basées sur la théorie de l'équilibre du levier. Accordant aux figures planes la qualité de corps pesants homogènes, Archimède les compare suspendues aux bras égaux d'un levier, et il conclut de l'égalité de leurs poids qui s'équilibrent à l'équivalence de leurs aires chargées d'un potentiel grave uniformément réparti. Après avoir comparé ainsi successivement par équilibre le triangle et le tra-

1. On pourra consulter les études suivantes sur l'*Arénaire* :

1° *On the Arenarius of Archimedes* by STEPH. P. RIGAUD. Oxford, 1837.

2° *Eclaircissements sur le traité « De numero arenae » d'Archimède*, par Michel CHASLES (Extrait des *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 11 avril 1842, 12 pages, in-4°).

Digitized by Google

pèze avec une aire donnée, il équilibre le segment de parabole, préalablement découpé en triangles et en trapèzes, avec une aire équivalente qu'il trouve être les quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment parabolique. Les sept dernières propositions reprennent la quadrature de la parabole par la géométrie pure, en décomposant le segment parabolique en figures définies dont les aires sont dans une progression géométrique décroissante.

Le traité *Des Corps flottants*, qui établit les lois fondamentales de l'Hydrostatique, est un autre monument frappant du génie d'Archimède. La première partie du traité comporte neuf propositions, précédées de l'hypothèse relative à l'état d'équilibre d'un fluide résultant de l'égalité de pression de ses éléments uniformément répartis. La première proposition établit que la surface d'un fluide affecte la forme sphérique, tandis que la seconde pose que le centre de cette masse sphérique est le même que le centre de la terre. Cette dernière proposition n'aurait cependant pas entraîné l'assentiment d'Eratosthène, d'après le passage suivant que nous relevons dans la Géographie de Strabon (1) : « N'est-il pas divertissant maintenant, de voir Eratos-» thène, un mathématicien, refuser de ratifier le principe posé par » Archimède dans son traité des *Corps portés sur un fluide*, à savoir » que la surface de tout liquide à l'état de repos affecte la forme d'une » sphère ayant même centre que la terre, proposition admise pourtant » par quiconque a la moindre notion des mathématiques ? »

Les cinq propositions suivantes déterminent la position d'équilibre d'un solide plongé dans un fluide suivant la densité qu'il possède par rapport à ce fluide. Ce sont ces propositions qui mettent en lumière le principe célèbre, auquel le nom d'Archimède restera toujours attaché (2), et qui devait avoir sur les sciences physiques une portée incalculable. L'histoire, ou plutôt la légende, veut qu'Archimède ait été amené à la découverte de ce principe dans les circonstances que Vitruve (3) nous rapporte en ces termes : « Lorsque Hiéron régnait à » Syracuse, ce prince, ayant heureusement réussi dans toutes ses entre-

1. STRABON, édition précitée de la traduction de TARDIEU, tome I, liv. I, chap. III-11, p. 93.

2. On pourra consulter à ce sujet : *Recherches historiques sur le principe d'Archimède* (*Revue archéologique*, 1869).

3. VITRUVE, édition précitée de la traduction de TARDIEU et COUSSIN, tome I, livre IX, chap. III, p. 175.

Digitized by Google

» prises, fit vœu d'offrir dans un certain temple une couronne d'or aux » dieux immortels. Il convint avec un ouvrier d'une grande somme » d'argent pour la façon et lui donna l'or au poids. Cet artisan livra » son ouvrage le jour qu'il l'avait promis au roi,qui le trouva parfaite- » ment bien exécuté, et la couronne ayant été pesée, parut être du » poids de l'or qui avait été donné ; mais lorsqu'on éprouva l'or par la » pierre de touche, on reconnut que l'ouvrier avait remplacé une partie » de l'or pour y mettre autant d'argent en la place. Le roi fut très » offensé de cette tromperie, et ne pouvant trouver le moyen de con- » vaincre l'ouvrier du vol qu'il avait fait, il pria Archimède d'en cher- » cher quelqu'un dans son esprit. Un jour qu'Archimède, tout préoc- » cupé de cette affaire, se mettait au bain, il s'aperçut par hasard qu'à » mesure qu'il s'enfonçait dans le bain l'eau s'en allait par dessus les » bords. Cette observation lui fit découvrir la raison de ce qu'il cher- » chait et, sans tarder davantage, la joie le transporta tellement qu'il » sortit du bain et, courant tout nu à sa maison, il se mit à crier qu'il » avait trouvé ce qu'il cherchait, en disant en grec : Je l'ai trouvé! je » l'ai trouvé ! » Et Vitruve continue en exposant la méthode que, d'après lui, Archimède aurait suivie pour faire la détermination quantitative de l'or et de l'argent dans l'alliage de la couronne.

La première partie du traité se termine par deux propositions relatives à la position d'équilibre d'un segment sphérique moins dense que le fluide dans lequel il est abandonné, propositions subordonnées à l'hypothèse du principe d'expérience de la poussée d'un fluide s'exerçant sur le centre de gravité d'un solide suivant la verticale.

La seconde partie du traité *Des Corps flottants* comporte dix propositions remarquables sur les conditions d'équilibre d'un segment de paraboloïde de révolution de nature moins dense que le fluide dans lequel il est abandonné. Ces propositions, fort longues, sont d'une lecture assez laborieuse ; mais elles dégagent en fait, et d'une manière saisissante, toute la théorie du métacentre qui devait affranchir l'architecture navale de son vieil empirisme.

Le traité *Des Corps flottants* n'était connu depuis la Renaissance que dans une version latine faite sur un texte grec que l'on n'avait pu retrouver. On croyait généralement que cette version latine était due à Nicolas Tartaglia, qui avait donné une première édition du premier livre, à Venise, en 1545, puis une édition des deux livres réunis, à Venise également, en 1555, lorsqu'elle fut identifiée avec une version

Digitized by Google

latine beaucoup plus ancienne, due à Guillaume de Moerbeke (1), archevêque de Corinthe, dont le manuscrit autographe, daté de 1269, fut retrouvé, en 1884, par Valentin Rose, parmi les manuscrits du fonds Ottoboni, dans la bibliothèque du Vatican. D'autre part, un palimpseste, sur lequel nous aurons à revenir, et qui a été remis au jour à Jérusalem, en 1899, est venu heureusement nous restituer un texte grec qui s'étend, sauf quelques lacunes, au premier livre tout entier et à une partie importante du second livre du traité *Des Corps flottants*. Ce nouveau texte nous apporte notamment la démonstration de la huitième proposition du livre premier, qui faisait défaut dans la version latine, mais à laquelle Commandin avait suppléé conjecturalement dans le commentaire dont il avait accompagné son édition du traité *Des Corps flottants* d'Archimède, donnée à Bologne, en 1565. En présence de la remise au jour si tardive du texte grec d'Archimède, c'est pour ainsi dire à la version latine du moine flamand Guillaume de Moerbeke que la science moderne est redevable de la première révélation du principe fondamental de l'hydrostatique, laissé dans l'oubli et dans la stérilité, depuis l'époque de sa découverte par Archimède jusqu'à la Renaissance.

Le Stomachion, ou problème de la logette, ne nous est parvenu que tout récemment dans un état malheureusement fort incomplet. Un

1. Guillaume de Moerbeke (Guillelmus de Morbecca, Morbacha, Moerbeka, Moerbacha) tire son nom du village de Moerbeke, près de Grammont, en Belgique, où il naquit vers 1215. Entré au couvent des Dominicains à Louvain, il passa, vers 1243, à Cologne, pour y compléter ses études. En 1268, il vint à Viterbe, où il remplit la charge de chapelain et de pénitencier successivement auprès des papes Clément IV et Grégoire X. En 1274, il assista au Concile de Lyon, où il se fit remarquer par ses profondes connaissances des langues orientales. Le pape Jean XXI le créa archevêque de Corinthe, et il mourut dans cette dernière ville, car la dernière date mentionnant son existence est celle de 1282. Malgré l'opinion injustifiée de Roger Bacon qui a écrit de lui : « *Hic Willielmus Flemingus, qui nihil novit dignum neque in scientiis neque in linguis* », Guil. de Moerbeke fut un des hommes les plus érudits de la seconde moitié du XIII^e^ siècle. Bien que l'on ne connaisse de lui qu'un seul ouvrage original, intitulé : « *De arte et scientia geomantiae* », dont une traduction française a fait partie de la bibliothèque de Colbert, on est frappé du nombre et de l'importance de ses traductions latines d'auteurs grecs, tels Hippocrate, dont il traduisit le traité des *Pronostics* ; Galien, dont il donna le traité des *Aliments* ; Aristote, dont il traduisit plusieurs ouvrages à la demande de son ami S^t^ Thomas d'Aquin ; Simplicius, dont il traduisit le commentaire sur le traité du *Ciel* d'Aristote ; Proclus et enfin Archimède, dont la version latine des principaux ouvrages est infiniment précieuse pour combler les lacunes des textes grecs que nous possédons dans un état moins complet qu'au XIII^e^ siècle.

Digitized by Google

premier fragment du texte vient d'être retrouvé dans le palimpseste de Jérusalem ; tandis qu'un autre fragment, découvert dans une version arabe, a fait l'objet d'une traduction allemande par H. Sutter (1), en 1899. Cet ouvrage perdu d'Archimède était mentionné par plusieurs auteurs anciens, tels que les grammairiens Marius Victorinus (2), Atilius Fortunatianus (3) et le poète Ausone (4). D'après les renseignements fort vagues de ces auteurs, le *Stomachion*, ou *Loculus* d'Archimède, se rapportait à une logette carrée ou rectangulaire sur le fond de laquelle devaient s'ajuster exactement quatorze lamelles d'ivoire de formes triangulaire et polygonale. Les fragments retrouvés montrent qu'Archimède aurait subordonné l'établissement de cette espèce de jeu de patience à la condition que les lamelles soient découpées de manière à avoir les aires exactement multiples les unes des autres, et qu'il s'agissait donc d'un problème de géométrie consistant à diviser un carré ou un rectangle en quatorze parties commensurables entre elles.

Le traité *De la Méthode relative aux théorèmes mécaniques* vient également d'être rendu à la lumière par le palimpseste de Jérusalem. Parmi les ouvrages perdus d'Archimède, aucun n'avait davantage excité les regrets et la curiosité des géomètres, car son titre nous était déjà connu par la mention qui en est faite à quatre reprises différentes dans la métrique de Héron (5) et dans un passage de Suidas (6) rapportant que Théodose (7), auteur d'un traité sur la sphère, en avait écrit un commentaire. On soupçonnait à juste titre que le traité *De la Méthode* se rapportait à cette conception ingénieuse, dont Archimède avait déjà montré la fécondité dans sa découverte de la quadrature de la parabole, lorsque, faisant intervenir sa théorie de l'équilibre du levier, il compare, c'est-à-dire mesure par pesée, des figures de description rigou-

1. *Abhandlungen z. Geschichte der Mathematik*, 1899, IX, p. 491.

2. Marius Victorinus. *Ars grammatica*, edidit O. Keil. Lipsiae, 1871, in-8°. VI, p. 100.

3. Voir : *Grammatici latini veteres*, édition Putschius, p. 2684.

4. Ausoni *opuscula, recognovit et prolegom. instrux.* R. Peiper. Lipsiae, 1886, in-8°, p. 208.

5. Heronis Alexandrini *opera*. Vol. III, *Vermessungslehre und Dioptra*. Griech und Deutsch von H. Schöne. Leipzig, 1903, in-8°, pp. 80 (17), 84 (11), et 130 (15-25).

6. Suidas, *recognovit* I. Bekker. Berolini, 1854, in-8°, p. 495.

7. Le traité de la *Sphère* de Théodose de Tripoli a été édité pour la première fois par Jean Pena, à Paris en 1558, avec une version latine. Une excellente édition critique du texte grec a été donnée par E. Nizze. Berlin, 1852, in-8°.

Digitized by Google

reuse, considérées comme chargées d'un potentiel grave. C'est d'ailleurs la méthode que Pascal ressuscitera, en 1658, sous le nom de balance d'Archimède, pour l'appliquer si ingénieusement à la résolution de ses fameuses propositions, connues sous le nom de problèmes de la roulette qui, étendant les découvertes du Père Mersenne et de Roberval sur la cycloïde, consistent à trouver l'aire d'un segment quelconque de cycloïde simple, allongée ou raccourcie, le centre de gravité de ce segment, et les solides que ce segment décrit en tournant autour de l'ordonnée ou autour de l'abscisse, soit qu'il fasse une révolution entière, une demi-révolution ou un quart de révolution (1). On remarquera aussitôt combien cette méthode d'Archimède, à la fois mécanique et géométrique, nous rapproche de la notion toute moderne du moment d'une force par rapport à une droite ou à un plan, à tel point que l'on pourrait dire que, si le mot lui manque, elle comporte effectivement la chose. Ainsi, après les traités *De l'Equilibre des Corps flottants*, le traité *De la Méthode mécanique* nous révèle une fois de plus Archimède, non seulement comme le plus profond géomètre de l'antiquité, mais comme le grand ancêtre de l'ingénieur moderne, dont l'activité exercée dans le champ des forces de toute nature, qu'il s'agit de grouper ou de répartir selon le but à poursuivre, est dominée par l'équation d'équilibre.

Archimède dédie son traité *De la Méthode* à son ami le géomètre Eratosthène, et il lui dévoile sa méthode mécanique comme la source cachée de ses principales découvertes. Bien que ne jugeant pas cette méthode intuitive comme susceptible de fournir des démonstrations aussi rigoureuses que celles de la géométrie pure, il la lui recommande cependant comme un instrument précieux de recherche dont il a fait souvent l'expérience, et il ajoute ces paroles vraiment prophétiques en présence de ce que la mécanique rationnelle est redevable à la notion du moment : « Cette méthode pourra encore être utile aux savants qui » vivent ainsi qu'à ceux qui doivent encore naître. » C'est d'ailleurs la même pensée que nous retrouvons chez le grand astronome Laplace, qui ne devait jamais connaître le dernier ouvrage découvert d'Archimède : « La connaissance de la méthode de l'homme de génie n'est pas

1. *Œuvres complètes* de BLAISE PASCAL. Paris, Hachette, 1865, 3 vol., in-18. Vol. III : Problèmes sur la cycloïde proposés en juin 1658, page 322, et lettre de Dettonville (Pascal) à Carcavi, page 364.

Digitized by Google

» moins utile aux progrès de la science et même à sa propre gloire que » ses découvertes (1). »

Bien qu'il nous soit parvenu dans un état fort mutilé, le nouveau traité d'Archimède comporte encore quinze propositions. Il débute par le simple rappel de onze lemmes dont les premiers, relatifs à la position du centre de gravité de diverses figures planes et solides, ont déjà été démontrés dans le traité *De l'Equilibre des Plans*, et dont le dernier, relatif aux grandeurs proportionnelles, est démontré au commencement du traité *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*. Ces lemmes importants seront d'ailleurs constamment invoqués au cours des démonstrations des propositions du corps de l'ouvrage. La première proposition offre une nouvelle démonstration mécanique de la quadrature du segment de parabole, toute différente de la première démonstration mécanique que nous trouvons dans le traité *De la Quadrature de la Parabole*. Les trois propositions suivantes concernent le volume de la sphère comparé d'abord à celui du cône ayant comme base un grand cercle et comme hauteur le rayon, et comparé ensuite au cylindre circonscrit ; puis le volume de l'ellipsoïde comparé au cylindre circonscrit, et enfin le volume du segment de paraboloïde comparé à celui du cône de même base et de même hauteur. Les cinquième et sixième propositions déterminent la position du centre de gravité dans un segment de paraboloïde de révolution et dans un hémisphère. Les deux propositions qui suivent établissent le rapport du segment sphérique et du segment d'ellipsoïde de révolution avec le cône inscrit de même base et de même hauteur. Les propositions IX, X et XI déterminent le centre de gravité du segment sphérique et des segments d'ellipsoïde et d'hyperboloïde de révolution. Viennent enfin quatre belles propositions relatives au volume de l'onglet, dont les deux premières sont mécaniques et les deux autres géométriques. La fin de l'ouvrage, qui se perd malheureusement dans une lacune semée de parties de texte indéchiffrable, devait encore démontrer géométriquement quelques propositions annoncées dans le préambule.

Le livre des *Lemmes* est un ouvrage dont le texte grec semble irrémédiablement perdu, et qui nous a été transmis dans une version

1. LAPLACE. *Œuvres. Mécanique céleste,* publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. Paris, 1878, 3 vol., in-4°.

Digitized by Google

arabe, faite au IX[e] siècle, par le géomètre Thabit-Ben-Corrah (1), et annotée par Almochtasso-abil-Hasan. Cette version arabe, dont on possède plusieurs manuscrits, a fait l'objet d'une première traduction latine, due à Graeves, éditée à Londres, en 1657, avec des notes de Samuel Forster, et d'une seconde traduction latine, due au célèbre orientaliste Abraham Ecchellensis (2), éditée à Florence, en 1661, avec les notes de Borelli. Cet ouvrage, tel qu'il nous a été transmis par les Arabes, comporte quinze propositions de géométrie plane. L'absence de toute liaison entre les propositions, et un style tout différent de celui des autres travaux d'Archimède, ne le font pas apparaître comme une œuvre originale, mais plutôt comme un recueil de propositions éparses, dont la découverte aurait été attribuée traditionnellement à Archimède par des géomètres postérieurs ; à moins cependant d'admettre que l'on se trouve en présence d'une version arabe, fort libre, ou d'un remaniement complet d'un texte grec d'Archimède.

Les propositions principales du livre des *Lemmes* sont relatives aux propriétés de certaines figures délimitées par des demi-cercles, analogues aux lunules d'Hippocrate de Chio, telles que celle en forme de couteau à lame recourbée, désignée sous le nom d'Arbelon, et celle que l'on désigne sous le nom de Salinon. Toutes les propositions de l'ouvrage sont d'ailleurs intéressantes, et leurs démonstrations se

1. THABIT-BEN-CORRAH, BEN HAROUN, célèbre philosophe et mathématicien arabe, né à Haran, en Mésopotamie, en 835, mort en 900. Il vécut à Bagdad, en qualité d'astrologue du calife Motaded, et composa environ 150 ouvrages en arabe, et 16 en syriaque. On possède ses traductions arabes des *Lemmes* et du traité de la *Sphère d'Archimède,* des *Eléments d'Euclide,* de l'*Almageste de Ptolémée* et des *Coniques d'Apollonius.*

2. ABRAHAM ECCHELLENSIS, savant orientaliste, tire son nom du village d'Ecchel, en Syrie, où il naquit à la fin du XVI[e] siècle. Il entra au Collège des Maronites, à Rome, où il prit les grades de docteur en philosophie et en théologie, et devint professeur de langues arabe et syriaque au Collège de la Propagande. En 1630, il vint à Paris pour assister Le Jay dans la préparation de sa bible polyglotte, et il contribua à ce travail par les traductions latine et arabe du livre de Ruth, et par la traduction arabe du troisième livre des Macchabées. Rappelé à Rome, en 1652, pour participer à la rédaction d'une version arabe des Écritures, il mourut dans cette ville en 1664. On doit à Ecchellensis la traduction latine d'ouvrages arabes précieux, tels que le *Chronicon Orientale* de IBU-AR-RAHIB (Paris, 1653), le livre des *Lemmes* d'ARCHIMÈDE et les livres V, VI et VII des *Coniques* d'APOLLONIUS dont le texte grec est perdu.

On pourra consulter au sujet de la vie et des travaux d'Abraham Ecchellensis l'ouvrage de G. DANDINI : *Voyage au Mont Liban,* traduction de Rich. SIMON. Paris, 1685.

Digitized by Google

rapprochent assez de nos démonstrations modernes pour ne rien avoir perdu de leur actualité ; au point que l'on s'étonne de ne pas les voir figurer dans nos manuels classiques de géométrie élémentaire.

Le Problème des Bœufs, rédigé sous la forme d'une épigramme de quarante-sept vers, met au défi la sagacité des savants de l'Ecole d'Alexandrie auxquels il est adressé. Ce problème a été attribué à Archimède par quelques auteurs de l'antiquité, et Cicéron (1) semble y faire allusion à deux reprises différentes, lorsque, dans ses *Lettres à Atticus*, il compare une chose difficile à ce qu'il désigne sous le nom de problème archimédique. Cependant, la critique moderne incline à ne faire remonter le problème à Archimède que pour le fonds, tandis que la forme sous laquelle il nous est parvenu serait un peu postérieure. Le texte grec, dont il nous reste deux manuscrits, ne fut édité pour la première fois qu'en 1773, par Lessing (2). Le problème, débarrassé de son vêtement poétique, se rapporte au calcul du nombre des bœufs composant un troupeau, étant donné qu'ils sont parqués dans l'ordre d'une figure régulière, et que les animaux de couleurs différentes se présentent dans des proportions successivement dépendantes les unes des autres.

Il est regrettable qu'Archimède ne nous ait pas laissé la solution de son problème, ou du moins quelques indications sur la marche qu'il aurait suivie pour le résoudre, marche qu'il a évidemment dû connaître pour oser poser une question aussi difficile à traiter à son époque. Le problème, dont la mise en équation présente huit inconnues, a néanmoins fait l'objet de plusieurs études chez les modernes. Ces études n'intéressent d'ailleurs que par les investigations d'analyse transcendante qu'elles font valoir ; car elles ne pouvaient aboutir qu'à des nombres dépassant l'entendement et le domaine des conceptions réalisables. C'est ainsi que la solution poursuivie par Wurm, dans un cas particulier plus simple, donne un nombre qui dépasse six mille milliards de têtes de bétail, et que la solution complète du problème, indiquée au moins dans sa marche générale par Amthor, amènerait un nombre dont les chiffres alignés rempliraient un gros volume (3).

---

1. CICÉRON, édition précitée de la traduction de NISARD, tome V, *Lettres à Atticus*, XII-4, p. 412 et XIII-28, p. 499.
2. *Beitr. z. Gesch. u. Litterat.* Braunschweig, 1773, p. 421.
3. Voir la note placée à la fin de la traduction du *Problème des Bœufs*.

Digitized by Google

Telles sont, dans un court aperçu, les œuvres d'Archimède. Dans le recul des siècles, et privées du secours de l'algorithme analytique auquel nous sommes accoutumés, elles nous paraissent maintenant avoir quelque chose d'extraordinaire et de merveilleux. Ces œuvres conservent d'ailleurs un côté mystérieux. En effet, si le traité de la *Méthode mécanique*, récemment mis au jour, est venu nous révéler le secret de quelques-unes des plus belles découvertes du grand géomètre, il n'a cependant soulevé qu'un coin du voile qui recouvre la genèse d'un grand nombre de propositions, lesquelles, démontrées par une double réduction à l'absurde, supposent malgré tout une notion préalable, obtenue par des moyens sur lesquels Archimède a gardé le silence, ou atteinte par des voies que nous suivons encore de nos jours, mais sur lesquelles il aurait effacé soigneusement la trace de ses pas.

Cependant, bien que l'étude des œuvres d'Archimède ait passionné les plus grands géomètres de la Renaissance, et que Leibniz leur ait conservé sa prédilection après l'invention des nouveaux calculs (1), il semble que les hommes, même les plus instruits de notre temps, ne leur apportent plus qu'une admiration traditionnelle, sans les connaître autrement que par la quadrature approchée du cercle et par le principe fondamental de l'hydrostatique. D'ailleurs, l'abandon classique des œuvres d'Archimède ne date pas de notre époque, car déjà au XVII[e] siècle, le Père Taquet, parlant d'Archimède dans son petit traité de géométrie ordonné à la manière des anciens, écrivait cette phrase dont nous avons mis le texte latin comme épigraphe à cette introduction : « Ceux qui le louent sont plus nombreux que ceux qui le lisent, et » ceux qui l'admirent sont plus nombreux que ceux qui le compren- » nent (2). » Et si, poursuivant sa pensée, ce géomètre voyait alors les causes d'oubli d'une œuvre immortelle dans le petit nombre d'éditions du texte grec, dans la rareté de leurs exemplaires et surtout dans l'obscurité des versions latines, généralement seules accessibles, nous pourrions, de nos jours, depuis que les études gréco-latines ont perdu

1. *Qui Archimedem et Apollonium intelligit, recentiorum summorum virorum inventa parcius mirabitur.* (LEIBNIZ, *Opera*, T. V, p. 460.)

2. *Elementa geometriae planae ac solidae, quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata. Auctore* ANDREA TAQUET. *Editio tertia correctior.* Antwerpiae, 1672, in-12, planches hors texte, page 279. Une première édition plus rare de ce petit ouvrage a été donnée à Anvers, en 1654.

Digitized by Google

de leur universalité, les attribuer à l'étonnante pénurie de traductions en langues vulgaires.

L'on conçoit, d'une manière, que depuis l'apparition de la géométrie cartésienne et de l'analyse infinitésimale, ces deux puissantes méthodes analytiques aient absorbé la pensée et dominé les travaux des géomètres. Cependant, si, à la différence des œuvres d'Euclide, celles d'Archimède et d'Apollonius ont cessé de servir, comme à la Renaissance, à l'instruction immédiate de la postérité, il n'en résulte pas que les méthodes des anciens, ayant mené à des découvertes aussi considérables, sur lesquelles Carnot (1) et Monge (2) fondèrent encore tout près de nous des travaux importants, aient épuisé toute leur fécondité, ni que l'impeccable rigueur de ces méthodes synthétiques ait perdu son enseignement pour la jeunesse de vingt ans qui, au seuil des écoles savantes, se prépare toujours plus nombreuse aux spéculations des hautes mathématiques. On sait d'ailleurs que Newton se reprochait d'avoir trop peu lu les géomètres de l'antiquité dès sa jeunesse et de s'être engagé prématurément ainsi sur le chemin de l'analyse ; tandis que Pascal, dont le génie eut tant d'analogie avec celui d'Archimède, a écrit dans son traité *Du Vide :* « Ceux que nous appelons anciens » étaient véritablement nouveaux en toutes choses, et formaient l'en» fance des hommes proprement ; et comme nous avons joint à leurs » connaissances l'expérience des siècles qui les ont suivis, c'est en » nous que l'on peut trouver cette antiquité que nous révérons dans les » autres (3). »

1. La géométrie de Position de Carnot est traitée à la manière des géomètres de l'antiquité, tandis que sa théorie des transversales ne fait que reprendre un théorème des anciens relatif aux six segments qu'une transversale fait sur les trois côtés d'un triangle. A part quelques applications de Desargues et de Pascal, ce théorème était fort oublié, et Carnot l'utilise comme moyen de démonstration et de recherches dans des questions très variées. (Voir : CARNOT, *Œuvres mathématiques,* Basle, 1797, in-8°, et *Géométrie de Position,* Paris, 1803, in-4°.)

2. *Traité élémentaire de Statique à l'usage des Ecoles de Marine,* par Gaspard MONGE. Paris, 1810, in-8°. C'est dans ce petit ouvrage, rédigé d'après la méthode des anciens, dont la première édition parut en 1786, que le célèbre géomètre français réunit tout ce que l'on peut démontrer en Statique par la synthèse.

3. *Œuvres complètes* de BLAISE PASCAL. Paris, 1865, 3 vol., in-18. Voir vol. III, fragment d'un traité du Vide, p. 161.

Digitized by Google

III

L'importance des ouvrages d'Archimède qui nous sont parvenus à travers les dangers de leur premier état manuscrit, les altérations des copistes et les incorrections des premières éditions, est bien de nature à nous faire regretter les ouvrages que nous savons avoir été perdus.

Archimède nous apprend lui-même, dans plusieurs passages de son *Arénaire*, qu'il avait rédigé et adressé à Zeuxippe un ouvrage sur l'arithmétique, intitulé *Les Principes*, ayant trait à la dénomination des nombres. Cet ouvrage nous aurait sans doute fourni plus de renseignements que nous n'en possédons sur l'extension qu'Archimède avait apportée au système de numération des Grecs,ainsi que sur les méthodes d'après lesquelles s'effectuaient certaines opérations sur les nombres complexes dans une notation qui faisait usage de lettres et qui, bien que fort régulière, était beaucoup moins simple que la nôtre.

Pappus nous apprend qu'Archimède aurait écrit sur les cinq polyèdres réguliers, et il nous énumère treize polyèdres semi-réguliers qu'il aurait en outre découverts (1). C'est d'ailleurs encore Pappus qui attribue à Archimède un ouvrage particulier sur les leviers, dans lequel il aurait démontré la relation des efforts appliqués tangentiellement à deux cercles concentriques de diamètres différents (2). C'est sans doute à ce dernier ouvrage qu'Archimède renvoie lorsque, dans la sixième proposition mécanique de son traité *De la Quadrature de la Parabole*, il dit avoir déjà démontré qu'un corps suspendu demeure dans une position telle que son centre de gravité et le point de suspension sont dans la même verticale. D'autre part, Simplicius (3), dans son commentaire sur le traité *Du Ciel* d'Aristote, mentionne un ouvrage particulier d'Archimède sur les centres de gravité ; mais il se peut qu'il s'agisse ici du même ouvrage que le précédent, désigné sous un titre différent ou sous celui de l'un de ses principaux chapitres. En tout cas, c'est peut-être dans ce dernier ouvrage qu'Archimède aura donné une

1. PAPPUS, édition précitée de HULTSCH, livre V, p. 352, ou édition précitée de la traduction latine de COMMANDIN, livre V, p. 129.

2. PAPPUS, édition HULTSCH, liv. VIII, p. 1068, ou édition de COMMANDIN, liv. VIII, p. 461.

3. SIMPLICIUS, *in Aristotelis de Caelo commentaria*. Edidit J. L. Heiberg. Berolini, 1894, in-8°.

Digitized by Google

définition du centre de gravité, qu'on ne trouve pas dans son traité *De l'Equilibre des Plans*, et qu'il aura démontré, ce qu'il se borne à assumer dans la quatrième proposition de la première partie du même traité, à savoir que le centre de gravité de l'ensemble de deux grandeurs est situé sur la droite qui relie leurs centres de gravité respectifs.

Théon d'Alexandrie (1), dans son commentaire des œuvres de Claude Ptolémée, à propos d'un phénomène de la réfraction, mentionne un ouvrage d'Archimède sur l'Optique. Olympiodore d'Alexandrie (2) mentionne aussi ce dernier ouvrage dans son commentaire sur la *Météorologie* d'Aristote, et Apulée (3) y fait probablement allusion dans le passage suivant de son *Apologie*, où il parle de certains phénomènes d'optique : « Il existe en ce genre d'autres questions » curieuses, qui font la matière d'un gros volume dans les œuvres du » syracusain Archimède, génie supérieur que celui-là, dont l'admirable » sagacité s'étendait, il est vrai, à toute la géométrie. »

Proclus (4) et Pappus (5) nous rapportent qu'Archimède aurait écrit un ouvrage technique sur la construction de sa sphère planétaire (6), tandis que certains commentateurs arabes lui attribuent encore différents écrits qui avaient comme sujets l'heptagone inscrit au cercle, les cercles tangents, les triangles, les propriétés du triangle rectangle et les données ou définitions en géométrie. Mentionnons enfin un petit ouvrage arabe sur les miroirs comburants, traduit en latin par Gongava (7), en 1548, qui a été faussement attribué à Archimède, car il y est question du géomètre Apollonius qui vécut un demi-siècle après Archimède (8).

---

1. *Commentaire de* THÉON D'ALEXANDRIE *sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée*, traduit du grec par M. HALMA. Paris, 1821-1822, tome I, p. 29.

2. OLYMPIODORUS *in Arist. Meteor.*, édition Ideler, II, p. 94.

3. APULÉE. Traduction nouvelle par M. V. BÉTOLAUD. Paris, 1835, 4 vol., in-8°, tome IV, *Apologie*, p. 43.

4. PROCLUS, édition précitée, p. 41.

5. PAPPUS, édition précitée de la version latine de COMMANDIN, liv. VIII, introduction, p. 448, l. 19.

6. On pourra consulter à ce sujet : H. A. SCHIEK, *Ub. d. Himmelsgloben d. Anaximander u. Archimedes*. Hanau, 1843, in-4°.

7. *Antiqui scriptoris de speculo comburante concavitatis parabolae, ex arab. lat. vert.* GONGAVA. Lovanii, 1548, in-4° (Opuscule rare).

8. Voir : MONTUCLA, *Histoire des mathématiques*, nouvelle édition, achevée par J. DE LALANDE. Paris, 1799-1802, 4 vol., in-4°, tome I, p. 236.

Digitized by Google

IV

L'histoire et la filiation des manuscrits des œuvres d'Archimède ont été écrites d'une manière magistrale par J. L. Heiberg dans les prolégomènes de sa dernière édition des textes grecs (1). Nous n'entraînerons pas le lecteur dans cette matière d'un intérêt purement philologique, et nous nous bornerons à mentionner les principales éditions qui se sont succédé en diverses langues.

Une première édition incunable, ne comportant que le texte grec de l'*Arénaire*, fut imprimée en Angleterre, et le seul exemplaire connu de cette édition est conservé à la bibliothèque bodleïenne d'Oxford(2).

La première édition du XVI^e^ siècle fut donnée à Venise par Lucas Gauricus. Elle comporte le traité de la *Quadrature de la Parabole* et celui de la *Dimension du Cercle* dans une traduction latine que l'on a pu identifier récemment avec celle de Guillaume de Moerbeke, faite au XII^e^ siècle. Cette édition rarissime porte le titre : « *Campani viri clarissimi Tetragonismus, id est circuli quadratura, Romae edita cum additionibus Gaurici ; Archimedis Syracusani Tetragonismus ; de quadratura circuli secundum Boetium.* Venetiis, 1503, pet. in-4°. »

En 1543, Nicolas Tartaglia fit réimprimer textuellement l'édition précédente, et il l'augmenta des deux livres *De l'Equilibre des Plans* et du premier livre *Des Corps flottants*, dans une traduction latine que l'on croyait avoir été composée par lui sur des textes grecs, perdus depuis, mais que l'on a pu identifier également avec la vieille traduction latine de Guillaume de Moerbeke. L'ouvrage porte le titre suivant: « *Opera Archimedis Syracusani philosophi et mathematici ingeniosissimi, per Nic. Tartaleam Brixianum.* Venetiis, in-4°, fig. »

En 1565, Curtius donna, à Venise, une édition préparée par Tartaglia, comportant les deux livres *Des Corps flottants*, dans la traduction latine de Guillaume de Moerbeke.

La première édition du texte grec des œuvres d'Archimède fut donnée à Bâle, en 1544, par Thomas Gechauff, dit Venatorius ; elle

1. Ces prolégomènes, écrits en latin, se trouvent au commencement du troisième volume de l'édition qui sera mentionnée plus loin.

2. L'ouvrage, sans date et sans notes, imprimé sur 32 pages in-fol., porte le titre tout grec : Θεώρημα ᾧ κέχρηται ἐν τῷ Φαμμίτῃ ὁ Ἀρχιμήδης.

Digitized by Google

porte comme titre : « *Archimedis opera, quae quidem extant omnia, nunc primum et graece et latine in lucem edita ; adjecta sunt Eutocii Ascalonitae in eosdem Archimedis libros commentaria, item graece et latine, nunquam antea excusa.* Basileae, Jos. Hervagius, in-fol. » Cette édition, accompagnée du commentaire d'Eutocius et d'une version latine de Jacques de Crémone, revue par Jean Regiomontanus, ne comporte pas le traité *Des Corps flottants*, dont le texte grec avait disparu, ni *Les Lemmes*, dont la version arabe n'avait pas encore été mise au jour.

En 1557, parut une version latine de l'*Arénaire*, accompagnée d'un commentaire de Hamel. Elle porte pour titre : « *Paschasii Hamellii regii mathematici commentarius in Archimedis Syracusani praeclari mathematici librum de numero arenae.* Lutetiae, in-8°, fig. »

En 1558, Commandin publia une nouvelle traduction latine des livres de la *Mesure du Cercle*, des *Spirales*, de la *Quadrature de la Parabole*, des *Conoïdes et Sphéroïdes* et de l'*Arénaire*. L'ouvrage porte le titre : « *Archimedis opera nonnulla a* Fed. COMMANDINO *nuper in latinum conversa et commentariis illustrata.* Venetiis, in-fol., fig. »

Quelques années plus tard, Commandin donna une édition ne comportant que les deux livres *Des Corps flottants*, sous le titre : « *Archimedis de iis quae vehuntur in aqua libri duo, a* Fed. COMMANDINO *restituti et illustrati. Ejusdem* F. COMMENDINI *liber de centro gravitatis solidorum.* Bononiae, 1565, in-4°, fig. »

En 1588, Guido Ubaldo, dont on possède de curieux traités de mécanique et de perspective, publia un ouvrage qui constitue une paraphrase des deux livres *De l'Equilibre des Plans*. Il porte le titre : « GUIDI UBALDI *in duos Archimedis aequeponderantium libros paraphrasis, scholiis illustrata.* Pisauri, in-fol., fig. »

En 1597, parut, sous le titre suivant, une édition du texte de la *Mesure du Cercle* d'Archimède, donnée par Adrien Romain [1] : « *In*

1. Adrien ROMAIN (Van Roomen), mathématicien belge, né à Louvain, en 1561, mort en 1615, enseigna la géométrie à l'Université de Louvain, puis à l'Université de Wurzbourg. Son nom est resté attaché à l'équation du 45^{me} degré, dont il avait proposé la résolution en défi aux géomètres de son temps, et dont François Viète lui envoya une solution plus simple que la sienne. Viète lui proposa à son tour de décrire une circonférence tangente à trois circonférences données, problème ancien, mentionné par Pappus comme ayant été résolu par Apollonius dans l'un de ses ouvrages perdus. Adrien Romain aperçut que le centre du cercle cherché se trouve à l'intersection de deux branches d'hyperbole; mais il n'alla pas plus loin,

Digitized by Google

Archimedis Circuli Dimentionem expositio et analysis. Apologia pro Archimede ad clarissimum Josephum Scaligerum. Exercitationes cyclicae contra Josephum Scaligerum, Oruntium Finaeum et Reymarum Ursum, in decem dialogos distinctas. Authore Adriano ROMANO. Wurceburgi, in-fol. » Le texte grec, qui reproduit celui de la première édition de Bâle, est accompagné d'une version latine, d'un double commentaire et d'une série de dix dialogues. Le premier commentaire constitue une longue paraphrase du texte même d'Archimède, tandis que le second reprend le texte pour l'exposer dans une série de tableaux qui mettent le raisonnement d'Archimède sous la forme rigoureusement syllogistique qui était alors en honneur dans les écoles scolastiques. Cependant, le principal intérêt de ce curieux ouvrage, devenu fort rare, consiste dans les dix dialogues par lesquels Adrien Romain réfute les tentatives de solution du problème de la quadrature exacte du cercle, faites par Scaliger (*Nova Cyclometria*, Leyde, 1592), par Oronce Finé et par Nicolas Raymarus (Nicolas Reymers).

La seconde édition du texte grec fut donnée par David Revault de Fleurances, précepteur de Louis XIII. Elle porte le titre suivant : « *Archimedis opera quae exstant, novis demonstrationibus commentariisque illustrata, per* DAV. RIVALTUM A FLEURANTIA CAENOMANUS. Paris, 1615, in-fol. » Cette édition, dénuée de valeur, ne comporte que le texte grec des énoncés des propositions, et les démonstrations en sont abrégées ou remaniées. Le seul intérêt que présente encore cet ouvrage réside dans son commentaire sur l'*Arénaire*.

En 1636, parut l'édition donnée par le Père Mersenne sous le titre :

---

et c'est Newton qui, un siècle plus tard, montra, au Lemme XVI du livre de ses *Principes*, que les intersections des hyperboles d'Adrien Romain peuvent être déterminées par des droites et des cercles.

Adrien Romain avait fait paraître à Louvain, en 1593, un ouvrage important intitulé : « *Ideae mathematicae pars prima, sive methodus polygonorum*, etc. » dans lequel il donne le rapport de la circonférence au diamètre avec 15 décimales, détermination la plus exacte que l'on eût calculée jusque-là.

On trouvera de plus amples renseignements sur les nombreux travaux d'Adrien Romain dans les ouvrages suivants :

1° *Histoire des sciences mathématiques et physques chez les Belges*, par Ad. QUETELET. Bruxelles, 1864, in-8°, p. 132.

2° *Biographie nationale* publiée par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Bruxelles, 1907, tome XIX, p. 848.

3° MONTUCLA. *Histoire des mathématiques*, tome I, p. 579.

4. M. CANTOR. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2° édition, T. II.

Digitized by Google

« *Archimedis opera mechanicorum libri, Apollonii Pergaei conicorum et Sereni de sectione cylindri.* Lutetiae, in-16. »

C'est en 1657 que parut la première édition des *Lemmes* dans la traduction latine, faite sur une version arabe, par Graeves et Forster. Elle porte le titre suivant : « *Lemmata Archimedis apud graecos et latinos jampridem desiderata, e vetuste codice M. S. arabico, a Johanno Gravio, traducta, et nunc primum cum arabum scholis publicata, revisa et pluribus mendis expurgata a Samuele Forster.* Londini, in-fol.»

Les Lemmes parurent pour la seconde fois dans une nouvelle traduction latine, faite sur l'arabe, par Abraham Ecchellensis, et imprimée à la suite des trois derniers livres des coniques d'Apollonius, dont le texte grec est perdu, et dont Borelli découvrit un résumé arabe. L'édition porte comme titre : « *Apollonii Pergaei conicorum libri V, VI, VII, paraphraste Abalphato Asphahanensi, nunc primum editi. Additus in calce Archimedis assumptorum liber ex codicibus arabicis M. SS. Abrahamus Ecchellensis Maronita latinos reddidit, Jo. Alfonsus Borellus notas adjecit.* Florentiae, 1661, pet. in-fol. »

En 1673 parut, à Messine, une édition d'Archimède préparée par Fr. Maurolyco (1), et publiée longtemps après sa mort par Borelli. Cet ouvrage ne constitue pas une traduction latine, mais une simple imitation des œuvres d'Archimède. Toute l'édition périt dans un naufrage, à l'exception d'un seul exemplaire, qui fut retrouvé en 1681, et réimprimé à Palerme sous le titre : « *Admirandi Archimedis Syracusani monumenta omnia mathematica quae exstant, ex traditione* D. Fr. Maurolici. Panormi, 1685. »

1. Francesco Maurolyco, célèbre géomètre italien, désigné souvent en France sous le nom de Marulle, né à Messine en 1494, mort en 1575. Il enseigna les mathématiques à Messine. Son traité des coniques est remarquable parce qu'il présente pour la première fois quelques propriétés de ces courbes déduites de celles qui y correspondent dans le cercle. Il observa que l'ombre de l'extrémité du style d'un cadran solaire décrit journellement un arc de section conique, et il fonda sur cette observation de nouvelles règles pour la gnomique. On lui doit l'introduction des sécantes dans les calculs trigonométriques, et il dressa une table de sécantes qu'il publia à la suite de sa traduction latine du traité de la *Sphère de Théodose* (Messine, 1558). Outre ses travaux, publiés pour la plupart après sa mort, sur l'arithmétique, la géométrie, la perspective, la cosmographie et sur la reconstitution du V^e^ livre des coniques d'Apollonius, dont le texte grec est perdu, et dont la version arabe n'était pas connue de son temps, il a laissé d'importants travaux inédits au sujet desquels on trouvera des renseignements dans l'ouvrage suivant : *Scritti inediti* di Francesco Maurolico publicati del prof. Fed. Napoli. Roma, 1876, in-4°.

Digitized by Google

En 1675, parut l'édition de Barrow, qui fut le maître de Newton à l'université de Cambridge. Elle ne comporte qu'une traduction latine fort libre des énoncés des propositions, dont les démonstrations sont résumées et parfois nouvelles. Elle est intitulée : « *Archimedis opera, Apollonii Pergaei conicorum libri IV, Theodosii spherica, methodo nova illustrata et succincte demonstrata.* Londini, pet. in-4°, fig. »

En 1676, J. Wallis donna, sous le titre suivant, une édition de l'*Arénaire* et de la *Mesure du Cercle*, avec le commentaire d'Eutocius et une traduction latine nouvelle : « *Archimedis Syracusani Arenarius et Dimensio Circuli, Eutocii Ascalonitae in hanc commentarius, cum versione et notis.* Oxonii, in-8°. »

La dernière édition ancienne est celle qui, préparée par Torelli, fut publiée après sa mort, à Oxford, par Abraham Robertson sous le titre suivant : « *Archimedis quae supersunt omnia, cum Eutocii Ascalonitae commentariis, ex versione Josephi Torelli Veronensis, cum nova versione latina.* Oxonii. 1792, in-fol. » Cette magnifique édition grecque-latine, difficile à rencontrer, reproduit le texte grec de l'édition de Bâle, revisé sur les manuscrits de Paris et de Florence. Enrichie du commentaire d'Eutocius et d'une nouvelle version latine, elle est cependant encore fort incorrecte comme toutes les éditions précédentes.

Les textes manuscrits d'Archimède n'avaient pas encore fait l'objet d'une étude approfondie, lorsqu'en 1879, un danois, J. L. Heiberg, donna le premier texte critique de l'*Arénaire*, dans une thèse relative aux œuvres d'Archimède (1). Ce premier essai, qui révélait un maître, fut suivi, en 1880, d'une édition critique des œuvres d'Archimède connues jusqu'alors (2).

Les traductions des œuvres d'Archimède en langues vulgaires sont peu nombreuses, toutes anciennes et partielles.

En italien, on a une traduction des deux livres *Des Corps flottants*, donnée par Tartaglia, en 1551, à Venise, et l'on ne peut considérer comme une traduction le simple résumé du traité *De la Sphère et du Cylindre* que P.Cuppini publia en notations modernes,en 1860(3).

1. *Quaestiones Archimedeae scripsit* J. L. Heiberg. *Inest de Arenae numero libellus.* Copenhague, 1879, in-8°.

2. *Archimedis opera omnia, edidit et latine vertit* J. L. Heiberg. Leipzig, 1880, 3 vol., in-12.

3. P. Cuppini. *I teorema d'Archim. sul Cilindro e sulla Sfera trattati numericamente.* Torino, 1860, in-8°.

Digitized by Google

En allemand, on possède les traductions de l'*Arénaire* de J.Sturm (1) et de Krüger (2) ; la traduction du traité *De la Quadrature de la Parabole* par D. Hoffmann (3) ; la traduction du traité *De la Mesure du Cercle* et du traité *De la Sphère et du Cylindre* par Hauber (4) ; une traduction du traité *De la Mesure du Cercle* par Gutenacker (5) ; enfin les traductions de J. Sturm (6) et du danois E. Nizze (7), qui comportent tous les ouvrages d'Archimède connus à leur époque.

En anglais, on connaît une traduction de l'*Arénaire* donnée par Anderson (8), en 1748, et l'ouvrage récent de T. L. Heath (9), qui n'est pas une traduction proprement dite des œuvres d'Archimède, car il énonce librement les propositions dans le langage mathématique actuel, et résume fortement les démonstrations en notations usuelles.

En français, on n'a possédé jusqu'ici que les deux traductions du traité *De l'Equilibre des Plans* (10) et du traité *Des Corps flottants* (11), faites sur des versions latines, par Pierre Forcadel, en 1565, et qui constituent des opuscules fort rares ; puis la traduction incomplète de Peyrard (12), en 1807, basée sur le texte grec, fort incorrect, de l'édition d'Oxford, et donnant le traité *Des Corps flottants*, d'après la version latine que l'on possédait seule au siècle dernier.

Toutes les éditions qui précèdent et les traductions en langues

---

1. STURM : *Archimeds Sandrechnung übers...* Nürnberg, 1667, in-fol.
2. KRÜGER : *Arenarius übers. u. erkl.* Quedlinbg., 1820, in-8°.
3. D. HOFFMANN : *Die Quadratur der Parabel des Archimedes mit Hulfsätzen verschen...* Aschaffenburg, 1817, in-8°.
4. K. F. HAUBER : *Archimeds zwei Bücher über Kugel und Cylinder. Ebendesselben Kreismessung.* Ubersetzt mit Anmerkungen u. s. w. begleitet. Tubingen, 1798, in-8°.
5. GUTENACKER : *Archimeds Kreismessung, Gr. u. Deutsch.* Wurzburg,1828,in-8°.
6. J. C. STURM : *Des unvergleichlichen Archimedis Kunstbücher,* ubersetzt und erlautert. Nurnberg, 1670, in-fol.
7. E. NIZZE : *Archimedes von Syrakus vorhandene Werke,* aus dem Griechischen ubersetzt und mit erlauternden und kritischer Anmerkungen begleitet. Stralsund, 1824, in-4°.
8. ANDERSON : *Arenarius* gr. and angl. transl. with notes. London, 1748, in-8°.
9. T. L. HEATH : *The works of Archimedes* edited in modern notations, with introductory chapters. Cambridge, 1897, in-4°.
10. *Le premier livre d'Archimède des choses égallement pesantes,* traduict et commenté par Pierre FORCADEL DE BEZIERS. Paris, 1565, in-4°.
11. *Le livre d'Archimède des poids, qui aussi est dict des choses tombantes en l'humide,* traduict et commenté par Pierre FORCADEL DE BEZIERS. Ensemble ce qui se trouve du livre d'Euclide intitulé *Du léger et du pesant,* traduict et commenté par le mesme FORCADEL. Paris, 1565, in-4°.
12. F. PEYRARD : *Œuvres d'Archimède.* Paris, 1807, in-4°.

Digitized by Google

vulgaires que nous venons de mentionner ont perdu beaucoup de leur intérêt à la suite de la restauration des textes, et depuis les dernières découvertes de nouveaux ouvrages d'Archimède.

En 1899, le paléographe Papadopoulos Kerameus découvrait, parmi les manuscrits du Patriarcat grec de Jérusalem, un palimpseste comportant un ouvrage de mathématiques. Ce palimpseste, en assez mauvais état, fut déchiffré, en 1906, par M. J.-L. Heiberg, professeur à l'Université de Copenhague, qui y reconnut un texte d'Archimède, un fragment du traité intitulé *Le Stomachion*, la majeure partie du texte grec du traité *Des Corps flottants*, dont on ne possédait jusqu'ici que la version latine, et enfin le texte presque complet du traité inédit *De la Méthode mécanique*.

Le texte du traité *De la Méthode mécanique* fit, dès sa mise au jour, l'objet de plusieurs travaux : une traduction allemande par J. L. Heiberg, avec un commentaire du mathématicien danois H. G. Zeuthen (1) ; une traduction française libre et résumée en notations modernes par Th. Reinach (2), enfin deux traductions en anglais, l'une par E. Smith (3), et l'autre, résumée en notations mathématiques actuelles, par T. L. Heath (4).

Ce sont les textes nouvellement découverts qui ont déterminé J. L. Heiberg à publier une nouvelle édition du texte grec des œuvres d'Archimède, revue d'après tous les manuscrits actuellement connus, et accompagnée d'une nouvelle version latine (5).

Tels sont les documents, les uns difficiles à consulter, d'autres que nous avons mis des années à recueillir, sur lesquels est basée notre traduction française, la première qui soit complète, des œuvres d'Archimède.

Anvers, mai 1917. Paul Ver Eecke.

1. *Eine neue Schrift des Archimedes* von J. L. Heiberg und H. G. Zeuthen. Leipzig, 1907.
2. *Revue générale des sciences pures et appliquées* (30 nov. 1907, p. 911 et 15 déc. 1907, p. 954).
3. *The Monist*. Chicago, 1909. XIX, p. 202.
4. *The Method of Archimedes recently discovered* by Heiberg, edited by Sir Thomas L. Heath. Cambridge, 1912, in-8°.
5. *Archimedis opera omnia, cum commentariis Eutocii, iterum edidit* J. L. Heiberg, professor Hauniensis. Lipsiae, 1913-1915, 3 vol., in-12.

Digitized by Google

TABLEAU DES LETTRES GRECQUES
EMPLOYÉES DANS LES FIGURES ET DANS LE TEXTE

CARACTÈRES	VALEUR	APPELLATION	CARACTÈRES	VALEUR	APPELLATION
A α	a	alpha	Ξ ξ	x, cs, gs	ksi
B β 6	b	bêta	O ο	o (*bref*)	omicronn
Γ γ	g	gamma	Π π	p	pi
Δ δ	d	delta	P ρ	r	rhô
E ε	e (*bref*)	epsilonn	Σ σ, ς	s, ç (*dur*)	sigma
Z ζ	dz, ds	dzêta	T τ	t (*dur*)	tau
H η	ê (*long*)	êta	Υ υ	y, u (*bref*)	upsilonn
Θ θ ϑ	th	thêta	Φ φ	ph, f	phi
I ι	i	iôta	X χ	ch, kh	chi (ki)
K κ	c, k	kappa	Ψ ψ	ps, bs	psi
Λ λ	l	lambda	Ω ω	ô (*long*)	ômégа
M μ	m	mu	ϛ ou ϟ		kophe
N ν	n	nu	ϡ ϡ		sampi

Digitized by Google

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE

LIVRES I ET II

Digitized by Google

Digitized by Google

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE

LIVRE I

Archimède à Dosithée, Salut !

Parmi les propositions que je t'ai envoyées précédemment comme ayant été examinées par moi-même, j'avais écrit la suivante, accompagnée de sa démonstration : Tout segment délimité par une droite et par une section de cône rectangle (1) vaut les quatre tiers du triangle ayant même base que le segment et une hauteur égale. Ayant rencontré depuis lors des théorèmes qui méritent d'être signalés, je me suis occupé de leurs démonstrations. Ce sont les suivants : d'abord, l'aire de toute sphère est quadruple de son plus grand cercle ; ensuite, l'aire de tout segment de sphère vaut le cercle dont le rayon (2) est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment (3) ; en outre, pour toute sphère, le cylindre ayant la base égale au plus grand cercle de la sphère et la hauteur égale au diamètre de la sphère vaut une fois et demie cette sphère, et son aire vaut une fois et demie celle de cette sphère.

Ces propriétés, d'un caractère primordial dans les figures dont nous venons de parler, ont cependant été ignorées par ceux qui se sont occupés de géométrie avant nous, et aucun d'eux n'avait discerné que

1. ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, littéralement : section de cône rectangle, c.-à-d. une parabole (Voir note au traité *De la Quadrature de la Parabole*).

2. ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, littéralement : la (droite) menée du centre ; périphrase par laquelle Archimède désigne toujours le rayon du cercle.

3. Proposition XXX.

Digitized by Google

ces figures avaient une commune mesure. Aussi, n'ai-je pas hésité à mettre ces propriétés en parallèle avec celles qui ont été traitées par les autres géomètres, ainsi qu'avec celles, relatives aux figures solides, examinées par Eudoxe, qui paraissent être beaucoup plus importantes; notamment que toute pyramide vaut le tiers du prisme ayant même base que la pyramide et hauteur égale, et que tout cône vaut le tiers du cylindre ayant même base que le cône et hauteur égale. Or, bien que ces propriétés eussent aussi un caractère primordial dans ces figures, il se fait cependant que tous les géomètres qui, avant Eudoxe, furent nombreux et dignes d'être mentionnés, les ont ignorées, et qu'aucun d'eux ne les a discernées. Il sera d'ailleurs loisible d'examiner mes propositions à ceux qui en seront capables. Il eût fallu toutefois qu'elles fussent publiées du vivant de Conon, car j'estime que lui surtout aurait été à même de les comprendre et capable de donner une appréciation à leur sujet. Cependant, estimant qu'il y a avantage à les porter à la connaissance de ceux auxquels les mathématiques sont familières, je t'envoie les démonstrations que j'en ai écrites ; il sera loisible de les examiner à ceux qui sont habiles en mathématiques. Sois en bonne santé.

Ecrivons d'abord les axiomes [1] et les choses que nous admettons en vue des démonstrations de ces propositions :

DÉFINITIONS.

1. Il y a dans le plan certaines lignes courbes [2] terminées qui sont entièrement situées d'un même côté des droites reliant leurs extrémités, ou dont rien n'est situé de l'autre côté de ces droites.

2. J'appelle concave dans la même direction une ligne telle, qu'ayant pris deux points quelconques sur cette ligne, les droites qui joignent ces points tombent, soit toutes du même côté de la ligne, soit, les unes du même côté, d'autres sur la ligne même, sans que toutefois aucune d'elles ne tombe de l'autre côté [3].

1. Le texte porte ἀξιώματα, axiomes, bien qu'il s'agisse plutôt de définitions.

2. καμπύλαι γραμμαί, littéralement : lignes pliées, recourbées. Il faut entendre ici non seulement les lignes à courbure continue, mais des lignes mixtes composées de lignes droites et courbes, comme cela ressort du texte de la définition suivante.

3. C'est-à-dire que si la ligne est à courbure continue dans la même direction, toutes les droites qui relient deux points quelconques seront situées du côté concave;

Digitized by Google

3. Pareillement, il y a aussi certaines surfaces terminées, non situées dans un plan, mais ayant leurs extrémités dans ce plan, qui sont entièrement situées du même côté du plan dans lequel leurs extrémités sont placées, ou qui n'ont rien qui soit situé de l'autre côté.

4. J'appelle concaves dans la même direction les surfaces telles, qu'ayant pris deux points, les droites qui joignent ces points tombent toutes du même côté de cette surface, soit les unes du même côté, d'autres dans la surface même (1), sans qu'aucune d'elles ne tombe de l'autre côté de cette surface.

5. Lorsqu'un cône ayant son sommet au centre d'une sphère coupe cette sphère, j'appelle secteur solide la figure délimitée par la surface du cône et par la surface de la sphère qui est intérieure au cône.

6. Lorsque deux cônes ayant même base ont leurs sommets de part et d'autre du plan dans lequel la base est située, de manière que leurs axes soient placés en ligne droite, j'appelle rhombe solide la figure composée de l'un et de l'autre cône.

POSTULATS.

J'admets les choses suivantes :

1. La droite est la plus courte des lignes ayant les mêmes extrémités (2).

si la ligne est mixte, composée de parties courbes et de parties droites, certaines droites qui relient deux points pris sur une partie droite se confondront avec cette partie droite, mais aucune droite ne tombera du côté convexe de la ligne courbe.

1. Dans le cas d'une surface réglée.

2. En présentant la notion de la ligne droite parmi ses postulats, se bornant ainsi à admettre une propriété de la ligne droite, ou à énoncer en réalité un théorème susceptible d'une démonstration très délicate, Archimède se séparait nettement de ses prédécesseurs tels que Platon et Euclide qui présentent cette notion comme une définition. Dès lors, il est étonnant que les termes employés par Archimède, ou des termes analogues, notamment que la droite est le plus court chemin d'un point à un autre, aient été reproduits si longtemps dans nos manuels classiques à titre d'axiome ou de définition. Platon avait défini la ligne droite « celle de laquelle les parties du milieu ombragent les extrêmes ». Euclide nous donne la définition suivante : εὐθεῖα γραμμή ἐστιν. ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται, c'est-à-dire : la ligne droite est celle qui est également placée entre ses points. (EUCLIDE, traduction Peyrard, Paris, 1809, in-8°). Une autre traduction du début du XVII[e] siècle rend le texte d'Euclide comme suit : « La droite est celle-là laquelle est également estendüe entre ses poincts », c'est-à-dire, commente le traducteur, « en laquelle aucun des poincts, de tous ceux qui sont posez entre les extrémitez, n'est plus eslevé ou abbaissé ». (EUCLIDE, traduction LE MARDELÉ, Paris, 1632, in-12). La dernière définition de la droite est celle que H. Poincarré emprunte à la considération du mouvement des corps solides : « la ligne droite est un axe de rotation. »

Digitized by Google

2. Quant aux autres lignes [1], lorsque, situées dans un plan, elles ont les mêmes extrémités, elles sont inégales si, étant les unes et les autres concaves dans la même direction, l'une d'elles est entièrement comprise entre une autre et la droite ayant mêmes extrémités, ou est en partie comprise et en partie commune ; et la ligne comprise est la plus petite.

3. Pareillement aussi, lorsque des surfaces ont les mêmes extrémités, si ces extrémités sont situées dans un plan, la surface de ce plan sera la plus petite.

4. Parmi d'autres surfaces ayant mêmes extrémités, lorsque ces extrémités sont situées dans un plan, celles-là sont inégales si, étant les unes et les autres concaves dans la même direction, l'une d'elles est entièrement comprise entre une autre et la surface plane ayant mêmes extrémités, ou est en partie comprise et en partie commune ; et la surface comprise est la plus petite.

5. D'autre part, parmi les lignes, surfaces et solides inégaux, le plus grand excède le plus petit d'une grandeur telle que celle-ci étant ajoutée à elle-même, elle peut dépasser toute grandeur donnée ayant un rapport avec l'une et l'autre des premières.

Ces choses étant posées, si un polygone est inscrit dans un cercle, il est clair que le périmètre du polygone est plus petit que la circonférence du cercle ; car chacun des côtés du polygone est plus petit que l'arc du cercle qu'il découpe [2].

PROPOSITION I.

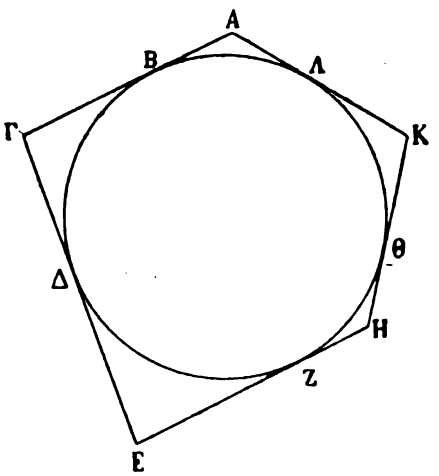
Si un polygone est circonscrit à un cercle, le périmètre du polygone circonscrit est plus grand que la circonférence du cercle.

Circonscrivons un polygone au cercle donné ci-dessous ; je dis que le périmètre de ce polygone est plus grand que la circonférence de ce cercle. En effet, puisque la somme de BA, AΛ est plus grande que l'arc BΛ, parce que ces droites comprennent un arc ayant les mêmes extrémités [3], il en est aussi de même pour la somme de ΔΓ,

1. C.-à-d. autres que des lignes droites.
2. Postulat 1.
3. Postulat 2.

Digitized by Google

ΓB, plus grande que l'arc ΔB ; pour la somme de ΛK, KΘ, plus grande que l'arc ΛΘ, et pour la somme de ZH, HΘ, plus grande que l'arc ZΘ ; enfin pour la somme de ΔE, EZ, plus grande que l'arc ΔZ. Par conséquent, le périmètre entier du polygone est plus grand que la circonférence du cercle.

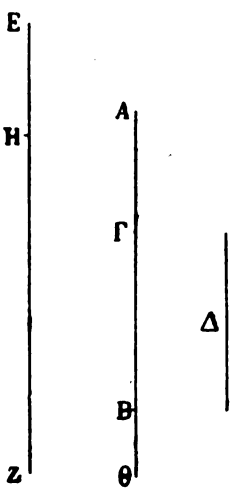


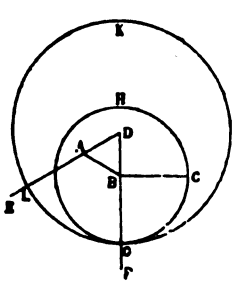
PROPOSITION II.

Deux grandeurs inégales étant données, il est possible de trouver deux droites inégales telles que le rapport de la plus grande à la plus petite soit moindre que celui de la plus grande grandeur à la plus petite.

Soient AB, Δ deux grandeurs inégales, et soit AB la plus grande. Je dis qu'il est possible de trouver deux droites inégales réalisant la condition que nous venons de dire.

Posons BΓ égal à Δ d'après la seconde proposition du premier livre d'Euclide (1), et posons une certaine ligne droite ZH. Or, la grandeur ΓA surajoutée à elle-même dépassera la grandeur Δ (2). Multiplions-la donc ; qu'elle soit AΘ, et que ZH soit multiple de HE autant de fois que AΘ est multiple de AΓ. Dès lors, ZH est à HE comme ΘA est





2. Postulat 5.

1. Cette proposition est énoncée comme suit par Euclide : « Par un point donné établir une droite égale à une droite donnée ». Il en donne une solution fort longue que l'on peut résumer ainsi : Soit A le point donné, BC la droite donnée. Joignons AB. La 1re proposition d'Euclide permet de construire le triangle équilatéral DAB dont on prolonge les côtés AD, DB. Décrivons la circonférence de centre B et de rayon BC, ainsi que la circonférence de centre D et de rayon DG. Dès lors, on a : BC = BG ; DL = DG. Or, DA = DB, d'où AL = BG, d'où AL = BC. Donc, par A on a mené AL égale à BC donnée.

Digitized by Google

à ΑΓ (1), et inversement, ΑΓ est à ΑΘ comme ΕΗ est à ΗΖ. Et puisque ΑΘ est plus grand que Δ, c'est-à-dire plus grand que ΓΒ, le rapport de ΓΑ à ΑΘ sera plus petit que celui de ΓΑ à ΓΒ (2). Mais ΕΗ est à ΗΖ comme ΓΑ est à ΑΘ ; donc le rapport de ΕΗ à ΗΖ est plus petit que celui de ΓΑ à ΓΒ, et, par composition, le rapport de ΕΖ à ΖΗ est plus petit que celui de ΑΒ à ΒΓ. Or, ΒΓ est égal à Δ ; par conséquent, le rapport de ΕΖ à ΖΗ est plus petit que celui de ΑΒ à Δ (3). Donc, on a trouvé deux droites inégales qui réalisent la condition énoncée, c'est-à-dire que le rapport de la plus grande à la plus petite est moindre que celui de la plus grande grandeur à la plus petite.

PROPOSITION III.

Deux grandeurs inégales et un cercle étant donnés, il est possible d'inscrire un polygone dans ce cercle et de lui en circonscrire un autre, de manière que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que le rapport de la plus grande grandeur à la plus petite.

Soient données les deux grandeurs A, B (4), et soit donné le cercle ci-dessous. Je dis qu'il est possible de réaliser ce que nous nous sommes imposé.

En effet, soient trouvées deux droites Θ, ΚΛ, dont Θ est la plus grande, de manière que le rapport de Θ à ΚΛ soit plus petit que celui de la plus grande grandeur à la plus petite (5). Du point Λ menons ΛΜ perpendiculaire à ΛΚ, du point Κ menons ΚΜ égal à Θ, et menons deux diamètres du cercle perpendiculaires l'un sur l'autre ΓΕ,

---

1. EUCLIDE, livre V, prop. 15 : « Les parties ont entre elles même rapport que leurs équimultiples. » (Voir édition précitée de la traduction de PEYRARD.)

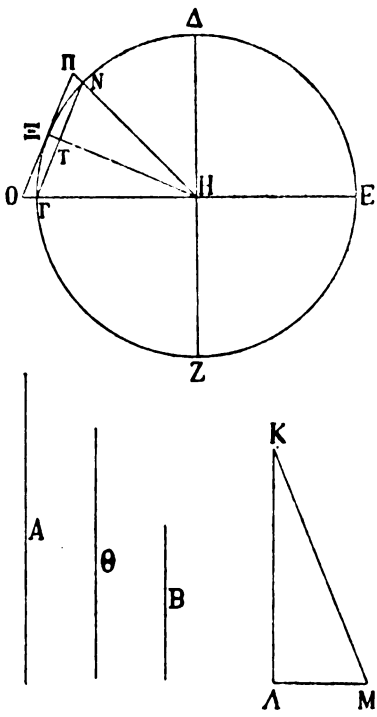
2. EUCLIDE, livre V, prop. 8.

3. On a : $\frac{\Gamma A}{A\Theta} = \frac{EH}{HZ}$. Or, $A\Theta > \Gamma B$, d'où : $\frac{\Gamma A}{A\Theta} < \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$, d'où : $\frac{EH}{HZ} < \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$, et (EUCLIDE, livre V, prop. 18) $\frac{EH + HZ}{HZ} < \frac{\Gamma A + \Gamma B}{\Gamma B}$ ou $\frac{EZ}{HZ} > \frac{AB}{\Gamma B}$. Or, $B\Gamma = \Delta$, d'où : $\frac{EZ}{ZH} < \frac{AB}{\Delta}$.

4. Sous-entendu : A > B.

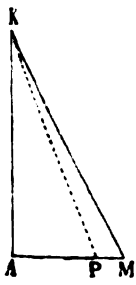
5. La relation $\frac{\Theta}{K\Lambda} < \frac{A}{B}$ est possible en vertu de la prop. II.

Digitized by Google



ΔZ. Dès lors, si nous divisons l'angle compris sous ΔH, HΓ en deux parties égales, sa moitié en deux parties égales, et, procédant ainsi continuellement, il restera un certain angle plus petit que le double de l'angle compris sous ΛK, KM. Que ce reste obtenu soit l'angle compris sous NH, HΓ, et menons la droite de jonction NΓ. La droite NΓ est donc le côté d'un polygone équilatéral (1). Que la droite HΞ coupe l'angle sous ΓH, HN en deux parties égales, que la droite OΞΠ soit tangente au cercle en Ξ, et prolongeons les droites HNΠ, HΓO. Ainsi ΠO est également le côté d'un polygone circonscrit au cercle et équilatéral (2). Or, puisque l'angle sous NH, HΓ est plus petit que le double de l'angle sous ΛK, KM, et que, d'autre part, il est double de l'angle sous TH, HΓ, l'angle sous TH, HΓ est donc plus petit que l'angle sous ΛK, KM. De plus, les angles situés aux points Λ, T sont droits ; par conséquent, le rapport de MK à ΛK est plus grand que celui de ΓH à HT (3). Or, ΓH est égal à HΞ, donc le rapport de HΞ à HT, c'est-à-dire celui de ΠO à NΓ, est plus petit que le rapport de MK à KΛ. De plus, le rapport de MK à KΛ est plus petit que celui de A à B, et

1. Nous reportons ici en note la traduction d'un texte de 36 mots que nous considérons comme une interpolation : « puisque l'angle NHΓ mesure l'angle ΔHΓ qui est droit, l'arc NΓ mesure donc aussi l'arc ΓΔ qui est le quart du cercle, de manière qu'il mesure le cercle. On a donc le côté d'un polygone équilatéral, car cela est manifeste. »



2. Nous abandonnons ici encore un texte de 10 mots que nous considérons comme une interpolation : « Il est manifeste qu'il sera semblable au polygone inscrit dont le côté est NΓ. »

3. On est arrivé à un angle restant NHΓ < 2 ΛKM. Or, angle NHΓ = 2 angles THΓ, d'où : angle THΓ < angle ΛKM. Considérons les triangles THΓ, ΛKM ; les angles en T et Λ sont droits. Ils seraient semblables si les angles en K et H étaient égaux. Soit l'angle ΛKP égal à l'angle THΓ ; les triangles rectangles étant dès lors semblables, on aura : $\frac{PK}{\Lambda K} = \frac{\Gamma H}{HT}$. Or, PK < MK, d'où : $\frac{MK}{\Lambda K} > \frac{\Gamma H}{HT}$.

Digitized by Google

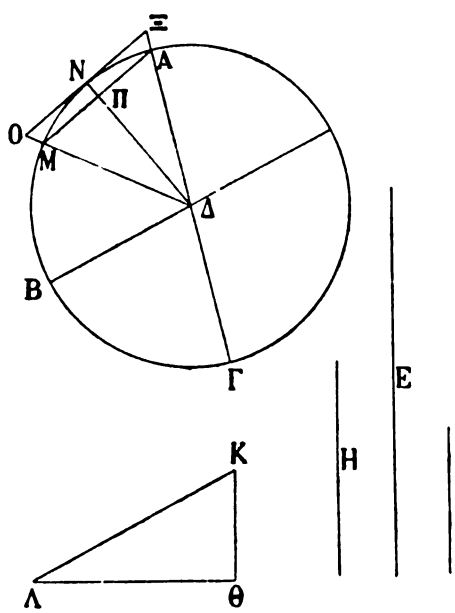
ΠΟ est le côté du polygone circonscrit, tandis que ΓΝ est celui du polygone inscrit (1) ; ce que l'on se proposait de trouver.

PROPOSITION IV.

Soient de nouveau deux grandeurs inégales et un secteur ; il est possible de circonscrire un polygone à ce secteur et de lui en inscrire un autre de manière que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que celui de la plus grande grandeur à la plus petite.

Soient de nouveau E, Z deux grandeurs inégales dont la plus grande est E. Soit, d'autre part, un cercle ABΓ dont le centre est le point Δ, et construisons au point Δ le secteur AΔB. On doit donc circonscrire et inscrire au secteur AΔB un polygone ayant les côtés égaux, à l'exception des côtés BΔ, ΔA, de manière à réaliser ce qui est imposé.

En effet, trouvons deux droites inégales H, ΘK, dont la plus grande soit H, de manière que le rapport de Θ à ΘK soit plus petit que celui de la plus grande grandeur à la plus petite (2). Du point Θ menons pareillement (3) une droite perpendiculaire à KΘ et menons la droite KΛ égale à H (4). Dès lors, si nous divisons l'angle compris sous AΔ, ΔB en deux parties égales, ainsi que sa moitié en deux parties égales, et procédant ainsi continuellement, il restera un certain



1. En observant que $\Gamma H = H\Xi$, la relation $\frac{MK}{\Lambda K} > \frac{\Gamma H}{HT}$ devient : $\frac{H\Xi}{HT} < \frac{MK}{K\Lambda}$. Or, on a pris $MK = \Theta$, et, par hypothèse, on a : $\frac{\Theta}{K\Lambda} < \frac{A}{B}$. Donc $\frac{MK}{K\Lambda} < \frac{A}{B}$, d'où : $\frac{\Pi O}{N\Gamma} < \frac{A}{B}$, ce qui est la condition cherchée.

2. La relation $\frac{H}{\Theta K} < \frac{E}{Z}$ est possible en vertu de la proposition II.

3. C.-à-d. comme dans la proposition III.

4. Le texte présente ici l'interpolation suivante : « ce qui est possible, puisque H est plus grand que ΘK.

Digitized by Google

angle plus petit que le double de l'angle compris sous ΛK, KΘ. Que l'angle restant soit celui qui est compris sous AΔ, ΔM. La droite AM devient donc le côté d'un polygone inscrit dans le cercle. Et si nous divisons l'angle compris sous AΔ, ΔM en deux parties égales par la drote ΔN, et si au point N nous menons la tangente au cercle NΞO, cette droite sera le côté d'un polygone circonscrit à ce même cercle, semblable à celui dont nous venons de parler. Et, de même que précédemment (1), le rapport de ΞO à AM sera plus petit que celui de E à Z (2).

PROPOSITION V.

Etant donnés un cercle et deux grandeurs inégales, circonscrire un polygone à ce cercle et lui en inscrire un autre de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que le rapport de la plus grande grandeur à la plus petite.

Etablissons le cercle A ainsi que deux grandeurs inégales E, Z, dont E est la plus grande. On doit donc inscrire un polygone dans le cercle et lui en circonscrire un autre aux fins de réaliser ce qui est imposé.

En effet, je prends deux droites inégales Γ, Δ, dont la plus grande est Γ, de manière que le rapport de Γ à Δ soit moindre que celui de E à Z (3) ; et, si l'on prend H moyenne proportionnelle entre Γ et Δ, Γ sera donc aussi plus grand que H (4). Dès lors, circonscrivons un polygone au cercle et inscrivons-lui-en un autre de

---

1. Voir proposition III.

2. L'angle restant AΔM < 2 ΛKΘ. Or, angle AΔM = 2 angles MΔΠ, d'où angle MΔΠ < angle ΛKΘ. Considérant les triangles rectangles MΔΠ, ΔKΘ, qui seraient semblables si les angles en Δ et K étaient égaux, ils donneront, comme dans la proposition précédente :

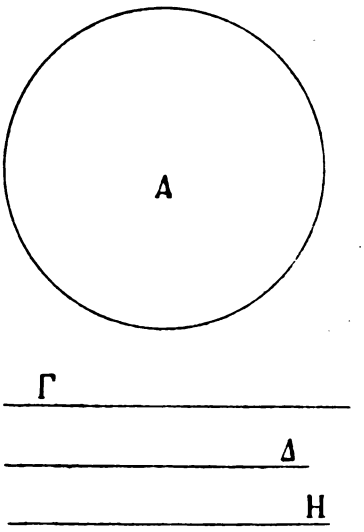
$\frac{\Lambda K}{\Theta K} > \frac{M\Delta}{\Pi\Delta}$. Or, MΔ = NΔ, d'où : $\frac{\Lambda K}{\Theta K} > \frac{N\Delta}{\Pi\Delta}$. Or, par similitude de triangles, on a : $\frac{N\Delta}{\Pi\Delta} = \frac{NO}{\Pi M} = \frac{2\,NO}{2\,\Pi M} = \frac{\Xi O}{AM}$, d'où : $\frac{\Xi O}{AM} < \frac{\Lambda K}{\Theta K}$. Or, ΛK = H, et, par hypothèse, $\frac{H}{\Theta K} < \frac{E}{Z}$, d'où : $\frac{\Lambda K}{\Theta K} < \frac{E}{Z}$, d'où : $\frac{\Xi O}{AM} < \frac{E}{Z}$.

3. La relation $\frac{\Gamma}{\Delta} < \frac{E}{Z}$ est possible en vertu de la proposition II.

4. H est pris tel que $\frac{\Gamma}{H} = \frac{H}{\Delta}$, d'où $\Gamma.\Delta = H^2$; or, $\Gamma > \Delta$, d'où $\Gamma^2 > \Gamma.\Delta$; donc $\Gamma^2 > H^2$, d'où $\Gamma > H$.

Digitized by Google

manière que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que le rapport de Γ à H(1). Il en résulte que le carré du premier rapport est moindre que le carré du second. De plus, le carré du rapport de côté à côté est égal au rapport de polygone à polygone (2), tandis que le carré du rapport de Γ à H est égal au rapport de Γ à Δ (3) ; par conséquent, le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit est aussi moindre que le rapport de Γ à Δ. Donc, à fortiori, le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit est moindre que le rapport de E à Z.



PROPOSITION VI.

On démontrera d'ailleurs de la même manière qu'étant donnés deux grandeurs inégales et un secteur, il est possible de circonscrire un polygone au secteur et de lui en inscrire un autre qui lui soit semblable, de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que le rapport de la plus grande grandeur à la plus petite (4).

Or, il est clair aussi qu'étant donnés un cercle ou un secteur et une certaine aire, il est possible qu'ayant inscrit des polygones équilatéraux dans le cercle ou dans le secteur, et ainsi continuellement dans les segments restants, il reste dans le cercle ou dans le secteur certains segments qui soient plus petits que l'aire donnée ; car cela

1. La possibilité de cette relation résulte de la proposition III.

2. EUCLIDE, livre VI, prop. 20. Les polygones réguliers circonscrits et inscrits sont semblables, et leurs aires sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.

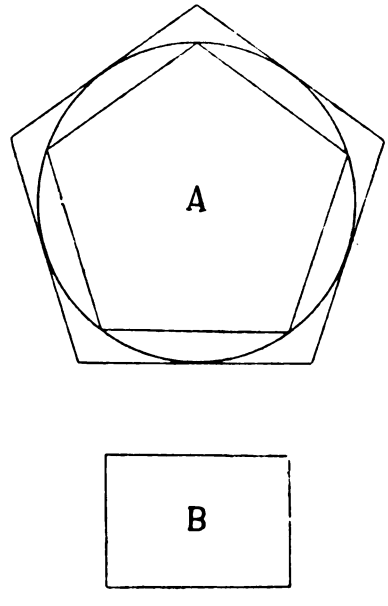
3. On a : $H^2 = \Gamma.\Delta$, d'où : $\frac{H^2}{\Gamma^2} = \frac{\Gamma.\Delta}{\Gamma^2}$, ou, comme le texte : $\frac{\Gamma^2}{H^2} = \frac{\Gamma.}{\Delta}$.

4. Voir proposition IV.

Digitized by Google

nous a été transmis dans les *Eléments* (1). Mais, on doit démontrer qu'étant donnés un cercle ou un secteur et une aire, il est possible de circonscrire un polygone au cercle ou au secteur de manière que les segments restants (2) de la figure circonscrite soient plus petits que l'aire donnée ; car la démonstration relative au cercle sera rapportée au secteur par le même raisonnement.

Soient donnés le cercle A et une certaine aire B. Dès lors, il est possible de circonscrire un polygone au cercle de manière que les segments situés entre le cercle et le polygone soient plus petits que l'aire B. En effet, étant données les deux grandeurs inégales dont la plus grande est l'ensemble de l'aire et du cercle et la plus petite le cercle, circonscrivons un polygone au cercle et inscrivons-lui-en un autre de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que le rapport de la plus grande grandeur à la plus petite (3). Le polygone circonscrit sera d'ailleurs tel que les segments restants seront plus petits que l'aire donnée B. En effet, si le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit est moindre que le rapport de l'ensemble du cercle et de l'aire B au cercle même, tandis que le cercle est plus grand que le polygone inscrit (4), le rapport du polygone circonscrit au cercle est, à fortiori, moindre que le rapport de l'ensemble du cercle et de l'aire B à ce même cercle. Dès lors, par différence, le rapport des segments du polygone circonscrit au cercle est moindre que le rapport de l'aire B au cercle ; donc, les segments restants du polygone circonscrit seront plus petits que l'aire B (5). Ou bien ainsi :



1. En effet, Euclide, au livre XII, prop. 2 de ses *Eléments*, démontre cela préalablement, en invoquant du reste la 1re proposition de son livre X, pour démontrer que les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres.
2. C.-à-d. la somme de ces segments restants.
3. Ce qui est possible en vertu de la proposition V.
4. Voir le principe émis à la fin des postulats.
5. $\frac{\text{Polyg. circonscrit}}{\text{Polyg. inscrit}} < \frac{\text{cercle A} + \text{aire B}}{\text{cercle A}}$; or, cercle A > polyg. inscrit, donc,

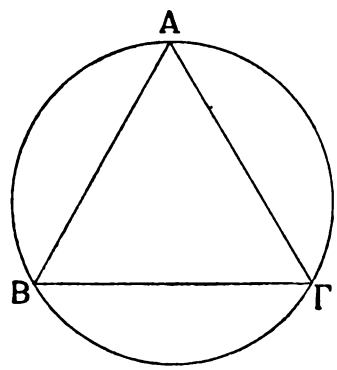
Digitized by Google

puisque le rapport du polygone circonscrit au cercle est moindre que le rapport de l'ensemble du cercle et de l'aire B au cercle, le polygone circonscrit sera dès lors plus petit que cet ensemble ; de manière que la somme des segments restants sera plus petite que l'aire B (1). Il en sera aussi de même pour ce qui concerne le secteur.

PROPOSITION VII.

Si l'on inscrit une pyramide ayant une base équilatérale dans un cône isocèle (2), l'aire de cette pyramide, la base étant exceptée, vaut le triangle ayant la base égale au périmètre de la base et dont la hauteur est la perpendiculaire abaissée du sommet sur un côté de la base.

Soit un cône isocèle dont la base est le cercle ABΓ, et inscrivons-lui la pyramide ayant la base équilatérale ABΓ. Je dis que son aire, exception faite de la base, est équivalente au triangle que nous avons dit.



En effet, puisque le cône est isocèle et que la base de la pyramide est équilatérale, les hauteurs des triangles qui enveloppent la pyramide sont égales entre elles (3). Ces triangles ont comme bases les droites AB, BΓ, ΓA et comme hauteur celle que nous venons de dire ; en sorte que la somme de ces triangles (4) vaut le triangle ayant

---

à fortiori : $\frac{\text{polyg. circons.}}{\text{cercle A}} < \frac{\text{cercle A} + \text{aire B}}{\text{cercle A}}$,

d'où : $\frac{\text{polyg. circ.} - \text{cercle A}}{\text{cercle A}} < \frac{\text{cercle A} + \text{aire B} - \text{cercle A}}{\text{cercle A}}$,

ou $\frac{\Sigma \text{ segments restants}}{\text{cercle A}} < \frac{\text{aire B}}{\text{cercle A}}$, d'où : somme des segments restants < aire B.

1. C.-à-d. plus simplement : $\frac{\text{polyg. circonscrit}}{\text{cercle A}} < \frac{\text{cercle A} + \text{aire B}}{\text{cercle A}}$, d'où: polygone circonscrit < cercle A + aire B, ou polyg. circ. — cercle A < aire B, ou somme segments restants < aire B.

2. ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ, dans un cône isocèle, c.-à-d. dans un cône droit à base circulaire.

3. Les arêtes de cette pyramide régulière sont des obliques qui s'écartent également du pied de la hauteur; elles sont donc égales, les faces latérales sont donc des triangles isocèles égaux entre eux, ayant même hauteur, qui est l'apothème de la pyramide.

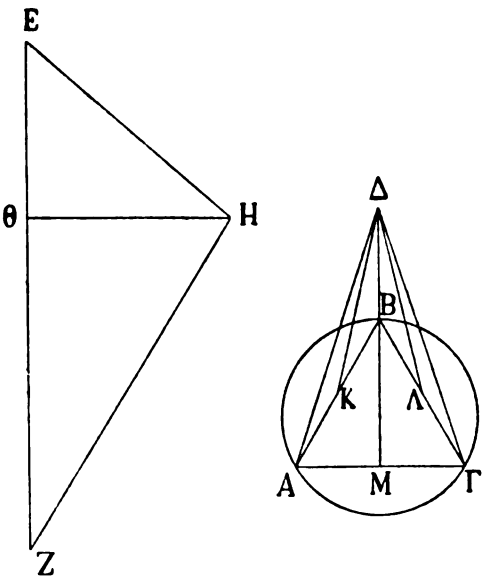
4. C.-à-d. l'aire latérale de la pyramide.

Digitized by Google

comme base une droite égale à la somme des droites AB, BΓ, ΓA et comme hauteur la droite que nous avons dite.

Autre démonstration plus explicite :

Soit un cône isocèle dont la base est le cercle ABΓ, le sommet le point Δ, et inscrivons dans le cône une pyramide ayant comme base le triangle équilatéral ABΓ. Menons les droites de jonction ΔA, ΔΓ, ΔB. Je dis que les triangles AΔB, AΔΓ, BΔΓ valent le triangle dont la base est égale au périmètre du triangle ABΓ et dont la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base est égale à la perpendiculaire abaissée du point Δ sur BΓ.



En effet, menons les perpendiculaires ΔK, ΔΛ, ΔM ; elles seront donc égales entre elles (1). Prenons un triangle EZH ayant, d'une part, la base EZ égale au périmètre du triangle ABΓ et, d'autre part, la perpendiculaire HΘ égale à la droite ΔΛ. Dès lors, puisque le rectangle formé sous BΓ, ΔΛ est double du triangle ABΓ, que le rectangle formé sous AB, ΔK est double du triangle ABΔ, et que le rectangle formé sous AΓ, ΔM est double du triangle AΔΓ, le rectangle formé sous le périmètre du triangle ABΓ, ou EZ, et sous ΔΛ, ou HΘ, sera donc équivalent au double des triangles AΔB, BΔΓ, AΔΓ. Or, le rectangle formé sous EZ, HΘ est aussi double du triangle EZH ; par conséquent, le triangle EZH vaut les triangles AΔB, BΔΓ, AΔΓ (2).

PROPOSITION VIII.

Si l'on circonscrit une pyramide à un cône isocèle, l'aire de cette pyramide, la base étant exceptée, vaut le triangle ayant la base égale

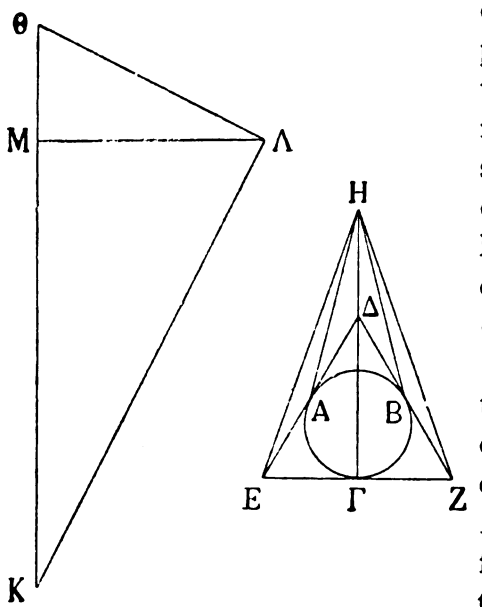
1. Voir note avant-précédente.
2. Cette variante de la démonstration n'est peut-être pas due à Archimède, mais à quelque commentateur grec très ancien, c'est-à-dire antérieur à Eutocius.

Digitized by Google

au périmètre de la base et la hauteur égale au côté (1) du cône.

Soit un cône dont la base est le cercle ABΓ et circonscrivons-lui une pyramide telle que sa base, c'est-à-dire le polygone ΔEZ, soit circonscrite au cercle ABΓ. Je dis que l'aire de la pyramide, exception faite de sa base, est équivalente au triangle que nous avons dit.

En effet, [puisque l'axe du cône est perpendiculaire à sa base, c'est-à-dire au cercle ABΓ, et] (2) que les droites joignant le centre du cercle aux points de contact sont perpendiculaires sur les tangentes (3), les droites joignant le sommet du cône aux points de contact seront aussi perpendiculaires aux droites ΔE, ZE, ZΔ (4). Dès lors, les perpendiculaires HA, HB, HΓ que nous venons de dire sont égales entre elles, puisqu'elles sont des côtés du cône. Prenons donc un triangle ΘKΔ ayant la droite ΘK égale au périmètre du triangle ΔEZ et la perpendiculaire ΛM égale à HA. Dès lors, puisque le rectangle formé sous ΔE, AH est double du triangle EΔH, que le rectangle formé sous ΔZ, HB est double du triangle ΔZH et que le rectangle formé sous EZ, ΓH est double du triangle EHZ, le rectangle formé sous ΘK et AH, c'est-à-dire MΛ, est donc double des triangles EΔH, ZΔH, EHZ. Or, le rectangle formé sous ΘK, ΛM est aussi le double du triangle ΛKΘ (5) ; il en résulte que l'aire de la pyramide, la base étant exceptée, vaut le triangle ayant la base égale au périmètre du triangle ΔEZ et la hauteur égale au côté du cône.



1. τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου, le côté du cône, c.-à-d. une génératrice, l'arête ou l'apothème.

2. La phrase que nous avons placée entre crochets nous paraît avoir été interpolée.

3. Cfr. EUCLIDE, livre III, prop. 18.

4. Le plan passant par la normale en A et par l'axe du cône est perpendiculaire sur ΔE ; donc la trace HA de ce plan sur la nappe du cône est perpendiculaire sur ΔE. De même pour ZE, ZΔ.

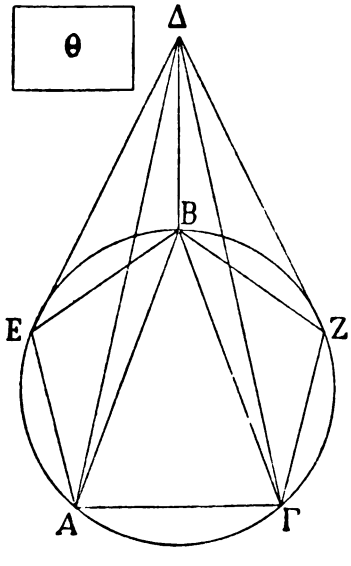
5. ΘK × AH = ΘK × MΛ = 2 EΔH + 2 ZΔH + 2 EHZ. Or, ΘK × ΛM = 2 ΛKΘ, d'où : 2 ΛKΘ = 2[EΔH + ZΔH + EHZ] = 2 aires latérales de la pyramide, d'où : triangle ΛKΘ = aire latérale de la pyramide.

Digitized by Google

PROPOSITION IX.

Si, dans un cône isocèle, une ligne droite rencontre le cercle de base du cône, et si des extrémités de cette ligne on mène des droites au sommet du cône, le triangle, déterminé par la droite incidente et par les droites qui rejoignent le sommet du cône, sera plus petit que l'aire du cône située entre les droites qui rejoignent le sommet.

Soit ABΓ, le cercle de base et Δ le sommet d'un cône isocèle. Menons transversalement dans le cercle une droite AΓ, et menons du sommet aux points A, Γ les droites de jonction AΔ, ΔΓ. Je dis que le triangle AΔΓ est plus petit que l'aire du cône située entre les droites AΔ, ΔΓ (1).



Coupons l'arc ABΓ en deux parties égales au point B, et menons les droites de jonction AB, ΓB, ΔB. Dès lors, l'ensemble des triangles ABΔ, BΓΔ sera plus grand que le triangle AΔΓ (2). Soit θ l'aire dont les triangles en question excèdent le triangle AΔΓ. L'aire θ sera ou ne sera donc pas plus petite que l'ensemble des segments AB, BΓ.

D'abord, qu'elle ne soit pas plus petite. Dès lors, comme on a deux surfaces, la surface conique située entre les droites AΔ, ΔB, réunie au segment AEB, et la surface du triangle AΔB, qui ont le périmètre du triangle AΔB comme extrémité commune, la surface enveloppante sera plus grande que la surface enveloppée (3). Par conséquent, la surface conique, située entre les droites AΔ, ΔΓ, avec le segment AEB, est plus grande que le triangle ABΔ. Et pareillement, la surface conique, située entre les droites BΔ, ΔΓ, réunie au segment ΓZB, est plus grande que le triangle BΔΓ. Il en résulte que

1. C.-à-d. : triangle AΔΓ < surface conique ΔAEBZΓ.

2. Le cône étant droit, ces trois triangles ont même hauteur, et la comparaison des aires revient à la comparaison des bases ; or, AB + ΓB > AΓ, donc ABΔ + BΓΔ > AΔΓ.

3. Postulat 3.

Digitized by Google

la surface conique entière (1), réunie à la surface Θ, est plus grande que l'ensemble des triangles que nous venons de dire. Or, l'ensemble des dits triangles équivaut au triangle AΔΓ augmenté de la surface Θ. Retranchons la surface commune Θ ; dès lors, la surface conique restante, située entre les droites AΔ, ΔΓ, est plus grande que le triangle AΔΓ (2).

Soit maintenant l'aire Θ plus petite que la somme des segments AB, BΓ. Si nous divisons les arcs AB, BΓ en deux parties égales ainsi que leurs moitiés en deux parties égales, il restera un ensemble de segments plus petit que la surface Θ (3). Que les segments restants soient ceux qui sont situés sur les droites AE, EB, BZ, ZΓ, et menons les droites de jonction ΔE, ΔZ. On aura donc de nouveau, comme précédemment, la surface conique située entre AΔ, ΔE, avec le segment situé sur AE, plus grande que le triangle AΔE, et la surface conique située entre EΔ, ΔB, avec le segment situé sur EB, plus grande que le triangle EΔB. Par conséquent, la surface située entre AΔ, ΔB, avec les segments situés sur AE, EB, est plus grande que l'ensemble des triangles AΔE, EBΔ. Or, comme l'ensemble des triangles AEΔ, ΔEB est plus grand que le triangle ABΔ, suivant ce qui a été démontré (4), la surface du cône située entre AΔ, ΔB, avec les segments situés sur AE, EB, sera, à fortiori, plus grande que le triangle AΔB. Et pareillement, la surface du cône située entre BΔ, ΔΓ, avec les segments situés sur BZ, ZΓ, est aussi plus grande que le triangle BΔΓ. Par conséquent, la surface conique entière située entre AΔ, ΔΓ, avec les segments que nous venons de dire, est plus grande que l'ensemble des triangles ABΔ, ΔBΓ. Or, l'ensemble de ces triangles vaut le triangle AΔΓ augmenté de la surface Θ, tandis que l'ensemble des segments que nous avons mentionnés est plus petit que la surface Θ ; par conséquent, la surface restante, située entre les droites AΔ, ΔΓ, est plus grande que le triangle AΔΓ (5).

1. C.-à-d. la somme des surfaces coniques ΔAEB, ΔΓZB.

2. Surf. conique ΔAEB + segment AEB > triangle ABΔ, et surf. conique ΔΓZB + segt. ΓZB > triang. BΓΔ. Faisons la somme en observant que, par 1re hypothèse, surf. Θ ≥ segt. AEB + segt. ΓZB, que surf. con. ΔAEB + surf. con. ΔΓZB = surf. con. ΔAEBZΓ, et que l'on a posé : triangle ABΔ + triangle BΓΔ = triangle AΔΓ + Θ, d'où il vient : Surf. conique ΔAEBZΓ + Θ > triangle AΔΓ + Θ, d'où : surf. conique ΔAEBZΓ > triangle AΔΓ.

3. Voir proposition VI, p. 13, note 1.

4. Voir note plus haut.

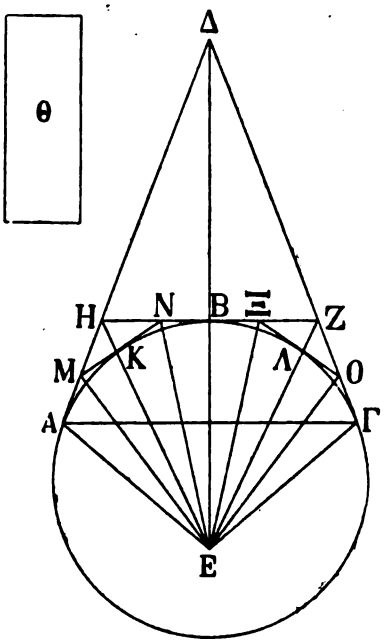
5. Surface conique ΔEA + segment AE > triangle AΔE ; surf. con. ΔEB + segt. EB > triangle EΔB. Observant que surf. con. ΔEA + surf. con. ΔEB = surf. con. ΔAEB

Digitized by Google

PROPOSITION X.

Si au cercle de base d'un cône (1) l'on mène des tangentes situées dans le plan de ce cercle et se rencontrant mutuellement, tandis que l'on mène des droites des points de contact et des points de rencontre au sommet du cône, l'ensemble des triangles limités par les tangentes et par les droites de jonction au sommet du cône est plus grand que la surface du cône enveloppée par ces droites.

Soit un cône dont la base est le cercle ABΓ et le sommet le point E. Menons au cercle ABΓ, dans son plan, les tangentes AΔ, ΓΔ, et, du point E, sommet du cône, aux points A, Δ, Γ, menons les droites de jonction EA, EΔ, EΓ. Je dis que l'ensemble des triangles AΔE, ΔEΓ est plus grand que la surface conique située entre les droites AE, ΓE et l'arc ABΓ.



En effet, l'arc ABΓ étant divisé en deux parties égales au point B, menons au cercle la tangente HBZ qui est parallèle à la droite AΓ (2), et, des points H, Z au point E, menons les droites de jonction HE, ZE. De plus, puisque la somme des droites HΔ, ΔZ est plus grande que la droite HZ, ajoutons de part et d'autre les droites HA, ZΓ. Dès lors, la somme des droites entières AΔ, ΔΓ sera plus grande que la somme des droites AH, HZ, ZΓ. Et puisque les droites AE, EB, EΓ sont des côtés du cône, elles sont égales parce que le cône est isocèle, et, pour le même

et que triangle AΔE + triangle EΔB > triang. AΔB, il vient : surf. con. ΔAEB + segt. AE + segt. EB > triang. ΓΔB. De même on aura : surf. con. ΔΓZB + segt. ΓZ + segt. ZB > triang. ΓΔB. Faisons la somme des deux dernières inégalités, en observant que θ > segt. AE + segt. EB + segt. ΓZ + segt. ZB, et que l'on a posé: triangle ABΔ + triang. BΓΔ = triang. AΔΓ + θ, il vient : surf. con. ΔAEBZΓ + θ > triangle AΔΓ + θ, d'où : surf. con. ΔAEBZΓ > triangle AΔΓ.

1. Il faut sous-entendre ici le mot ἰσοσκελοῦς, isocèle, comme le montre le cours de la démonstration.

2. La tangente HBZ est parallèle à AB; car, si l'on projette le sommet E du cône et les droites qui y aboutissent sur le plan du cercle, la droite EΔ passera

Digitized by Google

motif, elles sont en outre perpendiculaires aux droites précédentes (1). Par conséquent, la somme des triangles AEΔ, ΔEΓ est plus grande que la somme des triangles AHE, HEZ, ZEΓ (2). Soit Θ la surface dont la somme des triangles AEΔ, ΔΓE excède la somme des triangles AEH, HEZ, ZEΓ. En conséquence, la surface Θ est ou n'est pas plus petite que la somme des surfaces restantes AHBK,, BZΓΛ (3).

En premier lieu, que cette surface ne soit pas plus petite. Dès lors, puisque l'on a des surfaces composées, celle de la pyramide dont la base est le trapèze HAΓZ et le sommet le point E, ainsi que la surface conique située entre les droites AE, EΓ, réunie au segment ABΓ, et qu'elles ont comme extrémité le même périmètre du triangle AEΓ, il est évident que la surface de la pyramide, le triangle AEΓ étant excepté, est plus grande que la surface conique réunie au segment ABΓ (4). Retranchons de part et d'autre le segment ABΓ ; la somme des triangles restants AHE, HEZ, ZEΓ, réunie aux surfaces restantes AHBK, BZΓΛ, est donc plus grande que la surface conique située entre les droites AE, EΓ. Or, la surface Θ n'est pas plus petite que la somme des surfaces restantes AHBK, BZΓΛ ; par conséquent, la somme des triangles AHE, HEZ, ZEΓ, réunie à la surface Θ, est, à fortiori, plus grande que la surface conique située entre les droites AE, EΓ. Or, la somme des triangles AHE, HEZ, ΓEZ, réunie à la surface Θ, vaut la somme des triangles AEΔ, ΔEΓ (5) ; par consé-

---

par le centre du cercle, par le milieu de l'arc AΓ et divisera l'angle Δ en deux parties égales. Les triangles HΔB, ZΔB sont égaux comme ayant les angles en B droits, les angles en Δ égaux et le côté commun BΔ. Donc $\Delta H = \Delta Z$. Or, $\Delta A = \Delta \Gamma$, d'où, par différence : $HA = Z\Gamma$; donc HZ est parallèle à AΓ.

1. Le texte porte ici la petite interpolation suivante : « comme cela a été démontré dans un lemme ». Cette interpolation vise en effet un lemme dont Eutocius, dans son Commentaire, fait suivre la proposition VIII, où Archimède invoque une première fois la perpendicularité des arêtes du cône sur les tangentes au cercle de base. Voir prop. VIII et p. 16, note 3.

2. L'inégalité $A\Delta + \Delta\Gamma > AH + HZ + Z\Gamma$, qui envisage les bases de triangles ayant tous l'arête du cône comme hauteur, entraîne la même inégalité pour les aires triangulaires $AE\Delta + \Delta E\Gamma > AHE + HEZ + ZE\Gamma$.

Nous rejetons à cet endroit deux phrases (50 mots) qui constituent une grossière interpolation du texte, comme l'a, du reste, montré Heiberg (*Quaestiones Archimedeae*. Hauniae, 1879, p. 74).

3. C.-à-d. les surfaces des segments qui restent entre le cercle et les tangentes.

4. La surface enveloppante est plus grande que la surface enveloppée. Voir postulat 4, proposition IX et note.

5. Par hypothèse.

Digitized by Google

quent, la somme des triangles AEΔ, ΔEΓ est plus grande que la surface conique en question (1).

Que la surface Θ soit maintenant plus petite que les surfaces restantes. Dès lors, si l'on circonscrit successivement des polygones aux segments en divisant, comme précédemment (2), les arcs restants en deux parties égales, et en menant les tangentes, il restera un ensemble de segments plus petit que la surface Θ (3). Soit la somme des segments restants AMK,KNB, BΞΛ,AOΓ plus petite que la surface Θ, et menons les droites de jonction avec le point E. Il est donc de nouveau évident que la somme des triangles AHE, HEZ, ZEΓ sera plus grande que la somme des triangles AEM, MEN, NEΞ, ΞEO, OEΓ (4). Or, derechef, comme précédemment, la pyramide ayant le polygone AMNΞOΓ pour base et le point E pour sommet, exception faite du triangle AEΓ, a une surface plus grande que la surface conique située entre les droites AE, EΓ augmentée du segment ABΓ (5). Retranchons le segment ABΓ qui est commun ; il en résulte que la somme des triangles restants AEM, MEN, NEΞ, ΞEO, OEΓ, augmentée des segments restants AMK, KNB, BΞΛ, ΛOΓ, sera donc plus grande que la surface conique située entre les droites AE, EΓ. Mais la surface Θ est plus grande que la somme des dits segments restants (6), et l'on a démontré que la somme des triangles AEH, HEZ, ZEΓ est plus grande que la somme des triangles AEM, MEN, NEΞ, ΞEO, OEΓ ; par conséquent, la somme des triangles AEH, HEZ, ZEΓ, avec la surface Θ, c'est-à-dire la somme des triangles

1. En notations explicites on aura :

Surface pyramide EHAΓZ — triangle AEΓ > surf. con. EABΓ + segment ABΓ. Retranchons de part et d'autre le segment ABΓ, il viendra :

Triangle AHE + triangle HEZ + triang. ZEΓ + surf. AHBK + surf. BZΓΛ > surf. con. EABΓ. Or, par hypothèse première : Θ ⩾ AHBK + BZΓΛ. Donc, à fortiori :

AHE + HEZ + ZEΓ + Θ > surf. con. EABΓ. Or, on a posé :

AEΔ + ΔEΓ = AHE + HEZ + ΓEZ + Θ, d'où : AEΔ + ΔEΓ > surf. con. EABΓ.

2. Voir première partie de la démonstration.

3. Voir proposition VI et p. 13, note 1.

4. Le texte porte ici la petite interpolation suivante : « car les bases sont plus grandes que les bases, et la hauteur est égale ». Ce petit commentaire veut exprimer que la somme des bases des premiers triangles dépasse la somme des bases des seconds triangles, et qu'ils ont tous l'arête du cône pour hauteur commune. Voir, d'ailleurs, proposition IX, note 2.

5. Voir postulat 4.

6. Par hypothèse.

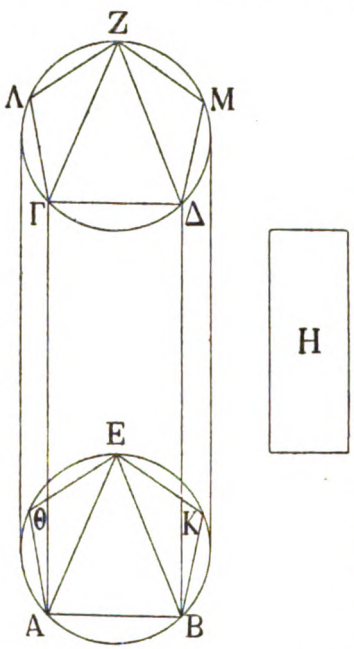
Digitized by Google

ΑΔΕ, ΔΕΓ, est, à fortiori, plus grande que la surface conique située entre les droites ΑΕ, ΕΓ (1).

PROPOSITION XI.

Si l'on a deux droites dans la surface d'un cylindre droit, l'aire du cylindre située entre ces deux droites est plus grande que le parallélogramme délimité par les droites situées dans la surface du cylindre et par les droites qui joignent les extrémités de ces droites.

Soit un cylindre droit dont AB est le cercle de base et dont ΓΔ est le cercle opposé ; menons les droites de jonction ΑΓ, ΒΔ. Je dis que l'aire cylindrique découpée par les droites ΑΓ, ΒΔ est plus grande que le parallélogramme ΑΓΒΔ.



En effet, coupons respectivement AB, ΓΔ (2) en deux parties égales aux points E, Z, et menons les droites de jonction AE, EB, ΓZ, ZΔ. Dès lors, puisque la somme des droites AE, EB est plus grande que la droite AB, et que les parallélogrammes élevés sur ces droites ont la même hauteur, la somme des parallélogrammes dont les bases sont les droites AE, EB et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, est donc plus grande que le parallélogramme ABΔΓ. Soit H l'aire dont cette somme est plus grande. Dès lors, l'aire H est ou n'est pas plus petite que la somme des segments plans AE, EB, ΓZ, ZΔ.

---

1. Reprenons en notations explicites :

Surf. pyramide ΕΑΜΝΞΟΓ — triangle ΑΕΓ > surf. con. ΕΑΒΓ + segment ΑΒΓ. Retranchons le segment ΑΒΓ de part et d'autre, on aura :

ΑΕΜ + ΜΕΝ + ΝΕΞ + ΞΕΟ + ΟΕΓ + ΑΜΚ + ΚΝΒ + ΒΞΛ + ΛΟΓ > Surf. con. ΕΑΒΓ. Or, par 2e hypothèse : Θ ≤ segment ΑΗΒΚ + segment ΒΖΓΑ, d'où : Θ ≥ segments (ΑΜΚ + ΚΝΒ + ΒΞΛ + ΛΟΓ).

Donc, ΑΕΜ + ΜΕΝ + ΝΕΞ + ΞΕΟ + ΟΕΓ + Θ > surf. conique ΕΑΒΓ.

Or, ΑΕΗ + ΗΕΖ + ΖΕΓ > ΑΕΜ + ΜΕΝ + ΝΕΞ + ΞΕΟ + ΟΕΓ ; d'où : ΑΕΗ + ΗΕΖ + ΖΕΓ + Θ > surface con. ΕΑΒΓ. Or, on a posé : ΑΕΗ + ΗΕΖ + ΖΕΓ + Θ = ΑΔΕ + ΔΕΓ ; donc : ΑΔΕ + ΔΕΓ > surf. con. ΕΑΒΓ.

2. Le texte sous-entend ici ou bien a perdu le mot περιφερεία, arc.

Digitized by Google

En premier lieu, qu'elle ne soit pas plus petite. Dès lors, puisque l'aire cylindrique découpée par les droites AΓ, BΔ, réunie aux segments AEB, ΓZΔ, a pour limite le plan du parallélogramme AΓBΔ ; mais, que l'aire composée des parallélogrammes, dont les bases sont les droites AE, EB, dont la hauteur est celle du cylindre, et des triangles AEB, ΓZΔ a également pour limite le plan du parallélogramme AΓBΔ ; que l'une des aires enveloppe l'autre et que l'une et l'autre sont concaves dans la même direction, l'aire cylindrique découpée par les droites AΓ, BΔ, réunie aux segments plans AEB, ΓZΔ, est plus grande que l'aire composée des parallélogrammes dont les bases sont AE, EB et la hauteur celle du cylindre réunie aux triangles AEB, ΓZΔ (1). Retranchons les triangles AEB, ΓZΔ qui sont communs ; il en résulte que l'aire cylindrique restante, découpée par les droites AΓ, BΔ, avec les segments plans AE, EB, ΓZ, ZΔ, est plus grande que l'aire composée des parallélogrammes dont les bases sont AE, EB et la hauteur celle du cylindre. Or, les parallélogrammes dont les bases sont AE, EB et la hauteur celle du cylindre valent le parallélogramme AΓBΔ augmenté de l'aire H (2) ; par conséquent, l'aire cylindrique restante, découpée par les droites AΓ, BΔ, est plus grande que le parallélogramme AΓBΔ (3).

Mais que l'aire H soit maintenant plus petite que la somme des segments plans AE, EB, ΓZ, ZΔ. Divisons chacun des arcs AE, EB, ΓZ, ZΔ en deux parties égales aux points Θ, K, Λ, M, et menons les droites de jonction AΘ, ΘE, EK, KB, ΓΛ, ΛZ, ZM, MΔ (4). Dès lors, si nous faisons cela continuellement, il restera certains segments

1. Postulat 4.

2. Par hypothèse.

3. Reprenons en notations explicites :

Aire cylindrique AEBΓZΔ + segment AEB + segt. ΓZΔ > parallélogr. AEZΓ + parallélogr. EBΔZ + triangle AEB + triangle ΓZΔ.

Retranchons de part et d'autre les triangles AEB, ΓZΔ, il vient :

Aire cyl. AEBΓZΔ + segt. AE + segt. EB + segt. ΓZ + segt. ZΔ > parallélogr. AEZΓ + parallélogr. EBΔZ.

Or, par hypothèse, on a : H ⩾ segments (AE + EB + ΓZ + ZΔ).

De plus, on a posé: parallélogr. AEZΓ + parallélogr. EBΔZ = parallélogr. ABΓΔ + H, d'où : aire cylindrique AEBΓZΔ + H > parallélogr. ABΓΔ + H, d'où : aire cylindrique AEBΓZΔ > parallélogr. ABΓΔ. C. q. f. d.

4. Le texte présente ici une phrase incidente de 21 mots dont voici la traduction: « (si) est enlevée (la somme des) triangles AEΘ, EKB, ΓΛZ, ZMΔ qui n'est donc pas plus petite que la moitié (de la somme) des segments plans AE, EB, ΓZ, ZΔ. » Cette phrase, grammaticalement incorrecte, et qui présente une remarque non pertinente, est une interpolation évidente, d'autant plus qu'Archimède invoque ici tacitement la proposition VI.

Digitized by Google

qui seront plus petits que l'aire H. Que les segments restants soient AΘ, ΘE, EK, KB, ΓΛ, ΛZ, ZM, MΔ. On démontrera donc pareillement que la somme des parallélogrammes, dont les bases sont AΘ, ΘE, EK, KB et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, est plus grande que la somme des parallélogrammes dont les bases sont AE, EB et dont la hauteur est la même que celle du cylindre. Et puisque la surface cylindrique découpée par les droites AΓ, BΔ, réunie aux segments plans AEB, ΓZΔ, a pour limite le parallélogramme plan AΓBΔ ; mais que la surface composée des parallélogrammes, dont les bases sont AΘ, ΘE, EK, KB, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, ainsi que des figures rectilignes AΘEKB, ΓΛZMΔ,..... (1). Retranchons les figures rectilignes AΘEKB, ΓΛZMΔ qui sont communes ; il en résulte que la surface cylindrique restante, découpée par les droites AΓ, BΔ, avec les segments plans AΘ, ΘE, EK, KB, ΓΛ, ΛZ, ZM, MΔ, est plus grande que l'aire composée des parallélogrammes dont les bases sont AΘ, ΘE, EK, KB, et dont la hauteur celle du cylindre. Or, la somme des parallélogrammes, dont les bases sont AΘ, ΘE, EK, KB et dont la hauteur est celle du cylindre, est plus grande que la somme des parallélogrammes dont les bases sont AE, EB et la hauteur celle du cylindre. Dès lors, la surface cylindrique, découpée par les droites AΓ,BΔ,augmentée des segments plans AΘ, ΘE, EK, KB, ΓΛ, ΛZ, ZM, MΔ, est plus grande que les parallélogrammes dont les bases sont AE, EB et dont la hauteur est celle du cylindre. Or, les parallélogrammes dont les bases sont AE, EB et dont la hauteur est celle du cylindre valent le parallélogramme AΓΔB augmenté de l'aire H ; par conséquent, la surface cylindrique, découpée par les droites AΓ, BΔ, augmentée des segments plans AΘ, ΘE, EK, KB, ΓΛ, ΛZ, ZM, MΔ, est aussi plus grande que le parallélogramme AΓBΔ augmenté de l'aire H. Donc, si l'on retranche la somme des segments AΘ, ΘE, EK, KB, ΓΛ, ΛZ,

1. La phrase est inachevée, et, comme le texte ne présente pas d'interruption, il s'agit probablement d'une lacune de copiste existant déjà dans un manuscrit antérieur à ceux qui nous restent. Heiberg a toutefois retrouvé une reconstitution du passage perdu dans un manuscrit d'une version latine du XV^e siècle. Nous traduisons cette reconstitution comme suit : « ...a pour limite ce même parallélogramme plan AΓBΔ, l'une des aires enveloppe l'autre, et toutes deux sont concaves dans la même direction. Par conséquent, la surface cylindrique découpée par les droites AΓ, BΔ, avec les segments plans AEB, ΓZΔ, est donc plus grande que l'ensemble des aires des parallélogrammes dont les bases sont AΘ, ΘE, EK, KB, la hauteur égale à celle du cylindre, et des figures rectilignes AΘEKB, ΓΛZMΔ. »

Digitized by Google

ZM, MΔ, qui est plus petite que l'aire H, la surface cylindrique restante, découpée par les droites AΓ, BΔ, est plus grande que le parallélogramme AΓBΔ (1).

PROPOSITION XII.

Si l'on a deux droites dans la surface d'un cylindre, et si des extrémités de ces droites l'on mène aux cercles, bases du cylindre, des tangentes, situées dans le plan de ces cercles, et se rencontrant, l'ensemble des parallélogrammes délimités par les tangentes et par les côtés du cylindre sera plus grand que l'aire du cylindre située entre les droites menées dans la surface du cylindre.

Soit ABΓ le cercle de base d'un cylindre droit et soient, dans la surface de ce cylindre, deux droites dont les extrémités sont les points A, Γ. Menons aux points A, Γ des tangentes au cercle, situées dans son plan et se rencontrant au point H. Imaginons encore dans l'autre base du cylindre des tangentes au cercle menées des extrémités des droites situées dans la surface. On doit démontrer que l'ensemble des parallélogrammes délimités par les tangentes et les côtés du cylindre est plus grand que l'aire du cylindre située suivant l'arc ABΓ.

En effet, menons la tangente EZ (2), et, des points E, Z, menons des droites parallèles à l'axe du cylindre jusqu'au plan de l'autre base. Dès lors, l'ensemble des parallélogrammes, délimités par les droites AH, HΓ et par les côtés du cylindre, est plus grand que l'ensemble des parallélogrammes délimités par les droites AE, EZ, ZΓ et par les côtés du cylindre (3) ; [car, vu que l'ensemble des droites EH, HZ

1. Explicitement : Aire cylindrique AEBΓZΔ + segt. AEB + segt. ΓZΔ > parallélog. AΘΛΓ + parallélog. ΘEZΛ + parallélog. EKMZ + parallélog. KBΔM + fig. AΘEKB + fig. ΓΛZMΔ. Retranchons de part et d'autre les figures AΘEKB, ΓΛZMΔ, on aura : aire cyl. AEBΓZΔ + segments (AΘ + ΘE + EK + KB + ΓΛ + ΛZ + ZM + MΔ > parallélogrammes (AΘΛΓ + ΘEZΛ + EKMZ + KBΔM). Or, parallélogr. (AΘΛΓ + ΘEZΛ + EKMZ + KBΔM) > parallélogr. (AEZΓ + EBΔZ) ; et l'on a posé : parallélogr. (AEZΓ + EBΔZ) = parallélogr. AΓΔB + aire H ; enfin, en vertu de la proposition VI, on a :

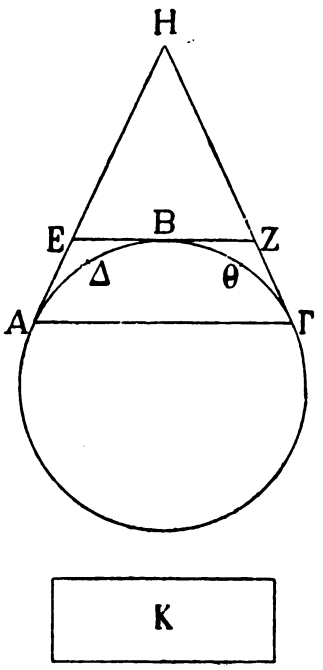
Aire H ⩾ segments (AΘ + ΘE + EK + KB + ΓΛ + ΛZ + ZM + MΔ); donc, par substitution : Aire cyl. AEBΓZΔ + aire H > parallélogr. AΓΔB + aire H, d'où : aire cylindrique AEBΓZΔ > parallélogramme AΓΔB.

2. Bien que le texte ne présente pas d'interruption, il y a peut-être ici une lacune de quelques mots qui indiquaient, comme dans la proposition X, que la tangente EZ est menée au point B divisant l'arc AΓ en deux parties égales, tangente qui est ainsi parallèle à AΓ.

3. Dans le triangle EHZ, on a : EH + HZ > EZ, d'où :

EH + HZ + AE + ZΓ > EZ + AE + ZΓ, ou HA + HΓ > AE + EZ + ZΓ ; inégalité qui

Digitized by Google



est plus grand que la droite EZ, et, les droites AE, ZΓ étant ajoutées de part et d'autre, l'ensemble des droites entières HA, HΓ est donc plus grand que l'ensemble des droites AE, EZ, ZΓ] (1).

Soit K l'aire dont les premiers parallélogrammes dépassent les seconds. Dès lors, la moitié de l'aire K est ou n'est pas plus grande que les figures délimitées par les droites AE, EZ, ZΓ et par les arcs AΔ, ΔB, BΘ, ΘΓ. Qu'elle soit d'abord plus grande. Le périmètre du parallélogramme élevé sur AΓ est donc la limite de la surface composée des parallélogrammes élevés sur AE, EZ, ZΓ, du trapèze AEZΓ et de celui qui lui est opposé dans l'autre base du cylindre. Or, le même périmètre est aussi la limite de la surface composée de la surface du cylindre située suivant l'arc ABΓ, du segment ABΓ et de celui qui lui est opposé ; par conséquent, les surfaces en question ont la même limite située dans un plan, l'une et l'autre sont concaves dans la même direction, l'une enveloppe l'autre, et l'une possède une partie commune avec l'autre. Dès lors, celle qui est enveloppée est la plus petite (2). Si donc nous retranchons le segment ABΓ et son opposé qui sont communs, la surface du cylindre située suivant l'arc ABΓ est plus petite que la surface composée des parallélogrammes élevés sur AE, EZ, ZΓ, des figures AEB, BZΓ et de celles qui leur sont opposées. Or, la surface des dits parallélogrammes, avec celle des dites figures, est plus petite que la surface composée des parallélogrammes élevés sur AH, HΓ (3) ; par conséquent, il est évident que l'ensemble des parallélogrammes délimités par les droites AH, ΓH et par les côtés du

---

s'applique donc aux aires des parallélogrammes de même hauteur qui ont ces droites comme bases.

1. La phrase que nous avons placée entre crochets nous paraît avoir été interpolée.

2. Voir postulat 4.

3. Le texte présente ici un petit commentaire interpolé : « car celle-ci vaut la somme de ces parallélogrammes avec l'aire K, qui est plus grande que ces figures. » Heiberg a du reste signalé l'incorrection grammaticale de cette phrase (Cf. *loc. cit.*, vol. I, p. 51).

Digitized by Google

cylindre est plus grand que la surface du cylindre située suivant l'arc ABΓ (1). Si, d'autre part, la moitié de l'aire K n'est pas plus grande que les figures que nous avons dites (2), menons des droites tangentes aux segments, de manière que l'ensemble des figures qui resteront soit moindre que la moitié de l'aire K (3), et les autres choses se démontreront comme précédemment (4).

Ces choses étant démontrées, il est clair, en vertu de ce qui a été dit précédemment, que si l'on inscrit une pyramide dans un cône isocèle, la surface de la pyramide, exception faite de sa base, est plus petite que la surface conique, car chacun des triangles qui enveloppent la pyramide est plus petit que la surface conique située entre les côtés du triangle (5) ; de telle sorte que la surface totale de la pyramide, exception faite de sa base, est plus petite que la surface du cône, exception faite de sa base. Et si l'on circonscrit une pyramide à un cône isocèle, la surface de la pyramide, exception faite de sa base, est plus grande que la surface du cône, exception faite de sa base (6).

Il est clair d'ailleurs, d'après ce que nous avons démontré précédemment, que si un prisme est inscrit dans un cylindre droit, la surface du prisme, composée de parallélogrammes, est plus petite que la surface du cylindre, les bases étant exceptées; car chacun des parallélogrammes du prisme est plus petit que la surface du cylindre qui lui correspond (7). Et si un prisme est circonscrit à un cylindre droit, la surface du prisme

---

1. Reprenons cette 1re partie de la démonstration en notations explicites : parallélogr. (AE + EZ + ZΓ) + trapèze AEZΓ + trapèze opposé > surf. cyl. suivant arc ABΓ + segt. ABΓ + segt. opposé.

Retranchons de part et d'autre segt. ABΓ + segt. opposé, on aura : parallg. (AE + EZ + ZΓ) + fig. AEBΔ + fig. BZΓΘ + fig. opposée à AEBΔ + fig. opposée à BZΓΘ > cylindre suivant arc ABΓ.

Or, on a posé : parallélog. (AE + EZ + ZΓ) = parallélog. (AH + HΓ) — K, et on a, par hypothèse : ½ aire K > fig. AEBΔ + fig. BZΓΘ, ou, aire K > fig. AEBΔ + fig. BZΓΘ + fig. opposée à AEBΔ + fig. opposée à BZΓΘ. Substituons, et il vient : parallélog. (AH + HΓ) — K + K > surf. cylindr. ABΓ, ou : parallélogr. (AH + HΓ) > surf. cylindrique ABΓ. C. q. f. d.

2. C.-à-d. les figures limitées par les droites AE, EZ, ZΓ et par les arcs AΔ, ΔB, BΘ, ΘΓ.

3. Voir proposition VI.

4. C.-à-d. comme dans la seconde partie de la démonstration de la proposition XI.

5. Voir proposition IX.

6. Voir proposition X. Le texte porte ici : « κατὰ τὸ συνεγὲς ἐκείνῳ, c.-à-d. d'après la (proposition) suivante. » Interpolation de commentateur qui renvoie étourdiment à la proposition suivante, c'est-à-dire à la proposition X, alors que le texte qui précède n'a pas invoqué explicitement la proposition IX.

7. Voir proposition XI.

Digitized by Google

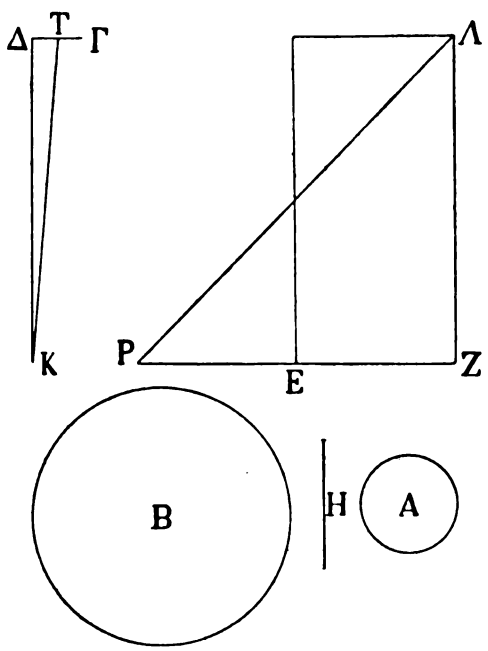
composée de parallélogrammes est plus grande que la surface du cylindre, les bases étant exceptées (1).

PROPOSITION XIII.

L'aire de tout cylindre droit, si l'on excepte les bases, est équivalente au cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre le côté du cylindre et le diamètre de la base du cylindre.

Soit A le cercle de base d'un cylindre droit. Soit la droite ΓΔ égale au diamètre du cercle A, et la droite EZ égale au côté du cylindre. Soit la droite H moyenne proportionnelle entre ΔΓ, EZ, et prenons un cercle B dont le rayon soit égal à H. On doit démontrer que le cercle B équivaut à l'aire du cylindre, exception faite de ses bases.

En effet, s'il n'est pas équivalent, il est plus grand ou plus petit.



Qu'il soit d'abord plus petit, s'il se peut. Dès lors, deux grandeurs inégales étant données, la surface du cylindre et le cercle B, il est possible d'inscrire un polygone équilatéral au cercle B et de lui en circonscrire un autre, de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que le rapport de la surface du cylindre au cercle B (2) Imaginons donc ces polygones circonscrit et inscrit, circonscrivons au cercle A une figure rectiligne semblable à celle qui est circonscrite au cercle B, et construisons un prisme sur cette figure rectiligne (3). Ce prisme sera donc circonscrit au cylindre. De

1. Voir la proposition XII même.
2. Voir proposition V.
3. Le texte a peut-être perdu ici quelques mots qui indiquaient que le prisme a même hauteur que le cylindre. Heiberg a signalé d'ailleurs que le manuscrit, du

Digitized by Google

plus, soit la droite KΔ égale au périmètre de la figure rectiligne circonscrite au cercle A, la droite ΛZ égale à la droite KΔ, et enfin la droite ΓT moitié de la droite ΓΔ. Dès lors, le triangle KΔT vaudra la figure rectiligne circonscrite au cercle A, puisque sa base est égale au périmètre, tandis que sa hauteur est égale au rayon du cercle A (1). D'autre part, le parallélogramme EΛ vaudra l'aire du prisme circonscrit au cylindre, puisqu'il est délimité par le côté du cylindre et par une droite égale au périmètre de la base du prisme (2). Posons donc EP égal à EZ ; il en résulte que le triangle ZPΛ vaut le parallélogramme EΛ et, par conséquent, aussi l'aire du prisme(3). Et comme les figures rectilignes circonscrites aux cercles A et B sont semblables, elles auront même rapport que les carrés des rayons (4). Par conséquent, le rapport du triangle KTΔ à la figure rectiligne circonscrite au cercle B sera le même que le rapport du carré de TΔ au carré de H (5). Mais le rapport du carré de TΔ au carré de H est le même que celui de TΔ à la longueur PZ (6). [Car H est moyenne proportionnelle entre TΔ et PZ, parce qu'il l'est aussi entre ΓΔ et EZ. Et comment cela ? Puisque d'une part ΔΓ est égal à TΓ, que d'autre part PE est égal à EZ, il en résulte que ΓΔ est double de TΔ, et PZ double de PE. Par conséquent, PZ est à ZE comme ΔΓ est à ΔT. Donc, le rectangle formé sous ΓΔ, EZ vaut le rectangle formé sous TΔ, PZ. D'autre part, le rectangle formé sous ΓΔ, EZ vaut le carré de H ;

XIII[e] siècle, de la version latine de Guillaume de Moerbeke ajoute à cet endroit : « *equalis altitudinis chylindro* ». (Cfr. HEIBERG, *loc. cit.*, vol. I, p. 55.)

1. L'aire du polygone régulier circonscrit au cercle A équivaut au produit de son périmètre KΔ par la moitié de l'apothème, ou rayon ΔT du cercle A ; elle vaut donc l'aire du triangle KΔT.

2. L'aire du parallélogramme EΛ = ZE × ΛZ. Or, on a posé : ZE = côté du cylindre, et ΛZ = ΔK = périmètre du polygone circonscrit au cercle A ; donc : aire parallélog. EΛ = aire prisme élevé sur le polygone circonscrit au cercle A.

3. Triangle PZΛ = ZΛ × ½PZ = ZΛ × EZ = aire parallélogr. EΛ. Or, on a vu (note précédente) que parallélog. EΛ = aire prisme circonscrit au cercle A, d'où : triangle PZΛ = aire prisme.

4. Le rapport des aires de deux polygones réguliers de même nombre de côtés est égal au rapport des carrés de leurs rayons ou de leurs apothèmes.

5. Le texte porte ici la petite interpolation : « car les droites TΔ, H sont égales aux rayons ».

6. On a posé $\frac{\Delta\Gamma}{H} = \frac{H}{EZ}$; on a pris $T\Lambda = \frac{1}{2}\Delta\Gamma$, d'où $\Delta\Gamma = 2\,T\Lambda$, et on a pris $EP = EZ$, d'où $EZ = \frac{1}{2}PZ$. La proportion devient donc : $\frac{2\,T\Delta}{H} = \frac{H}{\frac{1}{2}PZ}$, ou $\frac{T\Delta}{H} = \frac{H}{PZ}$, ce qui peut s'écrire $\frac{T\Delta \times T\Delta}{H \times H} = \frac{H \times T\Delta}{PZ \times H}$, ou, comme le texte, $\frac{\overline{T\Delta}^2}{H^2} = \frac{T\Delta}{PZ}$.

Digitized by Google

donc le rectangle formé sous TΔ, PZ vaut aussi le carré de H. Par conséquent, H est à PZ comme TΔ est à H. Donc, le carré de TΔ est au carré de H comme TΔ est à PZ ; car si trois droites sont proportionnelles, la figure élevée sur la première est à la figure semblable élevée de même sur la seconde comme la première est à la troisième] (1). Or, le rapport du triangle KTΔ au triangle PAZ est le même que celui de TΔ à la longueur PZ, puisque les droites KΔ, ΛZ sont égales entre elles (2) ; par conséquent, le rapport du triangle KTΔ à la figure rectiligne circonscrite au cercle B est le même que celui du triangle TKΔ au triangle PZΛ ; donc le triangle ZΛP vaut la figure rectiligne circonscrite au cercle B. En conséquence, l'aire du prisme circonscrit au cylindre A vaut également la figure rectiligne circonscrite au cercle B (3). Et puisque le rapport de la figure rectiligne circonscrite au cercle B à la figure inscrite dans ce cercle est moindre que le rapport de la surface du cylindre A au cercle B, le rapport de la surface du prisme circonscrit au cylindre à la figure rectiligne inscrite dans le cercle B serait aussi moindre que celui de la surface du cylindre au cercle B (4) ; et, si nous permutons (5), cela est impossible (6). Dès lors, le cercle B n'est pas plus petit que la surface du cylindre.

---

1. La longue phrase que nous avons placée entre parenthèses nous paraît être une interpolation d'un commentateur; car elle entre dans des considérations qu'Archimède abandonne le plus souvent à la sagacité du lecteur; le style en est négligé, et elle emploie une forme de discours interrogative (πῶς δὲ τοῦτο;) qui est inusitée dans les démonstrations d'Archimède.

2. $\frac{\text{Triangle KTΔ}}{\text{Triangle PΛZ}} = \frac{\frac{1}{2}TΔ \times KΔ}{\frac{1}{2}PZ \times ZΛ}$; or, $ΛZ = KΔ$, d'où : $\frac{\text{triangle KTΔ}}{\text{triangle PΛZ}} = \frac{TΔ}{PZ}$.

3. On a : $\frac{\text{polyg. circonscrit cercle A}}{\text{polyg. circonscrit cercle B}} = \frac{\overline{TΔ}^2}{H^2}$; or, on a eu : triangle KΔT = polyg. circonscr. cerc. A; donc : $\frac{\text{triang. KΔT}}{\text{polyg. circ. cerc. B}} = \frac{\overline{TΔ}^2}{\overline{H}^2}$. Or, on a eu : $\frac{\overline{TΔ}^2}{\overline{H}^2} = \frac{TΔ}{PZ}$, et $\frac{\text{triang. KTΔ}}{\text{triang. PΛZ}} = \frac{TΔ}{PZ}$; donc : $\frac{\text{triang. KTΔ}}{\text{polyg. circ. cerc. B}} = \frac{\text{triang. KTΔ}}{\text{triang. PΛZ}}$, d'où : polyg. circons. cerc. B = triang. PΛZ. Or, on a vu : triang. PΛZ = parallélogr. EΛ = surf. prisme circonscr. cylind. A ; donc : surf. prisme circonscr. cyl. A = polyg. circonscr. cerc. B.

4. On a posé, en vertu de la proposition V : $\frac{\text{polyg. circonscr. cerc. B}}{\text{polyg. inscr. cerc. B.}} < \frac{\text{surf. cyl. A}}{\text{cercle B}}$; mais (note précédente) : surf. prism. circ. cyl. A = poylg. circ. cerc. B, d'où, comme le texte : $\frac{\text{surf. prisme circ. cyl. A}}{\text{polyg. inscr. cerc. B}} < \frac{\text{surf. cyl. A}}{\text{cercle B}}$.

5. La relation précédente devient par permutation :
$\frac{\text{surf. prisme circ. cyl. A}}{\text{surf. cyl. A}} < \frac{\text{polyg. insc. cerc. B}}{\text{cerc. B}}$, ce qui est absurde ; car surf. prisme cir. cyl. A > surf. cyl. A, et polyg. ins. cerc. B < cercle B.

6. Le texte ajoute ici la phrase suivante, que l'édition critique d'Heiberg (Cfr.

Digitized by Google

Que le cercle B soit maintenant plus grand, s'il se peut. Imaginons donc de nouveau une figure rectiligne inscrite dans le cercle B et une autre qui lui soit circonscrite, de manière que le rapport de celle qui est circonscrite à celle qui est inscrite soit moindre que le rapport du cercle B à la surface du cylindre (1). Inscrivons dans le cercle A un polygone semblable à celui qui est inscrit dans le cercle B, et élevons un prisme sur le polygone inscrit dans ce premier cercle. Soit derechef la droite KΔ égale au périmètre de la figure inscrite dans le cercle A, et que la droite ZΛ lui soit égale. Le triangle KTΔ sera donc plus grand que la figure rectiligne inscrite dans le cercle A (2), tandis que le parallélogramme EΛ vaudra la surface du prisme composée de parallélogrammes (3) ; en sorte que le triangle PΛZ vaut aussi la surface du prisme (4). Et puisque les figures rectilignes inscrites dans les cercles A et B sont semblables, elles sont entre elles dans le même rapport que les carrés des rayons de ces cercles (5). Or, les triangles KTΔ, ZPΛ sont aussi entre eux dans le rapport du carré des rayons de ces cercles (6) ; par conséquent, le rapport de la figure rectiligne inscrite dans le cercle A à la figure rectiligne inscrite dans le cercle B est le même que le rapport du triangle KTΔ au triangle ΛZP. Or, la figure rectiligne inscrite dans le cercle A est plus petite que le triangle KTΔ ; par conséquent, la figure rectiligne inscrite dans le

---

loc. cit., vol. I, p. 59) considère comme une interpolation : « car la surface du prisme circonscrit au cylindre a été démontrée être plus grande que la surface du cylindre, tandis que la figure rectiligne inscrite dans le cercle B est plus petite que le cercle B. »

1. C.-à-d. faisons l'hypothèse, en vertu de la prop. V :

$$\frac{\text{polyg. circ. cerc. B}}{\text{polyg. inscr. cerc. B}} < \frac{\text{cercle B}}{\text{surf. cyl. A}}.$$

2. KΔ = périmètre polyg. inscrit cerc. A, et ΔT = rayon cerc. A > apothème du polyg. inscrit cerc. A ; d'où : KΔ × ΔT = aire triangle KTΔ > aire polyg. inscrit cercle A. Le texte présente d'ailleurs ici l'interpolation suivante : « parce que, d'une part, la base est le périmètre, et que, d'autre part, la hauteur est plus grande que la droite menée perpendiculairement du centre sur un côté du polygone. »

3. Voir page 29, note 2. Le texte comporte l'interpolation suivante : « parce qu'il est limité par un côté du cylindre et par une droite égale au périmètre de la figure rectiligne qui est la base du prisme. »

4. Voir p. 29, note 3.

5. Voir p. 29, note 4.

6. On a vu plus haut que $\frac{\overline{T\Delta}^2}{H^2} = \frac{T\Delta}{PZ}$; or, les triangles KTΔ, ZPΛ de même hauteur sont entre eux comme leurs bases TΔ, PZ, d'où : $\frac{\text{triangle KT}\Delta}{\text{triangle ZP}\Lambda} = \frac{T\Delta}{PZ} = \frac{\overline{T\Delta}^2}{H^2}$. Or, TΔ = rayon cerc. A et H = rayon cerc. B.

Digitized by Google

cercle B est aussi plus petite que le triangle ZPΛ, et ainsi plus petite aussi que la surface du prisme inscrit dans le cylindre (1) ; ce qui est impossible (2). Dès lors, le cercle B ne peut être plus grand que la surface du cylindre. Or, on a démontré qu'il n'est pas plus petit ; donc il lui est égal.

PROPOSITION XIV.

La surface de tout cône isocèle, si l'on excepte sa base, vaut le cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre le côté du cône et le rayon de la base du cône.

Soit un cône isocèle dont la base est le cercle A. Soit Γ le rayon de ce cercle, la droite Δ égale au côté du cône, la droite E moyenne proportionnelle entre Γ et Δ, et qu'un cercle B ait son rayon égal à la droite E. Je dis que le cercle B vaut la surface du cône, exception faite de sa base.

En effet, s'il ne la vaut pas, il est, soit plus grand, soit plus petit. Qu'il soit d'abord plus petit. Dès lors, on a deux grandeurs inégales, la surface du cône et le cercle B, dont la plus grande est la surface du cône. Il est donc possible d'inscrire un polygone équilatéral dans le cercle B et de lui en circonscrire un autre semblable à celui qui est inscrit de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que le rapport de la surface du cône au cercle B (3). Imaginons donc un polygone circonscrit au cercle A, semblable au polygone circonscrit au cercle B, et, sur le poylgone circonscrit au

---

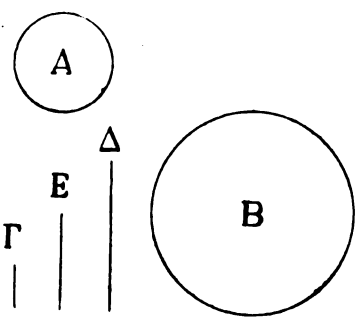
1. On a eu : $\frac{\text{polyg. inscr. cerc. A}}{\text{polyg. inscr. cerc. B}} = \frac{\overline{T\Delta}^2}{H^2}$, et $\frac{\text{triang. KT}\Delta}{\text{triang. ZP}\Lambda} = \frac{\overline{T\Delta}^2}{H^2}$,

d'où : $\frac{\text{polyg. inscr.cerc. A}}{\text{polyg. inscr. cerc. B}} = \frac{\text{triang. KT}\Delta}{\text{triang. ZP}\Lambda}$. Or, polyg. inscr. cerc. A < triangle KTΛ, d'où : polyg. inscr. cerc. B < triangle ZPΛ. Or,on a vu : triangle ZPΛ = surf. prisme inscr. cyl. B ; d'où : polyg. inscrit cercle B < surf. prisme inscr. cyl. B ; ce qui est absurde.

2. Le texte présente ici un commentaire interpolé dont voici la traduction : « En effet, puisque le rapport de la figure rectiligne circonscrite au cercle B à la figure rectiligne qui lui est inscrite est plus petit que le rapport du cercle B à la surface du cylindre, et que, par permutation, (ce rapport est aussi plus petit ?), que, d'autre part, la figure circonscrite au cercle B est plus grande que le cercle B, la figure inscrite dans le cercle B est donc plus grande que la surface du cylindre, de manière qu'elle est plus grande aussi que la surface du prisme. »

3. La proposition V a démontré qu'il est possible de satisfaire à la relation $\frac{\text{polyg. circonscr. cercle B}}{\text{polyg. inscrit. cercle B}} = \frac{\text{surface cône A}}{\text{cercle B}}$.

Digitized by Google



cercle A, élevons une pyramide ayant même sommet que le cône. Dès lors, puisque les polygones circonscrits aux cercles A et B sont semblables, ils sont entre eux dans le rapport du carré des rayons de ces cercles, c'est-à-dire dans le rapport du carré de Γ au carré de E, ou dans le rapport de la droite Γ à la longueur Δ (1). Or, le rapport du polygone circonscrit au cercle A à la surface de la pyramide circonscrite au cône est le même que le rapport de Γ à la longueur Δ (2) ; par conséquent, le rapport de la figure rectiligne circonscrite au cercle A à la figure rectiligne circonscrite au cercle B est le même que le rapport de cette première figure rectiligne à la surface de la pyramide circonscrite au cône ; en sorte que la surface de la pyramide équivaut à la figure rectiligne circonscrite au cercle B (3). Par conséquent, puisque le rapport de la figure rectiligne circonscrite au cercle B à la figure rectiligne qui lui est inscrite est moindre que celui de la surface du cône au cercle B, le rapport de la surface de la pyramide circonscrite au cône à la

---

1. Le rapport des aires de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés étant égal au rapport des carrés de leurs rayons ou de leurs apothèmes, on aura : $\frac{\text{polyg. circonscr. cercle A}}{\text{polyg. circonscr. cercle B}} = \frac{\Gamma^2}{E^2}$; or, on a posé : $\frac{\Gamma}{E} = \frac{E}{\Delta}$, d'où : $E^2 = \Gamma \times \Delta$,
donc : $\frac{\text{polyg. circ. cerc. A}}{\text{polyg. circ. cerc. B}} = \frac{\Gamma^2}{\Gamma \times \Delta} = \frac{\Gamma}{\Delta}$.

2. L'aire du polygone circonscrit au cercle A est égale à son périmètre multiplié par la moitié de l'apothème, ou $\frac{1}{2}\ \Gamma$. L'aire latérale de la pyramide circonscrite au cône A est égale au périmètre du même polygone multiplié par la moitié de l'arête du cône, ou $\frac{1}{2}\ \Delta$. La comparaison de ces deux aires donne, comme le texte : $\frac{\text{polyg. circ. cerc. A}}{\text{aire pyram. circ. cône A}} = \frac{\Gamma}{\Delta}$. On déduirait aussi cette relation de la considération des triangles dont la proposition VIII a démontré l'équivalence avec les aires en question.

Le texte comporte ici une interpolation en termes assez obscurs dont voici la traduction : « car la droite Γ est égale à la perpendiculaire abaissée du centre sur un côté du polygone, tandis que Δ est le côté du cône, et le périmètre du polygone est la hauteur commune relativement à des surfaces dont elles sont la moitié. » Ce qui voudrait dire que le périmètre du polygone est la hauteur commune de deux aires rectangulaires dont les aires en question (polygone circonscrit au cercle A et aire de la pyramide circonscrite au cône A) sont les moitiés.

3. Comparant les relations des deux notes précédentes, il vient :
$\frac{\text{polyg. circonscr. cerc. A}}{\text{polyg. circonscr. cerc. B}} = \frac{\text{polyg. circonscrit cerc. A}}{\text{aire pyramide circonscr. cône A'}}$
d'où : aire pyramide circonscrite au cône A = polyg. circonscr. cerc. B.

Digitized by Google

figure rectiligne inscrite dans le cercle B sera moindre que le rapport de la surface du cône au cercle B (1) ; ce qui est impossible (2). Par conséquent, le cercle B ne peut être plus petit que la surface du cône.

Je dis maintenant qu'il n'est pas plus grand. En effet, qu'il soit plus grand, s'il se peut. Imaginons de nouveau un polygone inscrit dans le cercle B et un autre qui lui soit circonscrit, de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que le rapport du cercle B à la surface du cône (3). Imaginons aussi un polygone inscrit dans le cercle A, semblable au polygone inscrit dans le cercle B, et élevons sur ce polygone une pyramide ayant même sommet que le cône. Dès lors, puisque les polygones inscrits dans les cercles A et B sont semblables, ils seront entre eux dans le rapport du carré des rayons de ces cercles. Le rapport de polygone à polygone sera donc le même que celui de Γ à la longueur Δ (4). Or, le rapport de Γ à Δ est plus grand que celui du polygone inscrit dans le cercle A à la surface de la pyramide inscrite dans le cône (5) ; par conséquent, le

---

1. Par hypothèse, on a satisfait à la relation : $\frac{\text{polyg. circ. cerc. B}}{\text{polyg. inscr. cerc. B}} < \frac{\text{aire cône A}}{\text{cerc. B}}$.
Or, polyg. circ. cerc. B = aire pyram. circ. cône A ; donc, on aurait :
$$\frac{\text{aire pyram. circ. cône A}}{\text{polyg. inscr. cerc. B}} < \frac{\text{aire cône A}}{\text{cerc. B}};$$
ce qui est absurde ; car, aire pyram. circ. cône A > aire cône A, et polyg. inscr. cerc. B < cerc. B.

2. Le texte présente ici l'interpolation suivante : « car la surface de la pyramide a été démontrée être plus grande que la surface du cône, tandis que la figure rectiligne inscrite dans le cercle B est plus petite que le cercle B. »

3. En seconde hypothèse : cercle B > aire cône ; donc, en vertu de la proposition V, on peut satisfaire à la relation : $\frac{\text{polyg. circonscr. cerc. B}}{\text{polyg. inscrit cerc. B}} < \frac{\text{cercle B}}{\text{aire cône A}}$.

4. Voir p. 33 note 1.

5. La comparaison des aires donne : $\frac{\text{polyg. inscr. cerc. A}}{\text{aire pyram. inscr. cône A}} = \frac{\text{périmètre polyg.} \times \frac{1}{2} \text{ apothème polygone}}{\text{périmètre polyg.} \times \frac{1}{2} \text{ apothème pyramide}} = \frac{\text{apothème polygone}}{\text{apothème pyramide}}$.
Or, si l'on compare le triangle rectangle, ayant l'axe du cône et le rayon Γ du cercle A comme côtés de l'angle droit et l'arête Δ du cône comme hypoténuse, avec le triangle rectangle, ayant ce même axe du cône et l'apothème du polygone inscrit comme côtés de l'angle droit, et l'apothème de la pyramide comme hypoténuse, on aura, en observant qu'ils ont même hauteur et bases inégales :
$\frac{\Gamma}{\Delta} > \frac{\text{apothème polygone}}{\text{apothème pyramide}}$; d'où, en présence de l'égalité précédente :
$$\frac{\Gamma}{\Delta} > \frac{\text{polyg. inscr. cerc. A}}{\text{aire pyramide inscr. cône A}}.$$
Le texte présente, à cet endroit, une interpolation de commentateur : « car le rapport du rayon du cercle A au côté du cône est plus grand que celui de la perpendiculaire, menée du centre sur un côté du polygone, à la perpendiculaire menée du sommet du cône sur le côté du polygone. »

Digitized by Google

rapport du polygone inscrit dans le cercle A au polygone inscrit dans le cercle B est plus grand que le rapport de ce même polygone (1) à la surface de la pyramide. Dès lors, la surface de la pyramide est plus grande que le polygone inscrit dans le cercle B (2). Or, le rapport du polygone circonscrit au cercle B au polygone qui lui est inscrit est plus petit que le rapport du cercle B à la surface du cône ; donc, à fortiori, le rapport du polygone circonscrit au cercle B à la surface de la pyramide inscrite dans le cône sera plus petit que le rapport du cercle B à la surface du cône (3) ; ce qui est impossible (4). Par conséquent, le cercle B ne peut pas être plus grand que la surface du cône. Or, on a démontré qu'il n'est pas plus petit ; donc il lui est équivalent.

PROPOSITION XV.

Le rapport de la surface de tout cône isocèle à sa base est le même que celui du côté du cône au rayon de la base du cône.

Soit un cône isocèle dont la base est le cercle A. Soit d'une part la droite B égale au rayon du cercle A, d'autre part la droite Γ égale au côté du cône. On doit démontrer que le rapport de la surface du cône au cercle A est le même que celui de la droite Γ à la droite B.

En effet, prenons une droite E, moyenne proportionnelle entre B et

---

1. C.-à-d. de ce même polygone inscrit dans le cercle A.

2. On a : $\frac{\text{polyg. inscr. cerc. A}}{\text{polyg. inscr. cerc. B}} = \frac{\Gamma^2}{E^2}$; or, $\frac{\Gamma}{E} = \frac{E}{\Delta}$, d'où :

$$\frac{\text{polyg. inscr. cerc. A}}{\text{polyg. inscr. cerc. B}} = \frac{\Gamma^2}{\Gamma \times \Delta} = \frac{\Gamma}{\Delta} ;$$

or, on a vu que $\frac{\Gamma}{\Delta} > \frac{\text{polyg. inscr. cerc. A}}{\text{aire pyram. inscr. cône A}}$, d'où :

$\frac{\text{polyg. inscr. cerc. A}}{\text{polyg. inscr. cerc. B}} > \frac{\text{polyg. inscr. cerc. A}}{\text{aire pyram. inscr. cône A}}$, d'où aire pyram. > polyg. inscrit au cercle B.

3. La relation entraînée par la 2de hypothèse :

$$\frac{\text{polyg. circonscr. cerc. B}}{\text{polyg. inscr. cerc. B}} < \frac{\text{cercle B}}{\text{aire cône A}}$$

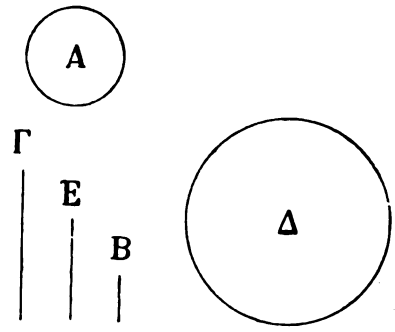
devient, à fortiori, en présence de la relation de la note précédente :

$$\frac{\text{polyg. circonscr. cerc. B}}{\text{aire pyramide}} < \frac{\text{cercle B}}{\text{aire cône A}} ;$$

ce qui est absurde, car polyg. circ. > cerc. B, et aire pyramide < aire cône.

4. Le texte présente ici cette interpolation : « car le polygone circonscrit est plus grand que le cercle B, tandis que la surface de la pyramide qui est dans le cône est plus petite que la surface du cône. »

Digitized by Google



Γ, et donnons-nous le cercle Δ ayant le rayon égal à la droite E. Dès lors, le cercle Δ vaut la surface du cône, car cela a été démontré dans la proposition précédente (1). D'autre part, il a été démontré (2) que le rapport du cercle Δ au cercle A est le même que celui de Γ à la longueur B (3). Il est donc évident que le rapport de la surface du cône au cercle A est le même que celui de la droite Γ à la longueur B (4).

PROPOSITION XVI.

Si l'on coupe un cône isocèle par un plan parallèle à la base, la surface du cône, située entre les plans parallèles, vaut le cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre le côté du cône situé entre les plans parallèles et une droite égale à la somme des rayons des cercles situés dans les plans parallèles.

Soit un cône tel que le triangle passant par son axe soit égal au triangle ABΓ. Coupons par un plan parallèle à la base, et que celui-ci détermine la section ΔE. Soit BH l'axe du cône ; donnons-nous un cercle dont le rayon soit une moyenne proportionnelle entre AΔ et la somme de ΔZ, HA, et soit Θ ce cercle. Je dis que le cercle Θ vaut la surface du cône située entre les droites ΔE, AΓ.

---

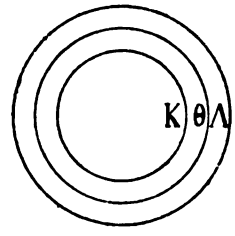
1. Voir prop. XIV.

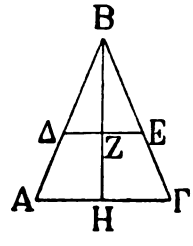
2. Voir prop. XIV et note.

3. Nous donnons ici en note la traduction d'un commentaire assez diffus que nous considérons comme une interpolation : « car chacun de ces rapports est égal » au rapport du carré de E au carré de B, parce que les cercles sont entre eux comme » les carrés construits sur leurs diamètres sont entre eux ; donc pareillement aussi » comme les carrés construits sur les rayons, car ce qu'il en est des diamètres en » est de leurs moitiés, c'est-à-dire des rayons ; or, les droites B, E sont égales aux » rayons. »

4. On a : $\frac{\text{cercle } \Delta}{\text{cercle } A} = \frac{E^2}{B^2}$; or, on a posé : $\frac{B}{E} = \frac{E}{\Gamma}$, d'où : $E^2 = B \times \Gamma$, d'où : $\frac{\text{cercle } \Delta}{\text{cercle } A} = \frac{B \times \Gamma}{B^2} = \frac{\Gamma}{B}$; or, on a eu : cercle Δ = aire latérale cône, d'où : $\frac{\text{aire cône}}{\text{cercle } A} = \frac{\Gamma}{B}$. C. q. f. d.

Digitized by Google





En effet, donnons-nous les cercles Λ, K, et que le carré du rayon du cercle K soit équivalent au rectangle formé sous BΔ, ΔZ, tandis que le carré du rayon du cercle Λ soit équivalent au rectangle formé sous BA, AH. Dès lors, le cercle Λ vaut la surface du cône ABΓ, et le cercle K vaut la surface du cône ΔEB(1). Et, comme le rectangle formé sous BA, AH vaut le rectangle formé sous BΔ, ΔZ, augmenté du rectangle formé sous AΔ et sous la somme de ΔZ, AH, parce que la droite ΔZ est parallèle à la droite AH(2); mais, comme, d'autre part, le carré du rayon du cercle Λ est équivalent au rectangle formé sous BA, AH, le carré du rayon du cercle K est équivalent au rectangle formé sous BΔ, ΔZ, et le carré du rayon du cercle Θ est équivalent au rectangle formé sous AΔ et sous la somme de ΔZ, AH, il en résulte que le carré du rayon du cercle Λ est équivalent à la somme des carrés des rayons des cercles K et Θ. En sorte que le cercle Λ vaut les cercles K et Θ. Mais le cercle Λ vaut la surface du cône BAΓ, tandis que le cercle K vaut la surface du cône ABE ; par conséquent, la surface restante du cône, entre les plans parallèles ΔE, AΓ, vaut le cercle Θ (3).

---

1. On a vu (proposition XIV) que le cercle Λ, dont le rayon est $\sqrt{BA \times AH}$, vaut la surface du cône ABΓ, tandis que le cercle K, dont le rayon est $\sqrt{B\Delta \times \Delta Z}$, vaut la surface du cône ΔBE.

2. On a : $BA.AH = (B\Delta + A\Delta).AH = BA.AH + A\Delta$. Or, par similitude de triangles, on a : $\frac{BA}{B\Delta} = \frac{AH}{\Delta Z}$, d'où : $BA.\Delta Z = B\Delta.AH$. Substituant dans la première égalité, il vient : $BA.AH = BA.\Delta Z + A\Delta.AH = (B\Delta + \Delta A)\Delta Z + A\Delta = B\Delta.\Delta Z + A\Delta\ (\Delta Z + AH)$.

3. La relation $BA.AH = B\Delta.\Delta Z + A\Delta(\Delta Z + AH)$ devient, en observant que $\sqrt{BA.AH}$ = rayon cercle Δ, que $\sqrt{B\Delta.\Delta Z}$ = rayon du cercle K et que, par hypothèse, on a : $\frac{A\Delta}{\text{rayon cercle } \Theta} = \frac{\text{rayon cercle } \Theta}{\Delta Z + AH}$, d'où $\sqrt{A\Delta\ (\Delta Z + AH)}$ = rayon cercle Θ, carré rayon cercle Λ = carré rayon cercle K + carré rayon cercle Θ. Or, les cercles étant entre eux comme les carrés des rayons, cercle A = cercle K + cercle Θ, d'où : cercle Λ — cercle K = cercle Θ. Or, cercle Λ = aire cône ABΓ, cercle K = aire cône ΔBE, et cône ABΓ — cône ΔBE = tronc de cône AΔEΓ, d'où, comme le texte : aire tronc de cône AΔEΓ = cercle Θ.

La relation invoquée par Archimède au cours de cette démonstration fait l'objet d'un lemme que les manuscrits, et notamment le *Palimpseste de Jérusalem* récemment découvert, placent à la suite de la proposition XVI. L'édition princeps de Bâle, 1544, reproduit aussi ce lemme à la suite de cette proposition, tandis qu'il précède cette proposition dans l'édition de Torelli (Oxford, 1792, p. 94). L'édition

Digitized by Google

LEMMES.

1. Les cônes qui ont même hauteur sont dans le rapport de leurs bases ([1]), et ceux qui ont des bases égales sont dans le rapport de leurs hauteurs ([2]).

2. Si un cylindre est coupé par un plan parallèle à la base, l'axe sera à l'axe comme le cylindre est au cylindre ([3]).

3. Des cônes ayant mêmes bases ([4]) que des cylindres sont dans le rapport de ces cylindres ([5]).

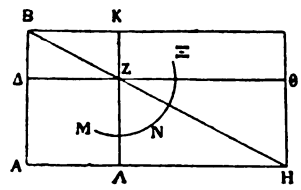
4. De plus, les bases de cônes équivalents sont inversement propor-

---

critique d'Heiberg (vol. I, p. 72) ne reproduit plus le lemme à la suite de la proposition XVI qu'à titre d'interpolation. Heiberg avait déjà montré antérieurement d'ailleurs (*Quaestiones Archimedeae*, 1879, p. 78) que ce lemme, qui n'examine en somme que le cas particulier du rectangle, doit être attribué à un commentateur grec.

Fidèle à notre règle d'écarter de notre traduction tout ce qui, d'après la critique moderne, est venu alourdir le texte d'Archimède, nous donnons ici, en note, la traduction de ce lemme. « Soit un parallélogramme BAH et soit BH sa diagonale. » Coupons le côté BA arbitrairement au point Δ et, par le point Δ, menons ΔΘ parallèle à AH et, par le point Z, KΛ parallèle à BA. Je dis que le rectangle formé » sous BA, AH vaut le retangle formé sous BΔ, ΔZ, augmenté du rectangle formé » sous ΔA et sous la somme de ΔZ, AH.

» En effet, puisque le rectangle formé sous BA, AH est le rectangle BH entier, » le rectangle formé sous BΔ, ΔZ est le rectangle BZ, tandis que le rectangle formé » sous ΔA et sous la somme de ΔZ, AH est l'équerre (γνώμων) MNΞ; car le rectangle



» formé sous ΔA, AH vaut le rectangle KH, parce que » le rectangle adjoint KΘ vaut le rectangle adjoint ΔΛ; » enfin, le rectangle formé sous ΔA, ΔZ est le rectangle ΔΛ. Par conséquent, le rectangle entier BH, c'est-» à-dire celui qui est formé sous BA, AH vaut le rectangle formé sous BΔ, ΔZ, augmenté de l'équerre MNZ, » qui, lui-même, vaut le rectangle formé sous ΔA et » sous la somme de AH, ΔZ. »

Nous ferons remarquer, pour l'intelligence de cette démonstration, que, par similitude de triangles, on a : $\frac{H\Theta}{B\Delta}=\frac{Z\Theta}{\Delta Z}$, ce qui devient, à cause des parallèles : $\frac{\Delta A}{KZ}=\frac{Z\Theta}{\Delta Z}$ d'où : $\Delta A\times\Delta Z=Z\Theta\times KZ$, d'où, comme le texte : rectangle adjoint KΘ = rectangle adjoint ΔΛ.

1. C'est la proposition 11 du livre XII d'Euclide, dont nous traduisons le texte grec comme suit : « Les cônes et les cylindres ayant même hauteur sont entre eux comme leurs bases. »

2. Euclide, livre XII, prop. 14 : « Les cônes et les cylindres ayant des bases égales sont entre eux comme leurs hauteurs. »

3. Euclide, livre XII, prop. 13 : « Si un cylindre est coupé par un plan parallèle aux plans opposés, l'axe sera à l'axe comme le cylindre est au cylindre. »

4. Le texte omet évidemment, ou bien aura perdu les mots : καὶ ὕψος ἴσον. c.-à-d. et même hauteur.

5. Ce lemme découle de la proposition 10 du livre XII d'Euclide : « Le cône est le tiers du cylindre qui a même base et hauteur égale. »

Digitized by Google

tionnelles aux hauteurs, et les cônes dont les bases sont inversement proportionnelles aux hauteurs sont équivalents (1).

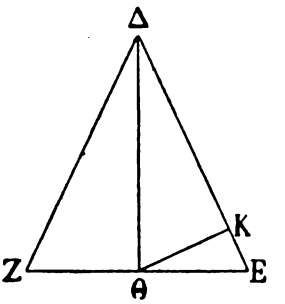
5. Enfin, les cônes dont les diamètres des bases ont même rapport que les axes (2) sont entre eux dans le rapport des cubes (3) des diamètres des bases (4).

Toutes ces choses ont été démontrées par nos prédécesseurs.

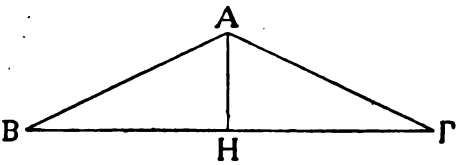
PROPOSITION XVII.

Deux cônes isocèles étant donnés, si l'aire de l'un vaut la base de l'autre, tandis que la droite menée du centre de la base de l'un, perpendiculairement au côté de ce cône, est égale à la hauteur de l'autre, les cônes seront équivalents.

Soient ABΓ, ΔEZ deux cônes isocèles; soit d'une part la base du cône ABΓ équivalente à la surface du cône ΔEZ, soit d'autre part la hauteur AH égale à la droite KΘ menée du centre Θ de la base perpendiculairement sur un côté du cône tel que ΔE. Je dis que les cônes sont équivalents.



En effet, puisque la base du cône ABΓ est équivalente à la surface du cône ΔEZ (5), la sur-



1. C'est la proposition 15 du livre XII d'EUCLIDE : « Les bases de cônes et de cylindres équivalents sont inversement proportionnelles aux hauteurs, et les cônes et cylindres dont les bases sont inversement proportionnelles aux hauteurs se valent entre eux. »

2. Le texte présente ici cette petite interpolation de copiste : « τουτέστιν τοῖς ὕψεσι, c.-à-d. qui sont les hauteurs. »

3. ἐν τριπλασίονι λόγῳ, littéralement : dans le rapport triple, c'est-à-dire dans le rapport cube. C'est l'expression « raison triplée » des anciens géomètres français.

4. C'est la proposition 12 du livre XII d'EUCLIDE qui est rendue comme suit dans la vieille traduction d'*Euclide* par LE MARDELÉ (Paris, 1632, p. 1068) : « Les cônes et cylindres semblables sont en raison triplée des diamètres de leurs bases. »

5. Une interpolation du texte ajoute ici : « et que les (grandeurs) égales ont même rapport avec même (grandeur) ». Commentaire qui rappelle ainsi la proposition 7 du livre V d'EUCLIDE.

Digitized by Google

face du cône ΔEZ sera donc à la base du cône ΔEZ comme la base du cône BAΓ est à la base du cône ΔEZ. Mais ΔΘ est à ΘK comme la surface de ce dernier cône est à sa base (1), tandis que la droite ΘK est égale à la droite AH ; par conséquent, la hauteur du cône ΔEZ est à la hauteur du cône ABΓ comme la base du cône BAΓ est à la base du cône ΔEZ. Dès lors, les bases des cônes ABΓ, ΔEZ sont inversement proportionnelles à leurs hauteurs ; donc le cône BAΓ équivaut au cône ΔEZ (2).

PROPOSITION XVIII.

Tout rhombe composé de cônes isocèles vaut le cône ayant une base équivalente à la surface de l'un des cônes qui limitent le rhombe et une hauteur égale à la droite menée du sommet de l'autre cône perpendiculairement sur un côté du premier cône.

Soit le rhombe ABΓΔ composé de cônes isocèles dont la base est le cercle décrit sur le diamètre BΓ et dont la hauteur est AΔ. Prenons un autre cône HΘK ayant une base équivalente à la surface du cône ABΓ et une hauteur égale à la droite menée du point Δ perpendiculairement sur la droite AB ou sur cette droite prolongée. Soit ΔZ cette hauteur et soit ΘΛ la hauteur du cône ΘHK. La droite ΘΛ est donc égale à la droite ΔZ. Je dis que ce cône équivaut au rhombe.

En effet, prenons un autre cône MNΞ ayant une base égale à celle du cône ABΓ, une hauteur égale à AΔ, et soit NO cette hauteur. Dès lors, puisque NO est égal à AΔ, NO est à ΔE comme AΔ est à ΔE. Mais AΔ est à ΔE comme le rhombe ABΓΔ est au cône BΓΔ,

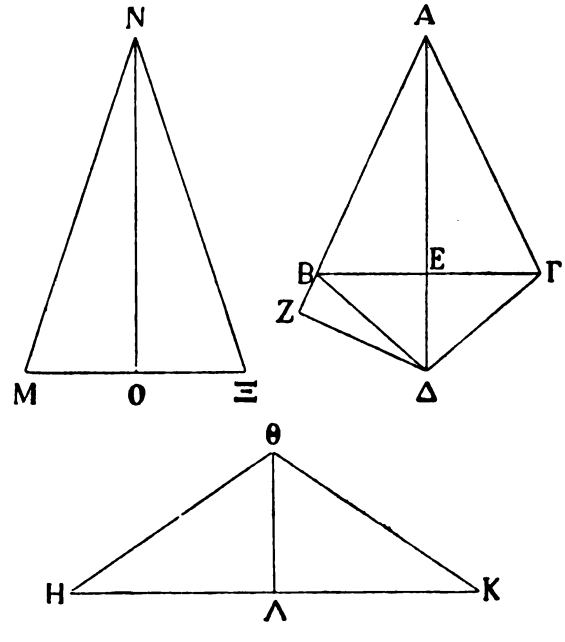
---

1. Un commentaire est interpolé ici dans le texte, disant : « car on a démontré que le rapport de la surface de tout cône isocèle à sa base est égal à celui du côté du cône au rayon de la base, c'est-à-dire au rapport de ΔE à EΘ ; donc EΔ est à ΘΔ comme EΘ est à ΘK, car les triangles sont équiangles. »

2. En notations explicites on a, par hypothèse : base cône ABΓ = surf. cône AEZ. On peut donc écrire : $\frac{\text{base cône BA}\Gamma}{\text{base cône }\Delta\text{EZ}} = \frac{\text{surf. cône }\Delta\text{EZ}}{\text{base cône }\Delta\text{EZ}}$. Or, en vertu de la prop. XV, on a : $\frac{\Delta\text{E}}{\Theta\text{E}} = \frac{\text{surf. cône }\Delta\text{EZ}}{\text{base cône }\Delta\text{EZ}}$. Mais, par hypothèse, ΘK = AH et, par similitude de triangles rectangles, on a : $\frac{\Delta\text{E}}{\Theta\text{E}} = \frac{\Delta\Theta}{\Theta\text{K}}$, ou $\frac{\Delta\text{E}}{\Theta\text{E}} = \frac{\Delta\Theta}{\text{AH}}$, d'où, remontant à la première égalité : $\frac{\text{base cône BA}\Gamma}{\text{base cône }\Delta\text{EZ}} = \frac{\Delta\Theta}{\text{AH}}$, relation qui, en vertu du lemme 4, donne, comme le texte : cône BAΓ = cône ΔEZ.

Digitized by Google

tandis que NO est à ΔE comme le cône MNΞ est au cône BΓΔ (1) ; par conséquent,le cône MNΞ est au cône BΓΔ comme le rhombe ABΓΔ est au cône BΓΔ ; donc le cône MNΞ équivaut au rhombe ABΓΔ (2). Et puisque la surface du cône ABΓ vaut la base du cône HΘK, la surface du cône ABΓ sera donc à la base de ce cône comme la base du cône HΘK est à la base du cône MNΞ (3). Or, la surface du cône ABΓ est à la base de ce même cône comme AB est à BE, c'est-à-dire comme AΔ est à ΔZ (4) ; par conséquent, la base du cône HΘK est à la base du cône MNΞ comme AΔ est à ΔZ.



Or, AΔ est égal à NO (5), tandis que ΔZ est égal à ΘΛ ; par conséquent, la base du cône HΘK sera à la base du cône MNΞ comme la hauteur NO est à la hauteur ΘΛ. Dès lors, les bases des cônes HΘK, MNΞ sont inversement proportionnelles à leurs hauteurs ; ces cônes sont donc équivalents. Or, on a démontré que le cône MNΞ vaut le rhombe ABΓΔ ; par conséquent, le cône HΘK vaut aussi le rhombe ABΓΔ (6).

---

1. Une petite interpolation ajoute ici : « parce que les bases sont égales. »

2. Par hypothèse, NO = AΔ, d'où : $\frac{NO}{\Delta E} = \frac{A\Delta}{\Delta E}$. Or, les cônes ABΓ, ABΓ ont même base, d'où (lemme 1) : $\frac{\text{cône } AB\Gamma}{\text{cône } \Delta B\Gamma} = \frac{AE}{\Delta E}$, d'où : $\frac{\text{cône } AB\Gamma + \text{cône } AB\Gamma}{\text{cône } \Delta B\Gamma} = \frac{AE + \Delta E}{\Delta E}$, ou : $\frac{\text{rhombe } AB\Gamma\Delta}{\text{cône } \Delta B\Gamma} = \frac{A\Delta}{\Delta E}$. D'autre part, par hypothèse, les cônes MNΞ, ΔBΓ ont même base, d'où (lemme 1) : $\frac{\text{cône } MN\Xi}{\text{cône } \Delta B\Gamma} = \frac{NO}{\Delta E} = \frac{A\Delta}{\Delta E}$. Comparant les deux relations obtenues, il vient : $\frac{\text{rhombe } AB\Gamma\Delta}{\text{cône } \Delta B\Gamma} = \frac{\text{cône } MN\Xi}{\text{cône } \Delta B\Gamma}$, d'où, comme le texte : cône MNΞ = rhombe ABΓΔ.

3. Une interpolation répète ici inutilement : « car la base ABΓ est égale à la base MNΞ.

4. Interpolation de quatre mots : « car les triangles sont semblables. »

5. Interpolation : « car cela a été posé. »

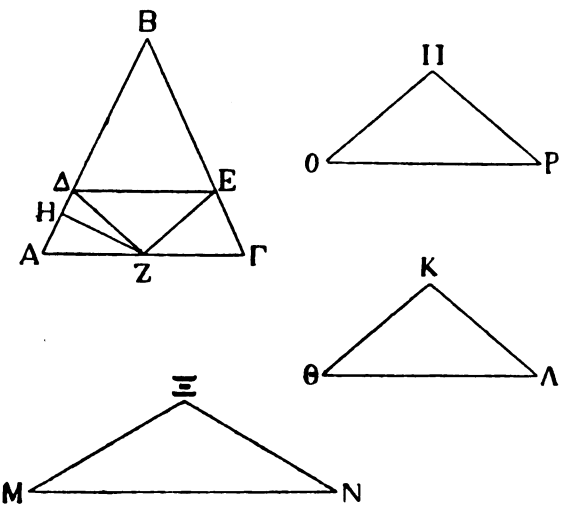
6. Reprenons plus explicitement : On a, par hypothèse, base cône HΘK = surface

Digitized by Google

PROPOSITION XIX.

Si un cône isocèle est coupé par un plan parallèle à sa base ; si sur le cercle ainsi déterminé on décrit un cône ayant son sommet au centre de la base (1), et si le rhombe ainsi déterminé est retranché du cône entier, le fragment enveloppant vaudra le cône ayant une base équivalente à la surface du cône située entre les plans parallèles et une hauteur égale à la droite menée du centre de la base (2) perpendiculairement sur un côté de ce cône.

Soit un cône isocèle ABΓ, et coupons-le par un plan parallèle à la base qui détermine la section ΔE. Soit Z le centre de la base, et, sur le cercle décrit autour du diamètre ΔE, construisons le cône ayant le point Z comme sommet. On a donc un rhombe BΔZE composé de cônes isocèles. Prenons un cône KΘΛ dont la base soit équivalente à la surface située entre ΔE et AΓ et dont la hauteur soit égale à la droite ZH menée du point Z perpendiculairement sur AB. Je dis que, si l'on imagine le rhombe BΔZE retranché du cône ABΓ, le cône ΘKΛ vaudra le fragment enveloppant.



En effet, prenons deux cônes MNΞ, OΠP tels que, d'une part, la base du cône MNΞ soit équivalente à la surface du cône ABΓ, tandis

---

cône ABΓ, et base cône MNΞ = base cône ABΓ, d'où : $\frac{\text{base cône H}\Theta\text{K}}{\text{base cône MN}\Xi} = \frac{\text{surface cône AB}\Gamma}{\text{base cône AB}\Gamma}$; or, en vertu de la proposition XV, on a : $\frac{\text{surf. cône AB}\Gamma}{\text{base cône AB}\Gamma} = \frac{\text{AB}}{\text{BE}}$, et, par similitude de triangles, en observant toutefois que AΔ = NO, ΔZ = ΘΔ, on a : $\frac{\text{AB}}{\text{BE}} = \frac{\text{A}\Delta}{\Delta\text{Z}} = \frac{\text{NO}}{\Theta\Lambda}$. La première égalité devient donc : $\frac{\text{base cône H}\Theta\text{K}}{\text{base cône MN}\Xi} = \frac{\text{NO}}{\Theta\Lambda}$, relation qui, en vertu du lemme 4, donne : cône HΘK = cône MNΞ. Mais, on a eu plus haut : cône MNΞ = rhombe ΛBΓΔ, d'où, comme le texte : cône HΘK = rhombe ABΓΔ. C. q. f. d.

1. Sous-entendu : du premier cône.
2. Sous-entendu : du premier cône.

Digitized by Google

que sa hauteur soit égale à la droite ZH (1), et que, d'autre part, la base du cône ΟΠΡ soit équivalente à la surface du cône ΔBE, tandis que la hauteur soit égale à la droite ZH (2). Dès lors, puisque la surface du cône ABΓ est composée de la surface du cône ΔBE et de la surface située entre ΔE, AΓ, tandis que la surface du cône ABΓ vaut la base du cône MNΞ, que la surface du cône ΔBE vaut la base du cône ΟΠΡ, et que la surface située entre ΔE, AΓ vaut la base du cône ΘΚΛ, il en résulte que la base du cône MNΞ vaut les bases des cônes ΘΚΛ, ΟΠΡ. De plus, ces cônes ont même hauteur ; par conséquent le cône MNΞ vaut les cônes ΘΚΛ, ΟΠΡ. Mais le cône MNΞ vaut le cône ABΓ, et le cône ΠΟΡ vaut le rhombe BΔEZ ; donc le cône restant ΘΚΛ vaudra le fragment enveloppant (3).

PROPOSITION XX.

Si l'un des cônes d'un rhombe composé de cônes isocèles est coupé par un plan parallèle à la base ; si, sur le cercle ainsi déterminé, l'on construit un cône ayant même sommet que l'autre cône, et si le rhombe ainsi déterminé est retranché du rhombe total, le cône, ayant une base équivalente à la surface du cône située entre les plans parallèles et une hauteur égale à la droite menée du sommet du second cône perpen-

1. Le texte est altéré ici par une longue interpolation qui coupe la suite du discours. C'est un commentaire qui rappelle la proposition précédente en disant : « le cône MNΞ sera donc ainsi égal au cône ABΓ ; car si l'on a deux cônes isocèles, si la surface de l'un vaut la base de l'autre, si d'autre part la perpendiculaire menée du centre de la base sur le côté du cône est égale à la hauteur, les cônes seront équivalents. »

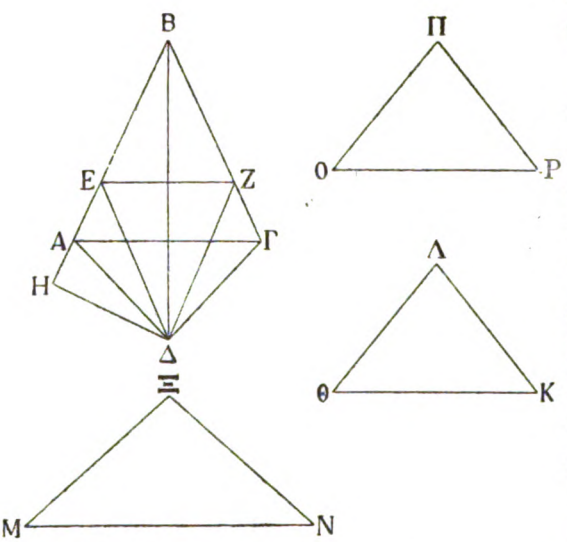
2. Une petite interpolation ajoute ici : « et ainsi le cône ΟΠΡ sera égal au rhombe BΔZE, car cela a été démontré précédemment. »

3. La fin de la démonstration se déroule plus explicitement comme suit : On a, par hypothèse : base cône MNΞ = surf. cône ABΓ. Or, surf. cône ABΓ = surf. cône ΔBE + surf. fragment AΔZEΓ, d'où : base cône MNΞ = surf. cône ΔBE + surf. fragment AΔZEΓ. Or, par hypothèse : surf. cône ΔBE = base cône ΟΠΡ, et surf. fragment AΔZEΓ = base cône ΘΚΛ, d'où : base cône MNΞ = base cône ΟΠΡ + base cône ΘΚΛ. Or, ces trois cônes ayant même hauteur sont entre eux comme leurs bases (lemme 1), d'où : cône MNΞ = cône ΘΚΛ + cône ΟΠΡ. Or, observant que base cône MNΞ = surface cône ABΓ, et que ZH = hauteur du cône MNΞ, la proposition XVII donne : cône MNΞ = cône ABΓ. De plus, observant que base cône ΟΠΡ = surf. cône ΔBE et que ZH = hauteur cône ΟΠΡ, la proposition XVIII donne : cône ΠΟΡ = rhombe BΔZE. Substituant dans la relation entre les trois cônes auxiliaires qui précède, il vient : cône ABΓ = cône ΘΚΛ + rhombe BΔZE. Retranchons le rhombe BΔZE de part et d'autre, il vient, comme le texte : cône ΘΚΛ = fragment AΔZE. C. q. f. d.

Digitized by Google

diculairement sur un côté du premier cône, sera équivalent au fragment enveloppant.

Soit ABΓΔ un rhombe composé de cônes isocèles, et coupons l'un des cônes par un plan parallèle à la base, qui détermine la section EZ. Construisons sur le cercle décrit autour du diamètre EZ un cône ayant le point Δ comme sommet ; on aura donc déterminé le rhombe EBΔZ. Imaginons que ce dernier soit retranché du rhombe total, et prenons un cône ΘKΛ ayant la base équivalente à la surface située entre AΓ, EZ et la hauteur égale à la droite menée du point Δ perpendiculairement sur BA ou sur le prolongement de cette droite. Je dis que le cône ΘKΛ vaut le fragment enveloppant que l'on a dit.



En effet, prenons deux cônes MNΞ, OΠP ; que d'une part la base du cône MNΞ soit équivalente à la surface du cône ABΓ, tandis que sa hauteur soit égale à la droite ΔH(1), et que, d'autre part, la base du cône OΠP soit équivalente à la surface du cône EBZ, tandis que sa hauteur soit égale à la droite ΔH (2). Dès lors, puisque, de la même manière (3), la surface du cône ABΓ est composée de la surface du cône EBZ et de la surface située entre EZ, AΓ, tandis que la surface du cône ABΓ vaut la base du cône MNΞ, que la surface du cône EBZ vaut la base du cône OΠP, et que la surface située entre EZ, AΓ vaut la base du cône ΘKΛ, il en résulte que la base du cône MNΞ vaut les bases des cônes OΠP, ΘKΛ. De plus, ces cônes ont même hauteur; par conséquent, le cône MNΞ vaut les cônes ΘKΛ, OΠP. Or, le cône MNΞ vaut le rhombe ABΓΔ, tandis

1. Le texte est coupé par cette interpolation d'un copiste trop pressé de faire remarquer ce que la démonstration dira en son temps : « d'après ce qui a été démontré, le cône MNΞ vaut donc le rhombe ABΓΔ ».

2. Autre petite interpolation qui est le pendant de la précédente : « pareillement donc, le cône OΠP vaut le rhombe EBΔZ ».

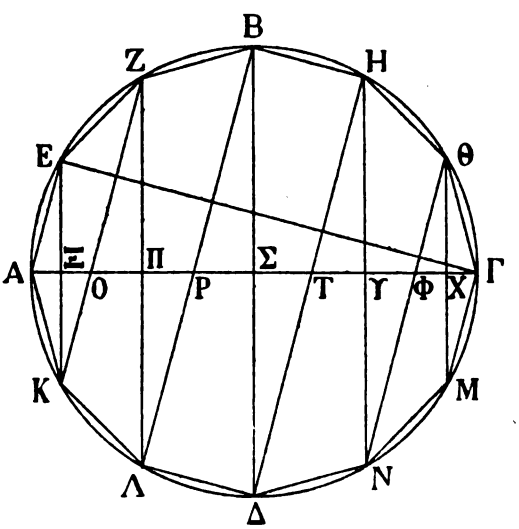
3. C.-à-d. comme dans la proposition XIX.

Digitized by Google

que le cône ΟΠΡ vaut le rhombe ΕΒΔΖ ; donc le cône restant ΘΚΛ vaudra le fragment restant (1).

PROPOSITION XXI.

Si, dans un cercle, l'on inscrit un polygone d'un nombre pair de côtés et équilatéral, et si l'on mène les droites qui joignent les côtés (2) du polygone de manière qu'elles soient parallèles à l'une quelconque des droites qui sous-tendent deux côtés du polygone, le rapport de l'ensemble de toutes les droites de jonction au diamètre du cercle est le même que le rapport de la droite qui sous-tend la moitié des côtés moins un au côté du polygone.



Soit le cercle ΑΒΓΔ, inscrivons-y le polygone ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ, et menons les droites de jonction ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ. Dès lors, il est évident qu'elles sont parallèles à une droite qui sous-tend deux côtés du polygone (3). Je dis donc que le rapport de l'ensemble de toutes les droites en question au diamètre ΑΓ est le même que celui de la droite ΓΕ à la droite ΕΑ.

---

1. Toute la démonstration se déroule comme suit : Par hypothèse : base cône ΜΝΞ = surf. cône ΑΒΓ. Or, surf. cône ΑΒΓ = surf. cône ΕΒΖ + surf. ΕΑΓΖ, d'où : base cône ΜΝΞ = surf. cône ΕΒΖ + surface ΕΑΓΖ. Or, par hypothèse : surf. cône ΕΒΖ = base cône ΟΠΡ, et surface ΕΑΓΖ = base cône ΘΚΛ, d'où : base cône ΜΝΞ = base cône ΟΠΡ + base cône ΘΚΛ. Mais ces trois cônes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, d'où : cône ΜΝΞ = cône ΘΚΛ + cône ΟΠΡ. Or, observant que base cône ΜΝΞ = surf. cône ΑΒΓ et que ΔΗ = hauteur cône ΜΝΞ, tandis que base cône ΟΠΡ = surf. cône ΕΒΖ et que ΔΗ = hauteur cône ΟΠΡ, la proposition XVIII donne : cône ΜΝΞ = rhombe ΑΒΓΔ et cône ΟΠΡ = rhombe ΕΒΖΔ. Substituons dans la relation entre les cônes auxiliaires qui précède, il vient :
rhombe ΑΒΓΔ = cône ΘΚΛ + rhombe ΕΒΖΔ. Retranchons le rhombe ΕΒΖΔ de part et d'autre, il vient, comme le texte : cône ΘΚΛ = fragment ΕΑΔΓΖ.

2. Le texte porte πλευρὰς, côtés, au lieu du mot γωνίας, angles, qui eût été plus exact.

3. Car les angles inscrits ΖΛΒ, ΛΒΔ, etc. qui ont pour mesure la moitié d'arcs égaux ΖΒ, ΛΔ, etc., sont égaux et, dès lors, les droites ΖΛ, ΒΔ, etc., sont parallèles.

Digitized by Google

En effet, menons les droites de jonction ZK, ΛB, HΛ, ΘN. Dès lors, ZK est parallèle à EA, BΛ parallèle à ZK et, de plus, ΔH est parallèle à BΛ, ΘN parallèle à ΔH et ΓM parallèle à ΘN (1) ; par conséquent, KΞ est à ΞO comme EΞ est à ΞA. Or, ZΠ est à ΠO comme KΞ est à ΞO, ΛΠ est à ΠP comme ZΠ est à ΠO, et BΣ est à ΣP comme ΛP est à ΠP ; ensuite ΔΣ est à ΣT comme BΣ est à ΣP, tandis que HY est à YT comme ΔΣ est à ΣT ; ensuite NY est à YΦ comme HY est à YT, tandis que ΘX est à XΦ comme NY est à YΦ ; enfin MX est à XΓ comme ΘX est à XΦ (2). En conséquence, la somme de EK, ZΛ, BΔ, HN, ΘM est au diamètre AΓ comme EΞ est à ΞA. Or, ΓE est à EA comme EΞ est à ΞA ; donc la somme de EK, ZΛ, BΔ, HN, ΘM est au diamètre AΓ comme ΓE est à EA (3).

PROPOSITION XXII.

Si, dans un segment de cercle, l'on inscrit un polygone ayant, la base exceptée, des côtés égaux et en nombre pair, et si l'on mène les parallèles à la base qui joignent les côtés (4) du polygone, le rapport de l'ensemble des droites menées, augmenté de la moitié de la base, à la hauteur du segment est le même que celui de la droite de jonction, menée du diamètre du cercle à un côté du polygone, au côté du polygone (5).

---

1. Le texte présente ici l'interpolation suivante : « et puisque EA, KZ sont deux parallèles, et que l'on a mené les deux droites EK, AO. »

2. Une autre interpolation dit ici : « et toutes sont donc à toutes dans le rapport d'une à une. »

3. Tous les angles inscrits dans le cercle étant mesurés par des arcs égaux sont égaux ; on a donc une série de triangles semblables qui donnent :

$$\frac{E\Xi}{\Xi A}=\frac{K\Xi}{\Xi O}=\frac{Z\Pi}{\Pi O}=\frac{\Lambda\Pi}{\Pi P}=\frac{B\Sigma}{\Sigma P}=\frac{\Delta\Sigma}{\Sigma T}=\frac{HY}{YT}=\frac{NY}{Y\Phi}=\frac{\Theta X}{X\Phi}=\frac{MX}{X\Gamma},$$ d'où :

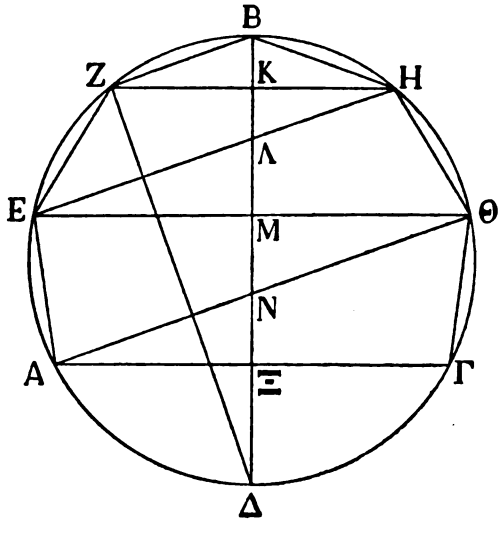
$$\frac{E\Xi}{\Xi A}=\frac{E\Xi+K\Xi+Z\Pi+\Lambda\Pi+\text{etc.}}{\Xi A+\Xi O+\Pi O+\Pi P+\text{etc.}}=\frac{EK+Z\Lambda+B\Delta+HN+\Theta M}{A\Gamma}.$$ Or, dans les triangles rectangles EΞA, ΓEA, les angles en E et en Γ sont égaux comme inscrits et mesurés par des arcs égaux ; ces triangles sont donc semblables, d'où : $\frac{E\Xi}{\Xi A}=\frac{\Gamma E}{EA}$, d'où, comme le texte : $\frac{EK+Z\Lambda+B\Delta+HN+\Theta M}{A\Gamma}=\frac{\Gamma E}{EA}$.

4. De même que dans la proposition précédente (voir note 2, page 45), le texte porte improprement le mot « côtés » au lieu « d'angles ».

5. La fin de cet énoncé manque de précision, à la suite, peut-être, de quelque altération du texte original. Il s'agit, en effet, de la droite qui relie l'extrémité du diamètre du cercle à l'extrémité du côté du polygone inscrit dans le segment.

Digitized by Google

En effet, menons dans le cercle ABΓΔ une droite AΓ ; inscrivons dans le segment ABΓ, sur AΓ, un polygone ayant les côtés en nombre pair et égaux, exception faite de la base AΓ, et menons les droites de jonction ZH, EΘ, qui sont parallèles à la base du segment (1). Je dis que la somme des droites ZH, EΘ, AΞ est à BΞ comme ΔZ est à ZB.



Menons de nouveau, et de la même manière (2), les droites HE, AΘ, qui sont donc parallèles à BZ. Dès lors, pour les mêmes raisons (3), KZ est à KB comme HK est à KΛ, comme EM est à MΛ, comme MΘ est à MN et comme ΞA est à ΞN (4). Par conséquent, la somme de ZH, EΘ, AΞ est à BΞ comme ZK est à KB. Or, ZK est à KB comme ΔZ est à ZB (5) ; donc la somme de ZH, EΘ, AΞ est à BΞ comme ΔZ est à ZB.

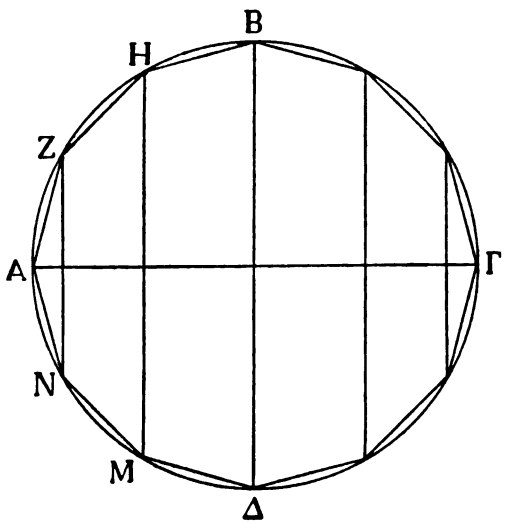
PROPOSITION XXIII.

Soit, sur une sphère, le grand cercle ABΓΔ (6), et inscrivons-lui un polygone équilatéral dont le nombre de côtés soit divisible par quatre. Soient AΓ, ΔB des diamètres (7). Si, dès lors, le diamètre AΓ étant fixe, le cercle comportant le polygone fait révolution, il est évident que sa circonférence circulera suivant la surface de la sphère, tandis que les angles du plygone, à l'exception des angles placés aux points A, Γ, circuleront suivant des circonférences de cercle tracées à la surface de la sphère, perpendiculairement au cercle ABΓΔ. Les

1. Voir proposition XXI, note 3, p. 45.
2. C.-à-d. comme dans la proposition XXI.
3. C.-à-d. par similitude des triangles comme dans la prop. XXI.
4. Le texte présente la petite interpolation déjà rencontrée dans la proposition précédente : « et toutes sont à toutes comme une est à une. »
5. Par similitude des triangles rectangles ZKB, ΔZB, dont les angles inscrits en Z et Δ sont égaux comme étant mesurés par les moitiés des arcs égaux BH, ZB.
6. Archimède emploie toujours les termes μέγιστος κύκλος, c'est-à-dire : le plus grand cercle.
7. Ces diamètres sont perpendiculaires.

Digitized by Google

diamètres de ces cercles seront d'ailleurs les droites de jonction des angles du polygone, parallèles à BΔ. D'autre part, les côtés du polygone circuleront suivant certains cônes ; les côtés AZ, AN circuleront suivant la surface du cône dont la base est le cercle décrit autour du diamètre ZN et dont le sommet est le point A ; les côtés ZH, MN circuleront suivant une certaine surface de cône dont la base est le cercle décrit autour du diamètre MH et dont le sommet est le point où les droites ZH, MN prolongées se rencontrent et rencontrent la droite AΓ ; enfin les côtés BH, MΔ circuleront suivant une surface de cône dont la base est le cercle décrit autour du diamètre BΔ, perpendiculairement au cercle ABΓΔ, et dont le sommet est le point où les droites BH, ΔM prolongées se rencontrent et rencontrent la droite ΓA. Et de même, les côtés situés dans l'autre demi-cercle circuleront encore suivant des surfaces de cônes semblables aux premiers. Par conséquent, on aura une certaine figure qui, inscrite dans la sphère, est enveloppée par les surfaces coniques que nous avons dites, et dont l'aire sera plus petite que l'aire de la sphère.



En effet, la sphère étant divisée par un plan passant par BΔ perpendiculairement au cercle ABΓΔ, la surface de l'un des hémisphères et la surface de la figure qui lui est inscrite ont les mêmes limites dans un seul plan ; car la limite de l'une et de l'autre de ces surfaces est la circonférence du cercle décrit autour du diamètre BΔ perpendiculairement au cercle ABΓΔ, l'une et l'autre sont concaves dans la même direction, et l'une est enveloppée par l'autre surface et par la surface d'un plan ayant mêmes limites qu'elle-même (1). Et, pareillement aussi, la surface de la figure dans l'autre hémisphère est plus petite que la surface de cet hémisphère. Dès lors, l'aire totale de la figure inscrite dans la sphère est aussi plus petite que l'aire de la sphère.

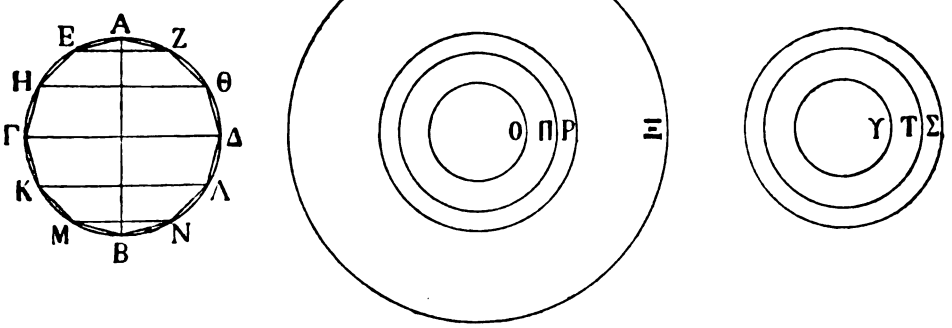
1. Voir postulat 4. Par omission ou par suite d'une altération du texte, il manque ici la conclusion que la surface inscrite dans l'hémisphère est moindre que la surface de cet hémisphère.

Digitized by Google

PROPOSITION XXIV.

L'aire de la figure inscrite dans la sphère (1) équivaut au cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle délimité par un côté du polygone et par une droite égale à la somme de celles qui, reliant les côtés (2) du polygone, sont parallèles à la droite qui sous-tend deux côtés du polygone.

Soit dans une sphère le grand cercle ABΓΔ, et inscrivons-y un polygone équilatéral dont le nombre des côtés soit divisible par quatre. Imaginons une figure inscrite dans la sphère par ce polygone inscrit (3),



et menons les droites de jonction EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ, MN, parallèles à la droite qui sous-tend deux côtés. D'autre part, prenons un cercle Ξ dont le carré du rayon vaut le rectangle délimité par la droite AE et par une droite égale à la somme des droites EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ, MN. Je dis que ce cercle équivaut à l'aire de la figure inscrite dans la sphère.

En effet, prenons des cercles O, Π, P, Σ, T, Υ ; que le carré du rayon du cercle O soit équivalent au rectangle délimité par EA et par la moitié de EZ ; que le carré du rayon du cercle Π soit équivalent au

1. L'énoncé de cette proposition se rattache à celui de la proposition précédente, en ce sens que la figure inscrite dans la sphère est encore engendrée par la révolution d'un polygone inscrit dans un grand cercle, équilatéral et dont le nombre des côtés est un multiple de quatre.

2. Le texte porte πλευράς, côtés, tandis que le mot γωνίας, angles eût été plus précis.

3. Le texte emploie simplement ἀπὸ dans le sens d'origine, c'est-à-dire par la révolution du polygone inscrit.

Digitized by Google

rectangle délimité par EA et par la moitié de la somme de EZ, HΘ ; que le carré du rayon du cercle P soit équivalent au rectangle délimité par EA et par la moitié de la somme de HΘ, ΓΔ ; que le carré du rayon du cercle Σ soit équivalent au rectangle délimité par EA et par la moitié de la somme de ΓΔ, KΛ ; que le carré du rayon du cercle T soit équivalent au rectangle délimité par AE et par la moitié de la somme de KΛ, MN, et que le carré du rayon du cercle Υ soit équivalent au rectangle délimité par AE et par la moitié de MN. Or, par là-même, le cercle O vaut la surface du cône AEZ (1) ; le cercle Π vaut la surface du cône située entre les droites EZ, HΘ (2) ; le cercle P vaut celle qui est située entre HΘ, ΓΛ ; le cercle Σ celle qui est située entre ΔΓ, KΛ ; de plus, le cercle T vaut la surface du cône située entre les droites KΛ, MN (3), tandis que le cercle Υ vaut la surface du cône MBN (4). Par conséquent, l'ensemble de tous ces cercles vaut la surface de la figure inscrite. Et il est clair que la somme des carrés des rayons des cercles O,H, P, Σ, T, Υ vaut le rectangle délimité par la droite AE et par la somme, deux fois prise, des moitiés des droites EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ, MN, ce qui est la somme des droites entières EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ, MN. Dès lors, la somme des carrés des rayons des cercles O, Π, P, Σ, T, Υ vaut le rectangle délimité par la droite AE et par la somme des droites EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ, MN. Mais, le carré du rayon du cercle Ξ vaut aussi le rectangle délimité par la droite AE et par la somme de toutes les droites EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ, MN (5) ; par conséquent, le carré du rayon du cercle Ξ vaut la somme des carrés des rayons des cercles O, Π, P, Σ, T, Υ, et le cercle Ξ vaut donc l'ensemble des cercles O, Π, P, Σ, T, Υ (6). Or, il a été démontré que l'ensemble des cercles O, Π, P, Σ, T, Υ

1. La proposition XIV donne : Surf. cône AEZ = cercle de rayon $\sqrt{AE \times \frac{1}{2}EZ}$. Or, par hypothèse : carré du rayon du cercle O = AE × ½EZ, d'où, comme le texte : cercle O = surf. cône AEZ.

2. La proposition XVI donne : surf. conique HEZΘ = cercle de rayon $\sqrt{HE \times \frac{1}{2}(EZ + H\Theta)}$ = cercle de rayon $\sqrt{AE \times \frac{1}{2}(EZ + H\Theta)}$. Or, par hypothèse, on a : carré du rayon du cercle Π = AE × ½(EZ + HΘ), d'où, comme le texte : cercle Π = surf. conique HEZΘ.

3. Il en est de même pour les cercles P, Σ, T, en vertu de la prop. XVI.

4. Il en est du cercle Υ comme du cercle O, en vertu de la proposition XIV, en remarquant toutefois que MB = AE.

5. On a, par hypothèse : carré du rayon du cercle Ξ = AE × (EZ + HΘ + ΓΔ + KΛ + MN).

6. Puisque ces cercles sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.

Digitized by Google

vaut l'aire de la figure que nous avons désignée (1) ; par conséquent, le cercle Ξ vaudra aussi l'aire de cette figure.

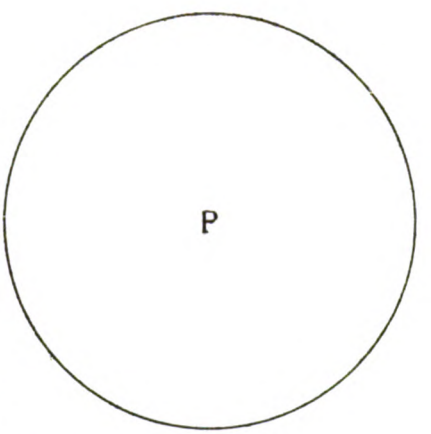
PROPOSITION XXV.

L'aire d'une figure limitée par des surfaces coniques, inscrite dans une sphère, est plus petite que le quadruple du plus grand cercle de la sphère.

Soit ABΓΔ le plus grand cercle d'une sphère et inscrivons-y un polygone équilatéral (2) dont le nombre de côtés soit divisible par quatre. Imaginons une aire (3) délimitée par des surfaces coniques engendrées par ce polygone. Je dis que l'aire de la figure inscrite est plus petite que quatre fois le plus grand cercle de la sphère.



En effet, menons les droites de jonction EI, ΘM, tendues sous deux côtés du polygone, ainsi que les droites ZK, ΔB, HΛ qui leur sont parallèles. Prenons un cercle P, dont le carré du rayon soit équivalent au rectangle délimité par la droite EA et par une droite égale à l'ensemble des droites EI, ZK, BΔ, HΛ, ΘM. Dès lors, en vertu de ce que nous avons démontré précédemment, ce cercle vaut l'aire de la figure en question (4). Et puisqu'il a été démontré qu'une droite égale à la somme des droites EI, ZK, BΔ, HΛ, ΘM est au diamètre AΓ du cercle comme



1. Voir propositions XIV et XVI.
2. Le mot ἀρτιόγωνον, c.-à-d. d'un nombre pair d'angles, qui se présente ici sans conjonction, doit avoir été interpolé.
3. Le texte porte ἐπιφάνεια, surface, aire, au lieu du mot σχῆμα, figure, qui était mieux approprié.
4. Voir proposition XXIV.

Digitized by Google

ΓE est à EA (1), il en résulte que le rectangle délimité par une droite égale à la somme des droites précitées et par EA, c'est-à-dire le carré du rayon du cercle P, vaut le rectangle délimité par les droites AΓ, ΓE. Mais le rectangle délimité par AΓ, ΓE est aussi plus petit que le carré de AΓ ; par conséquent, le carré du rayon du cercle P est plus petit que le carré de AΓ ; donc le rayon du cercle P est plus petit que AΓ ; en sorte que le diamètre du cercle P est plus petit que le double du diamètre du cercle ABΓΔ (2). En conséquence, le cercle P est plus petit que le quadruple du plus grand cercle. Or, il a été démontré que le cercle P vaut l'aire de la figure dont il est question ; donc l'aire de cette figure est plus petite que le quadruple du plus grand cercle de la sphère (3).

PROPOSITION XXVI.

A la figure délimitée par des surfaces coniques inscrite dans une sphère équivaut (4) le cône ayant la base équivalente à l'aire de la figure inscrite dans la sphère et une hauteur égale à la droite menée perpendiculairement du centre de la sphère sur un côté quelconque du polygone (5).

Soit une sphère, dans laquelle on a le grand cercle ABΓΔ, et que

---

1. Voir proposition XXI.

2. Le texte présente ici la phrase suivante qu'il y a lieu, avec HEIBERG (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 101), de rejeter à titre d'interpolation : « donc deux diamètres du cercle ABΓΔ sont plus grands que le diamètre du cercle P ; donc le quadruple du carré du diamètre du cercle ABΓΔ, c'est-à-dire de AΓ, est plus grand que le carré du diamètre du cercle P. Or, le quadruple du carré de AΓ est au carré du diamètre du cercle P comme quatre cercles ABΓΔ sont au cercle B. Donc quatre cercles ABΓΔ sont plus grands que le cercle P. »

3. Plus explicitement : La proposition XXI donne :

$$\frac{EI + ZK + B\Delta + H\Lambda + \Theta M}{A\Gamma} = \frac{\Gamma E}{E\Lambda}, \text{ d'où : } (EI + ZK + B\Delta + H\Lambda + \Theta M)EA = A\Gamma \times \Gamma E.$$

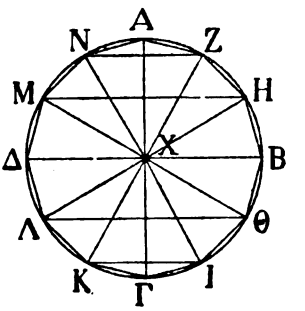
Or, par hypothèse, on a : carré rayon cercle $P = (EI + ZK + B\Delta + H\Lambda + \Theta M)EA$, d'où : carré rayon cercle $P = A\Gamma \times \Gamma E$. Or, $\Gamma E < \Gamma A$, d'où : $A\Gamma \times \Gamma E < \overline{A\Gamma}^2$, d'où : carré rayon cercle $P < \overline{A\Gamma}^2$, d'où : rayon cercle $P < A\Gamma$, d'où : diam. cercle $P < 2A\Gamma$, ou diam. cercle $P <$ 2 diamètres cercle ABΓΔ. Mais les cercles sont entre eux comme les carrés des diamètres ; donc : cercle $P < 4$ cercles ABΓΔ. Or, en vertu de la proposition XXIV, on a : cercle P = fig. inscrite dans la sphère, d'où : figure inscrite dans la sphère < 4 grands cercles ABΓΔ.

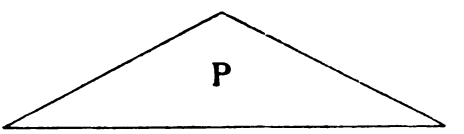
4. Sous-entendu : « en volume ».

5. C.-à-d. la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur un côté du polygone régulier générateur de la figure inscrite dans la sphère.

Digitized by Google

les autres constructions soient identiques aux précédentes (1). Soit, d'autre part, le cône droit P, ayant comme base l'aire de la figure inscrite dans la sphère, et de hauteur égale à la droite menée perpendiculairement du centre de la sphère sur un côté quelconque du polygone. On doit démontrer que le cône P équivaut à la figure inscrite dans la sphère.





En effet, sur les cercles de diamètres ZN, HM, ΘΛ, IK, élevons des cônes ayant leur sommet au centre de la sphère. Dès lors, on aura un rhombe solide formé du cône dont la base est le cercle de diamètre ZN, dont le sommet est le point A, ainsi que du cône dont la base est le même cercle et le sommet le point X, rhombe qui équivaut au cône ayant comme base l'aire du cône NAZ et de hauteur égale à la droite menée perpendiculairement du point X (2). De son côté, le fragment de rhombe restant (3), délimité par la surface du cône située entre les plans parallèles menés par les droites ZN, HM, et entre les surfaces des cônes ZNX, HMX, équivaut au cône ayant comme base l'aire du cône située entre les plans parallèles menés par les droites ZN, HM, et de hauteur égale à la droite menée perpendiculairement du point X sur ZH ; car cela a été démontré (4). En outre, le fragment restant de cône (5), délimité par la surface de cône située entre les plans parallèles menés par les droites HM, BΔ, par la surface du cône MHX et par le cercle décrit autour du diamètre BΔ, équivaut au cône ayant une base équivalente à l'aire du cône située entre les plans menés par les droites HM, BΔ, et de hauteur égale à la droite

1. C.-à-d. les constructions de la proposition XXV.
2. Le texte sous-entend ici évidemment « πρὸς τὴν AZ » c.-à-d. « sur la droite AZ ». Voir d'ailleurs la proposition XVIII.
3. C'est-à-dire le fragment qui reste après avoir retranché le rhombe XNAZ du rhombe composé du cône MXH et du cône dont la base est le cercle de diamètre MH et dont le sommet est le point de rencontre des droites MN, NZ prolongées.
4. Voir proposition XX.
5. C.-à-d. du cône dont la base est le cercle de diamètre BΔ et dont le sommet est le point de rencontre des droites ΔM, BH prolongées.

Digitized by Google

menée perpendiculairement du point X sur BH (1). Pareillement, dans l'autre hémisphère, le rhombe XKΓI et les fragments de cônes (2) seront aussi respectivement équivalents aux cônes qui ont été indiqués plus haut. Dès lors, il est évident aussi que la figure entière, inscrite dans la sphère, sera équivalente à l'ensemble des dits cônes. Or, l'ensemble de ces cônes vaut le cône P, parce que le cône P a une hauteur égale à celle de chacun des cônes que nous avons indiqués et une base équivalente à l'ensemble de leurs bases (3) ; par conséquent, il est évident que la figure inscrite dans la sphère est équivalente au cône proposé (4).

PROPOSITION XXVII.

La figure délimitée par des surfaces coniques, inscrite dans la sphère, est plus petite que le quadruple du cône ayant la base égale au plus grand cercle de la sphère et la hauteur égale au rayon de la sphère.

En effet, construisons un cône équivalent à la figure inscrite dans la sphère, ayant la base équivalente à l'aire de la figure inscrite et la hauteur égale à la droite menée perpendiculairement du centre du cercle sur un côté quelconque du polygone inscrit (5). Soit, d'autre

1. Voir proposition XIX.

2. Il s'agit d'un fragment de rhombe et d'un fragment de cône tous deux symétriquement situés par rapport à ceux qui ont été considérés dans le premier hémisphère.

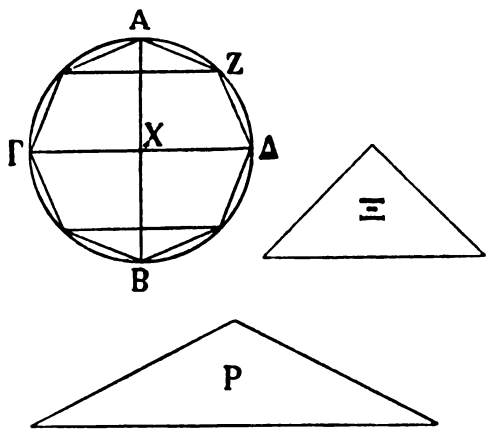
3. Voir lemme I (les cônes de même hauteur sont entre eux comme les bases).

4. Plus explicitement : Le volume de la figure inscrite dans un hémisphère se compose : 1° du rhombe XNAZ = cône fictif de base équivalente à l'aire latérale du cône NAZ et de hauteur égale à l'apothème du polygone régulier inscrit (voir proposition XVIII) ; 2° du fragment de rhombe MNXZH = cône fictif de base équivalente à l'aire latérale du tronc de cône MNZH et de hauteur égale à l'apothème (voir prop. XX) ; 3° du fragment de cône AMXHB = cône fictif de base équivalente à l'aire latérale du tronc de cône ΔMHB et de hauteur égale à l'apothème (voir proposition XIX). Or, par raison de symétrie, le volume de la figure inscrite dans l'autre hémisphère vaut les trois mêmes cônes fictifs. Donc : volume figure inscrite dans la sphère = volume de 6 cônes fictifs. D'autre part, on a : somme des bases des 6 cônes fictifs = aire figure inscrite. Or, par hypothèse, on a : base cône P = aire figure inscrite, d'où : somme des bases des 6 cônes fictifs = base cône P. Or, les cônes fictifs et le cône P ont tous même hauteur égale à l'apothème ; donc (lemme 1), on aura : Somme des 6 cônes fictifs = cône P. Or, on vient de voir que fig. inscrite dans la sphère = somme des 6 cônes fictifs, d'où, comme le texte : figure inscrite dans la sphère = cône P.

5. Voir proposition XXVI.

Digitized by Google

part, un cône Ξ ayant une base équivalente au cercle ABΓΔ (1) et la hauteur égale au rayon du cercle ABΓΔ. Dès lors, puisque le cône P a une base équivalente à l'aire de la figure inscrite dans la sphère et une hauteur égale à la droite menée perpendiculairement du point EX sur AZ, et puisqu'il a été démontré que l'aire de la figure inscrite est plus petite que le quadruple du plus grand cercle de la sphère (2), la base du cône P sera plus petite que le quadruple de la base du cône Ξ. Or, la hauteur du cône P est aussi plus petite que la hauteur du cône Ξ; par conséquent, puisque le cône P a une base plus petite que le quadruple de la base du cône Ξ et une hauteur plus petite que la hauteur de ce dernier cône, il est évident que le cône P, lui-même, sera aussi plus petit que le quadruple du cône Ξ. Or, le cône P équivaut à la figure inscrite (3) ; donc la figure inscrite est plus petite que le quadruple du cône Ξ.



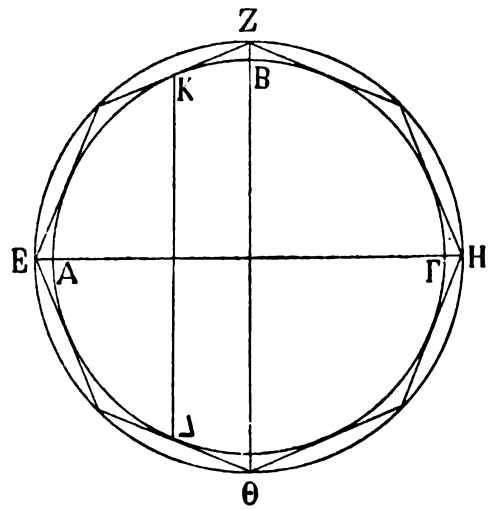
PROPOSITION XXVIII.

Soit ABΓΔ le plus grand cercle d'une sphère ; circonscrivons au cercle ABΓΔ un polygone équilatéral et équiangle, et que le nombre de ses côtés soit divisible par quatre. Qu'un cercle circonscrit, ayant même centre que celui autour duquel est décrit le cercle ABΓΔ, enveloppe le polygone circonscrit au cercle. Tandis que la droite EH reste fixe, faisons tourner le plan EZHΘ dans lequel se trouvent le polygone et le cercle ; il est donc évident que la circonférence du cercle ABΓΔ circulera suivant la surface de la sphère, alors que la circonférence du cercle EZHΘ circulera suivant une autre surface de sphère ayant le même centre que la plus petite sphère. D'autre part, les points de

1. Le texte sous-entend, ou a perdu le mot μεγίστῳ, c'est-à-dire : « au plus grand (cercle) ».
2. Voir proposition XXV.
3. Par hypothèse.

Digitized by Google

contact où les côtés sont tangents décriront, sur la plus petite sphère, des cercles perpendiculaires au cercle ΑΒΓΔ, tandis que les angles du polygone, à l'exception de ceux qui sont situés aux points E, H, circuleront à la surface de la plus grande sphère, suivant des circonférences de cercles décrits perpendiculairement au cercle EZPΘ. Enfin, les côtés du polygone circuleront suivant des surfaces coniques comme dans les propositions qui précèdent (1). On aura donc une figure délimitée par des surfaces coniques, circonscrite d'une part à la plus petite sphère et inscrite d'autre part dans la plus grande. Nous allons démontrer, comme suit, que l'aire de la figure circonscrite est plus grande que l'aire de la sphère.



En effet, soit ΚΔ le diamètre de l'un des cercles décrits dans la plus petite sphère par les côtés du polygone circonscrit, tangents au cercle ΑΒΓΔ aux points Κ, Δ. La sphère étant dès lors divisée suivant la droite ΚΔ par le plan perpendiculaire au cercle ΑΒΓΔ, la surface de la figure circonscrite à la sphère sera aussi divisée par ce plan. Et il est clair que les limites sont les mêmes dans ce plan (2) ; car la limite de l'une et de l'autre de ces surfaces (3) est la circonférence de cercle décrite autour du diamètre ΚΔ perpendiculairement au cercle ΑΒΓΔ ; l'une et l'autre sont concaves dans la même direction, et l'une d'elles est enveloppée par l'autre surface et par le plan qui ont mêmes limites. Par conséquent, l'aire enveloppée du segment de sphère est plus petite que l'aire de la figure qui lui est circonscrite (4). Ainsi de même, l'aire du segment restant de la sphère sera plus petite que l'aire de la figure qui lui est circonscrite. Il est donc évident que l'aire en-

1. Voir propositions XXIII et XXVII.
2. C.-à-d. que la surface de la sphère et la surface de la figure qui lui est circonscrite ont mêmes limites dans ce plan.
3. Le texte porte le mot ἐπιπέδων, plans, au lieu du mot ἐπιφανειῶν, surfaces, par erreur évidente de copiste.
4. Voir postulat 4.

Digitized by Google

tière de la sphère est plus petite que l'aire de la figure qui lui est circonscrite.

PROPOSITION XXIX.

L'aire d'une figure circonscrite à la sphère est équivalente au cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle délimité par un côté du polygone (1) et par une droite égale à l'ensemble des droites qui, reliant les angles du polygone, sont parallèles à l'une quelconque des droites qui sous-tendent deux côtés du polygone.

En effet, la figure circonscrite à une sphère plus petite est inscrite dans une sphère plus grande (2). Or, il a été démontré que l'aire d'une figure délimitée par des surfaces coniques, inscrite dans une sphère, est équivalente au cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle limité par un côté du polygone et par une droite égale à l'ensemble des droites qui, reliant les angles du polygone, sont parallèles à l'une quelconque des droites qui sous-tendent deux côtés du polygone (3). Dès lors, ce que nous avons dit plus haut est évident.

PROPOSITION XXX.

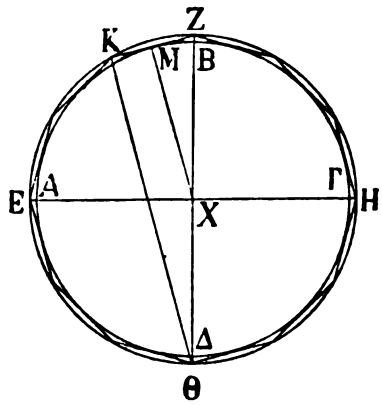
L'aire d'une figure circonscrite à la sphère est plus grande que le quadruple du plus grand cercle de la sphère.

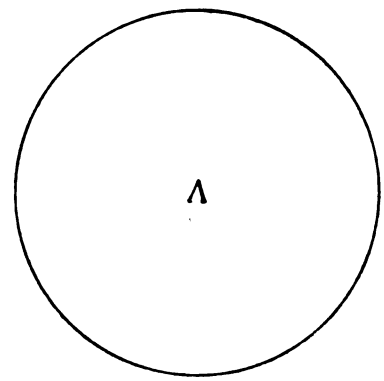
En effet, soient une sphère, un cercle et les autres données identiques aux précédentes. Soit un cercle Λ équivalent à l'aire de la figure donnée, circonscrite à la sphère plus petite. Dès lors, puisqu'un polygone équilatéral, dont les angles sont en nombre pair, est inscrit dans le cercle EZHΘ, la somme des droites qui, reliant les angles du polygone, sont parallèles à ZΘ, est à ZΘ dans le rapport de ΘK à KZ (4). Par conséquent, le rectangle délimité par un côté du polygone et par une droite égale à la somme des droites reliant les angles du polygone vaut le rectangle délimité par les droites ZΘ, ΘK; de manière que le carré du

1. C.-à-d. du polygone régulier inscrit dans un grand cercle générateur de la figure circonscrite à la sphère.
2. Voir proposition XXVIII.
3. Voir proposition XXIV.
4. Voir proposition XXI.

Digitized by Google

rayon du cercle Λ vaut le rectangle délimité par ZΘ, ΘK (1). En conséquence, le rayon du cercle Λ est plus grand que ΘK (2). Or, la





droite ΘK est égale au diamètre du cercle ABΓΔ (3) ; car elle est double de la droite XM qui est le rayon du cercle ABΓΔ (4) ; il est donc évident que le cercle Λ, c'est-à-dire l'aire de la figure circonscrite à la sphère plus petite, est plus grand que le quadruple du plus grand cercle de la sphère (5).

---

1. Voir proposition XXIX.
2. Parce que l'on a : diamètre ZΘ > corde ΘK.
3. Les droites ΘK, XM étant toutes deux perpendiculaires sur KZ, les triangles ΘKB, XMB sont semblables, d'où : $\frac{\Theta K}{XM} = \frac{\Theta Z}{XZ} = \frac{2XZ}{XZ} = 2$, d'où ΘK = 2XM = diamètre du cercle ABΓΔ.
4. Cette dernière phrase, dont le texte porte d'ailleurs, par erreur, XΣ au lieu de XM, n'est peut-être qu'un petit commentaire interpolé.
5. Reprenons la démonstration en notations explicites :

Considérant le cercle circonscrit au polygone, on a, en vertu de la proposition XXI : $\frac{\sum \text{droites reliant les angles}}{Z\Theta} = \frac{\Theta K}{KZ}$ d'où, comme le texte : KZ [$\sum$ droites reliant les angles] = ZΘ × ΘK. Or, par hypothèse : cercle Λ = aire figure circonscrite. Dès lors, en vertu de la proposition XXIX, on a : carré rayon du cercle Λ = [$\sum$ droites reliant angles]KZ, d'où : carré rayon cercle Λ = ZΘ × ΘK. Or, ZΘ > ΘK, d'où : ZΘ × ΘK > $\overline{\Theta K}^2$, d'où : carré rayon cercle Λ > $\overline{\Theta K}^2$, ou : rayon cercle Λ > ΘK. Or, ΘK = 2XM = diam. cercle ABΓΔ, d'où : rayon cercle Λ > diam. cercle ABΓΔ, et diam. cercle Λ > 2 diam. cercle ABΓΔ. Or, ces cercles étant entre eux comme les carrés des diamètres, il vient, comme le texte : cercle Λ, ou aire figure circonscrite > 4 cercles ABΓΔ. C. q. f. d.

Digitized by Google

PROPOSITION XXXI.

A la figure circonscrite à la sphère plus petite équivaut un cône ayant comme base un cercle équivalent à l'aire de la figure et dont la hauteur est égale au rayon de la sphère (1).

En effet, la figure circonscrite à la sphère plus petite est inscrite dans la sphère plus grande. Or, il a été démontré que la figure inscrite, délimitée par des surfaces coniques, est équivalente au cône ayant comme base le cercle équivalent à l'aire de la figure, et dont la hauteur est égale à la droite menée du centre de la sphère perpendiculairement sur le côté du polygone (2). Or, cette perpendiculaire est égale au rayon de la sphère plus petite ; par conséquent, la proposition est évidente.

COROLLAIRE.

Il est clair, d'après cela, que la figure circonscrite à la sphère est plus grande que le quadruple du cône ayant comme base le plus grand cercle de la sphère et comme hauteur le rayon de la sphère. Car, puisque le cône ayant une base équivalente à la surface de la figure et une hauteur égale (3) au rayon de la sphère plus petite équivaut à la figure (4), tandis que l'aire de la figure circonscrite à la sphère est plus grande que le quadruple du plus grand cercle de la sphère (5), il en résulte que la figure circonscrite à la sphère sera plus grande que le quadruple du cône ayant comme base le plus grand cercle et comme hauteur le rayon de la sphère, parce que le cône équivalent à cette figure est aussi plus grand que le cône que nous venons de dire(6).

1. Nous avons préféré conserver l'inversion du texte grec dans la traduction de cet énoncé qui se rattache ainsi autant par la forme que par le fond à la proposition XXVI, tandis que l'expression de « sphère plus petite » ramène aussitôt aux considérations de la proposition XXVIII et aux constructions de la proposition XXX.

2. Voir proposition XXVI.

3. Le texte présente ici la phrase suivante que Heiberg considère comme une interpolation (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 115) : « ... à la droite menée du centre de la sphère perpendiculairement sur un côté du polygone, ce qui est... »

4. Voir proposition XXXI.

5. Voir proposition XXX.

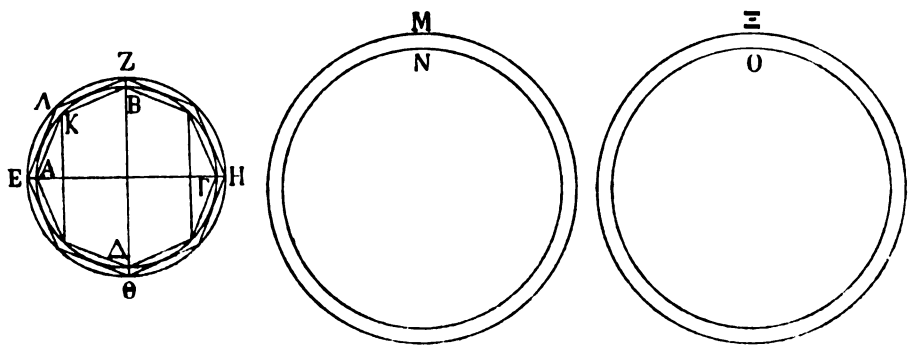
6. Voir lemme 1. Un petit commentaire interpolé ajoute ici : « car il a une base plus grande que le quadruple et une hauteur égale ». D'ailleurs, on peut douter

Digitized by Google

PROPOSITION XXXII.

Si une figure est inscrite dans une sphère, et si une autre lui est circonscrite par des polygones semblables, de la même manière qu'on l'a fait précédemment (1), le rapport de l'aire de la figure circonscrite à l'aire de la figure inscrite est égal au carré du rapport du côté du polygone circonscrit au plus grand cercle au côté du polygone inscrit dans ce même cercle, tandis que le rapport de figure à figure (2) est égal au cube de ce même rapport.

Soit ABΓΔ le cercle (3) d'une sphère, et inscrivons-y un polygone équilatéral dont le nombre de côtés soit divisible par quatre. Circonscrivons à ce cercle un autre polygone semblable à celui qui est inscrit, et que, de plus, les côtés du polygone circonscrit soient tangents au cercle au milieu des arcs découpés par les côtés du polygone inscrit. Soient EH, ZΘ des diamètres perpendiculaires du cercle enveloppé par le polygone circonscrit, placés de la même manière que les diamètres AΓ, BΔ, et imaginons que soient menées les droites qui, reliant



les angles opposés, seront parallèles entre elles ainsi qu'à la droite ZBΔΘ. Dès lors, si le diamètre EH reste fixe, et si l'on fait tourner les périmètres des polygones avec (4) la circonférence du cercle, on aura, d'une part, une figure inscrite dans une sphère, et, d'autre

de l'authenticité du texte de toute la démonstration de ce corollaire qui n'en demandait pas, démonstration qui serait due à un commentateur grec.

1. Figures solides à surfaces coniques engendrées, comme dans les propositions précédentes, par la révolution de polygones réguliers, inscrit et circonscrit, d'un nombre de côtés 4 n.

2. Le mot « figure » est employé ici avec la notion de volume.

3. Le texte sous-entend ou a perdu le mot μέγιστος, le plus grand.

4. Le texte porte ici περι c'est-à-dire « autour », probablement par erreur de copiste, au lieu du mot μετὰ c'est-à-dire « avec (la circonférence) ».

Digitized by Google

part, une figure circonscrite. On doit donc démontrer que le rapport de l'aire de la figure circonscrite à l'aire de celle qui est inscrite est égal au carré du rapport de EΛ à AK, tandis que le rapport de la figure circonscrite à celle qui est inscrite est égal au cube de ce même rapport.

En effet, soit, d'une part, un cercle M équivalent à l'aire de la figure circonscrite à la sphère, d'autre part, un cercle N équivalent à l'aire de la figure inscrite. Dès lors, le carré du rayon du cercle M équivaut au rectangle délimité par la droite EΛ et par une droite égale à la somme des droites reliant les angles du polygone circonscrit (1), tandis que le carré du rayon du cercle N équivaut au rectangle délimité par la droite AK et par une droite égale à la somme des droites reliant les angles (2). Et puisque les polygones sont semblables, les aires rectangulaires, délimitées par les lignes que nous venons de dire, seront semblables aussi (3). Il est donc évident que le rapport de l'aire de la figure circonscrite à la sphère à l'aire de la figure inscrite dans la sphère est égal au carré du rapport de la droite EΛ à la droite AK (4).

1. Voir proposition XXIX.

2. Le texte sous-entend ici, ou bien a perdu les mots τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου, c'est-à-dire : du polygone inscrit. Voir proposition XXIV.

3. Les droites reliant les angles dans les deux polygones semblables sont homologues, d'où le rapport de deux quelconques de ces droites homologues, et, par suite, le rapport des sommes de ces droites est égal au rapport de similitude de ces deux polygones. Donc, les rectangles, délimités respectivement par la somme des droites homologues et par un côté du polygone correspondant, seront semblables.

Le texte offre à cet endroit la longue interpolation suivante : « c'est-à-dire celles qui sont délimitées par les droites menées sur les angles et par les côtés des polygones ; de telle sorte qu'elles sont entre elles dans le rapport des carrés des côtés des polygones. Or, les rectangles, formés sous les lignes que nous avons dites, sont aussi entre eux dans le rapport des carrés des rayons des cercles M, N. De telle sorte que les diamètres des cercles M, N ont aussi même rapport que les côtés des polygones. Or, les cercles sont entre eux dans le rapport des carrés des diamètres et ces cercles valent les aires des figures circonscrite et inscrite. »

4. Par hypothèse : cercle M = aire fig. circonscrite et cercle N = aire fig. inscrite. Or, la proposition XXIX donne : carré rayon cercle M = EΛ[∑ droites reliant angles du polyg. circonscrit], et la proposition XXIV donne : carré rayon cercle N = AK[∑ droites reliant angles du polyg. inscrit]. Or, les seconds membres de ces égalités sont des rectangles semblables dont les aires sont entre elles comme les carrés des côtés homologues : $\frac{E\Lambda[\sum \text{ droites polyg. circonscrit}]}{AK[\sum \text{ droites polyg. inscrit}]} = \frac{\overline{E\Lambda}^2}{\overline{AK}^2}$ d'où : $\frac{\text{carré rayon cercle M}}{\text{carré rayon cercle N}} = \frac{\overline{E\Lambda}^2}{\overline{AK}^2}$. Or, $\frac{\text{cercle M}}{\text{cercle N}} = \frac{\text{carré rayon cercle M}}{\text{carré rayon cercle N}}$ d'où : $\frac{\text{cercle M}}{\text{cercle N}} = \frac{\overline{E\Lambda}^2}{\overline{AK}^2}$, d'où, remontant aux égalités d'hypothèse, on a, comme le texte :

$$\frac{\text{aire fig. circonscrite}}{\text{aire fig. inscrite}} = \frac{\overline{E\Lambda}^2}{\overline{AK}^2}.$$

Digitized by Google

Prenons maintenant deux cônes O, Ξ. Que le cône Ξ ait comme base le cercle Ξ, égal au cercle M, le cône O comme base le cercle O, égal au cercle N, tandis que le cône Ξ ait comme hauteur le rayon de la sphère, et le cône O la perpendiculaire amenée du centre sur AK. Dès lors, le cône Ξ équivaut à la figure circonscrite à la sphère (1), tandis que le cône O équivaut à celle qui est inscrite (2). Et puisque les polygones sont semblables, le rapport de EΛ à AK est le même que celui du rayon de la sphère à la perpendiculaire amenée du centre de la sphère sur AK. Par conséquent, le rapport de la hauteur du cône Ξ à la hauteur du cône O est le même que celui de EΛ à AK (3). Or, le rapport du diamètre du cercle M au diamètre du cercle N est aussi égal au rapport de EΛ à AK ; par conséquent, les diamètres des bases des cônes Ξ, O ont même rapport que les hauteurs, et il en résulte que le rapport du cône Ξ au cône O est égal au cube du rapport du diamètre du cercle M au diamètre du cercle N(4). Il est donc évident que le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite sera aussi égal au cube du rapport de la droite EΛ à la droite AK (5).

1. Voir proposition XXXI.

2. Voir proposition XXVI. Une petite interpolation ajoute ici : « ces choses ont donc été démontrées ».

3. Les polygones étant semblables, leur rapport de similitude est le même que celui de leurs rayons ou de leurs apothèmes : $\frac{E\Lambda}{AK} = \frac{\text{rayon sphère}}{\text{apothème polyg. inscrit}}$. Or, par hypothèse: rayon sphère = hauteur cône Ξ, et apothème polygone inscrit = hauteur cône O, d'où, comme le texte : $\frac{E\Lambda}{AK} = \frac{\text{hauteur cône } \Xi}{\text{hauteur cône O}}$.

4. On a vu que $\frac{\text{carré rayon cercle M}}{\text{carré rayon cercle N}} = \frac{\overline{E\Lambda}^2}{\overline{AK}^2}$ d'où : $\frac{\text{rayon cercle M}}{\text{rayon cercle N}} = \frac{E\Lambda}{AK}$, ou $\frac{\text{diam. cercle M}}{\text{diam. cercle N}} = \frac{E\Lambda}{AK}$. Or, on a posé cercle Ξ = cercle M et cercle O = cercle N, d'où: $\frac{\text{diam. cercle } \Xi = \text{diam. base cône } \Xi}{\text{diam. cercle O} = \text{diam. base cône O}} = \frac{E\Lambda}{AK}$. Or, on a vu que $\frac{E\Lambda}{AK} = \frac{\text{hauteur cône } \Xi}{\text{hauteur cône O}}$, d'où: $\frac{\text{diam. base cône } \Xi}{\text{diam. base cône O}} = \frac{\text{hauteur cône } \Xi}{\text{hauteur cône O}}$, d'où, en vertu du lemme 5, on aura : $\frac{\text{cône } \Xi}{\text{cône O}} = \frac{\text{cube diam. base cône } \Xi}{\text{cube diam. base cône O}} = \frac{\text{cube diam. cercle M}}{\text{cube diam. cercle N}}$.

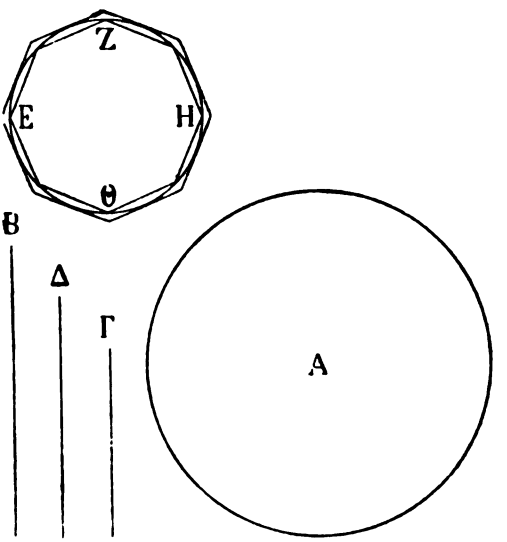
5. On a eu: $\frac{\text{diam. cercle M}}{\text{diam. cercle N}} = \frac{E\Lambda}{AK}$, d'où: $\frac{\text{cube diam. cercle M}}{\text{cube diam. cercle N}} = \frac{\overline{E\Lambda}^3}{\overline{AK}^3}$, d'où, comparant avec la relation obtenue dans la note précédente : $\frac{\text{cône } \Xi}{\text{cône O}} = \frac{\overline{E\Lambda}^3}{\overline{AK}^3}$. Or, en vertu de la proposition XXXI, on a : cône Ξ = vol. fig. circonscrite et, en vertu de la proposition XXVI, on a : cône O = vol. fig. inscrite, d'où, comme le texte : $\frac{\text{vol. fig. circonscrite}}{\text{vol. fig. inscrite}} = \frac{\overline{E\Lambda}^3}{\overline{AK}^3}$. C. q. f. d.

Digitized by Google

PROPOSITION XXXIII.

L'aire de toute sphère est quadruple du plus grand de ses cercles.

En effet, soit une sphère, et soit A un cercle quadruple du plus grand cercle. Je dis que le cercle A équivaut à l'aire de la sphère. Car, sinon, il est plus grand ou plus petit que cette aire. Que l'aire de la sphère soit d'abord plus grande que le cercle. Dès lors,on a deux grandeurs inégales, l'aire de la sphère et le cercle A. Il est donc possible de prendre deux droites inégales, de manière que le rapport de la plus grande à la plus petite soit moindre que le rapport de l'aire de la sphère au cercle (1). Prenons les droites B, Γ, et soit Δ la moyenne proportionnelle entre B et Γ. Imaginons encore que la sphère soit coupée par un plan passant par son centre, suivant le cercle EZHΘ, tandis que nous imaginons aussi un polygone inscrit et un polygone circonscrit à ce cercle, de manière que le polygone circonscrit soit semblable au polygone inscrit, et que le rapport du côté du polygone circonscrit (2) soit moindre que le rapport de B à Δ (3). Le carré du premier rapport sera donc aussi moindre que le carré du second, et le carré du rapport de B à Δ est le rapport de B à Γ, tandis que le rapport de l'aire du solide circonscrit à l'aire du solide inscrit est le carré du rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit (4). Par conséquent, le rapport



1. Voir proposition II.

2. Le texte est incomplet, mais il est évident qu'un copiste aura négligé les mots πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, c.-à-d. au (côté) du (polygone) inscrit.

3. Voir proposition III.

4. Il y a lieu de douter de l'authenticité du texte de toute la phrase à partir de celle qui fait l'objet de la note précédente. Ce n'est peut-être qu'un commentaire interpolé; car, outre sa forme grammaticale négligée, il emploie le mot στερεὸς, solide, au lieu du mot σχήματος, figure, qui est employé par Archimède dans tout le cours de cette démonstration.

Digitized by Google

de l'aire de la figure circonscrite à la sphère à l'aire de la figure inscrite est moindre que le rapport de l'aire de la sphère au cercle A ; ce qui est impossible. En effet, l'aire de la figure circonscrite est plus grande que l'aire de la sphère, tandis que l'aire de la figure inscrite est plus petite que le cercle A ; car il a été démontré que l'aire du polygone inscrit est plus petite que le quadruple du plus grand cercle de la sphère, et le cercle A est le quadruple de ce plus grand cercle. Par conséquent, l'aire de la sphère n'est pas plus grande que le cercle A (1).

Je dis, d'autre part, qu'elle n'est pas plus petite. En effet, qu'elle soit plus petite, s'il se peut. Trouvons pareillement des droites B, Γ, telles que le rapport B à Γ soit moindre que le rapport du cercle A à l'aire de la sphère (2), et une droite Δ qui soit la moyenne proportionnelle entre B et Γ. Inscrivons et circonscrivons de nouveau des polygones, de manière que le rapport du côté du polygone circonscrit (3) soit moindre que le rapport de B à Δ (4). Par conséquent, le rapport de l'aire de la figure circonscrite à l'aire de celle qui est inscrite est moindre que le rapport (5) du cercle A à l'aire de la sphère ; ce qui est absurde. En effet, l'aire de la figure circonscrite est plus grande que le cercle A, tandis que l'aire de la figure inscrite est plus petite

---

1. La 1re partie de la démonstration se déroule comme suit : La relation $\frac{\text{côté polyg. circonscrit}}{\text{côté polyg. inscrit}} < \frac{B}{\Delta}$ est possible en vertu de la proposition III, d'où : $\frac{(\text{côté polyg. circons.})^2}{(\text{côté polyg. inscr.})^2} < \frac{B^2}{\Delta^2}$. Or, on a posé : $\Delta^2 = B \times \Gamma$, d'où : $\frac{B^2}{\Delta^2} = \frac{B}{\Gamma}$, et la proposition XXXII donne : $\frac{\text{aire polyg. circonscr.}}{\text{aire polyg. inscr.}} = \frac{(\text{côté polyg. circonscr.})^2}{(\text{côté polyg. inscrit})^2}$, d'où, par substitution : $\frac{\text{aire polyg. circonscr.}}{\text{aire polyg. inscr.}} < \frac{B}{\Gamma}$. Or, par hypothèse : $\frac{B}{\Gamma} < \frac{\text{aire sphère}}{\text{cercle A}}$, d'où : $\frac{\text{aire polyg. circonscr.}}{\text{aire polyg. inscr.}} < \frac{\text{aire sphère}}{\text{cercle A}}$, relation impossible, vu que (prop. XXVIII), aire polyg. circonscr. > aire sphère, que (proposition XXV) : aire polyg. inscrit < 4 grands cercles et que, par hypothèse, cercle A = 4 grands cercles.

2. Voir proposition II.

3. De même que plus haut, les mots : « au côté du polygone inscrit » manquent ici dans le texte grec.

4. Voir proposition III. Une interpolation ajoute ici : καὶ τὰ διπλάσια ἄρα, c.-à-d. « donc les carrés aussi », ce qui veut dire que le carré du premier rapport est aussi moindre que le carré du second rapport.

5. A la différence des éditions anciennes, le texte critique d'Heiberg présente cette petite interpolation relevée dans le palimpseste de Jérusalem : « ...de B à Γ, tandis que le rapport de B à Γ est moindre que celui de... ». Elle est due à un commentateur qui a voulu attirer l'attention sur une relation intermédiaire. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 125).

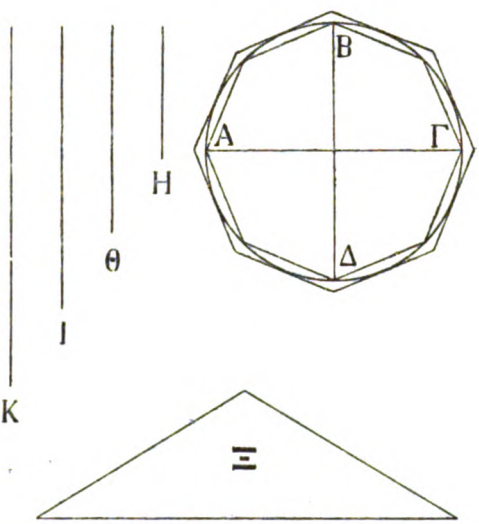
Digitized by Google

que l'aire de la sphère (1). En conséquence, l'aire de la sphère n'est pas plus petite que le cercle A. Or, on a démontré qu'elle n'est pas plus grande ; donc l'aire de la sphère équivaut au cercle A, c'est-à-dire au quadruple du plus grand cercle.

PROPOSITION XXXIV.

Toute sphère est quadruple du cône ayant le plus grand cercle de la sphère comme base et le rayon de la sphère comme hauteur.

En effet, soit une sphère et, dans celle-ci, le plus grand cercle ABΓΔ. Si cette sphère n'est pas le quadruple du cône que nous avons dit, qu'elle soit plus grande que le quadruple, s'il se peut. Soit un cône Ξ ayant la base quadruple du cercle ABΓΔ et la hauteur égale au rayon de la sphère ; la sphère est donc plus grande que le cône Ξ (2). Dès lors, on aura deux grandeurs inégales, une sphère et un cône ; il est donc possible de prendre deux droites inégales de manière que le rapport de la plus grande à la plus petite soit moindre que celui de la sphère au cône (3). Soient donc les droites K, H, et prenons des droites I, Θ, de manière que K dépasse I, que I dépasse Θ et que Θ dépasse H d'une même grandeur (4). De plus, imaginons un polygone inscrit dans le cercle ABΓΔ,



1. Plus explicitement, on arrive, comme dans la note relative à la première partie de la démonstration, à la relation: $\frac{\text{aire polygone circonscrit}}{\text{aire polygone inscrit}} < \frac{\text{cercle A}}{\text{aire sphère}}$, dont l'impossibilité résulte de ce que (proposition XXIII) : aire polygone inscrit < aire sphère, et (proposition XXX) : aire polygone circonscrit > 4 grands cercles. Or, cercle A = 4 grands cercles, d'où : aire polygone circonscrit > cercle A.

2. Le cône Ξ de base équivalente à 4 grands cercles ABΓΔ et de hauteur égale à celle du cône de base cercle ABΓΔ vaudra 4 cônes de base ABΓΔ. Or, par hypothèse première : sphère > 4 cônes de base ABΓΔ, d'où : sphère > cnôe Ξ.

3. Voir proposition II.

4. Les droites I, Θ, moyennes arithmétiques entre les droites K. H s'obtiendront

Digitized by Google

dont le nombre de côtés soit divisible par quatre, et un autre polygone circonscrit, semblable à celui qui est inscrit, comme dans les propositions précédentes. Que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que celui de K à I (1), et soient AΓ, BΔ des diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre. Dès lors, si le diamètre AΓ restant fixe, l'on fait tourner le plan dans lequel se trouvent les polygones, on aura, d'une part, une figure inscrite dans la sphère, d'autre part, une figure circonscrite, et le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite sera égal au cube du rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit dans le cercle ABΓΔ (2). Or, le rapport de côté à côté est moindre que celui de K à I (3) ; de manière que le rapport de la figure circonscrite (4) est moindre que le cube du rapport de K à I. Or, le rapport de K à H est aussi plus grand que le cube du rapport de K à I (5), [car cela

---

en divisant en trois parties égales la différence entre les droites K et H. Dès lors on aura : $I = H + \frac{2}{3}(K - H) = \frac{1}{3}(H + 2K)$, et $\Theta = H + \frac{1}{3}(K - H) = \frac{1}{3}(K + 2H)$.

1. Voir proposition III.
2. Voir proposition XXXII.
3. Par hypothèse permise en vertu de la proposition III.
4. Le texte omet de nouveau les mots nécessaires : « à la figure inscrite ».
5. La relation intermédiaire $\frac{K}{H} > \frac{K^3}{I^3}$, invoquée par Archimède, est longuement démontrée par Eutocius dans son commentaire sur cette proposition XXXIV. Cette démonstration peut se résumer comme suit en notations usuelles : Soient K, I, Θ, H des droites en progression arithmétique ; soit, en outre, une droite M telle que $\frac{K}{I} = \frac{I}{M}$, d'où : $\frac{K - I}{K} = \frac{I - M}{I}$. Or, $K > I$, d'où : $K - I > I - M$. Mais, par hypothèse : $K - I = I - \Theta$, d'où : $I - \Theta > I - M$, ou $M > \Theta$. D'autre part, soit une droite N, telle que $\frac{I}{M} = \frac{M}{N}$ d'où : $\frac{I - M}{I} = \frac{M - N}{M}$. Or, $I > M$, d'où : $I - M > M - N$. Mais on vient de voir que $I - \Theta > I - M$, d'où, à fortiori : $I - \Theta > M - N$. Or, par hypothèse : $I - \Theta = \Theta - H$, d'où : $\Theta - H > M - N$. Or, on vient de voir que $M > \Theta$, donc $N > H$. Mais M, N ont été pris tels que K, I, M, N sont en proportion continue. Et dès lors, on a : $\frac{K^3}{I^3} = \frac{K}{N}$. Or, $N > H$, d'où : $\frac{K^3}{I^3} < \frac{K}{H}$. C. q. f. d.

En invoquant subsidiairement la relation $\frac{K^3}{I^3} = \frac{K}{N}$, Eutocius s'appuie sur la définition 10 du livre V d'Euclide, que nous traduisons littéralement comme suit : « Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, le rapport de la première à la troisième est dit le carré du rapport de la première à la seconde, et lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, le rapport de la première à la quatrième est dit le cube du rapport de la première à la seconde, et ainsi de suite, dans l'ordre d'une unité de plus, tant que se poursuit la proportion ». Algébriquement on a immédiatement : Si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, on a $\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2}$, mais $b^2 = a.c$, d'où $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{c}$. Et si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$,

Digitized by Google

est évident d'après les lemmes] (1) ; par conséquent, à fortiori, le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite est moindre que celui de K à H. Or, le rapport de K à H est moindre que celui de la sphère au cône Ξ (2), et, par permutation (3) ; ce qui est impossible, car la figure circonscrite est plus grande que la sphère (4), tandis que la figure inscrite est plus petite que le cône Ξ, parce que le cône Ξ est quadruple du cône ayant la base égale au cercle ABΓΔ et la hauteur égale au rayon de la sphère, et que, d'autre part, la figure inscrite est plus petite que le quadruple du cône que nous venons de dire (5). Dès lors, la sphère n'est pas plus grande que le quadruple du cône que nous avons dit.

Qu'elle soit maintenant plus petite que le quadruple, s'il se peut. La sphère est ainsi plus petite que le cône Ξ (6). Dès lors, prenons des droites K, H telles que K soit plus grande que H et que son rapport avec elle soit moindre que celui du cône Ξ à la sphère (7). En outre, posons les droites Θ, I, comme précédemment (8), et imaginons un polygone inscrit dans le cercle ABΓΔ ainsi qu'un autre circonscrit, en sorte que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du

---

on a $\frac{a^3}{b^3}=\frac{b^3}{c^3}$, mais $b^2=a.c$ et $c^2=b.d$, d'où $\frac{a^3}{b^3}=\frac{b.a.c}{c.b.d}=\frac{a}{d}$. On peut d'ailleurs démontrer directement la relation invoquée par le texte comme suit :

Si les droites K, I, H, Θ sont en progression arithmétique décroissante, on a $K=I+d=\Theta+2d=H+3d$, d'où $K=H+3d$ et $I=H+2d$. Or, on peut écrire : $\frac{K}{H}=\frac{K^3}{H.K^2}=\frac{K^3}{H.(H+3d)^2}$. Mais, $I^3=(H+2d)^3>H.(H+3d)^2$, d'où $\frac{K}{H}>\frac{K^3}{I^3}$. C. q. f. d.

1. La phrase placée entre crochets a probablement été interpolée.

2. Par hypothèse première, en vertu de la proposition II.

3. Les mots καὶ ἐναλλάξ, « par permutation » doivent être précédés et suivis de quelque phrase perdue par les copistes. Heiberg (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 129) a relevé dans le manuscrit de la version latine, du XIII^e^ siècle, de Guillaume de Moerbeke, une phrase qui précède les mots en question, et dont voici la traduction : « donc le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite est moindre que celui de la sphère au cône. » D'autre part, Heiberg (ibidem) a proposé de restituer le texte suivant à la suite des mots en question : « ...le rapport de la figure circonscrite à la sphère est moindre que celui de la figure inscrite au cône. »

La phrase reconstituée se présenterait donc ainsi en notations usuelles : On a eu : $\frac{\text{fig. circonscrite}}{\text{fig. inscrite}}<\frac{K}{H}$; or, $\frac{K}{H}<\frac{\text{sphère}}{\text{cône }\Xi}$, d'où $\frac{\text{fig. circonscrite}}{\text{fig. inscrite}}<\frac{\text{sphère}}{\text{cône }\Xi}$ et, par permutation : $\frac{\text{fig. circonscrite}}{\text{sphère}}<\frac{\text{fig. inscrite}}{\text{cône }\Xi}$, ce qui est impossible.

4. Voir prop. XXVIII.

5. Voir prop. XXVII.

6. Voir première partie de la démonstration, pag. 65, note 2.

7. Voir proposition II.

8. C.-à-d. que Θ, I soient moyennes proportionnelles entre K et H.

Digitized by Google

polygone inscrit soit moindre que le rapport de K à I (1) ; le reste étant établi de la même manière que précédemment. Dès lors, le rapport de la figure solide circonscrite à celle qui est inscrite sera encore le cube du rapport du côté de la figure circonscrite au cercle ABΓΔ au côté de la figure qui lui est inscrite (2). Or, ce rapport de côté à côté est moindre que celui de K à I ; par conséquent, le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite sera moindre que le cube du rapport de K à I. Or, le rapport de K à H est plus grand que le cube du rapport de K à I (3) ; en sorte que le rapport de la figure circonscrite à celle qui est inscrite est moindre que le rapport de K à H. Or, le rapport de K à H est moindre que celui du cône Ξ à la sphère (4) ; ce qui est impossible, car, d'une part, la figure inscrite est plus petite que la sphère (5) et, d'autre part, la figure circonscrite est plus grande que le cône Ξ (6) En conséquence, la sphère n'est pas davantage plus petite que le quadruple du cône ayant une base égale au cercle ABΓΔ et une hauteur égale au rayon de la sphère. Or, on a démontré qu'elle n'est pas plus grande ; elle est donc quadruple de ce cône.

COROLLAIRE.

Les choses qui précèdent étant démontrées, il est clair que tout cylindre, ayant comme base le grand cercle d'une sphère et la hauteur égale au diamètre de la sphère, vaut une fois et demie cette sphère, et que son aire, les bases comprises, vaut une fois et demie l'aire de cette sphère.

En effet, le cylindre que nous venons de définir est sextuple du cône ayant même base que lui et une hauteur égale au rayon (7), tandis qu'il a été démontré que la sphère est le quadruple de ce même

1. Voir proposition III.
2. Voir proposition XXXII.
3. Voir la note qui précède au sujet de cette relation.
4. Par hypothèse. De même que dans la première partie de la démonstration, il doit y avoir quelque lacune, et il faut s'en rapporter à la restauration du texte qui a été proposée dans une note précédente.
5. Voir proposition XXVIII
6. Voir proposition XXXI, corollaire.
7. Le cylindre vaut trois fois le cône de même base et de même hauteur (EUCLIDE, livre XII, prop. 10) ; donc le cylindre circonscrit à la sphère vaut 6 fois le cône de même base et d'une hauteur moindre de moitié, c'est-à-dire d'une hauteur égale au rayon.

Digitized by Google

cône (1). Dès lors, il est évident que le cylindre vaut une fois et demie la sphère. D'un autre côté, puisqu'il a été démontré que l'aire d'un cylindre, si l'on excepte les bases, est équivalente au cercle dont le rayon est la moyenne porportionnelle entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base (2), que le côté du cylindre que nous avons dit envelopper la sphère est égal au diamètre de sa base (3), et que le cercle ayant pour rayon le diamètre de la base vaut le quadruple de cette base, c'est-à-dire du plus grand cercle de la sphère (4), il en résulte que l'aire du cylindre, exception faite de ses bases, sera aussi le quadruple de ce plus grand cercle. En conséquence, l'aire totale du cylindre, les bases comprises, sera le sextuple du plus grand cercle. Or, l'aire de la sphère est aussi le quadruple du plus grand cercle (5), par conséquent l'aire totale du cylindre vaut une fois et demie l'aire de la sphère (6).

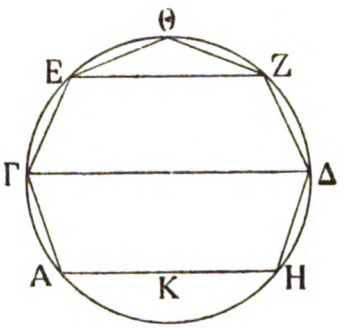
PROPOSITION XXXV.

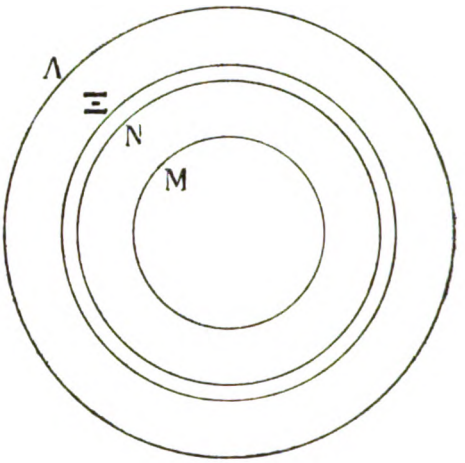
L'aire d'une figure inscrite dans un segment de la sphère équivaut au cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle délimité par un côté du polygone inscrit dans le segment du plus grand cercle et par une droite égale à l'ensemble des parallèles à la base augmenté de la moitié de la base du segment (7).

1. Voir proposition XXXIV.
2. Voir proposition XIII.
3. Le texte présente ici un petit commentaire interpolé : « il est évident que leur moyenne proportionnelle se trouve être égale au diamètre de la base ».
4. EUCLIDE, livre XII, prop. 2 : « Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres. »
5. Voir proposition XXXIII.
6. On verra plus loin, au traité *De la Méthode mécanique*, comment Archimède conçut d'abord l'équivalence des aires du cylindre et de la sphère inscrite par la considération mécanique du levier. C'est à la suite des belles propositions de géométrie pure, par lesquelles il établit cette équivalence d'une manière plus rigoureuse, qu'il exprima le désir d'avoir le symbole de la sphère inscrite au cylindre gravé sur son tombeau. C'est sans doute ce premier exemple d'une épitaphe géométrique qui inspira Jacques Bernouilli lorsque, à la suite de sa découverte des propriétés de la spirale logarithmique, qui est elle-même sa développée, sa caustique, son antidéveloppée et sa péricaustique, il voulut aussi que cette courbe ornât son tombeau avec la devise : « *Eadem mutata resurgo* », c'est-à-dire : « transformée, je reparais identique à moi-même. »
7. L'énoncé de cette proposition est muet sur la génération du solide inscrit dans le segment sphérique dont il est cependant question pour la première fois. L'énoncé de la proposition suivante étant plus explicite à ce sujet, il est possible que l'ordre de ces deux propositions ait été interverti dans les manuscrits, et que

Digitized by Google

Soit une sphère et, dans celle-ci, un segment dont la base est le cercle décrit autour de AH. Inscrivons dans ce segment, comme nous l'avons dit, une figure délimitée par des surfaces coniques. Soit le plus grand cercle AHΘ ainsi que le polygone AΓEΘZΔH, d'un nombre





pair de côtés (1), exception faite du côté AH. Prenons un cercle Λ dont le carré du rayon soit équivalent au rectangle délimité par le côté AΓ et par l'ensemble des droites EZ, ΓΔ augmenté de la moitié de la base, c'est-à-dire de AK. On doit démontrer que ce cercle équivaut à l'aire de la figure.

En effet, prenons un cercle M dont le carré du rayon soit équivalent au rectangle délimité par le côté EΘ et par la moitié de EZ. Il se fait donc que le cercle M équivaut à l'aire du cône, dont la base est le cercle décrit autour de EZ, et dont le sommet est le point Θ (2). Prenons encore un autre cercle N dont le carré du rayon soit équivalent au rectangle délimité par EΓ et par la moitié de l'ensemble de EZ, ΓΔ ; ce cercle sera équivalent à l'aire de cône située entre les plans parallèles menés suivant EZ, ΓΔ (3). Prenons de même un

---

cette première proposition, destinée ainsi à être la seconde du genre, pouvait éviter une redite. Il s'agit donc du segment sphérique distinct d'un hémisphère et du solide inscrit par la révolution, autour de l'axe du segment, d'un polygone inscrit dans un grand cercle, équilatéral et d'un nombre de côtés $2n$, exception faite du côté situé dans le plan de base du segment.

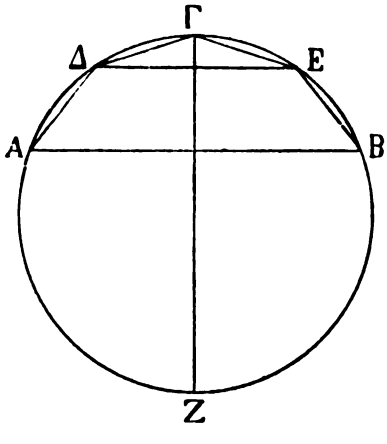
1. Heiberg a proposé de restituer à cet endroit du texte le mot ἰσόπλευρόν, équilatéral, qui aurait été perdu dans les copies (Cf. *loc. cit.*, vol. I, p. 133).
2. Voir proposition XIV.
3. Voir proposition XVI.

Digitized by Google

autre cercle Ξ, dont le carré du rayon soit équivalent au rectangle délimité par AΓ et par la moitié de l'ensemble de ΓΔ, AH ; ce cercle est donc équivalent à l'aire conique située entre les plans parallèles menés suivant AH, ΓΔ (1). Par conséquent, l'ensemble des cercles équivaut à l'aire totale de la figure, et l'ensemble des carrés des rayons de ces cercles sera équivalent au rectangle délimité par un côté AΓ et par une droite égale à l'ensemble de EZ, ΓΔ augmenté de AK, moitié de la base. Or, le carré du rayon du cercle Λ équivaut aussi à cette même aire (2) ; dès lors, le cercle Λ sera équivalent à l'ensemble des cercles M, N, Ξ ; de manière qu'il sera aussi équivalent à l'aire de la figure inscrite (3).

PROPOSITION XXXVI.

Coupons une sphère par un plan qui ne passe pas par son centre ; soit dans cette sphère le grand cercle AEZ coupant perpendiculairement le plan sécant, et inscrivons dans le segment AΓB un polygone équilatéral dont les côtés soient en nombre pair, exception faite de la base AB. Dès lors, de même que dans les propositions précédentes (4), si, la droite ΓZ restant fixe, on fait tourner la figure, les angles Δ, E, A, B circuleront suivant des cercles dont les diamètres seront ΔE, AB, tandis que les côtés de la section (5) circuleront suivant des surfaces coniques ; et l'on aura



1. Voir proposition XVI.
2. Par hypothèse.
3. On aura en notations usuelles :
Cercle $M = \pi \times E\Theta \times \frac{1}{2}EZ$ = aire cône EΘZ, (prop. XIV).
Cercle $N = \pi \times E\Gamma \times \frac{1}{2}(EZ + \Gamma\Delta$ = aire conique ΓEZΔ) (prop. XVI).
Cercle $\Xi = \pi \times A\Gamma \times \frac{1}{2}(\Gamma\Delta + AH)$ = aire conique AΓΔH, (prop. XVI).
Additionnons membre à membre, en observant que $E\Theta = E\Gamma = A\Gamma$, on aura :
Cercle M + cercle N + cercle $\Xi = \pi \times A\Gamma \times (EZ + \Gamma\Delta + \frac{1}{2}AH)$ = aire figure inscrite.
Or, par hypothèse : cercle $\Lambda = \pi \times A\Gamma \times (EZ + \Gamma\Delta + \frac{1}{2}AH)$,
d'où : cercle M + cercle N + cercle Ξ = cercle Λ = aire figure inscrite. C. q. f. d.
4. Voir proposition XXXIII.
5. Le texte porte τοῦ τμήματος, « de la section » au lieu des mots « du polygone ».

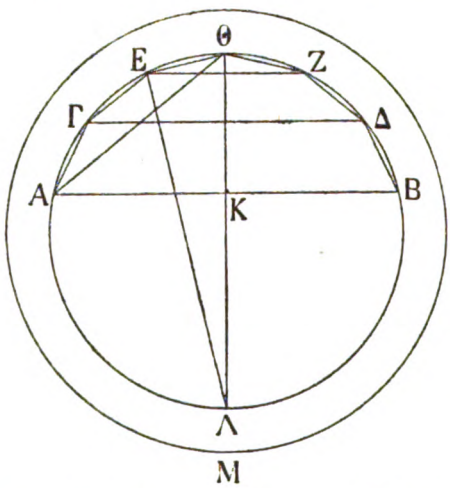
Digitized by Google

engendré une figure solide, délimitée par des surfaces coniques, ayant le cercle de diamètre AB comme base et le point Γ comme sommet. Dès lors, de même que dans les propositions précédentes, l'aire de cette figure sera plus petite que l'aire du segment qui l'enveloppe ; car la circonférence de cercle dont AB est le diamètre a la même limite dans un plan que le segment et que la figure, l'une et l'autre surfaces sont concaves dans la même direction, et l'une est enveloppée par l'autre (1).

PROPOSITION XXXVII.

L'aire d'une figure inscrite dans un segment de sphère est plus petite que le cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle de base du segment.

Soit une sphère et, dans celle-ci, le plus grand cercle ABEZ. Soit, dans la sphère, un segment dont la base est le cercle décrit autour de la droite AB comme diamètre (2), et que le reste soit construit de la même manière, la droite ΘΛ étant un diamètre de la sphère. Menons les droites de jonction, et soit un cercle M de rayon égal à la droite AΘ. On doit démontrer que le cercle M est plus grand que l'aire de la figure.



En effet, il a été démontré que l'aire de la figure est équivalente au cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle délimité par EΘ et par l'ensemble des droites EZ, ΓΔ, KA (3), et il a été démontré que le rectangle délimité par EΘ et par l'ensemble de EZ, ΓΔ, KA équivaut au rectangle délimité par EΛ, KΘ (4). Or, le rectangle délimité

1. Postulat 4.

2. Le texte présente ici cette mauvaise interpolation : « et inscrivons-y la dite figure et un polygone dans le segment de cercle. »

3. Voir proposition XXXV.

4. La proposition XXII donne : $\frac{EZ+\Gamma\Delta+KA}{K\Theta}=\frac{E\Lambda}{E\Theta}$, d'où, comme le texte : $E\Theta[EZ+\Gamma\Delta+KA]=E\Lambda\times K\Theta$.

Digitized by Google

par EΛ, KΘ est moindre que le carré de AΘ, car il est moindre que le rectangle délimité par ΛΘ, KΘ (1) ; par conséquent, il est clair que le rayon du cercle qui équivaut à l'aire de la figure est moindre que le rayon du cercle M. Il est donc évident que le cercle M est plus grand que l'aire de la figure (2).

PROPOSITION XXXVIII.

Une figure délimitée par des surfaces coniques, inscrite dans un segment (3), réunie au cône ayant même base que cette figure et comme sommet le centre de la sphère, équivaut au cône ayant la base équivalente à l'aire de la figure et la hauteur égale à la droite menée perpendiculairement du centre de la sphère sur un côté du polygone (4).

En effet, soit une sphère dans laquelle on a un grand cercle, un segment ABΓ plus petit que le demi-cercle, et le centre E. Inscrivons dans le segment ABΓ un polygone (5) d'un nombre pair de côtés, exception faite de AΓ, de la même manière que dans les propositions précédentes, et, la droite BΛ restant fixe, tandis que la sphère (6) tourne, engendrons une figure délimitée par des surfaces coniques. De plus, sur le cercle décrit autour du diamètre AΓ, construisons un cône ayant le centre comme sommet, et prenons un cône K ayant la base équivalente à l'aire de la figure et la hauteur égale à la droite menée perpendiculairement du centre E sur un côté du

1. Corde EΛ < diamètre ΛΘ, d'où : $E\Lambda \times K\Theta < \Lambda\Theta \times K\Theta$. Or, $\overline{A\Theta}^2 = \Lambda\Theta \times K\Theta$, d'où, comme le texte : $E\Lambda \times K\Theta < \overline{A\Theta}^2$.

2. On a démontré que : aire figure inscrite = cercle de rayon $\sqrt{E\Lambda \times K\Theta}$, et l'on vient de voir que $E\Lambda \times K\Theta < \overline{A\Theta}^2$, d'où : cercle de rayon AΘ > aire figure inscrite. Mais, par hypothèse, cercle M = cercle de rayon AΘ, d'où, comme le texte : cercle M > aire figure inscrite.

3. Il est probable que le texte a perdu ici les mots ἐλάσσονι ἡμισφαιρίου, c.-à-d. moindre que l'hémisphère. Heiberg a d'ailleurs relevé les mots : « *sphaerae minore hemisphaerio* » dans le manuscrit d'une version latine du XV^e^ siècle. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 139).

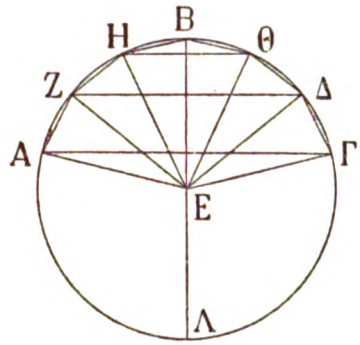
4. C'est-à-dire du polygone inscrit au grand cercle, dont les côtés, celui de la base excepté, sont égaux, sont au nombre de $2n$, et dont la révolution autour de l'axe du segment sphérique engendre la figure solide considérée.

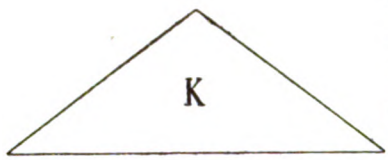
5. Le texte a probablement perdu ici le mot ἰσόπλευρόν, équilatéral.

6. Altération probable du texte original qui, en d'autres endroits, fait plus correctement tourner le cercle, ou bien le plan du cercle et du polygone inscrit.

Digitized by Google

polygone. On doit démontrer que le cône K équivaut à la figure enveloppée réunie au cône AEΓ.





Elevons donc encore sur les cercles décrits autour des diamètres ΘH, ΔZ des cônes ayant leur sommet au point E. Dès lors, le rhombe solide HBΘE équivaut au cône dont la base est équivalente à l'aire du cône HBΘ, et dont la hauteur est égale à la droite menée de E perpendiculairement sur HB (1). D'autre part, ce qui reste à l'entour (2), délimité par la surface située entre les plans parallèles menés suivant les droites HΘ, ZΔ et par les surfaces coniques ZEΔ, HEΘ, équivaut au cône dont la base est équivalente à l'aire située entre les plans parallèles menés suivant HΘ, ZH, et dont la hauteur est égale à la droite menée de E perpendiculairement sur ZH (3). De nouveau, ce qui reste à l'entour (4), délimité par la surface située entre les plans parallèles menés suivant les droites ZΔ, AΓ et par les surfaces coniques AEΓ, ZEΔ équivaut au cône dont la base est équivalente à l'aire située entre les plans parallèles menés suivant ZΔ, AΓ et dont la hauteur est égale à la droite menée de E perpendiculairement sur ZA (5). En conséquence, les cônes que nous venons de dire vaudront la figure avec le cône AEΓ. De plus, ils ont une hauteur égale à la droite menée de E perpendiculairement sur un côté du polygone, et l'ensemble de leurs bases équivaut à l'aire de la figure AZHBΘΔΓ. Or, le cône K a aussi cette même hauteur et la base équivalente à l'aire de la figure (6) ; par conséquent, ce cône équivaut à l'ensemble des cônes que nous venons de dire. Or, il a été démontré que les cônes que nous venons de dire valent la figure avec le cône AEΓ ; par conséquent, le cône K équivaut aussi à la figure avec le cône AEΓ.

1. Voir proposition XVIII.
2. C'est-à-dire le fragment enveloppant EZHEΘΔE.
3. Voir proposition XX.
4. C'est-à-dire le fragment enveloppant EAZEΔΓE.
5. Voir proposition XX.
6. Par hypothèse.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

Il est clair, d'après cela, que le cône ayant comme base le cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle de base du segment, et ayant une hauteur égale au rayon de la sphère, est plus grand que la figure inscrite réunie au cône. En effet, le cône précité est plus grand que le cône qui équivaut à la figure réunie au cône ayant comme base la base du segment et ayant le sommet placé au centre, c'est-à-dire au cône ayant la base équivalente à l'aire de la figure et la hauteur égale à la droite menée du centre perpendiculairement sur un côté du polygone (1) ; car la base est plus grande que la base et la hauteur plus grande que la hauteur (2).

PROPOSITION XXXIX.

Soit une sphère dans laquelle on a le plus grand cercle ABΓ ; soit un segment, plus petit que le demi-cercle, découpé par la droite AB, et soit Δ le centre. Du centre Δ vers les points A, B menons les droites de jonction AΔ, ΔB, et circonscrivons au secteur ainsi obtenu un polygone (3) autour duquel nous circonscrivons un cercle. Ce dernier cercle aura le même centre que le cercle ABΓ (4). Dès lors, si, la droite EK restant fixe, le polygone reprend la même position après avoir fait une révolution, le cercle circonscrit circulera suivant la surface d'une sphère, et les angles du polygone décriront des cercles dont les diamètres reliant les angles du polygone sont parallèles à la droite AB. D'autre part, les points où les côtés du polygone sont tangents au plus

1. Voir proposition XXXVIII.

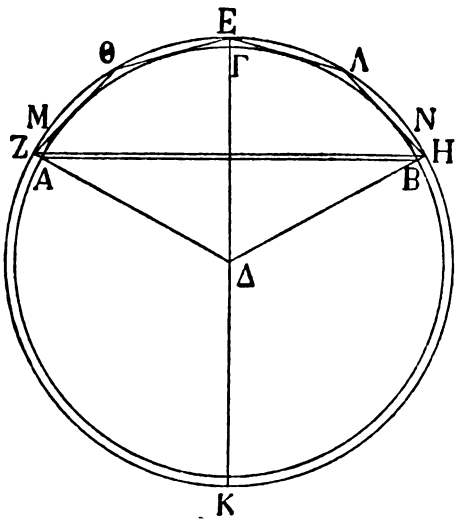
2. Voir proposition XXXVII. On se trouve ici de nouveau en présence d'une proposition dont le titre de corollaire contraste avec la démonstration en règle qui en est donnée. Aussi Heiberg a-t-il mis en doute l'authenticité de toute la partie démonstrative de ce corollaire (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 143).

3. Le texte sous-entend ici, ou bien aura perdu les mots ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον, c.-à-d. équilatéral et d'un nombre pair de côtés.

4. Si l'on relie le centre Δ aux points Θ, E, Λ ainsi qu'aux points de tangence des côtés du polygone, on aura une série de triangles rectangles égaux dont les côtés de l'angle droit seront respectivement égaux au rayon du cercle intérieur et au demi-côté du polygone ; donc les droites ΔΘ, ΔE, ΔΛ seront égales et seront donc des rayons du cercle extérieur. Les deux cercles sont donc concentriques.

Digitized by Google

petit cercle décrivent, sur la plus petite sphère, des cercles dont les diamètres seront les droites qui, joignant les points de contact, sont parallèles à la droite AB, tandis que les côtés circuleront suivant des surfaces coniques. On aura ainsi une figure circonscrite, délimitée par des surfaces coniques, dont la base est le cercle décrit autour de ZH. Dès lors, l'aire de la figure en question est plus grande que l'aire du plus petit segment dont la base est le cercle décrit autour de AB.



En effet, menons les tangentes AM, BN ; elles circuleront donc suivant une surface conique, et la figure engendrée par le polygone AMΘEΛNB aura une aire plus grande que l'aire du segment de sphère dont la base est le cercle décrit autour du diamètre AB (1) ; [car ces aires ont pour limite dans un plan le cercle décrit autour du diamètre AB, et le segment est enveloppé par la figure] (2). Mais l'aire de cône engendrée par les droites ZM, HN est plus grande que celle qui est engendrée par les droites MA, NB, puisque ZM est plus grand que MA (3), tandis que NH est plus grand que NB. Or, cela étant, on aura l'aire plus grande que l'aire (4) ; par conséquent, l'aire de la figure circonscrite est aussi plus grande que l'aire du segment de la plus petite sphère.

---

1. Postulat 4.

2. La phrase que nous avons placée entre crochets a probablement été interpolée.

3. Un commentaire interpolé ajoute ici : « car elle est opposée à une perpendiculaire ». En effet, AM est tangente en A, donc l'angle en A est droit et l'on a : hypoténuse ZM > MA.

4. Dans son commentaire sur cette proposition, Eutocius invoque la proposition XVI pour démontrer que l'aire engendrée par ZM est plus grande que celle qui est engendrée par MA. On peut résumer son raisonnement comme suit : Aire latérale du tronc de cône ZMNH = cercle de rayon $\sqrt{ZM \times \frac{1}{2}(ZH + MN)}$, et aire latérale du tronc de cône AMNB = cercle de rayon $\sqrt{MA \times \frac{1}{2}(AB + MN)}$. Or, ZM > MA et ZH > AB, d'où : $ZM \times \frac{1}{2}(ZH + MN) > MA \times \frac{1}{2}(AB + MN)$, d'où : 1er cercle, > 2d cercle, d'où : 1re aire > 2de aire.

Digitized by Google

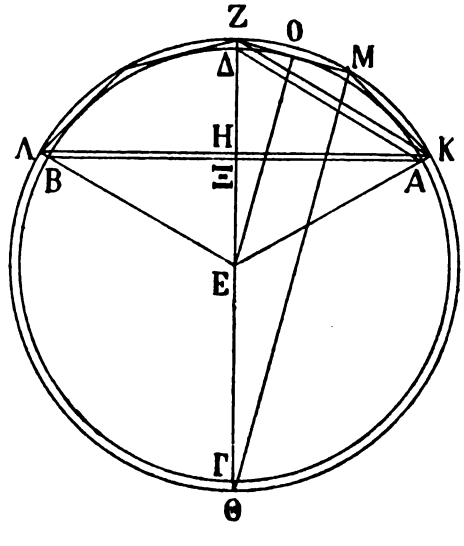
COROLLAIRE.

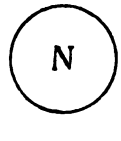
Il est clair, en outre, que l'aire de la figure circonscrite au secteur est équivalente au cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle délimité par un côté du polygone et par la somme des droites qui relient les angles du polygone, augmentée de la moitié de la base du dit polygone (1), attendu que la figure décrite sur le polygone est inscrite dans le segment de la plus grande sphère, ce qui est d'ailleurs évident d'après ce qui a été écrit plus haut (2).

PROPOSITION XL.

L'aire de la figure circonscrite à un secteur (3) est plus grande que le cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle de base du segment.

En effet, soit une sphère dans laquelle on a le plus grand cercle ΑΒΓΔ et le centre E. Circonscrivons au secteur un polygone ΛΚΖ, et circonscrivons un cercle à ce dernier. Déterminons une figure comme précédemment, et soit un cercle N dont le carré du rayon soit équivalent au rectangle délimité par un côté du polygone et par la somme des droites de jonction (4), augmentée de la moitié de la droite ΚΛ. Mais l'aire que nous venons de dire est équivalente au rectangle délimité par la droite ΜΘ, et par la droite





1. Voir proposition XXXV.
2. La dernière phrase, à partir des mots « attendu que », est fort suspecte d'interpolation.
3. C.-à-d. à un secteur sphérique.
4. C.-à-d. des droites qui relient les angles du polygone.

Digitized by Google

ZH, qui est d'ailleurs la hauteur du segment de la plus grande sphère, car cela a été démontré précédemment (1) ; par conséquent, le carré du rayon du cercle N équivaut au rectangle délimité par MΘ, HZ. Mais HZ est plus grand que ΔΞ, [qui est la hauteur du plus petit segment, car si nous menons la droite de jonction KZ, elle sera parallèle à ΔA ; or, la droite AB est aussi parallèle à la droite KΛ, et la droite ZE est commune ; le triangle ZKH est donc semblable au triangle ΔAΞ, et ZK est plus grand que AΔ ; par conséquent, ZH est plus grand que ΔΞ] (2). D'autre part, MΘ est égal au diamètre ΓΔ ; [car si nous menons la droite de jonction EO, puisque MO est égal à OZ, et que ΘE est égal à EZ, la droite EO sera parallèle à la droite MΘ ; par conséquent, MΘ sera double de EO ; or, ΓΔ est aussi double de EO ; donc MΘ est égal à ΓΔ] (3). Et le rectangle déterminé sous ΓΔ, ΔΞ équivaut au carré de AΔ (4). Par conséquent, l'aire de la figure KZΛ est plus grande que le cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui, décrit autour du diamètre AB, est la base du segment ; car le cercle N équivaut à l'aire de la figure circonscrite au secteur (5).

COROLLAIRE I.

La figure circonscrite au secteur, réunie au cône dont la base est le cercle décrit autour du diamètre KΛ et dont le sommet est au centre (6), sera donc aussi équivalente au cône dont la base équivaut à l'aire de la figure et dont la hauteur est égale à la droite menée du centre per-

1. La proposition XXII donne : $\frac{\sum \text{droites reliant les angles} + \frac{1}{2}K\Lambda}{ZH} = \frac{M\Theta}{ZM}$. d'où, comme le texte : $ZM[\sum \text{droites reliant les angles} + \frac{1}{2}K\Lambda] = M\Theta \times ZH$.

2. Comme Archimède s'abstient généralement de montrer que deux triangles sont semblables, la phrase placée entre crochets n'est probablement qu'un commentaire interpolé, d'autant plus que la construction grammaticale du texte est fort défectueuse.

3. Cette phrase, placée entre crochets, est suspcte d'interpolation au même titre que celle dont il a été question dans la note précédente.

4. Le triangle ΔAΓ (non tracé sur la figure) inscrit dans le demi-cercle est rectangle, d'où $\overline{A\Delta}^2 = \Gamma\Delta \times \Delta\Xi$.

5. Par hypothèse, on a : carré rayon cercle $N = ZM[\sum \text{droites reliant angles} + \frac{1}{2}K\Lambda]$. Or, la proposition XXXIX (corollaire), donne :
Aire figure circonscrite au secteur $= \pi \times ZM[\sum \text{droites reliant angles} + \frac{1}{2}K\Lambda]$, donc: cercle N = aire figure circonscrite au secteur.

6. C.-à-d. au centre de la sphère.

Digitized by Google

pendiculairement sur un côté (1). En effet, la figure circonscrite au secteur est inscrite dans le segment de la plus grande sphère qui a le même centre. Ce que nous disons est donc évident d'après ce qui a été écrit plus haut (2).

COROLLAIRE II.

Il est clair, d'après cela, que la figure circonscrite, réunie au cône, est plus grande que le cône ayant comme base le cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment de la plus petite sphère à la circonférence du cercle de base du segment, et dont la hauteur est égale au rayon (3). En effet, le cône équivalent à la figure réunie au cône aura une base plus grande que le cercle que nous venons de dire (4), et une hauteur égale au rayon de la plus petite sphère (5).

PROPOSITION XLI.

Soit de nouveau une sphère, dans celle-ci un grand cercle, un segment plus petit que le demi-cercle et le centre Δ. Inscrivons dans le secteur ABΓ un polygone dont le nombre de côtés soit pair (6), circonscrivons-lui un polygone semblable, et que les côtés soient parallèles aux côtés. Circonscrivons un cercle au polygone circonscrit, et si, comme précédemment, la droite HB restant fixe, nous faisons tourner les cercles, on engendrera des figures délimitées par des surfaces coniques. On doit démontrer que le rapport de l'aire de la figure circonscrite à l'aire de la figure inscrite est le carré du rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit, et que le rapport de

1. C.-à-d. un côté du polygone générateur. Voir d'ailleurs prop. XXXVIII. Une petite interpolation ajoute à cet endroit : « elle est donc égale au rayon de la sphère ».

2. Ce qui précède à partir des mots « En effet », a probablement été interpolé.

3. Le texte sous-entend, ou a perdu les mots « τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, c.-à-d. de la plus petite sphère.

4. Voir proposition XL.

5. Voir proposition XL (corollaire). De plus (lemme 1), les cônes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

6. Le texte porte ἀρτιόγωνον, c.-à-d. d'un nombre pair d'angles, par erreur de copie pour ἀρτιόπλευρον, c.-à-d. d'un nombre pair de côtés. De plus, on doit supposer ici l'oubli ou la perte du mot ἰσόπλευρόν, c.-à-d. équilatéral.

Digitized by Google

ces figures réunies aux cônes (1) est le cube du rapport précédent.

En effet, soit un cercle M dont le carré du rayon soit équivalent au rectangle délimité par un côté du polygone circonscrit et par la somme des droites qui relient les angles, augmentée de la moitié de la droite EZ. Le cercle M sera dès lors équivalent à l'aire de la

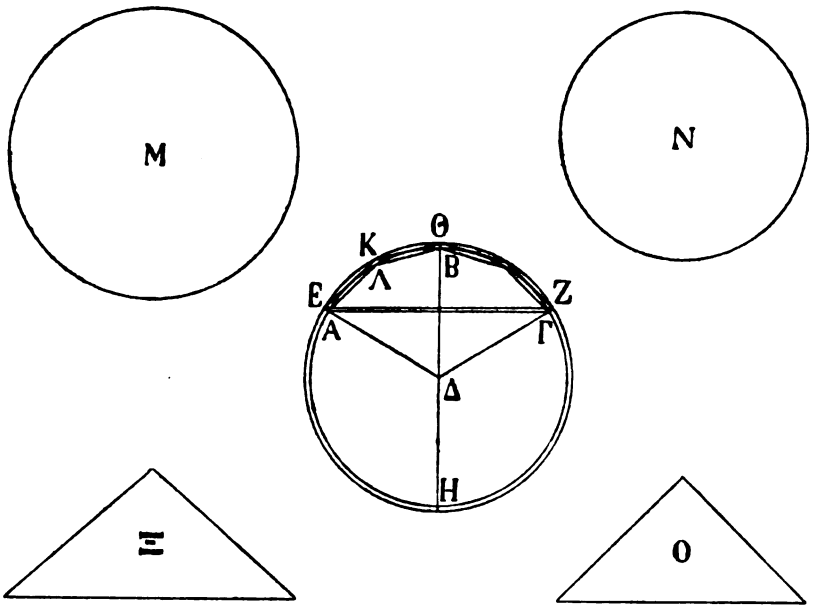


figure circonscrite (2). Prenons aussi un cercle N, dont le carré du rayon soit équivalent au rectangle délimité par un côté du polygone inscrit et par la somme des droites qui relient les angles, augmentée de la moitié de AΓ. Ce cercle sera de même équivalent à l'aire de la figure inscrite (3). Or, les aires que nous venons de dire (4) sont entre elles comme le carré du côté EK est au carré du côté AΛ (5) ; par conséquent, il est clair que le rapport de l'aire de la figure circonscrite à l'aire de la figure inscrite est le carré du rapport de EK à AΛ (6).

1. C.-à-d. le rapport des volumes des figures circonscrite et inscrite, augmentées respectivement du cône correspondant de sommet Δ.

2. Voir proposition XXXIX, corollaire.

3. Voir proposition XXXV.

4. C.-à-d. les aires des rectangles précités.

5. Nous abandonnons ici la phrase : « et polygone est donc à polygone comme le cercle M est au cercle N », qui n'est qu'un mauvais commentaire interpolé, car il exprime une relation qui, bien que vraie, ne commande pas la suite de la démonstration.

6. Par hypothèse :

Rayon cercle $M = \sqrt{EK[\sum \text{droites reliant angles polygone circonscrit} + \frac{1}{2}EZ]}$

et rayon cercle $N = \sqrt{A\Lambda[\sum \text{droites reliant angles polygone inscrit} + \frac{1}{2}A\Gamma]}$. Or, les

Digitized by Google

Soit encore un cône Ξ ayant la base égale au cercle M et la hauteur égale au rayon de la plus petite sphère ; ce cône est donc équivalent à la figure circonscrite réunie au cône dont la base est le cercle décrit autour de EZ et dont le sommet est Δ (1). Soit, en outre, un autre cône O ayant la base égale au cercle N et comme hauteur la droite menée perpendiculairement de Δ sur AΛ ; ce cône est donc aussi équivalent à la figure inscrite réunie au cône dont la base est le cercle décrit autour du diamètre AΓ et dont le sommet est le centre Δ (2) ; car toutes ces choses ont été écrites précédemment. De plus, EK est au rayon de la plus petite sphère comme AΛ est à la droite menée du centre perpendiculairement sur AΛ (3), tandis qu'il a été démontré que EK est à AΛ comme le rayon du cercle M est au rayon du cercle N et comme le diamètre est au diamètre (4) ; par conséquent, le diamètre du cercle, qui est la base du cône Ξ, est au diamètre du cercle, qui est la base du cône O, comme la hauteur du cône Ξ est à la hauteur du cône O. [Dès lors, ces cônes sont semblables] (5). Le rapport du cône Ξ au cône O est donc le cube du rapport de diamètre à diamètre. Il est donc clair que le rapport de la figure circonscrite,

---

polygones sont semblables ; donc les côtés homologues et les droites homologues reliant les angles donnent :

$$\frac{\sum \text{droites d'angles polyg. circ.} + \frac{1}{2}EZ}{\sum \text{droites d'angles polyg. inscr.} + \frac{1}{2}A\Gamma} = \frac{EK}{A\Lambda}, \text{ d'où : } \frac{EK\left[\sum \text{etc.} + \frac{1}{2}EZ\right]}{A\Lambda\left[\sum \text{etc.} + \frac{1}{2}A\Gamma\right]} = \frac{\overline{EK}^2}{\overline{A\Lambda}^2}, \text{ d'où}$$

$$\frac{\pi \times EK\left[\sum \text{etc.} + \frac{1}{2}EZ\right] = \text{cercle M}}{\pi \times A\Lambda\left[\sum \text{etc.} + \frac{1}{2}A\Gamma\right] = \text{cercle N}} = \frac{\overline{EK}^2}{\overline{A\Lambda}^2}.$$

Or, on a (prop. XXXIX, corol.) : cercle M = aire figure circonscrite, et (prop. XXXV) : cercle N = aire fig. inscrite, d'où, comme le texte : $\frac{\text{aire figure circonscrite}}{\text{aire figure inscrite}} = \frac{\overline{EK}^2}{\overline{A\Lambda}^2}$. On pourrait d'ailleurs poser directement l'égalité des rapports des deux rectangles et des carrés de leurs côtés EK, AΛ, en considérant qu'ils sont semblables comme étant délimités par des côtés homologues et des sommes de droites homologues de deux polygones semblables.

Nous abandonnons à cet endroit du texte ce petit commentaire interpolé, qui se rattache à l'interpolation précédente : « (rapport) qui est le même que celui des polygones ».

1. Voir proposition XL, corollaire.
2. Voir proposition XXXVIII.
3. Considérant les triangles semblables EΔK, AΔΔ et les normales menées de Δ sur EK, AΛ, on a, comme le texte : $\frac{EK}{\text{rayon petite sphère}} = \frac{A\Lambda}{\text{perpendiculaire de } \Delta \text{ sur } A\Lambda}$.
4. On a eu :

$$\frac{\overline{EK}^2}{\overline{A\Lambda}^2} = \frac{\text{cercle M}}{\text{cercle N}} = \frac{\pi \times \text{carré rayon de M}}{\pi \times \text{carré rayon de N}}, \text{ d'où : } \frac{EK}{A\Lambda} = \frac{\text{rayon de M}}{\text{rayon de N}} = \frac{\text{diamètre de M}}{\text{diamètre de N}}.$$

5. La phrase placée entre crochets nous paraît avoir été interpolée.

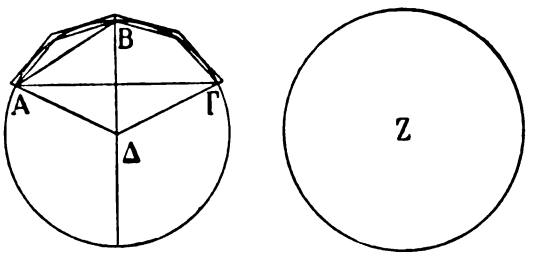
Digitized by Google

réunie au cône, à la figure inscrite, réunie au cône, est le cube du rapport de EK à AΛ (1).

PROPOSITION XLII.

L'aire de tout segment de sphère plus petit que l'hémisphère est équivalente au cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle de base du segment de la sphère.

Soit une sphère dans laquelle on a le plus grand cercle ABΓ, et un segment, plus petit que l'hémisphère, dont la base est le cercle décrit autour de la droite AΓ, perpendiculairement au cercle ABΓ. Prenons un cercle Z dont le rayon soit égal à la droite AB ; on doit démontrer que l'aire du segment ABΓ équivaut au cercle Z.



En effet, s'il n'en est pas ainsi, que cette aire soit plus grande que le cercle Z. Prenons le centre Δ et prolongeons les droites de jonction menées du point Δ aux points A, Γ. Ayant deux grandeurs inégales, l'aire du segment et le cercle Z, inscrivons dans le secteur ABΓ un polygone équilatéral d'un nombre pair de côtés, et circonscrivons-lui-en un autre semblable de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que le rapport de l'aire du segment de sphère au cercle Z (2). Le cercle Z ayant

1. Les relations des deux notes précédentes donnent :

$$\frac{\text{diamètre de M}}{\text{diamètre de N}} = \frac{\text{rayon petite sphère}}{\text{perpendic. de } \Delta \text{ sur } A\Lambda}.$$

Or, par hypothèse : cercle M = base cône Ξ ; cercle N = base cône O ; rayon petite sphère = hauteur cône Ξ, et perpendiculaire de Δ sur AΛ = hauteur cône. Donc $\frac{\text{diam. M}}{\text{diam. N}} = \frac{\text{hauteur cône } \Xi}{\text{hauteur cône O}}$, d'où similitude des cônes Ξ, O, d'où (lemme 5) :

$\frac{\text{cône } \Xi}{\text{cône O}} = \frac{\text{cube diamètre M}}{\text{cube diamètre N}}$. Or, on a vu : $\frac{EK}{A\Lambda} = \frac{\text{diam. M}}{\text{diam. N}}$, d'où : $\frac{\overline{EK}^3}{\overline{A\Lambda}^3} = \frac{\text{cube diam. M}}{\text{cube diam. N}}$.

D'autre part (prop. XL, corol.), on a : cône Ξ = figure circonscrite + cône EΔZ, et (prop. XXXVIII) : cône O = figure inscrite + cône AΔΓ, d'où, comme le texte : $\frac{\text{figure circonscrite + cône E}\Delta Z}{\text{figure inscrite + cône A}\Delta\Gamma} = \frac{\overline{EK}^3}{\overline{A\Delta}^3}$. C. q f. d.

2. Voir proposition VI.

Digitized by Google

fait une révolution (1), comme précédemment, on aura deux figures délimitées par des surfaces coniques dont l'une sera circonscrite, l'autre inscrite, et l'aire de la figure circonscrite sera à celle de la figure inscrite comme le polygone circonscrit est au polygone inscrit ; car chacun de ces rapports est le carré du rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit (2). Mais le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit est plus petit que celui de l'aire du segment dont il est question au cercle Z, tandis que l'aire de la figure circonscrite est plus grande que l'aire du segment ; par conséquent, l'aire de la figure inscrite sera aussi plus grande que le cercle Z ; ce qui est impossible, car il a été démontré que l'aire de la figure que nous venons de dire est plus petite qu'un tel cercle (3).

Que le cercle soit au contraire plus grand que l'aire ; circonscrivons et inscrivons des polygones semblables, et que le rapport du polygone circonscrit à celui qui est inscrit soit plus petit que celui du cercle à l'aire du segment (4). Par conséquent, l'aire n'est pas plus petite que le cercle. Or, il a été démontré qu'elle n'est pas plus grande ; donc elle lui est équivalente.

---

1. Sous-entendu : avec les polygones circonscrit et inscrit.

2. On a vu (proposition XLI et figure qui s'y rapporte) que: $\frac{\text{aire fig. circons.}}{\text{aire fig. inscr}} = \frac{\overline{EK}^2}{\overline{A\Lambda}^2}$.

Or, les polygones sont entre eux comme les carrés des côtés homologues :

$$\frac{\text{polyg. circonscrit}}{\text{polyg. inscrit}} = \frac{\overline{EK}^2}{\overline{A\Lambda}^2}, \text{ d'où, comme le texte :}$$

$$\frac{\text{aire figure circonscrite}}{\text{aire figure inscrite}} = \frac{\text{polygone circonscrit}}{\text{polygone inscrit}}.$$

3. On a, par hypothèse première: $\frac{\text{polygone circonscrit}}{\text{polygone inscrit}} = \frac{\text{aire segment sphérique}}{\text{cercle Z}}$; donc, la relation de la note précédente devient, à fortiori :

$$\frac{\text{aire fig. circonscrite}}{\text{aire fig. inscrite}} < \frac{\text{aire segment sphérique}}{\text{cercle Z}}, \text{ ou}$$

$$\frac{\text{aire fig. circonscrite}}{\text{aire sgt. sphérique}} < \frac{\text{aire fig. inscr.}}{\text{cercle Z}}.$$

Or (proposition XXXIX), on a : aire fig. circonscrite > aire segment sphérique, d'où : aire figure inscrite > cercle Z ; ce qui est absurde, car (proposition XXXVII), on a : aire figure inscrite < cercle Z. Donc, l'aire du segment sphérique n'est pas plus grande que cercle Z.

4. Le texte paraît présenter ici une lacune qui s'étendrait sur tout un raisonnement identique à celui de la première partie de la démonstration, et qui serait à peu près le suivant, en notations explicites :

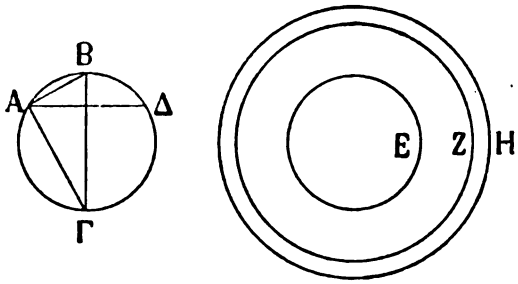
On a, par hypothèse seconde : $\frac{\text{polygone circonscrit}}{\text{polygone inscrit}} < \frac{\text{cercle Z}}{\text{aire segt. sphérique}}$; donc, la relation de la note avant-précédente devient, à fortiori :

Digitized by Google

PROPOSITION XLIII.

Lors même que le segment est plus grand que l'hémisphère, son aire est pareillement équivalente au cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet à la circonférence du cercle de base du segment.

En effet, soit une sphère et, dans celle-ci, un grand cercle que nous imaginons être coupé par un plan qui lui soit perpendiculaire suivant la droite AΔ. Soit le segment ABΔ plus petit que l'hémisphère, et soit le diamètre BΓ perpendiculaire sur AΔ. Des points B, Γ menons vers A les droites de jonction BA, AΓ. Soit un cercle E dont le rayon est égal à la droite AB, un cercle Z dont le rayon est égal à la droite AΓ, et un cercle H dont le rayon est égal à la droite BΓ. Dès lors, le cercle H équivaut aux deux cercles E, Z (1). Or, le cercle H équivaut à l'aire totale de la sphère(2), et le cercle E équivaut à l'aire du segment ABΔ (3) ; par conséquent, le cercle Z, qui reste, équivaut à l'aire du segment AΓΔ, qui est plus grand que l'hémisphère.



$\frac{\text{aire fig. circons.}}{\text{aire fig. inscr.}} < \frac{\text{cercle Z}}{\text{aire segt. sph.}}$, ou, par permutation :

$$\frac{\text{aire fig. circonscr.}}{\text{cercle Z}} < \frac{\text{aire fig. inscrite}}{\text{aire segt. sphér.}}.$$

Or (prop. XL), aire fig. circonscrite > cercle Z, d'où aire fig. inscrite > aire segment sphérique ; ce qui est absurde, car (prop. XXVI), on a : aire fig. inscrite < aire segt sphér. Donc, l'aire du segment sphérique n'est pas plus petite que le cercle Z.

1. L'angle ΓAB est droit, d'où : $\overline{B\Gamma}^2 = \overline{A\Gamma}^2 + \overline{AB}^2$, d'où : $\pi \times \overline{B\Gamma}^2 = \pi \times \overline{A\Gamma}^2 + \pi \times \overline{AB}^2$, ou cercle H = cercle Z + cercle E.

2. On a (propos. XXXIII) : aire sphère = 4 grands cercles ; or, cercle $H = \pi \times \overline{B\Gamma}^2 = 4\pi \times \left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 = 4$ grands cercles, d'où : cercle H = aire de la sphère.

Une petite interpolation ajoute ici au texte : « parce que l'un et l'autre sont quadruples du cercle décrit autour du diamètre BΓ. »

3. Voir proposition XLII. Le texte présente ici l'interpolation : « car cela a été démontré pour un (segment) plus petit que l'hémisphère. »

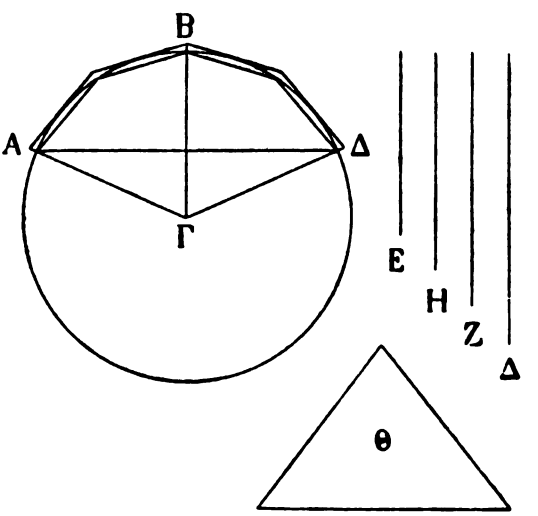
Digitized by Google

PROPOSITION XLIV.

Tout secteur de sphère équivaut au cône ayant la base équivalente à l'aire du segment de sphère qui correspond au secteur et la hauteur égale au rayon de la sphère.

Soit une sphère dans laquelle on a le grand cercle ABΔ ainsi que le centre Γ, et soit un cône ayant comme base le cercle équivalent à l'aire située suivant l'arc ABΔ, et la hauteur égale à la droite BΓ. On doit démontrer que le secteur ABΓΔ est équivalent au cône que nous venons de dire.

En effet, s'il n'en est pas ainsi, que le secteur soit plus grand que le cône, et prenons un cône Θ tel que nous l'avons dit. Ayant, dès lors, deux grandeurs inégales, le secteur et le cône Θ, trouvons deux droites Δ, E, la droite Δ étant d'ailleurs plus grande que la droite E, et que le rapport de Δ à E soit plus petit que celui du secteur au cône (1). De plus, prenons deux droites Z, H, de manière que Δ excède Z, que Z excède H et que H excède E d'une même grandeur. Circonscrivons au secteur plan du cercle un polygone équilatéral d'un nombre pair d'angles (2) ; inscrivons-lui un polygone semblable, de manière que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que le rapport de Δ à Z (3), et, faisant tourner le cercle comme précédemment, engendrons deux figures délimitées par des surfaces coniques. Dès lors, le rapport de la figure circonscrite, réunie au cône



1. Voir proposition II.

2. Le texte porte ἀρτιογώνιον, d'un nombre pair d'angles, ce qui n'est exact qu'à la condition d'y comprendre l'angle Γ, de même que les côtés ne sont équilatéraux qu'exception faite des côtés ΓΛ, ΓΔ du secteur du cercle. Mais il est probable que l'on se trouve en présence d'une altération du mot ἀρτιόπλευρον, d'un nombre pair de côtés.

3. Voir proposition IV.

Digitized by Google

ayant son sommet au point Γ, à la figure inscrite, réunie au cône, est le cube du rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit (1). Or, le rapport du côté du polygone circonscrit (2) est moindre que le rapport de Δ à Z (3) ; par conséquent, le rapport de la figure solide circonscrite en question (4) sera moindre que le cube du rapport de Δ à Z. Or, le rapport de Δ à E est plus grand que le cube du rapport de Δ à Z (5) ; par conséquent, le rapport de la figure solide (6), circonscrite au secteur, à la figure qui lui est inscrite est moindre que le rapport de Δ à E. Or, le rapport de Δ à E est moindre que celui du secteur solide au cône Θ (7) ; par conséquent, le rapport du secteur solide au cône Θ est plus grand que celui de la figure circonscrite au secteur à la figure qui lui est inscrite ; et permutons. Or, la figure solide circonscrite est plus grande que le secteur ; donc la figure inscrite dans le secteur est aussi plus grande que le cône Θ ; ce qui est impossible, car il a été démontré précédemment que cette figure est plus petite qu'un tel cône (8), c'est-à-dire qu'un cône ayant comme base le cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle de base du segment, et comme hauteur le rayon de la sphère. Or, le cône Θ est pareil à celui que nous venons de dire ; car il a comme base un cercle équivalent à l'aire du segment, cercle qui est celui que nous venons

1. Voir proposition XLI.

2. Le texte sous-entend ici, ou bien aura perdu les mots : « πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, c.-à-d. au (côté) de l'inscrit.

3. Par hypothèse permise en vertu de la proposition II.

4. Le texte doit évidemment avoir perdu ici le membre de phrase suivant : « ...réunie au cône, à la figure inscrite réunie au cône... »

5. La relation $\frac{\Delta}{E} > \frac{\Delta^3}{Z^3}$ entre les droites Δ, Z, H, E, qui sont en progression arithmétique, a déjà été invoquée au cours de la proposition XXXIV. Nous renvoyons à la démonstration de cette relation qui a été donnée en note.

6. C'est-à-dire de la figure inscrite réunie à son cône correspondant.

7. Par hypothèse.

8. Le raisonnement aboutit à la relation :
$\frac{\text{secteur solide}}{\text{cône } \Theta} > \frac{\text{figure circonscrite + cône correspondant}}{\text{figure inscrite + cône correspondant}}$ et, par permutation :
$\frac{\text{secteur solide}}{\text{figure circonscr. + cône correspondant}} > \frac{\text{cône } \Theta}{\text{fig. inscrite + cône correspondant}}$; or, on a : fig. circonscr. + cône corresp. > secteur solide, d'où : fig. inscr. + cône corresp. > cône Θ ; ce qui est absurde, car il résulte des propositions XLII et XLIII que la base de ce cône Θ est le cercle de rayon égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle de base du segment, et que, dès lors, en vertu de la proposition XXXVIII, coroll., le cône Θ > figure inscrite + cône correspondant.

Digitized by Google

de dire, et comme hauteur le rayon de la sphère (1). En conséquence, le secteur solide n'est pas plus grand que le cône Θ.

Que le cône Θ soit au contraire plus grand que le secteur solide. Que le rapport de la droite Δ, plus grande que la droite E, à cette dernière droite soit de nouveau, et de la même manière, plus petit que le rapport du cône au secteur (2). Prenons pareillement les droites Z, H de manière que les différences soient les mêmes (3), et que le rapport du côté du polygone (4), dont le nombre des angles est pair, circonscrit au secteur plan, au côté du polygone inscrit soit plus petit que le rapport de Δ à Z (5). Dès lors, on démontrera de la même manière que le rapport de la figure solide, circonscrite au secteur, à la figure qui lui est inscrite est plus petit que le rapport de Δ à E et que le rapport du cône Θ au secteur (6). Or, le secteur est plus grand que la figure qui lui est inscrite ; par conséquent, le cône Θ est plus grand que la figure circonscrite ; ce qui est impossible, car il a été démontré qu'un tel cône est plus petit que la figure circonscrite au secteur (7). En conséquence, le secteur équivaut au cône Θ.

---

1. Tout le texte qui précède à partir des mots « c'est-à-dire » est un commentaire qui nous paraît fort suspect d'interpolation.

2. En vertu de la proposition II.

3. C.-à-d. de manière que les droites Δ, Z, H, E soient en progression arithmétique.

4. Le texte sous-entend ici, ou bien aura perdu le mot « ἰσοπλεύρου, » c.-à-d. équilatéral.

5. Voir proposition IV. Le texte ajoute ici : « et soient engendrées des figures solides autour du secteur solide; » phrase qui est considérée comme une interpolation par Heiberg. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 165.)

6. Un commentaire interpolé ici mal à propos dit : « ...de manière que le rapport du solide inscrit au secteur au solide qui lui est circonscrit est aussi moindre que le rapport du secteur au cône. »

7. En raisonnant comme dans la première partie de la démonstration, on arrive à la relation : $\frac{\text{fig. circonscrite} + \text{cône correspondant}}{\text{fig. inscrite} + \text{cône correspondant}} < \frac{\Delta}{E} < \frac{\text{cône } \Theta}{\text{secteur solide}}$, d'où, par permutation : $\frac{\text{fig. circonscr.} + \text{cône}}{\text{cône } \Theta} < \frac{\text{fig. inscr.} + \text{cône}}{\text{secteur solide}}$; or, secteur solide > fig. inscr. + cône, d'où : cône Θ > fig. circonscr. + cône ; ce qui est absurde, car il résulte des propositions XLII et XLIII que la base de ce cône est le cercle de rayon égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle de base du segment, et que, dès lors, en vertu de la proposition XL (corollaire II), ce cône est plus petit que la figure circonscrite réunie au cône qui lui correspond.

Digitized by Google

Digitized by Google

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE

LIVRE II

Archimède à Dosithée, salut !

Tu m'avais exhorté autrefois à mettre par écrit les démonstrations de problèmes dont j'avais personnellement transmis les énoncés à Conon. Or, il se fait que la plupart d'entre elles s'établissent d'après les théorèmes suivants, dont je t'ai déjà transmis les démonstrations :

L'aire de toute sphère est quadruple du plus grand cercle de la sphère (1), et l'aire de tout segment de sphère équivaut au cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence de sa base (2).

Pour toute sphère, le cylindre qui a le plus grand cercle de la sphère comme base et dont la hauteur est égale au rayon de la sphère vaut une fois et demie la grandeur de la sphère, et son aire vaut une fois et demie l'aire de la sphère (3).

Tout secteur solide équivaut au cône ayant comme base un cercle équivalent à l'aire du segment de sphère situé dans le secteur et dont la hauteur est égale au rayon de la sphère (4).

Je t'ai donc envoyé, écrits dans ce livre, des théorèmes et problèmes qui s'établissent d'après les théorèmes ci-dessus, et je m'efforcerai de te transmettre au plus tôt ceux qui, relatifs aux spirales et aux conoïdes,

1. Voir : *De la Sphère et du Cylindre,* livre I, prop. XXXIII.
2. *Ibidem,* prop. XLII et XLIII.
3. *Ibidem,* prop. XXXIV, corollaire.
4. *Ibidem,* prop. XLIV.

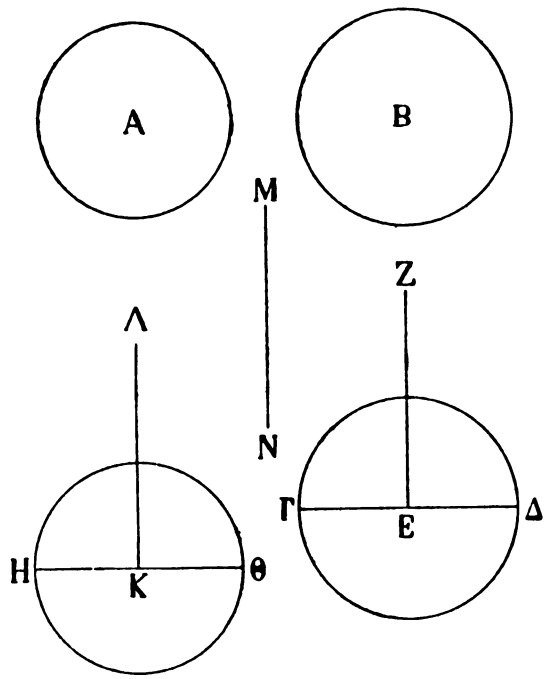
Digitized by Google

se découvrent par d'autres considérations. Le premier de ces problèmes était d'ailleurs le suivant :

Etant donnée une sphère, trouver une aire plane équivalente à l'aire de la sphère. Or, cela est clairement démontré en vertu des théorèmes précités ; car le quadruple du plus grand cercle d'une sphère est une aire qui est plane et qui est équivalente à l'aire de cette sphère.

PROPOSITION I.

Le second problème était celui-ci : un cône ou un cylindre étant donné, trouver une sphère équivalente au cône ou au cylindre.



Soit A le cône ou le cylindre donné, soit B une sphère équivalente à A. Posons un cylindre ΓZΔ, valant une fois et demie le cône ou le cylindre A(1), ainsi qu'un cylindre, valant une fois et demie la sphère B, dont la base soit le cercle décrit autour du diamètre HΘ, et dont l'axe KΛ soit égal au diamètre de la sphère B (2). Dès lors, le cylindre E équivaut au cylindre K(3). Or, les bases de cylindres équivalents sont inversement proportionnelles à leurs hauteurs ; par conséquent, KΛ est à EZ comme le cercle E est au cer-

1. Dans son Commentaire sur cette proposition, Eutocius expose longuement la manière de construire : 1° le cylindre de volume égal aux $\frac{3}{2}$ du volume d'un cylindre donné dans le cas des bases égales et dans celui des hauteurs égales; 2° le cylindre de volume égal aux $\frac{3}{2}$ du volume d'un cône donné, dans le cas des bases égales et dans celui des hauteurs égales (Confr. HEIBERG, *loc. cit.*, vol. III, p. 49).

2. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, prop. XXXIV, corollaire.

3. On a : cyl. ΓZΔ = cyl. E = $\frac{3}{2}$ cône ou cyl. A, et cyl. K = $\frac{3}{2}$ sphère B. Or, sphère B = cône ou cyl. A, d'où : cyl. E = cyl. K.

Digitized by Google

cle K, c'est-à-dire comme le carré de ΓΔ est au carré de HΘ (1). Or, KΛ est égal à HΘ (2), puisque le cylindre, équivalent à une fois et demie la sphère, a son axe égal au diamètre de la sphère, et que le cercle K est un grand cercle de la sphère ; par conséquent, HΘ est à EZ comme le carré de ΓΔ est au carré de HΘ. Soit un rectangle formé sous ΓΔ, MN équivalent au carré de HΘ. Dès lors, le carré de ΓΔ est au carré de HΘ, c'est-à-dire que HΘ est à EZ comme ΓΔ est à MN, et, par permutation, HΘ est à MN et MN est à EZ comme ΓΔ est à HΘ (3). De plus, les droites ΓΔ, EZ sont données l'une et l'autre (3) ; par conséquent, HΘ, MN sont les deux moyennes proportionnelles entre les deux droites données ΓΔ, EZ, et les droites HΘ, MN sont donc données l'une et l'autre.

La synthèse du problème est dès lors la suivante : Soit A le cône ou le cylindre donné ; on doit trouver une sphère équivalente au cône ou au cylindre A.

Soit un cylindre valant une fois et demie le cône ou le cylindre A, dont la base est le cercle décrit autour du diamètre ΓΔ, dont l'axe est EZ, et trouvons les deux moyennes proportionnelles HΘ, MN entre ΓΔ, EZ,de manière que HΘ soit à MN et MN à EZ comme ΓΔ est à HΘ (4). Imaginons en outre un cylindre dont la base soit le cercle

1. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livr. I, lemme 4, ou EUCLIDE, livre XII, prop. XV.

Puisque cyl. E = cyl. K, on a : $\frac{\text{base cyl. E}}{\text{base cyl. K}} = \frac{K\Lambda}{EZ}$; or, $\frac{\text{base cyl. E}}{\text{base cyl. K}} = \frac{\overline{\Gamma\Delta}^2}{\overline{H\Theta}^2}$, d'où : $\frac{\overline{\Gamma\Delta}^2}{\overline{H\Theta}^2} = \frac{K\Lambda}{EZ}$.

5. Par hypothèse, on a : cylindre K = $\frac{3}{2}$ sphère B, et KΛ = diamètre sphère B, d'où : base cylindre K = grand cercle de sphère B, d'où : HΘ, diamètre base cylindre K = KΛ diamètre sphère B.

2. On a : $\frac{\overline{\Gamma\Delta}^2}{\overline{H\Theta}^2} = \frac{K\Lambda}{EZ}$; or $K\Lambda = H\Theta$, d'où : $\frac{\overline{\Gamma\Delta}^2}{\overline{H\Theta}^2} = \frac{H\Theta}{EZ}$. Mais, par hypothèse : $\overline{H\Theta}^2 = \Gamma\Lambda \times MN$, d'où : $\frac{\overline{\Gamma\Delta}^2}{\Gamma\Delta \times MN} = \frac{H\Theta}{EZ}$, ou $\frac{\Gamma\Delta}{MN} = \frac{H\Theta}{EZ}$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} = \frac{MN}{EZ}$; or, $\overline{H\Theta}^2 = \Gamma\Delta \times MN$ donne : $\frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} = \frac{H\Theta}{MN}$, d'où, comme le texte : $\frac{H\Theta}{MN} = \frac{MN}{EZ} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta}$.

3. Le cylindre ΓΔZ étant une donnée de construction.

4. Archimède fait intervenir ici deux moyennes proportionnelles entre deux droites données sans nous indiquer sa manière de les déterminer. Bien que le problème ne puisse se résoudre par la géométrie élémentaire, c'est-à-dire par le seul usage de la règle et du compas, il est probable qu'Archimède en ait connu une solution par les sections coniques.

Ce problème avait déjà été posé, bien que non résolu, longtemps avant Archimède, par Hippocrate de Chio (400 ans avant J.-C.) qui lui avait subordonné la solution du fameux problème déliaque de la duplication du cube, en énonçant que si l'on

Digitized by Google

décrit autour du diamètre HΘ, et dont l'axe KΛ soit égal au diamètre HΘ. Dès lors, je dis que le cylindre E est équivalent au cylindre K. En effet, puisque MN est à EZ comme ΓΔ est à HΘ, permutons. De plus, HΘ est égal à KΛ. [Dès lors, puisque le cercle E est au cercle K comme ΓΔ est à MN, c'est-à-dire comme le carré de ΓΔ est au carré

---

pouvait insérer deux lignes moyennes proportionnelles entre le côté du cube donné et le double de ce côté, la première de ces deux lignes serait le côté du cube cherché.

Les diverses solutions du problème des deux moyennes proportionnelles, chez les géomètres de l'antiquité, nous ont été conservées par Eutocius d'Ascalon dans son commentaire grec du traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède. Bien que l'ouvrage d'Eutocius n'ait pas encore été traduit en français, nous ne pouvons songer à traduire ici le passage d'Eutocius relatif à ces solutions, qui n'occupe pas moins de 15 pages in-folio dans l'édition de Torelli et une cinquantaine de pages dans l'édition critique d'Heiberg. Cependant, vu l'intérêt que ces solutions conservent au point de vue de la géométrie pure, nous indiquerons succinctement ce qui les caractérise.

Les premières solutions trahissent de vaines tentatives au moyen de la règle et du compas. Celle de Platon est obtenue empiriquement par le procédé des deux règles qui glissent parallèlement l'une à l'autre entre des montants qui leur sont perpendiculaires.

La solution de Héron d'Alexandrie est basée sur le tracé empirique, au moyen de la règle, d'une droite qui, passant par un point déterminé, coupe les deux côtés d'un angle droit, de telle sorte que les distances d'un autre point donné aux extrémités des segments découpés sur les côtés de l'angle droit soient égales.

La solution de Philon de Byzance est également subordonnée au tracé, au moyen de la règle, d'une droite issue d'un point et interceptée sur une longueur donnée par une droite et par un arc de cercle.

Apollonius de Perge nous a laissé une solution qui, bien que différente, est basée, comme celle de Héron, sur la détermination empirique de la même droite au moyen de la règle.

La solution d'Eratosthène de Cyrène, exposée dans la lettre qu'il adresse au roi Ptolémée au sujet de la duplication du cube, fait intervenir une certaine projection de trois rectangles égaux adjacents, ainsi que la considération d'une série de triangles semblables, le tout étant subordonné à la manipulation d'un ensemble de règles articulées.

Nous ne connaissons guère la solution d'Archytas de Tarente, le maître de Platon, que par une relation d'Eudème de Rhodes, rapportée elle-même par Eutocius; elle fait intervenir la section d'un demi-cylindre et un cône de révolution.

Citons encore, parmi les solutions partiellement empiriques, celle que Pappus (450 ans après J.-C.) propose pour trouver les deux moyennes proportionnelles dans son problème de la multiplication du cube. Les deux droites données forment les côtés d'un angle droit; du sommet de l'angle droit avec le grand côté pour rayon, il décrit un demi-cercle; des extrémités du diamètre du demi-cercle il mène deux droites, l'une parallèlement à l'hypoténuse, l'autre de telle sorte que, des trois points d'intersection avec la première droite prolongée, avec le petit côté du triangle et avec le demi-cercle, le point du milieu soit à égale distance des deux autres. Dès lors, la distance de ce point milieu au centre du demi-cercle est la plus grande des moyennes proportionnelles cherchées. Le tracé de la seconde droite se fait par tâtonnements au moyen de la règle.

Une solution de Sporus, bien que différente et moins longue surtout que celle de Pappus, est basée sur le tracé de la même droite au moyen de la règle.

La solution de Dioclès (400 ans après J.-C.) est obtenue au moyen de la courbe qui porte son nom, la cissoïde. Il construit le même triangle que Pappus, et la

Digitized by Google

de HΘ (1)], il en résulte que KΛ est à EZ comme le cercle E est au cercle K (2). [Les bases des cylindres E, K sont donc inversement proportionnelles à leurs hauteurs] (3). En conséquence, le cylindre E équivaut au cylindre K (4). Or, le cylindre K vaut une fois et demie la sphère dont le diamètre est HΘ ; donc, la sphère dont le diamètre est égal à la droite HΘ, c'est-à-dire la sphère B, est équivalente au cône ou au cylindre A (5).

PROPOSITION II.

Tout segment de sphère équivaut au cône ayant même base que le segment et comme hauteur une droite dont le rapport à la hauteur du segment est le même que le rapport de la somme du rayon de la

---

cissoïde coupe le prolongement de l'hypoténuse en un point par où doit passer la transversale qui détermine, sur le prolongement du plus petit côté du triangle, le point moyen de Pappus.

La solution de Nicomède (280 ans avant J.-C.) fait intervenir une courbe, la conchoïde qui porte son nom, pour le tracé de laquelle il inventa un appareil composé de deux règles à stylets. C'est cette courbe que Newton déclarait préférer, pour la construction géométrique des équations déterminées du 3me et du 4me degré, aux moyens tirés des intersections coniques.

Mentionnons enfin les deux magnifiques solutions que Ménechme, disciple de Platon, fut le premier à donner par la géométrie transcendante, en identifiant les deux moyennes proportionnelles avec les ordonnées du point d'intersection de deux sections coniques. Dans la première solution interviennent deux paraboles qui ont un sommet commun, leurs axes perpendiculaires entre eux, et qui ont respectivement pour paramètre le côté du cube donné et le double de ce côté. Les deux moyennes proportionnelles sont les ordonnées du point d'intersection des deux courbes. Dans la seconde solution interviennent une parabole et une hyperbole équilatère entre ses asymptotes. La parabole a pour paramètre le côté du cube donné ou le double de ce côté, son sommet est le centre, et son axe est l'une des asymptotes de l'hyperbole équilatère. La puissance de l'hyperbole est le produit du côté du cube donné par le double de ce côté, et les ordonnées du point d'intersection des deux courbes sont les moyennes proportionnelles cherchées.

1. La phrase que nous plaçons entre crochets doit avoir été interpolée.

2. On a obtenu : $\frac{MN}{EZ} = \frac{\Gamma\Lambda}{H\Theta}$, d'où, par permutation : $\frac{\Gamma\Delta}{MN} = \frac{H\Theta}{EZ} = \frac{\Gamma\Lambda}{MN}$. Or, on a vu que $N\Theta = K\Lambda$; donc : $\frac{K\Lambda}{EZ} = \frac{\Gamma\Delta}{MN}$. Mais, par hypothèse : $\Gamma\Delta \times MN = \overline{H\Theta}^2$, d'où :

$$\frac{\Gamma\Delta}{MN} = \frac{\overline{\Gamma\Delta}^2}{\overline{H\Theta}^2} = \frac{\text{cercle E}}{\text{cercle K}}, \text{ d'où : } \frac{K\Lambda}{EZ} = \frac{\text{cercle E}}{\text{cercle K}} = \frac{K\Lambda}{EZ}.$$

3. La phrase placée entre crochets aura été interpolée.

4. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, lemme 4, ou EUCLIDE, liv. XII, proposition 15.

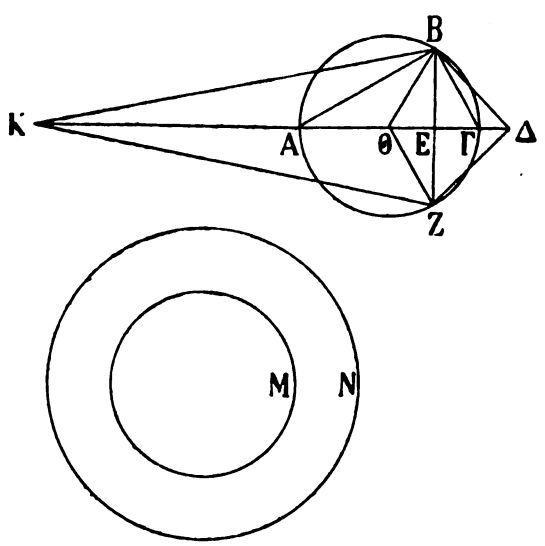
5. Par hypothèse : KΛ = hauteur cylindre K = diamètre sphère B ; or, KΛ = HΘ, d'où : HΘ = diamètre sphère B, d'où : cylindre K = $\frac{3}{2}$ sphère B. De plus, par hypothèse : cylindre E = $\frac{3}{2}$ cône ou cylindre A ; or, cylindre K = cylindre E, d'où : sphère B = cône ou cylindre A.

Digitized by Google

sphère et de la hauteur du segment restant à la hauteur du segment restant.

Soit une sphère dans laquelle on a un grand cercle dont le diamètre est AΓ, et coupons la sphère par un plan mené par la droite BZ, perpendiculairement à AΓ. Soit Θ le centre, et faisons en sorte qu'une droite ΔE soit à la droite ΓE comme la somme des droites ΘA, AE est à AE. Faisons encore en sorte qu'une droite KE soit à la droite EA, comme la somme des droites ΘΓ, ΓE est à la droite ΓE. Enfin, sur le cercle décrit autour du diamètre BZ, élevons des cônes ayant comme sommets les points K, Δ. Je dis que le cône BΔZ est équivalent au segment de la sphère situé du côté du point Γ, tandis que le cône BKZ est équivalent au segment situé du côté du point A.

En effet, menons les droites de jonction BΘ, ΘZ, et imaginons un cône ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre BZ et comme sommet le point Θ. Soit, en outre, un cône M ayant comme base le cercle équivalent à l'aire du segment de sphère BΓZ, cercle dont le rayon est égal à la droite BΓ (1), tandis que sa hauteur est égale au rayon de la sphère. Dès lors, le cône M sera équivalent au secteur solide BΓΘZ, car cela a été démontré dans le livre premier (2). Mais, puisque la somme de ΘA, AE est à AE comme ΔE est à EΓ, par division, ΘA sera à AE, c'est-à-dire que ΓΘ sera à AE comme ΓΔ est à ΓE, et, par permutation, ΓE sera à AE comme ΔΓ est à ΓΘ, et, par composition, ΓA sera à AE, c'est-à-dire que le carré de ΓB sera au carré de BE comme ΘΔ est à ΘΓ. En conséquence, le carré de ΓB est au carré de BE comme ΔΘ est à ΓΘ. Or, ΓB est égal au rayon du cercle M, tandis que BE est le rayon du cercle décrit autour de BZ. Par conséquent, le cercle M est au cercle décrit autour du diamètre BZ



1. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, proposition XLII.
2. *Ibidem*, livre I, prop. XLIV.

Digitized by Google

comme $\Delta\Theta$ est à $\Theta\Gamma$ (1). De plus, $\Theta\Gamma$ est égal à l'axe du cône M (2); par conséquent, le cercle M est au cercle décrit autour du diamètre BZ comme $\Delta\Theta$ est à l'axe du cône M. Dès lors, le cône ayant comme base le cercle M et comme hauteur le rayon de la sphère est équivalent au rhombe solide $B\Delta Z\Theta$ (3). Or, le cône M équivaut au secteur solide $B\Gamma Z\Theta$; par conséquent, le secteur solide $B\Gamma Z\Theta$ équivaut aussi au rhombe solide $B\Delta Z\Theta$. Retranchant de part et d'autre le cône dont la base est le cercle décrit autour du diamètre BZ et dont la hauteur est $E\Theta$, le cône restant $B\Delta Z$ est équivalent au segment de sphère $BZ\Gamma$ (4).

On démontrera pareillement que le cône BKZ est aussi équivalent au segment de sphère BAZ. En effet, puisque KE est à EA comme la somme de $\Theta\Gamma$, ΓE est à ΓE, par division, $\Theta\Gamma$ sera donc à ΓE comme KA est à AE. Or, $\Theta\Gamma$ est égal à ΘA, et, par conséquent, en permutant, AE est à $E\Gamma$ comme KA est à $A\Theta$. Dès lors, par compo-

---

1. On a posé la relation : $\frac{\Delta E}{E\Gamma} = \frac{\Theta A + AE}{AE}$, ou, comme le texte : $\frac{\Theta A + AE}{AE} = \frac{\Delta E}{E\Gamma}$, d'où : $\frac{\Theta A + AE - AE}{AE} = \frac{\Delta E - E\Gamma}{E\Gamma}$, ou $\frac{\Theta A}{AE} = \frac{\Gamma\Delta}{E\Gamma}$. Or, $\Theta A = \Theta\Gamma$; donc $\frac{\Theta\Gamma}{AE} = \frac{\Gamma\Delta}{E\Gamma}$, d'où : $\frac{E\Gamma}{AE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Theta\Gamma}$. d'où: $\frac{E\Gamma + AE}{AE} = \frac{\Gamma\Delta + \Theta\Gamma}{\Theta\Gamma}$, ou $\frac{\Gamma A}{AE} = \frac{\Theta\Delta}{\Theta\Gamma}$, d'où : $\frac{\Gamma A \times E\Gamma}{AE \times E\Gamma} = \frac{\overline{\Gamma B}^2}{\overline{BE}^2} = \frac{\Theta\Delta}{\Theta\Gamma}$.

Or (note avant-précédente), ΓB = rayon du cercle M ; donc : $\frac{\text{cercle M}}{\text{cercle de diam. BZ}} = \frac{\Theta\Delta}{\Theta\Gamma}$.

2. Par hypothèse.

3. On a, par hypothèse : $\Theta\Gamma$ = hauteur cône de base cercle M, et soit $\Theta\Delta$ = hauteur d'un cône de base cercle de diam. BZ. La relation de la note précédente $\frac{\text{cercle M}}{\text{cercle diam. BZ}} = \frac{\Theta\Delta}{\Theta\Gamma}$, montre que ces cônes ont les bases inversement proportionnelles aux hauteurs, d'où (Livre I, lemme 4, ou EUCLIDE, livr. XII, prop. 15) : cône M = cône de base cercle BZ et de hauteur $\Theta\Delta$.

D'autre part (Livre I, lemme 1, ou EUCLIDE, livre XII, prop. 14), des cônes de même base sont entre eux comme les hauteurs, d'où, en observant que $\Theta\Delta = \Theta E + E\Delta$:

Cône base cercle BZ et de hauteur $\Theta\Delta$ = cône base BZ et de hauteur ΘE + cône base BZ et de hauteur $E\Delta$ = rhombe $B\Delta Z\Theta$, d'où, remontant à l'égalité précédente, il vient, comme le texte : cône de base cercle M et de hauteur $\Theta\Gamma$, ou de hauteur rayon sphère = rhombe $B\Delta Z\Theta$. Le texte présente ici le commentaire suivant qui a été interpolé : « car cela a été démontré dans les lemmes du livre premier, ou ainsi : puisque $\Delta\Theta$ est à la hauteur du cône M comme le cercle M est au cercle décrit autour du diamètre BZ, le cône M sera équivalent au cône dont la base est le cercle décrit autour du diamètre BZ et dont la hauteur est $\Delta\Theta$, car leurs bases sont inversement proportionnelles à leurs hauteurs. Mais le cône ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre BZ et comme hauteur $\Delta\Theta$ équivaut au rhombe solide $B\Delta Z\Theta$. »

4. On a (livr. I, prop. XLIV) : cône M = secteur $B\Gamma\Theta Z$, et on vient de voir cône M = rhombe $B\Delta Z\Theta$, d'où : secteur sphérique $B\Gamma\Theta Z$ = rhombe $B\Delta Z\Theta$, d'où : secteur sphérique $B\Gamma\Theta Z$ — cône $Z\Theta B$ = rhombe $B\Delta Z\Theta$ — cône $Z\Theta B$, ou, comme le texte : cône $B\Delta Z$ = segment sphérique $BZ\Gamma$.

Digitized by Google

sition, AΓ est à ΓE, KΘ est à ΘA comme AΓ est à ΓE, c'est-à-dire que le carré de BA est au carré de BE comme KΘ est à ΘA (1).

Prenons de nouveau un cercle N ayant le rayon égal à AB ; il sera donc équivalent à l'aire du segment BAZ (2). De plus, imaginons un cône N ayant une hauteur égale au rayon de la sphère ; il sera donc équivalent au secteur solide BΘZA, car cela a été démontré au livre premier (3). Enfin, puisqu'il a été démontré que le carré du rayon du cercle N est au carré du rayon du cercle décrit autour du diamètre BZ, ou que le cercle N est au cercle décrit autour du diamètre BZ comme KΘ est à ΘA, tandis que la droite AΘ est égale à la hauteur du cône N, il en résulte que le cercle N est au cercle décrit autour du diamètre BZ comme KΘ est à la hauteur du cône N. En conséquence, le cône N, c'est-à-dire le secteur BΘZA équivaut à la figure BΘZK (4).

---

1. On a posé la relation : $\frac{KE}{EA}=\frac{\Theta\Gamma+\Gamma E}{\Gamma E}$, d'où : $\frac{KE-EA}{EA}=\frac{\Theta\Gamma+\Gamma E-\Gamma E}{\Gamma E}$, ou $\frac{KA}{EA}=\frac{\Theta\Gamma}{\Gamma E}$, ou, comme le texte : $\frac{\Theta\Gamma}{\Gamma E}=\frac{KA}{EA}$. Or, $\Theta\Gamma=\Theta A$; donc, par permutation : $\frac{EA}{\Gamma E}=\frac{KA}{\Theta A}$, d'où : $\frac{EA+\Gamma E}{\Gamma E}=\frac{KA+\Theta A}{\Theta A}$, ou $\frac{A\Gamma}{\Gamma E}=\frac{K\Theta}{\Theta A}$, d'où : $\frac{A\Gamma\times EA}{\Gamma E\times EA}=\frac{\overline{BA}^2}{\overline{BE}^2}=\frac{K\Theta}{\Theta A}$.

2. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, prop. XLIII, qui étend la proposition XLII au cas du segment sphérique plus grand que l'hémisphère.

3. Cette équivalence ne découle plus ici directement de la proposition XLIV du livre I *De la Sphère et du Cylindre*, comme pour le cône M défini dans la première partie de la démonstration, vu que cette proposition ne vise que le segment sphérique plus petit que l'hémisphère. D'autre part, il s'agit ici d'un secteur solide d'une forme particulière BΘZA, composé du segment sphérique BAZ creusé du volume du cône BΘZ, qui ne répond plus à la définition du secteur sphérique donnée par la définition 5, au début du Livre I.

Dans ces conditions, l'équivalence du cône N et du secteur particulier BΘZA peut se déduire de la manière suivante :

Imaginons un cône Σ de base équivalente à l'aire totale de la sphère et de hauteur égale au rayon. On a (Livre I, prop. XLII) : base cône M = aire segment sphérique BΓZ, et (livre I, prop. XLIII) : base cône N = segment sphérique BAZ. Dès lors, on a : base cône Σ = base cône M + base cône N. Or, ces trois cônes ont même hauteur, d'où : cône Σ = cône M + cône N ; d'où : cône N = cône Σ — cône M. Or, cône $\Sigma=\frac{1}{3}\Theta\Gamma\times 4\pi\overline{\Theta\Gamma}^2=\frac{4}{3}\pi\overline{\Theta\Gamma}^3$ = sphère, et on a vu (liv. I, prop. XLIV) que cône M = secteur BΓΘZ, d'où : cône N = sphère — secteur BΓΘZ = secteur BΘZA.

4. On a vu que $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}=\frac{K\Theta}{\Theta A}$, c'est-à-dire $\frac{\text{cercle N}}{\text{cercle diam. BZ}}=\frac{K\Theta}{\Theta A}$, et, par hypothèse : ΘA = hauteur cône de base cercle N. Soit KΘ = hauteur d'un cône de base cercle BZ. Donc, ces deux cônes ont les bases inversement proportionnelles aux hauteurs, d'où (livre I, lemme 4) : cône N = cône de base cercle BZ et de hauteur KΘ. Mais on a démontré (note précédente) que cône N = secteur sphérique BΘZA. D'autre part, en observant que KΘ = KE — ΘE, et que cônes de même base sont entre eux comme les hauteurs : cône (base BZ, hauteur KΘ) = cône (base BZ, hauteur KE) — cône (base BZ, hauteur ΘE) = figure solide BΘZK, d'où, comme le texte :

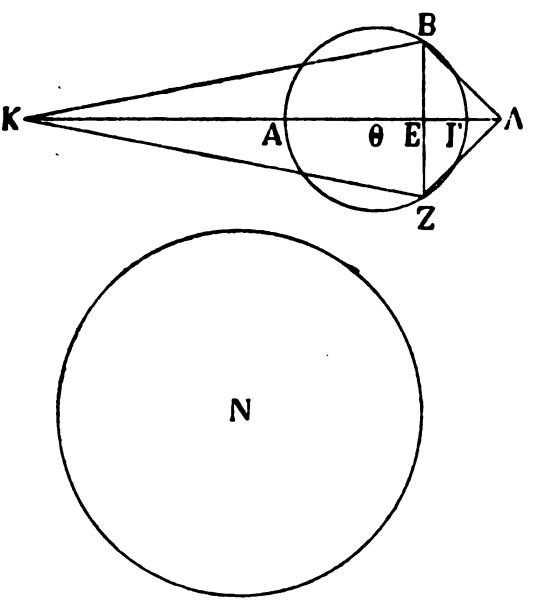
cône N = secteur BΘZA = figure BΘZK.

Digitized by Google

Ajoutons de part et d'autre le cône dont la base est le cercle décrit autour de BZ et dont la hauteur est EΘ, il en résulte que le segment sphérique entier ABZ est équivalent au cône BZK ; ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

En outre, il est clair que, d'une manière générale, un segment de sphère est au cône ayant même base que ce segment et hauteur égale comme la somme du rayon de la sphère et de la hauteur du segment restant est à la hauteur du segment restant ; car le cône ΔZB, c'est-à-dire le segment BΓZ est au cône BΓZ comme ΔE est à EΓ (1).



Les choses restant les mêmes (2) nous démontrerons aussi que le cône KBZ est équivalent au segment BAZ de la sphère (3).

En effet, soit N un cône ayant la base équivalente à l'aire de la sphère et comme hauteur le rayon de la sphère. Ce cône est donc équivalent à la sphère ; car il a été démontré que la sphère est quadruple du cône ayant le plus grand cercle comme base et le rayon comme hauteur (4). Or, le cône N est aussi quadruple de

1. On a (livre I, lemme 1) : $\frac{\text{cône } \Delta ZB}{\text{cône } B\Gamma Z} = \frac{\Delta E}{E\Gamma}$. Or (livre I, proposition II), on a : cône ΔZB = segment sphérique BΓZ, d'où : $\frac{\text{segment } B\Gamma Z}{\text{cône } B\Gamma Z} = \frac{\Delta E}{E\Gamma}$; or, on a vu que la hauteur EΔ du cône AZB est liée par la relation : $\frac{\Delta E}{E\Gamma} = \frac{\Theta A + AE}{AE}$, d'où, conformément au texte de l'énoncé : $\frac{\text{segt. } B\Gamma Z}{\text{cône } B\Gamma Z} = \frac{\Theta A + AE}{AE}$.

2. C.-à-d. les mêmes que dans la proposition II qui précède.

3. Il s'agit ici d'une variante de la 2e partie de la démonstration de la proposition II, présentée sous la forme d'une réciproque. Il est probable qu'à l'origine le texte de cette nouvelle démonstration portait un titre quelconque destiné à le rattacher à la proposition II.

4. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livr. I, prop. XXXIV.

Digitized by Google

ce même cône, puisque l'on a la base quadruple de la base (1) et l'aire de la sphère quadruple de son plus grand cercle (2). De plus, puisque ΔE est à EΓ comme la somme de ΘA est à AE, par division et par permutation, AE sera à EΓ comme ΘΓ est à ΓΔ. D'autre part, puisque la somme de ΘΓ, ΓE est à ΓE comme KE est à EA, par division et par permutation, AE sera à EΓ, c'est-à-dire que ΘΓ sera à ΓΔ comme KA est à ΓΘ, c'est-à-dire à ΘA. Puis, par composition, tandis que AΘ est égal à ΘΓ, il en résulte que ΘΔ est à ΔΓ comme KΘ est à ΘΓ, et que la droite entière KΔ est à la droite ΔΘ comme ΔΘ est à ΔΓ, c'est-à-dire comme KΘ est à ΘA. En conséquence, le rectangle formé sous ΔK, ΘA équivaut au rectangle formé sous ΔΘ, ΘK (3). Derechef, puisque ΘΔ est à ΓΔ comme KΘ est à ΘΓ, si nous permutons, tandis qu'il a été démontré que AE est à EΓ comme ΘΓ est à ΓΔ, il en résulte que AE est à EΓ comme KΘ est à ΘΔ, et que le carré de AΓ est au rectangle formé sous AE, EΓ comme le carré de KΔ est au rectangle formé sous KΘ, ΘΔ (4). Or, on a démontré que le rectangle délimité sous les droites KΘ, ΘΔ équivaut au rectangle délimité sous les droites KΔ, AΘ ; par conséquent, le carré de AΓ est au rectangle sous AE, EΓ, c'est-à-dire au carré de EB, comme le carré de KΔ est au rectangle sous KΔ, AΘ, c'est-à-dire comme KΔ est à AΘ (5). De

---

1. *Ibidem,* lemme I.

2. *Ibidem,* prop. XXXIII.

3. On a vu (prop. II, 1re partie) que la hauteur du cône BΔZ est subordonnée à la relation $\frac{\Theta A + AE}{AE} = \frac{\Delta E}{E\Gamma}$, d'où : $\frac{\Theta A + AE - AE}{AE} = \frac{\Delta E - E\Gamma}{E\Gamma}$, ou, en observant que $\Theta A = \Theta\Gamma$, $\frac{\Theta\Gamma}{AE} = \frac{\Gamma\Delta}{E\Gamma}$, d'où : $\frac{\Theta\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{E\Gamma}$. D'autre part, la hauteur du cône BKZ est subordonnée à la relation $\frac{\Theta\Gamma + \Gamma E}{\Gamma E} = \frac{KE}{AE}$, d'où : $\frac{\Theta\Gamma + \Gamma E - \Gamma E}{\Gamma E} = \frac{KE - AE}{AE}$, ou, en observant que $\Theta\Gamma = \Theta A$, $\frac{\Theta A}{\Gamma E} = \frac{KA}{AE}$, d'où : $\frac{AE}{\Gamma E} = \frac{KA}{\Theta A}$. Dès lors : $\frac{\Theta\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{KA}{\Theta A}$, d'où : $\frac{\Theta\Gamma + \Gamma\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{KA + \Theta A}{\Theta A}$, ou $\frac{\Theta\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{K\Theta}{\Theta A}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Theta\Delta + K\Theta}{\Gamma\Delta + \Theta A} = \frac{K\Delta}{\Delta\Theta} = \frac{K\Theta}{\Theta A}$, d'où : $K\Delta \times \Theta A = \Delta\Theta \times K\Theta$.

4. La relation de la note précédente $\frac{\Theta\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{K\Theta}{\Theta A} = \frac{K\Theta}{\Theta\Gamma}$ donne : $\frac{\Theta\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{K\Theta}{\Theta\Delta}$, d'où, comparant avec la relation $\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{\Theta\Gamma}{\Gamma\Delta}$ de la note précédente, on a : $\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{K\Theta}{\Theta\Delta}$, d'où : $\frac{AE + E\Gamma}{E\Gamma} = \frac{K\Theta + \Theta\Delta}{\Theta\Delta}$, ou $\frac{A\Gamma}{E\Gamma} = \frac{K\Delta}{\Theta\Delta}$, d'où : $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{E\Gamma}^2} = \frac{\overline{K\Delta}^2}{\overline{\Theta\Delta}^2}$. D'autre part, $\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{K\Theta}{\Theta\Delta}$ peut s'écrire : $\frac{AE \times E\Gamma}{E\Gamma^2} = \frac{K\Theta \times \Theta\Delta}{\Theta\Delta^2}$; donc : $\frac{A\Gamma^2}{AE \times E\Gamma} = \frac{K\Delta^2}{K\Theta \times \Theta\Delta}$.

5. On a eu (note avant-précédente) : $K\Theta \times \Theta\Delta = K\Delta \times A\Theta$, d'où substituant dans

Digitized by Google

plus, la droite AΓ est égale au rayon du cercle N (1) ; donc KΔ est à AΘ, c'est-à-dire que KΔ est à la hauteur du cône N comme le carré du rayon du cercle N est au carré de BE, c'est-à-dire comme le cercle N est au cercle décrit autour du diamètre BZ. Dès lors, le cône N, c'est-à-dire la sphère, équivaut au rhombe solide BΔZK (2) dont le cône BΔZ a été démontré être équivalent au segment BΓZ de la sphère. En conséquence, le cône restant BKZ équivaut au segment BAZ de la sphère (3).

PROPOSITION III.

Le troisième problème était celui-ci : couper une sphère donnée par un plan de manière que les aires des segments soient entre elles dans un rapport donné.

Que la chose soit réalisée. Soit AΔBE un grand cercle de la sphère, et soit AB son diamètre. Etablissons un plan perpendiculairement à AB, que ce plan détermine la section ΔE dans le cercle AΔBE, et menons les droites de jonction AΔ, BΔ. Dès lors, puisque l'on a le rapport de l'aire du segment ΔAE à l'aire du segment ΔBE ; mais que l'aire du segment ΔAE équivaut au cercle dont le rayon est égal

---

la relation de la note précédente, et observant que $AE \times E\Gamma = \overline{EB}^2$, il vient : $\frac{A\Gamma^2}{EB^2} = \frac{K\Delta}{A\Theta}$.

1. Par hypothèse : cercle de base du cône N = aire sphère $= 4\pi\overline{\Theta\Gamma}^2$, d'où : rayon cercle N $= 2\,\Theta\Gamma = A\Gamma$.

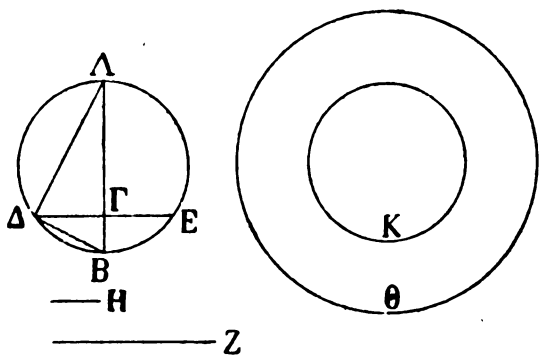
2. Le texte comporte ici l'interpolation suivante : « ou bien comme suit : donc ΔK est à la hauteur du cône N comme le cercle N est au cercle décrit autour du diamètre BZ. Par conséquent, le cône N équivaut au cône dont la base est le cercle décrit autour du diamètre BZ et dont la hauteur est ΔK, car les bases des cônes sont inversement proportionnelles à leurs hauteurs. Or, ce dernier cône équivaut au rhombe solide BKZΔ; donc le cône N, c'est-à-dire la sphère, vaut aussi le rhombe solide BZKΔ. »

3. La relation $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{EB}^2} = \frac{K\Delta}{A\Theta}$ se traduit :

$$\frac{\text{carré de rayon du cercle N}}{\overline{EB}^2} = \frac{\text{cercle N}}{\text{cercle de diam. BZ}} = \frac{K\Delta}{\text{hauteur du cône N}}.$$

Donc, les cônes de base cercle N et de base cercle de diamètre BZ ont les bases inversement proportionnelles aux hauteurs, d'où (livre I, lemme 4) : cône N = cône de base cercle de diamètre BZ et de hauteur KΔ. Or, cône de base diam. BZ et de hauteur KΔ = cône de base diam. BZ, de hauteur KE + cône de base diam. BZ et de hauteur EΔ = rhombe BΔZK. Or, cône N = sphère ; donc : sphère = rhombe BΔZK. Mais on a vu (prop. II, 1re partie) que cône BΔZ = segment sphérique BΓZ ; donc : rhombe BΔZK — cône BΔZ = sphère — segment sphérique BΓZ, d'où, comme le texte : cône BKZ = segment sphérique BAZ.

Digitized by Google



à la droite AΔ (1) ; tandis que l'aire du segment ΔBE équivaut au cercle dont le rayon est égal à la droite ΔB (2) ; que, d'autre part, le carré de AΔ est au carré de ΔB, c'est-à-dire que AΓ est à ΓB comme sont entre eux les cercles que nous venons de dire (3), il en résulte que le rapport de AΓ à ΓB est donné ; en sorte que le point Γ est donné. De plus, ΔE est perpendiculaire à AB ; par conséquent, le plan passant par ΔE est donné de position.

La synthèse sera donc la suivante : soit une sphère, dont le plus grand cercle est ABΔE et dont le diamètre est AB. Que le rapport donné soit celui de la droite Z à la droite H, et coupons AB au point Γ de manière que AΓ soit à ΓB comme Z est à H (4). Par le point Γ coupons la sphère par un plan perpendiculaire à la droite AB, et soit ΔE la section commune (5). Menons les droites de jonction AΔ, ΔB et posons deux cercles Θ, K, le cercle Θ ayant le rayon égal à la droite AΔ et le cercle K le rayon égal à la droite ΔB. Dès lors, le cercle Θ équivaut à l'aire du segment ΔAE (6), tandis que le cercle K équivaut à l'aire du segment ΔBE (7), car cela a été démontré au livre premier. Et puisque l'angle sous AΔ, ΔB est droit, et que ΓΔ est une perpendiculaire, le carré de AΔ est au carré de ΔB, c'est-à-dire que le carré du rayon du cercle Θ est au carré du rayon du cercle K, ou que le cercle Θ est au cercle K, ou que l'aire du segment ΔAE est à l'aire du segment ΔBE de la sphère comme la droite AΓ est à la droite ΓB, c'est-à-dire comme Z est à H.

---

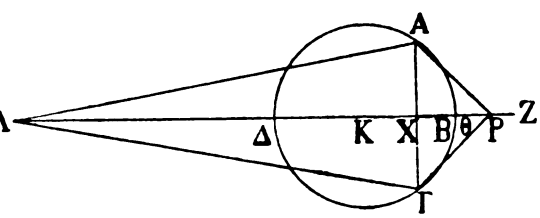
1. Voir : *De la Sphère et du Cylindre,* livre I, proposition XLIII.
2. Voir : *De la Sphère et du Cylindre,* livre I, proposition XLII.
3. Car $\overline{A\Delta}^2 = A\Gamma \times AB$ et $\overline{\Delta B}^2 = \Gamma B \times AB$, d'où : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Delta B}^2} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B}$.
4. Voir : EUCLIDE, livre VI, prop. 10.
5. C.-à-d. commune au plan sécant et au plan du grand cercle.
6. Voir : *De la Sphère et du Cylindre,* liv. I, prop. XLIII.
7. *Ibidem,* livre I, proposition XLII.

Digitized by Google

PROPOSITION IV.

Couper une sphère donnée de manière que les segments de sphère soient entre eux dans un rapport donné.

Soit ABΓΔ la sphère donnée. On doit la couper par un plan de manière que les segments de sphère soient entre eux dans le rapport donné. Coupons par un plan passant par la droite AΓ. Dès lors, le rapport du segment AΔΓ de la sphère au segment ABΓ de la sphère est donné. Coupons la sphère par le centre (1), que la section soit le grand cercle ABΓΔ, que le centre soit K et le diamètre ΔB. Faisons en sorte que PX soit à XB comme la somme de KΔ, ΔX est à ΔX, tandis que ΛX soit à XΔ comme la somme de KB, BX est à BX, et menons les droites de jonction AΛ, ΛΓ, AP, PΓ. Dès lors, le cône AΛΓ équivaut au segment AΔΓ de la sphère et le cône APΓ au segment ABΓ (2) ; par conséquent, le rapport du cône AΛΓ au cône APΓ est donné. Or, ΛX est à XP comme cône est à cône, puisque ces cônes ont comme même base le cercle décrit autour du diamètre AΓ ; par conséquent, le rapport de ΛX à XP est donné également. Pour les mêmes raisons que précédemment, par construction, KB est à BP et ΔX est à XB comme ΛΔ est à KΔ (3). Et, puisque KΔ est à ΛΔ comme PB est à BK, par composition, KΛ est à ΛΔ comme PK est à KB, c'est-à-dire à KΔ; par conséquent, KΛ est aussi à ΛΔ comme la droite entière PΛ est à



1. Le texte sous-entend ici, ou bien aura perdu : « par un plan perpendiculaire au plan mené par AΓ. »

2. Voir proposition II.

3. Par une suite de relations analogues à celles de la proposition II, on a, par construction: $\frac{K\Delta+\Delta X}{\Delta X}=\frac{PX}{XB}$, d'où : $\frac{K\Delta+\Delta X-\Delta X}{\Delta X}=\frac{PX-XB}{XB}$, ou $\frac{K\Delta}{\Delta X}=\frac{PB}{XB}$. Or, $K\Delta=KB$, d'où : $\frac{KB}{\Delta X}=\frac{PB}{XB}$ et, par permutation : $\frac{KB}{PB}=\frac{\Delta X}{XB}$ (I). D'autre part, par construction: $\frac{\Lambda X}{X\Delta}=\frac{KB+BX}{BX}$, d'où: $\frac{\Lambda X-X\Delta}{X\Delta}=\frac{KB+BX-BX}{BX}$, ou $\frac{\Lambda\Delta}{X\Delta}=\frac{KB}{BX}$. Or, $KB=K\Delta$, d'où: $\frac{\Lambda\Delta}{X\Delta}=\frac{K\Delta}{BX}$ et, permutant, $\frac{\Lambda\Delta}{K\Delta}=\frac{X\Delta}{BX}$ (II). Dès lors, les relations (I), (II) donnent, comme le texte : $\frac{KB}{PB}=\frac{\Delta X}{XB}=\frac{\Lambda\Delta}{K\Delta}$.

Digitized by Google

la droite entière KΛ. Dès lors, le rectangle formé sous PΛ, ΛΔ équivaut au carré de KΛ et le carré de KΛ est donc au carré de ΛΔ comme PΛ est à ΛΔ (1). De plus, puisque ΔX est à XB comme ΛΔ est à ΔK, par inversion et par composition, BΔ sera à ΔX comme KΛ est à ΛΔ(2). Posons la droite BZ égale à la droite KB ; il est d'ailleurs évident qu'elle s'étendra au delà du point P (3). Or, puisque le rapport de ΔΛ à ΛX est donné, celui de PΛ à ΛX sera donc donné aussi (4). Donc, puisque le rapport de PΛ à ΛX se compose du rapport de PΛ à ΛΔ et de celui de ΛΔ à ΛX, mais que le carré de ΔB est au carré de ΔX comme PΛ est à ΛΔ, tandis que BZ est à ZX comme ΔΛ est à ΛX, il en résulte que le rapport de PΛ à ΛX se compose du rapport du carré de BΔ au carré de ΔX et du rapport de BZ à ZX (5). Etablis-

---

1. La relation $\frac{KB}{PB}=\frac{\Lambda\Delta}{K\Delta}$ de la note précédente, présentée dans le texte sous la forme $\frac{K\Delta}{\Lambda\Delta}=\frac{PB}{KB}$, donne : $\frac{K\Delta+\Lambda\Delta}{\Lambda\Delta}=\frac{PB+KB}{KB}$, ou $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Delta}=\frac{PK}{KB}$, ou, en observant que $K\Delta=KB$, $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Delta}=\frac{PK}{K\Delta}$. Donc, par permutation et par addition, on a : $\frac{K\Delta+\Lambda\Delta}{\Lambda\Delta}=\frac{PK+K\Lambda}{K\Lambda}$, ou $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Delta}=\frac{P\Lambda}{K\Lambda}$, d'où : $\overline{K\Lambda}^2=P\Lambda\times\Lambda\Delta$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{K\Lambda}^2}{\overline{\Lambda\Delta}^2}=\frac{P\Lambda}{\Lambda\Delta}$.

2. La relation de la note avant-précédente $\frac{\Delta X}{XB}=\frac{\Lambda\Delta}{\Delta K}$ donne par inversion : $\frac{XB}{\Delta X}=\frac{\Delta K}{\Lambda\Delta}$, et par addition $\frac{XB+\Delta X}{\Delta X}=\frac{\Delta K+\Lambda\Delta}{\Lambda\Delta}$, ou $\frac{B\Delta}{\Delta X}=\frac{K\Lambda}{\Lambda\Delta}$.

Le texte présente ici l'interpolation suivante : « et le carré de BΔ est au carré de ΔX comme le carré de KΛ est du carré de ΛΔ. Et, de nouveau, puisque la somme de KB, BX est à BX comme ΛX est à ΔX, par différence KB est à BX comme ΛΔ est à ΔX. »

3. En effet, dans la relation $\frac{\Delta X}{XB}=\frac{KB}{PB}$, on a $\Delta X > XB$; donc $KB > PB$. Or, $BZ = KB$, donc $BZ > PB$.

Le texte présente ici l'interpolation : « et ZB sera à BX comme ΛΔ est à ΔX, en sorte que BZ sera aussi à ZX comme ΔΛ est à ΛX. »

4. On a posé $BZ = KB$, donc la relation donnée $\frac{\Lambda X}{X\Delta}=\frac{KB+BX}{BX}$ devient : $\frac{\Lambda X}{X\Delta}=\frac{ZX}{BX}$, d'où : $\frac{\Lambda X}{\Lambda X-X\Delta}=\frac{ZX}{ZX-BX}$, ou $\frac{\Lambda X}{\Lambda X}=\frac{ZX}{ZB}$. Or, $ZB = KB$ est une donnée, XB et par suite $XB+BZ=ZX$ sont déterminées par la position du plan sécant, donc $\frac{ZX}{ZB}$ est donné, d'où $\frac{\Delta X}{\Lambda X}$ est donné. D'autre part, on a vu plus haut que le rapport $\frac{\text{cône } AP\Gamma}{\text{cône } A\Lambda\Gamma}$ est donné. Or, $\frac{XP}{\Lambda X}=\frac{\text{cône } AP\Gamma}{\text{cône } A\Lambda\Gamma}$, d'où : $\frac{XP+\Lambda X}{\Lambda X}=\frac{\text{cône } AP\Gamma+\text{cône } A\Lambda\Gamma}{\text{cône } A\Lambda\Gamma}$, ou $\frac{P\Lambda}{\Lambda X}=\frac{\text{rhombe } A\Lambda\Gamma P}{\text{cône } A\Lambda\Gamma}$; donc $\frac{P\Lambda}{\Lambda X}$ est donné.

5. Plus explicitement, on peut écrire : $\frac{P\Lambda}{\Lambda X}=\frac{P\Lambda}{\Lambda\Delta}\times\frac{\Lambda\Delta}{\Lambda X}$, relation qu'Archimède appelle rapport composé de deux rapports et qu'Eutocius, dans son commentaire

Digitized by Google

sons BZ à ZΘ comme PΛ est à ΛX. Le rapport de PΛ à ΛX est d'ailleurs donné ; donc, le rapport de BZ à ZΘ est donné aussi. Or, la droite BZ est donnée, car elle est égale au rayon ; donc, la droite ZΘ est donnée aussi. De plus, le rapport de BZ à ZΘ est donc composé des rapports du carré de BΔ au carré de ΔX et de BZ à ZX. Or, le rapport de BZ à ZΘ est composé des rapports de BZ à ZX et de ZX à ZΘ (1) ; il reste donc que XZ est à ZΘ, c'est-à-dire à une droite donnée, comme le carré de BΔ, c'est-à-dire une donnée, est au carré de ΔX (2). De plus, la droite ZΔ est donnée ; donc on doit couper la droite donnée ΔZ au point X et faire en sorte qu'une donnée (3) soit au carré de ΔX comme XZ est à une droite donnée (4). Mais, en énonçant la chose simplement de cette manière, il y aura discussion, tandis que si l'on ajoute les conditions qui sont posées dans le présent cas, c'est-à-dire que, suivant l'analyse, ΔB est le double de BZ et que ZB est plus grand que ZΘ, il n'y aura pas de discussion, et le problème se présentera comme suit : Etant données deux droites BΔ, BZ, dont BΔ double de BZ, ainsi qu'un point Θ sur la droite BZ, couper la droite ΔB en un point X de manière que XZ soit à ZΘ comme le carré de BΔ est au carré de ΔX.

Nous donnerons d'ailleurs l'analyse et la synthèse de chacun de ces cas à la fin de la proposition (5).

---

sur cette proposition, démontre longuement par des considérations purement géométriques. Or, la relation $P\Lambda \times \Lambda\Delta = \overline{K\Lambda}^2$ obtenue précédemment, donne : $\frac{P\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{\overline{K\Lambda}^2}{\overline{\Lambda\Delta}^2}$ tandis que l'on a démontré : $\frac{\overline{K\Lambda}^2}{\overline{\Lambda\Delta}^2} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta X}^2}$ d'où : $\frac{P\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta X}^2}$. D'autre part, on a vu (note précédente) que $\frac{ZB}{ZX} = \frac{\Lambda\Delta}{\Lambda X}$, d'où, substituant dans la première relation, il vient, comme le texte : $\frac{P\Lambda}{\Lambda X} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta X}^2} \times \frac{BZ}{ZX}$.

1. Le texte présente ici cette petite interpolation : « Eliminons le rapport commun de BZ à ZX. »

2. On établit $\frac{BZ}{Z\Theta} = \frac{P\Lambda}{\Lambda X}$; or, $\frac{P\Lambda}{\Lambda X}$ est donné ainsi que BZ = KB ; donc ZΘ est donné. Mais, on a eu : $\frac{P\Lambda}{\Lambda X} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta X}^2} \times \frac{BZ}{ZX}$ d'où : $\frac{BZ}{Z\Theta} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta X}^2} \times \frac{BZ}{ZX}$; or, on peut écrire : $\frac{BZ}{Z\Theta} = \frac{BZ}{ZX} \times \frac{ZX}{Z\Theta}$; donc, $\frac{BZ}{ZX} \times \frac{ZX}{Z\Theta} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta X}^2} \times \frac{BZ}{ZX}$, ou, comme le texte : $\frac{ZX}{Z\Theta} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta X}^2}$.

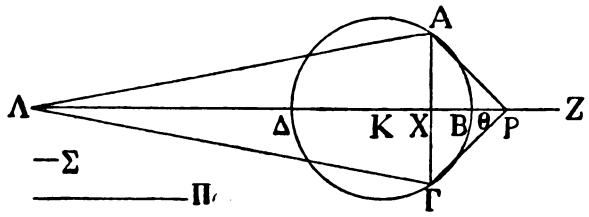
3. C'est-à-dire le carré de BΔ.

4. C'est-à-dire à la droite donnée ZΘ.

5. Le problème auxiliaire, dont Archimède annonce la démonstration, n'a pas été retrouvé à la fin de cette proposition ni à un autre endroit de ses œuvres.

Digitized by Google

La synthèse du problème sera donc la suivante : soit donné le rapport de la plus grande droite Π à la plus petite droite Σ. Qu'une sphère soit donnée, qu'elle soit coupée par un plan passant par le centre, et que la section soit le cercle ABΓΔ, dont le diamètre est BΔ et le centre K. Posons BZ égal à KB et coupons BZ en un point Θ de manière que ΘZ soit à ΘB comme Π est à Σ. Coupons encore BΔ en un point X de manière que XZ soit à ΘZ comme le carré de BΔ est au carré de ΔX, et, par le point X, menons un plan perpendiculaire à BΔ. Je dis que ce plan coupera la sphère de manière que le grand segment soit au petit comme Π est à Σ.



En effet, faisons en sorte que la somme de KB, BX soit à BX comme ΛX est à ΔX, tandis que la somme de KΔ, ΔX soit à XΔ comme PX est à XB et menons les droites de jonction AΛ, ΛΓ, AP, PΓ. On aura donc, en vertu de la construction, comme cela a été démontré dans l'analyse, le rectangle formé sous PΛ, ΛΔ équivalent au carré de ΛK, et KΛ sera à ΛΔ comme BΔ est à ΔX ; en sorte que le carré de KΛ sera aussi au carré de ΛΔ comme le carré de BΔ est au carré de ΔX. Et puisque le rectangle formé sous PΛ, ΛΔ équivaut au carré de ΛK, il s'ensuit que PΛ est à ΛΔ comme le carré

Cependant, comme il a dû reconnaître qu'une solution n'était pas possible par le seul usage de la règle et du compas, puisque selon les méthodes actuelles, elle découle d'une équation du 3^{me} degré, il est probable qu'il en a donné une à l'intervention des sections coniques dans un de ses ouvrages perdus. D'ailleurs, Eutocius, dans son commentaire sur cette proposition, déclare avoir déchiffré péniblement, dans un ouvrage dont le texte et les figures étaient fort altérés, une solution qu'il attribue à Archimède, en considération de ce qu'elle était rédigée dans le dialecte dorien, qui est celui des œuvres du grand géomètre, et de ce que les termes de parabole et d'hyperbole étaient encore exprimés par les périphrases habituelles à Archimède. C'est en s'inspirant de ce texte qu'Eutocius a rétabli une fort longue solution par les sections coniques (Cfr. éd. Torelli, p. 166-169 et éd. Heiberg, vol. III, p. 117). Mais, chose précieuse, Eutocius qui, au VI^{e} siècle, disposait encore des œuvres de certains géomètres grecs, qui ne nous sont pas parvenues, nous rapporte les solutions du problème en question données par Dioclès et par Dionysodore. La première aboutit à une construction géométrique par l'ellipse et l'hyperbole rectangulaire, tandis que celle de Dionysodore, qui reprend d'ailleurs entièrement le problème de la section de la sphère en segments dans un rapport donné, donne une magnifique solution au moyen de la parabole et de l'hyperbole. (Cfr. éd. Torelli, p. 169 et éd. Heiberg, vol. III, p. 153. Voir aussi l'excellente interprétation de la solution de Dionysodore, en notations modernes, dans l'ouvrage de Heath, *The works of Archimedes*, Cambridge, 1897, p. 66-79.)

Digitized by Google

de ΛK est au carré de ΛΔ. Par conséquent, PΛ sera aussi à ΛΔ comme le carré de BΔ est au carré de ΔX, c'est-à-dire comme XZ est à ΘZ(1). Et puisque la somme de KB, BX est à BX comme ΛX est à XΔ, tandis que KB est égal à BZ, il en résulte que ZX sera aussi à XB comme ΛX est à XΔ, et que, par conversion, ZX sera à ZB comme ΛX est à ΛΔ ; de manière que ΛΔ sera aussi à ΛX comme BZ est à ZX. Et puisque PΛ est à ΛΔ comme XZ est à ZΘ, tandis que ΛΔ est à ΛX comme BZ est à ZX, on aura, par identité en proportion troublée, PΛ à ΛX comme BZ est à ZΘ. Dès lors, ΛX sera aussi à XP comme ZΘ est à ΘB. Or, ZΘ est à ΘB comme Π est à Σ ; par conséquent, ΛX est aussi à XP, c'est-à-dire que le cône AΓΛ est au cône APΓ, ou bien que le segment AΛΓ de la sphère est au segment ABΓ de la sphère comme Π est à Σ (2).

PROPOSITION V.

Construire un segment de sphère semblable à un segment de sphère donné, et équivalent à un autre segment de sphère donné.

Soient deux segments de sphère donnés ABΓ, EZH. Soit le cercle décrit autour du diamètre AB la base du segment ABΓ et le point Γ le sommet ; tandis que le cercle décrit autour du diamètre EZ est la

---

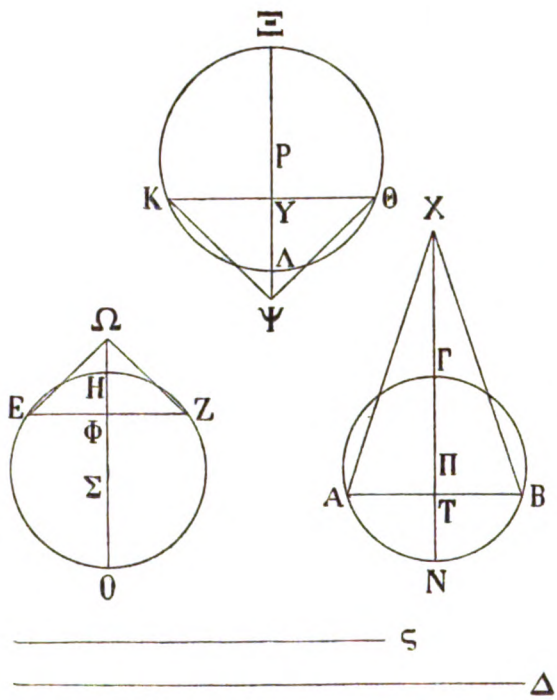
1. La relation $P\Lambda \times \Lambda\Delta = \overline{\Lambda K}^2$ donne : $\frac{P\Lambda \times \Lambda\Delta}{\overline{\Lambda\Delta}^2} = \frac{\overline{\Lambda K}^2}{\overline{\Lambda\Delta}^2}$, ou $\frac{P\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{\overline{\Lambda K}^2}{\overline{\Lambda\Delta}^2}$ Or, on a vu que $\frac{\overline{K\Lambda}^2}{\overline{\Lambda\Delta}^2} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta X}^2}$, d'où : $\frac{P\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta X}^2}$. Or, on a posé : $\frac{XZ}{\Theta Z} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta X}^2}$, d'où : $\frac{P\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{XZ}{\Theta Z}$.

2. Plus explicitement : Par hypothèse : $\frac{KB + BX}{BX} = \frac{\Lambda X}{X\Delta}$ et $KB = ZB$, d'où : $KB + BX = ZB + BX = ZX$, donc : $\frac{ZX}{BX} = \frac{\Lambda X}{X\Delta}$, d'où : $\frac{ZX}{ZX - BX} = \frac{\Lambda X}{\Lambda X - X\Delta}$, ou $\frac{ZX}{ZB} = \frac{\Lambda X}{\Lambda\Delta}$, d'où : $\frac{\Lambda\Delta}{\Lambda X} = \frac{BZ}{ZX}$. Or, on a eu (note précédente) : $\frac{P\Lambda}{\Lambda\Delta} = \frac{XZ}{Z\Theta}$, d'où : $\frac{P\Lambda}{\Lambda\Delta} \times \frac{\Lambda\Delta}{\Lambda X} = \frac{XZ}{Z\Theta} \times \frac{BZ}{ZX}$, ou $\frac{P\Lambda}{\Lambda X} = \frac{BZ}{Z\Theta}$, d'où : $\frac{P\Lambda}{P\Lambda - \Lambda X} = \frac{BZ}{BZ - Z\Theta}$, ou $\frac{P\Lambda}{PX} = \frac{BZ}{\Theta B}$, d'où : $\frac{P\Lambda}{BZ} = \frac{PX}{\Theta B}$. Or, $\frac{P\Lambda}{\Lambda X} = \frac{BZ}{Z\Theta}$ donne $\frac{P\Lambda}{BZ} = \frac{\Lambda X}{Z\Theta}$, donc : $\frac{\Lambda X}{Z\Theta} = \frac{PX}{\Theta B}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Lambda X}{PX} = \frac{Z\Theta}{\Theta B}$. Or, par hypothèse : $\frac{Z\Theta}{\Theta B} = \frac{\Pi}{\Sigma}$; donc : $\frac{\Lambda X}{PX} = \frac{\Pi}{\Sigma}$. Or, $\frac{\text{cône } A\Lambda\Gamma}{\text{cône } AP\Gamma} = \frac{\Lambda X}{PX}$, d'où : $\frac{\text{cône } A\Lambda\Gamma}{\text{cône } AP\Gamma} = \frac{\Pi}{\Sigma}$. Or (prop. II), cône $A\Lambda\Gamma$ = segment $A\Delta\Gamma$, et cône $AP\Gamma$ = segment $AB\Gamma$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{segment } A\Delta\Gamma}{\text{segment } AB\Gamma} = \frac{\Pi}{\Sigma}$.

Digitized by Google

base du segment EZH et le point H le sommet. Il faut donc trouver un segment de sphère qui soit équivalent au segment ABΓ, et semblable au segment EZH.

Que ce segment soit trouvé ; qu'il soit ΘKΛ, que sa base soit le cercle décrit autour du diamètre ΘK, et que son sommet soit le point Λ. Soient, en outre, dans ces sphères, les cercles (1) ANBΓ, ΘΞKΛ, EOZH, dont ΓN, ΛΞ, HO sont les diamètres perpendiculaires aux bases des segments, et dont Π, P, Σ sont les centres. Faisons en sorte que la somme de ΠN, NT soit à NT comme XT est à TΓ, que la somme de PΞ, ΞY soit à ΞY comme ΨY est à YΛ, que la somme de ΣO, OΦ soit à OΦ comme ΩΦ est à ΦH, et imaginons des cônes dont les bases soient les cercles décrits autour des diamètres AB, ΘK, EZ, et dont les sommets sont les points X, Ψ, Ω. Dès lors, le cône ABX sera équivalent au segment de sphère ABΓ, le cône ΨΘK équivalent au segment ΘKΛ, le cône EΩZ au segment EHZ, car cela a été démontré (2). Et puisque le segment de sphère ABΓ est équivalent au segment ΘKΛ, il en résulte que le cône AXB sera aussi équivalent au cône ΨΘK. Or, les bases de cônes équivalents sont inversement proportionnelles à leurs hauteurs; par conséquent, le cercle décrit autour du diamètre AB est au cercle décrit autour du diamètre ΘK comme ΨY est à XT (3). Or, un cercle est à l'autre comme le carré de AB est au carré de ΘK ; par conséquent, le carré de AB est au carré de ΘK comme ΨY est à XT. Et puisque le segment EZH



1. Le texte sous-entend ou aura perdu le mot μέγιστοι, c.-à-d. les plus grands (cercles).
2. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre II, proposition II.
3. *Ibidem*, livre I, lemme 4.

Digitized by Google

est semblable au segment ΘΚΛ, le cône EZΩ sera aussi semblable au cône ΨΘΚ (1) ; par conséquent, ΩΦ est à EZ comme ΨΥ est à ΘΚ.

Or, le rapport de ΩΦ à EZ est donné ; par conséquent, le rapport de ΨΥ à ΘΚ est donné également (2). Que ce rapport soit le même que celui de XT à Δ. Or, XT est donné (3) ; par conséquent, Δ est donné aussi. Et puisque ΨΥ est à XT, c'est-à-dire que le carré de AB est au carré de ΘΚ comme ΘΚ est à Δ (4), prenons un rectangle formé sous AB et ϛ équivalent au carré de ΘΚ. Dès lors, le carré de AB sera aussi au carré de ΘΚ comme AB est à ϛ (5). Or, il a été démontré également que le carré de AB est au carré de ΘΚ comme ΘΚ est à Δ ; et, si nous permutons, AB est à ΘΚ comme ϛ est à Δ (6). Or, AB est à ΘΚ comme ΘΚ est à ϛ, parce que le carré de ΘΚ équivaut au rectangle formé sous AB et ϛ ; par conséquent, AB est à ΘΚ

---

1. Le texte présente ici cette petite interpolation : « car cela sera démontré. » Or, Archimède suppose cette démonstration connue, tandis que l'interpolateur fait probablement allusion à quelque démonstration de commentateur, telle que celle d'Eutocius, qui est fort longue.

D'ailleurs, la similitude des segments ΚΛΘ, EHZ permet d'écrire : $\frac{\Sigma O}{O\Phi} = \frac{P\Xi}{\Xi Y}$ d'où: $\frac{\Sigma O + O\Phi}{O\Phi} = \frac{P\Xi + \Xi Y}{\Xi Y}$. Or, on a posé : $\frac{\Sigma O + O\Phi}{O\Phi} = \frac{\Omega\Phi}{\Phi H}$ et $\frac{P\Xi + \Xi Y}{\Xi Y} = \frac{\Psi Y}{Y\Lambda}$, d'où: $\frac{\Omega\Phi}{\Psi Y} = \frac{\Phi H}{Y\Lambda}$. Or, $\frac{\Phi H}{Y\Lambda} = \frac{EZ}{K\Theta}$, donc $\frac{\Omega\Phi}{\Psi Y} = \frac{EZ}{K\Theta}$, d'où similitude des cônes EΩZ, KΨΘ.

2. Dans les segments donnés on a EZ et ΦH donnés ; dès lors, $\Phi O = \frac{\overline{E\Phi}^2}{\Phi H}$, d'où ΦO est donné. Or, $\Sigma O = \frac{\Phi O + \Phi H}{2}$, d'où ΣO est donné ; d'où $\frac{\Sigma O}{\Phi O}$ est donné, d'où $\frac{\Sigma O + \Phi O}{\Phi O}$ est donné. Or, on a posé : $\frac{\Sigma O + \Phi O}{\Phi O} = \frac{\Omega\Phi}{\Phi H}$, d'où $\frac{\Omega\Phi}{\Phi H}$ est donné, d'où ΩΦ est donné, d'où $\frac{\Omega\Phi}{EZ}$ est donné. Or, on a eu : $\frac{\Omega\Phi}{\Psi Y} = \frac{EZ}{\Theta K}$, d'où: $\frac{\Omega\Phi}{EZ} = \frac{\Psi Y}{\Theta K}$, d'où, comme le texte, $\frac{\Psi Y}{\Phi K}$ est donné.

3. En raisonnant comme dans la note précédente, on démontrerait que le rapport $\frac{XT}{AB}$ est donné. Or, AB est donné, donc XT est donné.

4. On a posé: $\frac{\Psi Y}{\Theta K} = \frac{XT}{\Delta}$, d'où : $\frac{\Psi Y}{XT} = \frac{\Theta K}{\Delta}$. Or, on a vu: cône AXB = cône KΨΘ ; donc les bases de ces cônes, ou les carrés des diamètres de ces bases, sont inversement proportionnelles aux hauteurs : $\frac{\Psi Y}{XT} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{\Theta K}^2}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{\Theta K}^2} = \frac{\Theta K}{\Delta}$.

5. On pose: $AB \times \varsigma = \overline{\Theta K}^2$, d'où : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{\Theta K}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{AB \times \varsigma} = \frac{AB}{\varsigma}$.

6. La comparaison des relations obtenues dans les deux notes précédentes donne: $\frac{AB}{\varsigma} = \frac{\Theta K}{\Delta}$, d'où, suivant le texte : $\frac{AB}{\Theta K} = \frac{\varsigma}{\Delta}$.

Digitized by Google

comme ΘK est à ϛ et comme ϛ est à Δ ; et, dès lors, ΘK, ϛ sont deux moyennes en proportion continue entre les droites AB, Δ données (1).

La synthèse du problème sera donc la suivante : soit ABΓ le segment auquel on doit construire un segment équivalent, et EZH celui auquel on doit construire un segment semblable. Soient ABΓN, EHZO les plus grands cercles des sphères, ΓN, HO leurs diamètres et Π, Σ leurs centres. Faisons en sorte que la somme de ΠN, NT soit à NT comme XT est à TΓ, et que la somme de ΣO, OΦ soit à OΦ comme ΩΦ est à ΦH. Dès lors, le cône XAB équivaut au segment AΓB de la sphère, tandis que le cône ZΩE équivaut au segment EHZ (2). Faisons en sorte que ΩΦ soit à EZ comme XT est à Δ, et prenons deux moyennes proportionnelles ΘK, ϛ entre les droites données AB, Δ, de manière que AB soit à ΘK comme ΘK est à ϛ et comme ϛ est à Δ. Construisons sur ΘK un segment de cercle ΘKΛ semblable au segment de cercle EZH (3), complétons le cercle, et soit ΛΞ son diamètre (4). De plus, imaginons une sphère dont ΛΘΞK soit un grand cercle, dont P soit le centre, et, par la droite ΘK, menons un plan perpendiculaire à ΛΞ. Dès lors, le segment de sphère, situé du côté du point Λ, sera semblable au segment de sphère EHZ, puisque les segments de cercle sont semblables aussi. Je dis d'ailleurs que ce segment est équivalent au segment de sphère ABΓ. Faisons en sorte que la somme de PΞ, ΞY soit à ΞY comme ΨY est à YΛ. Dès lors, le cône ΨΘK équivaut au segment de sphère ΘKΛ (5). De plus, puisque le cône ΨΘK est semblable au cône ZΩE, il s'ensuit que ΩΦ sera à EZ, c'est-à-dire que XT sera à Δ comme ΨY est à ΘK, et, par

---

1. $AB \times \varsigma = \overline{\Theta K}^2$ donne : $\frac{AB}{\Theta K} = \frac{\Theta K}{\varsigma}$ et, comparant avec la relation de la note précédente, il vient : $\frac{AB}{\Theta K} = \frac{\Theta K}{\varsigma} = \frac{\varsigma}{\Delta}$; donc ΘK, ϛ sont deux moyennes proportionnelles entre AB et Δ.

2. Voir : *De la Sphère et du Cylindre,* livre II, prop. II.

3. Archimède s'en rapporte ici à la définition 11 du livre III d'EUCLIDE : « Les segments de cercles sont semblables lorsqu'ils reçoivent des angles égaux, etc. », ainsi qu'à la proposition 33 du même livre d'Euclide qui résout le problème de « construire sur une droite donnée un segment de cercle qui reçoive un angle égal à un angle donné. »

4. Voir : EUCLIDE, livre III, prop. 25 : « Un segment de cercle étant donné, décrire le cercle dont il est le segment ».

5. Voir : *De la Sphère et du Cylindre,* liv. II, prop. II.

Digitized by Google

permutation et inversion, ΨΥ sera à XT comme ΘK est à Δ (1). En outre, puisque les droites AB, KΘ, ς, Δ sont en proportion, le carré de AB sera au carré de ΘK comme ΘK est à Δ (2). Or, ΘK est à Δ comme ΨΥ est à XT ; par conséquent, le carré de AB est aussi au carré de KΘ, c'est-à-dire que le cercle décrit autour du diamètre AB est aussi au cercle décrit autour du diamètre ΘK comme ΨΥ est à XT. Il en résulte que le cône XAB équivaut au cône ΨΘK ; de manière que le segment de sphère ABΓ équivaut au segment de sphère ΘKΛ. Dès lors, on a constitué un segment ΘKΛ équivalent au segment donné AΓB, et semblable à un autre segment donné EZH (2).

PROPOSITION VI.

Etant donnés deux segments de sphère qui soient ou non de même sphère, trouver un segment de sphère, semblable à l'un des segments donnés et ayant une aire équivalente à l'aire de l'autre segment.

Soient donnés les segments de sphère suivant les arcs ABΓ, ΔEZ. Que le segment suivant l'arc ABΓ soit celui auquel il faut trouver le segment semblable, et le segment ΔEZ celui à l'aire duquel l'aire du segment qu'il faut trouver est équivalente.

Que ce soit chose faite ; que le segment de sphère KΛM soit semblable au segment ABΓ et ait une aire équivalente à l'aire du segment ΔEZ. Imaginons les centres des sphères, par lesquels nous menons, perpendiculairement aux bases des segments, des plans dont les sections soient, dans les sphères, les grands cercles KΛMN, BAΓΘ, EZHΔ, et, dans les bases des segments, les droites KM, AΓ, ΔZ.

---

1. Les cônes ΨΘK, ZΩE étant semblables, on a : $\frac{\Omega\Phi}{EZ}=\frac{\Psi Y}{\Theta K}$. Or, on a posé $\frac{\Omega\Phi}{EZ}=\frac{XT}{\Delta}$; donc $\frac{XT}{\Delta}=\frac{\Psi Y}{\Theta K}$, d'où : $\frac{XT}{\Psi Y}=\frac{\Delta}{\Theta K}$, ou, comme le texte : $\frac{\Psi Y}{XT}=\frac{\Theta K}{\Delta}$.

2. Car la relation $\frac{AB}{\Theta K}=\frac{\Theta K}{\varsigma}=\frac{\varsigma}{\Delta}$ donne : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{\Theta K}^2}=\frac{\overline{\Theta K}^2}{\varsigma^2}=\frac{\overline{\Theta K}^2}{\Theta K\times\Delta}=\frac{\Theta K}{\Delta}$.

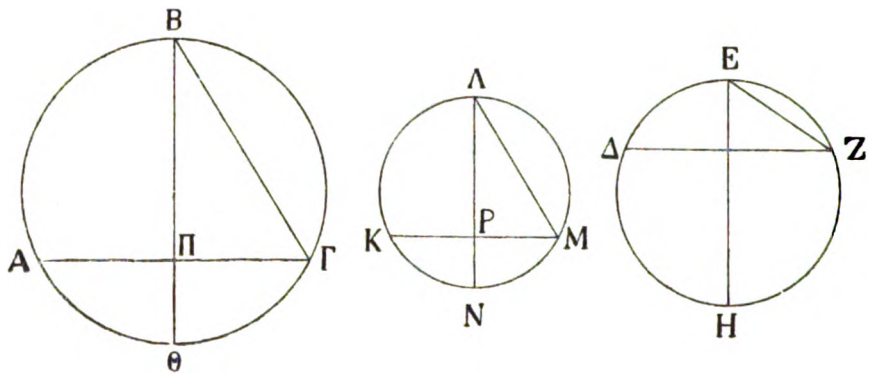
3. Les relations précédentes $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{\Theta K}^2}=\frac{\Theta K}{\Delta}$ et $\frac{\Theta K}{\Delta}=\frac{\Psi Y}{XT}$ donnent :

$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{\Theta K}^2}=\frac{\pi\times\overline{AB}^2}{\pi\times\overline{\Theta K}^2}=\frac{\text{cercle AB}}{\text{cercle }\Theta K}=\frac{\Psi Y}{XT}$; donc (livre I, lemme 4) : cône XAB = cône ΨΘK. Or (prop. II), cône XAB = segment ABΓ et cône ΨΘK = segment ΘKΛ, d'où : segment ABΓ = segment ΘKΛ.

Digitized by Google

Soient ΛN, BΘ, EH des diamètres des sphères perpendiculaires à KM, AΓ, ΔZ, et menons les droites de jonction ΛM, BΓ, EZ.

Puisque l'aire du segment de sphère KΛM est équivalente à l'aire du segment ΔEZ, il en résulte que le cercle dont le rayon est égal à la droite ΛM équivaut au cercle dont le rayon est égal à la



droite E (1) ; car il a été démontré que les aires des segments en question sont équivalentes aux cercles dont les rayons sont égaux aux droites de jonction menées des sommets des segments aux bases (2) ; et il en résulte aussi que MΛ est égal à EZ. D'autre part, puisque le segment KΛM est semblable au segment ABΓ, ΛP est à PN comme BΠ est à ΠΘ, et, par inversion et composition, NΛ est à ΛP comme BΘ est à BΠ (3). Or, PΛ est aussi à ΛM comme BΠ est à ΓB (4) ; par conséquent, NΛ est à ΛM, c'est-à-dire à EZ, comme ΘB est à BΓ, et permutons. D'autre part, le rapport de EZ à BΓ est donné, car l'une et l'autre droite est donnée ; par conséquent, le rapport de ΛN à BΘ est donné aussi. De plus, BΘ est donné ; par conséquent, ΛN est donné aussi (5).

---

1. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, proposition XLII-XLIII.
2. Sous-entendu : aux circonférences (des bases).
3. La considération des triangles semblables dans les segments semblables donne: $\frac{\Lambda N}{NM}=\frac{B\Theta}{\Theta\Gamma}$ et $\frac{NM}{PN}=\frac{\Theta\Gamma}{\Pi\Theta}$, d'où $\frac{\Lambda N}{NM}\times\frac{NM}{PN}=\frac{B\Theta}{\Theta\Gamma}\times\frac{\Theta\Gamma}{\Pi\Theta}$, ou $\frac{\Lambda N}{PN}=\frac{B\Theta}{\Pi\Theta}$, d'où $\frac{\Lambda N-PN}{PN}=\frac{B\Theta-\Pi\Theta}{\Theta\Pi}$ ou, comme le texte : $\frac{\Lambda P}{PN}=\frac{B\Pi}{\Pi\Theta}$, d'où : $\frac{PN}{\Lambda P}=\frac{\Pi\Theta}{B\Pi}$, d'où : $\frac{PN+\Lambda P}{\Lambda P}=\frac{\Pi\Theta+B\Pi}{B\Pi}$, ou, comme le texte : $\frac{N\Lambda}{\Lambda P}=\frac{B\Theta}{B\Pi}$.
4. Une petite interpolation ajoute ici : « car les triangles sont semblables ».
5. Par similitude des triangles BΠΓ, ΛPM, on a : $\frac{P\Lambda}{\Lambda M}=\frac{B\Pi}{\Gamma B}$, d'où, combinant avec

Digitized by Google

La synthèse du problème sera donc la suivante : Soient ABΓ, ΔEZ deux segments de sphère donnés, dont ABΓ est celui auquel un segment doit être semblable, et ΔEZ celui à l'aire duquel ce segment doit avoir une aire équivalente. Etablissons les mêmes constructions qu'au cours de l'analyse et faisons en sorte que BΘ soit à ΛN comme BΓ est à EZ. De plus, décrivons un cercle autour du diamètre ΛN, imaginons une sphère dont le plus grand cercle soit ΛKNM, coupons NΛ en un point P de manière que NP soit à PΛ comme ΘΠ est à ΠB (1), coupons la surface (2) par un plan passant par P, perpendiculaire à ΛN, et menons la droite de jonction ΛM. Dès lors, les segments de cercles basés sur les droites KM, AΓ sont semblables (3) ; en sorte que les segments de sphère sont aussi semblables. Et puisque NΛ est à ΛP comme ΘB est à BΠ, car cela se présente aussi par division (4), et que, de plus, PΛ est à ΛM comme ΠB est à BΓ, il en résulte que ΘB est à NΛ comme BΓ est à ΛM. Or, on a ΘB à ΛN comme BΓ est à EZ ; par conséquent, EZ est égal à ΛM (5) ; en sorte que le cercle dont le rayon est la droite EZ est aussi égal au cercle dont le rayon est égal à la droite ΛM. De plus, le cercle ayant la droite EZ comme rayon équivaut à l'aire du segment ΔEZ, tandis que le cercle dont le rayon est égal à la droite ΛM équivaut à l'aire

---

la relation précédente: $\frac{P\Lambda}{\Lambda M}\times\frac{N\Lambda}{\Lambda P}=\frac{B\Pi}{\Gamma B}\times\frac{B\Theta}{B\Pi}$, ou, en observant que $\Lambda M=EZ$, $\frac{N\Lambda}{EZ}=\frac{B\Theta}{\Gamma B}$, d'où : $\frac{N\Lambda}{B\Theta}=\frac{EZ}{\Gamma B}$. Or, EZ, BΓ sont donnés ; donc $\frac{EZ}{\Gamma B}$ est donné, d'où $\frac{N\Lambda}{B\Theta}$ est donné. Mais BΘ est donné ; donc ZΛ est donné.

1. Voir EUCLIDE, livre VI, prop. 10 : « Diviser une droite non divisée donnée pareillement à une autre droite divisée donnée ».

2. C.-à-d. la surface du grand cercle ΛKMN.

3. Le point P a été pris tel que $\frac{NP}{P\Lambda}=\frac{\Theta\Pi}{\Pi B}$, d'où : $\frac{NP}{\Theta\Pi}=\frac{P\Lambda}{\Pi B}$. Or, $\frac{\overline{PM}^2}{\overline{\Pi\Gamma}^2}=\frac{P\Lambda\times NP}{\Pi B\times\Theta\Pi}$, d'où : $\frac{\overline{PM}^2}{\overline{\Pi\Gamma}^2}=\frac{\overline{P\Lambda}^2}{\overline{\Pi B}^2}$, d'où : $\frac{PM}{\Pi\Gamma}=\frac{P\Lambda}{\Pi B}$, d'où similitude des triangles BΠΓ, ΛPM, d'où similitude d'axes, d'où similitude des segments.

4. C.-à-d. que la relation $\frac{N\Lambda}{\Lambda P}=\frac{\Theta B}{B\Pi}$ donne: $\frac{N\Lambda-\Lambda P}{\Lambda P}=\frac{\Theta B-B\Pi}{B\Pi}$, ou $\frac{NP}{\Lambda P}=\frac{\Theta\Pi}{\Pi B}$ qui est la relation précédente posée pour le point P.

5. La similitude des triangles BΠΓ, ΛPM donne: $\frac{P\Lambda}{\Lambda M}=\frac{\Pi B}{B\Gamma}$, d'où, combinant avec la relation précédente : $\frac{P\Lambda}{\Lambda M}\times\frac{N\Lambda}{P\Lambda}=\frac{\Pi B}{B\Gamma}\times\frac{\Theta B}{B\Pi}$, ou $\frac{N\Lambda}{\Lambda M}=\frac{\Theta B}{B\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Theta B}{N\Lambda}=\frac{B\Gamma}{\Lambda M}$. Or, par hypothèse : $\frac{\Theta B}{N\Lambda}=\frac{B\Gamma}{EZ}$; donc $EZ=\Lambda M$.

Digitized by Google

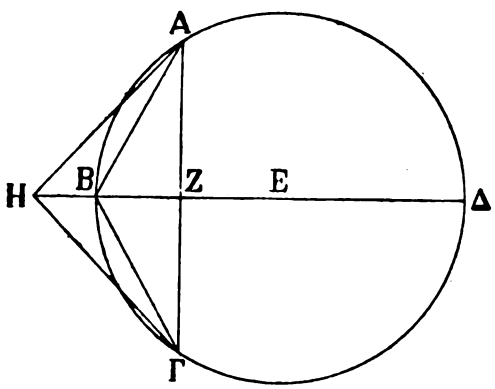
du segment KΛM, car cela a été démontré au livre premier (1) ; par conséquent, l'aire du segment KΛM est aussi équivalente à l'aire du segment de sphère ΔEZ, et le segment KΛM est semblable au segment ABΓ.

PROPOSITION VII.

Découper un segment d'une sphère donnée par un plan, de manière que ce segment ait un rapport donné avec le cône ayant même base que le segment et une hauteur égale.

Soit donnée la sphère dont ABΓΔ est le plus grand cercle et BΔ le diamètre. On doit donc couper la sphère par un plan mené par la droite AΓ de manière que le segment de sphère ABΓ ait un rapport donné avec le cône ABΓ.

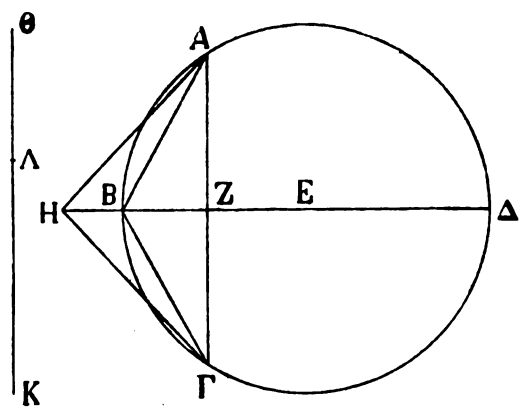
Que ce soit chose faite. Soit E le centre de la sphère, et que la somme de EΔ, ΔZ soit à ΔZ comme HZ est à ZB. Dès lors, le cône AΓH équivaut au segment ABΓ (2) ; par conséquent, le rapport du cône AHΓ au cône ABΓ est donné et le rapport de HZ à ZB est donné (3). Or, HZ est à ZB comme la somme de EΔ, ΔZ est à ΔZ; par conséquent, le rapport de la somme de EΔ, ΔZ à ΔZ est donné ; de manière que le rapport de EΔ à ΔZ est donné aussi. Donc la droite ΔZ est donnée ; de manière que la droite AΓ est donnée aussi. Et puisque le rapport de la somme de EΔ, ΔZ est plus grand que celui de la somme de EΔ, ΔB à ΔB, et que la somme de EΔ, ΔB est le triple de EΔ, tandis que BΔ est le double de EΔ, il en résulte que le rapport de la somme de EΔ, ΔZ à ΔZ est plus grand que celui de trois à deux. Or, le rapport de la somme de EΔ, ΔZ à ΔZ est égal à un rapport donné ; par conséquent, il faut que le rapport donné, pour la synthèse du problème, soit plus grand que celui de trois à deux (4).



1. Voir : *De la Sphère et du Cylindre,* livre I, prop. XLII et XLIII.
2. *Ibidem,* livre I, prop. II.
3. *Ibidem,* livre I, lemme I.
4. Cette condition de possibilité est indiquée dans un énoncé plus complet du

Digitized by Google

La synthèse du problème sera donc la suivante : soit la sphère donnée, soit ABΓΔ son plus grand cercle, BΔ le diamètre, E le centre, et que le rapport donné de ΘK à KΛ soit plus grand que celui de trois à deux. La somme de EΔ, ΔB est d'ailleurs à ΔB comme trois est à deux ; par conséquent, le rapport de ΘK à KΛ est aussi plus grand que celui de la somme de EΔ, ΔB à ΔB. Dès lors, par division, le rapport de ΘΛ à ΛK est plus grand que celui de EΔ à ΔB (1). Faisons en sorte que EΔ soit à ΔZ comme ΘΛ est à ΛK, par le point Z menons la droite AZΓ, perpendiculaire sur BΔ, et, par ΓΛ, menons un plan perpendiculaire sur BΔ. Je dis que le rapport du segment de sphère ABΓ au cône ABΓ est le même que celui de ΘK à KΛ.



En effet, faisons en sorte que HZ soit à ZB comme la somme de EΔ, ΔZ est à ΔZ. Il en résulte que le cône ΓAH est équivalent au segment de sphère ABΓ (2). Et puisque la somme de EΔ, ΔZ est à ΔZ, c'est-à-dire que HZ est à ZB, c'est-à-dire que le cône AHΓ est au cône ABΓ, comme ΘK est à KΛ, et que le cône AHΓ est équivalent au segment de sphère ABΓ, il en résulte que le segment ABΓ est au cône ABΓ comme ΘK est à KΛ (3).

---

même problème rappelé dans la préface du traité *Des Spirales*. On a, en effet : $\frac{E\Delta+\Delta Z}{\Delta Z} > \frac{E\Delta+\Delta B}{\Delta B}$ d'où : $\frac{E\Delta+\Delta Z}{\Delta Z} > \frac{3E\Delta}{2E\Delta}$, d'où rapport donné : $\frac{E\Delta+\Delta Z}{\Delta Z} > \frac{3}{2}$.

1. On pose: $\frac{\Theta K}{K\Lambda} > \frac{3}{2}$; or, $\frac{E\Delta+\Delta B}{\Delta B} = \frac{3}{2}$, d'où : $\frac{\Theta K}{K\Lambda} > \frac{E\Delta+\Delta B}{\Delta B}$, d'où : $\frac{\Theta K - K\Lambda}{K\Lambda} > \frac{E\Delta+\Delta B-\Delta B}{\Delta B}$, ou $\frac{\Theta\Lambda}{K\Lambda} = \frac{E\Delta}{\Delta B}$.

2. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, prop. II.

3. On a fait en sorte que $\frac{E\Delta}{\Delta Z} = \frac{\Theta\Lambda}{\Lambda K}$, d'où : $\frac{E\Delta+\Delta Z}{\Delta Z} = \frac{\Theta\Lambda+\Lambda K}{\Lambda K} = \frac{\Theta K}{\Lambda K}$; d'autre part, on a fait en sorte que $\frac{HZ}{ZB} = \frac{E\Delta+\Delta Z}{\Delta Z}$, d'où : $\frac{HZ}{ZB} = \frac{\Theta K}{\Lambda K}$. Considérant les cônes de même base, on a : $\frac{\text{cône } \Lambda H\Gamma}{\text{cône } AB\Gamma} = \frac{HZ}{ZB}$, d'où : $\frac{\text{cône } \Lambda H\Gamma}{\text{cône } AB\Gamma} = \frac{\Theta K}{\Lambda K}$. Or, cône $\Lambda H\Gamma$ = segment sphérique ABΓ, d'où : $\frac{\text{segt. } AB\Gamma}{\text{cône } AB\Gamma} = \frac{\Theta K}{K\Lambda}$.

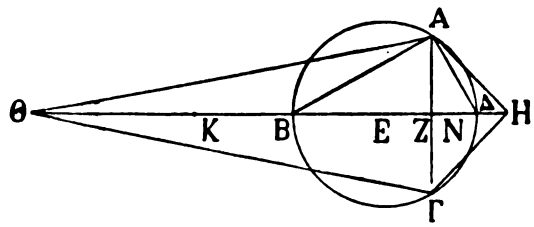
Digitized by Google

PROPOSITION VIII.

Lorsqu'une sphère est coupée par un plan ne passant pas par le centre, le rapport du plus grand segment au plus petit est moindre que le carré du rapport de l'aire du plus grand segment à l'aire du plus petit segment, tandis qu'il est supérieur à ce rapport multiplié une fois et demie par lui-même (1).

Soit une sphère dans laquelle on a le plus grand cercle ABΓΔ et le diamètre BΔ .Coupons-la par un plan passant par AΓ perpendiculairement au cercle ABΓΔ, et soit ABΓ le plus grand segment de la sphère. Je dis que le rapport du segment ABΓ au segment AΔΓ est moindre que le carré du rapport de l'aire du plus grand segment à l'aire du plus petit segment, et qu'il est supérieur à la puissance $\frac{3}{2}$ de ce rapport.

En effet, menons les droites de jonction BA, AΔ, soit E le centre ; faisons en sorte que la somme de EΔ à ΔZ soit à ΔZ comme ΘZ est à ZB, tandis que la somme de EB, BZ soit à BZ comme HZ est à ZA, et imaginons les cônes ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme sommets les points Θ, H. Dès lors, le cône AΘΓ sera équivalent au segment de sphère ABΓ, le cône AΓH équivalent au segment AΔΓ (2), et l'aire du segment ABΓ est à l'aire du segment AΔΓ comme le carré de BA est au carré de AΔ ; car cela a déjà été exposé précédemment (3). On doit démontrer que le rapport du plus grand segment de sphère au plus petit segment est moindre que le carré du rapport de l'aire du plus grand



1. Μείζονα δὲ ἢ ἡμιολιόν (λόγον), littéralement : « plus grand que le rapport une fois et demie », expression rendue dans les versions latines par « ratio sesquialtera ». De même que les anciens ouvrages de géométrie français employaient l'expression « raison doublée » pour désigner ce que nous entendons par « carré du rapport », ils ont employé l'expression « raison sesquialtère » pour signifier que le rapport est multiplié par sa racine carrée, ou bien qu'il a été élevé à la puissance $\frac{3}{2}$, ou encore, qu'on a pris la racine carrée de son cube.

2. Voir proposition II.

3. Voir : *De la Sphère et du Cylindre,* livre I, prop. XLII-XLIII. Les aires des segments sont équivalentes aux cercles de rayon AB et AΔ, d'où :

$$\frac{\text{aire segment ABΓ}}{\text{aire segment AΔΓ}} = \frac{\pi \times \overline{AB}^2}{\pi \times \overline{A\Delta}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A\Delta}^2}.$$

Digitized by Google

segment à l'aire du plus petit segment ; ce qui revient à dire que le rapport du cône AΘΓ au cône AHΓ, c'est-à-dire le rapport de ZΘ à ZH est moindre que le carré du rapport du carré de BA au carré de AΔ, ou que le carré du rapport de BZ à ZΔ (1). Et puisque la somme de EΔ, ΔZ est à ΔZ comme ΘZ est à ZB, tandis que la somme de EB, BZ est à BZ comme ZH est à ZΔ, on aura aussi BZ à ZΔ comme ΘB est à BE ; car BE est égal à ΔE (2) [cela a été, en effet, démontré dans les propositions précédentes] (3). Et, de nouveau, puisque la somme de EB, BZ est à BZ comme HZ est à ZΔ, posons BK égal à BE ; car il est évident que ΘB est plus grand que BE, parce que BZ est aussi plus grand que ZΔ (4), et l'on aura KZ à ZB comme HZ est à ZΔ (5). Or, il a été démontré que ZB est à ZΔ comme ΘB est à BE, tandis que BE est égal à KB ; par conséquent, ΘB est à BK comme KZ est à ZH (6). Et puisque le rapport de ΘZ à ZK est moindre que le rapport de ΘB à BK, tandis qu'il a été démontré que ΘB est à BK comme KZ est à ZH, il en résulte que le rapport de ΘZ à ZK est moindre que celui de KZ à ZH, et dès lors, le rectangle formé sous ΘZ, ZH est plus petit que le carré de ZK. En conséquence, le rapport du rectangle formé sous ΘZ, ZH au carré de ZH, c'est-à-

---

1. Il faut démontrer: $\frac{\text{segment AB}\Gamma}{\text{segment A}\Delta\Gamma} < \frac{[\text{aire segment AB}\Gamma]^3}{[\text{aire segment A}\Delta\Gamma]^2}$, ou $\frac{\text{cône A}\Theta\Gamma}{\text{cône AH}\Gamma} < \frac{\overline{AB}^4}{\overline{A\Delta}^4}$.

Or, $\frac{\text{cône A}\Theta\Gamma}{\text{cône AH}\Gamma} = \frac{\Theta Z}{ZH}$ et $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A\Delta}^2} = \frac{BZ \times B\Delta}{Z\Delta \times B\Delta}$, d'où : $\frac{\overline{AB}^4}{\overline{A\Delta}^4} = \frac{\overline{BZ}^2}{\overline{Z\Delta}^2}$, d'où il revient à démontrer : $\frac{\Theta Z}{ZH} < \frac{\overline{BZ}^2}{\overline{Z\Delta}^2}$.

2. On a posé : $\frac{E\Delta + \Delta Z}{\Delta Z} = \frac{\Theta Z}{ZB}$, d'où : $\frac{E\Delta + \Delta Z - \Delta Z}{\Delta Z} = \frac{\Theta Z - ZB}{ZB}$, ou, observant que $BE = E\Delta$, $\frac{BE}{\Delta Z} = \frac{\Theta B}{ZB}$, d'où, comme le texte : $\frac{BZ}{Z\Delta} = \frac{\Theta B}{BE}$.

3. Phrase probablement interpolée.

4. C'est-à-dire que si l'on pose BK = BE, le point K tombera entre B et Θ ; car, dans la relation précédente $\frac{BZ}{Z\Delta} = \frac{\Theta B}{BE}$, on a $BZ > Z\Delta$, d'où $\Theta B > BE$.

5. En posant BK = BE, la relation $\frac{EB + BZ}{BZ} = \frac{HZ}{Z\Delta}$ devient, comme dans le texte : $\frac{KZ}{ZB} = \frac{HZ}{Z\Delta}$.

6. En observant que BE = BK, la relation de la note avant-précédente devient : $\frac{BZ}{Z\Delta} = \frac{\Theta B}{BK}$, tandis que la relation de la note précédente devient, par permutation : $\frac{KZ}{HZ} = \frac{ZB}{Z\Delta}$, d'où, comme dans le texte : $\frac{\Theta B}{BK} = \frac{KZ}{HZ}$.

Digitized by Google

dire le rapport de ZΘ à ZH est moindre que le rapport du carré de KZ au carré de ZH. Or, le rapport du carré de KZ au carré de ZH est le carré du rapport de KZ à ZH ; par conséquent, le rapport de ΘZ à ZH est moindre que le carré du rapport de KZ à ZH, et le rapport de ΘZ à ZH est moindre que le carré du rapport de BZ à ZΔ, ce qui est d'ailleurs ce que nous cherchions (1). Et puisque BE est égal à EΔ, le rectangle formé sous BZ, ZΔ sera donc moindre que le rectangle formé sous BE, EΔ ; par conséquent, le rapport de ZB à BE est moindre que celui de EΔ à ΔZ, c'est-à-dire que celui de ΘB à BZ, et, dès lors, le carré de ZB est plus petit que le rectangle formé sous ΘB, BE, c'est-à-dire que le rectangle formé sous ΘB, BK (2). Soit le carré de BN équivalent à ce rectangle formé sous ΘB, BK ; dès lors, ΘB sera à BK comme le carré de ΘN est au carré de NK (3). Or, le rapport du carré de ΘZ au carré de ZK est plus grand que celui du carré de ΘN au carré de NK ; par conséquent, le rapport du carré de ΘZ au carré de ZK sera plus grand aussi que le rapport de ΘB à BK,

---

1. Le passage qui précède semble avoir été obscurci par quelque altération du texte. Il se déroule comme suit en notations plus explicites :

On a vu que $\Theta B > BE$; or, $BE = BK$, d'où : $\Theta B > BK$. Dès lors, $\frac{\Theta B}{BZ} > \frac{BK}{BZ}$, d'où : $\frac{\Theta B + BZ}{BZ} > \frac{BK + BZ}{BZ}$, ou $\frac{\Theta Z}{BZ} > \frac{ZK}{BZ}$, d'où : $\frac{\Theta Z}{\Theta Z - BZ} < \frac{ZK}{ZK - BZ}$, ou $\frac{\Theta Z}{\Theta B} < \frac{ZK}{BK}$, d'où : comme dans le texte : $\frac{\Theta Z}{ZK} < \frac{\Theta B}{BK}$. Or, on a eu (note précédente) : $\frac{\Theta B}{BK} = \frac{KZ}{HZ}$; donc $\frac{\Theta Z}{ZK} < \frac{KZ}{HZ}$, d'où $\Theta Z \times HZ < \overline{ZK}^2$, d'où : $\frac{\Theta Z \times HZ}{\overline{ZH}^2} < \frac{\overline{ZK}^2}{\overline{ZH}^2}$, ou $\frac{\Theta Z}{ZH} < \frac{\overline{ZK}^2}{\overline{ZH}^2}$. Or, on a (note précédente) : $\frac{KZ}{HZ} = \frac{ZB}{Z\Delta}$, d'où, comme dans le texte, la relation cherchée : $\frac{\Theta Z}{ZH} < \frac{\overline{BZ}^2}{\overline{Z\Delta}^2}$.

2. On a : $AZ < AE$. Or, $\overline{AZ}^2 = BZ \times Z\Delta$, et $\overline{AE}^2 = BE \times E\Delta$; donc, $BZ \times Z\Delta < BE \times E\Delta$, d'où : $\frac{BZ}{BE} < \frac{E\Delta}{Z\Delta}$. Mais, on a posé : $\frac{E\Delta + \Delta Z}{\Delta Z} = \frac{\Theta Z}{ZB}$, d'où : $\frac{E\Delta + \Delta Z - \Delta Z}{\Delta Z} = \frac{\Theta Z - ZB}{ZB}$, ou $\frac{E\Delta}{\Delta Z} = \frac{\Theta B}{ZB}$; donc, l'inégalité précédente devient, comme le texte : $\frac{BZ}{BE} < \frac{\Theta B}{BZ}$, d'où : $\overline{BZ}^2 < \Theta B \times BE$. Or, $BE = BK$; donc : $\overline{BZ}^2 < \Theta B \times BK$.

3. Posons : $\overline{BN}^2 = \Theta B \times BK$, d'où : $\frac{BN}{BK} = \frac{\Theta B}{BN}$, d'où : $\frac{BN + BK}{BK} = \frac{\Theta B + BN}{BN}$, ou $\frac{KN}{BK} = \frac{\Theta N}{BN}$, d'où : $\frac{BN}{BK} = \frac{\Theta N}{KN}$, d'où : $\frac{\overline{BN}^2}{\overline{BK}^2} = \frac{\overline{\Theta N}^2}{\overline{KN}^2}$. Or, la relation posée donne aussi : $\frac{\overline{BN}^2}{\overline{BK}^2} = \frac{\Theta B}{BK}$; donc, comme le texte : $\frac{\Theta B}{BK} = \frac{\overline{\Theta N}^2}{\overline{KN}^2}$.

Digitized by Google

ou de ΘB à BE ou de KZ à ZH (1). Il en résulte que le rapport de ΘZ à ZH est plus grand que le rapport de KZ à ZH à la puissance $\frac{3}{2}$ (2). Et puisque le cône AΘΓ est au cône AHΓ, c'est-à-dire que le segment ABΓ est au segment AΔΓ comme ΘZ est à ZH, tandis que KZ est à ZH comme BZ est à ZΔ, c'est-à-dire comme le carré de BA est au carré de AΔ, c'est-à-dire comme l'aire du segment ABΓ est à l'aire du segment AΔΓ, il en résulte que le rapport du plus grand segment au plus petit est moindre que le carré du rapport de l'aire du plus grand segment à l'aire du plus petit segment, tandis qu'il est plus grand que ce rapport à la puissance $\frac{3}{2}$ (3).

---

1. On a vu, note antépénultième, que $\Theta B > BK$; donc : $\Theta B + BZ > BK + BZ$, ou $\Theta Z > ZK$; d'où : $\frac{\Theta Z}{ZN} > \frac{ZK}{ZN}$, d'où: $\frac{\Theta Z}{\Theta Z + ZN} > \frac{ZK}{ZK + ZN}$, ou $\frac{\Theta Z}{\Theta N} > \frac{ZK}{NK}$; d'où: $\frac{\Theta Z}{ZK} > \frac{\Theta N}{NK}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\Theta Z}^2}{\overline{ZK}^2} > \frac{\overline{\Theta N}^2}{\overline{NK}^2}$. Dès lors, en présence de la relation de la note précédente, on a : $\frac{\overline{\Theta Z}^2}{\overline{ZK}^2} > \frac{\Theta B}{BK}$, d'où, observant que : $BK = BE$, on a : $\frac{\overline{\Theta Z}^2}{\overline{ZK}^2} > \frac{\Theta B}{BE}$. Or, on a vu, page 115, note 6, que : $\frac{\Theta B}{BK = BE} = \frac{KZ}{HZ}$; donc, comme le texte : $\frac{\overline{\Theta Z}^2}{\overline{ZK}^2} > \frac{KZ}{HZ}$.

2. Le texte présente ici l'interpolation : τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει, c.-à-d. car cela (est) à la fin. Cette phrase renvoie probablement à quelque démonstration de commentateur. La relation déduite à cet endroit s'établit d'ailleurs comme suit : Les grandeurs ΘZ, ZK, ZH sont liées par la relation de la note précédente : $\frac{\overline{\Theta Z}^2}{\overline{ZK}^2} > \frac{ZK}{ZH}$, (I). Insérons une moyenne proportionnelle Σ entre ZK et ZH, de manière que $\frac{ZK}{\Sigma} = \frac{\Sigma}{ZH}$. Dès lors, $\frac{\overline{ZK}^2}{\Sigma^2} = \frac{\Sigma^2}{\overline{ZH}^2} = \frac{ZK}{ZH}$(II). Substituons dans la relation (I), il vient : $\frac{\overline{\Theta Z}^2}{\overline{ZK}^2} > \frac{\overline{ZK}^2}{\Sigma^2}$, d'où : $\frac{\Theta Z}{ZK} > \frac{ZK}{\Sigma}$. Prenons $M < \Theta Z$, de manière que $\frac{M}{ZK} = \frac{ZK}{\Sigma}$. Dès lors, on a : $\frac{M}{ZK} = \frac{ZK}{\Sigma} = \frac{\Sigma}{ZH}$, d'où : $\frac{\overline{ZK}^3}{\Sigma^3} = \frac{ZK \times M \times \Sigma}{\Sigma \times ZK \times ZH} = \frac{M}{ZH}$, (III). Or, la relation (II) donne : $\frac{ZK}{\Sigma} = \frac{\overline{ZK}^{\frac{1}{2}}}{\overline{ZH}^{\frac{1}{2}}}$, d'où : $\frac{\overline{ZK}^3}{\Sigma^3} = \frac{\overline{ZK}^{\frac{3}{2}}}{\overline{ZH}^{\frac{3}{2}}}$; donc, la relation (III) donne : $\frac{M}{ZH} = \frac{\overline{ZK}^{\frac{3}{2}}}{\overline{HZ}^{\frac{3}{2}}}$. Or, $M < \Theta Z$, donc, comme le texte : $\frac{\Theta Z}{ZH} > \frac{\overline{ZK}^{\frac{3}{2}}}{\overline{ZH}^{\frac{3}{2}}}$.

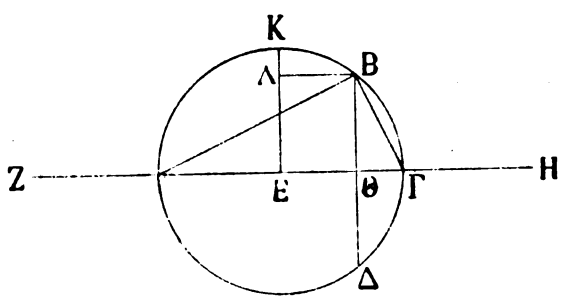
3. $\frac{\text{Cône } A\Theta\Gamma}{\text{Cône } AH\Gamma} = \frac{\Theta Z}{ZH}$. Or, cône AΘΓ = segment ABΓ, et cône AHΓ = segment EΔΓ, donc : $\frac{\text{segment } AB\Gamma}{\text{segment } A\Delta\Gamma} = \frac{\Theta Z}{ZH}$. Or, on a eu (p. 115, note 6) : $\frac{KZ}{ZH} = \frac{BZ}{Z\Delta}$, et on a eu (p. 115, note 1) : $\frac{BZ}{Z\Delta} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A\Delta}^2}$, et on a eu (p. 114, note 3) : $\frac{\text{aire segment } AB\Gamma}{\text{aire segment } A\Delta\Gamma} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A\Delta}^2}$;

Digitized by Google

AUTRE DÉMONSTRATION.

Soit une sphère, dans laquelle on a le plus grand cercle ABΓΔ, le diamètre AΓ et le centre E. Coupons-la par un plan mené par BΔ, perpendiculaire à AΓ. Je dis que le rapport du plus grand segment ΔAB au plus petit BΓΔ est moindre que le carré du rapport de l'aire du segment ABΔ à l'aire du segment BΓΔ, tandis qu'il est plus grand que ce rapport à la puissance $\frac{3}{2}$.

En effet, menons les droites de jonction AB, BΓ. Dès lors, le rapport d'une aire à l'autre est le même que celui du cercle dont le rayon est AB au cercle dont le rayon est BΓ (1), c'est-à-dire que celui de AΘ à ΘΓ (2). Posons les droites AZ, ΓH égales l'une et l'autre au rayon du cercle. Dès lors, le rapport du segment BAΔ au segment BΓΔ se compose du rapport du segment BAΔ au cône dont la base est le cercle décrit autour du diamètre BΔ et dont le sommet est le point A, du rapport de ce même cône au cône ayant même base et comme sommet le point Γ, et du rapport du cône que nous venons de dire au segment BΓΔ. Mais le rapport du segment BAΔ au cône BAΔ est le même que celui de HΘ à ΘΓ, tandis que le rapport d'un cône à l'autre est le même que celui de AΘ à ΘΓ, et que le rapport du cône BΓΔ au segment BΓΔ est le même que celui de AΘ à ΘZ. Or, le rapport composé du rapport



---

donc : $\frac{KZ}{ZH} = \frac{\text{aire segment } AB\Gamma}{\text{aire segment } A\Delta\Gamma}$. Or, on a vu (p. 116, note 1) que $\frac{\Theta Z}{ZH} < \frac{\overline{KZ}^2}{\overline{ZH}^2}$; donc, par substitution : $\frac{\text{segment } AB\Gamma}{\text{segment } A\Delta\Gamma} < \frac{(\text{aire segment } AB\Gamma)^2}{(\text{aire segment } A\Delta\Gamma)^2}$. D'autre part, la relation $\frac{\Theta Z}{ZH} > \frac{\overline{ZK}^{\frac{3}{2}}}{\overline{ZH}^{\frac{3}{2}}}$ de la note précédente donnera aussi par substitution :

$$\frac{\text{segment } AB\Gamma}{\text{segment } A\Delta\Gamma} > \left(\frac{\text{aire segment } AB\Gamma}{\text{aire segment } A\Delta\Gamma}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

1. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, propositions XLII-XLIII.

2. $\frac{\text{Aire segment } BA\Delta}{\text{Aire segment } B\Gamma\Delta} = \frac{\pi \times \overline{AB}^2}{\pi \times \overline{B\Gamma}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{B\Gamma}^2} = \frac{A\Theta \times A\Gamma}{\Theta\Gamma \times A\Gamma} = \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma}$.

Digitized by Google

de HΘ à ΘΓ et du rapport de AΘ à ΘΓ est le même que le rapport du rectangle formé sous HΘ, ΘA au carré de ΘΓ, tandis que le rapport du rectangle formé sous HΘ, ΘA au carré de ΘΓ, composé avec le rapport de AΘ à ΘZ, est le même que le rapport du rectangle formé sous HΘ, ΘA, multiplié par ΘA, au carré de ΘΓ multiplié par ΘZ ; et enfin le rapport du rectangle formé sous HΘ, ΘA, multiplié par ΘA, au carré de ΘΓ, multiplié par ΘZ, est le même que celui du carré de ΘA, multiplié par ΘH, au carré de ΘΓ multiplié par ΘZ (1). Par conséquent, il faut démontrer que le rapport du carré de ΘA, multiplié par ΘH, au carré de ΓΘ, multiplié par ΘZ, est moindre que le carré du rapport de AΘ à ΘΓ, le carré du rapport de AΘ à ΘΓ étant d'ailleurs le même que celui du carré de AΘ au carré de ΘΓ ; que, dès lors, le rapport du carré de AΘ, multiplié par ΘH, au carré de ΘΓ, multiplié par ΘZ, est moindre que celui du carré de AΘ, multiplié par ΘH, au carré de ΓΘ, multiplié par ΘH. Donc, il faut démontrer que le carré de ΓΘ, multiplié par ZΘ, est plus grand que le carré de ΓΘ multiplié par ΘH, et, dès lors, que ΘZ est plus grand que ΘH (2).

1. Le texte un peu pénible qui précède se traduit comme suit en notations usuelles :

Il sera indifférent d'écrire : $\frac{\text{segment BA}\Delta}{\text{segment B}\Gamma\Delta} = \frac{\text{segment BA}\Delta}{\text{cône BA}\Delta} \times \frac{\text{cône BA}\Delta}{\text{cône B}\Gamma\Delta} \times \frac{\text{cône B}\Gamma\Delta}{\text{segment B}\Gamma\Delta}$.

Or, on a (prop. II, coroll.) : $\frac{\text{segment BA}\Delta}{\text{cône BA}\Delta} = \frac{E\Gamma + \Theta\Gamma}{\Theta\Gamma}$, ou, observant que $\Gamma H = E\Gamma$: $\frac{\text{segment BA}\Delta}{\text{cône BA}\Delta} = \frac{H\Theta}{\Theta\Gamma}$. D'autre part, on a : $\frac{\text{cône BA}\Delta}{\text{cône B}\Gamma\Delta} = \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma}$. Enfin, on a (prop. II, coroll.) : $\frac{\text{cône B}\Gamma\Delta}{\text{segment B}\Gamma\Delta} = \frac{A\Theta}{AE + A\Theta}$, ou, observant que $ZA = AE$: $\frac{\text{cône B}\Gamma\Delta}{\text{segment B}\Gamma\Delta} = \frac{A\Theta}{\Theta Z}$.

Dès lors, par substitution, la relation première devient :

$$\frac{\text{segment BA}\Delta}{\text{segment B}\Gamma\Delta} = \frac{H\Theta}{\Theta\Gamma} \times \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} \times \frac{A\Theta}{\Theta Z} = \frac{\overline{A\Theta}^2 \times H\Theta}{\overline{\Theta\Gamma}^2 \times \Theta Z}.$$

Le texte aboutit à cette dernière relation par les considérations d'aires rectangulaires et de solides suivantes : $\frac{H\Theta}{\Theta\Gamma} \times \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{H\Theta \times A\Theta}{\overline{\Theta\Gamma}^2}$; $\frac{H\Theta \times A\Theta}{\overline{\Theta\Gamma}^2} \times \frac{\Theta A}{\Theta Z} = \frac{(H\Theta \times A\Theta)A\Theta}{\overline{\Theta\Gamma}^2 \times \Theta Z}$;

et enfin : $\frac{(H\Theta \times A\Theta)A\Theta}{\overline{\Theta\Gamma}^2 \times \Theta Z} = \frac{\overline{A\Theta}^2 \times H\Theta}{\overline{\Theta\Gamma}^2 \times \Theta Z}$.

2. On a (note avant-précédente) : $\frac{\text{aire segment AB}\Delta}{\text{aire segment B}\Gamma\Delta} = \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma}$; et l'on a démontré : $\frac{\text{segment BA}\Delta}{\text{segment B}\Gamma\Delta} = \frac{\overline{A\Theta}^2 \times H\Theta}{\overline{\Theta\Gamma}^2 \times \Theta Z}$; donc, d'après l'énoncé du problème, il faut démontrer que $\frac{\overline{A\Theta}^2 \times H\Theta}{\overline{\Theta\Gamma}^2 \times \Theta Z} < \frac{\overline{A\Theta}^2}{\overline{\Theta\Gamma}^2}$, ou, comme le texte, que $\frac{\overline{A\Theta}^2 \times H\Theta}{\overline{\Theta\Gamma}^2 \times \Theta Z} < \frac{\overline{A\Theta}^2 \times H\Theta}{\overline{\Theta\Gamma}^2 \times H\Theta}$, c'est-à-dire que $\overline{\Theta\Gamma}^2 \times \Theta Z > \overline{\Theta\Gamma}^2 \times H\Theta$, ou que $\Theta Z > H\Theta$; ce qui est évident, puisque $A\Theta > \Theta\Gamma$, et que $ZA = \Gamma H$, d'où : $A\Theta + ZA > \Theta\Gamma + \Gamma H$, ou $\Theta Z > H\Theta$.

Digitized by Google

Je dis donc que le rapport du plus grand segment au plus petit est plus grand que le rapport de leurs aires à la puissance $\frac{3}{2}$. Or, il a été démontré que le rapport des segments est le même que celui du carré de AΘ, multiplié par ΘH, au carré de ΘΓ multiplié par ΘZ, tandis que le rapport du cube de AB au cube de BΓ est le rapport à la puissance $\frac{3}{2}$ de leurs aires. Par conséquent, je dis que le rapport du carré de AΘ, multiplié par ΘH, au carré de ΓΘ, multiplié par ΘZ, est plus grand que celui du carré AΘ au rectangle formé sous BΘ, ΘΓ, c'est-à-dire que celui du carré de AΘ, multiplié par ΘH, au rectangle formé sous BΘ, ΘΓ multiplié par ΘH. Il faut donc démontrer que le carré de ΘΓ, multiplié par ΘZ, est plus petit que le rectangle formé sous BΘ, ΘΓ multiplié par HΘ, ce qui revient à démontrer que le rapport du carré de ΓΘ au rectangle formé sous BΘ, ΘΓ est plus petit que le rapport de HΘ à ΘZ. Dès lors, il faut démontrer que le rapport de HΘ à ΘZ est plus grand que celui de ΓΘ à ΘB (1).

Du point E menons la perpendiculaire EK sur EΓ et, du point B, la perpendiculaire BΛ sur EK. Il nous reste à démontrer que le rapport de HΘ à ΘZ est plus grand que celui de ΓΘ à ΘB. Or, ΘZ est égal à la somme de AΘ, KE ; par conséquent, il faut démontrer que le rapport de HΘ à la somme de ΘA, KE est plus grand que celui

---

1. On a eu (note antépénultième) : $\frac{\text{aire segment BA}\Delta}{\text{aire segment B}\Gamma\Delta} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{B\Gamma}^2}$, d'où : $\frac{\sqrt{\text{aire segt BA}\Delta}}{\sqrt{\text{aire segt B}\Gamma\Delta}} = \frac{AB}{B\Gamma}$. Multiplions ces deux expressions membre à membre, il vient : $\left[\frac{\text{aire segt BA}\Delta}{\text{aire segt B}\Gamma\Delta}\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{B\Gamma}^3}$. D'autre part, on a (note pénultième) : $\frac{\text{segment BA}\Delta}{\text{segment B}\Gamma\Delta} = \frac{\overline{A\Theta}^2 \times H\Theta}{\overline{\Theta\Gamma}^2 \times \Theta Z}$. Dès lors, pour satisfaire à l'énoncé, il faut démontrer que $\frac{\overline{A\Theta}^2 \times H\Theta}{\overline{\Theta\Gamma}^2 \times \Theta Z} > \frac{\overline{AB}^3}{\overline{B\Gamma}^3}$. En effet, $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{B\Gamma}^2} = \frac{A\Theta \times A\Gamma}{\Theta\Gamma \times A\Gamma} = \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma}$, et, par similitude de triangles, on a : $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A\Theta}{B\Theta}$; donc : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{B\Gamma}^2} \times \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} \times \frac{A\Theta}{B\Theta}$, ou $\frac{\overline{AB}^3}{\overline{B\Gamma}^3} = \frac{\overline{A\Theta}^2}{\Theta\Gamma \times B\Theta}$, d'où, suivant le texte, il faut démontrer que $\frac{\overline{A\Theta}^2 \times H\Theta}{\overline{\Theta\Gamma}^2 \times \Theta Z} > \frac{\overline{A\Theta}^2}{\Theta\Gamma \times B\Theta}$, ou $> \frac{\overline{A\Theta}^2 \times H\Theta}{(\Theta\Gamma \times B\Theta)H\Theta}$, ce qui revient à montrer que $\overline{\Theta\Gamma}^2 \times \Theta Z < (\Theta\Gamma \times B\Theta)H\Theta$, ou que $\frac{\overline{\Theta\Gamma}^2}{\Theta\Gamma \times B\Theta} < \frac{H\Theta}{\Theta Z}$, ou que $\frac{H\Theta}{\Theta Z} > \frac{\Theta\Gamma}{B\Theta}$.

Digitized by Google

de ΓΘ à ΘB. Ayant donc retranché ΓΘ de ΘH, et EΛ, qui est égal à BΘ, de KE, on devra démontrer que le rapport du reste ΓH à la somme restante AΘ, KΛ est plus grand que celui de ΓΘ à ΘB, c'est-à-dire que celui de ΘB à ΘA, ou que celui de ΛE à ΘA, et que, par permutation, le rapport de KE à EΛ est plus grand que celui de la somme de KΛ, ΘA à ΘA, et que, par division, le rapport de KΛ à ΛE est plus grand que celui de KΛ à ΘA, et que ΛE est donc plus petit que ΘA (1).

PROPOSITION IX.

L'hémisphère est le plus grand des segments de sphères compris sous des aires équivalentes (2).

Soit ABΓΔ le plus grand cercle d'une sphère et AΓ son diamètre. Soit une autre sphère dont EZHΘ est le plus grand cercle et EH le diamètre. Coupons l'une des sphères par un plan passant par le centre et l'autre par un plan ne passant pas par le centre. Que les plans sécants soient perpendiculaires aux diamètres AΓ, EH et qu'ils sectionnent (3) suivant les droites ΔB, ZΘ. Dès lors, le segment de sphère suivant l'arc ZEΘ est un hémisphère ; tandis que parmi les segments suivant l'arc BAΔ, celui qui est dans la figure située du côté du signe ✓ est plus grand que l'hémisphère, et celui qui est dans l'autre figure est plus petit que l'hémisphère (4). Que les aires des segments

1. Il reste donc, pour achever la démonstration, à vérifier la dernière relation de la note précédente. En effet, $\Theta Z = A\Theta + AZ$, et $AZ = AE = KE$; donc : $\Theta Z = A\Theta + KE$. Dès lors, il reste à vérifier que $\frac{H\Theta}{A\Theta + KE} > \frac{\Theta\Gamma}{B\Theta}$, relation qui donne : $\frac{H\Theta - \Theta\Gamma}{A\Theta + KE - B\Theta} > \frac{\Theta\Gamma}{B\Theta}$. Or, $E\Lambda = B\Theta$; donc : $\frac{\Gamma H}{A\Theta + K\Lambda} > \frac{\Theta\Gamma}{B\Theta}$. Or, $\overline{B\Theta}^2 = \Theta\Gamma \times A\Theta$, d'où : $\frac{\Theta\Gamma}{B\Theta} = \frac{B\Theta}{A\Theta}$; donc : $\frac{\Gamma H}{A\Theta + K\Lambda} > \frac{B\Theta}{A\Theta}$. Or, $\Lambda E = B\Theta$; donc : $\frac{\Gamma H}{A\Theta + K\Lambda} > \frac{\Lambda E}{A\Theta}$. Or, $KE = \Gamma H$; donc : $\frac{KE}{A\Theta + K\Lambda} > \frac{\Lambda E}{A\Theta}$, d'où : $\frac{KE}{\Lambda E} > \frac{A\Theta + K\Lambda}{A\Theta}$, d'où : $\frac{KE - \Lambda E}{\Lambda E} > \frac{A\Theta + K\Lambda - A\Theta}{A\Theta}$, ou $\frac{K\Lambda}{\Lambda E} > \frac{K\Lambda}{A\Theta}$. Dès lors, il reste à vérifier que $\Lambda E < A\Theta$, ce qui est évident.

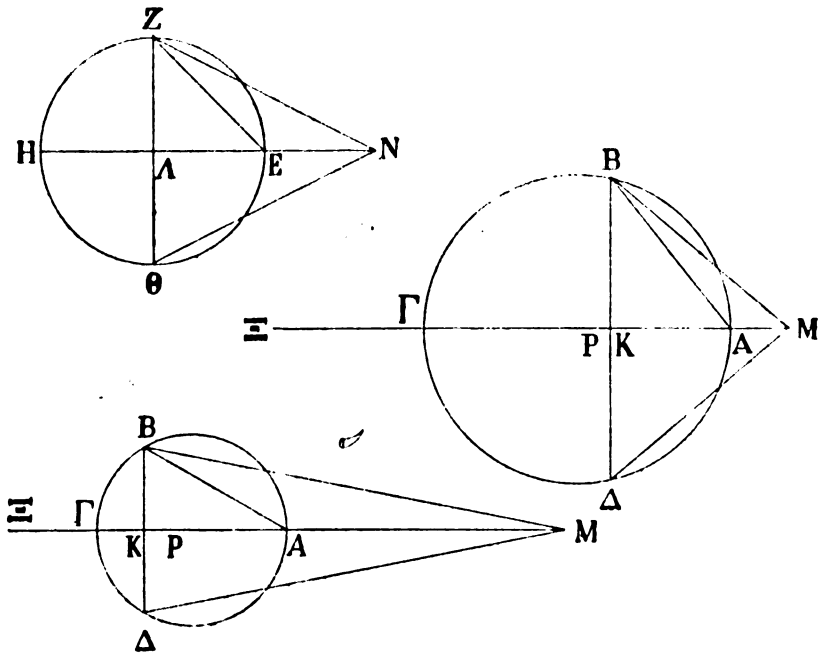
2. Archimède rappelle l'énoncé de cette proposition dans l'introduction de son traité sur les *Spirales*.

3. Sous-entendu : les grands cercles ΛBΓΔ, EZHΘ.

4. L'authenticité de la phrase qui précède à partir des mots « tandis que » est douteuse ; le texte semble avoir été un peu remanié pour viser la troisième figure, relative au segment plus petit que l'hémisphère, figure qui aurait été interpolée. La démonstration ne se rapporte d'ailleurs qu'au cas du segment plus grand que

Digitized by Google

que nous venons de dire soient équivalentes. Je dis donc que l'hémisphère suivant l'arc ZEΘ est plus grand que le segment suivant l'arc BAΔ.



En effet, puisque les aires des segments en question sont équivalentes, il est clair que la droite BA est égale à la droite EZ (1). Il est évident d'ailleurs que le carré de BA est plus petit que le double du carré de AK, tandis qu'il est plus grand que le double du carré du rayon (2). Que le carré de la droite BA soit équivalent au double du carré d'une droite AP ; soit une droite ΓΞ égale au rayon du cercle ABΔ, et que le rapport d'une droite MA à la droite AK soit le

---

l'hémisphère, et l'emploi d'un signe qui ne relève pas de l'alphabet pour désigner l'une des figures est anormal. (Cfr. HEIBERG, *loc. cit.*, vol. I, p. 225.)

1. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, propositions XLII-XLIII. Les aires des segments valent les cercles de diamètre BA, ZE. Or, ces aires sont équivalentes, ces deux cercles sont donc égaux, d'où BA = EZ.

Le texte présente ici l'interpolation suivante : « car il a été démontré que l'aire de tout segment équivaut au cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle de base du segment, et, puisque l'arc BAΔ est plus grand qu'un demi-cercle dans l'autre figure, du côté du signe ∽. »

2. Puisque arc $BA\Delta > \frac{1}{2}$ cercle, le point K tombe au delà du centre. Donc : $\overline{BA}^2 = A\Gamma \times AK$. Or, $A\Gamma = 2$ rayons, et $AK >$ rayon ; donc : $A\Gamma \times AK > 2$ carrés du rayon, d'où : $\overline{BA}^2 > 2$ carrés du rayon. D'autre part : $A\Gamma < 2\,AK$; donc : $A\Gamma \times AK < 2\,\overline{AK}^2$, d'où : $\overline{BA}^2 < 2\,\overline{AK}^2$.

Digitized by Google

même que celui de la droite ΓΞ à la droite ΓΚ. Elevons sur le cercle décrit autour du diamètre BΔ un cône ayant son sommet au point M ; ce cône sera donc équivalent au segment de sphère situé suivant l'arc BAΔ (1). De plus, soit une droite EN égale à la droite EΛ, et, sur le cercle décrit autour du diamètre ΘZ, élevons un cône ayant son sommet au point N ; ce cône sera, de même, équivalent à l'hémisphère situé suivant l'arc ΘEZ (2). Or, le rectangle délimité sous les droites AP, PΓ est plus grand que le rectangle délimité sous les droites AK, KΓ, parce que le plus petit côté de l'un des rectangles est plus grand que le plus petit côté de l'autre (3) ; tandis que le carré de la droite AP équivaut au rectangle délimité sous les droites AK, ΓΞ, car ce carré vaut la moitié du carré de la droite AB (4). En conséquence, la somme est aussi plus grande que la somme (5), et le rectangle délimité sous les droites ΓA, AP est plus grand que le rectangle délimité sous les droites ΞK, KA (6). Or, le rectangle délimité sous les droites MK, KΓ équivaut au rectangle délimité sous les droites ΞK, KA (7), de manière que le rectangle délimité sous les droites ΓA, AP est plus grand que le rectangle délimité sous les droites MK, KΓ. Donc, le rapport de ΓA à KΓ est plus grand que celui de MK à AP. Or, le rapport du carré de la droite AB au carré de la droite BK est le même que celui de la droite AΓ à la droite ΓK ; donc, il est évident que

1. On a posé : $\frac{MA}{AK}=\frac{\Gamma\Xi}{\Gamma K}$, d'où : $\frac{MA+AK}{AK}=\frac{\Gamma\Xi+\Gamma K}{\Gamma K}$, ou $\frac{MK}{AK}=\frac{\Xi K}{\Gamma K}$; relation qui montre que la hauteur MK du cône est à la hauteur AK du segment comme la somme ΞK du rayon de la sphère et de la hauteur du segment opposé est à la hauteur ΓK du segment opposé. Or (prop. II), cette condition entraîne l'équivalence du segment et du cône correspondant.

2. On a posé : $\Lambda N=2\ \Lambda E$, d'où : $\frac{\Lambda N}{\Lambda E}=\frac{2\ H\Lambda}{H\Lambda}$, relation identique à celle de la note précédente, qui (prop. II) entraîne l'équivalence de l'hémisphère et du cône correspondant.

3. On a : AP × PΓ = carré de la demi-corde en P, parallèle à BK. Or, cette demi-corde est plus grande que BK ; donc : $AP\times P\Gamma>\overline{BK}^2$. Or, $\overline{BK}^2=AK\times K\Gamma$; donc : $AP\times P\Gamma>AK\times K\Gamma$.

4. Le point P a été pris tel que $AB^2=2\ \overline{AP}^2$; d'où : $\overline{AP}^2=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$. Or, $\overline{AB}^2=AK\times A\Gamma$, d'où : $\frac{1}{2}AB^2=AK\times\frac{A\Gamma}{2}=AK\times\Gamma\Xi$; donc : $\overline{AP}^2=AK\times\Gamma\Xi$.

5. Les relations des deux notes précédentes ajoutées membre à membre donnent : $AP\times P\Gamma+\overline{AP}^2>AK\times K\Gamma+AK\times\Gamma\Xi$.

6. La relation de la note précédente peut s'écrire : $(P\Gamma+AP)AP>(K\Gamma+\Gamma\Xi)AK$, ou, comme le texte : $\Gamma A\times AP>\Xi K\times AK$.

7. On a vu plus haut que la relation posée : $\frac{MA}{AK}=\frac{\Gamma\Xi}{\Gamma K}$ donne : $\frac{MK}{AK}=\frac{\Xi K}{\Gamma K}$, d'où, comme le texte : $MK\times K\Gamma=\Xi K\times AK$.

Digitized by Google

le rapport de la moitié du carré de la droite AB, qui vaut le carré de la droite AP, au carré de la droite BK est plus grand que le rapport de la droite MK au double de la droite AP, qui est égal à la droite ΛN (¹). Dès lors, le rapport du cercle décrit autour du diamètre ZΘ au cercle décrit autour du diamètre BΔ est plus grand que celui de la droite MK à la droite NΛ ; de manière que le cône ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre ZΘ et comme sommet le point N est plus grand que le cône ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre BΔ et comme sommet le point M. En conséquence, il est évident que l'hémisphère situé suivant l'arc EZΘ est plus grand que le segment situé suivant l'arc BAΔ (²).

---

1. Les relations des deux notes précédentes donnent :
$\Gamma A \times AP > MK \times K\Gamma$, d'où : $\frac{\Gamma A}{K\Gamma} > \frac{MK}{AP}$. Or, $\overline{AB}^2 = \Gamma A \times AK$, et $\overline{BK}^2 = K\Gamma \times AK$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BK}^2} = \frac{\Gamma A}{K\Gamma}$; donc : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BK}^2} > \frac{MK}{AP}$, d'où, comme le texte : $\frac{\frac{1}{2}\overline{AB}^2}{\overline{BK}^2} > \frac{MK}{2\,AP}$.
Or, on a posé : $\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AP}^2$, d'où : $\frac{1}{2}\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2$; et l'on a : $AB = EZ$, d'où : $\overline{AB}^2 = \overline{EZ}^2 = 2\,\overline{\Lambda E}^2$; donc : $2\,\overline{AP}^2 = 2\,\overline{\Lambda E}^2$, d'où : $2\,AP = 2\,\Lambda E = \Lambda N$. Dès lors, substituant dans l'inégalité précédente, il vient, comme le texte : $\frac{\overline{AP}^2}{\overline{BK}^2} > \frac{MK}{\Lambda N}$.

2. Observant que $AP = \Lambda E = Z\Lambda$, la relation de la note précédente devient : $\frac{\overline{Z\Lambda}^2}{\overline{BK}^2} > \frac{MK}{\Lambda N}$. Or, $\frac{\text{cercle de diam. } Z\Theta}{\text{cercle de diam. } B\Delta} = \frac{\overline{Z\Lambda}^2}{\overline{BK}^2}$; donc : $\frac{\text{cercle de diam. } Z\Theta}{\text{cercle de diam. } B\Delta} > \frac{MK}{\Lambda N}$; relation qui, en vertu du lemme 4 du livre I, donne : cône de base cercle ZΘ et de sommet N > cône de base cercle BΔ et de sommet M. Or, on a démontré : cône ZΘN = hémisphère ZEΘ, et cône BΔM = segment BAΔ ; donc, comme le texte : hémisphère ZEΘ > segment BAΔ.

Digitized by Google

DE LA MESURE DU CERCLE

Digitized by Google

Digitized by Google

DE LA MESURE DU CERCLE.

PROPOSITION I.

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base (1).

Que le cercle ABΓΔ soit tel qu'on le suppose par rapport au triangle E ; je dis qu'il lui est équivalent.

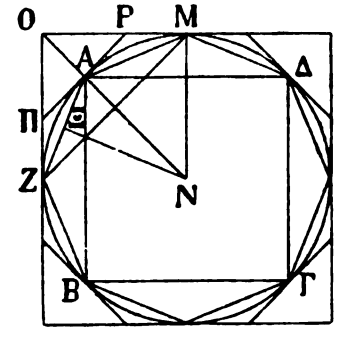
En effet, que le cercle soit plus grand, s'il se peut. Inscrivons-lui le carré AΓ, divisons les arcs en deux parties égales, et que les segments soient finalement moindres que l'excédent du cercle sur le triangle (2). Dès lors, la figure rectiligne est plus grande encore que le triangle (3). Prenons le centre N et menons la perpendiculaire NΞ; dès lors, NΞ est plus petit que le côté du triangle (4). Or, le périmètre de la figure rectiligne est aussi plus petit que le côté restant (5), puisqu'il est plus petit que la circonférence du cercle (6) ; par conséquent, la figure rectiligne est plus petite que le triangle ; ce qui est absurde (7).

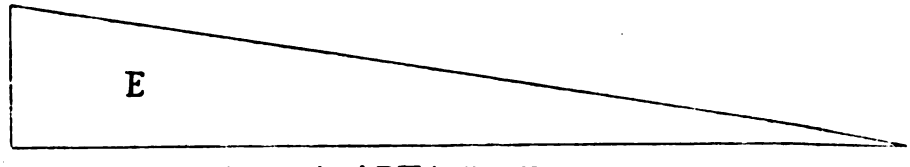
D'autre part, que le cercle soit, s'il se peut, plus petit que le

1. L'énoncé de cette proposition est repris, d'une manière un peu plus correcte, dans le Commentaire d'Eutocius relatif à cette proposition (cfr. éd. Heiberg, vol. III, p. 230).
2. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, proposition VI.
3. On a finalement : Σ segments $<$ cercle — triangle ; or, Σ segments = cercle — figure inscrite, d'où : cercle — figure inscrite $<$ cercle — triangle, ou fig. inscrite $>$ triangle.
4. C.-à-d. plus petit que le côté de l'angle droit que l'on a posé égal au rayon.
5. C.-à-d. que l'autre côté de l'angle droit.
6. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, postulats, *in fine*.
7. Puisqu'on a vu que figure inscrite $>$ triangle.

Digitized by Google

triangle E ; circonscrivons-lui un carré, divisons les arcs en deux parties égales et menons les tangentes aux points (1). Dès lors, l'angle sous OA, AP est droit (2) ; par conséquent, OP est plus grand que MP ; car MP est égal à PΛ (3), et le triangle POΠ est donc aussi plus grand que la moitié de la figure OZAM (4). Il reste un ensemble de segments, pareils au segment ΠZA, qui est moindre que l'excédent





du triangle E sur le cercle ABΓΔ (5). En conséquence, la figure rectiligne circonscrite est plus petite encore que le triangle E ; ce qui est absurde, car elle est plus grande, parce que NA est égal à la hauteur du triangle, tandis que le périmètre est plus grand que la base du triangle (6). Dès lors, le cercle équivaut au triangle E.

PROPOSITION II.

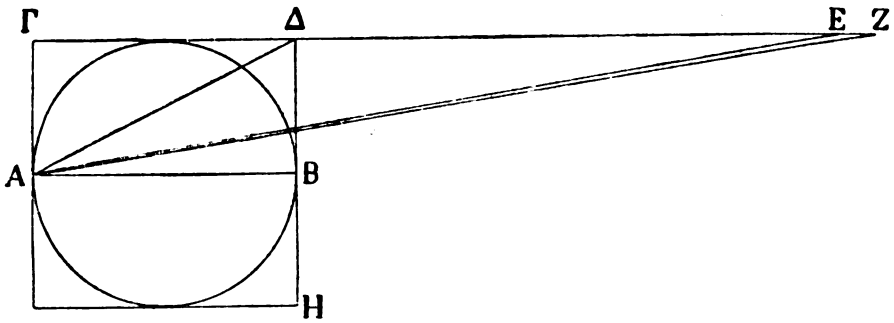
Le rapport du cercle au carré de son diamètre est celui de 11 à 14.

Soit un cercle dont le diamètre est AB ; circonscrivons-lui le carré AΓ, soit ΔE le double de ΓΔ, et que EZ soit le septième de ΓΔ. Dès lors, puisque le rapport du triangle AΓE au triangle AΓΔ

1. Sous-entendu : (aux points) de division.
2. Cfr. EUCLIDE, livre III, proposition 18.
3. Tangente PM = tangente PA ; or, hypoténuse OP > PA, d'où : OP > MP.
4. Triangle OAP > triangle PAM, car la hauteur est la même et OP > MP. De même : triangle OAΠ > triangle ΠAZ, d'où OAP + OAΠ > PAM + ΠAZ, d'où : 2[OAP + OAΠ] > PAM + ΠAZ + OAP + OAΠ, ou POΠ > ½ OZAM.
5. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, proposition VI.
6. *Ibidem*, livre I, proposition I.

Digitized by Google

est celui de 21 à 7, tandis que le rapport du triangle AΓΔ au triangle AEZ est celui de 7 à 1, le rapport du triangle AΓZ au triangle AΓΔ sera celui de 22 à 7 (1). Or, le carré de ΓH est quadruple



du triangle AΓΔ, tandis que le triangle AΓΔZ est équivalent au cercle AB, puisque, d'une part, la hauteur AΓ est égale au rayon du cercle et que, d'autre part, il sera démontré que la base est le triple du diamètre augmenté, à peu de chose près, de son septième (2). En conséquence, le rapport du cercle au carré ΓH est celui de 11 à 14 (3).

1. Par hypothèse $\Delta E = 2\,\Gamma\Delta$ et $EZ = \frac{1}{7}\Gamma\Delta$, d'où $\Gamma\Delta + \Delta E = \Gamma E = 3\,\Delta E$ et $\Gamma\Delta = 7\,EZ$. Dès lors, observant que les triangles ont même hauteur, $A\Gamma E = 3\,A\Gamma\Delta$, et $A\Gamma\Delta = 7\,AEZ$, d'où, comme le texte : $\frac{A\Gamma E}{A\Gamma\Delta} = 3 = \frac{21}{7}$, et $\frac{A\Gamma\Delta}{AEZ} = \frac{7}{1}$. Combinant, il vient : $\frac{A\Gamma E}{AEZ} = 21$, d'où : $\frac{A\Gamma E + AEZ}{AEZ} = 21 + 1$ ou $\frac{A\Gamma Z}{AEZ} = 22$, d'où, combinant avec $\frac{A\Gamma\Delta}{AEZ} = 7$, il vient, comme le texte : $\frac{A\Gamma Z}{A\Gamma\Delta} = \frac{22}{7}$.

2. Le triangle AΓΔZ = cercle AB en vertu de la proposition I. Toutefois, ayant posé $\Gamma Z = (3 + \frac{1}{7})\Gamma\Delta = \frac{22}{7}\Gamma\Delta = \frac{22}{7}$ diam. cercle, on doit admettre que ΓZ = circonférence cercle AB, ce qui ne sera démontré qu'à la proposition III suivante. Cette anomalie a fait supposer à Heiberg (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 237) que l'ordre dans lequel les propositions II et III se présentent dans tous les manuscrits aurait été interverti par un copiste qui a voulu atténuer son erreur en interpolant toute la phrase qui précède à partir du mot « ἐπεὶ, puisque ». D'autre part, Heath est aussi d'avis qu'Archimède n'a pu placer la proposition II avant la proposition III dont elle dépend (cfr. *The Works of Archimedes*, Cambridge, 1897, p. 93). Enfin, Barrow, dans son *Archimède abrégé*, à la différence de toutes les autres éditions, donne la proposition II à la suite de la proposition III, sans autres explications. (Cfr. *Archimedis opera methodo nova illustrata et succincte demonstrata.* Londini, 1675, p. 41). Nous croyons cependant que l'on peut admettre l'ordre dans lequel ces deux propositions se présentent ; car nous avons d'autres exemples de propositions dans lesquelles Archimède se base sur quelque propriété dont il annonce la démonstration ultérieure. D'ailleurs on ne doit pas perdre de vue qu'Archimède a été un voyant extraordinaire en géométrie, comme le prouvent ses nombreuses démonstrations par la réduction à l'absurde, et qu'en démontrant la proposition II, il possédait peut-être déjà la mesure approchée du cercle par une méthode qu'il jugeait moins rigoureuse que celle qu'il adoptera dans la proposition III.

3. La relation $\frac{A\Gamma Z}{A\Gamma\Delta} = \frac{22}{7}$ donne, en observant que le triangle AΓZ = cercle AB, et que carré ΓH = 4 triangles AΓΔ : $\frac{\text{cercle AB}}{\text{carré }\Gamma H} = \frac{22}{4 \times 7} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$.

Digitized by Google

PROPOSITION III.

Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus des dix soixante et onzièmes parties du diamètre.

Soit un cercle, un diamètre AΓ, le centre E, une tangente ΓΛZ et l'angle sous ZE, EΓ tiers d'un angle droit. Dès lors, le rapport de EZ à ΓZ est celui de 306 à 153, tandis que le rapport de EΓ à ΓZ est celui de 265 à 153 (1). Partageons l'angle ZEΓ en deux parties égales par la droite EH ; dès lors, ZE est à EΓ comme ZH est à HΓ (2). Par conséquent, la somme de ZE, EΓ est à ZΓ comme EΓ est à ΓH ; de manière que le rapport de ΓE à ΓH est plus grand que celui de 571 à 153. Dès lors, le rapport du carré de EH au carré de HΓ est égal à celui de 349450 à 23409 ; donc, le rapport des racines est égal à celui de $591\frac{1}{8}$ à 153 (3).

Que l'angle HEΓ soit de nouveau divisé en deux parties égales par la droite EΘ. Dès lors, de même, le rapport de EΓ à ΓΘ sera plus grand que celui de $1162\frac{1}{8}$ à 153 ; par conséquent, le rapport de ΘE à ΘΓ sera plus grand que celui de $1172\frac{1}{8}$ à 153 (4).

---

1. Par hypothèse : angle $ZE\Gamma = \frac{1}{3}$ angle droit, d'où angle $\Gamma ZE = \frac{2}{3}$ angle droit, d'où : $EZ = 2\,\Gamma Z$, d'où : $\frac{EZ}{\Gamma Z} = \frac{2}{1} = \frac{306}{153}$. Or, $E\Gamma = \sqrt{\overline{EZ}^2 - \overline{\Gamma Z}^2} = \sqrt{306^2 - 153^2} = \sqrt{70227} > 265$, d'où : $E\Gamma > 265$. Donc : $\frac{E\Gamma}{\Gamma Z} > \frac{265}{153}$, ou, suivant le texte, $\frac{E\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{265}{153}$ en valeur approchée.

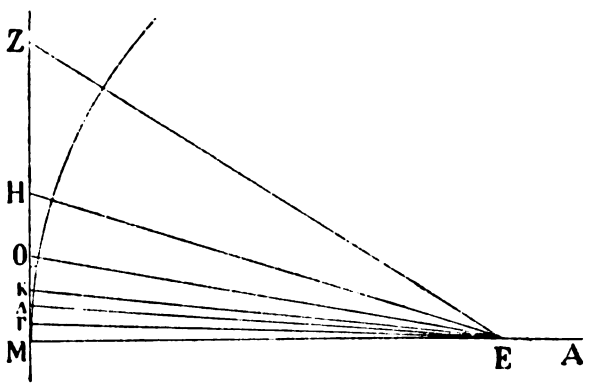
2. Cf. EUCLIDE, livre VI, proposition 3.

3. Puisque $\frac{ZE}{E\Gamma} = \frac{ZN}{H\Gamma}$, on a $\frac{ZE + E\Gamma}{E\Gamma} = \frac{ZH + H\Gamma}{H\Gamma}$, ou $\frac{ZE + E\Gamma}{E\Gamma} = \frac{Z\Gamma}{H\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\frac{ZE + E\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Gamma H}$. Or, $\Gamma Z = 153$, $EZ = 306$ et $E\Gamma > 265$; donc $\frac{E\Gamma}{\Gamma H} \geqslant \frac{306 + 265}{153}$, ou $\frac{E\Gamma}{\Gamma H} \geqslant \frac{571}{153}$, d'où $\frac{\overline{E\Gamma}^2 + \overline{\Gamma H}^2}{\overline{\Gamma H}^2} \geqslant \frac{571^2 + 153^2}{153^2}$, ou $\frac{\overline{EH}^2}{\overline{\Gamma H}^2} \geqslant \frac{349450}{23409}$, d'où, comme le texte : $\frac{EH}{\Gamma H} \geqslant \frac{591\frac{1}{8}}{153}$.

4. On aura : $\frac{NE}{E\Gamma} = \frac{H\Theta}{\Theta\Gamma}$, d'où : $\frac{HE + E\Gamma}{E\Gamma} = \frac{H\Theta + \Theta\Gamma}{\Theta\Gamma}$, d'où : $\frac{HE + E\Gamma}{H\Theta + \Theta\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Theta\Gamma}$, ou $\frac{HE + E\Gamma}{H\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Theta\Gamma}$. Or, $\frac{E\Gamma}{\Gamma H} \geqslant \frac{571}{153}$ et $\frac{EH}{\Gamma H} \geqslant \frac{591\frac{1}{8}}{153}$, d'où, substituant, $\frac{E\Gamma}{\Theta\Gamma} > \frac{591\frac{1}{8} + 571}{153}$ ou, comme le texte : $\frac{E\Gamma}{\Theta\Gamma} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$, d'où : $\frac{\overline{E\Gamma}^2}{\overline{\Theta\Gamma}^2} > \frac{(1162\frac{1}{8})^2}{153^2}$, d'où : $\frac{\overline{E\Gamma}^2 + \overline{\Theta\Gamma}^2}{\overline{\Theta\Gamma}^2} > \frac{(1162\frac{1}{8})^2 + 153^2}{153^2}$, ou $\frac{\overline{\Theta E}^2}{\overline{\Theta\Gamma}^2} > \frac{1350534\frac{33}{64} + 23409}{23409}$, d'où : $\frac{\Theta E}{\Theta\Gamma} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$.

Digitized by Google

Que l'angle ΘΕΓ soit encore divisé en deux parties égales par la droite ΕΚ. Dès lors, le rapport de ΕΓ à ΓΚ sera plus grand que celui de $2334\frac{1}{4}$ à 153 ; par conséquent, le rapport de ΕΚ à ΓΚ est plus grand que celui de $2339\frac{1}{4}$ à 153 (1).



Que l'angle ΚΕΓ soit encore divisé en deux parties égales par la droite ΛΕ. Dès lors, le rapport de ΕΓ à ΛΓ sera plus grand que celui de $4673\frac{1}{2}$ à 153 (2) ; par conséquent, puisque l'angle ΖΕΓ, qui est le tiers de l'angle droit, a été divisé quatre fois en deux parties égales, l'angle ΛΕΓ sera la quarante-huitième partie de l'angle droit. Faisons donc au point Ε un angle ΓΕΜ égal à ce dernier angle (3). Dès lors, l'angle ΛΕΜ est la vingt-quatrième partie de l'angle droit, et, par conséquent, la droite ΛΜ est le côté du polygone de 96 côtés circonscrit au cercle. Donc, puisqu'il a été démontré que le rapport de ΕΓ à ΓΛ est plus grand que celui de $4673\frac{1}{2}$ à 153, tandis que ΑΓ est le double de ΕΓ et que ΛΜ est le double de ΓΛ, il en résulte que le rapport de ΑΓ au périmètre du polygone de 96 côtés est aussi plus grand que celui de $4673\frac{1}{2}$ à 14688. De plus, ce dernier nombre est le triple du premier avec un excédent de $667\frac{1}{2}$ qui est moindre que la septième partie de $4673\frac{1}{2}$; de manière que le polygone (4) circonscrit au cercle est plus petit que le triple augmenté de plus d'un

---

1. On aura : $\frac{\Theta E}{E\Gamma} = \frac{\Theta K}{K\Gamma}$, d'où : $\frac{\Theta E + E\Gamma}{\Theta K + K\Gamma} = \frac{E\Gamma}{K\Gamma}$, ou $\frac{\Theta E + E\Gamma}{\Theta\Gamma} = \frac{E\Gamma}{K\Gamma}$. Or, $\frac{\Theta E}{\Theta\Gamma} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$, et $\frac{E\Gamma}{\Theta\Gamma} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$ d'où : $\frac{E\Gamma}{K\Gamma} > \frac{1172\frac{1}{8} + 1162\frac{1}{8}}{153}$, ou $\frac{E\Gamma}{K\Gamma} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}$, d'où :
$\frac{E\Gamma^2 + K\Gamma^2}{K\Gamma^2} > \frac{(2334\frac{1}{4})^2 + 153^2}{153^2}$, ou $\frac{E K^2}{K\Gamma^2} > \frac{5472132\frac{1}{16}}{23409}$, d'où, comme le texte : $\frac{EK}{\Gamma K} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}$.

2. On aura : $\frac{KE}{E\Gamma} = \frac{K\Lambda}{\Lambda\Gamma}$, d'où : $\frac{KE + E\Gamma}{K\Lambda + \Lambda\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Lambda\Gamma}$, ou $\frac{KE + E\Gamma}{K\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Lambda\Gamma}$. Or, $\frac{KE}{K\Gamma} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}$, et $\frac{E\Gamma}{K\Gamma} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}$, d'où : $\frac{E\Gamma}{\Lambda\Gamma} > \frac{2339\frac{1}{4} + 2334\frac{1}{4}}{153}$, ou $\frac{E\Gamma}{\Lambda\Gamma} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$.

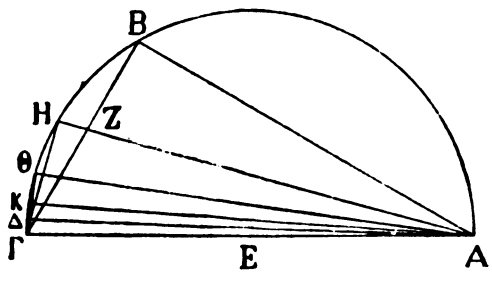
3. La solution de ce problème est donnée dans EUCLIDE, livre I, proposition 23.

4. C'est-à-dire le périmètre du polygone.

Digitized by Google

septième du diamètre. En conséquence, la circonférence du cercle est à fortiori plus petite que le triple augmenté de plus d'un septième du diamètre (1).

Soit un cercle de diamètre AΓ et un angle BAΓ qui soit le tiers de l'angle droit. Dès lors, le rapport de AB à BΓ est moindre que celui de 1351 à 780 (2), tandis que le rapport de AΓ à ΓB est celui de 1560 à 780 (3). Divisons l'angle BAΓ en deux parties égales par la droite AH. Dès lors, puisque l'angle BAH est égal à l'angle HΓB ainsi qu'à l'angle HAΓ, l'angle HΓ sera aussi égal à l'angle HAΓ. De plus, l'angle droit AHΓ est commun; par conséquent, le troisième angle HZΓ sera égal au troisième angle AΓH. Il en résulte que les triangles AHΓ, ΓHZ sont équiangles. Dès lors, AH est HΓ comme ΓH est à HZ et comme AΓ est à ΓZ. Or, AΓ est à ΓZ comme la somme des droites ΓA, AB est à BΓ ; par conséquent, la somme de ΓA, AB est aussi à BΓ comme AH est à HΓ. Il résulte de là que le rapport de AH à HΓ est moindre que celui de 2911 à 780, et que le rapport de AΓ à ΓH est moindre que celui de $3013\frac{3}{4}$ à 780 (4). Divi-



1. Reprenons plus explicitement le texte qui précède au point où nous l'avons laissé dans la note avant-précédente :

On a : $A\Gamma = 2\,E\Gamma$ et $\Lambda M = 2\,\Gamma\Lambda$, d'où, par substitution dans la relation $\frac{E\Gamma}{\Gamma\Lambda} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$, il vient : $\frac{A\Gamma}{\Lambda M} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$, d'où : $\frac{A\Gamma}{96 \times \Lambda M} > \frac{4673\frac{1}{2}}{96 \times 153}$, ou, suivant le texte : $\frac{A\Gamma}{\text{polygone de 96 côtés}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}$; or, on a $\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$, tandis que $667\frac{1}{2} < \frac{1}{7} 4673\frac{1}{2}$. Donc, $\frac{\text{polygone circonscrit}}{A\Gamma = \text{diam. cercle}} < 3 + \frac{1}{7}$, d'où polygone circonscrit $< 3 + \frac{1}{7}$ diam. cercle, d'où, en vertu de la prop. I du livre I de la *Sphère et du Cylindre*, à fortiori, circonférence cercle $< 3 + \frac{1}{7}$ diamètre cercle.

2. Puisque l'angle $BA\Gamma = \frac{1}{3}$ angle droit, BΓ est le côté de l'hexagone inscrit et l'on a : $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{1}$. Or, $3 \times 608400 = 1825200 < 1825201$, d'où : $\frac{3}{1} < \frac{1825201}{608400}$, d'où : $\frac{\sqrt{3}}{1} < \frac{1351}{780}$, d'où, comme le texte : $\frac{AB}{B\Gamma} < \frac{1351}{780}$.

3. $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{2}{1} = \frac{2 \times 780}{780} = \frac{1560}{780}$.

4. Les triangles AHΓ, ΓHZ sont équiangles, car les angles HΓB, HAΓ sont égaux comme inscrits et mesurés par des arcs égaux, et l'angle droit en H est commun, donc : $\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{\Gamma H}{HZ} = \frac{A\Gamma}{\Gamma Z}$. Or, AZ divise ΓB en deux parties égales, d'où : $\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{\Gamma Z}{ZB}$,

Digitized by Google

sons l'angle ΓΑΗ en deux parties égales par la droite ΑΘ ; le rapport de ΑΘ à ΘΓ sera, pour les mêmes motifs, plus petit que celui de $5924\frac{3}{4}$ à 780, ou que celui de 1823 à 240, car ces nombres sont respectivement les $\frac{4}{13}$ des nombres précédents. Par conséquent, le rapport de ΑΓ à ΓΘ est moindre que celui de $1838\frac{9}{11}$ à 240 (1).

Divisons encore l'angle ΘΑΓ par la droite ΚΑ ; dès lors, le rapport de ΑΚ à ΚΓ est moindre que celui de 1007 à 66, car ces nombres sont respectivement les $\frac{11}{10}$ d'autres nombres. Par conséquent, le rapport de ΑΓ à ΓΚ est moindre que celui de $1009\frac{1}{8}$ à 66 (2).

Divisons encore l'angle ΚΑΓ en deux parties égales par la droite ΛΑ ; dès lors, le rapport de ΑΛ à ΛΓ sera moindre que celui de $2016\frac{1}{8}$ à 66, tandis que le rapport de ΑΓ à ΓΛ sera moindre que celui de $2017\frac{1}{4}$ à 66 (3).

---

d'où : $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΓ}+\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΓΖ}+\text{ΖΒ}}$, ou $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΖ}} = \frac{\text{ΑΓ}+\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$, d'où : $\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΗΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}+\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} + \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$. Or, $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{1560}{780}$, et $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} < \frac{1351}{780}$; donc $\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΗΓ}} < \frac{1560+1351}{780}$, ou $\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΗΓ}} < \frac{2911}{780}$. D'autre part, $\frac{\overline{\text{ΑΗ}}^2}{\overline{\text{ΗΓ}}^2} < \frac{(2911)^2}{(780)^2}$, d'où : $\frac{\overline{\text{ΑΗ}}^2 + \overline{\text{ΗΓ}}^2}{\overline{\text{ΗΓ}}^2} < \frac{2911^2+780^2}{780^2}$, ou $\frac{\overline{\text{ΑΓ}}^2}{\overline{\text{ΗΓ}}^2} < \frac{9082321}{608400}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΗΓ}} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$.

1. On aura, comme dans le cas précédent : $\frac{\text{ΑΘ}}{\text{ΘΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}+\text{ΑΗ}}{\text{ΗΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΗΑ}} + \frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΗΓ}}$, d'où, substituant les valeurs de ces deux derniers termes : $\frac{\text{ΑΘ}}{\text{ΘΓ}} < \frac{3013\frac{3}{4}+2911}{780}$, ou $\frac{\text{ΑΘ}}{\text{ΘΓ}} < \frac{5924\frac{3}{4}}{780}$, ou $\frac{\text{ΑΘ}}{\text{ΘΓ}} < \frac{\frac{4}{13}\times 5924\frac{3}{4}}{\frac{4}{13}\times 780}$, ou $\frac{\text{ΑΘ}}{\text{ΘΓ}} < \frac{1823}{240}$. D'autre part, $\frac{\overline{\text{ΑΘ}}^2}{\overline{\text{ΘΓ}}^2} < \frac{1823^2}{240^2}$, d'où $\frac{\overline{\text{ΑΘ}}^2 + \overline{\text{ΘΓ}}^2}{\overline{\text{ΘΓ}}^2} < \frac{1823^2+240^2}{240^2}$, ou $\frac{\overline{\text{ΑΓ}}^2}{\overline{\text{ΘΓ}}^2} < \frac{3380929}{57600}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΘΓ}} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$.

2. On aura de même : $\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΚΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}+\text{ΑΘ}}{\text{ΘΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΘΓ}} + \frac{\text{ΑΘ}}{\text{ΘΓ}}$, et, par substitution des valeurs trouvées pour ces deux derniers termes, il vient : $\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΚΓ}} < \frac{1838\frac{9}{11}+1823}{240}$, ou $\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΚΓ}} > \frac{3661\frac{9}{11}}{240}$, ou $\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΚΓ}} < \frac{\frac{11}{10}3661\frac{9}{11}}{\frac{11}{10}240}$, ou $\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΚΓ}} < \frac{1007}{66}$. D'autre part, $\frac{\overline{\text{ΑΚ}}^2}{\overline{\text{ΚΓ}}^2} < \frac{1007^2}{66^2}$, d'où : $\frac{\overline{\text{ΑΚ}}^2 + \overline{\text{ΚΓ}}^2}{\overline{\text{ΚΓ}}^2} < \frac{1007^2+66^2}{66^2}$, ou $\frac{\overline{\text{ΑΓ}}^2}{\overline{\text{ΚΓ}}^2} < \frac{1018405}{14356}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΚΓ}} < \frac{1009\frac{1}{8}}{66}$.

3. On aura de même : $\frac{\text{ΑΛ}}{\text{ΛΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}+\text{ΑΚ}}{\text{ΚΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΚΓ}} + \frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΚΓ}}$, et, par substitution des valeurs

Digitized by Google

Il en résulte que, par inversion, le rapport du périmètre du polygone au diamètre est plus grand que celui de 6336 à $2017\frac{1}{4}$. Or, le premier de ces nombres est trois et $\frac{10}{71}$ fois plus grand que $2017\frac{1}{4}$; par conséquent, le périmètre du polygone de 96 côtés inscrit dans un cercle est aussi plus grand que le triple plus $\frac{10}{71}$ du diamètre ; de manière que le cercle (1) est aussi, à fortiori, plus grand que le triple plus $\frac{10}{71}$ du diamètre (2). Dès lors, la circonférence du cercle vaut trois fois le diamètre plus une partie inférieure au septième, mais supérieure aux $\frac{10}{71}$ du diamètre.

---

précédentes : $\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} < \frac{1009\frac{1}{8}}{66} + \frac{1007}{66}$, ou $\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} < \frac{2016\frac{1}{8}}{66}$. D'autre part, $\frac{\overline{A\Lambda}^2 + \overline{\Lambda\Gamma}^2}{\overline{\Lambda\Gamma}^2} < \frac{(2016\frac{1}{8})^2 + 66^2}{66^2}$, ou $\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{\Lambda\Gamma}^2} < \frac{4069284\frac{1}{32}}{4356}$, d'où, comme le texte : $\frac{A\Gamma}{\Lambda\Gamma} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$.

1. Sous-entendu : περίμετρος, le périmètre (du cercle).

2. La relation de la note avant-précédente donne, par inversion : $\frac{\Lambda\Gamma}{A\Gamma} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}}$, d'où, observant que $96 \times \Lambda\Gamma =$ périmètre polygone inscrit de 96 côtés : $\frac{\text{périmètre polygone de 96 côtés}}{\text{diamètre cercle}} > \frac{96 \times 66}{2017\frac{1}{4}}$, ou $> \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$. Or, $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}$, d'où périmètre polygone de 96 côtés $> 3\frac{10}{71}$ diamètre cercle, d'où, à fortiori, suivant le texte : Circonférence cercle $> 3\frac{10}{71}$ diamètre.

Digitized by Google

DES CONOÏDES ET DES SPHÉROÏDES

Digitized by Google

Digitized by Google

DES CONOÏDES ET DES SPHÉROÏDES

Archimède à Dosithée, prospérité.

Je t'envoie, exposées dans ce livre, les démonstrations du restant des théorèmes que tu n'as pas trouvées dans les livres que je t'ai transmis précédemment, ainsi que celles d'autres théorèmes, que j'ai trouvées plus tard, à la recherche desquelles je m'étais déjà livré à plusieurs reprises, et dont la découverte, qui me semblait présenter quelques difficultés, m'avait embarrassé. C'est pourquoi ces propositions ne furent pas publiées avec les autres. Toutefois, en m'y appliquant dans la suite avec plus de soin, j'ai trouvé celles qui m'avaient embarrassé.

Ce restant des théorèmes précédents était d'ailleurs relatif au conoïde rectangle (1), tandis que ceux qui ont été trouvés plus tard sont maintenant relatifs au conoïde obtusangle (2) et aux figures sphéroïdales, dont j'appelle les unes allongées et les autres aplaties (3).

Pour ce qui concerne le conoïde rectangle, il avait été établi ce qui suit :

Si une section de cône rectangle (4) faisant une révolution, son diamètre (5) restant fixe, se place de nouveau dans la position d'où

1. C'est-à-dire le paraboloïde de révolution engendré par une parabole qu'Archimède appelle une section de cône rectangle.
2. C.-à-d. l'hyperboloïde de révolution engendré par une hyperbole qui est appelée une section de cône obtusangle.
3. C.-à-d. les deux ellipsoïdes de révolution engendrés par révolution de l'ellipse autour de son grand et de son petit axe.
4. C.-à-d. la parabole.
5. C.-a-d. son axe.

Digitized by Google

elle a commencé à se mouvoir, la figure embrasséee par la section du cône rectangle s'appelle conoïde rectangle, son diamètre resté fixe s'appelle l'axe, tandis que le point où l'axe touche la surface du conoïde s'appelle le sommet. De plus, si un plan touche une figure conoïde rectangle, tandis qu'un autre plan mené parallèlement au plan tangent découpe un certain segment du conoïde, le plan embrassé par la section du conoïde sur le plan sécant s'appelle la base du segment découpé, le point où l'autre plan touche le conoïde s'appelle le sommet, et la partie de la droite qui, menée du sommet parallèlement à l'axe du conoïde, est comprise dans le segment, s'appelle l'axe ([1]).

Il était d'ailleurs proposé d'examiner pour quelle cause, lorsque des segments de conoïde rectangle sont découpés par un plan perpendiculaire à l'axe, le segment découpé vaut une fois et demie le cône qui a même base et même axe que le segment ([2]), et pour quelle cause, lorsque deux segments sont découpés d'un conoïde rectangle par des plans menés comme on voudra, les segments découpés sont entre eux dans le rapport carré de leurs axes ([3]).

D'autre part, pour ce qui concerne le conoïde obtusangle ([4]), nous supposons les choses suivantes : Si l'on a dans un plan une section de cône obtusangle ([5]), son diamètre ainsi que les droites les plus approchées ([6]) de la section de cône obtusangle, et si le plan dans lequel sont situées les lignes que nous venons de dire, faisant une révolution, le diamètre restant fixe, se place de nouveau dans la position d'où il a commencé à se mouvoir, il est évident que les droites approchées de la section de cône obtusangle embrasseront un cône isocèle ([7]), dont le sommet sera le point où se rencontrent les droites approchées, et dont l'axe sera le diamètre resté fixe. La figure embrassée par la section de cône obtusangle est appelée conoïde obtusangle, son axe

1. C'est-à-dire l'axe du segment.
2. Voir proposition XXI.
3. Voir proposition XXIV.
4. C'est-à-dire un hyperboloïde de révolution. Il y a lieu de remarquer qu'Archimède ne considère que l'hyperboloïde engendré par l'hyperbole tournant autour de son axe transverse et non pas celui qui est engendré autour de l'axe non-transverse, car l'axe conjugué de l'hyperbole n'apparaîtra que plus tard, lorsque Apollonius aura considéré les deux branches de l'hyperbole comme faisant partie d'une même section conique.
5. C.-à-d. une hyperbole.
6. Αἱ ἔγγιστα, les (droites) les plus approchées, c'est-à-dire les droites qu'Apollonius appellera plus tard αἱ ἀσύμπτωτοι, les asymptotes, nom que nous avons conservé.
7. C.-à-d. un cône droit.

Digitized by Google

est le diamètre resté fixe, et son sommet est le point où l'axe touche la surface du conoïde. Le cône embrassé par les droites approchées de la section de cône obtusangle s'appelle le cône enveloppant le conoïde, tandis que la droite située entre le sommet du conoïde et le sommet du cône enveloppant le conoïde s'appelle l'ajoutée à l'axe (1). De plus, si un plan touche un conoïde obtusangle, tandis qu'un autre plan, mené parallèlement au plan tangent, découpe un segment du conoïde, le plan embrassé par la section du conoïde sur le plan sécant s'appelle la base du segment découpé, le point où le plan tangent touche le conoïde s'appelle le sommet, la portion de droite qui, comprise dans le segment, est menée par le sommet du segment et le sommet du cône enveloppant le conoïde s'appelle l'axe (2), et la droite située entre les sommets que nous venons de dire s'appelle l'ajoutée à l'axe.

Tous les conoïdes rectangles sont semblables (3), tandis que sont appelés semblables ceux d'entre les conoïdes obtusangles dont les cônes enveloppants sont semblables (4).

Nous proposons d'examiner pour quelle cause, lorsque des segments de conoïde obtusangle sont découpés par un plan perpendiculaire à l'axe, le rapport du segment découpé au cône ayant même base et même axe que le segment est le même que le rapport d'une droite, égale à la somme de l'axe du segment et du triple de l'ajoutée à l'axe, à une droite égale à la somme de l'axe du segment et du double de l'ajoutée à l'axe (5) ; et pour quelle cause, lorsqu'un segment de conoïde obtusangle est découpé par un plan non perpendiculaire à l'axe, le rapport du segment découpé à la figure ayant même base que le segment et même axe, figure qui est un segment de cône (6),

1. Προσοῦσαν τῷ ἄξονι. littéralement : « l'ajoutée à l'axe », c'est-à-dire la partie de l'axe de l'hyperboloïde comprise entre son sommet et le sommet de son cône asymptote. L'ajoutée à l'axe, que nous continuerons à appeler ainsi dans notre traduction, est donc la partie de l'axe transverse comprise entre le centre et le sommet de l'hyperbole génératrice, car il y a lieu de remarquer qu'Archimède ne considère pas le centre de l'hyperbole comme tel, mais seulement comme le point de rencontre des droites les plus rapprochées, c'est-à-dire des asymptotes.

2. C.-à-d. l'axe du segment.

3. C.-à-d. que tous les paraboloïdes de révolution sont semblables, attendu que les paraboles génératrices sont semblables.

4. C.-à-d. que sont semblables ceux d'entre les hyperboloïdes de révolution dont les cônes d'asymptotes sont semblables ou qui sont engendrés par des hyperboles semblables.

5. Proposition XXV.

6. La définition du segment de cône sera donnée plus loin.

Digitized by Google

est le même que le rapport d'une droite, égale à la somme de l'axe du segment et du triple de l'ajoutée à l'axe, à une droite égale à la somme de l'axe du segment et du double de l'ajoutée à l'axe ([1]).

Nous établissons ce qui suit pour les figures sphéroïdales : Si une section de cône acutangle ([2]) faisant révolution, son plus grand diamètre restant fixe, se place de nouveau dans la position d'où elle a commencé à se mouvoir, la figure embrassée par la section de cône acutangle s'appelle un sphéroïde allongé ([3]), tandis que si une section de cône acutangle faisant une révolution, son plus petit diamètre restant fixe, se place de nouveau dans la position d'où elle a commencé à se mouvoir, la figure embrassée par la section de cône acutangle s'appelle un sphéroïde aplati ([4]). Le diamètre de chacun de ces sphéroïdes qui est resté fixe s'appelle l'axe, le point où l'axe touche la surface du sphéroïde s'appelle le sommet, le milieu de l'axe s'appelle centre, et la droite menée perpendiculairement à l'axe par le centre s'appelle le diamètre. Et si des plans parallèles touchent l'une ou l'autre de ces figures sphéroïdales sans les couper, tandis que l'on mène un autre plan parallèle aux plans tangents qui coupe le sphéroïde, le plan embrassé sur le plan sécant par la section du sphéroïde s'appelle la base des segments ainsi déterminés, les points où les plans parallèles touchent le sphéroïde s'appellent les sommets, et les portions des droites qui, reliant les sommets des segments, sont comprises dans les segments, s'appellent les axes ([5]). Nous démontrerons d'ailleurs que ces plans tangents au sphéroïde ne touchent sa surface qu'en un seul point ([6]), et que la droite qui relie les points de contact passe par le centre du sphéroïde ([7]). On appelle semblables les figures sphéroïdales dont le rapport des axes aux diamètres est le même. Les segments de figures sphéroïdales et de conoïdes sont appelés semblables lorsqu'ils sont retranchés de figures semblables, qu'ils ont les bases semblables et que les axes, perpendiculaires aux plans des bases, ou formant des angles égaux avec les diamètres homologues des bases, ont même rapport entre eux que les diamètres homologues des bases.

1. Proposition XXVI.
2. C'est-à-dire une ellipse.
3. C'est-à-dire un ellipsoïde allongé.
4. C'est-à-dire un ellipsoïde aplati.
5. C'est-à-dire les axes des segments.
6. Proposition XVI.
7. Proposition XVI.

Digitized by Google

Pour ce qui concerne les sphéroïdes, nous proposons d'examiner pour quelle cause, lorsque l'on coupe un de ces sphéroïdes par un plan passant par le centre, perpendiculairement à l'axe, chacun des segments déterminés est le double du cône ayant même base que le segment et même axe ([1]) ; pour quelle cause, lorsque l'on coupe par un plan qui, perpendiculaire à l'axe, ne passe pas par le centre, le rapport du plus grand des segments déterminés au cône de même base que le segment et de même axe, est le même que le rapport d'une droite égale à la somme de la moitié de l'axe du sphéroïde et de l'axe du plus petit segment à l'axe du plus petit segment, tandis que le rapport du plus petit segment au cône ayant même base que ce segment et hauteur égale est le même que le rapport d'une droite égale à la somme de la moitié de l'axe du sphéroïde et de l'axe du plus grand segment à l'axe du plus grand segment ([2]). Enfin, pour quelle cause, lorsque l'un de ces sphéroïdes est coupé par un plan qui, passant par le centre, n'est pas perpendiculaire à l'axe, chacun des segments déterminés est double de la figure ayant même base que le segment et même axe, figure qui est d'ailleurs un segment de cône ([3]). D'autre part, lorsque le sphéroïde est coupé par un plan ne passant pas par le centre et non perpendiculaire à l'axe, le rapport du plus grand des segments déterminés à la figure ayant même base que ce segment et même axe est le même que le rapport d'une droite égale à la somme de la moitié de la droite reliant les sommets des segments et de l'axe du plus petit segment à l'axe du plus petit segment ([4]), tandis que le rapport du plus petit segment à la figure ayant même base que ce segment et même axe est le même que le rapport d'une droite égale à la somme de la moitié de la droite qui relie les sommets des segments et de l'axe du plus grand segment à l'axe du plus grand segment, la figure étant d'ailleurs dans ce cas aussi un segment de cône([5]).

Une fois que les théorèmes que nous venons de dire seront démontrés, on trouvera par leur moyen beaucoup de théorèmes et de problèmes ; comme, par exemple, que les sphéroïdes semblables et que les segments semblables de figures sphéroïdales et de conoïdes sont entre

1. Proposition XXVII.
2. Proposition XXIX.
3. Proposition XXVIII.
4. Proposition XXXII.
5. Proposition XXX.

Digitized by Google

eux dans le rapport du cube de leurs axes, et que, dans les figures sphéroïdales équivalentes, les carrés des diamètres sont inversement proportionnels aux axes ; tandis que si, dans des figures sphéroïdales, les carrés des diamètres sont inversement proportionnels aux axes, ces sphéroïdes sont équivalents. Et encore des problèmes tels que celui-ci : par un plan mené parallèlement à un plan donné, découper un segment d'une figure sphéroïdale ou d'un conoïde donné de manière que le segment découpé soit équivalent à un cône ou à un cylindre donné ou à une sphère donnée (1). Ainsi donc, après avoir exposé au préalable des théorèmes et des choses imposées (2), utiles à leurs démonstrations, je t'exposerai ensuite ces propositions mêmes. Que la fortune te soit favorable.

DEFINITIONS.

Si un cône est coupé par un plan qui rencontre tous les côtés (3) du cône, la section sera soit un cercle soit une section de cône acutangle (4). Dès lors, si la section est un cercle, il est évident que le segment découpé du cône, du côté du sommet du cône, sera un cône. Si, d'autre part, la section est une section de cône acutangle, que la figure découpée du cône du côté du sommet du cône soit appelée tronçon de cône, que le plan entouré par la section de cône acutangle soit appelé la base du tronçon, que le point qui est en même temps le sommet du cône soit appelé le sommet, et que la droite menée du sommet du cône au centre de la section de cône acutangle soit appelée l'axe. De plus, si un cylindre est coupé par deux plans parallèles qui rencontrent tous les côtés (5) du cylindre, les sections seront ou des cercles ou des sections de cône acutangle égales et semblables entre elles. Dès lors, si les sections sont des cercles, il est évident que la figure découpée du cylindre entre les plans parallèles sera un cylindre, tandis que si les sections sont des sections de cône acutangle, que la figure découpée du cylindre entre les plans parallèles soit appelée un

1. Le théorème et le problème qui précèdent n'ont reçu ni démonstration ni solution dans les ouvrages qui nous restent d'Archimède.
2. ἐπιτάγματα, littéralement : ordres, commandements, c'est-à-dire des choses imposées comme dans les propositions VII, VIII et IX qui vont suivre.
3. C'est-à-dire les génératrices.
4. C.-à-d. une ellipse.
5. C.-à-d. les génératrices.

Digitized by Google

tronçon de cylindre ; que les plans entourés par les sections de cône acutangle soient appelés les bases du tronçon, tandis que la droite reliant les centres des sections de cône acutangle soit appelée l'axe ; cette dernière se confondra d'ailleurs avec la droite qui est l'axe du cylindre (1).

Si l'on a des grandeurs en nombre quelconque qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, tandis que l'excédent est égal à la plus petite, et si l'on a d'autres grandeurs dont le nombre est égal à celui des premières, tandis que chacune d'elles est égale à la plus grande des premières, la somme des grandeurs dont chacune est égale à la plus grande est plus petite que le double de la somme des grandeurs qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, mais plus grande que le double de la somme de celles qui restent, exception faite de la plus grande. La démonstration de cette proposition est claire d'ailleurs (2).

PROPOSITION I.

Si des grandeurs en nombre quelconque, prises deux à deux, ont même rapport que d'autres grandeurs en même nombre, semblablement placées ; si les premières grandeurs, soit toutes, soit quelques-unes d'entre elles, ont un rapport quelconque avec d'autres grandeurs, et si les secondes grandeurs, semblablement placées, ont ce même rapport avec d'autres grandeurs, le rapport de la somme des premières gran-

---

1. Au cours de ce préambule, notre traduction a voulu respecter les périphrases par lesquelles Archimède désignera toujours les sections coniques et leurs solides de révolution, périphrases qu'Apollonius remplacera plus tard par les expressions que nous avons conservées. Nous n'imposerons donc au lecteur ni le trouble ni la fatigue de circonlocutions qui reviennent constamment dans les propositions qui vont suivre. Nous dirons donc ellipse, parabole, hyperbole au lieu de section de cône acutangle, rectangle, obtusangle ; nous dirons paraboloïde et hyperboloïde de révolution au lieu de conoïde rectangle et de conoïde obtusangle. Nous adopterons aussi l'expression de cône asymptote au lieu de la périphrase de cône des droites les plus rapprochées.

2. La démonstration géométrique de ce lemme est donnée au livre *Des Spirales*, proposition XI.

D'ailleurs, algébriquement, la somme de la progression arithmétique croissante a, $2a$, $3a$,... $(n-1)a$, na, est $\frac{a\,n\,(n+1)}{2}$. Or, la somme d'un même nombre de termes égaux à na est n^2a, d'où: $n^2a < 2 \times \frac{a\,n(n+1)}{2}$, ou $n^2a < n^2a + n\,a$. D'autre part, $n^2a > 2\left[\frac{a\,n(n+1)}{2} - a\,n\right]$, ou $n^2a > n^2a - n\,a$.

Digitized by Google

deurs à la somme de celles qui leur sont proportionnelles sera le même que celui de la somme des secondes grandeurs à la somme de celles qui leur sont proportionnelles.

Que certaines grandeurs A, B, Γ, Δ, E, Z et d'autres grandeurs H, Θ, I, K, Λ, M, en même nombre, aient même rapport, prises deux à deux ; que le rapport de A à B soit le même que celui de H à Θ, celui de B à Γ le même que celui de Θ à I, et de même pour les autres grandeurs. D'autre part, que les grandeurs A, B, Γ, Δ, E, Z aient un rapport quelconque avec des grandeurs N, Ξ, O, Π, P, Σ, tandis que les grandeurs semblablement placées H, Θ, I, K, Λ, M ont même rapport que le précédent avec des grandeurs T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω, et que le rapport de A à N soit le même que celui de H à T, celui de B à Ξ le même que celui de Θ à Υ, et de même pour les autres. Il faut démontrer que le rapport de la somme de A, B, Γ, Δ, E, Z à la somme de N, Ξ, O, Π, P, Σ est le même que celui de la somme de H, Θ, I, K, Λ, M à la somme de T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω.



En effet, puisque le rapport de N à A est le même que celui de T à H, celui de A à B le même que celui de H à Θ, et celui de B à Ξ le même que celui de Θ à Υ, le rapport de N à Ξ sera le même que celui de T à Υ (1). D'ailleurs, pour les mêmes raisons, le rapport de Ξ à O sera aussi le même que celui de Υ à Φ, et il en sera pareillement pour les autres grandeurs (2). Dès lors, le rapport de la somme

1. Par hypothèse : $\frac{A}{N}=\frac{H}{T}$, ou $\frac{N}{A}=\frac{T}{H}$ et $\frac{A}{B}=\frac{H}{T}$, d'où : $\frac{N}{A}\times\frac{A}{B}=\frac{T}{H}\times\frac{H}{\Theta}$, ou $\frac{N}{B}=\frac{T}{\Theta}$.
Or, par hypothèse : $\frac{B}{\Xi}=\frac{\Theta}{\Upsilon}$, d'où : $\frac{N}{B}\times\frac{B}{\Xi}=\frac{T}{\Theta}\times\frac{\Theta}{\Upsilon}$, ou $\frac{N}{\Xi}=\frac{T}{\Upsilon}$.

2. C'est-à-dire que l'on aura comme ci-dessus : $\frac{\Xi}{O}=\frac{\Upsilon}{\Phi}$, $\frac{O}{\Pi}=\frac{\Phi}{X}$, $\frac{\Pi}{P}=\frac{X}{\Psi}$ et $\frac{P}{\Sigma}=\frac{\Psi}{\Omega}$.

Digitized by Google

de A, B, Γ, Δ, E, Z à A est le même que celui de la somme de H, Θ, I, K, Λ, M à H, tandis que le rapport de A à N est le même que celui de H à T, et que le rapport de N à la somme de N, Ξ, O, Π, P, Σ est le même que celui de T à la somme de T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω. Par conséquent, il est évident que le rapport de la somme de A, B, Γ, Δ, E, Z à la somme de N, Ξ, O, Π, P, Σ est le même que celui de la somme de H, Θ, I, K, Λ, M à la somme de T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω (1). D'ailleurs, il est clair aussi que si, parmi les grandeurs A, B, Γ, Δ, E, Z, les grandeurs A, B, Γ, Δ, E ont un rapport avec les grandeurs N, Ξ, O, Π, P, tandis que Z est sans rapport, et que si, parmi les grandeurs H, Θ, I, K, Λ, M, les grandeurs H, Θ, I, K, Λ, semblablement placées, ont ce même rapport avec les grandeurs T, Υ, Φ, X, Ψ, tandis que M est sans rapport, le rapport de la somme de A, B, Γ, Δ, E, Z à la somme de N, Ξ, O, Π, P sera, de la même manière, égal au rapport de la somme de H, Θ, I, K, Λ, M à la somme de T, Υ, Φ, X, Ψ (2).

PROPOSITION II.

Si des lignes (3) en nombre quelconque sont égales entre elles, si à chacune d'elles on applique une certaine aire ayant comme excédent une figure carrée, tandis que les côtés des figures excédentes se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur égale au côté le plus petit, et si, en outre, on a d'autres aires, en même nombre que les premières, dont chacune a même grandeur que la plus grande de celles-ci, le rapport de leur somme à la somme des premières aires sera moindre

---

1. Par hypothèse: $\frac{A}{B}=\frac{H}{\Theta}$, $\frac{B}{\Theta}=\frac{\Gamma}{I}$ etc., d'où : $\frac{A}{H}=\frac{B}{\Theta}=\frac{\Gamma}{I}=$ etc., d'où :
$$\frac{A+B+\Gamma\times\Delta+E+Z}{H+\Theta+I+K+\Lambda+M}=\frac{A}{H},$$ d'où, comme le texte :
$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta+E+Z}{A}=\frac{H+\Theta+I+K+\Lambda+M}{H}.$$ D'autre part, on a : $\frac{N}{\Xi}=\frac{T}{\Upsilon}$, $\frac{\Xi}{O}=\frac{\Upsilon}{\Phi}$, etc., d'où: $\frac{N}{T}=\frac{\Psi}{\Upsilon}=\frac{O}{\Phi}=$ etc., d'où : $\frac{N+\Xi+O+\Pi+P+\Sigma}{T+\Upsilon+\Phi+X+\Psi+\Omega}=\frac{N}{T}$ d'où, comme le texte :
$$\frac{N}{N+\Xi+O+\Pi+P+\Sigma}=\frac{T}{T+\Upsilon+\Phi+X+\Psi+\Omega}.$$ Or, $\frac{A}{N}=\frac{H}{T}$, d'où :
$$\frac{A+B+\Gamma\times\Delta+E+Z}{N+\Xi+O+\Pi+P+\Sigma}=\frac{H+\Theta+I+K+\Lambda+M}{T+\Upsilon+\Phi+X+\Psi+\Omega}.$$

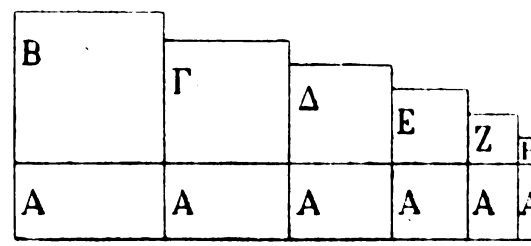
2. C'est-à-dire que l'on aurait aussi : $\frac{A+B+\Gamma\times\Delta+E+Z}{N+\Xi+O+\Pi+P}=\frac{H+\Theta+I+K+\Lambda+M}{T+\Upsilon+\Phi+X+\Psi}$.

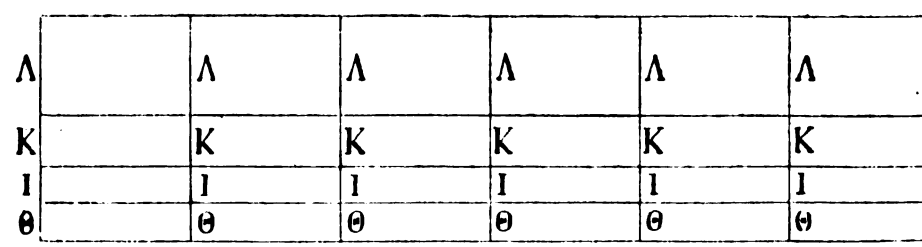
3. Sous-entendu : εὐθεῖαι, droites.

Digitized by Google

que celui d'une droite égale à la somme du côté de la plus grande figure excédente et d'une des droites égales entre elles à une droite égale à la somme du tiers du côté de la plus grande figure excédente et de la moitié d'une des droites égales entre elles ; tandis que le rapport de cette somme à ce qui reste de la somme des premières aires, après en avoir retranché la plus grande, sera plus grand que ce dernier rapport.

En effet, soit un nombre quelconque de droites égales, sur lesquelles il y a des lettres A, et appliquons à chacune d'elles une aire ayant un excédent de forme carrée, tandis que les côtés des aires excédentes B, Γ, Δ, E, Z, H se dépassent entre eux d'une même gran-





deur, et que cette grandeur dont ils se dépassent soit égale au côté le plus petit. Soit B le plus grand côté et H le plus petit. Soient, en outre, d'autres aires, sur lesquelles il y a respectivement les lettres Θ, I, K, Λ, en nombre égal à celui des premières, et dont chacune est de même grandeur que la plus grande qui est appliquée à la droite AB. D'autre part, que la ligne ΘI soit égale à A, tandis que la ligne KΛ est égale à B, et que chacune des lignes ΘI soit double de I, tandis que chacune des lignes KΛ est le triple de K (1). Il faut démontrer que le rapport de la somme des aires, dans lesquelles il y a les let-

1. On a donc par construction : $\Theta + I = A$; $K + \Lambda = B$; $\Theta + I = 2I$; $K + \Lambda = 3K$.

Digitized by Google

tres Θ, I, K, Λ, à la somme des premières aires AB, AΓ, AΔ, AE, AZ, AH est moindre que celui de la droite ΘIKΛ à la droite IK, tandis que son rapport à ce qui reste de cette somme, après en avoir retranché l'aire AB, est plus grand que ce dernier rapport (1).

En effet, on a certaines aires, dans lesquelles sont les lettres A, qui se dépassent d'une même grandeur, et la grandeur dont elles se dépassent est égale à la plus petite (2). De plus, on a d'autres aires, dans lesquelles sont les lettres Θ, I, en même nombre que les premières, toutes égales à la plus grande de celles-ci (3). Dès lors, la somme des aires dans lesquelles se trouvent les lettres Θ, I est plus petite que le double de la somme des aires dans lesquelles se trouvent les lettres A, tandis qu'elle est plus grande que le double de ce qui reste de cette somme après en avoir retranché la plus grande aire (4). Par conséquent, la somme des aires mêmes dans lesquelles se trouvent les lettres I est plus petite que la somme des aires dans lesquelles se trouvent les lettres A, tandis qu'elle est plus grande que ce qui reste de cette somme d'aires après en avoir retranché la plus grande (5). D'un autre côté, on a certaines lignes B, Γ, Δ, E, Z, H qui se dépassent entre elles d'une même grandeur, et la grandeur dont elles se dépassent est égale à la plus petite ligne, tandis qu'on a d'autres lignes, où se trouvent les lettres K, Λ, en même nombre que les premières,

1. Il faut démontrer que $\frac{\sum \text{aires } \Theta, I, K, \Lambda}{\sum \text{aires } AB, A\Gamma, A\Delta, AE, AI, AH} < \frac{\Theta+I+K+\Lambda}{I+K}$, tandis que $\frac{\sum \text{aires } \Theta, I, K, \Lambda}{\sum \text{aires } A\Gamma, A\Delta, AE, AH} > \frac{\Theta+I+K+\Lambda}{I+K}$.

2. Par hypothèse les côtés des carrés excédents diffèrent entre eux d'une longueur égale au côté du plus petit carré. Les aires rectangulaires A, qui ont même hauteur, sont entre elles comme leurs bases, c'est-à-dire comme les côtés des carrés; donc les aires A diffèrent toutes entre elles d'une aire égale à la plus petite des aires A.

Le texte est coupé anormalement ici par la phrase suivante, dont l'ambiguité et la construction grammaticale inusitée révèlent le caractère d'interpolation : « puisque les (aires) appliquées et leurs côtés les plus larges se dépassent également ».

3. Par hypothèse : aire appliquée à la droite ΘIKΛ = aire appliquée à la droite AB. Or, Θ + I = A; donc les aires appliquées aux droites ΘI = la plus grande aire appliquée à A.

4. Voir le lemme qui précède immédiatement la proposition I, et son interprétation algébrique donnée en note. On aura donc, par analogie, en considérant les aires A en progression arithmétique décroissante, et la somme des aires (Θ + I) dont chacune est égale à la plus grande aire A :
$\sum$ aires $(\Theta+I) < 2 \sum$ aires A, et $\sum$ aires $(\Theta+I) > 2[\sum$ aires A — la plus grande aire A].

5. On a posé Θ + I = 2 I, d'où : $\sum$ aires $(\Theta+I) = 2 \sum$ aires I, d'où, substituant dans les relations de la note précédente : $\sum$ aires I $< \sum$ aires A et $\sum$ aires I $> \sum$ aires A — la plus grande aire A.

Digitized by Google

toutes égales à la plus grande de celles-ci (1). Dès lors, la somme des carrés des droites égales entre elles et égales à la plus grande est moindre que le triple de la somme des carrés des droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, tandis qu'elle est plus grande que le triple de ce qui reste de cette somme après en avoir retranché le carré de la plus grande droite, car cela a été démontré dans les propositions que nous avons données sur les Spirales (2). Par conséquent, la somme des aires dans lesquelles se trouvent les lettres K est moindre que la somme des aires dans lesquelles se trouvent les lettres B, Γ, Δ, E, Z, H, tandis qu'elle est plus grande que la somme de celles dans lesquelles se trouvent les lettres Γ, Δ, E, Z, H, (3) ; en sorte que la somme des aires dans lesquelles se trouvent les lettres I, K est aussi plus petite que la somme des aires dans lesquelles se trouvent les lettres AB, AΓ, AΔ, AE, AZ, AH, tandis qu'elle est aussi plus grande que la somme des aires dans lesquelles se trouvent les lettres AΓ, AΔ, AE, AZ, AH (4). Dès lors, il est évident que le rapport de la somme des aires dans lesquelles se trouvent les lettres Θ, I, K, Λ à la somme des aires dans lesquelles se trouvent les lettres AB, AΓ, AΔ, AE, AZ, AH est plus petit que le rapport de la droite ΘΛ à la droite KI (5), tandis que son rapport à ce qui reste de cette somme d'aires, après en avoir retranché celle dans laquelle se trouvent les lettres A, B, est plus grand que ce dernier rapport (6).

---

1. Par hypothèse : $K+\Lambda=B$ et les droites B, Γ, Δ, E, Z, H sont en progression arithmétique décroissante dont la raison est la droite H.

2. Voir : *Des Spirales*, proposition X, corollaire et notes. Si l'on s'en rapporte aux relations algébriques suivantes par lesquelles nous avons interprété ce corollaire: $n\times n^2 < 3(1^2+2^2+3^2+\dots n^2)$, et $n\times n^2 > 3[1^2+2^2+3^2+\dots(n-1)^2]$, on aura ici par analogie :

$$\Sigma(K+\Lambda)^2 < 3(B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2) \text{ et } \Sigma(K+\Lambda)^2 > 3(\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2).$$

3. On a, par construction : $K+\Lambda=3K$, d'où, substituant dans les relations précédentes :

$$\Sigma \text{ aires } K < B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2, \text{ et } \Sigma \text{ aires } K > \Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2.$$

4. On a démontré plus haut : Σ aires I < Σ aires A, et Σ aires I > Σ aires A — la plus grande aire A, d'où, par addition avec la relation de la note précédente :

$$\Sigma \text{ aires (K, I)} < \text{aire (A, B)} + \text{aire (A, Γ)} + \text{aire (A, Δ)} + \text{etc.},$$
$$\text{et } \Sigma \text{ aires (K, I)} > \text{aire (A, Γ)} + \text{aire (A, Δ)} + \text{aire (A, E)} + \text{etc.}$$

5. C'est-à-dire de la droite $\Theta+I+K+\Lambda$ à la droite $I+K$.

6. Les aires rectangulaires Θ, I, K, Λ ayant toutes même base sont entre elles comme les hauteurs. On aura : $\dfrac{\Sigma \text{ aires } (\Theta, I, K, \Lambda)}{\Sigma \text{ aires } (K, I)} = \dfrac{\text{droite } \Theta+I+K+\Lambda}{\text{droite } K+I}$ d'où, par substitution successive des deux valeurs de Σ aires (K, I), il vient :

$$\frac{\Sigma \text{ aires } (\Theta, I, K, \Lambda)}{\text{aire (A, B)} + \text{aire (A, Γ)} + \text{etc.}} < \frac{\text{droite } \Theta+I+K+\Lambda}{\text{droite } K+I}, \text{ et}$$

Digitized by Google

PROPOSITION III.

Lorsque des droites menées d'un même point sont tangentes à une section quelconque de cône, tandis que d'autres droites sont menées parallèlement aux tangentes dans la section de cône et se coupent, les rectangles délimités sous leurs segments ont entre eux même rapport que les carrés des tangentes. Le rectangle délimité sous les segments de l'une des droites correspond au carré de la tangente qui lui est parallèle. Cela est d'ailleurs démontré dans les éléments sur les coniques (1).

Si d'une même parabole on découpe, d'une manière quelconque, deux segments ayant des diamètres égaux, les segments seront équivalents ainsi que les triangles qui, leur étant inscrits, ont même base que les segments et hauteur égale. J'appelle d'ailleurs diamètre de tout segment la droite qui coupe en deux parties égales toutes les droites menées parallèlement à sa base.

Soit la parabole ABΓ, et découpons-en les deux segments AΔE, ΘBΓ. Soit ΔZ le diamètre du segment AΔE, BH celui du segment ΘBΓ, et que ΔZ, BH soient égaux. Il faut démontrer que les segments AΔE, ΘBΓ sont équivalents ainsi que les triangles qui leur sont inscrits de la manière que nous avons dite.

Que la droite ΘΓ, qui découpe l'un des segments, soit d'abord perpendiculaire au diamètre de la parabole. D'autre part, prenons la droite suivant laquelle des rectangles valent les carrés des ordonnées de la parabole (2), droite qui est le double de celle qui va jusqu'à

$\frac{\Sigma \text{ aires } (\Theta, I, K, \Lambda)}{\text{aire } (A, \Gamma) + \text{aire } (A, \Delta) + \text{etc.}} > \frac{\text{droite } \Theta + I + K + \Lambda}{\text{droite } K + I}$, d'où, en observant que $\Theta + I = A$; $K + \Lambda = B$; $K + \Lambda = 3K$ et $\Theta + I = 2I$, d'où $K = \frac{1}{3}B$, et $I = \frac{1}{2}A$, on aura, conformément au texte de l'énoncé de la proposition :

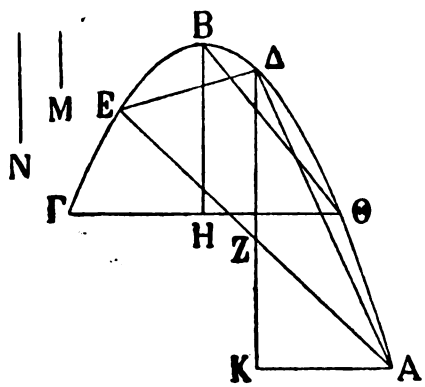
$$\frac{\Sigma \text{ aires } (\Theta, I, K, \Lambda)}{\text{aire } (A, B) + \text{aire } (A, \Gamma) + \text{etc.}} < \frac{\text{droite } (B + A)}{\text{droite } (\frac{1}{3}B + \frac{1}{2}A)}, \text{ et}$$

$$\frac{\Sigma \text{ aires } (\Theta, I, K, \Lambda)}{\text{aire } (A, \Gamma) + \text{aire } (A, \Delta) + \text{etc.}} > \frac{\text{droite } (B + A)}{\text{droite } (\frac{1}{3}B + \frac{1}{2}A)}.$$

1. Archimède s'en réfère à la démonstration qui aurait été donnée dans les traités élémentaires sur les sections coniques d'Aristée et d'Euclide lesquels ne nous sont pas parvenus. Plus tard, on retrouve cette proposition démontrée d'une manière générale pour le cercle et les sections coniques dans le traité d'Apollonius de Perge sur les sections coniques, livre III, proposition XVII.

2. παρ' ἃν δύνανται αἱ ἀπὸ τᾶς τομᾶς, littéralement : la (droite) suivant laquelle sont les puissances (les carrés) des (droites) menées de la section (conique); expression

Digitized by Google



l'axe (1). Que cette droite soit celle sur laquelle se trouve la lettre M, et menons du point A la droite AK perpendiculaire sur ΔZ. Dès lors, puisque ΔZ est le diamètre du segment, la droite AE est coupée en deux parties égales au point Z, et ΔZ est une parallèle au diamètre (2) de la parabole ; elle coupe d'ailleurs ainsi en deux parties égales toutes les droites menées parallèlement à la droite AE (3). Que le rapport du carré de AZ au carré de AK soit le même que celui de N à M. Dès lors, les carrés des droites menées de la parabole parallèlement à AE sur ΔZ sont équivalents aux rectangles qui, appliqués à une droite égale à N, ont pour largeur les droites que ces parallèles découpent sur la droite ΔZ à partir de son extrémité ; car cela est démontré dans les propositions sur les coniques. Par conséquent, le carré de AZ équivaut au rectangle délimité par les droites N et ΔZ (4).

---

par laquelle Archimède, et du reste encore plus tard Apollonius, désignent la droite qui est la hauteur constante du rectangle dont la base est l'abscisse d'un point de la parabole et dont l'aire équivaut au carré de l'ordonnée de ce même point. C'est la droite que nous désignons sous le nom de paramètre et qui est mise en évidence par l'équation de la courbe $y^2 = 2px$. Comme Apollonius désignera aussi cette droite constante par le mot ὀρθία, c.-à-d. le côté du rectangle qui se tient droit, verticalement, les géomètres de la Renaissance nomment le paramètre : « latus rectum ».

1. τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, littéralement : « de la (droite) qui va jusqu'à l'axe », c'est-à-dire la droite qui va du sommet de la parabole, suivant une génératrice du cône d'origine, jusqu'au point de rencontre avec l'axe de ce cône, c'est-à-dire jusqu'au sommet du cône. Cette droite est identique à ce que nous appelons le paramètre, ou distance du foyer de la parabole à sa directrice, comme nous le montrons dans une note relative à la proposition II du livre II *Des Corps flottants*.

2. C'est-à-dire à l'axe de la parabole.

3. Cette propriété fait l'objet de la proposition LXVI du livre I d'Apollonius sur les sections coniques.

4. Le texte renvoie aux traités élémentaires perdus d'Aristhée ou d'Euclide sur les coniques pour la démonstration de la constance du rapport du carré des ordonnées parallèles à AZ aux abscisses qu'elles découpent sur ΔZ. La démonstration géométrique de cette propriété est aisée par la considération de la similitude du triangle AZK avec le triangle ayant pour sommets le point Δ, le pied de la perpendiculaire abaissée de Δ sur HB et le point de rencontre de la tangente en Δ avec HB prolongé. Une autre démonstration géométrique découle de la considération des triangles semblables construits à l'intervention d'une tangente en un point de la courbe et du foyer de la parabole, point remarquable qui n'intervient jamais dans les propositions d'Archimède, et n'intervient pas encore dans les *Coniques* d'Apollonius. D'ailleurs, analytiquement, si l'on rapporte la parabole au diamètre

Digitized by Google

Or, le carré de ΘH est aussi équivalent au rectangle délimité par les droites M et BH, parce que ΘH est perpendiculaire au diamètre (1) ; par conséquent, le rapport du carré de AZ au carré de ΘH est le même que celui de N à M, puisque l'on a supposé que les droites ΔZ, BH sont égales. Or, le rapport du carré de AZ au carré de AK est le même que celui de N à M ; par conséquent, les droites ΘH, AK sont égales. D'autre part, les droites BH, ΔZ sont égales ; en sorte que le rectangle sous ΘH, BH équivaut au rectangle sous AK, ΔZ. En conséquence, le triangle ΘHB équivaut au triangle ΔAZ ; en sorte que les doubles de ces triangles sont équivalents (2). Or, le segment AΔE vaut une fois et un tiers le triangle AΔE, tandis que le segment ΘBΓ vaut une fois et un tiers le triangle ΘBΓ (3) ; par conséquent, il est évident que les segments sont équivalents ainsi que les triangles qui leur sont inscrits.

Toutefois, si les droites qui découpent les segments ne sont ni l'une

---

ΔK et à la tangente en Δ comme axes des coordonnées, et si p' est le paramètre relatif au diamètre auquel la courbe est rapportée, l'équation de la parabole est $y^2 = 2p'x$, d'où $\frac{y^2}{x} = 2p'$, c'est-à-dire que le carré de l'ordonnée est proportionnel à l'abscisse. Et si $2p' = N$, on aura : $\frac{\overline{AZ}^2}{\Delta Z} = N$, d'où : $\overline{AZ}^2 = N \times \Delta Z$, c'est-à-dire, d'après le texte, que les carrés des droites parallèles à AE sont équivalents aux rectangles dont les côtés sont respectivement N et les abscisses découpées par ces parallèles sur ΔZ.

1. Puisque ΘH est perpendiculaire sur BH, les droites ΘH, BH sont les ordonnées de Θ dans la parabole ramenée à la tangente en Δ et à l'axe BH comme axes des coordonnées. Or, on a vu que M est pris égal au double paramètre relatif à l'axe BH ; donc l'équation de la courbe $y^2 = 2px$ donne pour le point Θ, $\overline{\Theta H}^2 = M \times BH$.

Faisons remarquer qu'Apollonius, démontrant plus tard cette relation pour une section parallèle à une génératrice d'un cône de révolution d'angle quelconque au sommet, s'en servira précisément à définir la parabole (*Coniques*, livre I, proposition XI. Voir *Apollonii Pergaci quae graece extant cum commentariis antiquis*. Edidit Heiberg, Lipsiae, 1891-93, 2 vol., in-12, vol. I, p. 36.)

2. Les relations $\overline{AZ}^2 = N \times \Delta Z$ et $\overline{\Theta H}^2 = M \times BH$ donnent : $\frac{\overline{AZ}^2}{\overline{\Theta K}^2} = \frac{N \times \Delta Z}{M \times BH}$. Or, $\Delta Z = BH$, d'où : $\frac{\overline{AZ}^2}{\overline{\Theta H}^2} = \frac{N}{M}$. Or, par hypothèse : $\frac{\overline{AZ}^2}{\overline{AK}^2} = \frac{N}{M}$ d'où : $\frac{\overline{AZ}^2}{\overline{\Theta H}^2} = \frac{\overline{AZ}^2}{\overline{AK}^2}$, d'où : ΘH = AK. Or, puisque ΔZ = BH, on aura : $\frac{\Theta H}{\Delta Z} = \frac{AK}{BH}$, d'où, comme le texte : $\Theta H \times BH = AK \times \Delta Z$, ou $\frac{\Theta H \times BH}{2} = \frac{AK \times \Delta Z}{2}$; or, $\frac{\Theta H \times BH}{2}$ = triangle ΘHB et $\frac{AK \times \Delta Z}{2}$ = triangle ΔAZ (dont la base est ΔZ et la hauteur AK), d'où, comme le texte : triang. ΘHB = triang. ΔAZ. Or, triangle ΓΘB = 2 triang. ΘHB et, puisque ΔZ = ZA, triangle EΔA = 2 triang. ΔAZ, d'où : triangle ΓΘB = triangle EΔA.

3. Voir : *De la Quadrature de la Parabole*, propositions XVII et XXIV.

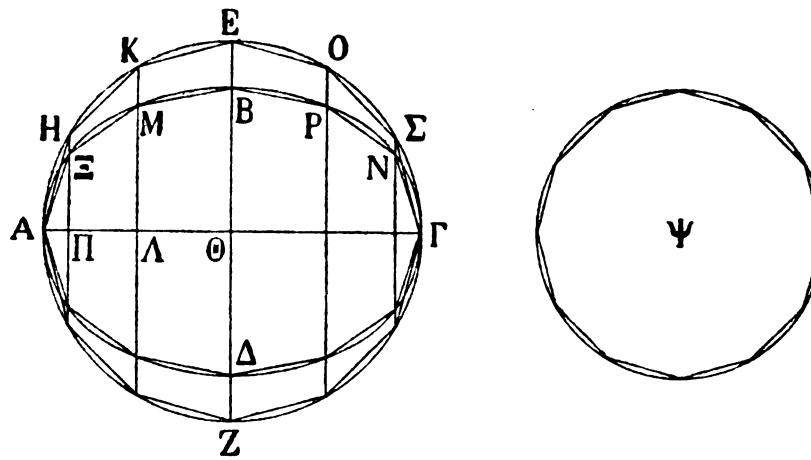
Digitized by Google

ni l'autre perpendiculaires au diamètre de la parabole, si l'on découpe une droite égale au diamètre de l'un des segments sur le diamètre de la parabole, et si, de l'extrémité de la droite découpée, l'on mène une perpendiculaire à ce dernier diamètre, le segment ainsi obtenu sera équivalent à l'un et à l'autre segment. Par conséquent, ce que nous avons proposé est évident.

PROPOSITION IV.

Le rapport de toute aire délimitée par une ellipse au cercle ayant le diamètre égal au plus grand diamètre de l'ellipse est le même que le rapport du plus petit diamètre de cette ellipse au plus grand, c'est-à-dire, au diamètre du cercle.

En effet, soit l'ellipse dans laquelle se trouvent les lettres A, B, Γ, Δ ; que la droite sur laquelle se trouvent A, Γ soit son plus grand



diamètre, la droite sur laquelle se trouvent B, Δ son plus petit diamètre, et soit le cercle décrit autour du diamètre AΓ. On doit démontrer que le rapport de l'aire délimitée par l'ellipse au cercle est le même que celui de BΔ à ΓA, c'est-à-dire à EZ. Que le rapport d'un cercle dans lequel se trouve la lettre Ψ au cercle AEΓZ soit donc le même que celui de BΔ à EZ. Je dis que le cercle Ψ est équivalent à l'ellipse (1).

1. C'est-à-dire à l'aire de l'ellipse.

Digitized by Google

En effet, si le cercle Ψ n'est pas équivalent à l'aire délimitée par l'ellipse, qu'il soit d'abord plus grand, s'il se peut. Dès lors, il est possible d'inscrire au cercle Ψ un polygone (1) d'un nombre pair d'angles, qui soit plus grand que l'aire ABΓΔ (2). Imaginons donc ce polygone inscrit ; inscrivons dans le cercle AEΓZ une figure rectiligne semblable au polygone inscrit dans le cercle Ψ ; de ses angles menons des perpendiculaires sur le diamètre AΓ, et menons les droites reliant les points où les perpendiculaires coupent l'ellipse. Dès lors, on aura une certaine figure rectiligne inscrite dans l'ellipse, et son rapport à la figure rectiligne inscrite dans le cercle AEΓZ sera le même que celui de BΔ à EZ ; car, puisque les perpendiculaires EΘ, KΛ sont coupées proportionnellement aux points M, B, il est évident que le rapport du trapèze ΛE au trapèze ΘM est le même que celui de ΘE à BΘ (3). Pour la même raison d'ailleurs, le rapport de chacun des autres trapèzes qui sont dans le cercle à chacun des trapèzes qui sont dans l'ellipse est le même que celui de EΘ à BΘ. Or, le rapport des triangles situés en A, Γ dans le cercle aux triangles situés dans l'ellipse est le même que le rapport précédent (4) ; par conséquent, le rapport de la figure rectiligne entière inscrite dans le cercle AEΓZ à la figure rectiligne entière inscrite dans l'ellipse est le même que celui de EZ à BΔ (5). Or, le rapport de cette même figure rectiligne (6) à celle qui est inscrite dans le cercle Ψ est aussi le même que le rapport précédent, parce que ces cercles ont aussi ce même rapport ; par conséquent, la figure recti-

1. Il est sous-entendu que ce polygone inscrit est équilatéral, et le texte dira incidemment au cours de la démonstration que le nombre des côtés est pair.

2. Voir : *De la Sphère et du Cylindre,* livre I, proposition VI. On a par hypothèse 1re : Cercle Ψ > aire ellipse; il est donc possible de réaliser la relation cercle Ψ — aire polyg. inscrit < cercle Ψ — aire ellipse ABΓΔ, d'où : aire polygone inscrit dans cercle Ψ > aire ellipse ABΓΔ.

3. On a: $\frac{\Lambda K}{\Lambda M}=\frac{\Theta E}{\Theta B}$. d'où : $\frac{\Lambda K}{\Theta E}=\frac{\Lambda M}{\Theta B}$. d'où : $\frac{\Lambda K+\Theta E}{\Theta E}=\frac{\Lambda M+\Theta B}{\Theta B}$, d'où: $\frac{\Lambda K+\Theta E}{\Lambda M+\Theta B}=\frac{\Theta E}{\Theta B}$, d'où : $\frac{\Lambda\Theta(\Lambda K+\Theta E)}{\Lambda\Theta(\Lambda M+\Theta B)}=\frac{\Theta E}{\Theta B}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{trapèze } \Lambda E}{\text{trapèze } \Theta M}=\frac{\Theta E}{\Theta B}$.

4. Ces triangles ont même hauteur AΠ, donc : $\frac{\text{triangle } A\Pi H}{\text{triangle } \Lambda\Xi\Pi}=\frac{\Pi H}{\Pi\Xi}$. Or, $\frac{\Pi H}{\Pi\Xi}=\frac{\Theta E}{\Theta B}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{triangles cercle en A, Γ.}}{\text{triangles ellipse en A, Γ.}}=\frac{\Theta E}{\Theta B}$.

5. Les relations des deux notes précédentes donnent :
$\frac{\Sigma \text{ trapèzes cercle}+\Sigma \text{ triangles cercle en A, Γ.}}{\Sigma \text{ trapèzes ellipse}+\Sigma \text{ triangles ellipse en A, Γ.}}=\frac{\Theta E}{\Theta B}=\frac{2\,\Theta E}{2\,\Theta B}=\frac{EZ}{B\Delta}$, ou, comme le texte : $\frac{\text{polygone inscrit cercle}}{\text{polygone inscrit ellipse}}=\frac{EZ}{B\Delta}$.

6. C'est-à-dire, celle qui est inscrite dans le cercle AEΓZ.

Digitized by Google

ligne inscrite dans le cercle Ψ est équivalente à la figure rectiligne inscrite dans l'ellipse ; ce qui est impossible, car elle était plus grande que l'aire totale délimitée par l'ellipse (1).

Mais qu'il soit plus petit, s'il se peut (2). Dès lors, il est de nouveau possible d'inscrire dans l'ellipse un polygone (3) d'un nombre pair de côtés qui soit plus grand que le cercle Ψ (4). Que ce polygone soit donc inscrit et que les droites menées de ses angles perpendiculairement sur AΓ soient prolongées jusqu'à la circonférence du cercle. Une certaine figure rectiligne sera donc de nouveau inscrite dans le cercle AE dont le rapport à la figure inscrite dans l'ellipse sera le même que celui de EZ à BΔ (5). Par conséquent, si l'on inscrit aussi dans le cercle Ψ une figure semblable à celle du premier cercle, on démontrera qu'elle est équivalente à la figure inscrite dans l'ellipse ; ce qui est impossible (6). Dès lors, le cercle Ψ n'est pas davantage plus petit que l'aire délimitée par l'ellipse. En conséquence, il est évident que le rapport de l'aire que nous venons de dire au cercle AEΓZ est le même que le rapport de BΔ à EZ (7).

---

1. On a, par hypothèse: $\frac{\text{cercle AEΓZ}}{\text{cercle }\Psi} = \frac{EZ}{B\Delta}$ d'où : $\frac{\text{polygone inscrit cercle AEΓZ}}{\text{polygone inscrit cercle }\Psi} = \frac{EZ}{B\Delta}$, d'où, comparant avec la relation de la note précédente :

$$\frac{\text{polyg. inscr. cercle AEΓZ}}{\text{polyg. inscr. cercle }\Psi} = \frac{\text{polyg. inscr. cercle AEΓZ}}{\text{polyg. inscr. ellipse}},$$

d'où, comme le texte : polyg. inscrit cercle Ψ = polyg. inscr. ellipse; ce qui est absurde, car on a vu que polyg. inscrit cercle Ψ > aire ellipse, d'où, à fortiori : polyg. inscrit cercle Ψ > polyg. inscrit ellipse.

2. C.-à-d. cercle Ψ < aire ellipse en seconde hypothèse.

3. Sous-entendu : équilatéral.

4. En vertu de la proposition VI du livre I *De la Sphère et du Cylindre,* il est possible de réaliser : aire ellipse — aire polygone inscrit dans l'ellipse < aire ellipse — cercle Ψ, d'où, comme le texte : aire polygone inscrit dans l'ellipse > cercle Ψ.

5. Voir note relative à la première partie de la démonstration.

6. Comme dans la note relative à la première partie de la démonstration, on arrivera à conclure : polygone inscrit cercle Ψ = polygone inscrit ellipse; ce qui est absurde, car on a vu que aire polygone inscrit dans l'ellipse > cercle Ψ, d'où, à fortiori : polygone inscrit dans l'ellipse > polygone inscrit dans le cercle Ψ.

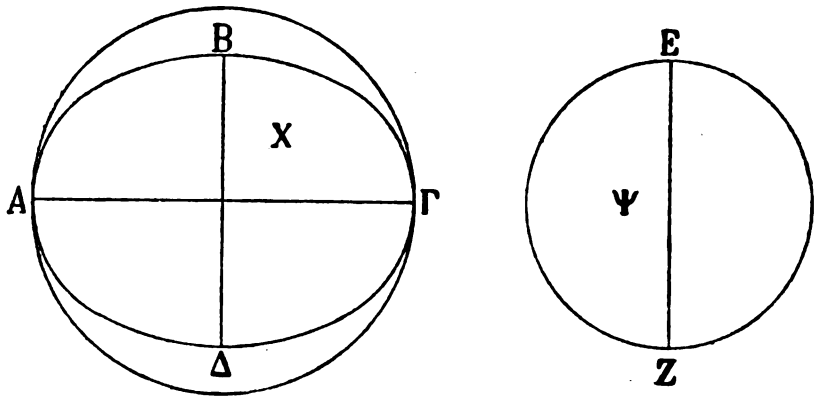
7. Ayant donc démontré cercle Ψ = aire ellipse, on a, par hypothèse : $\frac{\text{cercle }\Psi}{\text{cercle AEΓZ}} = \frac{B\Delta}{EZ}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{aire ellipse}}{\text{cercle AEΓZ}} = \frac{B\Delta}{EZ}$. C. q. f. d.

Digitized by Google

PROPOSITION V.

Le rapport de toute aire délimitée par une ellipse à tout cercle est le même que celui du rectangle délimité sous les diamètres de l'ellipse au carré du diamètre du cercle.

En effet, soit une certaine aire délimitée par l'ellipse dans laquelle se trouve la lettre X. Soient, d'autre part, AΓ, BΔ les diamètres de



l'ellipse, AΓ étant le plus grand ; soit encore le cercle dans lequel se trouve la lettre Ψ, et EZ son diamètre. Il faut démontrer que le rapport de l'aire X au cercle Ψ est le même que celui du rectangle délimité sous AΓ, BΔ au carré de EZ.

Circonscrivons (1) le cercle décrit autour du diamètre AΓ. Dès lors, le rapport de l'aire X au cercle de diamètre AΓ sera le même que celui du rectangle délimité sous AΓ, BΔ au carré de AΓ ; car il a été démontré que le rapport de l'aire X au cercle de diamètre AΓ est le même que celui de BΔ à AΓ (2). Or, le rapport du cercle de diamètre AΓ au cercle de diamètre EZ est le même que celui du carré de AΓ au carré de EZ ; par conséquent, il est évident que le rapport de l'aire X au cercle Ψ est le même que celui du rectangle délimité sous AΓ, BΔ au carré de EZ (3).

---

1. C'est-à-dire circonscrivons à l'aire de l'ellipse.

2. On a, en vertu de la proposition IV : $\frac{\text{aire ellipse X}}{\text{cercle diam. A}\Gamma} = \frac{B\Delta}{A\Gamma}$.

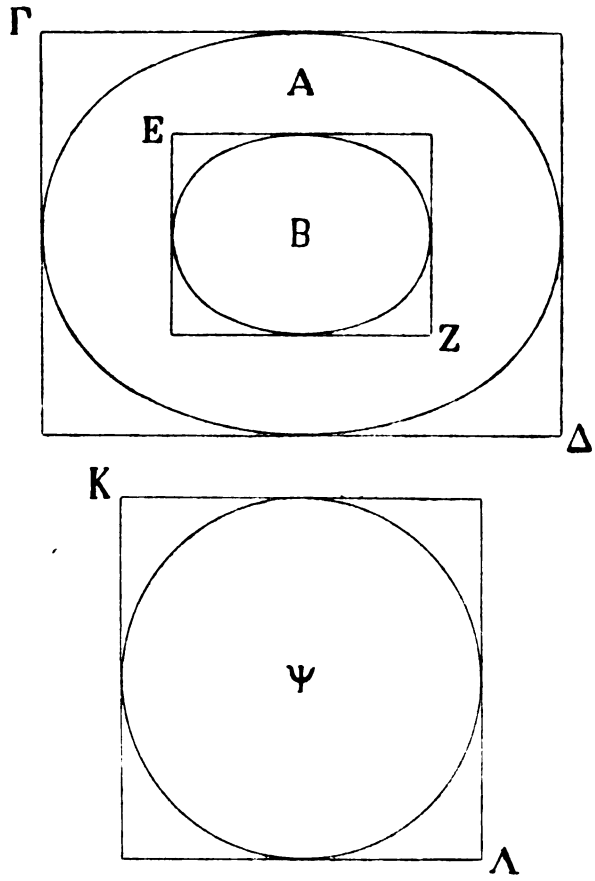
3. On a: $\frac{\text{cercle diam. A}\Gamma}{\text{cercle diam. EZ}} = \frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{EZ}^2}$, d'où, combinant avec la relation précédente :

Digitized by Google

PROPOSITION VI.

Le rapport des aires délimitées par des ellipses est le même que celui des rectangles délimités sous les diamètres de ces ellipses.

Soient les aires délimitées par les ellipses où se trouvent les lettres A, B ; soit, d'une part, ΓΔ le rectangle délimité sous les diamètres de l'ellipse qui délimite l'aire A, et, d'autre part, EZ le rectangle délimité sous les diamètres de l'autre ellipse. On doit démontrer que le rapport de l'aire A à l'aire B est le même que celui du rectangle ΓΔ au rectangle EZ.



Prenons donc un certain cercle dans lequel se trouve la lettre Ψ, et soit ΚΛ le carré construit sur son diamètre. Dès lors, le rapport de l'aire A au cercle Ψ sera le même que celui de ΓΔ à ΚΛ ; tandis que le rapport du cercle Ψ à l'aire B sera le même que celui de ΚΛ à EZ. En conséquence, il est évident que le rapport de l'aire A à l'aire B est le même que celui du rectangle ΓΔ au rectangle EZ (1).

$\frac{\text{cercle diam. } A\Gamma}{\text{cercle diam. } EZ} \times \frac{\text{aire ellipse X}}{\text{cercle diam. } A\Gamma} = \frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{EZ}^2} \times \frac{B\Delta}{A\Gamma}$, d'où, comme le texte :

$\frac{\text{aire ellipse X}}{\text{cercle diam. } EZ} = \frac{A\Gamma \times B\Delta}{\overline{EZ}^2}$.

1. On aura, en vertu de la proposition V : $\frac{\text{aire ellipse A}}{\text{cercle } \Psi} = \frac{\text{rectangle } \Gamma\Delta}{\text{carré } K\Lambda}$, et $\frac{\text{aire ellipse B}}{\text{cercle } \Psi} = \frac{\text{rectangle EZ}}{\text{carré } K\Lambda}$, ou, par inversion, comme le texte : $\frac{\text{cercle } \Psi}{\text{aire ellipse B}} = \frac{\text{carré } K\Lambda}{\text{rectangle EZ}}$ d'où, par produit : $\frac{\text{aire ellipse A}}{\text{aire ellipse B}} = \frac{\text{rectangle } \Gamma\Delta}{\text{rectangle EZ}}$.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

Il est clair d'après cela que les aires délimitées par des ellipses semblables ont entre elles même rapport que les carrés des diamètres homologues de ces ellipses.

PROPOSITION VII.

Etant données une ellipse et une ligne perpendiculaire élevée du centre de l'ellipse sur le plan dans lequel l'ellipse se trouve, il est possible de trouver un cône ayant comme sommet l'extrémité de la droite qui a été élevée et dans la surface duquel l'ellipse donnée soit située (1).

Soient données une certaine ellipse ainsi qu'une ligne droite élevée de son centre perpendiculairement au plan dans lequel se trouve l'ellipse. Menons un plan par la droite élevée et par le plus petit diamètre. Soit AB le petit diamètre dans ce plan, Δ le centre de l'ellipse, $\Gamma\Delta$ la droite élevée perpendiculairement du centre et Γ son extrémité. Imaginons, d'autre part, que l'ellipse est décrite autour du diamètre AB, dans un plan perpendiculaire à $\Gamma\Delta$. Il s'agit de trouver un cône, ayant le point Γ comme sommet, dans la surface duquel soit placée l'ellipse.

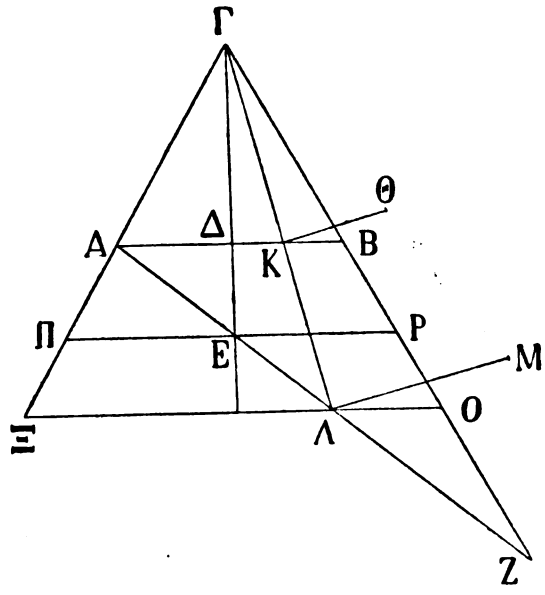
Prolongeons donc les droites menées du point Γ aux points A, B, et du point A menons la droite AZ, de manière que le rapport du rectangle délimité par AE, EZ au carré de $E\Gamma$ soit le même que celui du carré de la moitié du plus grand diamètre au carré de $\Delta\Gamma$; ce qui est d'ailleurs possible, puisque ce premier rapport est plus grand que celui du rectangle délimité sous $A\Delta$, ΔB au carré de $A\Gamma$ (2). D'autre part,

1. Archimède ne considérant jamais que l'ellipse déterminée par le plan sécant perpendiculaire à une génératrice de cône droit acutangle, le problème revient, en d'autres termes, à trouver la section droite du cône circulaire acutangle, de sommet Γ, dont la surface soit capable de l'ellipse donnée.

2. En menant AZ par le point A de manière à satisfaire à la relation $\frac{AE \times EZ}{\overline{E\Gamma}^2} = \frac{(\frac{1}{2}\text{ grand diam.})^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2}$, Archimède justifie cette hypothèse par la relation $\frac{AE \times EZ}{\overline{E\Gamma}^2} > \frac{A\Delta \times \Delta B}{\overline{\Delta\Gamma}^2}$ qu'il ne démontre toutefois pas. Or, la considération de triangles semblables donne: $\frac{\Pi E}{E\Gamma} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$ et $\frac{EP}{E\Gamma} = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}$, d'où: $\frac{\Pi E \times EP}{\overline{E\Gamma}^2} = \frac{A\Delta \times \Delta B}{\overline{\Delta\Gamma}^2}$ (I). D'autre part,

Digitized by Google

par la droite AZ élevons un plan perpendiculaire au plan dans lequel se trouvent les droites AΓ, AZ, décrivons dans ce plan un cercle autour du diamètre AZ, et, sur ce cercle, construisons le cône ayant le point Γ pour sommet. Dès lors, nous allons démontrer que l'ellipse est située dans la surface de ce cône.



En effet, si elle n'est pas située dans la surface de ce cône, il est nécessaire qu'un certain point de l'ellipse ne soit pas dans la surface du cône. Imaginons donc un certain point Θ, pris sur l'ellipse, qui ne soit pas dans la surface du cône, et, du point Θ, menons la droite ΘK perpendiculaire sur AB. Cette droite sera donc perpendiculaire au plan dans lequel se trouvent les droites AΓ, ΓZ (1). Prolongeons, d'autre part, la droite menée du point Γ au point K ; cette droite rencontre donc la droite AZ en un point Λ, et, du point Λ, menons la droite ΛM perpendiculairement à ZA dans le cercle décrit autour du diamètre AZ. Imaginons que le point M soit élevé jusqu'à la circonférence de ce cercle et, en outre, menons la droite ΞO par le point Λ et la droite ΠP par le point E parallèlement à AB. Dès lors, puisque le rapport du rectangle délimité sous AE, EZ au carré de EΓ est le même que celui du carré de la moitié du plus grand diamètre au carré de ΔΓ, tandis que le rapport du carré de EΓ au rectangle

---

si l'angle Z était égal à l'angle AΠE, les triangles AΠE, PZE seraient semblables et donneraient : $\frac{AE}{\Pi E} = \frac{EP}{EZ}$ (II). Mais angle Z = angle ΓBA — angle BAZ = angle ΓAB — angle BAZ, d'où : angle Z < angle ΓAB, ou angle Z < angle AΠE ; donc, au lieu de la relation (II), on a : $\frac{AE}{\Pi E} > \frac{EP}{EZ}$ d'où : AE × EZ > ΠE × EP, d'où, substituant dans (I), il vient, comme le texte : $\frac{AE \times EZ}{E\Gamma^2} > \frac{A\Delta \times \Delta B}{\Delta\Gamma^2}$. Or, AΔ × ΔB = [½ petit diamètre]² < [½ plus grand diamètre]² ; donc la relation d'hypothèse est possible.

1. Car ΘK est perpendiculaire à AB dans le plan de l'ellipse, plan perpendiculaire lui-même au plan ΓΛZ.

Digitized by Google

délimité sous EΠ, EP est le même que celui du carré de ΔΓ au rectangle délimité sous AΔ, ΔB, le rapport du rectangle délimité sous AE, EZ au rectangle délimité sous ΠE, EP est le même que celui du carré de la moitié du grand diamètre au rectangle délimité sous AΔ, ΔB (1). Or, le rectangle délimité sous AE, EZ est au rectangle délimité sous ΠE, EP comme le rectangle délimité sous AΛ, ΛZ est au rectangle délimité sous ΛΞ, ΔO (2), tandis que le carré de la moitié du plus grand diamètre est au rectangle délimité sous AΔ, ΔB comme le carré de ΘK est au rectangle délimité sous AK, KB (3). En conséquence, le rapport du rectangle délimité sous AΛ, ΛZ au rectangle délimité sous ΞΛ, ΛO sera le même que celui du carré de ΘK au rectangle délimité sous AK, KB (4). Or, le rapport du rectangle délimité sous ΞΛ, ΛO au carré de ΓΛ est le même que celui du rectangle délimité sous AK, KB au carré de KΓ ; par conséquent, le rapport du rectangle délimité sous AΛ, ΛZ au carré de ΓΛ sera le même que celui du carré de ΘK au carré de KΓ. Or, le rectangle délimité sous

1. Par hypothèse: $\frac{EA \times EZ}{\overline{E\Gamma}^2} = \frac{[\frac{1}{2} \text{ grand diam.}]^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2}$, d'autre part (note avant-précédente), on a : $\frac{\overline{E\Gamma}^2}{\Pi E \times EP} = \frac{\overline{\Delta\Gamma}^2}{A\Delta \times \Delta B}$, d'où, par identité, comme le texte :

$$\frac{EA \times EZ}{\Pi E \times EP} = \frac{[\frac{1}{2} \text{ grand diam.}]^2}{A\Delta \times \Delta B.}$$

2. On a, par similitude de triangles : $\frac{AE}{E\Pi} = \frac{A\Lambda}{\Lambda\Xi}$, et $\frac{EZ}{EP} = \frac{\Lambda Z}{\Lambda O}$, d'où, comme le texte : $\frac{AE \times EZ}{E\Pi \times EP} = \frac{A\Lambda \times \Lambda Z}{\Lambda\Xi \times \Lambda O}$.

3. Archimède invoque ici une propriété de l'ellipse qui était sans doute démontrée à son époque dans les traités élémentaires sur les sections coniques, et dont Apollonius devait donner plus tard une démonstration géométrique généralisée aux cas du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole (*Les Coniques*, livre I, proposition XXI).

Analytiquement d'ailleurs, l'équation la plus simple de l'ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$, dans laquelle a et b sont les demi-axes, mise sous la forme : $\frac{y^2}{(a+x)(a-x)} = \frac{b^2}{a^2}$, montre aussitôt que le carré de l'ordonnée est au produit des segments correspondants déterminés sur l'axe dans le rapport constant des carrés des demi-axes. Or, en observant que $A\Delta = \Delta B$, d'où : $A\Delta \times \Delta B = [\frac{1}{2} \text{ petit diamètre}]^2$, on aura, suivant le texte: $\frac{[\frac{1}{2} \text{ grand diamètre}]^2}{A\Delta \times \Delta B} = \frac{\overline{\Theta K}^2}{AK \times KB}$.

4. Les relations précédentes $\frac{EA \times EZ}{\Pi E \times EP} = \frac{[\frac{1}{2} \text{ grand diam.}]^2}{A\Delta \times \Delta B}$ et $\frac{EA \times EZ}{\Pi E \times EP} = \frac{A\Lambda \times \Lambda Z}{\Lambda\Xi \times \Lambda O}$ donnent la relation $\frac{[\frac{1}{2} \text{ grand diam.}]^2}{A\Delta \times \Delta B} = \frac{A\Lambda \times \Lambda Z}{\Lambda\Xi \times \Lambda O}$ qui, comparée avec la relation de la note précédente, donne, comme le texte : $\frac{A\Lambda \times \Lambda Z}{\Lambda\Xi \times \Lambda O} = \frac{\overline{\Theta K}^2}{AK \times KB}$.

Digitized by Google

ΑΛ, ΛΖ est équivalent au carré de ΛΜ ; car la droite ΛΜ a été menée perpendiculairement dans le demi-cercle décrit autour de ΑΖ ; par conséquent, le rapport du carré de ΛΜ au carré de ΛΓ est le même que celui du carré de ΘΚ au carré de ΚΓ (1) ; en sorte que les points Γ, Θ, Μ sont situés sur une droite. Or, la droite ΓΜ est dans la surface du cône ; par conséquent, il est évident que le point Θ est aussi dans la surface du cône. Or, nous avons supposé qu'il n'y est pas ; par conséquent, aucun point n'est sur l'ellipse qui ne soit pas dans la surface du cône précité. Dès lors, toute l'ellipse est dans la surface de ce même cône.

PROPOSITION VIII.

Etant données une ellipse et une ligne (2) non perpendiculaire (3), élevée du centre de l'ellipse dans le plan qui, passant par l'un des diamètres, est élevé perpendiculairement au plan dans lequel se trouve l'ellipse, il est possible de trouver un cône ayant comme sommet l'extrémité de la droite qui a été élevée, et dans la surface duquel l'ellipse donnée soit située.

Soit donc ΒΑ un diamètre de l'ellipse, Δ son centre et ΔΓ la droite élevée de son centre comme nous l'avons dit. Imaginons, d'autre part, l'ellipse décrite autour du diamètre ΑΒ dans le plan perpendiculaire au plan dans lequel se trouvent les droites ΑΒ, ΓΔ. On doit donc trouver un cône, ayant son sommet au point Γ, dans la surface duquel cette ellipse soit située.

Les droites ΑΓ, ΓΒ ne sont donc pas égales puisque la droite ΓΔ

---

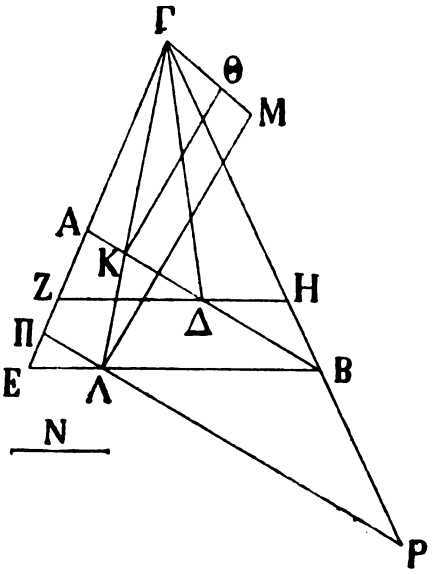
1. On a, par similitude de triangles : $\frac{\Xi\Lambda}{\Gamma\Lambda}=\frac{\Lambda K}{\Gamma K}$. et $\frac{\Lambda O}{\Gamma\Lambda}=\frac{KB}{\Gamma K}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Xi\Lambda\times\Lambda O}{\overline{\Gamma\Lambda}^2}=\frac{\Lambda K\times KB}{\overline{K\Gamma}^2}$, d'où, par produit avec la relation de la note précédente, il vient, comme le texte : $\frac{\Lambda\Lambda\times\Lambda Z}{\overline{\Gamma\Lambda}^2}=\frac{\overline{\Theta K}^2}{\overline{K\Gamma}^2}$. Or, Μ est sur la circonférence du demi-cercle de diamètre ΑΖ, et ΛΜ est perpendiculaire à ΑΖ, d'où : $\Lambda\Lambda\times\Lambda Z=\overline{\Lambda M}^2$, d'où, par substitution : $\frac{\overline{\Lambda M}^2}{\overline{\Gamma\Lambda}^2}=\frac{\overline{\Theta K}^2}{\overline{K\Gamma}^2}$, ou $\frac{\Lambda M}{\Gamma\Lambda}=\frac{\Theta K}{K\Gamma}$, d'où Γ, Θ, Μ sont sur une même droite.

2. Sous-entendu : droite.

3. C.-à-d. non perpendiculaire au plan de l'ellipse.

Digitized by Google

n'est pas perpendiculaire au plan dans lequel se trouve l'ellipse (1). Dès lors, que EΓ soit égal à ΓB, qu'une droite N soit égale à la moitié de l'autre diamètre avec lequel le diamètre AB est conjugué, et, par le point Δ, menons ZH parallèle à EB. D'autre part,menons par EB un plan perpendiculaire au plan dans lequel se trouvent les droites AΓ, ΓB, et dans ce plan,autour du diamètre EB, décrivons (2) un cercle, si le carré de N est équivalent au rectangle délimité sous ZΔ, ΔH (3), et, s'il n'est pas équivalent, décrivons une ellipse telle que le rapport du carré de son autre diamètre au carré de EB soit le même que celui du carré de N au rectangle délimité sous ZΔ, ΔH (4). D'autre part, prenons un cône,



1. Car, si ΓΔ était perpendiculaire au plan de l'ellipse, les droites AΓ, ΓB seraient égales comme côtés symétriques d'un cône droit à base elliptique.

2. Le texte de quelques manuscrits et des éditions anciennes porte à cet endroit : « κύκλος ἢ ἔλλειψις », c'est-à-dire un cercle ou une ellipse ; ce qui a pu faire croire que le mot ellipse était antérieur à l'époque d'Apollonius et remontait à celle d'Archimède. Or, comme Heiberg l'a fait voir le premier, les deux mots précités doivent être attribués à un interpolateur. (Cfr. *Philologisk Samfunds Mindeskrift*. Copenhague, 1879, p. 3). D'ailleurs, si Archimède avait connu ou créé lui-même le mot ellipse, il ne se serait pas borné à ne l'employer qu'une seule fois dans un ouvrage où la périphrase « section du cône acutangle » revient continuellement, périphrase que nous avons conventionnellement remplacée par « ellipse » pour abréger dans notre traduction.

3. Car, si la droite N, moitié du diamètre conjugué au diamètre AB de l'ellipse donnée satisfait à la relation $N^2 = Z\Delta \times \Delta H$, il est évident que N sera la demi-corde perpendiculaire au diamètre dans le cercle de diamètre ZH, et que le problème est résolu en décrivant le cercle de diamètre EB, qui sera la base du cône de sommet Γ, dont la nappe contiendra l'ellipse donnée.

4. C'est-à-dire que si l'ellipse décrite sur EB doit satisfaire à la relation : $\frac{[\text{diam. conjugué du diam. EB}]^2}{[\text{diam. EB}]^2} = \frac{N^2}{Z\Delta \times \Delta H}$, elle sera semblable à l'ellipse dont les diamètres sont ZH et $\frac{N \times ZH}{\sqrt{Z\Delta \times \Delta H}}$, et dans laquelle N est une ordonnée déterminant sur ZH les segments ZΔ, ΔH. En effet, puisque le carré de l'ordonnée de l'ellipse est au produit des segments correspondants déterminés sur l'axe dans le rapport des carrés des axes, comme le montre aussitôt l'équation de l'ellipse mise sous la forme: $\frac{y^2}{(a+x)(a-x)} = \frac{b^2}{a^2}$, on aura, dans l'ellipse de diamètre ZH :

$\frac{N^2}{Z\Delta \times \Delta H} = \frac{[\text{diam. conjugué du diam. ZH}]^2}{[\text{diam. ZH}]^2}$ d'où, comparant avec la relation imposée,

Digitized by Google

ayant le point Γ comme sommet, dans la surface duquel soit situé le cercle ou l'ellipse décrits autour du diamètre EB ; ce qui est d'ailleurs possible, puisque la droite menée du point Γ au milieu de la droite EB est perpendiculaire au plan mené par EB (1). Dès lors, l'ellipse décrite autour du diamètre AB sera située aussi dans la surface de ce cône.

En effet, s'il n'en est pas ainsi, il y aura sur l'ellipse un certain point qui ne sera pas dans la surface du cône. Imaginons que soit pris un certain point Θ, qui ne soit pas dans la surface du cône ; menons par le point Θ la droite ΘK perpendiculaire à AB, prolongeons la droite de jonction ΓK, et qu'elle rencontre la droite EB au point Λ. D'autre part, du point Λ, menons la droite ΛM perpendiculaire à EB dans le plan perpendiculaire qui a été mené par EB, tandis que nous imaginons le point M élevé jusqu'à la surface du cône, et, par le point Λ, menons ΠP parallèle à la droite AB. Dès lors, le carré de N sera au rectangle délimité sous ZΔ, ΔH comme le carré de ΛM est au rectangle délimité sous EΛ, ΛB (2), tandis que le rectangle délimité sous ZΔ, ΔH sera au rectangle délimité sous AΔ, ΔB comme le rectangle délimité sous EΛ, ΛB est au rectangle délimité sous ΠΛ, ΛP (3). Par conséquent, le carré de N est au rectangle délimité sous AΔ, ΔB comme le carré de ΛM est au rectangle délimité sous ΠΛ, ΛP (4). Or, le carré de N est au rectangle délimité sous AΔ, ΔB comme

---

il vient : $\frac{[\text{diam. conjugué au diam. EB}]^2}{[\text{diam. EB}]^2} = \frac{[\text{diam. conjugué au diam. ZH}]^2}{[\text{diam. ZH}]^2}$, d'où proportionnalité des diamètres des ellipses décrites sur EB, ZH, d'où similitude de ces ellipses.

1. Le triangle EΓB étant isocèle, la droite menée de Γ au milieu de EB sera perpendiculaire sur EB et sera donc perpendiculaire sur le plan qui, passant par EB, a été mené perpendiculairement au plan du triangle EΓB.

2. Puisque ΛM a été mené perpendiculaire à EB dans le plan de l'ellipse décrite sur EB, et que ΛM a été prolongé jusqu'à la nappe du cône dans laquelle cette ellipse est située, la droite ΛM est une ordonnée de l'ellipse, et dès lors, en vertu de la propriété rappelée dans la note avant-précédente, on aura la relation : $\frac{\overline{\Lambda M}^2}{E\Lambda \times \Lambda B} = \frac{[\text{diam. conjugué de EB}]^2}{[\text{diam. EB}]^2}$. Or, par hypothèse, l'ellipse décrite sur EB doit satisfaire à la relation : $\frac{[\text{diam. conjugué de EB}]^2}{[\text{diam. EB}]^2} = \frac{N^2}{Z\Delta \times \Delta H}$, d'où : $\frac{N^2}{Z\Delta \times \Delta H} = \frac{\overline{\Lambda M}^2}{E\Lambda \times \Lambda B}$.

3. Par similitude des triangles ZΔA, EΛH on a : $\frac{Z\Delta}{A\Delta} = \frac{E\Lambda}{\Pi\Lambda}$ et, par similitude des triangles ΔBH, ΛPB, on a : $\frac{\Delta H}{\Delta B} = \frac{\Lambda B}{\Lambda P}$, d'où, comme le texte : $\frac{Z\Delta \times \Delta H}{A\Delta \times \Delta B} = \frac{E\Lambda \times \Lambda B}{\Pi\Lambda \times \Lambda P}$.

4. Les relations obtenues dans les deux notes précédentes donnent, par identité : $\frac{N^2}{A\Delta \times \Delta B} = \frac{\overline{\Lambda M}^2}{\Pi\Lambda \times \Lambda P}$.

Digitized by Google

le carré de ΘK est au rectangle délimité sous AK, KB, puisque des perpendiculaires ont été menées sur AB dans une même ellipse ; par conséquent, le rapport du carré de ΛM au rectangle délimité sous ΠΛ, ΛP est le même que celui du carré de ΘK au rectangle délimité sous AK, KB (1). Or, le rapport du rectangle délimité sous ΠΛ, ΛP au carré de ΓΛ est aussi le même que celui du rectangle délimité sous AK, KB au carré de KΓ ; par conséquent, le rapport du carré de ΛM au carré de ΓΛ est le même que celui du carré de ΘK au carré de KΓ ; en sorte que les points Γ, Θ, M sont situés sur une droite (2). Or, la droite ΓM est dans la surface du cône ; par conséquent, il est évident que le point Θ est aussi dans la surface du cône. Or, nous avons supposé qu'il n'y est pas ; donc ce qui devait être démontré est manifeste.

PROPOSITION IX.

Etant données une ellipse et une ligne (3) non perpendiculaire (4), élevée du centre de l'ellipse dans le plan qui, passant par l'un des diamètres, est élevé perpendiculairement au plan dans lequel se trouve l'ellipse, il est possible de trouver un cylindre ayant son axe sur la droite élevée, et dans la surface duquel l'ellipse donnée soit située.

Soit BA l'un des diamètres de l'ellipse donnée et Δ son centre. Soit ΓΔ une ligne élevée du centre comme nous l'avons dit, et ima-

---

1. Par hypothèse Θ, est un point de l'ellipse décrite sur le diamètre AB, et ΘK est perpendiculaire sur AB ; donc ΘK est une ordonnée. Or, invoquant à nouveau la constance du rapport du carré de l'ordonnée au produit des segments correspondants déterminés sur l'axe, on aura, comme le texte : $\frac{N^2}{A\Delta \times \Delta B} = \frac{\overline{\Theta K}^2}{AK \times KB}$, d'où, comparant avec l'égalité de la note précédente, il vient : $\frac{\overline{\Lambda M}^2}{\Pi\Lambda \times \Lambda\Gamma} = \frac{\overline{\Theta K}^2}{AK \times KB}$.

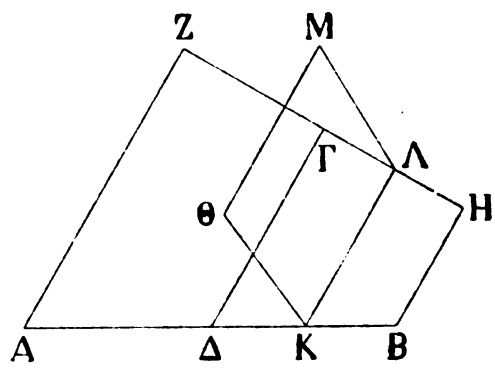
2. Par similitude des triangles ΠΓΛ, AΓK, on a : $\frac{\Pi\Lambda}{\Gamma\Lambda} = \frac{AK}{K\Gamma}$ et, par similitude des triangles ΛΓP, KΓB, on a : $\frac{\Lambda P}{\Gamma\Lambda} = \frac{KB}{K\Gamma}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Pi\Lambda \times \Lambda P}{\overline{\Gamma\Lambda}^2} = \frac{AK \times KB}{\overline{K\Gamma}^2}$, d'où, comparant avec la relation de la note précédente, il vient, par identité, comme le texte : $\frac{\overline{\Lambda M}^2}{\overline{\Gamma\Lambda}^2} = \frac{\overline{\Theta K}^2}{\overline{K\Gamma}^2}$, d'où : $\frac{\Lambda M}{\Gamma\Lambda} = \frac{\Theta K}{K\Gamma}$, d'où il résulte que Γ, Θ, M sont sur une même droite.

3. Sous-entendu : droite.

4. C.-à-d. non perpendiculaire au plan de l'ellipse.

Digitized by Google

ginons une ellipse décrite autour du diamètre AB dans le plan perpendiculaire au plan dans lequel se trouvent les droites AB, ΓΔ. On doit trouver un cylindre, ayant son axe sur la droite ΓΔ, dans la surface duquel l'ellipse donnée soit située. Des points A, B menons les droites AZ, BH parallèles à la droite ΓΔ. Dès lors, l'autre diamètre de l'ellipse est ou bien égal à la distance des droites AZ, BH, ou bien plus grand ou plus petit.



Qu'il soit d'abord égal à la droite ZH, et que ZH soit perpendiculaire à ΓΔ. Par la droite ZH élevons un plan perpendiculaire à la droite ΓΔ ; soit, dans ce plan, le cercle décrit autour du diamètre ZH, et, sur ce cercle, construisons le cylindre ayant ΓΔ comme axe. Dès lors, l'ellipse (1) est dans la surface du cylindre. Car, si elle n'y est pas, il y aura sur l'ellipse un certain point qui n'est pas dans la surface du cylindre. Imaginons donc un certain point Θ, pris sur l'ellipse, qui ne soit pas dans la surface du cylindre, et, du point Θ, menons la droite ΘK perpendiculairement sur AB ; cette droite sera d'ailleurs perpendiculaire au plan dans lequel se trouvent les droites AB, ΓΔ (2). D'autre part, du point K menons KΛ parallèle à la droite ΓΔ, et, au point Λ, élevons ΛM perpendiculairement à ZH dans le cercle décrit autour de ZH, tandis que nous imaginons le point M élevé jusqu'à l'arc de demi-cercle décrit autour du diamètre ZH. Dès lors, le rapport du carré de la perpendiculaire ΘK au rectangle délimité par AK, KB est le même que celui du carré de ZΓ au rectangle délimité par AΔ, ΔB, parce que la droite ZH est égale à l'autre diamètre (3). Or, le

1. C.-à-d. l'ellipse donnée dont l'un des diamètres est AB et dont le diamètre conjugué est, en première hypothèse, égal à ZΠ.

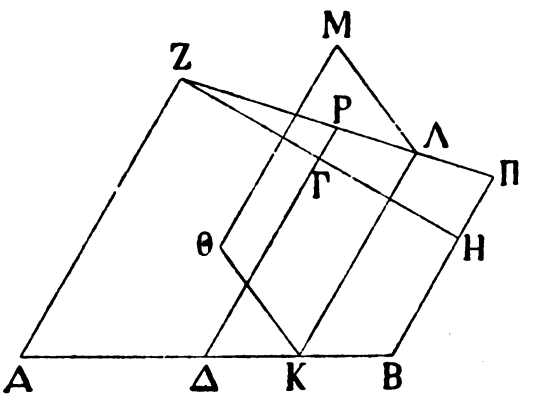
2. Car, ΘK est mené perpendiculairement à AB dans le plan de l'ellipse lequel est mené perpendiculairement au plan qui contient AB, ΓΔ.

3. Invoquant, comme dans la proposition VIII, que dans l'ellipse donnée le carré de l'ordonnée ΘK est au produit des segments correspondants AK, KB déterminés sur le diamètre AB dans le rapport des carrés des demi-diamètres ZΓ, AΔ, on aura : $\frac{\overline{\Theta K}^2}{AK \times KB} = \frac{\overline{Z\Gamma}^2}{\overline{A\Delta}^2}$. Or, $A\Delta = \Delta B$, d'où : $\overline{A\Delta}^2 = A\Delta \times \Delta B$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\Theta K}^2}{AK \times KB} = \frac{\overline{Z\Gamma}^2}{A\Delta \times AB}$.

Digitized by Google

rapport du rectangle délimité par ZΛ, ΛH au rectangle délimité par AK, KB est aussi le même que celui du carré de ZΓ au carré de AΔ ; par conséquent, le rectangle délimité par ZΛ, ΛH équivaut au carré de ΘK (1). Or, ce dernier rectangle équivaut aussi au carré de ΛM ; par conséquent, les perpendiculaires ΘK, MΛ sont égales (2). Il en résulte que les droites ΛK, MΘ sont parallèles ; en sorte que les droites ΔΓ, MΘ seront aussi parallèles. De plus, il en résulte que la droite ΘM est dans la surface du cylindre, puisqu'elle a été menée du point M, situé dans cette surface, parallèlement à l'axe. Dès lors, il est évident que le point Θ est aussi dans la surface du cylindre. Or, nous avons supposé qu'il n'y est pas ; par conséquent, ce qui devait être démontré est manifeste.

Il est dès lors évident aussi que le cylindre enveloppant (3) est droit lorsque l'autre diamètre (4) est égal à la distance des droites qui ont été menées des extrémités de l'autre diamètre parallèlement à la droite qui a été élevée.



Que l'autre diamètre soit, au contraire, plus grand que la droite ZH, et que ΠZ soit égal à cet autre diamètre (5). Elevons donc par la droite ΠZ un plan perpendiculaire au plan dans lequel se trouvent les droites AB, ΔΓ ; soit dans ce plan le cercle décrit autour du diamètre ΠZ, et, sur ce cercle, construisons le cylindre ayant ΔP comme axe. Dès lors, on démontrera par les mêmes voies que l'ellipse est dans la surface

1. Le parallélisme des droites AZ, ΔΓ, KΛ, BH donne : $\frac{Z\Lambda}{AK} = \frac{Z\Gamma}{A\Delta}$, et $\frac{\Lambda H}{KB} = \frac{Z\Gamma}{A\Delta}$, d'où, comme le texte : $\frac{Z\Lambda \times \Lambda H}{AK \times KB} = \frac{\overline{Z\Gamma}^2}{\overline{A\Delta}^2} = \frac{\overline{Z\Gamma}^2}{A\Delta \times \Delta B}$, d'où, comparant avec l'égalité de la note précédente, il vient, comme le texte : $Z\Lambda \times \Lambda H = \overline{\Theta K}^2$.

2. ΛM a été mené perpendiculairement à ZH, dans le plan du cercle de diamètre ZH, jusqu'à la rencontre de la criconférence de ce cercle ; donc, on a, comme le texte : $Z\Lambda \times \Lambda H = \overline{\Lambda M}^2$, d'où, comparant avec l'égalité précédente, il vient : ΘK = ΛM.

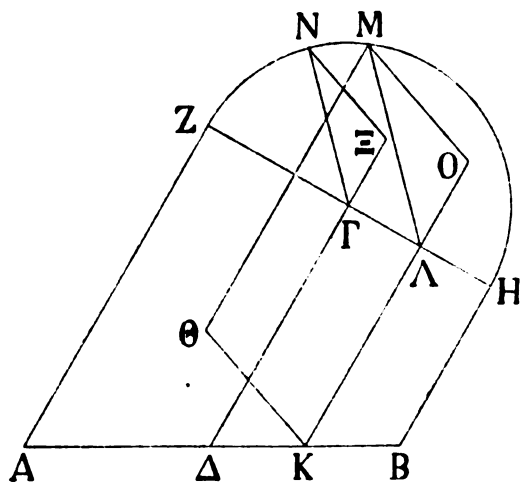
3. C.-à-d. qui enveloppe l'ellipse donnée.

4. C.-à-d. le diamètre conjugué du diamètre AB de l'ellipse donnée.

5. Car ZH a été mené perpendiculairement à ΔΓ, et le plan du cercle de diamètre ZH est perpendiculaire à l'axe ΔΓ.

Digitized by Google

du cylindre (1). Mais, que l'autre diamètre soit plus petit que la droite ZH. Dès lors, que le carré de ΓΞ soit l'excédent du carré de ZΓ sur le carré de la moitié de l'autre diamètre, et, du point Ξ, élevons une ligne (2) ΞN égale à la moitié de l'autre diamètre, perpendiculairement au plan dans lequel se trouvent les droites AB, ΓΔ, tandis que nous imaginons le point N du côté supérieur (3). Il en résulte que la droite ΓN sera égale à la droite ΓZ (4). Dès lors, décrivons un cercle autour de ZH comme diamètre dans le plan où se trouvent les droites ZH, ΓN ; cercle qui passe d'ailleurs par le point N (5). De plus, construisons sur ce cercle le cylindre ayant ΓΔ comme axe ; l'ellipse sera donc située dans la surface de ce cylindre. En effet, s'il n'en est pas ainsi, il y aura sur l'ellipse un certain point qui n'est pas dans la surface du cylindre. Prenons donc un certain point Θ sur l'ellipse (6) ; menons la droite ΘK perpendiculaire sur la droite AB ; soit KΛ une parallèle à ΓΔ menée du point K; du point Λ menons ΛM perpendiculairement à ZH dans le demi-cercle décrit autour du diamètre ZH, tandis que nous imaginons le point M sur l'arc de demi-cercle décrit sur ZH, et du point M, menons la perpendiculaire MO sur la droite KΛ prolongée. Cette droite sera donc perpendiculaire au plan dans lequel se trouvent les droites AB, ΓΔ, puisque KΛ est perpendiculaire à ZH (7). Dès lors, le



1. Les constructions montrent que le cylindre sera le même que dans le premier cas.

2. Sous-entendu : « droite ».

3. C.-à-d. que le point N est au-dessus du plan des droites AB, ΓΔ.

4. On a mené ΞN = ½ diamètre conjugué de AB dans l'ellipse donnée, et d'autre part, on a posé : $\overline{\Gamma\Xi}^2 = \overline{Z\Gamma}^2 - \overline{\Xi N}^2$, d'où : $\overline{Z\Gamma}^2 = \overline{\Gamma\Xi}^2 + \overline{\Xi N}^2$. Or, l'angle en Ξ est droit ; donc : $\overline{\Gamma N}^2 = \overline{\Gamma\Xi}^2 + \overline{\Xi N}^2$, d'où : $\overline{\Gamma N}^2 = \overline{Z\Gamma}^2$, ou, comme le texte : ΓN = ZΓ.

5. Puisque ΓN = ZΓ = ½ZH.

6. Sous-entendu : qui ne serait pas dans la surface du cylindre.

7. KΛ a été mené parallèlement à ΔΓ qui est perpendiculaire à ZH. Or, ΛM est aussi mené perpendiculairement à ZH ; donc le plan KOMΘ est perpendiculaire à ZH, d'où le plan KOMΘ est perpendiculaire au plan ZHAB. Or, MO est mené perpendiculairement à KΛ, d'où MO est perpendiculaire au plan ZHAB, ou, comme le texte, au plan dans lequel se trouvent les droites AB, ΓΔ.

Digitized by Google

carré de MO est au carré de MΛ comme le carré de ΞN est au carré de NΓ (1), tandis que le carré de MΛ est au rectangle sous AK, KB comme le carré de ΓN est au carré de AΔ, puisque d'une part, le carré de MΛ est égal au rectangle délimité par ΛZ, ΛH et que, d'autre part, le carré de ΓN est égal au carré de ΓZ (2). En conséquence, le carré de MO sera au rectangle sous AK, KB comme le carré de ΞN est au carré de AΔ (3). Or, le carré de KΘ est aussi au rectangle sous AK, KB comme le carré de ΞN est au carré de AΔ, puisque la droite ΞN est égale à la moitié de l'autre diamètre (4) ; donc, il est évident que les perpendiculaires MO, ΘK sont égales (5) ; en sorte que les droites KO, ΘM sont parallèles (6). Or, puisque la droite MΘ est parallèle à l'axe du cylindre (7), et que le point M est dans sa surface,

---

1. Les droites MO, NΞ, toutes deux perpendiculaires au plan de AB, ΓΔ sont parallèles; les droites ΛM, ΓN, toutes deux perpendiculaires à ZH, sont parallèles, d'où égalité des angles N et M. Or, les angles O et Ξ sont droits, d'où similitude des triangles ΓNΞ, ΛMO, , d'où : $\frac{MO}{M\Lambda} = \frac{\Xi N}{N\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{MO}^2}{\overline{M\Lambda}^2} = \frac{\overline{\Xi N}^2}{\overline{N\Gamma}^2}$.

2. Le parallélisme des droites AZ, ΔΓ, KΛ, BH donne : $\frac{Z\Lambda}{AK} = \frac{Z\Gamma}{A\Delta}$ et $\frac{\Lambda H}{KB} = \frac{Z\Gamma}{A\Delta}$, d'où : $\frac{Z\Lambda \times \Lambda H}{AK \times KB} = \frac{\overline{Z\Gamma}^2}{\overline{A\Delta}^2}$. Or, MΛ est une ordonnée dans le demi-cercle de diamètre ZH ; donc $\overline{M\Lambda}^2 = \Lambda Z \times \Lambda H$. D'autre part, $\Gamma Z = \Gamma N$ ou $\overline{\Gamma Z}^2 = \overline{\Gamma N}^2$, d'où, par substitution, comme le texte: $\frac{\overline{M\Lambda}^2}{AK \times KB} = \frac{\overline{\Gamma N}^2}{\overline{A\Delta}^2}$.

3. Combinant les égalités des deux notes précédentes: $\frac{\overline{MO}^2}{\overline{M\Lambda}^2} \times \frac{\overline{M\Lambda}^2}{AK \times KB} = \frac{\overline{\Xi N}^2}{\overline{N\Gamma}^2} \times \frac{\overline{\Gamma N}^2}{\overline{A\Delta}^2}$, ou, comme le texte : $\frac{\overline{MO}^2}{AK \times KB} = \frac{\overline{\Xi N}^2}{\overline{A\Delta}^2}$.

4. Par hypothèse $\Xi N = \frac{1}{2}$ diam. conjugué du diam. AB de l'ellipse donnée, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{K\Theta}^2}{AK \times KB} = \frac{\overline{\Xi N}^2}{\overline{A\Delta}^2}$.

5. Comparant les égalités des deux notes précédentes, il vient : $\overline{MO}^2 = \overline{K\Theta}^2$, d'où: $MO = \Theta K$.

6. On a: $MO = \Theta K$; de plus, MO est parallèle à ΘK, car on a vu que MO est perpendiculaire au plan des droites AB, ΓΔ, et ΘK est perpendiculaire à AB dans le plan de l'ellipse, perpendiculaire lui-même au plan des droites AB, ΓΔ. Donc, KO, ΘM, qui relient les extrémités de droites égales et parallèles, sont égales et parallèles (EUCLIDE, liv. I, prop. XXXIII).

7. MΘ est donc parallèle à KO. Or, KO est parallèle à l'axe ΔΓ ; donc MΘ est parallèle à ΔΓ, en vertu de la proposition IX du livre XI d'Euclide, énoncée comme suit dans la première traduction française de Pierre LE MARDELÉ (Paris, 1632) : « Les lignes droictes parallèles à une mesme, n'estant en un mesme plan qu'icelles : icelles sont aussi parallèles entre elles ».

Digitized by Google

la droite MΘ est nécessairement aussi dans la surface du cylindre ; par conséquent, il est clair que le point Θ est aussi dans sa surface. Or, il n'y était pas (1) ; par conséquent, il est évident que l'ellipse est nécessairement dans la surface du cylindre.

PROPOSITION X.

Il a été démontré par nos devanciers que le rapport de tout cône à cône est composé du rapport des bases et du rapport des hauteurs (2). On démontrera d'ailleurs de même que le rapport de tout tronçon (3) de cône à tronçon de cône est aussi composé du rapport des bases et du rapport des hauteurs.

On démontrera encore que tout tronçon (4) de cylindre est triple du tronçon de cône ayant même base que le tronçon de cylindre et hauteur égale, de la même manière que l'on démontre que le cylindre est triple du cône ayant même base que le cylindre et hauteur égale (5).

PROPOSITION XI.

I. — Lorsqu'un paraboloïde de révolution (6) est coupé par un plan passant par l'axe ou parallèle à l'axe, la section sera la même parabole (7) que celle qui embrasse la figure (8), et son diamètre sera la

1. Par hypothèse.

2. Conséquence directe des deux propositions suivantes d'EUCLIDE, Livre XII, prop. XI : « Les cônes et les cylindres qui ont même hauteur sont entre eux comme leurs bases ; et livre XII, prop. XIV : « Les cônes et les cylindres qui ont des bases égales sont entre eux comme leurs hauteurs (traduction PEYRARD, Paris, 1809, p. 410 et 425). Voir aussi : *De la Sphère et du Cylindre,* livre I, lemme 1.

3. Voir la définition du tronçon de cône aux Définitions qui précèdent la proposition I.

4. Ibidem.

5. C'est-à-dire, de la manière suivie par Euclide dans la démonstration de la proposition X du livre XII : « Un cône est la troisième partie d'un cylindre qui a la même base et une hauteur égale (traduction précitée de PEYRARD, p. 404). Dans la préface de son traité *De la Sphère et du Cylindre,* Archimède attribue la démonstration de cette proposition à Eudoxe de Cnide.

6. τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς, littéralement, un conoïde rectangle, c'est-à-dire un paraboloïde de révolution.

7. ὀρθογωνίου κώνου τομὰ, littéralement : section de cône rectangle, c'est-à-dire, une parabole.

8. C'est-à-dire la parabole génératrice.

Digitized by Google

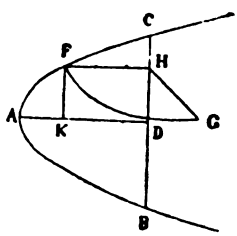
commune section du plan qui coupe la figure et du plan qui, passant par l'axe, est perpendiculaire au plan sécant (1). Lorsque, d'autre part, il est coupé par un plan perpendiculaire à l'axe, la section sera un cercle ayant son centre sur l'axe.

II. — Lorsqu'un hyperboloïde de révolution (2) est coupé par un plan passant par l'axe, ou parallèle à l'axe, ou passant par le sommet du cône enveloppant (3) l'hyperboloïde, la section sera une hyperbole (4) qui, si le plan passe par l'axe, sera la même que celle qui embrasse la figure, si le plan est parallèle à l'axe, sera semblable à cette dernière (5) et, si le plan passe par le sommet du cône enveloppant, ne lui sera pas semblable, tandis que le diamètre de l'hyperbole sera la commune section du plan qui coupe la figure et du plan qui, passant par l'axe, est perpendiculaire au plan sécant. D'autre part, lorsqu'il est coupé par un plan perpendiculaire à l'axe, la section sera un cercle ayant son centre sur l'axe.

---

1. Archimède ne démontre pas que le plan sécant parallèle à l'axe du paraboloïde de révolution détermine une parabole identique à la parabole génératrice. On peut le démontrer simplement en considérant la constance du rapport du carré de l'ordonnée à l'abscisse correspondante, mise en évidence par l'équation de la parabole $y^2 = 2\,p\,x$, ou $\frac{y^2}{x} = 2\,p$, et en établissant dès lors que les deux paraboles ont même paramètre.

Soit FG la parabole déterminée par le plan sécant parallèle à l'axe du paraboloïde de révolution ; soit BAC la parabole génératrice mise en évidence par un plan passant par l'axe perpendiculaire au plan sécant. Il suffit donc de démontrer que $\frac{\overline{GH}^2}{\overline{FH}} = \frac{\overline{FK}^2}{\overline{AK}}$.



En effet, dans la génératrice, on a : $\frac{\overline{CD}^2}{AD} = \frac{\overline{FK}^2}{AK}$, d'où : $\frac{\overline{CD}^2}{\overline{FK}^2} = \frac{AD}{AK}$, d'où : $\frac{\overline{CD}^2 - \overline{FK}^2}{\overline{FK}^2} = \frac{AD - AK}{AK}$, ou $\frac{\overline{CD}^2 - \overline{HD}^2}{\overline{FK}^2} = \frac{FH}{AK}$. Or, GH, perpendiculaire sur CB dans le plan du cercle de diamètre CB, perpendiculaire à l'axe AD, est le côté du triangle rectangle dont l'hypoténuse est égale au rayon CD ; d'où : $\overline{CD}^2 - \overline{HD}^2 = \overline{GH}^2$. Dès lors, il vient : $\frac{\overline{GH}^2}{\overline{FK}^2} = \frac{FH}{AK}$, d'où : $\frac{\overline{GH}^2}{\overline{FH}} = \frac{\overline{FK}^2}{AK}$. C. q. f. d.

2. τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς, littéralement : un conoïde obtusangle, c'est-à-dire un hyperboloïde de révolution.

3. C.-à-d. le cône asymptote.

4. ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, littéralement : une section de cône obtusangle, c'est-à-dire une hyperbole.

5. La similitude de ces hyperboles se démontrerait en considérant la constance du rapport du carré de l'ordonnée au produit des segments correspondants formés

Digitized by Google

III. — Lorsque l'une ou l'autre des figures sphéroïdales (1) est coupée par un plan passant par l'axe ou parallèle à l'axe, la section sera une ellipse (2) qui, si le plan passe par l'axe, sera la même que celle qui embrasse la figure, et, si le plan est parallèle à l'axe, lui sera semblable, tandis que le diamètre de l'ellipse sera la commune section du plan qui coupe la figure et du plan qui, passant par l'axe, est perpendiculaire au plan sécant. D'autre part, lorsqu'elles sont coupées par un plan perpendiculaire à l'axe, la section sera un cercle ayant son centre sur l'axe.

IV. — Lorsque l'une ou l'autre des figures que nous venons de dire est coupée par un plan passant par l'axe, les droites menées perpendiculairement au plan sécant, de points qui, sans être sur la section, sont dans la surface de la figure, tombent à l'intérieur de la section. Les démonstrations de toutes ces choses sont manifestes (3).

PROPOSITION XII.

Lorsqu'un paraboloïde de révolution est coupé par un plan ne passant pas par l'axe, ni parallèle à l'axe, ni perpendiculaire à l'axe, la section sera une ellipse, et le plus grand diamètre de cette ellipse sera la droite interceptée dans le paraboloïde sur la section déterminée par le plan qui coupe la figure et par le plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant ; tandis que le plus petit diamètre sera

---

sur l'axe transverse, mise en évidence par l'équation de l'hyperbole $\frac{y^2}{(x+a)(x-a)} = \frac{b^2}{a^2}$, et en établissant dès lors que les deux hyperboles ont leurs axes proportionnels, c'est-à-dire qu'elles sont semblables.

1. C.-à-d. l'ellipsoïde allongé ou l'ellipsoïde aplati.

2. ὀξυγωνίου κώνου τομά, littéralement : une section de cône acutangle, c.-à-d. une ellipse.

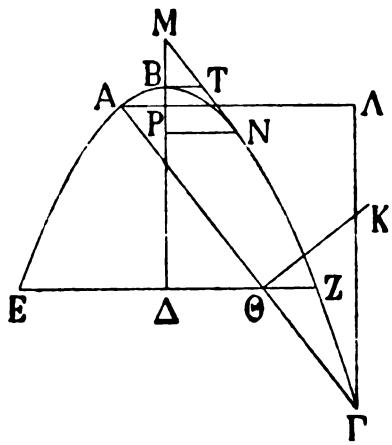
3. En qualifiant ces démonstrations par le mot φανεραί, c.-à-d. claires ou manifestes, Archimède n'entend pas nécessairement qu'elles eussent déjà été données avant lui, mais il juge probablement inutile de retarder la suite de ses propositions par des démonstrations subsidiaires qui ne présentaient pas de difficultés pour les géomètres habiles auxquels il adresse ses ouvrages.

Analytiquement, les équations des courbes du 2d degré fournissent des démonstrations immédiates de ces propositions ; mais on en trouvera par la géométrie pure, de fort longues en général, dans les notes des anciennes éditions grecques et latines d'Archimède, notamment dans celle de Commandin (Venise, 1558, page 37), de Revault (Paris, 1615, p. 271) et de Torelli (Oxford, 1792, p. 314). On trouvera d'ailleurs des démonstrations abrégées de ces propositions dans l'ouvrage de HEATH (*The Works of Archimedes*, etc. Cambridge, 1897, introduction, page LV).

Digitized by Google

égal à la distance des droites menées parallèlement à l'axe des extrémités du plus grand diamètre.

En effet, coupons un paraboloïde par un plan de la manière que nous venons de dire ; soit ABΓ la section du paraboloïde coupé par un autre plan passant par son axe perpendiculairement au plan sécant, et la droite ΓA la section du plan qui coupe la figure. D'autre part, soit BΔ l'axe du paraboloïde et le diamètre de sa section (1). On doit démontrer que la section du paraboloïde, déterminée par le plan passant par AΓ, est une ellipse, que son plus grand diamètre est AΓ, et que son plus petit diamètre est égal à la droite ΛA, la droite ΓΛ étant menée parallèlement à BΔ, et ΛA étant perpendiculaire sur ΓΛ. Imaginons un certain point K pris sur la section, et, du point K, menons KΘ perpendiculairement sur ΓA. Dès lors, KΘ sera perpendiculaire au plan dans lequel se trouve la parabole AΓB, parce que le plan sécant est aussi perpendiculaire à ce même plan. D'autre part, menons par le point Θ la droite EZ faisant des angles droits avec BΔ, et menons un plan par les droites EZ, KΘ. Ce plan sera d'ailleurs perpendiculaire à la droite BΔ (2), et la figure paraboloïde sera donc coupée par un plan perpendiculaire à l'axe ; de telle sorte que la section sera un cercle (3), et son centre le point Δ. Il en résulte que le carré de KΘ sera équivalent au rectangle sous ZΘ, ΘE (4). Menons, d'une part, la droite MN tangente à la parabole parallèlement à AΓ, tangente d'ailleurs au point N, et, d'autre part, la droite BT parallèle à la droite EZ. Dès lors, le rapport du rectangle délimité par les



1. C'est-à-dire : de la section déterminée par le plan passant par l'axe qui (proposition XI) est une parabole identique à la parabole génératrice.

2. Puisque KΘ est perpendiculaire au plan ABΓ, le plan mené par KΘ et EZ est perpendiculaire au plan ABΓ et perpendiculaire à BΔ qui est perpendiculaire à EZ dans le plan ABΓ.

3. Voir proposition XI.

4. KΘ est une perpendiculaire au diamètre EZ dans le demi-cercle décrit sur EZ, donc $\overline{K\Theta}^2 = Z\Theta \times \Theta E$.

Le texte présente ici l'interpolation suivante : « car on a un demi-cercle sur EZ, et KΘ étant une perpendiculaire, est moyenne proportionnelle du rectangle délimité par les droites EΘ, ΘZ. »

Digitized by Google

droites AΘ, ΘΓ au rectangle délimité par les droites EΘ, ΘZ sera le même que celui du carré de la droite NT au carré de la droite BT ; car cela a été démontré (1). Or, NT est égal à TM parce que BP est égal à BM (2) ; par conséquent, le rapport du rectangle délimité par AΘ, ΘΓ au carré de KΘ est le même que celui du carré de TM au carré de TB ; de telle sorte que le rapport du carré de la perpendiculaire ΘK au rectangle délimité par AΘ, ΘΓ est aussi le même que celui du carré BΓ au carré de TM (3). Dès lors, puisque les triangles ΓAΛ, TMB sont semblables, le rapport du carré de la perpendiculaire ΘK au rectangle délimité par AΘ, ΘΓ sera le même que celui du carré de AΛ au carré de AΓ (4). On démontrera semblablement que le rapport des carrés des autres droites menées perpendiculairement de la section sur AΓ aux rectangles délimités par les segments de AΓ est le même que le rapport du carré de AΛ au carré de AΓ. Dès lors, il est évident que la section est une ellipse, que AΓ est son plus grand diamètre, tandis que son plus petit diamètre est égal à la droite AΛ (5).

---

1. BT mené parallèle à EZ est la tangente à la parabole en B. On a donc deux tangentes TB, TN issues d'un même point T et deux cordes EZ, AΓ qui leur sont respectivement parallèles et se coupent en Θ ; donc, en vertu de la proposition III, on a : $\frac{A\Theta \times \Theta\Gamma}{E\Theta \times \Theta Z} = \frac{\overline{NT}^2}{\overline{BT}^2}$.

2. NP étant parallèle à BT est perpendiculaire à BΔ. Donc PM est la sous-normale qui, dans la parabole, est double de l'abscisse BP du point de contact de la tangente MN ; donc PM = 2BP, d'où, comme le texte : BP = BM, d'où : NT = TM.

3. En observant que $\overline{NT}^2 = \overline{TM}^2$ et que $E\Theta \times \Theta Z = \overline{K\Theta}^2$, l'égalité de la note avant-précédente devient : $\frac{A\Theta \times \Theta\Gamma}{\overline{K\Theta}^2} = \frac{\overline{TM}^2}{\overline{BT}^2}$, d'où, par inversion, comme le texte : $\frac{\overline{\Theta K}^2}{A\Theta \times \Theta\Gamma} = \frac{\overline{BT}^2}{\overline{TM}^2}$.

4. ΓΔ, MN sont respectivement parallèles à BΔ, AΓ ; d'où égalité des angles Γ et M. De plus, les angles Λ et B sont droits, d'où les triangles ΓAΛ, TMB sont semblables. Dès lors, $\frac{BT}{TM} = \frac{A\Lambda}{A\Gamma}$, d'où : $\frac{\overline{BT}^2}{\overline{TM}^2} = \frac{\overline{A\Lambda}^2}{\overline{A\Gamma}^2}$, d'où, comparant avec l'égalité de la note avant-précédente, on a, comme le texte : $\frac{\overline{\Theta K}^2}{A\Theta \times \Theta\Gamma} = \frac{\overline{A\Lambda}^2}{\overline{A\Gamma}^2}$.

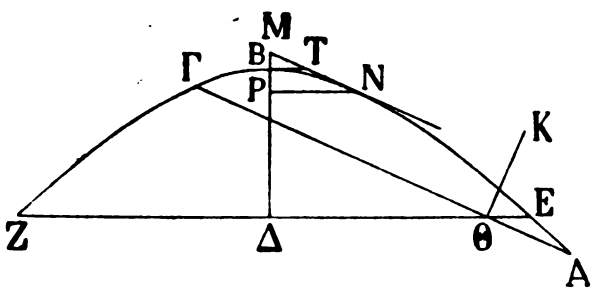
5. Car la relation qui précède met en évidence une propriété de l'ellipse qui a déjà été invoquée dans les propositions VIII et IX. On voit d'ailleurs qu'analytiquement cette relation n'est autre que l'équation de l'ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ mise sous la forme $\frac{y^2}{(a+x)(a-x)} = \frac{b^2}{a^2}$.

Digitized by Google

PROPOSITION XIII.

Lorsqu'un hyperboloïde de révolution est coupé par un plan qui, rencontrant tous les côtés du cône enveloppant ce conoïde (1), n'est pas perpendiculaire à l'axe, la section sera une ellipse, le plus grand diamètre de cette ellipse sera la droite interceptée dans l'hyperboloïde sur la section déterminée par le plan qui coupe la figure et par le plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant.

En effet, coupons un hyperboloïde par un plan de la manière que nous venons de dire ; soit l'hyperbole ABΓ la section de l'hyperboloïde coupé par un autre plan qui, passant par son axe, est perpendiculaire au plan sécant ; soit la droite AΓ la section du plan qui coupe la figure, et soit BΔ l'axe de l'hyperboloïde ainsi que le diamètre de sa section (2). Imaginons donc un certain point K pris sur la section, et, du point K, menons la droite KΘ perpendiculairement sur AΓ. Cette droite sera dès lors perpendiculaire au plan dans lequel se trouve la section conique ABΓ(3). D'autre part, menons par le point Θ la droite EZ perpendiculaire à BΔ, et, par les droites EZ, KΘ, menons un plan qui coupe l'hyperboloïde. Ce dernier sera donc coupé par un plan perpendiculaire à l'axe ; de telle sorte que la section sera un cercle dont le centre sera le point Δ (4). Le carré de la perpendiculaire KΘ sera donc équivalent au rectangle délimité par EΘ, ΘZ (5). Menons de nouveau (6), d'une part, la



1. τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, littéralement : du cône qui entoure le conoïde, c'est-à-dire le cône engendré par les asymptotes de l'hyperbole génératrice, ou cône asymptote.
2. C'est-à-dire de la section déterminée par le plan passant par l'axe qui, d'après la proposition XI, alinéa 2, est une hyperbole identique à celle qui embrasse l'hyperboloïde, c'est-à-dire identique à l'hyperbole génératrice.
3. Voir note relative à la même construction dans la proposition XII.
4. Voir proposition XI, alinéa 2.
5. KΘ est une perpendiculaire au diamètre EZ dans le demi-cercle décrit sur EZ ; donc $\overline{K\Theta}^2 = E\Theta \times \Theta Z$.
6. C'est-à-dire comme dans la proposition XII.

Digitized by Google

droite MN tangente au point N à l'hyperbole parallèlement à AΓ, et, d'autre part, la droite BT parallèle à la droite EZ. Dès lors, le rapport du rectangle délimité par EΘ, ΘZ au rectangle délimité par AΘ, ΘΓ sera le même que celui du carré de BT au carré de TN (1) ; de telle sorte que le rapport du carré de la perpendiculaire KΘ au rectangle délimité par AΘ, ΘΓ est le même que celui du carré de BT au carré de TN (2). On démontrera semblablement que le rapport des carrés des autres droites menées perpendiculairement de la section sur AΓ aux rectangles délimités par les segments de AΓ est le même que le rapport du carré de BT au carré de TN. Or, BT est plus petit que TN, parce que MT est plus petit que TN ; car MB est aussi plus petit que BP (3), ce qui, en effet, se présente (4) dans les hyperboles. En conséquence, il est évident que la section est une ellipse (5), et que AΓ est son plus grand diamètre (6).

1. La droite BT menée parallèlement à EZ est la tangente à l'hyperbole en B ; on a donc deux tangentes TB, TN issues d'un même point T et deux cordes EZ, ΓA qui leur sont respectivement parallèles et qui se coupent en Θ. On a donc, en vertu de la proposition III : $\frac{E\Theta \times \Theta Z}{A\Theta \times \Theta\Gamma} = \frac{\overline{BT}^2}{\overline{TN}^2}$.

2. Observant que $\overline{K\Theta}^2 = E\Theta \times \Theta Z$, l'égalité précédente devient : $\frac{\overline{K\Theta}^2}{A\Theta \times \Theta\Gamma} = \frac{\overline{BT}^2}{\overline{TN}^2}$.

3. Archimède invoque ici comme ayant probablement déjà été démontré avant lui que, dans l'hyperbole, la distance du sommet au point de rencontre de la tangente avec l'axe transverse est moindre que la distance du sommet au pied de la perpendiculaire abaissée du point de contact de la tangente sur l'axe transverse. En effet, analytiquement, la courbe étant rapportée à ses axes de symétrie, et si l'on désigne par a le demi-axe transverse, on a : sous-tangente $MP = \frac{x^2 - a^2}{x}$, $BP = x - a$, d'où : $MP - BP = MB = \frac{a}{x}(x - a)$. Or, $\frac{a}{x}(x - a) < x - a$, ou, comme le texte, $MB < BP$. Or, $\frac{MB}{BP} = \frac{MT}{TN}$, d'où, comme le texte : $MT < TN$. On a aussi $BT < MT$, d'où, à fortiori, comme le texte : $BT < TN$.

4. σύμπτωμα, littéralement : ce qui arrive avec quelque chose.

5. On vient de voir que le carré de l'ordonnée est au produit des segments correspondants déterminés sur l'axe dans le rapport constant égal à $\frac{\overline{BT}^2}{\overline{TN}^2}$. Or, cette propriété caractérise une ellipse décrite sur le diamètre AΓ.

6. En effet, pour l'ordonnée dont le pied tombe au milieu de AΓ, c'est-à-dire pour laquelle $K\Theta = \frac{1}{2}$ axe conjugué de AΓ et $A\Theta = \Theta\Gamma = \frac{1}{2} A\Gamma$, la relation trouvée $\frac{K\Theta^2}{A\Theta \times \Theta\Gamma} = \frac{BT^2}{TN^2}$ devient : $\frac{[\frac{1}{2} \text{ axe conjugué de } A\Gamma]^2}{\frac{1}{4}\overline{A\Gamma}^2} = \frac{BT^2}{TN^2}$; or, $BT < TN$, d'où diamètre conjugué de $A\Gamma < A\Gamma$, d'où, comme le texte : AΓ est le plus grand diamètre.

Le texte de cette démonstration se termine par une phrase de 17 mots qui est assez altérée pour ne plus présenter aucun sens acceptable, et ce d'autant plus qu'il y est question d'une droite ΓΛ qualifiée aussi de plus grand diamètre et qui n'est cependant pas représentée dans la figure.

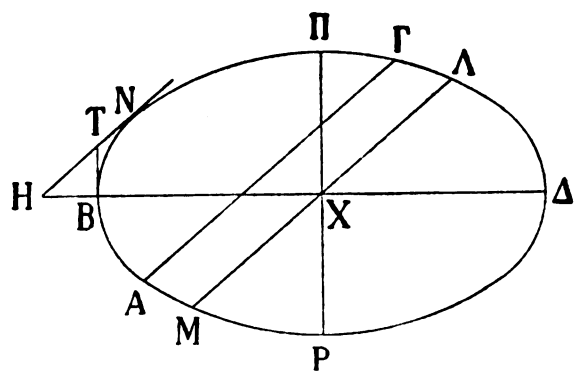
Digitized by Google

PROPOSITION XIV.

Lorsqu'un sphéroïde allongé (1) est coupé par un plan non perpendiculaire à l'axe, la section sera une ellipse, et le plus grand diamètre de cette ellipse sera la droite interceptée dans le sphéroïde sur la section déterminée par le plan qui coupe la figure et par le plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant.

Lorsque le sphéroïde est coupé par l'axe ou parallèlement à l'axe, la proposition est évidente (2). Qu'il soit coupé par un autre plan (3) ; soit l'ellipse ABΓΔ la section du sphéroïde coupé par un plan qui, passant par l'axe, est perpendiculaire au plan sécant ; soit la droite ΓA la section du plan qui coupe le sphéroïde ; soit BΔ l'axe du sphéroïde ainsi que le diamètre de l'ellipse ; soit X le centre et soit ΠP le plus petit diamètre.

Menons, d'autre part, la droite BT perpendiculaire à BΔ, et la droite HN, parallèle à AΓ, qui soit tangente à l'ellipse au point N ; enfin menons encore la droite MΛ par le point X parallèlement à la droite AΓ. On démontrera, comme précédemment, que le rapport des carrés des perpendiculaires menées de la section sur AΓ aux rectangles délimités par les segments de AΓ est le même que celui du carré de BT au carré de TN (4). Dès lors, il est évident



1. C'est-à-dire un ellipsoïde engendré par révolution d'une ellipse autour de son grand diamètre.

2. Voir proposition XI, alinéa 3.

3. C'est-à-dire par un plan ne passant pas par l'axe, non parallèle à l'axe et non perpendiculaire à l'axe.

4. On a deux tangentes TB, TN issues d'un même point, et deux cordes ΠP, AΓ qui leur sont respectivement parallèles et qui se coupent. Dès lors, en vertu de la proposition III, on a, $\frac{\text{produit des segments de } \Pi P}{\text{produit des segments de } A\Gamma} = \frac{\overline{BT}^2}{\overline{TN}^2}$. Or, la perpendiculaire élevée sur AΓ, dans le plan sécant, au point d'intersection de AΓ et de ΠP, jusqu'à la surface du sphéroïde, est dans le plan du cercle déterminé par la section du plan

Digitized by Google

que la section est une ellipse et que AΓ est son diamètre (1) ; tandis que l'on doit démontrer que ce diamètre est le plus grand.

En effet, le rapport du rectangle délimité par ΠX, XP au rectangle délimité par MX, XΛ est le même que celui du carré de BT au carré de NT ; puisque les droites ΠP, MΛ sont parallèles aux tangentes. Or, le rectangle délimité par ΠX, XP est plus petit que celui qui est délimité par MX, XΛ, puisque XΠ est plus petit que XΛ ; par conséquent, le carré de BT est aussi plus petit que le carré de TN (2) ; de telle sorte que les carrés des perpendiculaires menées de la section sur AΓ sont aussi plus petits que les rectangles délimités par les segments de AΓ (3). Dès lors, il est évident que ΓA est le plus grand diamètre (4).

Lorsqu'un sphéroïde aplati (5) est coupé par le plan (6), toutes les autres choses resteront les mêmes ; tandis que la droite interceptée dans le sphéroïde sera le plus petit diamètre (7).

D'après cela, il est clair que dans toutes ces figures, lorsqu'elles sont coupées par des plans parallèles, les sections seront semblables ;

---

passant par le petit diamètre ΠP. Donc, le carré de cette perpendiculaire vaut le produit des segments de ΠP. On aura donc, comme le texte :

$$\frac{\text{carrés des perpendiculaires menées sur A}\Gamma}{\text{produit des segments de A}\Gamma} = \frac{\overline{BT}^2}{\overline{TN}^2} = \text{constante.}$$

1. Car la relation de la note précédente met en évidence une propriété de l'ellipse.

2. Comme plus haut, on aura, en vertu de la proposition III : $\frac{\Pi X \times XP}{MX \times X\Lambda} = \frac{\overline{BT}^2}{\overline{NT}^2}$. Or, par hypothèse, ΠP est le petit diamètre de l'ellipse génératrice, d'où: $\Pi P < M\Lambda$, ou $\frac{1}{2}\Pi P < \frac{1}{2}M\Lambda$, ou, comme le texte, $X\Pi < X\Lambda$, d'où, comme le texte : $\Pi X \times XP < MX \times X\Lambda$, d'où, remontant à la relation considérée, on aura : $\overline{BT}^2 < \overline{NT}^2$.

3. On a eu : $\frac{\text{carrés des perpendiculaires menées sur A}\Gamma}{\text{produit des segments de A}\Gamma} = \frac{\overline{BT}^2}{\overline{TN}^2}$; or, $\overline{BT}^2 < \overline{NT}^2$, d'où, comme le texte : carrés des perpendiculaires menées sur AΓ < produit segments AΓ.

4. Considérant la perpendiculaire élevée au milieu de AΓ dans le plan de l'ellipse décrite sur AΓ, elle est le demi-diamètre conjugué du diamètre AΓ, les segments déterminés sur AΓ sont égaux et leur produit est $\frac{1}{4}\overline{A\Gamma}^2$. Substituons dans l'inégalité de la note précédente, il vient : $[\frac{1}{2}$ diam. conjugué de AΓ$]^2 < \frac{1}{4}\overline{A\Gamma}^2$, d'où : diam. conjugué de AΓ < AΓ, d'où, comme le texte : AΓ est le plus grand diamètre.

5. C.-à-d. un ellipsoïde engendré par révolution d'une ellipse autour de son petit diamètre.

6. C.-à-d. par le plan non perpendiculaire à l'axe.

7. C.-à-d. que la section sera encore une ellipse, mais que la droite interceptée dans le sphéroïde sur l'intersection du plan sécant et d'un plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant sera le petit diamètre de l'ellipse.

Digitized by Google

car les rapports des carrés des perpendiculaires aux rectangles délimités par les segments seront les mêmes (1).

PROPOSITION XV.

I. — Dans le conoïde parabolique (2), celles des droites qui, menées de tout point situé dans la surface du conoïde parallèlement à son axe, le sont dans la même direction que sa convexité, tombent à l'extérieur du conoïde, tandis que celles qui sont menées dans l'autre direction tombent à l'intérieur.

En effet, si l'on fait passer un plan par l'axe et par le point d'où l'on a mené la parallèle à l'axe, la section sera une parabole (3), et son diamètre sera l'axe du conoïde. Or, dans la parabole, celles des droites qui, menées de tout point situé sur cette section conique, le sont dans la même direction que sa convexité, tombent à l'extérieur ; tandis que celles qui sont menées dans l'autre direction tombent à l'intérieur (4). En conséquence, ce qui a été proposé est évident.

II. — Dans le conoïde hyperbolique (5), celles des droites qui, menées de tout point situé dans sa surface, parallèlement à une ligne (6) menée à l'intérieur du conoïde par le sommet du cône enveloppant ce conoïde (7), le sont dans la même direction que sa convexité, tombent à l'extérieur du conoïde ; tandis que celles qui sont menées dans l'autre direction tombent à l'intérieur.

En effet, si l'on fait passer un plan par la droite qui a été menée

---

1. C.-à-d. que dans les sections parallèles, les carrés des ordonnées seront aux produits des segments correspondants formés sur l'axe dans un rapport constant égal à $\frac{\overline{BT}^2}{\overline{TN}^2}$, et que, dès lors, considérant les cas particuliers où ces ordonnées coïncident avec des axes conjugués, le rapport des carrés des axes aux carrés des axes conjugués sera constant; d'où proportionnalité des diamètres des ellipses, d'où similitude de ces ellipses.

2. C.-à-d. dans le cône du 2e degré que nous appelons paraboloïde de révolution.

3. Voir proposition XI, alinéa 1.

4. Apollonius démontrera cette propriété plus tard en l'énonçant de la manière suivante : « Si dans la parabole ou l'hyperbole l'on mène une droite parallèle au diamètre, elle ne rencontre la section conique qu'en un seul point. » (*Les Coniques*, livre I, proposition XXVI).

5. C.-à-d. dans le cône du 2e degré que nous appelons l'hyperboloïde de révolution.

6. Sous-entendu : droite.

7. C.-à-d. dans le cône asymptote de cet hyperboloïde.

Digitized by Google

dans le conoïde par le sommet de son cône enveloppant et par le point d'où l'on a mené la droite qui rencontre le conoïde, la section sera une hyperbole (1) ; tandis que son diamètre sera la droite qui, dans le conoïde, est menée du sommet du cône (2). Or, dans l'hyperbole, celles des droites qui, menées de tout point situé sur cette section conique parallèlement à la ligne menée de la manière précédente (3), le sont dans la même direction que sa convexité, tombent à l'extérieur ; tandis que celles qui sont menées dans l'autre direction tombent à l'intérieur.

III. — Dans les figures conoïdes (4), lorsqu'un plan touche le conoïde sans le couper, il ne le touchera qu'en un seul point, et le plan mené par le point de contact et par l'axe sera perpendiculaire au plan tangent.

En effet, que le plan soit, s'il se peut, tangent en plusieurs points. Dès lors, prenons deux points où le plan tangent touche le conoïde, et, ayant mené par chacun d'eux une parallèle à l'axe, le plan passant par ces parallèles à l'axe sera mené soit par l'axe, soit parallèlement à l'axe ; de telle sorte que la section (5) déterminera une section conique (6), et que les points seront sur cette section conique, puisqu'ils sont dans la surface (7) ainsi que dans le plan. Par conséquent, la droite située entre ces points sera à l'intérieur de la section conique(8) ; de telle sorte qu'elle sera aussi en dedans de la surface du conoïde. Or, cette droite est dans la surface du plan, puisque les points y sont aussi ; par conséquent, il y aura quelque chose du plan tangent à l'intérieur du conoïde ; ce qui est impossible, car on a supposé que le plan ne le coupe pas. Dès lors, il ne le touche qu'en un seul point.

D'ailleurs, il est évident que le plan mené par le point de contact

1. Voir proposition XI, alinéa 2.

2. C.-à-d. du cône enveloppant ou asymptote. Le texte doit avoir subi ici quelque altération, car la droite qui passe par le sommet du cône asymptote ne sera le diamètre de l'hyperbole déterminée par le plan sécant que dans le cas particulier où cette droite est l'axe du conoïde (Cfr. HEIBERG, *loc. cit.*, vol. I, p. 321 et HEATH, *loc. cit.*, p. 126 note.)

3. C.-à-d. parallèlement à la droite qui passe par le point de rencontre des asymptotes, et qui correspond donc à la ligne précédente qui, dans le conoïde, passe par le sommet de son cône asymptote.

4. C.-à-d. dans les paraboloïdes et les hyperboloïdes de révolution.

5. C.-à-d. la section du conoïde par ce plan.

6. Voir proposition XII, alinéas 1 et 2.

7. Sous-entendu : du conoïde.

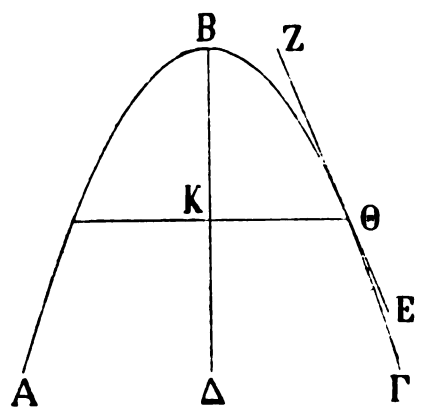
8. C'est la propriété qu'Apollonius démontrera plus tard directement sur le cône d'origine, après en avoir complété l'énoncé en ajoutant que le prolongement de la droite reliant les deux points tombera en dehors de la section conique (*Les Coniques*, livre I, proposition X).

Digitized by Google

et par l'axe est perpendiculaire au plan tangent lorsque celui-ci est tangent au sommet du conoïde.

En effet, ayant mené deux plans par l'axe, les sections du conoïde seront des sections coniques ayant l'axe comme diamètre(1) ; tandis que les sections du plan tangent seront des droites tangentes à ces sections coniques à l'extrémité du diamètre. Or, les droites tangentes à ces sections coniques à l'extrémité du diamètre forment des angles droits avec ce diamètre ; dès lors, deux droites seront perpendiculaires à l'axe dans le plan tangent. En conséquence, ce plan sera perpendiculaire à l'axe (2) ; de telle sorte qu'il sera aussi perpendiculaire à un plan qui passe par l'axe (3).

Mais, que le plan ne soit pas tangent au sommet du conoïde. Menons donc un plan par le point de contact et par l'axe, et que la section du conoïde soit la section conique ABΓ (4). Soit BΔ l'axe (5) et le diamètre de la section ; que la section du plan tangent soit la droite EΘZ tangente à la section conique au point Θ, tandis que du point Θ nous menons la perpendiculaire ΘK sur BΔ, sur laquelle nous établissons un plan perpendiculaire à l'axe. Ce plan déterminera comme section un cercle dont le centre est le point K (6). Or, la section de ce plan et du plan tangent sera une tangente au cercle qui formera donc des angles droits avec la droite ΘK (7) ; de telle sorte qu'elle sera perpendiculaire au plan dans lequel se trouvent les droites KΘ, BΔ. Par conséquent, il est évident que le plan tangent est perpendiculaire à ce même plan, puisque les droites qui s'y trouvent lui sont aussi perpendiculaires (8).



1. Voir proposition XI.
2. Euclide, livre XI, proposition 4.
3. Euclide, livre XI, proposition 18.
4. Voir proposition XI, alinéas 1 et 2.
5. C'est-à-dire l'axe du conoïde.
6. Voir : proposition XI, alinéas 1 et 2.
7. Euclide, livre III, proposition 18.
8. Euclide, livre XI, proposition 18.

Digitized by Google

PROPOSITION XVI.

I. — Lorsqu'un plan touche l'une ou l'autre des figures sphéroïdales (1) sans couper la figure, il la touchera en un seul point, et le plan mené par le point de contact et par l'axe sera perpendiculaire au plan tangent.

En effet, que le plan soit tangent en plusieurs points. Dès lors, prenons les points où le plan touche le sphéroïde, menons par chacun d'eux des droites parallèles à l'axe, et faisons passer un plan par les droites menées ; la section sera une ellipse (2), et les points seront sur cette section conique. Par conséquent, la droite située entre ces points sera à l'intérieur de la section conique ; de telle sorte qu'elle sera aussi en dedans de la surface du sphéroïde. Or, cette droite est dans la surface du plan, puisque les points y sont aussi ; par conséquent, il y aura quelque chose du plan tangent à l'intérieur du sphéroïde. Or, cela n'est point ; car on a supposé que le plan ne le coupe pas. Dès lors, il est évident qu'il ne le touchera qu'en un seul point. D'ailleurs, on démontrera, comme pour les figures conoïdes, que le plan mené par le point de contact et par l'axe sera perpendiculaire au plan tangent (3).

II. — Lorsque l'une ou l'autre des figures conoïdes ou sphéroïdes (4) est coupée par un plan passant par l'axe, que l'on mène une droite qui soit tangente à la section obtenue, et que par la tangente on élève un plan perpendiculaire au plan sécant, celui-ci touchera la figure au même point où la droite touche la section de cône.

En effet, il ne touchera pas la surface de la figure en un autre point, sinon la droite menée de ce point, perpendiculairement au plan sécant, tomberait à l'extérieur de la section de cône ; car elle tomberait sur la tangente, puisque les plans sont perpendiculaires entre eux. Ce qui est impossible ; car on a démontré qu'elle tombera à l'intérieur (5).

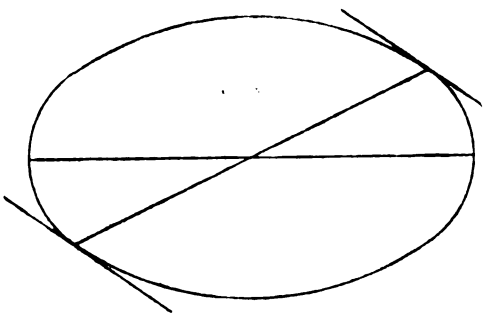
III. — Lorsque deux plans parallèles sont tangents à quelqu'une des figures sphéroïdales, la droite reliant les points de contact passera par le centre du sphéroïde.

---

1. C'est-à-dire l'ellipsoïde allongé ou l'ellipsoïde aplati.
2. Voir proposition XI, alinéa 3.
3. Voir dernière partie de la démonstration de la proposition XV.
4. C.-à-d. les paraboloïde, hyperboloïde, ellipsoïde allongé et ellipsoïde aplati.
5. Voir proposition XI, alinéa 4.

Digitized by Google

Lorsque les plans sont perpendiculaires à l'axe, la proposition est évidente (1). Mais qu'ils ne lui soient pas perpendiculaires. Dès lors, le plan mené par l'axe et par l'un des points de contact sera perpendiculaire à un plan tangent (2) ; de telle sorte qu'il le sera aussi au plan qui est parallèle au premier. Par conséquent, il est nécessaire que ce soit le même plan qui soit mené par l'axe et par chacun des points de contact ; sinon il y aurait deux plans perpendiculaires à un même plan menés par une même droite qui n'est pas perpendiculaire à ce plan (3), car il a été supposé que l'axe n'était pas perpendiculaire aux plans parallèles. Dès lors, l'axe et les points de contact seront dans un même plan qui coupera le sphéroïde par l'axe. La section sera donc une ellipse (4) ; tandis que les sections des plans tangents seront parallèles (5) et toucheront l'ellipse aux points de contact des plans. D'ailleurs, lorsque deux droites parallèles sont tangentes à l'ellipse, le centre de l'ellipse et les points de contact seront sur une même droite.



PROPOSITION XVII.

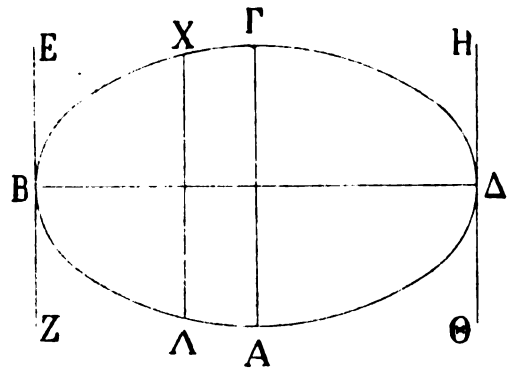
Lorsque deux plans parallèles sont menés tangentiellement à l'une ou l'autre des figures sphéroïdales, tandis qu'un plan est mené par le centre du sphéroïde, parallèlement aux plans tangents, les droites menées par la section obtenue, parallèlement à la droite qui relie les points de contact, tomberont à l'extérieur du sphéroïde.

Réalisons les choses que nous venons de dire et prenons un certain point sur la section obtenue, tandis que nous menons un plan par le point qui a été pris et par la droite qui relie les points de contact. Ce

1. Voir proposition XV.
2. Voir proposition XVI, alinéa 1.
3. Ce qui serait donc absurde.
4. Voir proposition XI, alinéa 3.
5. EUCLIDE, livre XI, proposition 6 : « Si deux plans parallèles sont coupés par un plan quelconque, leurs communes sections sont parallèles. » (Traduction PEYRARD, 1809, page 310).

Digitized by Google

plan coupera donc le sphéroïde ainsi que les plans parallèles. Dès lors, soit ABΓΔ la section du sphéroïde, tandis que les droites EZ, HΘ sont les sections des plans tangents. Soit A le point qui a été pris, BΔ la droite reliant les points de contact, laquelle passera d'ailleurs par le centre (1), et soit AΓ la section du plan parallèle aux plans tangents. Cette section sera d'ailleurs menée par le centre, puisque le plan l'est aussi. Dès lors, puisque ABΓΔ est un cercle (2) ou une ellipse que touchent les deux droites EZ, HΘ, tandis que la droite AΓ leur est menée parallèlement par le centre, il est évident que les droites menées par les points A, Γ, parallèlement à la droite BΔ, seront tangentes (3) à la section et tomberont à l'extérieur du sphéroïde.



Lorsque le plan parallèle aux plans tangents, tel que KΛ, n'est pas mené par le centre, il est évident que, des droites menées de la section (4), celles qui le sont du côté du plus petit segment tomberont à l'extérieur du sphéroïde, tandis que celles qui le sont de l'autre côté tomberont à l'intérieur.

PROPOSITION XVIII.

Toute figure sphéroïdale coupée par un plan passant par le centre est, de même que sa surface, coupée par ce plan en deux parties égales.

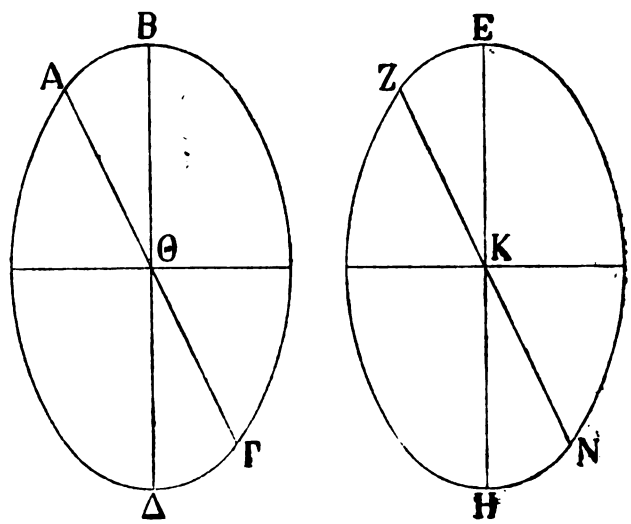
En effet, coupons un sphéroïde par un plan passant par le centre ; il sera donc coupé soit par l'axe, soit perpendiculairement ou non perpendiculairement à l'axe. S'il est coupé par l'axe ou perpendiculairement à l'axe, il est évident qu'il sera coupé lui-même ainsi que sa surface en deux parties égales ; car il est clair qu'une de ses parties

1. Voir proposition XVI, alinéa 3.
2. Dans le cas où les plans parallèles tangents sont parallèles à l'axe de rotation de l'ellipsoïde allongé ou aplati.
3. Cette démonstration se retrouve plus tard un peu différente chez Apollonius (*Coniques*, livre I, prop. XVII et livre II, proposition VI).
4. Sous-entendu : parallèlement à BΔ.

Digitized by Google

coïncide avec l'autre et que la surface d'une partie coïncide avec la surface de l'autre.

Mais, qu'il ne soit coupé ni par l'axe ni perpendiculairement à l'axe. Dès lors, le sphéroïde étant coupé par un plan passant par l'axe perpendiculairement au plan sécant, soit l'ellipse ABΓΔ la section de la figure, soit BΔ le diamètre de l'ellipse ainsi que l'axe du sphéroïde et Θ le centre ; soit, d'autre part, la droite AΓ la section du plan qui coupe le sphéroïde par le centre. Prenons aussi un autre sphéroïde équivalent et semblable au premier, et, l'ayant coupé par un plan passant par l'axe, que la section soit l'ellipse EZHN. Soit EH le diamètre de cette ellipse ainsi que l'axe du sphéroïde (1) et K le centre. De plus, par le point K, menons la droite ZN faisant un angle K égal à l'angle Θ; tandis que par la droite ZN nous élevons un plan perpendiculaire au plan dans lequel se trouve la section EZHN. Dès lors, on a deux ellipses ABΓΔ, EZHN équivalentes et semblables entre elles. Par conséquent, la droite EH étant appliquée sur BΔ et la droite ZN sur AΓ, ces ellipses coïncideront. Or, le plan suivant NZ coïncide aussi avec le plan suivant AΓ, puisqu'ils sont tous deux menés par une même ligne perpendiculairement à un même plan; par conséquent, le segment qui, découpé du sphéroïde par le plan suivant la droite NZ, est situé du côté du point E, coïncide aussi avec l'autre segment qui, découpé de l'autre sphéroïde par le plan suivant la droite AΓ, est situé du côté du point B, le segment restant coïncide avec le segment restant, et les surfaces des segments coïncident. Si l'on applique de nouveau la droite EH sur la droite BΔ, de telle sorte que le point E soit posé sur le point Δ, que le point H soit posé sur le point B et que la ligne située entre les points N,



1. Voir proposition XI, alinéa 3.

Digitized by Google

Z soit posée sur celle qui est située entre les points A, Γ, il est évident que les ellipses coïncideront entre elles et que le point Z tombera sur le point Γ, tandis que le point N tombera sur le point A. Pareillement, le plan suivant la droite NZ coïncidera avec le plan suivant la droite AΓ, et, des segments découpés par le plan suivant la droite NZ, celui qui est du côté du point H coïncidera avec le segment qui, découpé par le plan suivant la droite AΓ, est situé du côté du point B, tandis que celui qui est du côté du point E coïncidera avec celui qui est du côté du point Δ. Or, puisque le même segment coïncide avec chacun des segments, il est évident que les segments sont égaux. D'ailleurs, pour la même raison, les surfaces sont égales aussi.

PROPOSITION XIX.

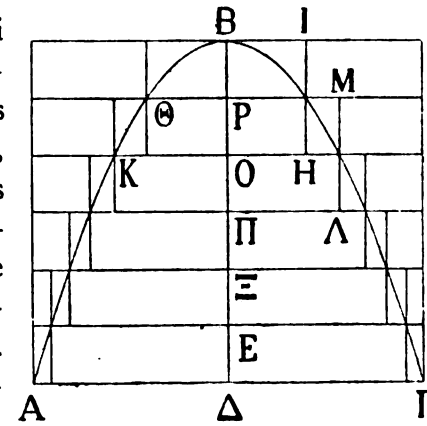
Etant donné un segment de l'un ou l'autre des conoïdes (1) découpé par un plan perpendiculaire à l'axe, ou un segment de l'un ou l'autre des sphéroïdes (2), pas plus grand que la moitié du sphéroïde, découpé de la même manière, il est possible d'inscrire une figure solide et d'en circonscrire une autre, composées de cylindres ayant même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que toute grandeur solide donnée.

Soit donné un segment tel que ABΓ. Ce segment étant coupé par un plan passant par l'axe, soit la section conique ABΓ (3) la section du segment, la droite AΓ la section du plan qui découpe le segment, et soit BΔ l'axe du segment et le diamètre de la section. Dès lors, puisque l'on a supposé que le plan sécant est perpendiculaire à l'axe, la section est un cercle et son diamètre est ΓA (4). Sur ce cercle, construisons un cylindre ayant BΔ comme axe ; la surface de ce cylindre tombera d'ailleurs à l'extérieur du segment, puisque c'est un segment de conoïde (5) ou un segment de sphéroïde qui n'est pas plus grand que la moitié du sphéroïde (6). Dès lors, ce cylindre étant divisé continuellement en deux parties égales par des plans perpendiculaires à l'axe, on

1. C.-à-d. du paraboloïde ou de l'hyperboloïde de révolution.
2. C.-à-d. de l'ellipsoïde allongé ou de l'ellipsoïde aplati.
3. Voir proposition XI.
4. Voir proposition XI.
5. Voir proposition XV, alinéas 1 et 2.
6. Voir proposition XVII.

Digitized by Google

aura bientôt un reste moindre que la grandeur solide donnée (1). Que le cylindre ayant le cercle décrit autour du diamètre AΓ comme base et EΔ comme axe, moindre que la grandeur solide donnée, soit donc ce qui reste du premier cylindre. En conséquence, divisons BΔ en parties égales à la droite EΔ aux points P, O, Π, Ξ, et, des points de division, menons des droites parallèles à la droite AΓ jusqu'à la section conique, tandis que par les droites ainsi menées nous élevons des plans perpendiculaires à BΔ. Les sections seront d'ailleurs des cercles ayant leurs centres sur la droite BΔ (2). Dès lors, sur chaque cercle, élevons deux cylindres ayant chacun un axe égal à la droite EΔ, l'un du côté du cercle où se trouve le point Δ, l'autre du côté où se trouve le point B. Il en résulte qu'une certaine figure solide sera inscrite dans le segment, composée des cylindres construits du côté où se trouve le point Δ, et qu'une autre sera circonscrite, composée des cylindres construits du côté où se trouve le point B. Il reste d'ailleurs à démontrer que la figure circonscrite excède la figure inscrite d'une grandeur moindre que la grandeur solide donnée. Chacun des cylindres de la figure inscrite est donc égal au cylindre construit sur le même cercle du côté où se trouve le point B, tel, d'une part, le cylindre ΘH égal au cylindre ΘI, et tel, d'autre part, le cylindre KΛ égal au cylindre KM, et de même pour les autres. Dès lors, la somme des cylindres est aussi égale à la somme des cylindres. Par conséquent, il est évident que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'un cylindre ayant le cercle décrit autour du diamètre AΓ comme base et la droite EΔ comme axe. Or, ce cylindre est plus petit que la grandeur solide donnée (3).



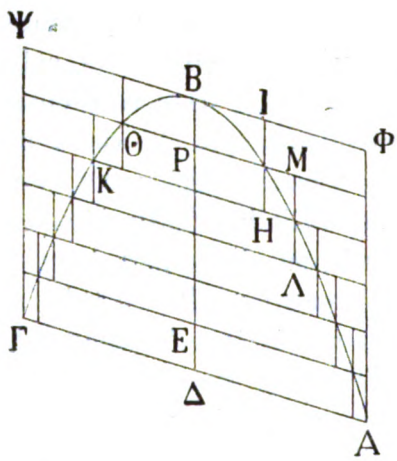
1. Euclide, livre X, proposition 1.
2. Voir proposition XI.
3. Heiberg a fait remarquer avec raison (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 339) que dans la figure qui accompagne le texte, l'axe aurait dû être divisé en un nombre de parties égales divisible par 4. Cette petite négligence ne saurait être attribuée à un copiste, car elle affecte le texte même qui répond à la construction de la figure en mentionnant explicitement tous les points d'intersection.

Digitized by Google

PROPOSITION XX.

Etant donné un segment de l'un ou l'autre des conoïdes découpé par un plan non perpendiculaire à l'axe, ou un segment de l'un ou l'autre des sphéroïdes, pas plus grand que la moitié du sphéroïde, découpé de la même manière, il est possible d'inscrire dans le segment une figure solide et d'en circonscrire une autre, composées de tronçons de cylindres ayant même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite dépasse celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que toute grandeur solide donnée.

Soit donné un segment comme il a été dit, et, cette figure étant coupée par un autre plan passant par l'axe, perpendiculairement au plan qui découpe le segment donné, soit la section conique ABΓ la section de la figure, et la droite AΓ la section du plan qui découpe le segment. Dès lors, puisque l'on a supposé que le plan qui découpe le segment n'est pas perpendiculaire à l'axe, la section sera une ellipse et son diamètre sera AΓ (1). Soit donc la droite ΦΥ, parallèle à la droite AΓ, tangente à la section conique ; qu'elle soit d'ailleurs tangente au point B,et,par ΦΥ, élevons un plan parallèle au plan mené suivant la droite AΓ. Ce plan sera tangent à la figure au point B (2). De plus, si le segment est celui d'un paraboloïde, du point B menons BΔ parallèlement à l'axe ; si le segment est celui d'un hyperboloïde, soit BΔ la droite prolongée qui a été menée du sommet du cône enveloppant l'hyperboloïde au point B ; enfin, si le segment est celui d'un sphéroïde, interceptons la droite BΔ menée au point B (3). Il est d'ailleurs évident que BΔ divise la droite AΓ en deux parties égales (4) ; par conséquent, le point B



1. Voir propositions XII, XIII et XIV.
2. Voir proposition XVI, alinéa 2.
3. C'est-à-dire, interceptons dans le segment la droite BΔ menée du centre du conoïde au point de contact B.
4. Voir : *De la Quadrature de la Parabole*, proposition I.

Digitized by Google

sera le sommet du segment, tandis que la droite BΔ sera son axe (1). Dès lors, on a une ellipse décrite autour du diamètre AΓ et une ligne BΔ élevée du centre dans un plan perpendiculaire au plan dans lequel se trouve l'ellipse, ce premier plan passant par l'un des diamètres. Il est donc possible de trouver un cylindre ayant BΔ comme axe, dans la surface duquel se trouve l'ellipse décrite autour du diamètre AΓ (2). Or, la surface de ce cylindre tombera à l'extérieur du segment, puisque c'est le segment d'un conoïde (3) ou d'un sphéroïde qui n'est pas plus grand que la moitié de ce sphéroïde (4). On aura donc un certain tronçon de cylindre ayant comme base l'ellipse décrite autour du diamètre AΓ et comme axe la droite BΔ. En conséquence, ce tronçon étant divisé (5) en deux parties égales par des plans parallèles au plan passant par AΓ, le reste sera plus petit qu'une grandeur solide donnée. Que le tronçon, ayant comme base l'ellipse décrite autour du diamètre AΓ et comme axe la droite EΔ, soit plus petit qu'une grandeur solide donnée. En conséquence, divisons BΔ en parties égales à la droite ΔE, et, aux points de division, menons des droites parallèles à la droite AΓ jusqu'à la section conique, tandis que par les droites ainsi menées nous élevons des plans parallèles au plan mené par la droite AΓ. Ces plans couperont donc la surface du segment, et il en résultera des ellipses semblables à celle qui est décrite autour du diamètre AΓ, puisque les plans sont parallèles (6). Construisons donc sur chaque ellipse deux tronçons de cylindre, l'un du côté de l'ellipse dans laquelle se trouve le point Δ, l'autre du côté où se trouve le point B, ayant un axe égal à la droite ΔE. Il en résultera donc certaines figures solides, l'une inscrite dans le segment, l'autre circonscrite, composées de tronçons de cylindre ayant même hauteur. Il reste d'ailleurs à démontrer que la figure circonscrite excède la figure inscrite d'une grandeur moindre que la grandeur solide donnée. On démontrera, de la même manière que précédemment (7), que la figure circonscrite excède

1. Voir le préambule.
2. Voir proposition IX, dont la phrase qui précède reproduit entièrement l'énoncé.
3. Voir proposition XV, alinéa 1 pour le paraboloïde, et alinéa 2 pour l'hyperboloïde.
4. Voir proposition XVII, en observant que BΔ passe par le centre du sphéroïde (proposition XVI, alinéa 3).
5. Sous-entendu : continuellement, et voir proposition XIX.
6. Voir proposition XIV, *in fine*.
7. Voir proposition XIX, *in fine*.

Digitized by Google

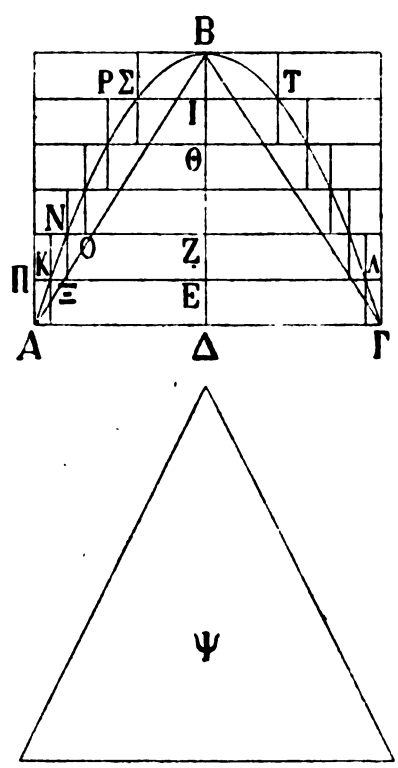
la figure inscrite du tronçon ayant comme base l'ellipse décrite autour du diamètre AΓ et comme axe la droite EΔ. Or, ce tronçon est plus petit que la grandeur donnée.

PROPOSITION XXI.

Ces choses une fois exposées d'avance, nous allons démontrer ce que nous avons proposé concernant ces figures (1).

Tout segment de paraboloïde de révolution découpé par un plan perpendiculaire à l'axe vaut une fois et demie le cône qui a même base et même axe que le segment.

En effet, soit un segment de paraboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe, et que, celui-ci étant coupé par un autre plan passant par l'axe, la section de sa surface soit la parabole ABΓ (2), tandis que la section du plan qui découpe le segment soit la droite AΓ. Soit d'ailleurs BΔ l'axe du segment, et soit aussi un cône ayant même base et même axe que le segment dont le sommet soit le point B. On doit démontrer que le segment du conoïde vaut une fois et demie ce cône.



Etablissons un cône Ψ valant une fois et demie le cône dont la base est décrite autour du diamètre AΓ et dont l'axe est BΔ, et soit aussi un cylindre ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme axe la droite BΔ. Le cône Ψ vaudra donc la moitié du cylindre (3). Je dis que le segment de conoïde est équivalent au cône Ψ.

1. C'est-à-dire les propositions énoncées dans le préambule du livre.
2. Voir proposition XI, alinéa 1.
3. Le texte présente ici la petite interpolation suivante : « puisque le cône ψ est égal à une fois et demie ce même cône ».
On a d'ailleurs posé cône $\psi = \frac{3}{2}$ cône ABΓ. Or, cône ABΓ $= \frac{1}{3}$ cylindre de même base et de même hauteur, d'où, cône $\psi = \frac{1}{2}$ cylindre.

Digitized by Google

Car, s'il n'est pas équivalent, il est soit plus grand soit plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, s'il se peut. Dès lors, inscrivons dans le segment une figure solide et circonscrivons-lui-en une autre, composées de cylindres ayant même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le segment de conoïde excède le cône Ψ (1). En outre, que le plus grand des cylindres dont se compose la figure circonscrite soit celui qui a comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme axe la droite EΔ, tandis que le plus petit soit celui qui a comme base le cercle décrit autour du diamètre ΣT et comme axe la droite BI. D'autre part, que le plus grand des cylindres dont se compose la figure inscrite soit celui qui a comme base le cercle décrit autour du diamètre KΛ et comme axe la droite ΔE, tandis que le plus petit soit celui qui a comme base le cercle décrit autour du diamètre ΣT et comme axe la droite ΘI. Prolongeons d'ailleurs les plans de tous les cylindres jusqu'à la surface du cylindre qui a comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme axe la droite BΔ. Il en résulte que le cylindre entier sera divisé en un nombre de cylindres égal à celui des cylindres contenus dans la figure circonscrite, de grandeur égale d'ailleurs à celle du plus grand de ces derniers. Et, puisque la figure circonscrite au segment excède la figure inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le segment excède le cône (2), il est évident aussi que la figure inscrite dans le segment est plus grande que le cône Ψ (3). Dès lors, le rapport du premier cylindre qui, dans le cylindre entier, a pour axe ΔE au premier cylindre qui, dans la figure inscrite, a pour axe ΔE est le même que le rapport du carré de ΔA au carré de KE (4). Or, ce dernier rapport est le même que celui de BΔ à BE et que celui de ΔA à EΞ (5). On démontrera

1. Ce qui est possible en vertu de la proposition XIX.
2. C'est-à-dire le cône ψ.
3. Par hypothèse première on a : fig. circonscrite — figure inscrite < segment — cône Ψ. Or, fig. circonscrite > segment, d'où, à fortiori : fig. circonscrite — fig. inscrite < figure inscrite — cône Ψ, ou, comme le texte : figure inscrite > cône Ψ.
4. Les cylindres ayant même hauteur sont entre eux comme les bases, $\frac{\text{cyl. } \Gamma\Pi}{\text{cyl. } K\Lambda\Delta} = \frac{\pi\overline{\Delta A}^2}{\pi\overline{KE}^2} = \frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{KE}^2}$.
5. Voir *De la Quadrature de la Parabole*, prop. III. Les carrés des ordonnées étant entre eux comme les abscisses : $\frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{B\Delta}{BE}$. Or, par similitude des trian-

Digitized by Google

d'ailleurs pareillement que le rapport du deuxième cylindre qui, dans le cylindre entier, a pour axe EZ au deuxième cylindre de la figure inscrite est aussi le même que le rapport de ΠE, c'est-à-dire de ΔA à ZO (1), et le rapport de chacun des autres cylindres qui, dans le cylindre entier, ont un axe égal à la droite ΔE à chacun des cylindres qui, dans la figure inscrite, ont le même axe, sera le même que le rapport de la moitié du diamètre de leur base à la partie interceptée sur ce diamètre entre les droites AB, BΔ (2). Par conséquent, le rapport de la somme des cylindres situés dans le cylindre, dont la base est le cercle décrit autour du diamètre AΓ et dont l'axe est la droite ΔI, à la somme des cylindres situés dans la figure inscrite est le même que le rapport de la somme des droites, qui sont les rayons des cercles de base des cylindres que nous venons de dire (3), à la somme des droites interceptées sur les droites précédentes entre les droites AB, BΔ (4). Or, la somme de ces premières droites est plus grande que le double de la somme de ces secondes droites, exception faite de la droite AΔ (5) ; de telle sorte que la somme des cylindres situés dans le

---

gles ABΔ, ΞBE, on a $\frac{B\Delta}{BE}=\frac{\Delta A}{E\Xi}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{KE}^2}=\frac{\Delta A}{E\Xi}$, d'où : $\frac{\text{cyl. } \Gamma\Pi}{\text{cyl. } KE\Lambda\Delta}=\frac{\Delta A}{E\Xi}$.

1. On aura de même que pour le 1er cylindre partiel :

$$\frac{2^{d} \text{ cylindre dans cyl. entier}}{2^{d} \text{ cyl. dans fig. inscr.}}=\frac{\overline{\Pi E}^2}{\overline{NZ}^2}=\frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{NZ}^2}.$$

Or, $\frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{NZ}^2}=\frac{B\Delta}{BZ}$ et $\frac{B\Delta}{BZ}=\frac{\Delta A}{ZO}$, d'où, comme le texte : $\frac{2^{d} \text{ cyl. dans cyl. entier}}{2^{d} \text{ cyl. dans fig. inscr.}}=\frac{\Delta A}{ZO}$.

2. Le texte qui précède est un peu ambigu ; il s'agit d'une part, du demi-diamètre de la base de chacun des cylindres partiels composant le cylindre entier, donc du demi-diamètre ΔA et, d'autre part, de la partie interceptée entre les droites AB, BΔ sur le diamètre de chacun des cylindres partiels composant le cylindre entier, c'est-à-dire sur le diamètre AΓ.

3. C'est-à-dire des cercles de base des cylindres situés dans le cylindre ayant le cercle de diamètre AΓ comme base et la droite ΔI comme axe.

4. Voir proposition I ; on aura donc :

$$\frac{\sum \text{ cylindres compris dans cyl. de base cercle } A\Gamma, \text{ hauteur } \Delta I}{\sum \text{ cylindres compris dans la fig. inscrite}}=$$

$$\frac{\sum \text{ rayons des bases des cylindres compris dans le cylindre de base cercle } A\Gamma \text{ et de hauteur } \Delta I}{\sum \text{ droites interceptées par AB, B}\Delta \text{ sur rayons de base cyl. compris dans cyl. de base cercle } A\Gamma \text{ et de hauteur } \Delta I.}$$

5. Puisque ΔE = EZ = ΘI = IB, les droites ΔB, EB, ZB, ΘB, IB diffèrent entre elles d'une même grandeur égale à la plus petite de ces droites ; donc, par similitude des triangles, les droites ΔA, EΞ, ZO, etc., diffèrent aussi entre elles d'une même grandeur égale à la plus petite d'entre ces droites. Dès lors, par application de la seconde partie du lemme qui précède la proposition I, on aura, comme le texte :

$\sum$ rayons de base cyl. compris dans cyl. de base cercle AΓ et de hauteur ΔI > 2 $\sum$ droites interceptées ΔA, EΞ, ZO, etc. — la plus grande ΔA.

Digitized by Google

cylindre dont l'axe est ΔI est aussi plus grande que le double de la figure inscrite. Par conséquent, le cylindre entier, dont l'axe est ΔB, est plus grand encore que le double de la figure inscrite (1). Or, le cylindre entier était le double du cône Ψ ; par conséquent, la figure inscrite est plus petite que le cône Ψ ; ce qui est impossible, car on a démontré qu'elle est plus grande (2). Le conoïde n'est donc pas plus grand que le cône Ψ.

De même, d'ailleurs, il n'est pas plus petit. En effet, inscrivons de nouveau une figure et circonscrivons-en une de telle sorte que l'une excède l'autre d'une grandeur moindre que celle dont le cône Ψ excède le conoïde (3), et que les autres constructions soient les mêmes que les précédentes. Dès lors, puisque la figure inscrite est plus petite que le segment, et que la figure inscrite est plus petite que la figure circonscrite d'une grandeur moindre que celle dont le segment est plus petit que le cône Ψ, il est évident que la figure circonscrite est plus petite que le cône (4). Dès lors, à nouveau, le rapport du premier cylindre qui, dans le cylindre entier, a pour axe la droite ΔE, au premier cylindre qui, dans la figure circonscrite, a pour axe la même droite ΔE, est le même que le rapport du carré de AΔ à ce carré même (5), tandis que le rapport du deuxième cylindre qui, dans le cylindre entier, a pour axe EZ, au deuxième cylindre qui, dans la figure circonscrite, a pour axe EZ, est le même que le rapport du carré de ΔA au carré de KE (6). Or, ce dernier rapport est le même que celui de BΔ à BE

1. L'inégalité qui précède, portée dans la relation de la note avant-précédente, donne : $\sum$ cyl. compris dans cyl. de base cercle AΓ et de hauteur ΔI > 2 fig. inscrite Or, cylindre entier de base cercle AΓ et de hauteur ΛI > $\sum$ cyl. compris dans cyl. de base cercle AΓ et de hauteur ΔI, d'où, à fortiori, comme le texte : cylindre entier > 2 figures inscrites.

2. On a vu plus haut que cône Ψ = ½ cylindre entier, d'où, comme le texte : Cyl. entier = 2 cônes Ψ, d'où, substituant dans l'inégalité de la note précédente, il vient : 2 cônes Ψ > 2 fig. inscrites, d'où, comme le texte : fig. inscrite < cône Ψ ; ce qui est absurde, car on a démontré (voir note plus haut) : fig. inscrite > cône Ψ.

3. Voir proposition XIX.

4. On a par hypothèse seconde : fig. circonscrite — fig. inscrite < cône Ψ — segment conoïde. Or, fig. inscrite < segment, d'où, à fortiori : fig. circonscr. — fig. inscr. < cône Ψ — fig. inscrite, ou, comme le texte : fig. circonscr. < cône Ψ.

5. Le 1er cylindre partiel du cylindre entier est égal au premier cylindre partiel dans la figure circonscrite ; donc : $\frac{\text{cylindre } \Pi\Gamma'}{\text{cylindre } \Pi\Gamma} = \frac{\pi \times \overline{A\Delta}^2}{\pi \times \overline{A\Delta}^2} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{A\Delta}^2}$.

6. De même que les premiers cylindres partiels, les seconds ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases ; donc :

Digitized by Google

et que celui de ΔA à $E\Xi$(1), et le rapport de chacun des autres cylindres qui, dans le cylindre entier, ont un axe égal à la droite ΔE à chacun des cylindres qui, dans la figure circonscrite, ont le même axe sera le même que le rapport de la moitié du diamètre de leur base à la partie interceptée sur ce diamètre entre les droites AB, $B\Delta$ (2). Par conséquent, le rapport de la somme des cylindres situés dans le cylindre entier, dont l'axe est la droite $B\Delta$, à la somme des cylindres situés dans la figure circonscrite sera le même que le rapport de la somme des premières droites à la somme des secondes droites (3). Or, la somme des droites qui sont les rayons des cercles de base des cylindres est plus petite que le double de la somme des droites interceptées sur les premières augmentée de la droite $A\Delta$ (4). Dès lors, il est évident que la somme des cylindres situés dans le cylindre entier est aussi plus petite que le double de la somme des cylindres situés dans la figure circonscrite. Par conséquent, le cylindre ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre $A\Gamma$ et comme axe la droite $B\Delta$ est plus petit que le double de la figure circonscrite (5). Or, il n'en est pas ainsi ; car il est plus grand que le double. En effet, ce cylindre est le double du cône Ψ, tandis que la figure circonscrite est plus petite que le cône, comme on l'a démontré (6). Par conséquent, le segment de

$$\frac{2^{d}\text{ cyl. partiel dans cylindre entier}}{2^{d}\text{ cyl. partiel dans figure circonscrite}} = \frac{\pi \times \overline{\Pi E}^2}{\pi \times \overline{KE}^2} = \frac{\overline{\Pi E}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{KE}^2}.$$

1. Dans la parabole, les carrés des ordonnées étant entre eux comme les abscisses, on aura: $\frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{B\Delta}{BE}$. Or, par similitude des triangles $AB\Delta$, ΞBE on a : $\frac{B\Delta}{BE} = \frac{\Delta A}{E\Xi}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{\Delta A}{E\Xi}$, d'où, substituant dans la relation de la note précédente :

$$\frac{2^{d}\text{ cylindre partiel dans cylindre entier}}{2^{d}\text{ cylindre partiel dans fig. circonscrite}} = \frac{\Delta A}{E\Xi}.$$

2. Voir la note relative au même passage dans la 1re partie de la démonstration.

3. De même que dans la 1re partie de la démonstration, où le texte est néanmoins plus explicite, on aura, en vertu de la prop. I : $\frac{\sum \text{ cyl. compris dans cyl. entier}}{\sum \text{ cyl. compris dans fig. circonscr.}} = \frac{\sum \text{ rayons des bases des cyl. compris dans cyl. entier.}}{\sum \text{ droites interceptées par AB, } B\Delta \text{ sur les rayons des cyl. compris dans cyl. entier.}}$

4. Pour les mêmes raisons que dans la 1re partie de la démonstration, on aura, en vertu de la 1re partie du lemme qui précède la proposition I :

$\sum$ rayons des cercles de base des cyl. compris dans le cyl. entier $< 2 \sum$ droites interceptées $E\Xi$, ZO, etc. $+ A\Delta$.

5. L'inégalité qui précède portée dans la relation de la note avant-précédente donne : $\sum$ cyl. compris dans le cylindre entier $< 2 \sum$ cylindres compris dans la fig. circonscrite, d'où cylindre entier de base $A\Gamma$ et de hauteur $B\Delta < 2$ fig. circonscr.

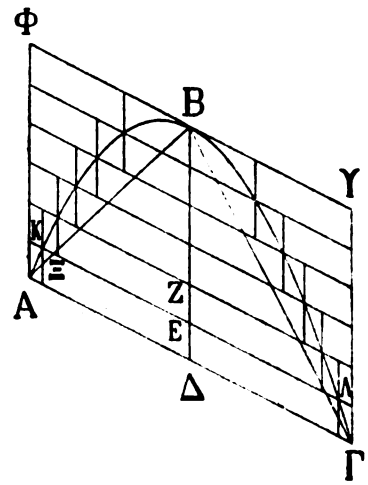
6. On a vu plus haut que cylindre entier $= 2$ cônes ψ, d'où, substituant dans

Digitized by Google

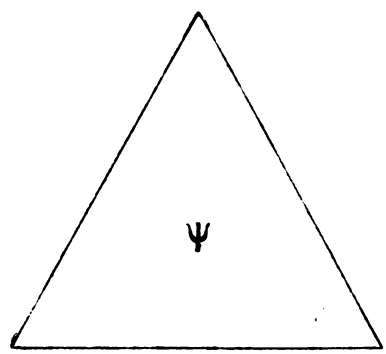
conoïde n'est pas moindre non plus que le cône Ψ. Or, on a démontré qu'il n'est pas plus grand ; par conséquent, il équivaut à une fois et demie le cône ayant même base et même axe que le segment (1).

PROPOSITION XXII.

Au reste, lorsqu'un segment est découpé d'un paraboloïde de révolution par un plan non perpendiculaire à l'axe, il vaudra de même une fois et demie le segment de cône ayant même base et même axe que le segment de paraboloïde.



Soit un segment de paraboloïde découpé comme nous venons de le dire ; que celui-ci étant coupé par un plan passant par l'axe, perpendiculairement au plan qui découpe le segment, la section de la figure soit la parabole ABΓ (2). Que la section du plan qui découpe le segment soit la droite AΓ ; soit la droite ΦY, parallèle à la droite AΓ, tangente à la parabole au point B, et menons la droite BΔ parallèlement à l'axe. Celle-ci coupera donc la droite AΓ en deux parties égales (3). D'autre part, élevons par la droite ΦY un plan parallèle au plan mené suivant la droite AΔ. Ce plan sera donc tangent au conoïde au point B (4), et le sommet du segment sera le point B, tandis que BΔ



l'inégalité précédente, il vient : 2 cônes Ψ < 2 fig. circonscr., d'où : fig. circonscr. > cône Ψ ; ce qui est absurde, car on a vu qu'en seconde hypothèse on a : fig. circonscr. < cône Ψ.

1. On a donc : segment de paraboloïde = cône Ψ. Or, par hypothèse : cône Ψ = $\frac{3}{2}$ cône ABΓ, d'où : segment du paraboloïde = $\frac{3}{2}$ cône ABΓ.

2. Voir proposition XI, alinéa 1.

3. Conséquence de la proposition I du livre *De la Quadrature de la Parabole*. Une démonstration directe est donnée plus tard par Apollonius dans son traité sur *Les Coniques*, livre II, proposition XLVI.

4. Voir proposition XVI, alinéa 2.

Digitized by Google

sera son axe. Dès lors, puisqu'un plan mené suivant la droite AΓ, non perpendiculaire à l'axe, coupe le conoïde, la section sera une ellipse, tandis que son grand diamètre sera AΓ (1). Ayant donc une ellipse décrite autour du diamètre AΓ et une droite BΔ élevée du centre de l'ellipse dans un plan mené par le diamètre perpendiculaire au plan dans lequel se trouve l'ellipse, il est possible de trouver un cylindre ayant son axe dans la droite BΔ et dans la surface duquel l'ellipse soit située (2). D'ailleurs, il est possible aussi de trouver un cône ayant comme sommet le point B et dans la surface duquel l'ellipse soit située (3) ; de telle sorte que l'on aura un certain tronçon de cylindre ayant comme base l'ellipse décrite autour du diamètre AΓ, comme axe la droite BΔ, et un segment de cône ayant même base que le tronçon et que le segment (4) ainsi que même axe. On doit démontrer que le segment de conoïde vaut une fois et demie ce cône.

Soit donc un cône Ψ équivalent à une fois et demie ce dernier segment (5). Dès lors, le tronçon de cylindre ayant même base et même axe que le segment (6) vaudra le double du cône Ψ ; car celui-ci vaut une fois et demie le segment de cône ayant même base et même axe que le segment (7), tandis que le segment de cône que nous venons de dire vaut le tiers du tronçon de cylindre ayant même base et même axe que le segment (8). Le segment de conoïde est donc nécessairement équivalent au cône Ψ.

En effet, s'il n'est pas équivalent, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, s'il se peut. Inscrivons donc une figure solide dans le segment et circonscrivons-lui-en une autre qui soient composées de tronçons de cylindres ayant même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le segment de conoïde excède le cône Ψ (9),

1. Voir proposition XII.
2. Voir proposition IX.
3. Voir proposition VIII.
4. Sous-entendu : du conoïde (paraboloïde de révolution).
5. Sous-entendu : de cône, c'est-à-dire le segment de cône qui a même base et même axe que le segment du paraboloïde.
6. C'est-à-dire du segment de paraboloïde.
7. C'est-à-dire du segment de paraboloïde.
8. On a, par hypothèse : cône $\Psi = \frac{3}{2}$ cône ABΓ. Or (proposition X, alinéa 2), on a : cône ABΓ $= \frac{1}{3}$ tronçon de cylindre AΦYΓ, d'où cône $\Psi = \frac{1}{2}$ tronçon cyl. AΦYΓ, d'où, comme le texte : tronçon de cylindre ayant même base et même axe que le paraboloïde $= 2$ cônes Ψ.
9. Ce qui est possible en vertu de la proposition XX.

Digitized by Google

et étendons les plans des tronçons jusqu'à la surface du tronçon ayant même base et même axe que le segment. Dès lors, et à nouveau, le rapport du premier tronçon qui, dans le tronçon entier, a pour axe ΔE au premier tronçon qui, dans la figure inscrite, a pour axe ΔE est le même que celui du carré de $A\Delta$ au carré de KE, car ces tronçons qui ont même hauteur ont entre eux même rapport que leurs bases, tandis que leurs bases, vu qu'elles sont des ellipses semblables (1), ont même rapport que les carrés de leurs diamètres homologues (2), et les droites $A\Delta$, KE sont les moitiés de ces diamètres homologues (3). Or, le rapport du carré de $A\Delta$ au carré de KE est le même que celui de $B\Delta$ à la longueur BE, puisque $B\Delta$ est parallèle au diamètre, tandis que les droites $A\Delta$, KE sont parallèles à la tangente au point B. D'autre part, le rapport de $B\Delta$ à BE est le même que celui de $A\Delta$ à $E\Xi$; par conséquent, le rapport du premier tronçon dans le tronçon entier au premier tronçon dans la figure inscrite sera le même que celui de $A\Delta$ à $E\Xi$ (4), et le rapport de chacun des autres tronçons qui, dans le tronçon entier, ont un axe égal à la droite ΔE à chacun des tronçons qui, dans la figure inscrite, ont le même axe est le même que le rapport de la moitié du diamètre de leur base à la partie interceptée sur ce diamètre entre les droites AB, $B\Delta$ (5). Dès lors, nous démontrerons, de la même manière que précédemment, que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ (6), tandis que le tronçon de cylindre ayant même base et même axe que le segment est plus grand que le

1. Voir proposition XIV, *in fine*.
2. Voir proposition VI, corollaire.
3. $\frac{1^{er}\text{ tronçon cyl. compris dans cyl. entier}}{1^{er}\text{ tronçon cyl. compris dans fig. inscrite}} = \frac{\text{base ellipse de diamètre } A\Gamma}{\text{base ellipse de diamètre } K\Lambda} = \frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{K\Lambda}^2} = \frac{\overline{4\,A\Delta}^2}{\overline{4\,KE}^2} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{KE}^2}$.
4. Les droites $A\Delta$, KE étant les ordonnées et les droites $B\Delta$, BE les abscisses des points A, K dans la parabole $AB\Gamma$ rapportée aux axes obliques ΦY, $B\Delta$, on aura : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{B\Delta}{BE}$. Or, par similitude des triangles $AB\Delta$, ΞBE, on a : $\frac{B\Delta}{BE} = \frac{A\Delta}{E\Xi}$, d'où : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{A\Delta}{E\Xi}$, d'où, remontant à la relation de la note précédente, il vient, comme le texte : $\frac{1^{er}\text{ tronçon du cylindre entier}}{1^{er}\text{ tronçon de la figure inscrite}} = \frac{A\Delta}{E\Xi}$.
5. Voir note relative au même passage un peu ambigu qui s'est déjà présenté au cours de la démonstration de la proposition XXI.
6. La relation figure inscrite > cône Ψ est démontrée à la proposition XXI relative au cas du paraboloïde coupé perpendiculairement à l'axe (voir note).

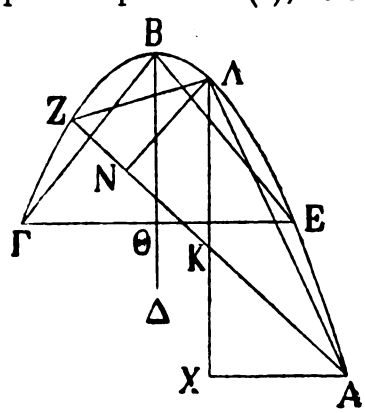
Digitized by Google

double de la figure inscrite (1) ; de telle sorte qu'il sera aussi plus grand que le double du cône Ψ. Or, il ne l'est pas, mais vaut le double de ce cône (2) ; par conséquent, le segment de conoïde n'est pas plus grand que le cône Ψ. On démontrera d'ailleurs par les mêmes voies qu'il n'est pas plus petit. Dès lors, il est évident qu'il lui est équivalent. En conséquence, le segment de conoïde vaut une fois et demie le segment de cône ayant même base et même axe que le segment (3).

PROPOSITION XXIII.

Lorsque deux segments sont découpés d'un paraboloïde de révolution par des plans, l'un perpendiculaire, l'autre non perpendiculaire à l'axe, et que les axes des segments sont égaux, ces segments seront équivalents.

En effet, découpons deux segments d'un paraboloïde comme nous venons de le dire. D'autre part, le conoïde étant coupé par un plan passant par l'axe (4), soit la parabole ABΓ la section du conoïde et BΔ son diamètre. Soient les droites AZ, EΓ les sections des plans, EΓ celle du plan perpendiculaire à l'axe, ZA celle du plan non perpendiculaire. Soient les droites BΘ, KΛ égales entre elles, les axes des segments, et B, Λ les sommets. On doit démontrer que le segment de conoïde dont le sommet est B équivaut au segment de conoïde dont le sommet est Λ.



Puisque les deux segments AΛZ et

1. La relation tronçon entier de cylindre AΦΥΓ > 2 fig. inscrite s'obtient de la même manière que dans la proposition XXI.

2. On a en 1re hypothèse : fig. circonscrite — fig. inscrite < segment conoïde — cône Ψ. Or, fig. circonscrite > segment conoïde, d'où, à fortiori : fig. circonscr. — fig. inscr. < fig. circ. — cône Ψ, ou fig. inscr. > cône Ψ, d'où, substituant dans l'inégalité de la note précédente, on aurait, comme le texte : tronçon entier de cylindre AΦΥΓ > 2 cônes Ψ ; ce qui est absurde, car on a vu que tronçon cylindre AΦΥΓ = 2 cônes Ψ.

3. On a donc : segment de paraboloïde = cône Ψ. Or, par hypothèse : cône Ψ = $\frac{3}{2}$ cône ABΓ, d'où, segment de paraboloïde = $\frac{3}{2}$ cône ABΓ = 1 $\frac{1}{2}$ fois le cône de même base et de même hauteur que le segment de paraboloïde.

4. Le texte présente ici la petite interpolation suivante : « et par un autre plan perpendiculaire à l'axe ». C'est un commentaire inutile en présence des mots qui précèdent : « ὡς εἴρηται, comme nous venons de dire ».

Digitized by Google

EBΓ ont été retranchés d'une même parabole et que leurs diamètres sont égaux, le triangle ΑΛΚ équivaut au triangle EΘB ; car il a été démontré que le triangle ΑΛΖ équivaut au triangle EBΓ (1). Dès lors, menons la droite AX perpendiculairement à la droite ΚΛ prolongée, et, puisque les droites BΘ, ΚΛ sont égales, les droites EΘ, AX sont égales aussi (2). Dans le segment (3) dont le sommet est B inscrivons un cône ayant même base et même axe que ce segment, et, dans le segment dont le sommet est Λ, un tronçon de cône (4) ayant même base et même axe que ce segment. D'autre part, du point Λ, menons la droite ΛN perpendiculairement à AZ ; cette droite sera donc la hauteur du tronçon de cône dont le sommet est Λ(5). Or, le tronçon de cône dont le sommet est Λ et le cône dont le sommet est B sont entre eux dans le rapport composé du rapport des bases et de celui des hauteurs (6) ; par conséquent, ils sont entre eux dans le rapport composé de celui de l'aire délimitée par l'ellipse (7) décrite autour du diamètre AZ au cercle (8) décrit autour du diamètre EΓ et de celui de NΛ à BΘ (9). Or, le rapport de l'aire délimitée par l'ellipse au cercle précédent est le même que le rapport du rectangle délimité par ses diamètres au carré de EΓ (10) ; par conséquent, le rapport du

1. L'équivalence des triangles ΑΛΖ, EBΓ a été démontrée à la proposition III. Or, BΘ, ΛΚ sont des diamètres de la parabole qui divisent les bases de ces triangles en deux parties égales; dès lors, les triangles ΑΛΚ, EΘB, moitiés des triangles précédents, sont équivalents.

2. Par hypothèse : BΘ = ΚΛ, donc les triangles EΘB, ΑΛΚ ayant des bases égales sont entre eux comme leurs hauteurs EΘ, AX. Or, on vient de voir que ces triangles sont équivalents, donc les hauteurs EΘ, AX sont égales. Voir aussi la proposition III, où l'égalité des droites EΘ, AX est incidemment démontrée par d'autres considérations.

3. C'est-à-dire le segment du paraboloïde.

4. Voir la définition du tronçon de cône aux Définitions qui précèdent la proposition I.

5. Voir : *De la Quadrature de la Parabole,* proposition XVII, *in fine.*

6. Voir proposition X et note.

7. Voir proposition XII.

8. Voir proposition XI, alinéa 1.

9. On aura, en vertu de la proposition XII :

$$\frac{\text{tronçon de cône ZΛA}}{\text{cône ΓBE}} = \frac{\text{aire ellipse de diamètre ZA}}{\text{cercle de diam. EΓ}} \times \frac{\text{NΛ}}{\text{BΘ}}.$$

10. On aura donc, en vertu de la proposition V :

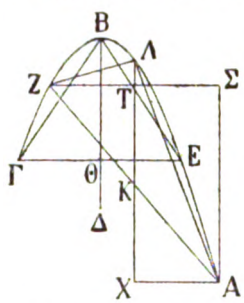
$$\frac{\text{aire ellipse de diamètre ZA}}{\text{cercle de diamètre EΓ}} = \frac{\text{ZA} \times \text{diamètre conjugué de ZA}}{\overline{\text{EΓ}}^2}.$$

Le texte présente ici un passage, obscur d'ailleurs, qui contrarie l'ordonnance de la démonstration, et auquel Heiberg a reconnu les caractères d'un commentaire interpolé (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 369). Comme ce passage se trouve dans toutes les éditions anciennes du texte grec, nous en donnons ici la traduction pour mémoire : « Et le rapport du segment de cône dont le sommet est Λ au cône dont le

Digitized by Google

tronçon de cône au cône est aussi le même que le rapport composé de celui de AK à AX, car AX est égal à EΘ, et de celui de ΛN à BΘ (1). Or, des rapports que nous venons de dire, celui de AK à AX est le même que celui de ΛK à ΛN ; par conséquent, le rapport de tronçon à cône est le même que celui de ΛK à ΛN composé avec celui de ΛN à BΘ. Or, BΘ est égal à KΛ ; il est donc évident que le tronçon de cône dont le sommet est Λ équivaut au cône dont le sommet est B (2). Par conséquent, il est clair que les segments sont équivalents aussi, puisque l'un d'eux vaut une fois et demie le cône (3), tandis que l'autre vaut une fois et demie le tronçon de cône (4) équivalent au premier.

sommet est B est composé du rapport de KA à EΘ et du rapport de NΛ à BΘ; car KΛ est la moitié du diamètre de la base du segment de cône dont le sommet est Λ, et EΘ est la moitié du diamètre de la base du cône et ΛN, BΘ sont leurs hauteurs. Or, ΛN a même rapport avec BΘ que celui qu'il a avec KΛ, puisque BΘ est égal à KΛ ; de plus, le rapport de ΛN à KΛ est le même que celui de XA à AK ».



1. En effet, reprenons la figure du texte en la complétant par la droite ZΣ menée perpendiculairement sur la droite AΣ, menée elle-même parallèlement au diamètre ΛK. La proposition XII a démontré que ZΣ est le diamètre conjugué du grand diamètre ZA de l'ellipse de base du segment de paraboloïde ZBΛEA. Dès lors, l'égalité de la note précédente devient :

$\frac{\text{aire ellipse de diamètre ZA}}{\text{cercle de diamètre EΓ}} = \frac{ZA \times ZΣ}{\overline{EΓ}^2}$. Or, par similitude de triangles, on a : $\frac{ZT}{TΣ} = \frac{ZK}{KA}$; mais ZK = KA, donc ZT = TΣ = AX. Or, on a démontré que AX = EΘ ; donc ZT = EΘ, d'où : 2 ZT = 2 EΘ, ou ZΣ = EΓ. On aura donc :

$\frac{\text{aire ellipse de diam. ZA}}{\text{cercle de diam. EΓ}} = \frac{ZA \times ZΣ}{\overline{EΓ}^2} = \frac{ZA \times EΓ}{\overline{EΓ}^2} = \frac{ZA}{EΓ} = \frac{\frac{1}{2}ZA}{\frac{1}{2}EΓ} = \frac{AK}{EΘ} = \frac{AK}{AX}$, d'où, remontant à la relation de la note avant-précédente, il vient, comme le texte :

$$\frac{\text{tronçon cône ZΛA}}{\text{cône ΓBE}} = \frac{AK}{AX} \times \frac{NΛ}{BΘ}.$$

2. Par similitude des triangles KXA, KNΛ on a : $\frac{AK}{AX} = \frac{ΛK}{ΛN}$; donc l'égalité de la note précédente devient, comme le texte : $\frac{\text{tronçon de cône de sommet Λ}}{\text{cône de sommet B}} = \frac{ΛK}{ΛN} \times \frac{ΛN}{BΘ}$.

Or, par hypothèse : BΘ = ΛK, d'où : $\frac{\text{tronçon cône sommet Λ}}{\text{cône sommet B}} = \frac{ΛN}{ΛN} = 1$, d'où, comme le texte : tronçon de cône de sommet Λ = cône de sommet B.

3. Voir proposition XXI.

4. Voir proposition XXII.

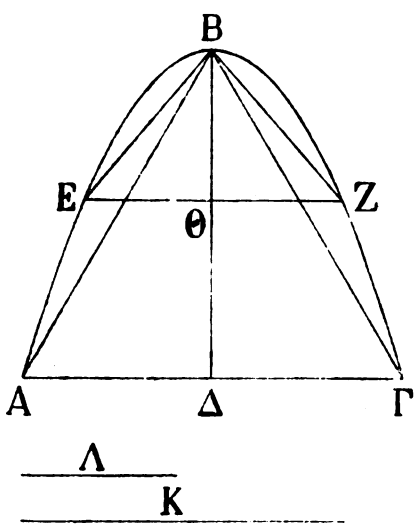
Digitized by Google

PROPOSITION XXIV.

Lorsque deux segments sont découpés d'un paraboloïde de révolution par des plans menés d'une manière quelconque, les segments auront entre eux même rapport que les carrés de leurs axes.

En effet, soient deux segments découpés à volonté d'un paraboloïde, et que l'axe de l'un soit égal à la droite K, tandis que celui de l'autre soit égal à la droite Λ. On doit démontrer que les segments ont entre eux même rapport que les carrés de K, Λ.

Soit la parabole ABΓ la section du segment du conoïde coupé par un plan passant par l'axe (1), soit BΔ son axe ; prenons BΔ égal à la droite K, et, par le point Δ, menons un plan perpendiculaire à l'axe. Dès lors, le segment du conoïde, qui a comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme axe BΔ, équivaut à un segment ayant un axe égal à la droite K (2). Par conséquent, si K est égal à Λ, il est clair que les segments seront aussi équivalents entre eux, car chacun d'eux sera équivalent à un même segment. De plus, les carrés de K, Λ sont égaux, en sorte que les segments auront même rapport que les carrés de leurs axes. Si, d'autre part, Λ n'est pas égal à K, que Λ soit égal à BΘ, et, par le point Θ, menons un plan perpendiculaire à l'axe. Dès lors, le segment qui a le cercle décrit autour du diamètre EZ comme base et BΘ comme axe, équivaut à un segment ayant un axe égal à la droite Λ. Inscrivons donc des cônes qui ont comme bases les cercles décrits autour des diamètres AΓ, EZ et comme sommet le point B. Dès lors, le rapport du cône ayant comme axe BΔ au cône ayant comme axe BΘ est le même que le rapport composé de celui du carré de AΔ au carré de ΘE et de celui de ΔB à la lon-



1. Voir proposition XI, alinéa 1.
2. Voir proposition XXIII.

Digitized by Google

gueur BΘ(1). Or, le rapport du carré de ΔA au carré de ΘE est le même que celui de BΔ à la longueur BΘ ; par conséquent, le rapport du cône ayant comme axe BΔ au cône ayant comme axe BΘ est le même que le rapport composé de celui de ΔB à ΘB et de celui de ΔB à BΘ. Ce rapport est d'ailleurs le même que celui du carré de ΔB au carré de ΘB (2). D'autre part, le rapport du segment de conoïde ayant comme axe ΔB au segment ayant comme axe ΘB est le même que celui du cône ayant comme axe BΔ au cône ayant comme axe ΘB (3). De plus, le segment de conoïde ayant un axe égal à la droite K équivaut au segment ayant comme axe BΔ, tandis que le segment de conoïde ayant un axe égal à Λ équivaut au segment ayant comme axe ΘB (4), et BΔ est égal à K, tandis que ΘB est égal à Λ. Il est donc évident que le rapport du segment de conoïde ayant un axe égal à K au segment de conoïde ayant un axe égal à Λ est le même que celui du carré de K au carré de Λ (5).

---

1. En vertu de la proposition X, deux cônes sont entre eux dans le rapport composé du rapport des bases et du rapport des hauteurs ; donc :

$$\frac{\text{cône d'axe } B\Delta}{\text{cône d'axe } B\Theta} = \frac{\text{base cercle de diam. } A\Gamma}{\text{base cercle de diam. } EZ} \times \frac{\Delta B}{B\Theta}.$$ Or, $\frac{\text{cercle de diam. } A\Gamma}{\text{cercle de diam. } EZ} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Theta E}^2}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{cône d'axe } B\Delta}{\text{cône d'axe } B\Theta} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Theta E}^2} \times \frac{\Delta B}{B\Theta}$.

2. Voir : *De la Quadrature de la Parabole,* proposition III ; les carrés des ordonnées sont proportionnels aux abscisses, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{\Theta E}^2} = \frac{B\Delta}{B\Theta}$, d'où, substituant dans l'égalité précédente, il vient, comme le texte :

$$\frac{\text{cône d'axe } B\Delta}{\text{cône d'axe } B\Theta} = \frac{B\Delta}{B\Theta} \times \frac{\Delta B}{B\Theta} = \frac{\overline{\Delta B}^2}{\overline{\Theta B}^2}.$$

3. La phrase se termine par les mots suivants que nous considérons comme un commentaire interpolé : « car chacun vaut trois fois la moitié ».

D'ailleurs, en vertu de la proposition XXIII on a :

segment de paraboloïde d'axe $B\Delta = \frac{3}{2}$ cône d'axe BΔ, et segment de paraboloïde d'axe $B\Theta = \frac{3}{2}$ cône d'axe ΘB, d'où, comme le texte :

$$\frac{\text{segment d'axe } \Delta B}{\text{segment d'axe } \Theta B} = \frac{\text{cône d'axe } \Delta B}{\text{cône d'axe } \Theta B}.$$

4. Voir proposition XXIII.

5. Il résulte des relations des deux notes avant-précédentes que

$$\frac{\text{segment d'axe } \Delta B}{\text{segment d'axe } \Theta B} = \frac{\overline{\Delta B}^2}{\overline{\Theta B}^2},$$

d'où, observant que segment d'axe K = segment d'axe ΔB et segment d'axe Λ = segment d'axe ΘB, et que BΔ = K, ΘB = Λ, il vient, comme le texte :

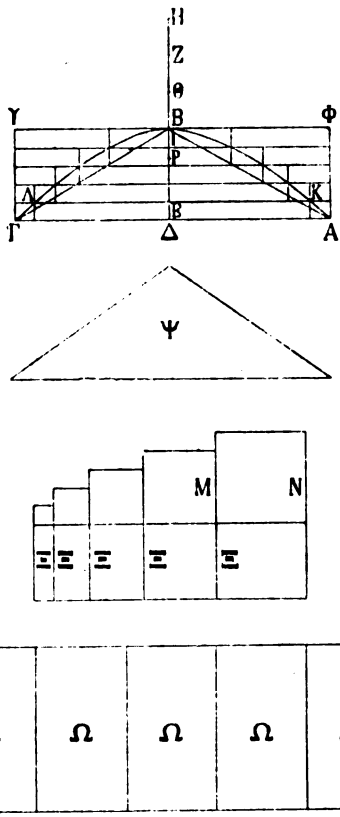
$$\frac{\text{segment de conoïde d'axe K}}{\text{segment de conoïde d'axe } \Lambda} = \frac{K^2}{\Lambda^2}.$$

Digitized by Google

PROPOSITION XXV.

Le rapport de tout segment d'hyperboloïde de révolution découpé par un plan perpendiculaire à l'axe au cône ayant même base et même hauteur que le segment est le même que le rapport d'une droite égale à la somme de l'axe du segment et du triple de la droite ajoutée à l'axe (1) à une droite égale à la somme de l'axe du segment et du double de la droite ajoutée à l'axe.

Soit un segment de l'hyperboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe, et que, coupé par un autre plan passant par l'axe, la section de ce conoïde soit l'hyperbole ABΓ (2), tandis que la section du plan qui découpe le segment est la droite AΓ. Soit d'ailleurs BΔ l'axe du segment, soit BΘ l'ajoutée à l'axe et soient les droites ZΘ et ZH égales à la droite BΘ.



On doit démontrer que le rapport du segment au cône ayant même base et même axe que le segment est le même que celui de HΔ à ZΔ (3). Dès lors, soit un cylindre ayant même base et même axe que le segment, et soient ΦA, ΓΥ les côtés de ce cylindre. D'autre part, soit encore un certain cône, dans lequel se trouve la lettre Ψ, dont le rapport au cône ayant même base que le segment et BΔ comme axe soit le mê-

1. Archimède désigne par « droite ajoutée à l'axe » ou simplement par « ajoutée à l'axe » la droite qui relie le sommet de l'hyperbole au point de rencontre de ses asymptotes. Cette droite est donc le demi-axe transverse de l'hyperbole. De même, dans l'hyperboloïde de révolution, l'ajoutée à l'axe désignera la droite qui relie le sommet de l'hyperboloïde au sommet du cône asymptote.

2. Voir proposition XI, alinéa 2.

3. On doit donc démontrer que :

$$\frac{\text{segment d'hyperboloïde}}{\text{cône de même base et de même axe}} = \frac{B\Delta + 3\,B\Theta}{B\Delta + 2\,B\Theta} = \frac{H\Delta}{Z\Delta}.$$

Digitized by Google

me que le rapport de HΔ à ΔZ. Je dis que le segment du conoïde est équivalent au cône Ψ.

En effet, s'il ne lui est pas équivalent, il est ou plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, s'il se peut. Dès lors, inscrivons une figure solide dans le segment et circonscrivons-lui-en une autre, composées de cylindres ayant même hauteur ; de telle sorte que la figure circonscrite excède la figure inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le segment de conoïde excède le cône Ψ (1), et prolongeons les plans de tous les cylindres jusqu'à la surface du cylindre ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme axe BΔ. Il en résulte que le cylindre entier sera divisé en un nombre de cylindres égal à celui des cylindres contenus dans la figure circonscrite, de grandeur égale d'ailleurs à celle du plus grand de ces derniers. Et, puisque la figure circonscrite excède la figure inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le segment excède le cône Ψ, et que la figure circonscrite est plus grande que le segment, il est évident que la figure inscrite est aussi plus grande que le cône Ψ (2). Dès lors, soit BP la troisième partie de BΔ ; la droite HΔ sera donc triple de la droite ΘP (3). Et, puisque le rapport du cylindre ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme axe la droite BΔ au cône ayant même base et même axe, est le même que le rapport de HΔ à ΘP (4), tandis que le rapport du cône que nous venons de dire au cône Ψ est le même que celui de ZΔ à HΔ, il en résulte que, vu la proportion établie différemment pour trois grandeurs, le rapport du cylindre en question au cône Ψ est le même que celui de ZΔ à ΘP (5). Disposons des lignes, sur lesquelles il y a des

1. Voir proposition XIX.

2. On a, par hypothèse : fig. circonscr. — fig. inscr. < segment — cône Ψ. Or, fig. circonscr. > segment, d'où, à fortiori :
fig. circonscr. — fig. inscr. < fig. circonscr. — cône Ψ, d'où : fig. inscr. > cône Ψ.

3. Car HΔ = HB + BΔ. Or, par hypothèse: HZ = ZΘ = ΘA, d'où: HB = 3ΘB. D'autre part, on pose: BP = $\frac{1}{3}$ BΔ, d'où BΔ = 3 BP, d'où, substituant dans la première égalité, on a : HΔ = 3[ΘB + BP] = 3ΘP.

4. On a, en vertu de la proposition X, alinéa 2 (voir note) : cylindre ΓΥΦA = 3 cônes ΓBA, d'où : $\frac{\text{cylindre } \Gamma\Upsilon\Phi A}{\text{cône } \Gamma BA} = 3$. Or, HΔ = 3ΘP, d'où : $\frac{H\Delta}{\Theta P} = 3$, d'où comme le texte : $\frac{\text{cylindre } \Gamma\Upsilon\Phi A}{\text{cône } \Gamma BA} = \frac{H\Delta}{\Theta P}$.

5. On a, par hypothèse: $\frac{\text{cône } \Gamma BA}{\text{cône } \Psi} = \frac{Z\Delta}{H\Delta}$, proportion qui, comparée avec celle de la note précédente, se présente en ordre troublé (EUCLIDE, livre V, définition 18). On aura donc, par identité (EUCLIDE, livre V, proposition XXIII), ou, plus simple-

Digitized by Google

lettres Ξ, en nombre égal à celui des segments de la droite BΔ, chacune de grandeur égale à la droite ZB. Appliquons à chacune d'elles une aire ayant un excédent de forme carrée ; que la plus grande soit équivalente au rectangle formé sous ZΔ, ΔB ; que la plus petite soit équivalente au rectangle formé sous ZI, IB, tandis que les côtés des excédents se dépassent l'un l'autre d'une même grandeur (1), et soit, d'une part, le côté du plus grand excédent, où se trouve la lettre N, égal à la droite BΔ, d'autre part, le côté du plus petit égal à la droite BI. Soient, en outre, d'autres aires, dans lesquelles il y a la lettre Ω, en même nombre que les précédentes, chacune de grandeur équivalente au plus grand rectangle formé sous ZΔ, ΔB. Dès lors, le rapport du cylindre ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme axe ΔE au cylindre ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre KΛ et comme axe ΔE est le même que celui du carré de ΔA au carré de KE (2). Or, ce dernier rapport est le même que celui du rectangle délimité sous ZΔ, BΔ au rectangle délimité sous ZE, BE (3) ; car cela se présente dans toute hyperbole (4).

ment, par produit : $\frac{\text{cylindre } \Gamma\Upsilon\Phi A}{\text{cône } \Gamma BA} \times \frac{\text{cône } \Gamma BA}{\text{cône } \Psi} = \frac{H\Delta}{\Theta P} \times \frac{Z\Delta}{H\Delta}$, ou, comme le texte : $\frac{\text{cylindre } \Gamma\Upsilon\Phi A}{\text{cône } \Psi} = \frac{Z\Delta}{H\Delta}$.

1. Le texte présente ici une petite interpolation : « car ils (ces côtés) sont égaux aux parties de la droite BΔ que se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur ».

2. EUCLIDE, livre XII, prop. XI. Ces cylindres de même hauteur sont entre eux comme les bases : $\frac{\text{cylindre de base } A\Gamma}{\text{cylindre de base } KA} = \frac{\pi \times \overline{\Delta A}^2}{\pi \times \overline{KE}^2} = \frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{KE}^2}$.

3. Archimède invoque ici une propriété de l'hyperbole qui était sans doute démontrée à son époque dans les traités élémentaires sur les sections coniques, et dont on retrouve plus tard chez Apollonius une démonstration généralisée (*Les Coniques*, livre I, prop. XXI).

Analytiquement, d'ailleurs, l'équation de l'hyperbole $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, mise sous la forme $\frac{y^2}{(x+a)(x-a)} = \frac{b^2}{a^2}$, met aussitôt en évidence que les carrés des ordonnées sont proportionnels aux produits des deux segments que ces ordonnées déterminent sur l'axe transverse. Or, ΘB est l'ajoutée à l'axe, c'est-à-dire le demi-axe transverse, et on a posé : ZΘ = ΘB, d'où : ZB = 2ΘB = axe transverse, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{Z\Delta \times B\Delta}{ZE \times BE}$.

4. Le texte ajoute ici : « car, le double de l'ajoutée (à l'axe), c'est-à-dire de la droite menée du centre, est le côté transverse de la figure. » Cette phrase nous paraît être une interpolation évidente, dans laquelle l'expression πλαγία πλευρά, c'est-à-dire « le côté (axe) transverse » révèle un commentateur d'une époque postérieure à celle d'Apollonius. Car, c'est bien ce dernier géomètre qui semble avoir été le premier à employer l'expression d'axe transverse qui nous est restée ; et il est probable que, si Archimède l'avait connue, il aurait abandonné son expression « ajoutée à l'axe » pour y substituer celle de demi-axe transverse.

Digitized by Google

De plus, l'aire ΞN équivaut au rectangle délimité sous ZΔ, BΔ, tandis que l'aire ΞM équivaut au rectangle délimité sous ZE, BE ; car la droite Ξ est égale à la droite ZB, la droite M égale à la droite BE, et la droite N égale à la droite BΔ (1). En conséquence, le rapport du cylindre ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme axe ΔE au cylindre ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre KΛ et comme axe ΔE est le même que le rapport de l'aire Ω à l'aire ΞM (2). On démontrera pareillement que le rapport de chacun des autres cylindres qui, dans le cylindre entier, a comme axe une droite égale à ΔE au cylindre ayant même axe dans la figure inscrite est le même que le rapport de l'aire Ω à l'aire correspondante d'entre celles qui, appliquées à la droite Ξ, ont un carré comme excédent. Dès lors, on a certaines grandeurs, des cylindres dans le cylindre entier, qui ont respectivement un axe égal à la droite ΔE, et d'autres grandeurs, des aires dans lesquelles se trouvent les lettres Ω, égales en nombre aux précédentes, ayant même rapport, prises deux à deux, puisque les cylindres sont égaux entre eux et que les aires Ω sont égales entre elles. Or, parmi ces cylindres, les uns ont rapport avec d'autres cylindres situés dans la figure inscrite, tandis que le dernier est sans rapport (3) ; et, parmi les aires dans lesquelles se trouvent les lettres Ω, les unes ont ce même rapport avec d'autres aires correspondantes qui, appliquées aux droites Ξ, ont une figure carrée comme excédent, tandis que la dernière est sans rapport. Dès lors, il est évident que le rapport de la somme des cylindres situés dans le cylindre entier à la somme des cylindres situés dans la figure inscrite est le même que celui de la somme des aires Ω à la somme des aires appliquées, exception faite de la plus grande (4). Or, on a démontré que

1. On a, par construction : Ξ = ZB ; côté du carré N = BΔ ; côté carré M = BE, d'où, comme le texte : aire ΞN = [Ξ + N] × N = [ZB + BΔ] × BΔ = ZΔ × BΔ, et aire ΞM = [Ξ + M] × M = [ZB + BE] × BE = ZE × BE.

2. On aura donc, par substitutions successives, en observant toutefois que, par construction, aire Ω = rectangle ZΔ × ΔB = aire ΞN :

$$\frac{\text{cyl. de base cercle de diam. } A\Gamma}{\text{cyl. de base cercle de diam. } K\Lambda} = \frac{\overline{\Delta A}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{Z\Delta \times B\Delta}{Z\Delta \times BE} = \frac{\text{aire } \Xi N}{\text{aire } \Xi M} = \frac{\text{aire } \Omega}{\text{aire } \Xi M}.$$

3. Le nombre des cylindres partiels dans le cylindre entier est inférieur d'une unité à celui des cylindres partiels de la figure inscrite dans le segment d'hyperboloïde ; le dernier, c'est-à-dire le cylindre YBΦI, n'a donc pas de rapport avec un cylindre partiel inscrit.

4. On aura, en vertu de la proposition I :

$$\frac{\sum \text{cyl. partiels du cyl. entier}}{\sum \text{cyl. partiels de la fig. inscr.}} = \frac{\sum \text{aires } \Omega}{\sum \text{aires appliquées} - \text{aire } \Xi N}.$$

Digitized by Google

le rapport de la somme des aires Ω à la somme des aires appliquées, la plus grande exceptée, est plus grand que celui de la droite NΞ (1) à une droite égale à la somme de la moitié de la droite Ξ et de la troisième partie de la droite N ; de telle sorte que le rapport du cylindre entier à la figure inscrite est aussi plus grand que le rapport de ZΔ à ΘP (2), rapport que nous avons démontré être le même que celui du cylindre entier au cône Ψ. Par conséquent, le rapport du cylindre entier à la figure inscrite est plus grand que son rapport au cône Ψ ; de telle sorte que le cône Ψ est plus grand que la figure inscrite ; ce qui est impossible, car il a été démontré que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ (3). En conséquence, le segment de conoïde n'est pas plus grand que le cône Ψ.

Au reste, il n'est pas plus petit. Qu'il soit plus petit, s'il se peut. Inscrivons donc à nouveau une figure solide dans le segment, et circonscrivons-lui-en une autre, composées de cylindres qui ont même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le cône excède le segment, et que les autres constructions soient les mêmes. Dès lors, puisque la figure circonscrite excède la figure inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le cône Ψ excède le segment, il est évident que la figure circonscrite est aussi plus petite que le cône Ψ (4). Donc, derechef, le rapport du premier cylindre qui, dans le cylindre entier a comme axe la droite ΔE, au premier cylindre qui, dans la figure

1. C'est-à-dire de la droite N + Ξ.

2. On aura, en vertu de la proposition II : $\frac{\sum \text{aires } \Omega}{\sum \text{aires appliquées} - \text{aire } \Xi N} > \frac{N+\Xi}{\frac{1}{2}\Xi + \frac{1}{3}N}$. Or, on a, par construction : $N = B\Delta$; $\Xi = ZB$; $BP = \frac{1}{3}B\Delta$ et $\Theta B = \frac{1}{2}ZB$, d'où : $\frac{1}{2}\Xi = \Theta B$ et $\frac{1}{3}N = BP$, d'où : $N + \Xi = B\Delta + ZB = Z\Delta$, et $\frac{1}{2}\Xi + \frac{1}{3}N = \Theta B + BP = \Theta P$, d'où : $\frac{\sum \text{aires } \Omega}{\sum \text{aires appliquées} - \text{aire } \Xi N} > \frac{Z\Delta}{\Theta P}$, d'où, remontant à l'égalité de la note avant-précédente : $\frac{\sum \text{cyl. partiels dans cyl. entier}}{\sum \text{cyl. partiels dans fig. inscr.}} > \frac{Z\Delta}{\Theta P}$. Or, on a : $\sum$ cyl. partiels dans cyl. entier = cylindre entier, et $\sum$ cyl. partiels fig. inscr. < fig. inscrite, d'où, à fortiori, comme le texte : $\frac{\text{cylindre entier}}{\text{figure inscrite}} > \frac{Z\Delta}{\Theta P}$.

3. On a obtenu plus haut (voir note) : $\frac{\text{cylindre entier}}{\text{cône } \Psi} = \frac{Z\Delta}{\Theta P}$, d'où, substituant dans l'inégalité précédente, on a, comme le texte : $\frac{\text{cyl. entier}}{\text{fig. inscrite}} > \frac{\text{cyl. entier}}{\text{cône } \Psi}$, d'où cône Ψ > fig. inscrite ; ce qui est absurde, car on a vu plus haut que fig. inscrite > cône Ψ.

4. On a en 2^de^ hypothèse : fig. circonscrite — fig. inscrite < cône Ψ — segment. Or, fig. inscrite < segment, d'où, à fortiori : fig. circonscr. — fig. inscr. < cône Ψ — fig. inscrite, ou, comme le texte : fig. circonscrite < cône Ψ.

Digitized by Google

circonscrite a comme axe la droite ΔE, est le même que celui de l'aire Ω à l'aire ΞM (1) ; et le rapport de chacun des autres cylindres qui, dans le cylindre entier a comme axe une droite égale à ΔE, au cylindre qui, dans la figure circonscrite a même situation et même axe, est le même que le rapport de l'aire Ω à l'aire qui lui correspond parmi celles qui sont appliquées aux droites Ξ, y compris leur excédent, parce que chacun des cylindres circonscrits, exception faite du plus grand, équivaut à chacun de ceux qui sont inscrits, y compris le plus grand (2). En conséquence, le rapport du cylindre entier à la figure circonscrite est le même que celui de la somme des aires Ω à la somme des aires appliquées, y compris leur excédent (3). Or, à nouveau, on a démontré que le rapport de la somme des aires Ω à la somme de ces autres aires est moindre que celui de la droite ΞN (4) à une droite égale à la somme de la moitié de la droite Ξ et de la troisième partie de la droite N ; de telle sorte que le rapport du cylindre entier à la figure circonscrite est aussi moindre que celui de ZΔ à ΘP (5). Or, le cylindre entier est au cône Ψ comme ZΔ est à ΘP ;

1. Le texte présente ici la petite interpolation suivante : « car ils sont égaux l'un et l'autre ». On a : 1er cylindre de base cercle de diam. AΓ dans cyl. entier = 1er cyl. de base cercle de diam. AΓ dans la fig. inscrite, et, d'autre part, on a : aire Ω = aire ΞN, d'où l'on a évidemment, comme le texte :

$$\frac{\text{1er cyl. du cylindre entier}}{\text{1er cyl. de la figure inscrite}} = \frac{\text{aire } \Omega}{\text{aire } \Xi N}.$$

2. Pour le second et chacun des cylindres suivants du cylindre entier et de la figure circonscrite, on retombera sur la relation obtenue dans la première partie de la démonstration : $\frac{\text{cylindre de base cercle de diam. } A\Gamma}{\text{cylindre de base cercle de diam. } K\Lambda} = \frac{\text{aire } \Omega}{\text{aire } \Xi M}$. En effet, à chacun des cylindres partiels circonscrits, exception faite du 1er, correspond un cylindre partiel de la figure circonscrite, y compris le plus grand, c'est-à-dire le 1er, donc on aura, comme le texte :

$$\frac{2^{d},\ 3^{me},\ n^{me} \text{ cylindre partiel du cyl. entier}}{2^{d},\ 3^{me},\ n^{me} \text{ cylindre partiel fig. circonscr.}} = \frac{\text{aire } \Omega}{\text{aire correspondante appliquée à } \Xi + \text{carré excédent}}$$

3. Les relations précédentes donneront donc, en vertu de la proposition I :

$$\frac{\sum \text{ cyl. partiels dans le cyl. entier}}{\sum \text{ cyl. partiels dans la fig. circonscr.}} = \frac{\text{cylindre entier}}{\text{fig. circonscr.}} = \frac{\sum \text{ aires } \Omega}{\sum \text{ aires appliquées aux lignes } \Xi + \text{carrés excédents}}$$

4. C'est-à-dire de la droite Ξ + N.

5. On aura, en vertu de la proposition II :

$$\frac{\sum \text{ aires } \Omega}{\sum \text{ aires appliquées} + \text{excédents}} < \frac{\Xi + N}{\frac{1}{2}\Xi + \frac{1}{3}N}.$$

Or, par construction : N = BΔ ; Ξ = ZB ; BP = $\frac{1}{3}$ BΔ et ΘB = $\frac{1}{2}$ ZB, d'où : $\frac{1}{2}\Xi = \Theta B$ et $\frac{1}{3}N = BP$, d'où : Ξ + N = ZΔ et $\frac{1}{2}\Xi + \frac{1}{3}N = \Theta P$, d'où :

$$\frac{\sum \text{ aires } \Omega}{\sum \text{ aires appliquées} + \text{excédent}} < \frac{Z\Delta}{\Theta P},$$

d'où, remontant à l'égalité de la note précédente : $\frac{\text{cyl. entier}}{\text{fig. circonscrite}} < \frac{Z\Delta}{\Theta P}$.

Digitized by Google

par conséquent, le rapport de ce même cylindre à la figure circonscrite est moindre que son rapport au cône Ψ ; de telle sorte que la figure circonscrite est plus grande que le cône Ψ. Ce qui est impossible, car on a démontré que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ(1). Dès lors, le segment de conoïde n'est pas plus petit que le cône Ψ. Donc, puisqu'il n'est ni plus grand ni plus petit, ce qui a été proposé est démontré.

PROPOSITION XXVI.

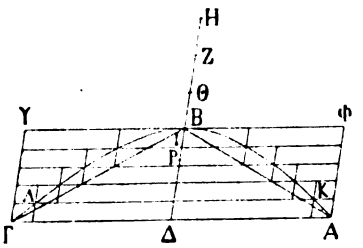
Au reste, lorsqu'un segment d'hyperboloïde de révolution est découpé par un plan non perpendiculaire à l'axe, son rapport au tronçon de cône ayant même base et même axe que le segment sera le même que le rapport d'une droite égale à la somme de l'axe du segment et du triple de la droite ajoutée à l'axe (2) à une droite égale à la somme de l'axe et du double de la droite ajoutée à l'axe.

En effet, soit un segment d'hyperboloïde découpé par un plan, comme nous venons de le dire. La figure étant coupée par un autre plan passant par l'axe, perpendiculairement au plan qui découpe le segment, soit l'hyperbole ABΓ la section de la figure (3), et la droite ΓA la section du plan qui découpe le segment. Soit le point Θ le sommet du cône qui enveloppe le conoïde (4), et menons, par le point B, parallèlement à la droite AΓ, la droite ΦΥ tangente à la section conique. Que cette droite soit d'ailleurs tangente au point B, et prolongeons la droite qui relie le point Θ au point B. Cette dernière droite coupera donc la droite AΓ en deux parties égales (5), le point B sera le sommet du segment, la droite BΔ sera l'axe, et la droite BΘ sera l'ajoutée à l'axe (6). Qu'une droite ΘZ, ainsi qu'une droite ZH, soient égales à la droite BΘ, et, par la droite ΦΥ, élevons un plan parallèle au plan mené suivant la droite AΓ. Ce plan sera donc tangent

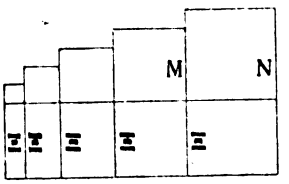
1. On a démontré : $\frac{\text{cyl. entier}}{\text{cône } \Psi} = \frac{ZP}{\Theta P}$, d'où, substituant dans la relation précédente : $\frac{\text{cyl. entier}}{\text{fig. circonscr.}} < \frac{\text{cyl. entier}}{\text{cône } \Psi}$, d'où, comme le texte : fig. circonscr. > cône Ψ ; ce qui est absurde, car on a démontré que fig. circonscrite < cône Ψ.
2. Voir proposition XXV, en note.
3. Voir proposition XI, alinéa 2.
4. C'est-à-dire, le sommet du cône asymptote de l'hyperboloïde.
5. Voir : *De la Quadrature de la Parabole*, proposition I.
6. Voir les Définitions, au préambule du livre.

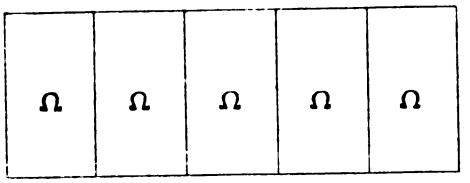
Digitized by Google

au conoïde au point B (1). Et puisque le plan non perpendiculaire à l'axe, mené suivant la droite AΓ, coupe le conoïde, sa section sera une ellipse, tandis que son grand diamètre sera la droite ΓΛ (2). Ayant donc une ellipse décrite autour du diamètre AΓ, et une ligne BΔ élevée du centre dans un plan mené par le diamètre, perpendiculairement au plan dans lequel se trouve l'ellipse, il est possible de trouver un cylindre, ayant son axe dans la droite BΔ, et dans la surface duquel soit située l'ellipse décrite autour du diamètre AΓ (3). Ce cylindre trouvé, on aura, par conséquent, un certain tronçon de cylindre ayant même base et même axe que le segment, tandis que son autre base sera le plan mené suivant la droite ΦΥ. De plus, il sera de nouveau (4) possible de trouver un cône, ayant comme sommet le point B, dans la surface duquel soit située l'ellipse décrite autour du diamètre AΓ (5). Ce cône trouvé, on aura donc un tronçon de cône ayant même base et même axe que le tronçon (6) et que le segment (7). On doit démontrer que le rapport du segment de conoïde au tronçon de cône que nous venons de dire est le même que celui de HΔ à ΔZ (8).









En effet, que le rapport d'un cône Ψ au tronçon de cône soit le même que celui de HΔ à ΔZ. Dès lors, si le segment de conoïde

1. Voir proposition XVI, seconde partie.
2. Voir proposition XIII.
3. Voir proposition IX.
4. C.-à-d. comme dans la proposition XXV.
5. Voir proposition VIII.
6. C.-à-d. que le tronçon de cylindre.
7. Sous-entendu : de conoïde (d'hyperboloïde).
8. On doit donc démontrer :

$$\frac{\text{segment d'hyperboloïde}}{\text{tronçon de cône de même base et même axe}} = \frac{B\Delta + 3B\Theta}{B\Delta + 2B\Theta} = \frac{H\Delta}{Z\Delta}.$$

Digitized by Google

n'est pas équivalent au cône Ψ, qu'il soit plus grand, s'il se peut. Inscrivons une figure solide dans le segment de conoïde et circonscrivons-lui-en une autre qui soient composées de tronçons de cylindre ayant même hauteur ; de telle sorte que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le segment de conoïde excède le cône Ψ (1). Dès lors, puisque la figure circonscrite, plus grande que le segment, excède la figure inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le segment excède le cône Ψ, il est évident que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ (2). Etendons les plans de tous les tronçons inscrits dans le segment jusqu'à la surface du tronçon ayant même base et même axe que le segment ; que la droite BP soit la troisième partie de la droite BΔ, et que les autres constructions soient les mêmes que précédemment (3). Dès lors, et à nouveau, le rapport du premier tronçon qui, dans le tronçon entier, a comme axe ΔE, au premier tronçon qui, dans la figure inscrite, a comme axe ΔE, est le même que celui du carré de AΔ au carré de KE ; car les tronçons qui ont même hauteur ont entre eux même rapport que leurs bases, tandis que leurs bases, vu qu'elles sont des ellipses semblables (4), ont même rapport que les carrés de leurs diamètres homologues (5). Or, le rapport du carré de AΔ au carré de KE est le même que celui du rectangle délimité sous ZΔ, ΔB au rectangle délimité sous ZE, EB, puisque la droite ZΔ est menée du point Θ où les droites les plus rapprochées (6) se rencontrent, tandis que les droites AΔ, KE sont parallèles à la tangente au point B (7). D'ailleurs, le rectangle délimité sous ZΔ, ΔB équivaut

1. Ce qui est possible en vertu de la proposition XX.

2. Par hypothèse : fig. circonscrite — fig. inscrite < segment conoïde — cône Ψ. Or, fig. circonscrite > segment conoïde, d'où : fig. circ. — fig. inscr. < fig. circ. — cône Ψ, ou, comme le texte : fig. inscrite > cône Ψ.

3. C.-à-d. les mêmes que dans la proposition XXV, notamment pour ce qui concerne les aires appliquées aux lignes Ξ = BZ avec leurs carrés excédents dont les côtés diffèrent d'une longueur égale à ΔE.

4. Voir proposition XIV, *in fine*.

5. On aura, en vertu de la proposition VI, corollaire :

$$\frac{1^{er}\text{ tronçon cyl. dans cyl. entier}}{1^{er}\text{ tronçon cyl. dans fig. inscrite}} = \frac{\text{base ellipse de diam. A}\Gamma}{\text{base ellipse de diam. K}\Lambda} = \frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{K\Lambda}^2} = \frac{4\,\overline{A\Delta}^2}{4\,\overline{KE}^2} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{KE}^2}.$$

6. C.-à-d. les plus rapprochées de la courbe, ou les asymptotes.

7. De même que dans la proposition XXV, BΘ est l'ajoutée à l'axe, c'est-à-dire le demi-axe transverse de l'hyperbole. Or, par construction : ΘZ = BΘ, donc BZ est l'axe transverse. Dès lors, vu que les carrés des ordonnées sont proportionnels aux

Digitized by Google

à l'aire Ω, tandis que le rectangle délimité sous ZE, EB équivaut à l'aire ΞM (1). Par conséquent, le rapport du premier tronçon qui, dans le tronçon entier, a comme axe ΔE, au premier tronçon qui, dans la figure inscrite, a comme axe ΔE, est le même que celui de l'aire Ω à l'aire ΞM (2), et le rapport de chacun des autres tronçons qui, dans le tronçon entier, a comme axe une droite égale à ΔE, au tronçon qui, dans la figure inscrite, a même situation et même axe, est le même que le rapport de l'aire Ω à l'aire correspondante d'entre celles qui, appliquées à la droite Ξ, ont un carré comme excédent. Dès lors, on a de nouveau certaines grandeurs, des tronçons dans le tronçon entier, et d'autres grandeurs, des aires dans lesquelles se trouve la lettre Ω, en nombre égal à celui des tronçons, ayant même rapport prises deux à deux. Or, ces tronçons ont un rapport avec les autres tronçons situés dans la figure inscrite, le dernier tronçon étant toutefois sans rapport, tandis que les aires Ω ont ce même rapport avec d'autres aires correspondantes qui, appliquées aux droites Ξ, ont des figures carrées comme excédents, la dernière étant toutefois sans rapport. Il est donc évident que le rapport de la somme des premiers tronçons à la somme des seconds sera le même que celui de la somme des aires Ω à la somme des aires appliquées, exception faite de la plus grande (3). Or, le rapport de la somme des aires Ω à la somme des aires appliquées, la plus grande exceptée, est plus grand que celui de la droite ΞN (4) à une droite égale à la somme de la moitié de la droite Ξ et de la troisième partie de la droite N. Donc, le rapport du tronçon entier à la figure inscrite est plus grand que le rapport de la droite ΞN à une droite égale à la somme de la moitié de Ξ et de la troisième partie de la droite N ; de telle sorte qu'il est aussi plus

---

produits des segments que ces ordonnées déterminent sur l'axe transverse, on aura, comme le texte : $\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{Z\Delta \times \Delta B}{ZE \times EB}$.

1. On a : Ξ = ZB ; côté du carré N = BΔ et côté du carré M = BE, d'où : aire ΞM = (Ξ + M) × M = (ZB + BE) × BE = ZE × BE, et aire ΞN = (Ξ + N) × N = (ZB + BΔ) × BΔ = ZΔ × BΔ. Or, par construction : aire Ω = aire ΞN, d'où : ZΔ × BΔ = aire Ω.

2. L'égalité de la note avant-précédente devient, par substitutions successives :

$$\frac{1^{er} \text{ tronçon cyl. dans cyl. entier}}{1^{er} \text{ tronçon cyl. dans fig. inscrite}} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{K\Lambda}^2} = \frac{Z\Delta \times \Delta B}{ZE \times EB} = \frac{\text{aire } \Xi N}{\text{aire } \Xi M} = \frac{\text{aire } \Omega}{\text{aire } \Xi M}.$$

3. On aura, en vertu de la proposition I :

$$\frac{\sum \text{ tronçons cyl. dans cyl. entier}}{\sum \text{ tronçons cyl. dans fig. inscrite}} = \frac{\sum \text{ aires } \Omega}{\sum \text{ aires appliquées} - \text{aire } \Xi N}.$$

4. C'est-à-dire : de la droite Ξ + N.

Digitized by Google

grand que le rapport de $Z\Delta$ à ΘP (1). Il en résulte donc que le rapport du tronçon entier à la figure inscrite est plus grand que son rapport au cône Ψ ; ce qui est impossible, car il a été démontré que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ (2). En conséquence, le segment de conoïde n'est pas plus grand que le cône Ψ.

D'autre part, si le segment de conoïde est plus petit que le cône Ψ, inscrivons dans le segment une figure solide et circonscrivons-lui-en une autre composées de tronçons de cylindre ayant même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le cône Ψ excède le segment. On démontrera de nouveau, et de la même manière, que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ, et que le rapport du tronçon de cylindre, ayant même base et même axe que le segment, à la figure circonscrite est moindre que son rapport au cône Ψ ; ce qui est impossible (3). Par conséquent, le segment de conoïde n'est pas davantage plus petit que le cône Ψ ; donc, ce qui a été proposé est évident.

PROPOSITION XXVII.

Une figure sphéroïdale quelconque étant coupée par un plan passant par le centre, perpendiculairement à l'axe, la moitié de ce sphé-

---

1. On aura, en vertu de la proposition II : $\frac{\sum \text{aires } \Omega}{\sum \text{aires appliquées} - \text{aire } \Xi N} > \frac{\Xi + N}{\frac{1}{2}\Xi + \frac{1}{3}N}$, d'où, remontant à l'égalité de la note avant-précédente, on aura, à fortiori : $\frac{\text{tronçon cylindre entier}}{\text{figure inscrite}} > \frac{\Xi + N}{\frac{1}{2}\Xi + \frac{1}{3}N}$. Or, $N = B\Delta$; $\Xi = ZB$; $BP = \frac{1}{3}B\Delta$ et $\Theta B = \frac{1}{2}ZB$, d'où : $\frac{1}{2}\Xi = \Theta B$ et $\frac{1}{3}N = BP$, d'où : $\Xi + N = Z\Delta$ et $\frac{1}{2}\Xi + \frac{1}{3}N = \Theta P$, d'où il vient, comme le texte : $\frac{\text{tronçon cylindre entier}}{\text{figure inscrite}} > \frac{Z\Delta}{\Theta P}$.

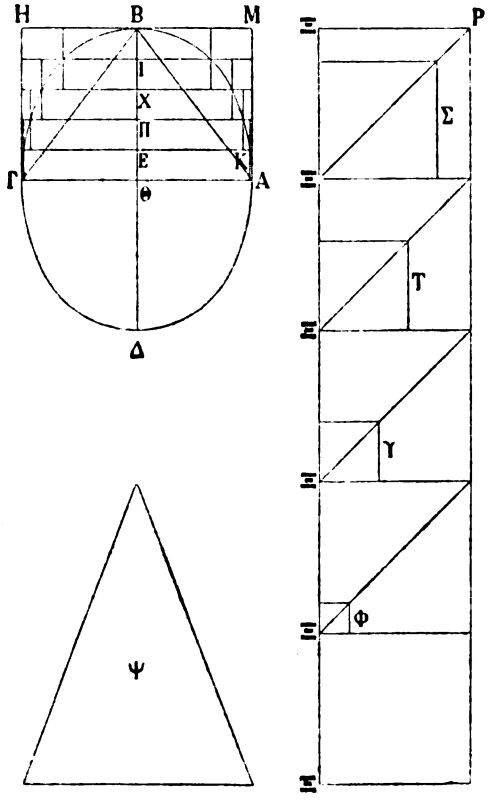
2. Il a été démontré à la proposition XXV (voir note) : $\frac{\text{tronçon cyl. entier}}{\text{cône } \Psi} = \frac{Z\Delta}{\Theta P}$ d'où, substituant dans la relation de la note précédente, on a, comme le texte : $\frac{\text{tronçon cyl. entier}}{\text{fig. inscrite}} > \frac{\text{tronçon cyl. entier}}{\text{cône } \Psi}$, d'où : fig inscr. $<$ cône Ψ ; ce qui est impossible, car on a vu que fig. inscrite $>$ cône Ψ.

3. En raisonnant comme dans la 1re partie de la démonstration, on arrive à la relation : $\frac{\text{tronçon cyl. entier}}{\text{fig. circonscrite}} < \frac{\text{tronçon cyl. entier}}{\text{cône } \Psi}$, d'où : figure circonscrite $>$ cône Ψ ; ce qui est impossible, car, en 2de hypothèse, on a : fig. circonscr. — fig. inscr. $<$ cône Ψ — segment du conoïde. Or, fig. inscrite $<$ segment, d'où : fig. circonscr. — fig. inscr. $<$ cône Ψ — fig. inscr., ou fig. circons. $<$ cône Ψ.

Digitized by Google

roïde est double du cône ayant même base et même axe que le segment (1).

Soit une figure sphéroïdale coupée par un plan passant par le centre perpendiculairement à l'axe. Celle-ci étant coupée par un plan passant par l'axe, soit l'ellipse ABΓΔ la section de la figure (2), soit BΔ le diamètre de l'ellipse ainsi que l'axe du sphéroïde, et soit le point Θ le centre. Il n'importe guère que BΔ soit le plus grand ou le plus petit diamètre de l'ellipse. Soit, d'autre part, la droite ΓA la section du plan qui découpe la figure ; cette droite passera par le centre et formera des angles droits avec la droite BΔ, puisque l'on a supposé que le plan est mené par le centre et qu'il est perpendiculaire à l'axe (3). On doit démontrer que le segment, moitié du sphéroïde, ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme sommet le point B, est double du cône ayant même base et même axe que le segment.



En effet, soit un certain cône dans lequel se trouve la lettre Ψ, double du cône ayant même base que le segment et même axe ΘB; je dis que la moitié du sphéroïde équivaut au cône Ψ.

Dès lors, si la moitié du sphéroïde n'équivaut pas au cône Ψ, qu'elle soit d'abord plus grande, s'il se peut. Inscrivons donc une figure solide dans le segment moitié du sphéroïde,et circonscrivons-lui-en une autre, composées de cylindres ayant même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que celle dont

1. On trouvera la démonstration mécanique de cette proposition à la proposition III, du traité *De la Méthode mécanique.*

2. Voir proposition XI, alinéa 3.

3. Cfr. EUCLIDE, livre XI, proposition XVIII.

Digitized by Google

la moitié du sphéroïde excède le cône Ψ (1). En conséquence, puisque la figure circonscrite, étant plus grande que la moitié du sphéroïde, excède la figure inscrite d'une grandeur moindre que celle dont la moitié du sphéroïde excède le cône Ψ, il est évident que la figure inscrite dans le segment, qui est moitié du sphéroïde, est aussi plus grande que le cône Ψ (2). Soit donc un cylindre ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme axe la droite BΘ. Dès lors, puisque ce cylindre est triple du cône ayant même base et même axe que le segment, tandis que le cône Ψ est double de ce même cône, il est évident que ce cylindre vaut une fois et demie le cône Ψ (3). Prolongeons donc les plans de tous les cylindres dont se compose la figure inscrite jusqu'à la surface du cylindre qui a même base et même axe que le segment. Le cylindre entier sera alors divisé en cylindres, en nombre égal à celui des cylindres situés dans la figure circonscrite, et de grandeur égale à celle du plus grand de ces derniers. Dès lors, disposons des lignes sur lesquelles il y a des lettres Ξ, en nombre égal à celui des segments de la droite BΘ, chacune de grandeur égale à la droite BΘ, et, sur chacune d'elles, construisons un carré, tandis que nous retranchons du dernier carré une équerre ayant une largeur égale à la droite BI. Cette équerre sera donc équivalente au rectangle délimité sous les droites BI, IΔ (4). Retranchons du carré adjacent au précédent une équerre ayant une largeur double de la droite BI ; elle sera équivalente au rectangle délimité sous les droites BX, XΔ. Retranchons successivement du carré suivant une équerre dont la largeur dépasse d'un segment (5) la largeur de l'équerre retranchée du carré précédent ; chacune de ces équerres sera donc équivalente au rectangle

1. Voir proposition XIX.

2. On pose : fig. circonscrite — fig. inscrite $< \frac{1}{2}$ sphéroïde — cône Ψ. Or, fig. circonscrite $> \frac{1}{2}$ sphéroïde, d'où : fig. circonscrite — fig. inscrite < fig. circonscrite — cône Ψ, ou fig. inscrite > cône Ψ.

3. En vertu de la proposition X, alinéa 2 et note, on a : cylindre ΓHMA = 3 cônes ΓBA. Or, par hypothèse : cône Ψ = 2 cônes ΓBA, d'où : cylindre ΓHMA = $\frac{3}{2}$ cônes Ψ.

4. En effet, l'équerre de largeur BI retranchée du carré ΞP est la différence des carrés construits sur ΘB et sur ΘB — BI = ΘI, d'où : équerre = $\overline{\Theta B}^2 - \overline{\Theta I}^2 = [\Theta B - \Theta I]\,[\Theta B + BI] = BI[\Delta\Theta + \Theta I] = BI \times I\Delta$. Cette relation résulte d'ailleurs directement de la prop. V du livre III d'EUCLIDE, énoncée comme suit (traduction PEYRARD, 1809, p. 84) : « Si une droite est coupée en deux parties égales et en deux parties inégales, le rectangle compris sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le carré de la droite qui est placée entre les points de section, est égal au carré de la moitié de cette droite ». C'est-à-dire que dans le cas actuel on a : $BI \times I\Delta + \overline{\Theta I}^2 = \overline{\Theta B}^2$ d'où : $BI \times I\Delta = \overline{\Theta B}^2 - \overline{\Theta I}^2$ = aire équerre.

5. C'est-à-dire d'un segment de la droite ΘB.

Digitized by Google

délimité par des segments de la droite BΔ, dont l'un est égal à la largeur de l'équerre. En conséquence, ce qui reste du second carré sera aussi un carré ayant le côté égal à la droite ΘE. Or, le rapport du premier cylindre qui, dans le cylindre entier, a comme axe ΘE, au premier cylindre qui, dans la figure inscrite, a le même axe ΘE est le même que le rapport du carré de AΘ au carré de KE ; de telle sorte qu'il est aussi le même que celui du rectangle délimité sous BΘ, ΘΔ au rectangle délimité sous BE, EΔ (1). Par conséquent, le rapport de cylindre à cylindre est le même que celui du premier carré à l'équerre retranchée du second carré (2). Et pareillement le rapport de chacun des autres cylindres ayant un axe égal à la droite ΘE au cylindre situé dans la figure inscrite et ayant le même axe est le même que le rapport du carré semblablement rangé à l'équerre retranchée du carré du rang suivant. Dès lors, on a certaines grandeurs, les cylindres situés dans le cylindre entier, et d'autres grandeurs, les carrés construits sur les droites Ξ, Ξ, en même nombre que les cylindres, ayant même rapport prises deux à deux. Or, les cylindres ont rapport avec d'autres grandeurs, les cylindres situés dans la figure inscrite, le dernier n'ayant toutefois pas de rapport, et les carrés ont ce même rapport avec d'autres grandeurs (3) qui ont été retranchées des carrés et qui leur correspondent, le dernier n'ayant toutefois pas de rapport. En conséquence, le rapport de la somme des cylindres situés dans le cylindre entier à la somme des autres cylindres sera le même que celui de la somme des carrés à la somme des équerres qui en ont été retranchées. Dès lors, le rapport du cylindre qui a même base et même axe que le segment à la figure inscrite est le même que celui de la somme des carrés à la somme des équerres qui en ont été retranchées (4). Or, la somme des

1. Les cylindres de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, d'où : $\frac{1^{er}\text{ cyl. du cyl. entier}}{1^{er}\text{ cyl. de la fig. inscr.}} = \frac{\pi \times \overline{A\Theta}^2}{\pi \times \overline{KE}^2} = \frac{\overline{A\Theta}^2}{\overline{KE}^2}$; d'autre part, dans l'ellipse, les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des segments déterminés sur l'axe : $\frac{\overline{A\Theta}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{B\Theta \times \Theta\Delta}{BE \times E\Delta}$, d'où, comme le texte : $\frac{1^{er}\text{ cyl. du cyl. entier}}{1^{er}\text{ cyl. de la fig. inscrite}} = \frac{B\Theta \times \Theta\Delta}{BE \times E\Delta}$.

2. Le 1er carré, de côté Ξ = BΘ, a pour aire $\overline{B\Theta}^2 = B\Theta \times \Theta\Delta$, d'autre part, on a vu dans une note plus haut : équerre retranchée du second carré = BE × EΔ, d'où, substituant dans l'égalité de la note précédente :

$$\frac{1^{er}\text{ cyl. du cyl. entier}}{1^{er}\text{ cyl. de la fig. inscr.}} = \frac{1^{er}\text{ carré}}{\text{équerre du } 2^{d}\text{ carré}}.$$

3. C'est-à-dire les équerres.

4. On aura, en vertu de la proposition I :

Digitized by Google

carrés est plus grande qu'une fois et demie la somme des équerres qui en ont été retranchées. En effet, on a disposé des lignes ΞP, ΞΣ, ΞT, ΞY, ΞΦ qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, la plus petite étant égale à l'excédent, et l'on a d'autres lignes, sur lesquelles il y a deux lettres ΞΞ, en même nombre que les premières, chacune de grandeur égale à la plus grande de celles-ci. Dès lors, la somme des carrés de toutes les lignes, dont chacune est égale à la plus grande, est plus petite que le triple de la somme des carrés des lignes se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, et elle est plus grande que le triple de ce qui reste de cette dernière somme, exception faite du plus grand carré ; car cela a été démontré dans ce que nous avons publié sur les *Spirales* (1). Or, puisque la somme des carrés est plus petite que le triple de la somme des autres carrés qui en ont été retranchés, il est évident qu'elle est plus grande qu'une fois et demie la somme des restes ; donc, elle est plus grande qu'une fois et demie la somme des équerres (2) ; en sorte que le cylindre ayant même base et même axe que le segment est aussi plus grand qu'une fois et demie la figure inscrite. Chose impossible ; car ce cylindre vaut une fois et demie le cône Ψ, et on a démontré que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ (3). En conséquence, la moitié du sphéroïde n'est pas plus grande que le cône Ψ.

$$\frac{\sum \text{cyl. partiels du cyl. entier}}{\sum \text{cyl. partiels de la fig. inscr.}} = \frac{\sum \text{carrés lignes } \Xi}{\sum \text{équerres retranchées}}.$$

ou, comme le texte : $\dfrac{\text{cyl. entier}}{\text{fig. inscrite}} = \dfrac{\sum \text{carrés lignes } \Xi}{\sum \text{équerres retranchées}}$.

1. Archimède invoque ici deux relations dont il a donné une démonstration géométrique dans son livre *Des Spirales* (voir proposition X, corollaire et notes) ; c'est-à-dire que dans la progression arithmétique $a, 2a, 3a, \ldots na$, on aura : $n \times n^2 < 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2]$, et $n \times n^2 > 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2]$. Or, les lignes ΞP, ΞΣ, ΞT, ΞY, ΞΦ, respectivement égales à 5BI, 4BI, 3BI, 2BI, BI, sont donc en progression arithmétique, et l'on aura, comme le texte :

$$\sum \text{carrés des lignes } \Xi < 3[BI^2 + (2BI)^2 + (3BI)^2 + (4BI)^2 + (5BI)^2], \text{ et}$$
$$\sum \text{carrés des lignes } \Xi > 3[(BI)^2 + (2BI)^2 + (3BI)^2 + (4BI)^2].$$

2. La première des deux relations précédentes peut s'écrire :
$3 \sum$ carrés des lignes $\Xi < 2 \sum$ carrés des lignes $\Xi + 3[(BI)^2 + (2BI)^2 + (3BI)^2 + (4BI)^2 + (5BI)^2]$, d'où : $2 \sum$ carrés des lignes $\Xi > 3\{\sum$ carrés des lignes $\Xi - [(BI)^2 + (2BI)^2 + (3BI)^2 + (4BI)^2 + (5BI)^2]\}$. Or, le second membre de cette relation est égal à $3 \sum$ des équerres, d'où, comme le texte : $\sum$ carrés des lignes $\Xi > \frac{3}{2} \sum$ équerres.

3. La relation précédente peut s'écrire sous la forme : $\dfrac{\sum \text{carrés des lignes } \Xi}{\sum \text{équerres}} > \frac{3}{2}$, d'où, substituant dans l'égalité trouvée deux notes plus haut, il vient : $\dfrac{\text{cyl. entier}}{\text{fig. inscrite}} > \frac{3}{2}$, d'où, comme le texte : cylindre entier $> \frac{3}{2}$ figure inscrite ; ce qui est absurde, car on a montré plus haut que cylindre entier $= \frac{3}{2}$ cône Ψ, et que fig. inscrite $>$ cône Ψ, d'où cylindre entier $< \frac{3}{2}$ figure inscrite.

Digitized by Google

Au reste, elle n'est pas plus petite. En effet, qu'elle soit plus petite, s'il se peut. Inscrivons de nouveau une figure solide dans la moitié du sphéroïde ; circonscrivons-lui-en une autre, composées de cylindres ayant même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le cône Ψ excède la moitié du sphéroïde, et que les autres constructions soient les mêmes que les précédentes. Dès lors, puisque la figure inscrite est plus petite que le segment, il est évident que la figure circonscrite est aussi plus petite que le cône Ψ (1). Le rapport du premier cylindre, ayant, dans le cylindre entier, la droite ΘE comme axe, au premier cylindre, ayant, dans la figure circonscrite, la droite ΘE comme axe, est aussi le même que le rapport que possède le premier carré avec lui-même ; et le rapport du second cylindre, ayant, dans le cylindre entier, la droite EΠ comme axe, au second cylindre, ayant, dans la figure circonscrite, la droite EΠ comme axe, est le même que celui du second carré à l'équerre qui en a été retranchée. De plus, le rapport de chacun des autres cylindres, ayant, dans le cylindre entier, un axe égal à la droite ΘE, au cylindre ayant, dans la figure circonscrite, même situation et même axe, est le même que le rapport du carré semblablement rangé à l'équerre qui en a été retranchée. Donc le rapport de la somme des cylindres situés dans le cylindre entier à la somme des cylindres situés dans la figure circonscrite est aussi le même que celui de la somme des carrés à une aire équivalente au premier carré et aux équerres retranchées des carrés restants (2). Enfin, la somme des carrés est plus petite qu'une fois et demie l'aire équivalente au premier carré et aux équerres retranchées des carrés restants, parce qu'elle est plus grande que le triple de la somme des carrés des droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, exception faite du carré de la plus

---

1. On aura en seconde hypothèse : fig. circonscr. — fig. inscr. < cône Ψ — ½ sphéroïde. Or, fig. inscrite < ½ sphéroïde, d'où : fig. circonscr. — fig. inscr. < cône Ψ — fig. inscr., d'où, comme le texte : fig. circonscrite < cône Ψ.

2. 1er cylindre du cylindre entier = 1er cylindre de la figure circonscrite, d'où, comme le texte : $\frac{1^{er}\text{ cyl. dans cyl. entier}}{1^{er}\text{ cyl. dans fig. circonscrite}} = \frac{1^{er}\text{ carré ligne Ξ}}{1^{er}\text{ carré ligne Ξ}}$. D'autre part, on aura pour le 2d cylindre partiel : $\frac{2^{d}\text{ cyl. dans cyl. entier}}{2^{d}\text{ cyl. dans fig. circonscr.}} = \frac{2^{d}\text{ carré ligne Ξ}}{\text{équerre du } 2^{d}\text{ carré}}$ et ainsi de suite pour chacun des cylindres partiels, et l'on aura dès lors, en vertu de la proposition I : $\frac{\sum\text{ cyl. dans cyl. entier}}{\sum\text{ cyl. dans fig. circonscr.}} = \frac{\sum\text{ carrés lignes Ξ}}{1^{er}\text{ carré} + \sum\text{ équerres retranchées}}$.

Digitized by Google

grande (1). Donc, le cylindre ayant même base et même axe que le segment est plus petit qu'une fois et demie la figure circonscrite ; ce qui est impossible, car ce cylindre équivaut à une fois et demie le cône Ψ, et l'on a démontré que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ (2). En conséquence, la moitié du sphéroïde n'est pas plus petite que le cône Ψ ; donc, puisqu'elle n'est ni plus grande ni plus petite, elle lui est équivalente.

PROPOSITION XXVIII.

Au reste, lors même qu'un sphéroïde est coupé par un plan passant par le centre, non perpendiculairement à l'axe, la moitié du sphéroïde sera pareillement double du tronçon de cône ayant même base et même axe que le segment (3).

En effet, coupons une figure sphéroïdale. Coupons-la par un autre plan passant par l'axe, perpendiculaire au plan sécant ; soit l'ellipse ABΓΔ la section de la figure (4), le point Θ son centre, et soit la droite AΓ la section du plan découpant la figure. Cette dernière droite sera menée par le point Θ, puisque l'on suppose le plan mené par le centre. On aura donc une ellipse décrite autour du diamètre AΓ, puisque l'on suppose le plan sécant mené non perpendiculairement à l'axe (5). Menons les droites KΛ, MN, parallèles à la droite AΓ, tangentes à l'ellipse aux points B, Δ, et, par les droites KΛ, MN, élevons des plans parallèles à celui qui passe par la droite ΛΓ. Ces plans

1. Si, comme dans la 1re partie de la démonstration (voir p. 215, note 1), nous appliquons la seconde relation $n \times n^2 > 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2]$, démontrée géométriquement au traité *Des Spirales* (prop. X, coroll. et notes), on aura :

$\sum$ carrés des lignes $\Xi > 3[\overline{BI}^2 + (2BI)^2 + (3BI)^2 + (4BI)^2]$, d'où :

$3\sum$ carrés des lignes $\Xi > 2\sum$ carrés des lignes $\Xi + 3[\overline{BI}^2 + (2BI)^2 + (3BI)^2 + (4BI)^2]$, d'où: $\sum$ carr. des lignes $\Xi < \frac{3}{2}\{\sum$ carr. des lignes $\Xi - [\overline{BI}^2 + (2BI)^2 + (3BI)^2 + (4BI)^2]\}$. Or, $\sum$ carrés des lignes $\Xi - [\overline{BI}^2 + (2BI)^2 + (3BI)^2 + (4BI)^2] = 1^{er}$ carré ligne $\Xi + \sum$ équerres retranchées, d'où, comme le texte : $\sum$ carrés lignes $\Xi < \frac{3}{2}[1^{er}$ carré $+ \sum$ équerres].

2. De même que dans la 1re partie de la démonstration, la relation de la note précédente mènerait à la relation : cylindre entier $< \frac{3}{2}$ figure circonscrite ; ce qui est absurde, puisqu'on a vu que cylindre entier $= \frac{3}{2}$ cône, Ψ et, qu'en seconde hypothèse, on a : fig. circonscrite $<$ cône Ψ, d'où : cylindre entier $> \frac{3}{2}$ figure circonscrite.

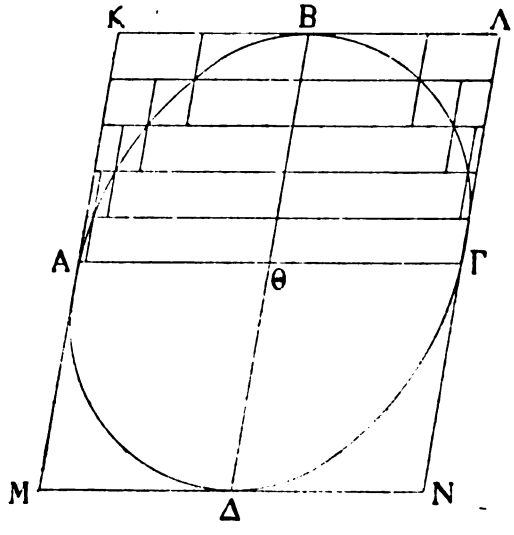
3. On trouvera la démonstration mécanique de cette proposition à la proposition III du traité *De la méthode mécanique*.

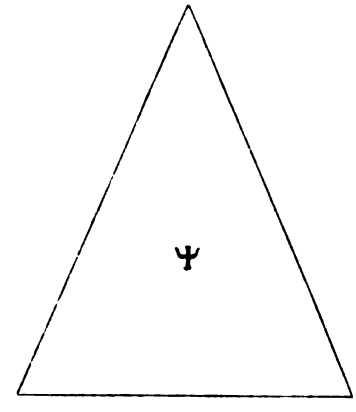
4. Voir proposition XI, alinéa 3.

5. Voir proposition XIV.

Digitized by Google

seront donc tangents au sphéroïde aux points B, Δ (1), la droite de jonction BΔ passera par le point Θ (2), les sommets des segments seront les points B, Δ, et les axes seront les droites BΘ, ΘΔ (3). Dès lors, il est possible de trouver un cylindre, ayant comme axe la droite BΘ, dans la surface duquel soit située l'ellipse décrite autour





du diamètre AΓ (4). Ce cylindre une fois trouvé, on aura un tronçon de cylindre ayant même base et même axe que la moitié du sphéroïde. D'autre part, on peut de nouveau (5) trouver un cône, ayant comme sommet le point B, dans la surface duquel soit située l'ellipse décrite autour du diamètre AΓ (6). Ce cône une fois trouvé, on aura donc un tronçon de cône ayant même base et même axe que le segment. Dès lors, je dis que la moitié du sphéroïde équivaut au double de ce dernier cône.

Soit un cône Ψ double du tronçon de cône. Si la moitié du sphéroïde n'est pas équivalente au cône Ψ, qu'elle soit d'abord plus grande, s'il se peut. Qu'une figure solide soit inscrite dans la moitié du sphéroïde, et qu'une autre lui soit circonscrite, composées de tronçons de cylindre ayant même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite

1. Voir proposition XVI, alinéa 2.
2. Voir proposition XVI, alinéa 3.
3. Voir préambule du livre.
4. Voir proposition IX.
5. C'est-à-dire, comme dans les propositions qui précèdent.
6. Voir proposition VIII.

Digitized by Google

excède celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que celle dont la moitié du sphéroïde excède le cône Ψ (1). Dès lors, nous démontrerons, de la même manière que précédemment (2), que la figure inscrite dans la moitié du sphéroïde est plus grande que le cône Ψ, et que le tronçon (3), ayant même base et même axe que le segment, vaut une fois et demie le cône Ψ, tandis qu'il est plus grand qu'une fois et demie la figure inscrite dans la moitié du sphéroïde ; ce qui est impossible. Donc, la moitié du sphéroïde n'est pas plus grande que le cône Ψ.

Si la moitié du sphéroïde est plus petite qu'une fois et demie le cône Ψ, inscrivons une figure solide dans la moitié du sphéroïde, et circonscrivons-lui-en une autre, composées de tronçons de cylindre ayant même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le cône Ψ excède la moitié du sphéroïde. On démontrera de nouveau, de la même manière que précédemment, que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ, et que le tronçon de cylindre, ayant même base et même axe que le segment, vaut une fois et demie le cône Ψ, tandis qu'il est plus petit qu'une fois et demie la figure circonscrite ; ce qui est impossible. En conséquence, la moitié du sphéroïde ne sera pas davantage plus petite que le cône Ψ. Or, puisqu'elle n'est ni plus grande ni plus petite, elle lui est équivalente ; donc, ce qu'il fallait démontrer est manifeste.

PROPOSITION XXIX.

Le rapport du plus petit segment de toute figure sphéroïde, coupée par un plan perpendiculaire à l'axe, ne passant pas par le centre, au cône ayant même base et même axe que ce segment, est le même que le rapport de la somme de la moitié de l'axe du sphéroïde et de l'axe du plus grand segment à l'axe du plus grand segment.

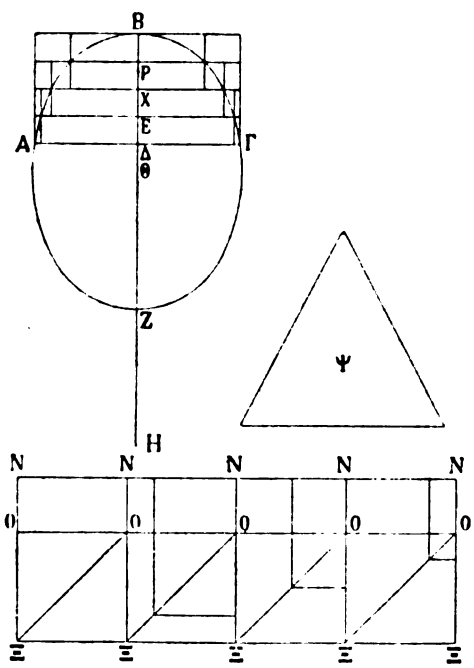
En effet, soit un segment d'une figure sphéroïdale découpé par un plan perpendiculaire à l'axe, ne passant pas par le centre. Ce segment étant coupé par un autre plan passant par l'axe, soit l'ellipse ABΓ la section de la figure (4), BZ le diamètre de la section et l'axe du sphé-

1. Voir proposition XX.
2. C.-à-d. en suivant les mêmes voies que dans la proposition XXVI.
3. Sous-entendu : « du cylindre ».
4. Voir proposition XI, alinéa 3.

Digitized by Google

roïde. Soit le point Θ le centre, et soit la droite AΓ la section du plan qui découpe le segment ; cette droite formera des angles droits avec la droite BZ, puisque l'on a supposé que le plan est perpendiculaire à l'axe (²). Que le segment découpé, ayant le point B comme sommet, soit plus petit que la moitié de la figure sphéroïdale, et que la droite ZH soit égale à la droite BΘ. On doit démontrer que le rapport du segment, ayant pour sommet le point B, au cône, ayant même base et même axe que le segment, est le même que le rapport de la droite ΔH à la droite ΔZ (¹).

Soit donc un cylindre ayant même base et même axe que le plus petit segment, et que le rapport d'un cône, dans lequel se trouve la lettre Ψ, au cône, ayant même base (²), soit le même que le rapport de ΔH à ΔZ. Je dis que le cône Ψ est équivalent au segment ayant comme sommet le point B.



En effet, s'il n'est pas équivalent, qu'il soit d'abord plus petit, s'il se peut. Qu'une figure solide soit donc inscrite dans le segment, et qu'une autre lui soit circonscrite, composées de cylindres ayant même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite excède la figure inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le segment de sphéroïde excède le cône Ψ (³). Dès lors, puisque la figure circonscrite, plus grande que le segment, excède la figure inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le segment excède le cône, il est évident que la figure inscrite est aussi plus grande que le cône Ψ (⁴). Soit BP la troisième partie de BΔ. Donc,

1. Euclide, livre XI, proposition 18.
2. Il faut démontrer : $\frac{\text{segment de sphéroïde ABΓ}}{\text{cône inscrit ABΓ}} = \frac{\frac{1}{2}BZ + \Delta Z}{\Delta Z} = \frac{\Delta H}{\Delta Z}$.
3. C'est-à-dire ayant même base et même axe que le segment de sphéroïde.
4. Voir proposition XIX.
5. On pose : fig. circonscr. — fig. inscr. < segment de sphéroïde — cône Ψ. Or, fig. circonscr. > segment de sphéroïde, d'où : fig. circonscr. — fig. inscr. < fig. circonscr. — cône Ψ ou, comme le texte ; fig. inscrite > cône Ψ.

Digitized by Google

puisque BH est le triple de BΘ, alors que BΔ est le triple de BP, il est évident que ΔH est le triple de ΘP (1) ; par conséquent, le rapport du cylindre, ayant même base que le segment et comme axe BΔ, au cône, ayant même base et même axe, est le même que le rapport de ΔH à ΘP (2). Or, le rapport du cône, que nous venons de dire, au cône Ψ est le même que celui de ΔZ à ΔH ; par conséquent, les rapports étant dissemblablement ordonnés, le rapport du cylindre, ayant même base et même axe que le segment, au cône Ψ sera le même que le rapport de ΔZ à ΘP (3). Disposons maintenant des lignes sur lesquelles se trouvent des lettres Ξ, N, en nombre égal à celui des segments de la droite BΔ, chacune de grandeur égale à la droite ZΔ, et chacune des droites ΞO étant égale à la droite BΔ. Chacune des droites NO sera donc double de la droite ΘΔ (4). Appliquons à chacune des premières droites (5) une aire ayant une largeur égale à la droite BΔ ; de telle sorte que chacune des figures possédant une diagonale soit un carré. Retranchons de la première aire une équerre ayant une largeur égale à la droite BE ; de la seconde une équerre de largeur égale à la droite BX, et, pour chacune des autres, retranchons, de la même manière, de l'aire suivante, une équerre dont la largeur soit plus petite d'un segment que la largeur de l'équerre retranchée avant elle. Dès lors, l'équerre retranchée de la première aire sera équivalente au rectangle délimité sous les droites BE, EZ (6), et le reste sera l'aire, appliquée à la droite NO, dont l'excédent est

---

1. On a, par construction : ZH = BΘ, d'où : BH = 3 BΘ, et on pose : BP = $\frac{1}{3}$ BΔ, d'où : BΔ = 3 BP, d'où : BH — BΔ = 3(BΘ — BP), ou, comme le texte : ΔH = 3 ΘP.

2. On a : cyl. de base AΓ et de hauteur ΔB = 3 cônes de base AΓ et de hauteur ΔB, d'où : $\frac{\text{cyl. de base } A\Gamma}{\text{cône de base } A\Gamma} = 3$. Or : $\frac{\Delta H}{\Theta P} = 3$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{cyl. de base } A\Gamma}{\text{cône de base } A\Gamma} = \frac{\Delta H}{\Theta P}$.

3. On a posé : $\frac{\text{cône } \Psi}{\text{cône de base } A\Gamma, \text{ d'axe } B\Delta} = \frac{\Delta H}{\Delta Z}$ ou, comme le texte : $\frac{\text{cône de base } A\Gamma, \text{ d'axe } B\Delta}{\text{cône } \Psi} = \frac{\Delta Z}{\Delta H}$; d'où, combinant par produit avec l'égalité de la note précédente, il vient, comme le texte : $\frac{\text{cyl. de base } A\Gamma, \text{ d'axe } B\Delta}{\text{cône } \Psi} = \frac{\Delta Z}{\Theta P}$, résultat qui s'obtient d'ailleurs directement en vertu de la proposition 23 du livre V d'Euclide, par raison d'identité dans la proportion troublée.

4. On a pris ΞN = ZΔ et ΞO = BΔ, d'où : NO = ΞN — ΞO = ZΔ — BΔ = (BΘ + ΘΔ) — (BΘ — ΘΔ) = 2 ΘΔ.

5. C'est-à-dire aux droites ΞN.

6. Considérant l'équerre à branches inégales, retranchée de la 1re aire (du côté droit de la figure), et en observant que ΞN = ZΔ et ΞO = BΔ, on aura :

Aire 1re équerre = ZΔ × BΔ — EΔ[ZΔ — BE] = ZΔ[BΔ — EΔ] + EΔ × BE = ZΔ × BE + EΔ × BE = BE[ZΔ + EΔ] = BE × EZ.

Digitized by Google

une figure carrée, ayant le côté excédent égal à la droite ΔE. L'équerre retranchée de la seconde aire sera équivalente au rectangle délimité sous les droites ZX, XB, et le reste sera l'aire appliquée à la droite NO, ayant comme excédent une figure carrée ; et il en sera de même pour les autres. D'autre part, prolongeons les plans de tous les cylindres dont se compose la figure inscrite dans le segment jusqu'à la surface du cylindre ayant même base et même axe que le segment. Dès lors, le cylindre entier sera divisé en cylindres, en nombre égal à celui des cylindres situés dans la figure circonscrite, et de grandeur égale à celle du plus grand de ces derniers. En conséquence, le rapport du premier cylindre, ayant comme axe la droite ΔE dans le cylindre entier, au premier cylindre, ayant comme axe la droite ΔE dans la figure inscrite, est le même que le rapport du carré de ΔΓ au carré de KE (1). Or, ce dernier rapport est le même que celui du rectangle délimité sous les droites BΔ, ΔZ au rectangle délimité sous les droites BE, EZ (2) ; par conséquent, le rapport de cylindre à cylindre est le même que celui de la première aire à l'équerre qui en a été retranchée (3). Et pareillement, le rapport de chacun des autres cylindres, ayant un axe égal à la droite ΔE, dans le cylindre entier, au cylindre, situé semblablement dans la figure inscrite et de même axe, est le même que le rapport de l'aire, semblablement rangée, à l'équerre qui en a été retranchée. On a donc certaines grandeurs, les cylindres situés dans le cylindre entier, et d'autres grandeurs, les aires, appliquées aux droites ΞN, de largeur égale à la droite BΔ, en même nombre que les cylindres, ayant même rapport prises deux à deux (4). Or, les cylindres ont rapport avec d'autres cylindres situés dans la

1. Ces cylindres de même hauteur sont entre eux comme les bases :

$$\frac{1^{er}\text{ cyl. dans cyl. entier}}{1^{er}\text{ cyl. dans fig. inscr.}} = \frac{\pi \times \overline{\Delta\Gamma}^2}{\pi \times \overline{KE}^2} = \frac{\overline{\Delta\Gamma}^2}{\overline{KE}^2}.$$

2. Les droites ΔΓ, KE sont les ordonnées des points Γ, E, leurs carrés sont donc proportionnels aux produits des segments déterminés sur l'axe : $\frac{\overline{\Delta\Gamma}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{B\Delta \times \Delta Z}{BE \times EZ}$.

3. Les égalités des deux notes précédentes donnent :

$$\frac{1^{er}\text{ cyl. dans cyl. entier}}{1^{er}\text{ cyl. dans fig. inscr.}} = \frac{B\Delta \times \Delta Z}{BE \times EZ}.$$

Or, la 1re aire appliquée à la droite ΞN = BΔ × ΔZ, et on a vu plus haut que l'aire retranchée de cette 1re aire = BE × EZ, d'où :

$$\frac{1^{er}\text{ cyl. dans cyl. entier}}{1^{er}\text{ cyl. dans fig. inscr.}} = \frac{1^{re}\text{ aire appliquée à }\Xi N}{\text{équerre retranchée}}.$$

4. Attendu que les cylindres partiels du cylindre entier sont égaux et que les aires appliquées aux lignes ΞN sont égales.

Digitized by Google

figure inscrite, le dernier n'ayant toutefois pas de rapport ; tandis que les aires ont ce même rapport avec d'autres aires (1) qui en ont été retranchées et qui leur correspondent, la dernière n'ayant toutefois pas de rapport (2). En conséquence, il est évident que le rapport de la somme des cylindres à la somme des autres cylindres (3) est le même que celui de la somme des aires à la somme des équerres. Dès lors, le rapport du cylindre, ayant même base et même axe que le segment, à la figure inscrite dans le segment est le même que celui de la somme des aires à la somme des équerres (4). Et, puisque l'on a disposé certaines lignes égales, sur lesquelles il y a les lettres N, O ; que sur chacune d'elles on a appliqué certaines aires ayant une figure carrée comme excédent, les côtés des excédents se dépassant l'un l'autre d'une même grandeur, et la grandeur dont ils se dépassent étant égale au plus petit côté ; tandis que l'on a d'autres aires, appliquées aux lignes ΞN, ayant une largeur égale à la droite BΔ, en même nombre que les premières (5), chacune de même grandeur que la plus grande, il est évident que le rapport de la somme des aires, dont chacune est égale à la plus grande, à la somme des autres aires est moindre que le rapport de la droite ΞN à une droite égale à la somme de la moitié de la droite NO et de la troisième partie de la droite ΞO (6). Donc, il est clair que le rapport de la somme de ces premières aires à la somme des équerres sera plus grand que celui de la droite ΞN à une droite égale à la moitié de la droite NO et aux deux tiers de la droite ΞO (7). Il s'ensuit que le rapport du cylindre, ayant même base et même axe que le segment, à la figure, inscrite dans le segment,

1. C'est-à-dire les équerres.
2. Car il n'a pas été retranché d'équerre à l'aire appliquée à la dernière ligne ΞN.
3. C'est-à-dire des cylindres partiels de la figure inscrite.
4. On aura donc en vertu de la proposition I :

$$\frac{\sum \text{cyl. partiels du cyl. entier}}{\sum \text{cyl. partiels de la fig. inscr.}} = \frac{\sum \text{aires appliquées}}{\sum \text{équerres retranchées}},$$

d'où : $\dfrac{\text{cyl. de base A}\Gamma\text{, d'axe B}\Delta}{\text{fig. inscrite au segment}} = \dfrac{\sum \text{aires appliquées}}{\sum \text{équerres retranchées}}$.

5. C'est-à-dire en même nombre que les aires appliquées aux lignes NO.
6. On aura donc en vertu de la proposition II :

$$\frac{\sum \text{aires appliquées aux lignes } \Xi N}{\sum \text{aires appliquées aux lignes NO avec leurs excédents carrés}} < \frac{\Xi N}{\frac{1}{2}NO + \frac{1}{3}\Xi O}.$$

7. La relation précédente devient par différence :

$$\frac{\sum \text{aires appliquées aux droites } \Xi N}{\sum \text{aires appl. aux droites } \Xi N - \sum \text{aires appl. aux droites NO avec leurs excédents}} > \frac{\Xi N}{\Xi N - \left[\frac{1}{2}NO + \frac{1}{3}\Xi O\right]}.$$

Or, $\sum$ aires appliquées droites ΞN — $\sum$ aires appliquées aux

Digitized by Google

est plus grand que celui de la droite ΞN à une droite égale à la somme de la moitié de la droite NO et des deux tiers de la droite ΞO. Or, la droite ΞN est égale à la droite ΔZ, la moitié de la droite NO est égale à la droite ΔΘ, et les deux tiers de la droite ΞO valent la droite ΔP ; par conséquent, le rapport du cylindre entier à la figure inscrite dans le segment est plus grand que celui de la droite ΔZ à la droite ΘP (1). Or, on a démontré que le rapport de ce cylindre au cône Ψ est le même que celui de ΔZ à ΘP ; par conséquent, son rapport à la figure inscrite sera plus grand que son rapport au cône Ψ; ce qui est impossible, car il a été démontré que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ (2). Dès lors, le segment de sphéroïde n'est pas plus grand que le cône Ψ.

Mais qu'il soit plus petit, s'il se peut. Dès lors, inscrivons de nouveau une figure solide dans le segment et circonscrivons-lui-en une autre, composées de cylindres ayant même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le cône Ψ excède le segment (3), et que les autres constructions soient les mêmes que précédemment. En conséquence, puisque la figure inscrite est plus petite que le segment, tandis que la figure circonscrite excède la figure inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le cône Ψ excède le segment, il est évident que la figure circonscrite est aussi plus petite que le cône Ψ (4). Le rapport

---

droites NO avec leurs excédents = $\sum$ équerres et, d'autre part, $\Xi N - [\frac{1}{2} NO + \frac{1}{3} \Xi O] = NO + \Xi O - [\frac{1}{2} NO + \frac{1}{3} \Xi O] = \frac{1}{2} NO + \frac{2}{3} \Xi O$, d'où, comme le texte :

$$\frac{\sum \text{ aires appliquées aux droites } \Xi N}{\sum \text{ équerres}} > \frac{\Xi N}{\frac{1}{2} NO + \frac{2}{3} \Xi O}.$$

1. Remontant de l'inégalité de la note précédente à l'égalité trouvée quelques notes plus haut, il vient, comme le texte : $\frac{\text{cyl. de base } A\Gamma, \text{ d'axe } B\Delta}{\text{fig. inscrite au segment}} > \frac{\Xi N}{\frac{1}{2} NO + \frac{2}{3} \Xi O}$. Or, par construction : $\Xi N = \Delta Z$, et on a démontré que $NO = 2\,\Delta\Theta$, d'où : $\frac{1}{2} NO = \Delta\Theta$. De plus, on a posé : $BP = \frac{1}{3} B\Delta$, d'où : $\Delta P = B\Delta - BP = B\Delta - \frac{1}{3} B\Delta = \frac{2}{3} B\Delta = \frac{2}{3} \Xi O$, d'où, par substitution, il vient : $\frac{\text{cyl. entier}}{\text{fig. inscrite segment}} > \frac{\Delta Z}{\Delta\Theta + \Delta P}$ ou, comme le texte : $\frac{\text{cyl. entier}}{\text{fig. inscrite segment}} > \frac{\Delta Z}{\Theta P}$.

2. On a démontré : $\frac{\text{cyl. entier}}{\text{cône } \Psi} = \frac{\Delta Z}{\Theta P}$, d'où, en présence de la relation précédente, il vient : $\frac{\text{cyl. entier}}{\text{fig. inscrite}} > \frac{\text{cyl. entier}}{\text{cône } \Psi}$, d'où : fig. inscrite < cône Ψ ; ce qui est absurde, car on a démontré (voir note) que fig. inscrite > cône Ψ.

3. Voir proposition XIX.

4. On a en 2de hypothèse : fig. circonscr. — fig. inscr. < cône Ψ — segment sphéroïde. Or, fig. inscrite < segment sphéroïde, d'où :
fig. circonscr. — fig. inscr. < cône Ψ — fig. inscr., d'où : fig. circonscrite < cône Ψ.

Digitized by Google

du premier cylindre, ayant comme axe la droite ΔE dans le cylindre entier, au premier cylindre, ayant le même axe dans la figure circonscrite, est de nouveau identique à celui que possède avec elle-même la dernière des aires qui, appliquées à une droite ΞN, ont une largeur égale à la droite BΔ ; car ces grandeurs sont égales entre elles de part et d'autre. D'autre part, le rapport du second cylindre, ayant un axe égal à la droite ΔE dans le cylindre entier, au cylindre, situé de même dans la figure circonscrite, est le même que le rapport de la première des aires, appliquées à une droite ΞN et ayant une largeur égale à la droite BΔ, à l'équerre qui en a été retranchée. Et pareillement, le rapport de chacun des autres cylindres, ayant un axe égal à la droite ΔE dans le cylindre entier, au cylindre de même rang, situé dans la figure circonscrite, est le même que le rapport de l'aire, correspondante parmi celles qui sont appliquées à une droite ΞN, à l'équerre qui en a été retranchée ; la dernière aire étant considérée comme étant la première. Par conséquent, pour les mêmes motifs que précédemment, le rapport de la somme des cylindres, situés dans le cylindre entier, à la somme des cylindres, situés dans la figure circonscrite, est le même que celui de la somme des aires, appliquées à la droite ΞN, à une aire équivalente à l'aire située la dernière prise avec les équerres retranchées des autres aires (1). Dès lors, puisqu'il a été démontré que le rapport de la somme des aires, appliquées à la droite ΞN, à la somme des aires qui, exception faite de la plus grande, sont appliquées à la droite NO avec une figure carrée comme excédent, est plus grand que le rapport de la droite ΞN à une droite égale à la somme de la moitié de la droite NO et de la troisième partie de la droite ΞO, il est évident que le rapport de la somme de ces mêmes aires à la somme des aires restantes, équivalente à l'aire située la dernière prise avec les équerres retranchées des autres aires, est moindre que le rapport de la droite ΞN à une droite égale à la somme de

1. 1er cyl. partiel du cyl. entier = 1er cyl. partiel de la figure inscrite, donc : $\frac{\text{1er cyl. du cyl. entier}}{\text{1er cyl. de la fig. circonscr.}} = \frac{\text{aire appliquée à la droite ΞN}}{\text{aire appliquée à la droite ΞN}} = 1$. Pour le 2d cylindre partiel on a : $\frac{\text{2d cyl. du cyl. entier}}{\text{2d cyl. de la fig. circonscrite}} = \frac{\text{1re aire appliquée à ΞN de largeur BΔ}}{\text{équerre retranchée de largeur BE}}$, et ainsi de suite pour chacun des cylindres partiels, d'où, en vertu de la proposition I, on aura, de même que dans la proposition XXVII :

$$\frac{\Sigma \text{ cyl. du cyl. entier}}{\Sigma \text{ cyl. de la fig. circonscrite}} = \frac{\Sigma \text{ aires appliquées aux droites ΞO}}{\text{dernière aire appliquée} + \text{équerres retranchées}}.$$

Digitized by Google

la moitié de la droite NO et aux deux tiers de la droite ΞO (1). Dès lors, il est évident aussi que le rapport du cylindre, ayant même base et même axe que le segment, à la figure circonscrite est moindre que celui de ZΔ à ΘP (2). Or, le rapport du cylindre que nous venons de dire au cône Ψ est le même que celui de ΔZ à ΘP ; par conséquent, le rapport de ce cylindre à la figure circonscrite est moindre que son rapport au cône Ψ ; ce qui est impossible, car il a été démontré que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ (3). Donc, le segment de sphéroïde n'est pas plus petit que le cône. Dès lors, puisqu'il n'est ni plus grand ni plus petit, il est équivalent.

PROPOSITION XXX.

Au reste, lorsqu'un sphéroïde n'est pas coupé (4) perpendiculairement à l'axe, ni par le centre, le rapport de son plus petit segment au tronçon de cône, ayant même base et même axe que le segment, est le même que celui d'une droite, égale à la somme de la moitié de la droite reliant les sommets des segments obtenus et de l'axe du plus grand segment, à l'axe du plus grand segment.

En effet, coupons une figure sphéroïde comme nous l'avons dit.

1. On aura en vertu de la proposition II :
$$\frac{\sum \text{aires appliquées aux droites } \Xi N}{\sum \text{aires appl. aux droit. NO avec les excéd.— la plus grande de ces aires}} > \frac{\Xi O}{\frac{1}{2}NO+\frac{1}{3}\Xi O}$$
d'où, par différence :
$$\frac{\sum \text{aires appliquées aux droites } \Xi N}{\sum \text{aires appl. droit. } \Xi N - [\sum \text{aires appl. droit. NO avec les excéd.— la plus grande}]} < \frac{\Xi N}{\Xi N-[\frac{1}{2}NO+\frac{1}{3}\Xi O]}.$$ Or, on a :
$\sum$ aires appliquées ΞN — [$\sum$ aires appliquées NO avec excédents—la plus grande] = dernière aire appliquée à la droite ΞN + équerres retranchées. D'autre part, on a : $\Xi N-[\frac{1}{2}NO+\frac{1}{3}\Xi O]=NO+\Xi O-\frac{1}{2}NO-\frac{1}{3}\Xi O=\frac{1}{2}NO+\frac{2}{3}\Xi O$, d'où, comme le texte :
$$\frac{\sum \text{aires appliquées aux droites } \Xi N}{\text{dernière aire appliquée à } \Xi N+\text{équerres retranchées}} < \frac{\Xi N}{\frac{1}{2}NO+\frac{2}{3}\Xi O}.$$

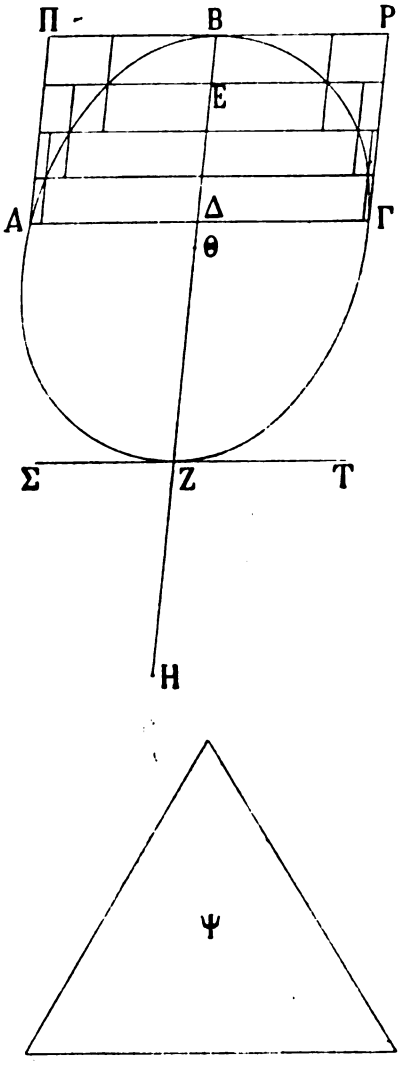
2. On a vu dans une note précédente que : $\frac{\Xi N}{\frac{1}{2}NO+\frac{2}{3}\Xi O}=\frac{\Delta Z}{\Theta P}$, d'où, substituant dans la relation précédente, puis comparant avec la relation de la note avant-précédente, il vient comme le texte: $\frac{\sum \text{cyl. dans cyl. entier}}{\sum \text{cyl. de la fig. circonscrite}}=\frac{\text{cyl. entier}}{\text{fig. circonscrite}}<\frac{\Delta Z}{\Theta P}$.

3. On a démontré plus haut que : $\frac{\text{cyl. entier}}{\text{cône } \Psi}=\frac{\Delta Z}{\Theta P}$, d'où, substituant dans la relation précédente : $\frac{\text{cyl. entier}}{\text{fig. circonscrite}}<\frac{\text{cyl. entier}}{\text{cône } \Psi}$, d'où : fig. circonscrite > cône Ψ; ce qui est absurde, car on a vu que fig. circonscrite < cône Ψ.

4. Sous-entendu : par un plan.

Digitized by Google

Ce segment étant coupé par un autre plan passant par l'axe, perpendiculairement au plan sécant, soit l'ellipse ABΓ la section de la figure (1), et la droite ΓA la section du plan qui découpe la figure. Menons les droites ΠP, ΣT parallèlement à la droite AΓ, tangentes à la section conique aux points B, Z, et faisons passer par ces droites des plans parallèles au plan mené par la droite AΓ. Ces plans sont tangents au sphéroïde aux points B, Z (2), et les sommets des segments seront les points B, Z. Menons la droite reliant les sommets des segments, et soit BZ cette droite ; elle passera d'ailleurs par le centre (3). De plus, soit Θ le centre du sphéroïde et de l'ellipse. Dès lors, puisque l'on a supposé la figure coupée par un plan non perpendiculaire à l'axe, la section est une ellipse, et son diamètre est la droite ΓA (4). Prenons un cylindre, ayant son axe suivant la droite BΔ, dans la surface duquel soit l'ellipse décrite autour du diamètre AΓ (5), et prenons un cône ayant son sommet au point B, dans la surface duquel soit l'ellipse décrite autour du diamètre AΓ (6). On aura donc un certain tronçon de cylindre ayant même base et même axe que le segment, ainsi qu'un tronçon de cône ayant même base et même axe que le segment. On doit démontrer que le rapport du segment de sphéroïde, dont le sommet est B, au tronçon de cône, ayant même base et même axe que le segment, est le même que le



1. Voir proposition XI, alinéa 3.
2. Voir proposition XVI, alinéa 2.
3. Voir proposition XVI, alinéa 3.
4. Voir proposition XIV.
5. Voir proposition IX.
6. Voir proposition VIII.

Digitized by Google

rapport de ΔH à ΔZ. Soit d'ailleurs une droite ZH égale à la droite ΘZ (1).

Prenons un certain cône dans lequel se trouve la lettre Ψ, dont le rapport au cône ayant même base et même axe que le segment soit le même que celui de ΔH à ΔZ. Si le segment de sphéroïde n'est pas équivalent au cône Ψ, qu'il soit d'abord plus grand, s'il se peut. Dès lors, qu'une figure solide soit inscrite dans le segment et qu'une autre lui soit circonscrite, composées de cylindres ayant même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le segment de sphéroïde excède le cône Ψ (2). Nous démontrerons, de la même manière que précédemment, que la figure inscrite est plus grande que le cône Ψ, et que le rapport du tronçon de cylindre, ayant même base et même axe que le segment, à la figure inscrite est plus grand que son rapport au cône Ψ ; ce qui est impossible. Donc, le segment de sphéroïde ne sera pas plus grand que le cône Ψ.

Mais qu'il soit plus petit, s'il se peut. Dès lors, inscrivons de nouveau une figure solide dans le segment et circonscrivons-lui-en une autre, composées de tronçons de cylindre ayant même hauteur, de telle sorte que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'une grandeur moindre que celle dont le cône Ψ excède le segment (3). Nous démontrerons de nouveau, de la même manière, que la figure circonscrite est plus petite que le cône Ψ, et que le rapport du tronçon de cylindre, ayant même base et même axe que le segment, à la figure circonscrite est moindre que son rapport au cône Ψ ; ce qui est impossible. Donc, le segment ne sera pas davantage plus petit que le cône. Dès lors, ce qu'il fallait démontrer est manifeste.

PROPOSITION XXXI.

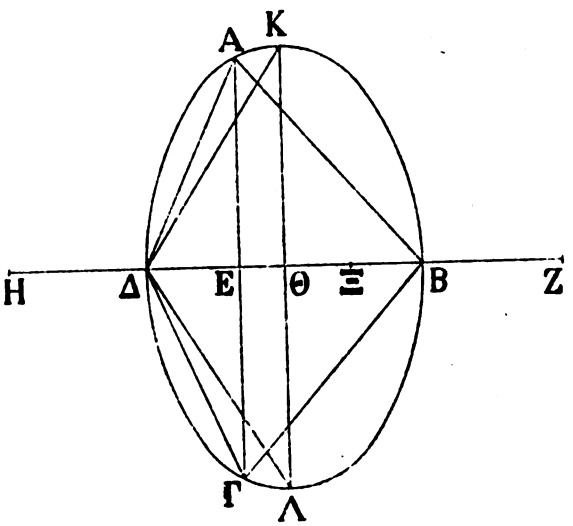
Le rapport du plus grand segment de toute figure sphéroïdale coupée par un plan perpendiculaire à l'axe, ne passant pas par le centre, au cône ayant même base et même axe que ce segment est le

1. On doit démontrer : $\frac{\text{segment de sphéroïde}}{\text{cône de même base et de même axe}} = \frac{\frac{1}{2}BZ + \Delta Z}{\Delta Z} = \frac{\Delta H}{\Delta Z}$.
2. Voir proposition XX.
3. Voir proposition XX.

Digitized by Google

même que le rapport d'une droite égale à la somme de la moitié de l'axe du sphéroïde et de l'axe du plus petit segment à l'axe du plus petit segment.

Coupons un sphéroïde comme nous l'avons dit. Celui-ci étant coupé par un autre plan passant par l'axe, perpendiculairement au plan sécant, soit l'ellipse ABΓ la section de la figure, BΔ son diamètre, axe de la figure (1), et soit la droite ΓA la section du plan sécant ; cette droite sera perpendiculaire à la droite BΔ. D'autre part, que le plus grand segment soit celui dont le sommet est le point B, et soit Θ le centre du sphéroïde. Ajoutons une droite ΔH égale à la droite ΔΘ et une droite BZ égale à la même droite. On doit démontrer que le rapport du segment de sphéroïde, dont le sommet est le point B, au cône ayant même base et même axe que le segment est le même que le rapport de EH à EΔ (2).



Coupons donc le sphéroïde par un plan passant par le centre, perpendiculairement à l'axe, et, sur le cercle ainsi déterminé (3), construisons un cône ayant son sommet au point Δ. Dès lors, le sphéroïde entier est double du segment ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre KΛ et comme sommet le point Δ ; tandis que le segment que nous venons de dire est double du cône ayant même base et même axe que ce segment. En conséquence, le sphéroïde entier est quadruple du cône que nous avons dit (4). Or, le rapport de ce cône au cône, ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme sommet le point Δ, est le même que celui

1. Voir proposition XI, alinéa 3.

2. On doit donc démontrer : $\frac{\text{segment de sphéroïde AKBΛΓ}}{\text{cône ABΓ}} = \frac{\frac{1}{2}\Delta B + E\Delta}{E\Delta} = \frac{EH}{E\Delta}$.

3. Voir proposition XI, alinéa 3.

4. En vertu de la proposition XVIII, on a : sphéroïde entier = 2 segments KΔΛ. Or, en vertu de la proposition XXVII : segment sphéroïde KΔΛ = 2 cônes KΔΛ, d'où, comme le texte : sphéroïde entier = 4 cônes KΔΛ.

Digitized by Google

qui se compose du rapport de ΘΔ à EΔ et du rapport du carré de KΘ au carré de EA (1), et le rapport du carré de KΘ au carré de EA est le même que celui du rectangle délimité sous BΘ, ΘΔ au rectangle délimité sous BE, EA (2). Que le rapport de ΞΔ à ΘΔ soit le même que celui de ΘΔ à EΔ ; en conséquence, le rapport du rectangle délimité sous les droites ΞΔ, BΘ au rectangle délimité sous les droites BΘ, ΘΔ sera aussi le même que celui de ΘΔ à ΔE. Or, le rapport, composé de celui du rectangle sous ΞΔ, ΘB au rectangle sous BΘ, ΘΔ et de celui du rectangle sous BΘ, ΘΔ au rectangle sous BE, EΔ, est le même que celui du rectangle sous ΞΔ, BΘ au rectangle sous BE, EΔ ; par conséquent, le rapport du cône, ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre KΛ et comme sommet le point Δ, au cône, ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme sommet le point Δ, est le même que celui du rectangle délimité sous les droites ΞΔ, BΘ au rectangle délimité sous les droites BE, EΔ (3). Or, le rapport du cône, ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre AΓ et comme sommet le point Δ, au segment de sphéroïde, ayant même base et même axe que le cône, est le même que celui du rectangle délimité sous les droites BE, EΔ au rectangle délimité sous les droites ZE, EΔ (4) ; par conséquent, le rapport du

---

1. On a, en vertu de la proposition X : $\frac{\text{cône } K\Delta\Lambda}{\text{cône } A\Delta\Gamma} = \frac{\Theta\Delta}{E\Delta} \times \frac{\pi\overline{K\Theta}^2}{\pi\overline{EA}^2} = \frac{\Theta\Delta}{E\Delta} \times \frac{\overline{K\Theta}^2}{\overline{EA}^2}$.

2. KΘ et EA étant les ordonnées des points K, A dont les carrés sont proportionnels aux produits des segments déterminés sur l'axe, on aura, comme le texte : $\frac{\overline{K\Theta}^2}{\overline{EA}^2} = \frac{B\Theta \times \Theta\Delta}{BE \times E\Delta}$.

3. Les relations qui précèdent à partir de la note précédente se déduisent comme suit : on choisit le point Ξ tel que l'on ait : $\frac{\Xi\Delta}{\Theta\Delta} = \frac{\Theta\Delta}{E\Delta}$, d'où l'on peut écrire, comme le texte : $\frac{\Xi\Delta \times B\Theta}{B\Theta \times \Theta\Delta} = \frac{\Theta\Delta}{E\Delta}$, d'où, comparant cette relation, ainsi que celle de la note précédente avec celle de la note avant-précédente, il vient :

$$\frac{\text{cône } K\Delta\Lambda}{\text{cône } A\Delta\Gamma} = \frac{\Xi\Delta \times B\Theta}{B\Theta \times \Theta A} \times \frac{B\Theta \times \Theta\Delta}{BE \times E\Delta} = \frac{\Xi\Delta \times \Theta B}{BE \times E\Delta}.$$

4. Considérant le plus petit segment AΔΓ du sphéroïde, on aura, en vertu de la proposition XXIX : $\frac{\text{cône } A\Delta\Gamma}{\text{segment } A\Delta\Gamma} = \frac{BE}{B\Theta + BE} = \frac{BE}{ZE} = \frac{BE \times E\Delta}{ZE \times E\Delta}$.

Le texte présente à cet endroit une phrase grammaticalement incorrecte qui reproduit, inutilement d'ailleurs et à peu près, l'énoncé de la proposition XXIX, et que Heiberg considère comme un commentaire interpolé (cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 433 note) : « C'est-à-dire le rapport de BE à EZ, car il a été démontré que le rapport d'un (segment) plus petit que la moitié d'un sphéroïde au cône qui a même base et même axe que le segment est le même que celui d'une (droite) égale à la

Digitized by Google

cône, situé dans la moitié du sphéroïde, au segment du sphéroïde, moindre que sa moitié, est le même que celui du rectangle délimité sous les droites ΞΔ, BΘ au rectangle délimité sous les droites ZE, EΔ (1). Dès lors, puisque le rapport du sphéroïde entier au cône, situé dans la moitié du sphéroïde, est le même que celui du rectangle, délimité sous les droites ZH, ΞΔ, au rectangle délimité sous les droites BΘ, ΞΔ (2), et que le rapport du cône, situé dans la moitié du sphéroïde, au segment, plus petit que la moitié du sphéroïde, est le même que le rapport du rectangle délimité sous les droites ΞΔ, BΘ à celui qui est délimité sous les droites ZE, EΔ, le rapport du sphéroïde entier au segment moindre que sa moitié sera aussi le même que celui du rectangle délimité sous les droites ZH, ΞΔ au rectangle délimité sous les droites ZE, EΔ (3) ; de telle sorte que le rapport du plus grand segment de sphéroïde au plus petit est aussi le même que celui de l'excédent du rectangle, délimité sous ZH, ΞΔ, sur le rectangle, délimité sous ZE, EΔ, au rectangle délimité sous ZE, EΔ (4). Or, le rectangle sous ZH, ΞΔ excède le rectangle sous ZE, EΔ du rectangle délimité sous ΞΔ, EH et du rectangle délimité sous ZE, ΞE ; par conséquent, le rapport du plus grand segment du sphéroïde au plus petit est le même que celui de l'aire équivalente à l'ensemble du rectangle, délimité sous ΞΔ, EH, et du rectangle, délimité sous ZE, ΞE, au rectangle délimité sous ZE, EΔ (5). Or, le rapport

somme de la moitié de l'axe du sphéroïde et de l'axe du plus grand segment à l'axe du plus grand segment, ce qui est le rapport de ZE à BE. »

1. Combinant les égalités des deux notes précédentes, il vient, comme le texte :
$$\frac{\text{cône } K\Delta\Lambda}{\text{segment } A\Delta\Gamma} = \frac{\Xi\Delta \times \Theta B}{ZE \times E\Delta}.$$

2. On a démontré plus haut (voir note) : sphéroïde entier = 4 cônes KΔΛ, et l'on a posé : ΔH = BZ = ΔΘ, d'où : ZH = 4 BΘ, d'où : ZH × ΞΔ = 4 BΘ × ΞΔ, d'où, comme le texte : $\frac{\text{sphéroïde entier}}{\text{cône } K\Delta\Lambda} = \frac{ZH \times \Xi\Delta}{B\Theta \times \Xi\Delta}$.

Le texte porte ici ce petit commentaire interpolé : « car chacun d'eux est quadruple ».

3. Les relations des deux notes précédentes combinées par produit donnent, comme le texte : $\frac{\text{sphéroïde entier}}{\text{segment } A\Delta\Gamma} = \frac{ZH \times \Xi\Delta}{ZE \times E\Delta}$.

4. La relation précédente donne par différence :
$$\frac{\text{sphéroïde entier} - \text{segment } A\Delta\Gamma}{\text{segment } A\Delta\Gamma} = \frac{\text{segment } AB\Gamma}{\text{segment } A\Delta\Gamma} = \frac{ZH \times \Xi\Delta - ZE \times E\Delta}{ZE \times E\Delta}.$$

5. On a ZH = EH + ZE, ou ZH × ΞΔ = EH × ΞΔ + ZE × ΞΔ, d'où : ZH × ΞΔ − ZE × EΔ = EH × ΞΔ + ZE × ΞΔ − ZE × EΔ = EH × ΞΔ + ZE[ΞΔ − EΔ] = EH × ΞΔ + ZE × ΞE, d'où, substituant dans la relation de la note précédente, il vient, comme le texte : $\frac{\text{segment } AB\Gamma}{\text{segment } A\Delta\Gamma} = \frac{\Xi\Delta \times EH + ZE \times \Xi E}{ZE \times E\Delta}$.

Digitized by Google

du plus petit segment du sphéroïde au cône, ayant même base et même axe, est le même que le rapport du rectangle, délimité sous ZE, EΔ, au rectangle délimité sous BE, EΔ (1) ; tandis que le rapport du cône, situé dans le plus petit segment, au cône, situé dans le plus grand segment, est le même que celui du rectangle, délimité sous BE, EΔ, au carré de BE ; car ces cônes sont dans le rapport de leurs hauteurs, puisqu'ils ont même base (2) ; par conséquent, le rapport du plus grand segment de sphéroïde au cône qui lui est inscrit est le même que celui de l'aire, équivalente à l'ensemble du rectangle délimité sous les droites ΞΔ, EH et du rectangle délimité sous les droites ZE, ΞE, au carré de BE (3). Or, ce dernier rapport est le même que celui de EH à EΔ. En effet, le rapport du rectangle sous ΞΔ, EH au rectangle sous ΞΔ, EΔ est le même que celui de EH à EΔ, et le rapport du rectangle, délimité sous ΞE, ZE, au rectangle, délimité sous ZE, ΘE, est le même que celui de EH à EΔ ; car le rapport de ΞE à ΘE est le même que celui de EH à EΔ, parce que les droites ΞΔ, ΘΔ, ΔE sont proportionnelles et que la droite HΔ est égale à la droite ΘΔ (4). Donc, le rapport de l'aire, équivalente à l'ensemble du rectangle sous ΞΔ, EH et du rectangle sous ZE, ΞE, à l'aire, équivalente à l'ensemble du rectangle sous ΞΔ, EΔ et du rectangle sous ZE, ΘE, est

---

1. Le texte présente ici une petite interpolation : « car ce rapport est le même que celui de ZE à BE. »

Il résulte d'ailleurs de la proposition XXIX, comme on l'a déjà vu dans une note plus haut, que $\frac{\text{segment } A\Delta\Gamma}{\text{cône } A\Delta\Gamma} = \frac{B\Theta + BE}{BE} = \frac{ZE}{BE} = \frac{ZE \times E\Delta}{BE \times E\Delta}$, d'où, combinant avec l'égalité de la note précédente, on aura la relation intermédiaire, que le texte passe sous silence : $\frac{\text{segment } AB\Gamma}{\text{cône } A\Delta\Gamma} = \frac{\Xi\Delta \times EH + ZE \times \Xi E}{BE \times E\Delta}$.

2. Les cônes AΔΓ, ABΓ qui ont même base sont entre eux dans le rapport composé des bases et des hauteurs (proposition X), d'où :

$$\frac{\text{cône } A\Delta\Gamma}{\text{cône } AB\Gamma} = \frac{E\Delta}{BE} \times \frac{\overline{AE}^2}{\overline{AE}^2} = \frac{E\Delta}{BE} \times \frac{BE \times E\Delta}{BE \times E\Delta} = \frac{BE \times E\Delta}{\overline{BE}^2}.$$

3. Combinant les relations des deux notes précédentes, il vient, comme le texte : $\frac{\text{segment } AB\Gamma}{\text{cône } AB\Gamma} = \frac{\Xi\Delta \times EH + ZE \times \Xi E}{\overline{BE}^2}$.

4. On peut écrire : $\frac{\Xi\Delta \times EH}{\Xi\Delta \times E\Delta} = \frac{EH}{E\Delta}$ (I). D'autre part, on a pris le point Ξ tel que : $\frac{\Xi\Delta}{\Theta\Delta} = \frac{\Theta\Delta}{E\Delta}$, d'où : $\frac{\Xi\Delta - \Theta\Delta}{\Theta\Delta} = \frac{\Theta\Delta - E\Delta}{E\Delta}$, ou $\frac{\Xi\Theta}{\Theta\Delta} = \frac{\Theta E}{E\Delta}$, d'où : $\frac{\Xi\Theta}{\Theta E} = \frac{\Theta\Delta}{E\Delta}$, ou $\frac{\Xi\Theta}{\Theta E} = \frac{\Delta H}{E\Delta}$, d'où : $\frac{\Xi\Theta + \Theta E}{\Theta E} = \frac{\Delta H + E\Delta}{E\Delta}$, ou, comme le texte : $\frac{\Xi E}{\Theta E} = \frac{EH}{E\Delta}$, d'où l'on peut écrire, comme le texte : $\frac{\Xi E \times ZE}{ZE \times \Theta E} = \frac{EH}{E\Delta}$ (II).

Digitized by Google

le même que le rapport de EH à EΔ (1). Or, le carré de EB vaut l'aire équivalente à l'ensemble du rectangle délimité sous ΞΔ, EΔ et du rectangle délimité sous ZE, ΘE ; car le carré de BΘ équivaut au rectangle délimité sous les droites ΞΔ, EΔ, tandis que l'excédent du carré de BE sur le carré de BΘ équivaut au rectangle délimité sous les droites ZE, ΘE, puisque les droites BΘ, BZ sont égales (2). Il est donc évident que le rapport du plus grand segment du sphéroïde au cône, ayant même base et même axe que le segment, est le même que celui de EH à EΔ (3).

PROPOSITION XXXII.

Au reste, lorsqu'un sphéroïde est coupé par un plan non perpendiculaire à l'axe, et ne passant pas par le centre, le rapport de son plus grand segment au tronçon de cône ayant même base et même axe que ce segment est le même que celui d'une droite, égale à la somme de la moitié de la droite reliant les sommets des segments obtenus et de l'axe du plus petit segment, à l'axe du plus petit segment.

Coupons un sphéroïde par un plan, comme nous l'avons dit. Ce segment étant coupé par un autre plan passant par l'axe, perpendicu-

1. Les relations précédentes (I) et (II) donnent : $\frac{\Xi\Delta \times EH}{\Xi\Delta \times E\Delta} = \frac{\Xi E \times ZE}{ZE \times \Theta E}$ d'où, par permutation : $\frac{\Xi\Delta \times EH}{\Xi E \times ZE} = \frac{\Xi\Delta \times E\Delta}{ZE \times \Theta E}$, d'où, par addition : $\frac{\Xi\Delta \times EH + \Xi E \times ZE}{\Xi E \times ZE} = \frac{\Xi\Delta \times E\Delta + ZE \times \Theta E}{ZE \times \Theta E}$ d'où, par permutation, il vient, comme le texte : $\frac{\Xi\Delta \times EH + \Xi E \times ZE}{\Xi\Delta \times E\Delta + ZE \times \Theta E} = \frac{\Xi E \times ZE}{ZE \times \Theta E} = \frac{EH}{E\Delta}$.

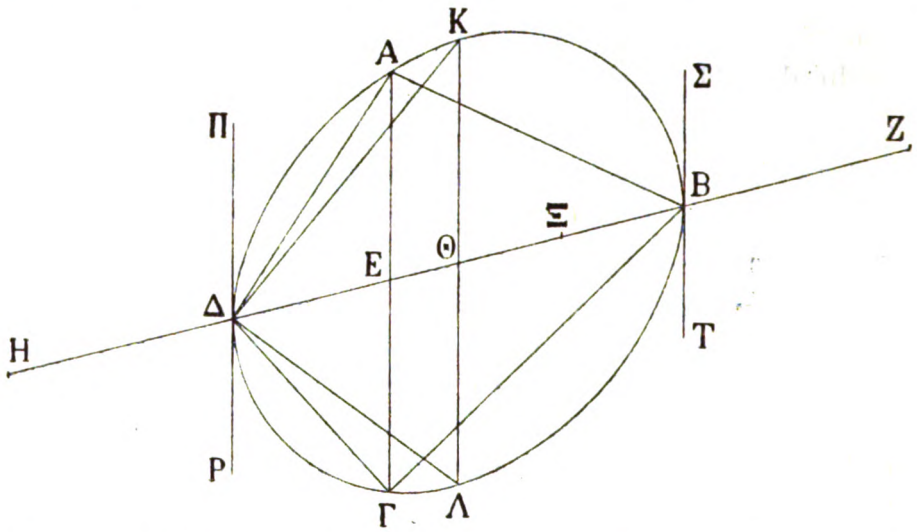
2. La relation $\frac{\Xi\Delta}{\Theta\Delta} = \frac{\Theta\Delta}{E\Delta}$ donne, en observant que $B\Theta = \Theta\Delta$, comme le texte : $\overline{B\Theta}^2 = \Xi\Delta \times E\Delta$. D'autre part : $EB = B\Theta + \Theta E$, d'où : $\overline{EB}^2 = \overline{B\Theta}^2 + \overline{\Theta E}^2 + 2\,B\Theta \times \Theta E = B\Theta^2 + [2\,B\Theta + \Theta E]\Theta E$, d'où, observant que $B\Theta = BZ$, il vient, comme le texte : $\overline{EB}^2 - \overline{B\Theta}^2 = [BZ + B\Theta + \Theta E]\Theta E = ZE \times \Theta E$, d'où, substituant la valeur de $\overline{B\Theta}^2$, il vient, comme le texte : $\overline{EB}^2 = \Xi\Delta \times E\Delta + ZE \times \Theta E$.

3. Substituant la valeur de $\overline{EB}^2$ dans la relation trouvée plus haut : $\frac{\text{segment } AB\Gamma}{\text{cône } AB\Gamma} = \frac{\Xi\Delta \times EH + ZE \times \Xi E}{\overline{EB}^2}$, il vient : $\frac{\text{segment } AB\Gamma}{\text{cône } AB\Gamma} = \frac{\Xi\Delta \times EH + ZE \times \Xi E}{\Xi\Delta \times E\Delta + ZE \times \Theta E}$. Or, on a vu dans la note précédente que le second membre de cette relation est égal à $\frac{EH}{E\Delta}$, d'où il vient finalement, comme le texte :

$$\frac{\text{plus grand segment du sphéroïde}}{\text{cône de même base et de même axe}} = \frac{EH}{E\Delta} = \frac{\frac{1}{2}\Delta B + E\Delta}{E\Delta}.$$

Digitized by Google

lairement au plan sécant, soit l'ellipse ABΓΔ la section de la figure(1), et la droite ΓA la section du plan qui découpe la figure. Menons les droites ΠP, ΣT parallèlement à la droite AΓ, tangentes à l'ellipse aux points B, Δ, et faisons passer par ces droites des plans parallèles au plan mené par la droite AΓ. Ces plans sont tangents au sphéroïde aux points B, Δ (2), et les sommets des segments seront les points B,



Δ. Menons la droite BΔ reliant les sommets des segments obtenus ; cette droite passe donc par le centre (3). De plus, soit Θ le centre ; que le segment, dont le sommet est le point B, soit plus grand que la moitié du sphéroïde ; ajoutons une droite ΔH égale à la droite ΔΘ, ainsi qu'une droite BZ égale à cette même droite. On doit démontrer que le rapport du plus grand segment du sphéroïde au cône, ayant même base et même axe que ce segment, est le même que celui de EH à EΔ (4).

En effet, coupons le sphéroïde par un plan passant par le centre, parallèlement au plan mené par la droite AΓ ; inscrivons dans la moitié du sphéroïde un tronçon de cône ayant comme sommet le point Δ, et que le rapport de ΞΔ à ΘΔ soit le même que celui de ΘΔ à EΔ. On démontrera, de la même manière que précédem-

1. Voir proposition XI, alinéa 3.
2. Voir proposition XVI, alinéa 2.
3. Voir proposition XVI, alinéa 3.
4. On doit donc démontrer ; $\frac{\text{segment de sphéroïde AKBΛΓ}}{\text{cône ABΓ}} = \frac{\frac{1}{2}\,\Delta B + E\Delta}{E\Delta} = \frac{EH}{E\Delta}$.

Digitized by Google

ment (1), que le rapport du tronçon de cône, inscrit dans la moitié du sphéroïde, au tronçon de cône, inscrit dans son plus petit segment, est le même que celui du rectangle, délimité sous les droites ΞΔ, BΘ, au rectangle délimité sous les droites BE, EΔ, et que le rapport du tronçon de cône, inscrit dans le plus petit segment, au segment, dans lequel il est inscrit, est le même que celui du rectangle, délimité sous les droites BE, EΔ, au rectangle délimité sous les droites ZE, EΔ. Dès lors, le rapport du tronçon de cône, inscrit dans la moitié du sphéroïde, au plus petit segment du sphéroïde est le même que celui du rectangle, délimité sous les droites ΞΔ, BΘ, au rectangle délimité sous les droites ZE, EΔ (2). D'ailleurs, le rapport du sphéroïde entier au tronçon de cône inscrit dans la moitié du sphéroïde est le même que celui du rectangle, délimité sous les droites ZH, ΞΔ, au rectangle délimité sous les droites BΘ, ΞΔ ; car ils sont respectivement quadruples l'un de l'autre (3), et le rapport du tronçon de cône, que nous venons de dire, au plus petit segment du sphéroïde est le même que celui du rectangle, délimité sous les droites ΞΔ, BΘ, au rectangle délimité sous les droites ZE, EΔ. Il s'ensuit donc que le rapport du sphéroïde entier à son plus petit segment sera le même que celui du rectangle, délimité sous les droites ZH, ΞΔ, au rectangle délimité sous les droites ZE, EΔ (4). Or, le rapport du plus grand segment lui-même au plus petit est le même que celui de l'excédent du rectangle, délimité sous les droites ZH, ΞΔ, sur le rectangle, délimité sous les droites ZE, EΔ, au rectangle délimité sous les droites ZE, EΔ (5). D'autre part, le rapport du plus petit segment au

1. Voir proposition XXXI.

2. On pose : $\frac{\Xi\Delta}{\Theta\Delta}=\frac{\Theta\Delta}{E\Delta}$, on aura donc en raisonnant comme pour la proposition XXXI : $\frac{\text{cône } K\Delta\Lambda}{\text{cône } A\Delta\Gamma}=\frac{\Xi\Delta\times B\Theta}{BE\times E\Delta}$ et $\frac{\text{cône } A\Delta\Gamma}{\text{segment } A\Delta\Gamma}=\frac{BE\times E\Delta}{ZE\times E\Delta}$, d'où, comme le texte : $\frac{\text{cône } K\Delta\Lambda}{\text{segment } A\Delta\Gamma}=\frac{\Xi\Delta\times B\Theta}{ZE\times E\Delta}$.

3. On démontrerait, comme dans la proposition XXXI (voir note), que sphéroïde entier = 4 cônes KΔΛ. Or, on a posé : ΔH = BZ = BΘ, d'où : ZH = 4 BΘ, d'où : $ZH\times\Xi\Delta=4\,B\Theta\times\Xi\Delta$; donc : $\frac{\text{sphéroïde entier}}{\text{cône } K\Delta\Lambda}=\frac{ZH\times\Xi\Delta}{B\Theta\times\Xi\Delta}$.

4. Combinant les relations des deux notes précédentes, il vient, comme le texte : $\frac{\text{sphéroïde entier}}{\text{segment } A\Delta\Gamma}=\frac{ZH\times\Xi\Delta}{ZE\times E\Delta}$.

5. La relation précédente donne par différence :
$\frac{\text{sphéroïde entier} - \text{segment } A\Delta\Gamma}{\text{segment } A\Delta\Gamma}=\frac{\text{segment } AB\Gamma}{\text{segment } A\Delta\Gamma}=\frac{ZH\times\Xi\Delta - ZE\times E\Delta}{ZE\times E\Delta}$.

Digitized by Google

tronçon de cône qui lui est inscrit est le même que celui du rectangle sous ZE, EΔ au rectangle sous BE, EΔ, et le rapport du tronçon de cône, inscrit dans le plus petit segment, au tronçon de cône, inscrit dans le plus grand segment, est le même que celui du rectangle sous BE, EΔ au carré de BE ; car les tronçons de cône que nous venons de dire sont dans le rapport de leurs hauteurs, puisqu'ils ont même base, et que leurs hauteurs sont dans le rapport de ΔE à EB (1). En conséquence, le rapport du plus grand segment du sphéroïde au tronçon de cône qui lui est inscrit est le même que celui de l'excédent du rectangle sous HZ, ΞΔ sur le rectangle sous ZE, EΔ au carré de BE (2). On démontrerait, comme précédemment, que ce dernier rapport est le même que celui de la droite EH à la droite EΔ (3).

---

1. La relation $\frac{\text{cône } A\Delta\Gamma}{\text{segment } A\Delta\Gamma} = \frac{BE \times E\Delta}{ZE \times E\Delta}$ obtenue plus haut, et que le texte présente inversement, combinée avec la relation de la note précédente donne :

$$\frac{\text{segment } AB\Gamma}{\text{cône } A\Delta\Gamma} = \frac{ZE \times \Xi\Delta - ZE \times E\Delta}{BE \times E\Delta},$$

relation intermédiaire, non mentionnée par le texte. D'autre part, les cônes AΔΓ, ABΓ de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et ces hauteurs sont entre elles comme les hypoténuses ΔE, BE des triangles rectangles semblables que ces hauteurs forment avec la base AΓ, d'où, comme le texte : $\frac{\text{cône } A\Delta\Gamma}{\text{cône } AB\Gamma} = \frac{\Delta E}{BE} = \frac{BE \times E\Delta}{\overline{BE}^2}$.

2. La combinaison des deux relations de la note précédente donne, comme le texte : $\frac{\text{segment } AB\Gamma}{\text{cône } AB\Gamma} = \frac{ZH \times \Xi\Delta - ZE \times E\Delta}{\overline{BE}^2}$.

3. Voir les notes relatives à la fin de la démonstration de la proposition XXXI.

Digitized by Google

DES SPIRALES

Digitized by Google

Digitized by Google

DES SPIRALES

Archimède à Dosithée, Salut !

La plupart des démonstrations des théorèmes que j'avais envoyés à Conon, et que tu me mandes sans cesse de t'écrire, tu les possèdes en réalité dans les livres qu'Héraclide t'a remis ; mais je t'en envoie encore quelques-unes écrites dans ce livre-ci. Ne sois toutefois pas surpris de ce que j'ai beaucoup tardé à publier les démonstrations de ces théorèmes ; car il s'est fait que j'ai voulu les présenter d'abord à des mathématiciens experts qui préféraient les rechercher eux-mêmes. Cependant, en géométrie, combien n'y a-t-il pas de questions, ne paraissant pas faciles au début, et qui ont été résolues avec le temps? Toutefois, Conon est mort avant d'avoir eu le temps nécessaire pour étudier ces questions ; sinon il les aurait trouvées et rendues évidentes, et aurait fait progresser la géométrie par beaucoup d'autres de ses découvertes ; car nous savons qu'il était d'une habileté peu ordinaire en mathématiques et d'une activité remarquable. Cependant, bien que plusieurs années se soient écoulées depuis la mort de Conon, je n'ai vu personne qui se soit appliqué à l'un de ces problèmes.

Je vais toutefois les énoncer ici chacun en particulier, et il conviendra de placer à leur suite deux de ces problèmes que, moi-même, je n'ai guère pu mener à bonne fin ; en sorte que ceux qui prétendent les avoir trouvés tous, sans en produire aucune démonstration, sont confondus par le fait même de déclarer ainsi avoir trouvé une démonstration impossible (1).

1. Le texte de la phrase qui précède semble avoir été altéré dans quelques mots qui diffèrent d'après les manuscrits. Nous avons adopté la leçon proposée dans l'édition critique d'HEIBERG. (Cf. *loc. cit.*, vol. II, p. 4-5.)

Digitized by Google

J'ai cru à propos de t'exposer la nature de ces problèmes, autant de ceux dont tu possèdes déjà des démonstrations écrites que de ceux dont je t'envoie les démonstrations dans le présent livre.

Le premier problème était donc le suivant : étant donnée une sphère, trouver une aire plane équivalente à l'aire de la sphère. Ce problème a été rendu manifeste pour la première fois à la suite des choses qui ont été publiées dans le livre *De la Sphère ;* car, une fois démontré que l'aire de la sphère est quadruple du plus grand cercle de cette sphère (1), il est évident qu'il est possible de trouver une aire plane équivalente à l'aire de la sphère.

D'autre part, voici quel était le second problème : un cône ou un cylindre étant donné, trouver une sphère équivalente à ce cône ou à ce cylindre (2).

Le troisième était : couper une sphère donnée par un plan, de telle sorte que ses segments soient entre eux dans un rapport donné (3).

Le quatrième : couper une sphère donnée par un plan, de telle sorte que les segments de sa surface soient entre eux dans un rapport donné (4).

Le cinquième : rendre un segment de sphère donné semblable à un segment de sphère donné (5).

Le sixième : étant donnés deux segments d'une même sphère ou de différentes sphères, trouver un segment de sphère semblable à l'un des segments, et dont l'aire soit équivalente à celle de l'autre segment (6).

Le septième : d'une sphère donnée séparer un segment par un plan, de manière que le segment soit au cône, ayant même base et même hauteur que ce segment, dans un rapport donné plus grand que celui de trois à deux (7).

Héraclide t'a transmis les démonstrations de tous les problèmes précités ; mais ceux qui avaient été mis séparément à leur suite étaient faux. C'étaient d'ailleurs les suivants : si une sphère est coupée en parties inégales par un plan, le rapport du plus grand segment au plus petit est le carré du rapport de la plus grande aire à la plus petite.

1. Voir : *De la Sphère et du Cylindre,* livre I, proposition XXXIII.
2. *Ibidem,* livre II, proposition I.
3. *Ibidem,* livre II, proposition IV.
4. *Ibidem,* livre II, proposition III.
5. *Ibidem,* livre II, proposition V.
6. *Ibidem,* livre II, proposition VI.
7. *Ibidem,* livre II, proposition VII.

Digitized by Google

Il est clair que cela est faux en conséquence des propositions qui te furent envoyées précédemment ; car on trouve, parmi elles, notamment la suivante : si une sphère est coupée en parties égales par un plan perpendiculaire à un diamètre quelconque de la sphère, le rapport du plus grand segment de l'aire au plus petit sera le même que celui du plus grand segment du diamètre au plus petit, et le rapport du plus grand segment de la sphère au plus petit sera moindre que le carré du rapport de la plus grande aire à la plus petite, mais supérieur à ce rapport multiplié une fois et demie par lui-même (1).

Ce dernier problème mis à part était également faux : si le diamètre d'une sphère quelconque est coupé de telle sorte que le carré du plus grand segment soit triple du carré du plus petit segment, et, si un plan mené par le point (2), perpendiculairement au diamètre, coupe la sphère, la figure constituant le plus grand segment de la sphère est la plus grande de tous les segments ayant même aire. Or, il est évident que cela est faux en conséquence des problèmes qui te furent déjà communiqués ; car il a été démontré que l'hémisphère est le plus grand des segments de la sphère compris sous une même aire (3).

Après ces problèmes venaient les suivants, relatifs au cône (4) : si une parabole, dont le diamètre est fixe, tourne de manière à avoir ce diamètre comme axe, nous appellerons la figure circonscrite par la parabole un conoïde, et, si un plan est tangent à la figure conoïdale, tandis qu'un autre plan, mené parallèlement au plan tangent, découpe un certain segment du conoïde, nous appellerons plan sécant la base du segment découpé, et sommet le point de contact de l'autre plan avec le conoïde (5). Si maintenant la figure en question est coupée par un plan perpendiculaire à l'axe, il est évident que la section sera un cercle ; mais il faut démontrer que le segment découpé vaut une fois et demie le cône ayant même base et même hauteur que le segment (6). D'autre part, si deux segments sont découpés d'un conoïde par des plans menés d'une manière quelconque, il est évident que les sections seront des ellipses si les plans sécants ne sont pas perpendi-

1. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre II, proposition VIII.
2. C'est-à-dire par le point de division du diamètre.
3. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre II, proposition IX.
4. Il s'agit en réalité du conoïde au lieu du cône.
5. Définitions reprises du préambule du livre *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*.
6. Voir : *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XXI.

Digitized by Google

culaires à l'axe (1), et il faut démontrer que le rapport qu'ont entre eux ces segments, sera le même que celui des carrés des droites menées, de leurs sommets aux plans sécants, parallèlement à l'axe (2). Les démonstrations de ces dernières propositions ne t'ont cependant pas encore été envoyées.

Après cela venaient des problèmes, dont il va être question, relatifs à la spirale, qui constituent pour ainsi dire un autre genre de problèmes, n'ayant rien de commun avec ceux que nous avons rappelés jusqu'ici, et dont je t'ai écrit les démonstrations dans ce livre-ci ; les voici d'ailleurs :

Lorsqu'une droite, dont une extrémité est fixe, tourne uniformément dans un plan, reprenant la position d'où elle est partie, et que, sur la droite en rotation, un point se meut uniformément comme elle à partir de l'extrémité fixe, le point décrira une spirale dans le plan. Dès lors, je dis que l'aire, comprise entre la spirale et la droite replacée dans la position d'où elle est partie, vaut le tiers du cercle décrit de l'extrémité fixe comme centre, et dont le rayon est la droite que le point a parcourue pendant une révolution de la droite. D'autre part, si une droite est tangente à la spirale en son extrémité obtenue en dernier lieu, et si, sur la droite qui a tourné et repris sa place, on élève en son extrémité fixe une perpendiculaire jusqu'à sa rencontre avec la tangente, je dis que la droite ainsi menée à la rencontre est égale à la circonférence du cercle (3). Ensuite, si la droite tournante, ainsi que le point se mouvant sur elle, font plusieurs révolutions et reprennent la position d'où la droite est partie, je dis que l'aire ajoutée par la spirale au cours de la troisième révolution est double de celle qui a été ajoutée au cours de la seconde, l'aire ajoutée au cours de la quatrième est triple, celle ajoutée au cours de la cinquième est quadruple, et, par continuation, les aires ajoutées au cours des révolutions suivantes seront des multiples, dans l'ordre des nombres, de l'aire ajoutée au cours de la seconde révolution ; tandis que l'aire embrassée au cours de la première révolution sera la sixième partie de l'aire ajoutée au cours de la seconde révolution.

Enfin, lorsque, sur une spirale décrite en une seule révolution, l'on

1. Voir : *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XII.
2. *Ibidem*, proposition XXIV.
3. C'est-à-dire du cercle dit « premier » ayant comme rayon la droite qui va de l'extrémité de la droite génératrice au point de tangence.

Digitized by Google

prend deux points d'où l'on mène des droites de jonction avec l'extrémité fixe de la droite tournante, si l'on décrit deux cercles ayant le point fixe comme centre et les droites menées vers l'extrémité fixe de la droite comme rayons, et si l'on prolonge la plus petite des droites menées, je dis que le rapport de l'aire, comprise entre l'arc du plus grand cercle situé du côté de la spirale, entre les droites, la spirale et la droite prolongée, à l'aire, comprise entre l'arc du plus petit cercle, cette même spirale et la droite joignant leurs extrémités, est le même que le rapport du rayon du plus petit cercle, augmenté des deux tiers de l'excédent du rayon du plus grand cercle sur le rayon du plus petit, au rayon du plus petit cercle augmenté du tiers du dit excédent (1).

J'ai donc écrit dans ce livre les démonstrations des théorèmes qui précèdent, ainsi que celles des autres qui concernent les spirales ; elles sont d'ailleurs précédées, comme dans les autres livres de géométrie, de ce qui est utile aux démonstrations. En outre, j'adopte encore le lemme suivant parmi ceux que l'on trouve dans les livres que j'ai publiés précédemment : Parmi des lignes inégales ou des aires inégales, l'excédent de la plus grande sur la plus petite peut être ajouté à lui-même jusqu'à dépasser toute grandeur donnée parmi celles qui sont comparables entre elles (2).

PROPOSITION I.

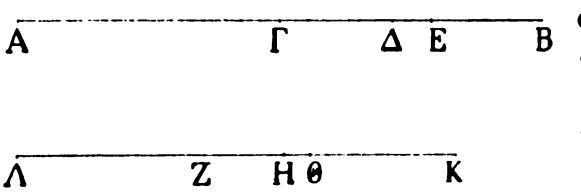
Si un point se déplace d'un mouvement uniforme suivant une certaine ligne, et si, sur cette dernière, on prend deux lignes, elles seront entre elles dans le même rapport que les temps durant lesquels le point a parcouru ces lignes.

En effet, transportons un point quelconque d'un mouvement uniforme suivant la ligne AB, sur laquelle nous prenons deux lignes ΓΔ, ΔE. Soit, d'autre part, ZH le temps pendant lequel le point parcourt la ligne ΓΔ, et HΘ celui pendant lequel il parcourt la ligne ΔE. Il faut démontrer que le rapport de la ligne ΓΔ à la ligne ΔE est le même que celui du temps ZH au temps HΘ. Composons arbitrairement les lignes AΔ, ΔB au moyen des lignes ΓΔ, ΔE, à la condition

1. On pourra consulter utilement la figure qui accompagne la proposition XXVIII pour l'intelligence de cet énoncé un peu compliqué.
2. Voir postulat 5 en tête du livre *De la Sphère et du Cylindre.*

Digitized by Google

que la ligne AΔ excède la ligne ΔB, que, d'une part, le temps ZH soit compris dans le temps ΛH autant de fois que la droite ΓΔ est comprise de fois dans la ligne AΔ, et que, d'autre part, le temps ΘH soit compris dans le temps KH autant de fois que la ligne ΔE est comprise de fois dans la ligne ΔB. Dès lors, puisque l'on suppose que le point est transporté d'un mouvement uniforme suivant la ligne AB, il est évident qu'il parcourt chacune des lignes égales à ΓΔ dans un temps égal à celui qu'il met à parcourir ΓΔ. Il est donc clair que le point parcourt la ligne composée dans un temps égal au temps ΛH, parce que le temps ZH est contenu autant de fois dans le temps ΛH que la ligne ΓΔ est contenue de fois dans la ligne AΔ. D'autre part, pour le même motif, le point parcourt la ligne BΔ dans un temps égal au temps KH. Or, puisque la ligne AΔ est plus grande que la ligne BΔ, il est évident que le point parcourra la ligne ΔA dans un temps plus grand que celui dans lequel il parcourt la ligne BΔ ; par conséquent, le temps ΛH est plus grand que le temps KH. On démontrera d'ailleurs, de la même manière, que si l'on compose arbitrairement des temps au moyen des temps ZH, HΘ, à la condition que l'un excède l'autre, celle des lignes, composées de la même manière que les temps au moyen des lignes ΓΔ, ΔE, qui excédera l'autre, correspondra au temps qui excède l'autre. Dès lors, il est évident que le rapport de ΓΔ à ΔE est le même que celui du temps ZH au temps HΘ.



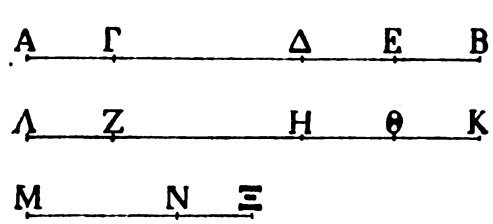
PROPOSITION II.

Si deux points se déplacent d'un mouvement uniforme, chacun suivant une ligne, et, si sur chacune de ces lignes on prend deux lignes, dont les premières et les secondes sont parcourues par les points dans des temps égaux, les lignes ainsi prises ont même rapport entre elles.

Qu'un point soit transporté d'un mouvement uniforme suivant la ligne AB, et un autre suivant la ligne KΛ. Prenons les deux lignes ΓΔ, ΔE sur la ligne AB et les lignes ZH, HΘ sur la ligne KΛ. Que le point transporté suivant la ligne AB parcoure la ligne ΓΔ dans un temps égal à celui dans lequel l'autre point transporté suivant la

Digitized by Google

ligne KΛ parcourt la ligne ZH, et que, de même, le point parcoure la ligne ΔE dans un temps égal à celui dans lequel l'autre point parcourt la ligne HΘ. On doit démontrer que le rapport de ΓΔ à ΔE est le même que celui de ZH à HΘ.



En effet, soit MN le temps dans lequel un point a parcouru la ligne ΓΔ ; l'autre point parcourt donc la ligne ZH dans ce même temps. Soit encore NΞ le temps dans lequel un point a parcouru la ligne ΔE ; l'autre point parcourt donc la ligne HΘ dans ce même temps. Or, le rapport de la ligne ΓΔ à la ligne ΔE sera le même que celui du temps MN au temps NΞ, et celui de la ligne ZH à la ligne HΘ sera le même que celui du temps MN au temps NΞ ; donc, il est évident que le rapport de ΓΔ à ΔE est le même que celui de ZH à HΘ (1).

PROPOSITION III.

Des cercles étant donnés en quelque nombre que ce soit, il est possible de prendre une droite plus grande que les circonférences de ces cercles.

En effet, si l'on circonscrit un polygone à chacun de ces cercles, il est évident que la droite composée de tous les périmètres sera plus grande que toutes les circonférences des cercles (2).

PROPOSITION IV.

Etant données deux lignes inégales : une droite et une circonférence de cercle, il est possible de prendre une droite plus petite que la plus grande des lignes données et plus grande que la plus petite.

En effet, l'excédent de la plus grande ligne sur la plus petite ajouté un certain nombre de fois à lui-même dépasse la droite qui, divisée en un même nombre de parties égales, aura l'un de ses seg-

1. On a en vertu de la proposition I : $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}=\frac{MN}{N\Xi}$ et $\frac{ZH}{H\Theta}=\frac{MN}{N\Xi}$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}=\frac{ZH}{H\Theta}$.

2. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, proposition I.

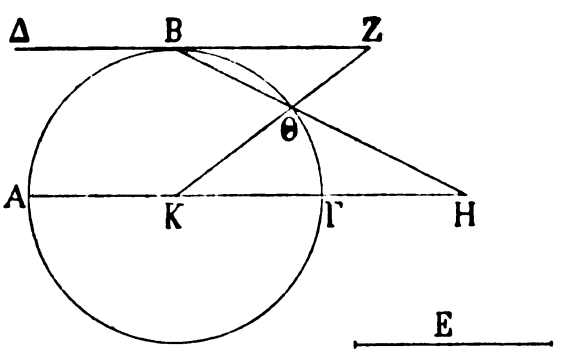
Digitized by Google

ments plus petit que l'excédent (1). Si, d'une part, la circonférence est plus grande que la droite, il est évident que, ajoutant un segment à la droite, celle-ci deviendra plus grande que la plus petite et plus petite que la plus grande des lignes données ; si, d'autre part, la droite n'est pas plus petite (2), ajoutant un segment à la circonférence, celle-ci deviendra de même plus grande que la plus petite ligne et plus petite que la plus grande ; car ce qui a été ajouté est plus petit que l'excédent (3).

PROPOSITION V.

Un cercle étant donné, et, si une droite est tangente au cercle, il est possible de mener une droite du centre du cercle à la tangente de manière que le rapport de la droite, située entre la tangente et la crconférence du cercle, au rayon soit moindre que le rapport de l'arc de cercle, situé entre le point de contact et la droite menée, à un arc quelconque donné de ce cercle.

Soit ABΓ le cercle donné, K son centre et ΔZ la tangente au cercle en B. Soit donné également un arc quelconque du cercle. Comme il est possible de prendre une droite plus grande que l'arc donné (4). soit E la droite plus grande que l'arc donné. Du centre K menons AH parallèle à ΔZ, et faisons HΘ égal à E dans la direction de B (5). Prolongeons la droite reliant le centre K au point Θ. Dès lors, le rapport de ΘZ à ΘK sera le même que celui de



1. En vertu du lemme qui précède la proposition I.
2. Sous-entendu : « que la circonférence ».
3. Algébriquement : si la circonférence c et la droite d satisfont à la condition $c > d$, on peut déterminer n tel que $n(c-d) > d$, d'où : $c - d > \frac{d}{n}$, donc : $c > d + \frac{d}{n} > d$. Si au contraire $d > c$, on peut écrire $n(d-c) > d$, d'où : $d - c > \frac{d}{n}$, donc : $d > \frac{d}{n} + c > c$.
4. En vertu de la proposition III.
5. Archimède n'indique pas le moyen, qu'il a cependant dû connaître, de résoudre

Digitized by Google

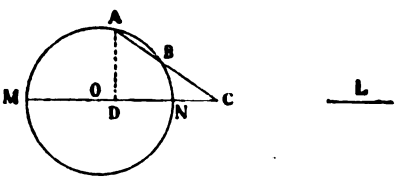
BΘ à ΘH (1), et, par conséquent, le rapport de ZΘ à ΘH sera moindre que celui de l'arc BΘ à l'arc donné, puisque la droite BΘ est plus petite que l'arc BΘ (2), et que ΘH est plus grand que l'arc donné. Donc, le rapport de ZΘ au rayon est moindre que celui de l'arc BΘ à l'arc donné.

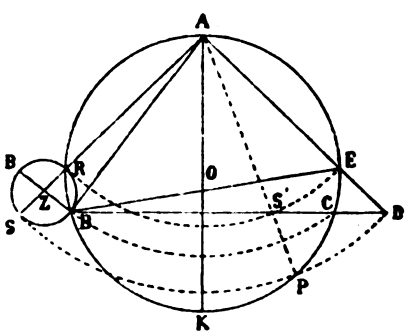
PROPOSITION VI.

Etant donnés un cercle, et, dans ce cercle, une droite plus petite que le diamètre, il est possible de jeter, du centre du cercle à sa circonférence, une droite coupant la droite donnée dans le cercle, de manière que la droite, comprise entre la circonférence et la droite

---

le problème de la sécante issue d'un point et interceptée sur une longueur donnée par deux lignes quelconques; problème qui dans le cas général ne comporte pas de solutions au moyen de la règle et du compas. En effet, dans le cas d'une corde et d'un point quelconques, si $MC=x$, $MN=c$, $MD=b$, $AD=a$ et $BC=l$ (donnée), on a : $MC \times NC = CA \times CB$, ou $x(x-c) = \sqrt{a^2+(x-b)^2} \times l$, équation du quatrième degré à une inconnue dont la résolution aboutit à celle de deux équations du second degré à deux inconnues x et $y=AC$, ou à la recherche des points d'intersection d'une hyperbole et d'une parabole.





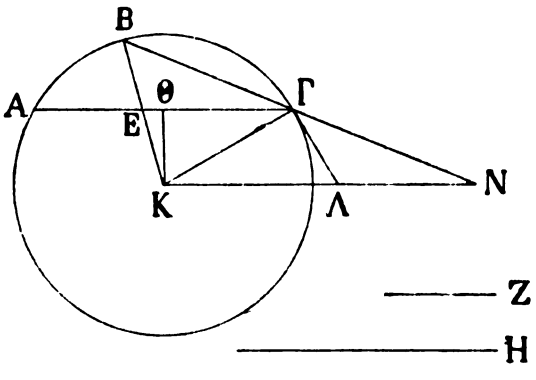
Le cas particulier de la sécante menée de l'extrémité d'un diamètre perpendiculaire à une corde quelconque est néanmoins susceptible de solution au moyen de la règle et du compas. En effet, soit AED la sécante menée du point A, telle que la partie ED comprise entre la circonférence et la corde prolongée ait une longueur donnée L. Joignons AB, BG. Les triangles BAE, DAB sont semblables comme ayant l'angle A commun et les angles AEB, ABD égaux, ces derniers étant mesurés par les arcs égaux AB, AC. Donc $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB}$, d'où : $\overline{AB}^2 = AD \times AE$. Le problème revient donc à construire un rectangle sous AD, AE, équivalent au carré de AB. Elevons en B une perpendiculaire BB′ sur BA, égale à la longueur donnée L; décrivons le cercle de diamètre BB′ ; la droite AZ coupe la circonférence en R et S. On a : $\overline{AB}^2 = AS \times AR$. Or, $RS = BB' = L$. Donc la circonférence de rayon AR coupera le cercle donné au point E cherché, ou bien la circonférence de rayon AS coupera la corde donnée au point D cherché. Le problème comporte d'ailleurs encore pour solutions la sécante AS'P et deux autres sécantes symétriques par rapport au diamètre AK.

1. Par similitude des triangles ayant les bases parallèles.
2. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, postulat 1.

Digitized by Google

donnée dans le cercle, ait un rapport donné avec la droite qui est menée, à partir de l'extrémité, située sur la circonférence, de la droite jetée à la circonférence, jusqu'à l'une des extrémités de la droite donnée dans le cercle, à la condition que le rapport donné soit moindre que celui de la moitié de la droite, donnée dans le cercle, à la droite menée perpendiculairement du centre du cercle sur cette dernière droite.

Soit ABΓ le cercle donné et le point K son centre ; soit ΓΛ une droite, plus petite que le diamètre, donnée dans le cercle, et que le rapport de Z à H soit moindre que celui de ΓΘ à KΘ ; la droite KΘ étant la perpendiculaire. D'autre part, menons du centre la droite KN parallèle à AΓ et ΓΛ perpendiculaire à KΓ. Dès lors, les triangles ΓΘK, ΓKΛ sont semblables (1) ; par conséquent, KΓ est à ΓΛ comme ΓΘ est à ΘK, et le rapport de Z à H est donc plus petit que celui de KΓ à ΓΛ. Que le rapport de KΓ à une droite plus grande que ΓΛ soit d'ailleurs le même que celui de Z à H ; que ce soit le rapport à la droite BN, et que la droite BN, passant par Γ, soit située entre la circonférence et la droite (2). Il est, en effet, possible que cette droite soit découpée de cette manière (3), et elle tombera au delà de la droite ΓΛ, puisqu'elle est plus grande que ΓΛ. Dès lors, puisque le rapport de KB à BN est le même que celui de Z à H, le rapport de EB à BΓ sera aussi le même que celui de Z à H (4).



1. Ces triangles ont un angle droit et des angles alternes égaux déterminés par les parallèles.

2. Sous-entendu « la droite KN ».

3. Voir proposition V et note relative à la sécante interceptée sur une longueur donnée entre la circonférence et une corde.

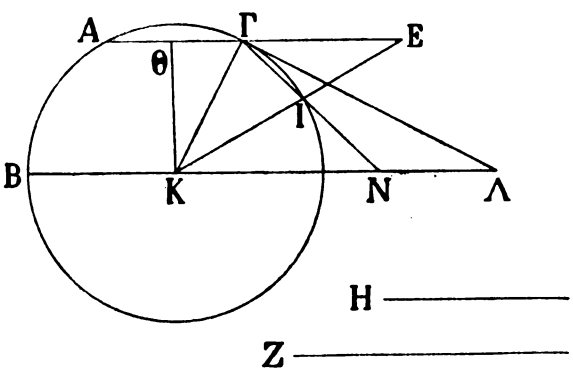
4. En résumé, on a par hypothèse : $\frac{Z}{H} < \frac{\Gamma\Theta}{K\Theta}$. Or, par similitude de triangles, on a : $\frac{\Gamma\Theta}{K\Theta} = \frac{K\Gamma}{\Gamma\Lambda}$, d'où : $\frac{Z}{H} < \frac{K\Gamma}{\Gamma\Lambda}$. D'autre part, on pose : $\frac{K\Gamma}{BN} = \frac{Z}{H}$. Or, $K\Gamma = KB$, d'où : $\frac{KB}{BN} = \frac{Z}{H}$. Or, par similitude de triangles : $\frac{KB}{BN} = \frac{EB}{B\Gamma}$, d'où : $\frac{EB}{B\Gamma} = \frac{Z}{H}$.

Digitized by Google

PROPOSITION VII.

Les mêmes choses étant données, si l'on prolonge la droite donnée dans le cercle, il est possible de jeter une droite du centre vers la droite prolongée, de manière que la droite comprise entre la circonférence et la droite prolongée ait un rapport donné avec la droite reliant l'extrémité de la droite interceptée avec l'extrémité de la droite prolongée, à la condition que le rapport donné soit plus grand que celui de la moitié de la droite donnée dans le cercle à la droite menée perpendiculairement du centre du cercle sur cette dernière (1).

Donnons-nous les mêmes choses, et prolongeons la ligne donnée dans le cercle. Que le rapport donné de Z à H soit plus grand que celui de ΓΘ à ΘK ; le rapport de Z à H sera donc aussi plus grand que celui de KΓ à ΓΛ. Que le rapport de KΓ à une droite plus petite que ΓΛ soit le même que celui de Z à H ; que ce soit le rapport à la droite IN dirigée sur le point Γ. Il est en effet possible que cette droite soit découpée de cette manière (2), et elle tombera en deçà de la droite LΛ, puisqu'elle est plus petite que ΓΛ. Dès lors, puisque le rapport de KΓ à IN est le même que celui de Z à H, le rapport de EI à IΓ sera aussi le même que celui de Z à H (3).



1. Le texte de cet énoncé est un peu obscur. En traduction libre, appuyée sur les constructions de la figure nous dirions : ...il est possible de mener une sécante vers le prolongement de la corde donnée, telle que sa partie interceptée entre la circonférence du cercle et la corde prolongée ait un rapport donné avec la droite qui relie l'extrémité I de la partie interceptée avec l'extrémité Γ de la corde qui a été prolongée, etc., etc.

2. Même recours que dans les propositions V et VI à la sécante interceptée sur une longueur donnée.

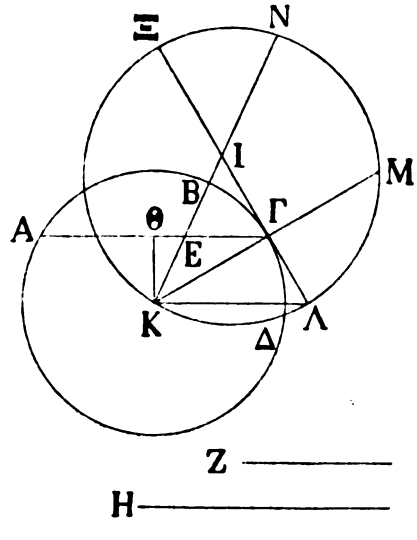
3. Par hypothèse : $\frac{Z}{H} > \frac{\Gamma\Theta}{\Theta K}$. Or, par similitude des triangles KΓΛ, ΓΘK, $\frac{\Gamma\Theta}{\Theta K} = \frac{K\Gamma}{\Gamma\Lambda}$, d'où : $\frac{Z}{H} > \frac{K\Gamma}{\Gamma\Lambda}$. De plus, on pose : $\frac{K\Gamma}{IN} = \frac{Z}{H}$. Or, KΓ = KI, d'où : $\frac{KI}{IN} = \frac{Z}{H}$. Mais les triangles KIN, EIΓ sont semblables, d'où : $\frac{KI}{IN} = \frac{EI}{I\Gamma}$; donc : $\frac{EI}{I\Gamma} = \frac{Z}{H}$.

Digitized by Google

PROPOSITION VIII.

Etant donnés un cercle, et, dans ce cercle, une droite plus petite que le diamètre, ainsi qu'une autre droite, tangente au cercle à l'extrémité de la droite donnée dans le cercle, il est possible de jeter une droite du centre du cercle vers la droite (1), de manière que son segment, situé entre la circonférence du cercle et la droite donnée dans le cercle, ait un rapport donné avec le segment de la tangente, à la condition que le rapport donné soit moindre que celui de la moitié de la droite donnée dans le cercle à la droite menée perpendiculairement du centre du cercle sur cette dernière.

Soit ABΓΔ le cercle donné, ΓA une droite donnée dans le cercle, plus petite que le diamètre, ΞΛ la tangente au cercle en Γ et le rapport de Z à H moindre que celui de ΓΘ à ΘK. Ce rapport sera donc aussi moindre que celui de ΓK à ΓΛ, si KΛ est mené parallèlement à ΘΓ. Que le rapport de KΓ à ΓΞ soit le même que celui de Z à H ; donc, ΞΓ sera plus grand que ΓΛ (2). Décrivons une circonférence de cercle par les points K, Λ, Ξ. Dès lors, puisque la droite ΞΓ est plus grande que la droite ΓΛ, et que les droites KΓ, ΞΛ sont perpendiculaires l'une sur l'autre, il est possible de placer une autre droite IN, égale à MΓ, dirigée vers le point K (3). En conséquence, le rapport du rectangle délimité sous



1. Sous-entendu : vers la droite donnée dans le cercle.

2. Par hypothèse : $\frac{Z}{H} < \frac{\Gamma\Theta}{\Theta K}$ et, par similitude des triangles ΓΘK, KΓΛ on a : $\frac{\Gamma\Theta}{\Theta K} = \frac{\Gamma K}{\Gamma\Lambda}$, d'où : $\frac{Z}{H} < \frac{\Gamma K}{\Gamma\Lambda}$; de plus, on pose : $\frac{K\Gamma}{\Xi\Gamma} = \frac{Z}{H}$, d'où : $\frac{K\Gamma}{\Xi\Gamma} < \frac{K\Gamma}{\Gamma\Lambda}$, d'où : ΞΓ > ΓΛ.

3. De même que dans les propositions qui précèdent, Archimède invoque ici simplement la possibilité de tracer la sécante interceptée sur une longueur donnée. La solution du problème, qui exige l'intervention de courbes du 2d degré, n'est pas indispensable à la démonstration en cours. La possibilité invoquée résulte déjà de ce que la droite KΓM ne passe pas par le centre du cercle KΛΞ, parce que ΞΓ > ΓΛ et que KΓ est perpendiculaire sur ΞΛ, et qu'ainsi ΓM n'aura pas la plus grande

Digitized by Google

ΞI, IΛ au rectangle délimité sous KE, IΛ est le même que celui de ΞI à KE, et le rapport du rectangle délimité sous KI, IN au rectangle délimité sous KI, ΓΛ est le même que celui de IN à ΓΛ ; en sorte que IN est à ΓΛ comme ΞI est à KE, que ΓM est à ΓΛ et que ΞΓ est à KΓ et à KB comme ΞI est à KE, enfin que le rapport du reste IΓ au reste BE est le même que celui de ΞΓ à ΓK et que celui de H à Z (1). Dès lors, la droite KN rencontre la tangente, et le rapport de la droite BE, située entre la circonférence et la droite (2), au segment de la tangente (3) est le même que celui de la droite Z à la droite H.

PROPOSITION IX.

Les mêmes choses étant données, si l'on prolonge la droite donnée dans le cercle, il est possible de jeter une droite du centre du cercle vers la droite prolongée, de manière que la droite, comprise entre la circonférence et la droite prolongée, ait un rapport donné avec le segment de la tangente qu'elle découpe à partir du point de contact, à la condition que le rapport donné soit plus grand que celui de la

longueur interceptée que pourrait avoir une sécante dirigée vers K. Si donc on suppose que la sécante KIN, tournant autour du point K, se déplace à partir de la position KΓM, dans la direction du centre du cercle, le segment intercepté augmente d'abord pour décroître ensuite au delà du centre. La sécante passera donc par une position telle que IN = ΓM.

Une solution du problème relatif à cette sécante a été donnée par Pappus. Il la déduit de deux lemmes qui établissent respectivement une hyperbole et une parabole comme lieux géométriques déterminant la direction de la sécante. (Voir : PAPPUS, édition précitée de Hultsch, p. 298).

1. Le texte qui précède se déroule comme suit en notations plus explicites : on peut écrire : $\frac{\Xi I \times I\Lambda}{KE \times I\Lambda} = \frac{\Xi I}{KE}$ et $\frac{KI \times IN}{KI \times \Gamma\Lambda} = \frac{IN}{\Gamma N}$. Or, les cordes qui se coupent en I donnent : $\frac{\Xi I}{KI} = \frac{IN}{I\Lambda}$, et les triangles semblables KIΛ, EIΓ donnent : $\frac{KE}{KI} = \frac{\Gamma\Lambda}{I\Lambda}$, d'où : $\Xi I \times I\Lambda = KI \times IN$ et $KE \times I\Lambda = KI \times \Gamma\Lambda$. Remontant aux deux premières égalités, il vient : $\frac{IN}{\Gamma\Lambda} = \frac{\Xi I}{KE}$. Or, par hypothèse : IN = ΓM, d'où : $\frac{\Gamma M}{\Gamma\Lambda} = \frac{\Xi I}{KE}$. Mais les cordes qui se coupent en Γ donnent : $\frac{\Gamma M}{\Gamma\Lambda} = \frac{\Xi\Gamma}{K\Gamma}$, d'où : $\frac{\Xi\Gamma}{K\Gamma} = \frac{\Xi I}{KE}$. Or, KΓ = KB, d'où : $\frac{\Xi\Gamma}{KB} = \frac{\Xi I}{KE}$ et, par permutation : $\frac{\Xi\Gamma}{\Xi I} = \frac{KB}{KE}$, d'où : $\frac{\Xi\Gamma}{\Xi\Gamma - \Xi I} = \frac{KB}{KB - KE}$, ou $\frac{\Xi\Gamma}{I\Gamma} = \frac{KB}{BE}$. Or, KB = ΓK, d'où : $\frac{\Xi\Gamma}{I\Gamma} = \frac{K\Gamma}{BE}$, et, par permutation : $\frac{I\Gamma}{BE} = \frac{\Xi\Gamma}{K\Gamma}$. Or, par hypothèse : $\frac{K\Gamma}{\Xi\Gamma} = \frac{Z}{H}$, d'où, comme le texte : $\frac{I\Gamma}{BE} = \frac{H}{Z}$.

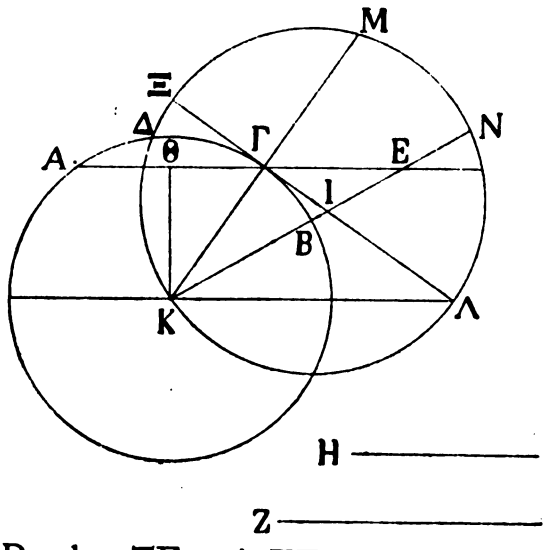
2. Sous-entendu : « la droite AΓ. »

3. C'est-à-dire : la tangente ΓI.

Digitized by Google

moitié de la droite donnée dans le cercle à la droite menée perpendiculairement du centre sur cette dernière.

Soit ABΓΔ le cercle donné. Menons, dans le cercle, la droite ΓA plus petite que le diamètre. Soit ΞΓ la tangente au cercle en Γ, et que le rapport de Z à H soit plus grand que celui de ΓΘ à ΘK ; ce rapport sera donc plus grand aussi que celui de KΓ à ΓΛ. Que le rapport de KΓ à ΓΞ soit le même que celui de Z à H ; la droite ΓΞ sera donc plus petite que la droite ΓΛ (1). Décrivons de nouveau un cercle par les points Ξ, K, Λ. Dès lors, puisque la droite ΞΓ est plus petite que la droite ΓΛ, et que les droites KM, ΞΓ sont perpendiculaires l'une sur l'autre, il est possible de placer une droite IN, égale à ΓM, dirigée vers le point K (2). En conséquence, puisque le rectangle sous ΞI, IΛ est au rectangle sous ΛI, KI comme ΞI est à KE, mais que le rectangle sous ΞI, IΛ équivaut au rectangle sous KI, ΓΛ, parce que KE est à IK comme ΛΓ est à ΛI, il en résulte que ΞI est à KE comme le rectangle sous KI, IN est au rectangle sous KI, ΓΛ, c'est-à-dire comme NI est à ΓΛ ou comme ΓM est à ΓΛ.



De plus, ΞΓ est à KΓ, c'est-à-dire à KB, comme ΓM est à ΓΛ ; par conséquent, ΞI est à KE comme ΞΓ est à KB, et le reste IΓ est au reste BE comme ΞΓ est à ΓK. Or, le rapport de ΞΓ à ΓK est le même que celui de H à Z (3) ; donc, KE rencontre la droite prolon-

---

1. On pose : $\frac{Z}{H} > \frac{\Gamma\Theta}{\Theta K}$. Or, les triangles ΘKΓ, ΓΛK sont semblables, d'où : $\frac{\Gamma\Theta}{\Theta K} = \frac{K\Gamma}{\Gamma\Lambda}$, d'où : $\frac{Z}{H} > \frac{K\Gamma}{\Gamma\Lambda}$. D'autre part, on pose : $\frac{K\Gamma}{\Gamma\Xi} = \frac{Z}{H}$, d'où : $\Gamma\Xi < \Gamma\Lambda$.

2. La possibilité de mener cette sécante est assumée sans démonstration comme dans la proposition précédente (voir note).

3. La démonstration se déroule comme suit en notations usuelles :

On peut écrire : $\frac{\Xi I \times I\Lambda}{KE \times I\Lambda} = \frac{\Xi I}{KE}$. Or, les cordes qui se coupent au point I donnent : $\frac{KI}{\Xi I} = \frac{\Lambda I}{IN}$, d'où : $KI \times IN = \Xi I \times \Lambda I$. D'autre part, les triangles semblables ΓIE, ΛIK

Digitized by Google

gée, et le rapport de BE, située entre la droite prolongée et la circonférence, à ΓI, découpée sur la tangente, est le même que le rapport de N à H.

PROPOSITION X.

Si des lignes en nombre quelconque, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, sont disposées les unes à la suite des autres, l'excédent étant d'ailleurs égal à la plus petite ; et, si l'on dispose un même nombre d'autres lignes, dont chacune est aussi grande que la plus grande des premières, les carrés des lignes égales à la plus grande, ajoutés au carré de la plus grande ainsi qu'au rectangle délimité sous la plus petite et sous une ligne égale à la somme de celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, valent le triple des carrés de toutes les lignes se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur.

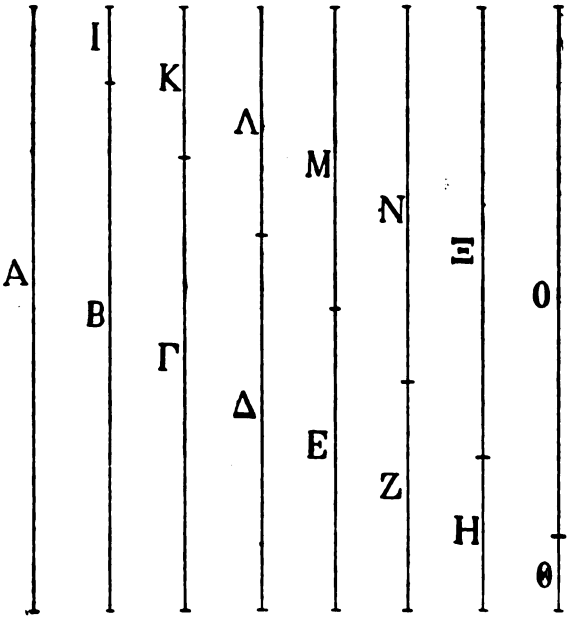
Soient A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ des lignes en nombre quelconque, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, placées les unes à la suite des autres, et soit Θ égal à l'excédent ; à B, ajoutons I égal à Θ ; à Γ, K égal à H ; à Δ, Λ égal à Z ; à E, M égal à E ; à Z, N égal à Δ ; à H, Ξ égal à Γ ; enfin, à Θ, O égal à B. Les lignes ainsi obtenues, seront, dès lors, égales entre elles et égales à la plus grande. Il faut donc démontrer que les carrés de toutes les lignes, telles que A, et de celles qui viennent d'être obtenues, ajoutés au carré de A et au rectangle délimité par Θ et par une droite égale à la somme de A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, valent le triple de la somme des carrés de A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ.

---

donnent : $\frac{EI}{KI}=\frac{\Gamma I}{\Lambda I}$, d'où : $\frac{EI+KI}{KI}=\frac{\Gamma I+\Lambda I}{\Lambda I}$, ou $\frac{KE}{KI}=\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda I}$, d'où : $KE\times\Lambda I=\Gamma\Lambda\times KI$. Substituant dans la première relation, il vient : $\frac{\Xi I}{KE}=\frac{KI\times IN}{KI\times\Gamma\Lambda}=\frac{IN}{\Gamma\Lambda}$. Or, par hypothèse : $IN=\Gamma M$, d'où : $\frac{\Xi I}{KE}=\frac{\Gamma M}{\Gamma\Lambda}$. De plus, les cordes qui se coupent en Γ donnent : $\frac{\Gamma M}{\Gamma\Lambda}=\frac{\Xi\Gamma}{K\Gamma}$. Or, $K\Gamma=KB$, d'où : $\frac{\Gamma M}{\Gamma\Lambda}=\frac{\Xi\Gamma}{KB}$; donc : $\frac{I\Xi}{KE}=\frac{\Xi\Gamma}{KB}$ et, par permutation : $\frac{\Xi I}{\Xi\Gamma}=\frac{KE}{KB}$, d'où : $\frac{\Xi I-\Xi\Gamma}{\Xi\Gamma}=\frac{KE-KB}{KB}$, ou $\frac{I\Gamma}{\Xi\Gamma}=\frac{BE}{KB}$. Or, $KB=K\Gamma$, d'où : $\frac{I\Gamma}{\Xi\Gamma}=\frac{BE}{K\Gamma}$, et, par permutation : $\frac{I\Gamma}{BE}=\frac{\Xi\Gamma}{K\Gamma}$. Or, par hypothèse : $\frac{K\Gamma}{\Xi\Gamma}=\frac{Z}{H}$ d'où : $\frac{I\Gamma}{BE}=\frac{H}{Z}$, ou, comme le texte : $\frac{BE}{I\Gamma}=\frac{Z}{H}$.

Digitized by Google

En effet, le carré de la ligne BI vaut les carrés des lignes B, I, augmentés de deux rectangles délimités sous B, I ; le carré de KΓ vaut les carrés de K, Γ augmentés de deux rectangles délimités sous K, Γ. De même, les carrés des autres lignes égales à A valent les carrés de leurs segments augmentés de deux rectangles délimités sous ces segments. Il en résulte que la somme des carrés de A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ et des carrés de I, K, Λ, M, N, Ξ, O, augmentée du carré de A, équivaut au double de la somme des carrés de A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ.



Il reste à démontrer que le double de la somme des rectangles délimités sous les segments de chacune des lignes égales à A, augmenté du rectangle délimité sous Θ et sous une ligne égale à la somme de A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, équivaut à la somme des carrés de A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ. Or, puisque deux rectangles délimités sous B, I, valent deux rectangles délimités sous B, Θ ; que deux rectangles délimités sous K, Γ valent le rectangle délimité sous Θ et sous quatre Γ, parce que K est le double de Θ ; que deux rectangles délimités sous Δ, Λ valent le rectangle délimité sous Θ et sous six Δ, parce que Λ est le triple de Θ ; et que, de la même manière, les autres doubles rectangles délimités sous les segments valent les rectangles délimités sous Θ et sous des multiples dans l'ordre des nombres pairs des lignes suivantes, il s'ensuit que leur somme (1), augmentée du rectangle délimité sous Θ et sous une ligne égale à la somme de A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, vaut le rectangle délimité sous Θ et sous une ligne égale à la somme de A, du triple de B, du quintuple de Γ, et, ainsi

1. C'est-à-dire la somme de tous ces doubles rectangles.

Digitized by Google

de suite, du multiple des lignes suivantes dans l'ordre des nombres impairs. Or, la somme des carrés de A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ vaut aussi le rectangle délimité sous les lignes précédentes ; car le carré de A vaut le rectangle délimité sous Θ et sous la somme de A et des lignes restantes, dont chacune est égale à A. D'ailleurs, A mesure autant de fois la somme de A et des lignes qui lui sont égales que Θ mesure de fois A ; par conséquent, le carré de A vaudra le rectangle délimité sous Θ et sous une ligne égale à A, augmentée du double de la somme de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ ; car la somme des lignes égales à A, exception faite de A, vaut le double de la somme de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ. Et, de même, le carré de B vaudra le rectangle délimité sous Θ et sous une ligne égale à B, augmentée du double de la somme de Γ, Δ, E, Z, H, Θ ; de même, encore, le carré de Γ vaudra le rectangle délimité sous Θ et sous une ligne égale à Γ, augmentée du double de la somme de Δ, E, Z, H, Θ ; et, de même, les carrés des autres lignes valent les rectangles délimités sous Θ et sous des lignes égales à ces lignes mêmes, augmentées du double de la somme des lignes restantes. Il est donc évident que la somme des carrés de toutes les lignes vaut le rectangle délimité sous Θ et sous une ligne égale à la somme de A, du triple de B, du quintuple de Γ, et des multiples des autres lignes dans l'ordre des nombres impairs (1).

1. Toute cette démonstration se déroule comme suit en notations usuelles : Les 7 lignes, toutes égales à A, se composent respectivement de deux segments qui sont des multiples de Θ, la plus petite des lignes inégales. Il faut donc démontrer, d'après l'énoncé de la proposition :

$A^2+(B+I)^2+(\Gamma+K)^2+(\Delta+\Lambda)^2+(E+M)^2+(Z+N)^2+(H+\Xi)^2+(\Theta+O)^2+A^2+\Theta\times(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)=3[A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2]$ (I). Or, $(B+I)^2=B^2+I^2+2\ B\times I$; $(\Gamma+K)^2=\Gamma^2+K^2+2\ \Gamma\times K$, et ainsi de suite. Substituons dans le premier membre de l'égalité (I) la valeur du carré de ces binômes, en observant toutefois que $I=\Theta, K=H, \Lambda=Z, M=E, N=\Delta, \Xi=\Gamma$ et $O=B$, il vient: $2[A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2]+2[B\times I+\Gamma\times K+\Delta\times\Lambda+E\times M+Z\times N+H\times\Xi+\Theta\times O]+\Theta[A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta]$ (II). Or, $I=\Theta$, d'où : $2\,B\times I=2\,B\times\Theta$, $K=2\,\Theta$, d'où : $2\,K\times\Gamma=\Theta\times 4\,\Gamma$, $\Lambda=3\,\Theta$, d'où : $2\,\Delta\times\Lambda=\Theta\times 6\,\Lambda$, et ainsi de suite. Substituons ces valeurs dans (II)), il vient :

$2[A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2]+\Theta[A+3\ B+5\,\Gamma+7\ \Delta+9\,E+11\ Z+13H+15\ \Theta]$. Dès lors, pour démontrer l'égalité (I), il suffit de montrer que :

$A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2=\Theta[A+3\ B+5\,\Gamma+7\ \Delta+9\ E+11\ Z+13\ H+15\ \Theta]$. En effet, $A=8\,\Theta$, d'où : $A^2=A\times 8\,\Theta=\Theta\times 8A=\Theta[A+(B+I)+(\Gamma+K)+(\Delta+\Lambda)+(E+M)+(Z+N)+(H+\Xi)+(\Theta+O)]=\Theta\,[A+2\,(B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)]$. De même on aura:

$B^2=\Theta[B+2(\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)]$, et $\Gamma^2=\Theta[\Gamma+2(\Delta+E+Z+H+\Theta)]$, et ainsi de suite, d'où: $A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2=\Theta[A+3B+5\Gamma+7\Delta+9\,E+11Z+13H+15\Theta]$.

Faisons remarquer que si l'on dépouille cette proposition de son caractère géométrique, on se trouve en présence d'une progression arithmétique a, $2a$, $3a$, $\ldots n\,a$,

Digitized by Google

COROLLAIRE.

D'après cela, il est clair que la somme des carrés des lignes égales à la plus grande est moindre que le triple de la somme des carrés des lignes qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, puisque, si on lui ajoute une certaine grandeur, elle est triple de cette somme ; tandis que la première somme est supérieure à la seconde dont on a retranché le carré de la plus grande ligne, puisque ce que l'on ajoute à la première somme est moindre que le triple du carré de la plus grande ligne (1). Donc, si l'on décrit des figures semblables sur toutes les lignes qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, ainsi que sur celles qui sont égales à la plus grande, l'ensemble des figures décrites sur les lignes égales à la plus grande sera moindre que le triple de l'ensemble des figures décrites sur les lignes qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, et, ce qui reste du premier ensemble après en avoir retranché la figure décrite sur la plus grande ligne, sera supérieur au triple du second ensemble, puisque ces figures semblables auront entre elles le même rapport que ces carrés (2).

---

pour laquelle on démontre facilement la relation $(n+1)n^2a^2 + a(a+2a+3a+\dots na) = 3[a^2+(2a)^2+(3a)^2+\dots(na)^2]$, d'où : $a^2+(2a)^2+\dots(na)^2 = \frac{a^2}{3}\left[n^2(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}\right] = a^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Cette dernière valeur de la somme des carrés des termes d'une progression par différence est identique à celle d'Archimède : $A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2 = \Theta[A+3B+5\Gamma+7\Delta+9E+11Z+13H+15\Theta]$, en observant toutefois que $A=8\Theta$, $B=B=7\Theta$, $\Gamma=6\Theta$, $\Delta=5\Theta$, $E=4\Theta$, $Z=3\Theta$, et $H=2\Theta$.

1. Ce corollaire s'exprimera donc en notations usuelles :

$A^2+(B+I)^2+(\Gamma+K)^2+(\Delta+\Lambda)^2+(E+M)^2+(Z+N)^2+(H+\Xi)^2+(\Theta+O)^2 < 3[A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2]$, ce qui est évident, puisque l'on doit ajouter $A^2+\Theta[A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta]$ au premier membre de cette inégalité pour satisfaire à l'égalité (I) de la note précédente.

D'autre part, $A^2+(B+I)^2+(\Gamma+K)^2+(\Delta+\Lambda)^2+(E+M)^2+(Z+N)^2+(H+\Xi)^2+(\Theta+O)^2 > 3[B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2]$, puisqu'on a vu que $A^2=\Theta[A+2(B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)] > \Theta[A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta]$, il en résulte que la valeur à ajouter $A^2+\Theta[A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta] < 2A^2$, valeur qui est plus petite, à fortiori, que celle de $3A^2$ qui a été retranchée de la 2de somme. Si l'on dépouille ce corollaire de son caractère géométrique, il est mis en évidence par la relation algébrique de la note précédente :

$a^2+(2a)^2+(3a)^2+\dots(na)^2 = a^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, d'où l'on tire successivement : $n^3 < 3(1^2+2^2+3^2+\dots n^2)$, et $n^3 > 3[1^2+2^2+3^2+\dots(n-1)^2]$.

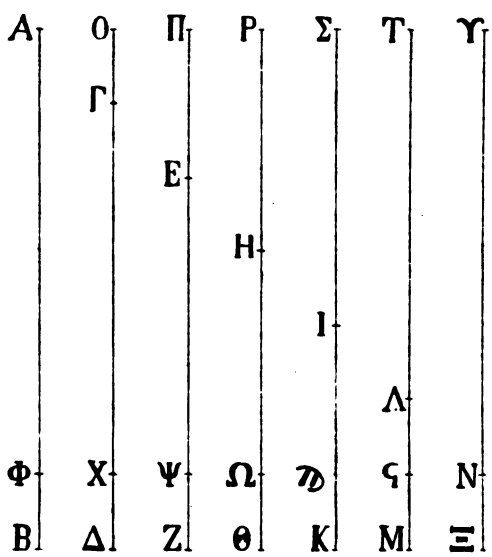
2. C'est-à-dire puisque les figures semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues (EUCLIDE, livre VI, proposition 20).

Digitized by Google

PROPOSITION XI.

Si des lignes en nombre quelconque, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, sont disposées les unes à la suite des autres ; et, si l'on dispose d'autres lignes en nombre inférieur d'une unité au nombre de celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, et dont chacune est aussi grande que la plus grande des premières, le rapport de la somme des carrés des lignes égales à la plus grande à la somme des carrés des lignes qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, exception faite de celui de la plus petite, est moindre que le rapport du carré de la plus grande à l'aire équivalente à la somme du rectangle délimité sous la plus grande et sous la plus petite, et de la troisième partie du carré de l'excédent de la plus grande sur la plus petite ; tandis que le rapport (1) à la somme des carrés des lignes qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, à l'exception de celui de la plus grande, est plus grand que ce dernier rapport.

En effet, que des lignes se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur soient disposées les unes à la suite des autres, en nombre quelconque, de manière que la ligne AB dépasse la ligne ΓΔ ; la ligne ΓΔ la ligne EZ, EZ la ligne HΘ, HΘ la ligne IK, IK la ligne ΛM, ΛM la ligne NΞ. Ajoutons la ligne ΓO, valant un excédent, à la ligne ΓΔ ; EΠ, valant deux excédents, à la ligne EZ ; HP, valant trois excédents, à la ligne HΘ, et ajoutons, de même, aux autres lignes. Dès lors, les lignes obtenues seront égales entre elles et égales chacune à la plus grande. On doit donc démontrer que le rapport de la somme des carrés des lignes, qui viennent d'être obtenues, à la somme des carrés des lignes qui se dépassent l'une l'autre



1. Sous-entendu : le rapport de la somme des carrés des lignes égales à la plus grande.

Digitized by Google

d'une même grandeur, exception faite du carré de NΞ, est plus petit que le rapport du carré de AB à l'aire équivalant à la fois au rectangle délimité sous AB, NΞ et au tiers du carré de NY ; tandis que le rapport à la somme des carrés de ces mêmes lignes, exception faite du carré de AB, est plus grand que ce dernier rapport (1).

Retranchons de chacune des lignes qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur une ligne égale à l'excédent (2). Dès lors, le rapport du carré de AB à la somme du rectangle AB, ΦB et du tiers du carré de AΦ est le même que celui du carré de OΔ à la somme du rectangle OΔ, ΔX et du tiers du carré de XO, et le même que celui du carré de ΠZ à la somme du rectangle ΠZ, ΨZ et du tiers du carré de ΨΠ, et le même que ceux des autres carrés aux aires composées de la même manière. En conséquence, le rapport de la somme des carrés de OΔ, ΠZ, PΘ, ΣK, TM, YΞ à la somme des rectangles délimités sous NΞ et sous toutes les lignes égales dont il a été question, augmentée de la somme des tiers des carrés de OX, ΠΨ, PΩ, Σϡ, Tϛ, YN, est le même que le rapport du carré de AB à la somme du rectangle AB, ΦB et du tiers du carré de ΦA (3). Dès lors, s'il était démontré que le rectangle délimité sous NΞ et sous la somme des lignes égales OΔ, ΠZ, PΘ, ΣK, TM, YΞ, augmenté des tiers des carrés de OX, ΠΨ, PΩ, Σϡ, Tϛ, YN, est plus petit que la somme des carrés de AB, ΓΔ, EZ, HΘ, IK, ΛM, mais plus grand que la somme des carrés de ΓΔ, EZ, HΘ, IK, ΛM, NΞ, on aurait démontré la proposition (4).

---

1. On doit donc démontrer :

$$\frac{\overline{O\Delta}^2+\overline{\Pi Z}^2+\dots\overline{Y\Xi}^2}{\overline{AB}^2+\overline{\Gamma\Delta}^2+\dots\overline{\Lambda M}^2}<\frac{\overline{AB}^2}{AB\times N\Xi+\frac{1}{3}\overline{NY}^2}<\frac{\overline{O\Delta}^2+\overline{\Pi Z}^2+\dots\overline{Y\Xi}^2}{\overline{\Gamma\Delta}^2+\overline{EZ}^2+\dots\overline{N\Xi}^2}.$$

2. C'est-à-dire : égale à la droite NΞ.

3. On a : $\frac{\overline{AB}^2}{AB\times\Phi B+\frac{1}{3}\overline{A\Phi}^2}=\frac{\overline{O\Delta}^2}{O\Delta\times\Delta X+\frac{1}{3}\overline{XO}^2}=\frac{\overline{\Pi Z}^2}{\Pi Z\times\Psi Z+\frac{1}{3}\overline{\Psi\Pi}^2}=$ etc., etc., d'où : en observant que $\Delta X=\Psi Z=\Omega\Theta=K\text{ϡ}=M\text{ϛ}=N\Xi$, on aura :

$$\frac{\overline{O\Delta}^2+\overline{\Pi Z}^2+\overline{P\Theta}^2+\overline{\Sigma K}^2+\overline{TM}^2+\overline{Y\Xi}^2}{N\Xi(O\Delta+\Pi Z+P\Theta+\Sigma K+TM+Y\Xi)+\frac{1}{3}(\overline{OX}^2+\overline{\Pi\Psi}^2+\overline{P\Omega}^2+\overline{\Sigma\text{ϡ}}^2+\overline{T\text{ϛ}}^2+\overline{YN}^2)}=\frac{\overline{AB}^2}{AB\times\Phi B+\frac{1}{3}\overline{A\Phi}^2}.$$

4. La démonstration des deux inégalités énoncées par le texte se réduit donc à la démonstration des deux inégalités suivantes :

$$\overline{AB}^2+\overline{\Gamma\Delta}^2+\overline{EZ}^2+\overline{H\Theta}^2+\overline{IK}^2+\overline{\Lambda M}^2>M\Xi(O\Delta+\Pi Z+P\Theta+\Sigma K+TM+Y\Xi)+\tfrac{1}{3}(\overline{OX}^2+\overline{\Pi\Psi}^2+\overline{P\Omega}^2+\overline{\Sigma\text{ϡ}}^2+\overline{T\text{ϛ}}^2+\overline{YN}^2)>\overline{\Gamma\Delta}^2+\overline{EZ}^2+\overline{H\Theta}^2+\overline{IK}^2+\overline{\Lambda M}^2+\overline{N\Xi}^2.$$

Digitized by Google

Or, le rectangle délimité sous NΞ et sous la somme des lignes égales OΔ, ΠZ, PΘ, ΣK, TM, ΥΞ, augmenté des tiers des carrés de OX, ΠΨ, PΩ, Σϡ, Tϛ, ΥN, équivaut à la somme des carrés de XΔ, ΨZ, ΩΘ, ϡK, ϛM, NΞ, augmentée du rectangle délimité sous NΞ et sous la somme des lignes égales OX, ΠΨ, PΩ, Σϡ, Tϛ, ΥN, augmentée des tiers des carrés de OX, ΠΨ, PΩ, Σϡ, Tϛ, ΥN (1). D'autre part, la somme des carrés de AB, ΓΔ, EZ, HΘ, IK, ΛM est équivalente à la somme des carrés de BΦ, XΔ, ΨZ, ΩΘ, ϡK, ϛM, augmentée de la somme des carrés de AΦ, ΓX, EΨ, HΩ, Iϡ, Λϛ, augmentée du rectangle délimité sous BΦ, et sous le double de la somme de AΦ, ΓX, EΨ, HΩ, Iϡ, Λϛ (2). Or, les carrés des lignes égales à NΞ sont communs de part et d'autre (3), et le rectangle délimité sous NΞ et sous la somme des lignes égales OX, ΠΨ, ΩP, ϡΣ, ϛT, ΥN est moindre que le rectangle délimité sous BΦ et sous le double de la somme de AΦ, ΓX, EΨ, HΩ, Iϡ, Λϛ, parce que la somme des lignes que nous venons de dire est, d'une part, égale à la somme des lignes ΓO, EΠ,T PH, IΣ, ΛT, ΥN, et, d'autre part, plus grande que la somme de leurs restes (4). De plus, la somme des carrés de AΦ, ΓX, EΨ, HΩ, Iϡ, Λϛ est plus grande que le tiers de la somme des carrés de OX, ΠΨ, PΩ, Σϡ, Tϛ, ΥN ; car cela a été démontré dans ce qui précède (5). En conséquence, la somme des aires dont il est question est moindre que la somme des carrés de AB, ΓΔ, EZ, HΘ, IK, ΛM. Enfin, nous allons démontrer que la somme de ces aires est plus grande que la somme des carrés de ΓΔ, EZ, HΘ, IK, ΛM, NΞ. La somme des carrés de ΓΔ, EZ, HΘ, IK, ΛM est de nouveau équivalente à la somme des carrés de XΓ, EΨ, HΩ, Iϡ, Λϛ,

1. En observant que $O\Delta = OX + X\Delta$; $\Pi Z = \Pi\Psi + \Psi Z$ etc.,et que $N\Xi = X\Delta = \Psi Z =$ etc., on aura: $N\Xi(O\Delta + \Pi Z + P\Theta + \Sigma K + TM + \Upsilon\Xi) + \frac{1}{3}(\overline{OX}^2 + \overline{\Pi\Psi}^2 + \overline{P\Omega}^2 + \overline{\Sigma\varpi}^2 + \overline{T\varsigma}^2 + \overline{\Upsilon N}^2) = (\overline{X\Delta}^2 + \overline{\Psi Z}^2 + \overline{\Omega\Theta}^2 + \overline{\varpi K}^2 + \overline{\varsigma M}^2 + \overline{N\Xi}^2) + N\Xi(OX + \Pi\Psi + P\Omega + \Sigma\varpi + T\varsigma + \Upsilon N) + \frac{1}{3}(\overline{OX}^2 + \overline{\Pi\Psi}^2 + \overline{P\Omega}^2 + \overline{\Sigma\varpi}^2 + \overline{T\varsigma}^2 + \overline{\Upsilon N}^2)$.

2. En observant que : $AB = A\Phi + B\Phi$; $\Gamma\Delta = \Gamma X + X\Delta$; $EZ = E\Psi + \Psi Z$, etc., on aura, en groupant comme le texte : $\overline{AB}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{EZ}^2 + \overline{H\Theta}^2 + \overline{IK}^2 + \overline{\Lambda M}^2 = (\overline{B\Phi}^2 + \overline{X\Delta}^2 + \overline{\Psi Z}^2 + \overline{\Omega\Theta}^2 + \overline{\varpi K}^2 + \overline{\varsigma M}^2) + (\overline{A\Phi}^2 + \overline{\Gamma X}^2 + \overline{E\Psi}^2 + \overline{H\Omega}^2 + \overline{I\varpi}^2 + \overline{\Lambda\varsigma}^2) + B\Phi \times 2[A\Phi + \Gamma X + EZ + H\Omega + I\varpi + \Lambda\varsigma]$.

3. C'est-à-dire communs aux deux membres de l'inégalité.

4. C'est-à-dire plus grande que $\Gamma X + E\Psi + H\Omega + I\varpi + \Lambda\varsigma$, car on a : $OX + \Pi\Psi + \Omega P + \varpi\Sigma + \varsigma T + \Upsilon N = (\Gamma O + E\Pi + PH + I\Sigma + \Lambda T + \Upsilon N) + (\Gamma X + E\Psi + H\Omega + I\varpi + \Lambda\varsigma)$.

5. En vertu du corollaire de la proposition X, on a : $\overline{A\Phi}^2 + \overline{\Gamma X}^2 + \overline{E\Psi}^2 + \overline{H\Omega}^2 + \overline{I\varpi}^2 + \overline{\Lambda\varsigma}^2 > \frac{1}{3}[\overline{OX}^2 + \overline{\Pi\Psi}^2 + \overline{P\Omega}^2 + \overline{\Sigma\varpi}^2 + \overline{T\varsigma}^2 + \overline{\Upsilon N}^2]$.

Digitized by Google

augmentée de la somme des carrés de $X\Delta$, ΨZ, $\Omega\Theta$, $\aleph K$, ςM, $N\Xi$, augmentée du rectangle délimité sous $N\Xi$ et sous le double de la somme de ΓX, $E\Psi$, $H\Omega$, $I\aleph$, $\Lambda\varsigma$ (1). De plus, la somme des carrés de $X\Delta$, ΨZ, $\Omega\Theta$, $\aleph K$, $M\varsigma$, $N\Xi$ est commune, tandis que le rectangle délimité sous $N\Xi$ et sous la somme des lignes égales OX, $\Pi\Psi$, $P\Omega$, $E\aleph$, $T\varsigma$, ΥN est plus grand que le rectangle délimité sous $N\Xi$ et sous le double de la somme de ΓX, $E\Psi$, $H\Omega$, $I\aleph$, $\Lambda\varsigma$ (2). En outre, la somme des carrés de XO, $\Psi\Pi$, ΩP, $\aleph\Sigma$, ςT, ΥN est plus grande que le triple de la somme des carrés de ΓX, $E\Psi$, $H\Omega$, $I\aleph$, $\Lambda\varsigma$; car cela a été démontré aussi (3). En conséquence, la somme des aires dont il est question est plus grande que la somme des carrés des lignes $\Gamma\Delta$, EZ, $H\Theta$, IK, ΛM, $N\Xi$.

COROLLAIRE.

Si, dès lors, on décrit des figures semblables sur toutes les lignes, tant sur celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur que sur celles qui sont égales à la plus grande, le rapport de l'ensemble des figures, décrites sur les lignes égales à la plus grande, à l'ensemble des figures, décrites sur les lignes qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, exception faite de la figure décrite sur la plus petite, sera moindre que le rapport du carré de la plus grande ligne à l'aire équivalant à la fois au rectangle délimité sous la plus grande et sous la plus petite ainsi qu'au tiers du carré de l'excédent de la plus grande sur la plus petite ; tandis que le rapport (4) à l'ensemble de ces mêmes figures, exception faite de la figure décrite sur la plus grande ligne, sera plus grand que ce dernier rapport, puisque ces figures semblables auront entre elles même rapport que les carrés (5).

1. Observant, comme dans la 1re partie de la démonstration, que $B\Gamma = \Gamma X + X\Delta$, que $EZ = E\Psi + \Psi Z$, etc., on aura : $\overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{EZ}^2 + \overline{H\Theta}^2 + \overline{IK}^2 + \overline{\Lambda M}^2 + \overline{N\Xi}^2 = [\overline{X\Gamma}^2 + \overline{E\Psi}^2 + \overline{H\Omega}^2 + \overline{I\aleph}^2 + \overline{\Lambda\varsigma}^2) + (\overline{X\Delta}^2 + \overline{\Psi Z}^2 + \overline{\Omega\Theta}^2 + \overline{\aleph K}^2 + \overline{\varsigma M}^2 + \overline{N\Xi}^2) + N\Xi \times 2[\Gamma X + E\Psi + H\Omega + I\aleph + \Lambda\varsigma]$.

2. On a : $N\Xi[OX + \Pi\Psi + P\Omega + Z\aleph + T\varsigma + \Upsilon N] > N\Xi \times 2[\Gamma X + E\Psi + H\Omega + I\aleph + \Lambda\varsigma]$, car $OX + \Pi\Psi + P\Omega + Z\aleph + T\varsigma + \Upsilon N = [\Gamma O + E\Pi + PH + I\Sigma + \Lambda T + \Upsilon N] + [\Gamma X + E\Psi + H\Omega + I\aleph + \Lambda\varsigma]$, et $\Gamma O + E\Pi + PH + I\Sigma + \Lambda T + \Upsilon N > \Gamma X + E\Psi + H\Omega + I\aleph + \Lambda\varsigma$, d'où : $OX + \Pi\Psi + P\Omega + Z\aleph + T\varsigma + \Upsilon N > 2[\Gamma X + E\Psi + H\Omega + I\aleph + \Lambda\varsigma]$.

3. En vertu du corollaire de la proposition X, on a :
$\overline{XO}^2 + \overline{\Psi\Pi}^2 + \overline{\Omega P}^2 + \overline{\aleph\Sigma}^2 + \overline{\varsigma T}^2 + \overline{\Upsilon N}^2 > 3[\overline{\Gamma X}^2 + \overline{E\Psi}^2 + \overline{H\Omega}^2 + \overline{I\aleph}^2 + \overline{\Lambda\varsigma}^2]$.

4. C'est-à-dire le rapport de l'ensemble des figures décrites sur les lgnes qui sont égales à la plus grande.

5. Voir proposition X, corollaire et dernière note.

Digitized by Google

DÉFINITIONS.

I. Si une ligne droite est menée dans un plan, et si, l'une de ses extrémités restant fixe, elle tourne un nombre quelconque de fois d'un mouvement uniforme, reprenant la position d'où elle est partie, tandis que, sur la ligne en rotation, un point se meut uniformément comme elle à partir de l'extrémité fixe, le point décrira une spirale dans le plan.

II. Appelons origine de la spirale (1), l'extrémité de la droite qui reste fixe pendant que la droite tourne.

III. Appelons position initiale de révolution (2), celle à partir de laquelle la droite a commencé de tourner.

IV. Appelons première droite, celle sur laquelle le point se meut et qu'il parcourt pendant la première révolution ; appelons seconde droite, celle que le point parcourt pendant la seconde révolution, et appelons pareillement les autres droites du même nom que les révolutions.

V. Appelons première aire, celle qui est entourée par la spirale décrite dans la première révolution et par la première droite, seconde aire, celle qui est entourée par la spirale décrite dans la seconde révolution et par la seconde droite, et appelons de même les autres aires dans l'ordre de leur succession.

VI. Et, si l'on mène une ligne droite quelconque du point d'origine de la spirale, nous appellerons l'avant ce qui est situé du côté de la droite où se produit la révolution, et l'arrière ce qui est situé de l'autre côté.

VII. Appelons premier cercle, celui qui est décrit du point d'origine de la spirale comme centre et avec la première droite comme rayon, second cercle, celui qui est décrit du même centre avec le double de cette droite comme rayon, et appelons les autres, de même, dans l'ordre de leur succession.

---

1. ἀρχὰ τῆς ἕλικος, littéralement : commencement de la spirale.

2. ἡ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς.... ἀρχὰ τῆς περιφορᾶς, littéralement : la position de la ligne... commencement de la révolution, c'est-à-dire : la position initiale de révolution.

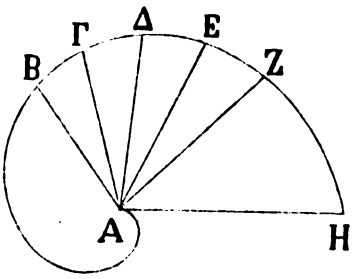
Digitized by Google

PROPOSITION XII.

Si des droites en nombre quelconque, menées de l'origine de la spirale à une spirale décrite dans une révolution quelconque, forment des angles égaux entre eux, ces droites se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur.

Soit une spirale dans laquelle AB, AΓ, AΔ, AE, AZ forment des angles égaux entre eux. Il faut démontrer que AΓ dépasse AB et AΔ dépasse AΓ d'une même grandeur, et qu'il en est de même pour les autres droites.

En effet, le temps pendant lequel la droite qui tourne parvient de AB en AΓ est le même que celui pendant lequel le point se mouvant sur la droite parcourt l'excédent de ΓA sur AB, et le temps pendant lequel la droite parvient de AΓ en AΔ est le même que celui pendant lequel l'excédent de AΔ sur AΓ est parcouru. Or, la droite qui tourne parvient de AB en AΓ et de AΓ en AΔ dans des temps égaux, parce que les angles sont égaux. Dès lors, le point qui se meut sur la droite parcourt l'excédent de ΓA sur AB et l'excédent de AΔ sur AΓ dans des temps égaux. En conséquence, AΓ dépasse AB, et AΔ dépasse AΓ d'une même grandeur ; et il en est de même pour les droites qui restent.



PROPOSITION XIII.

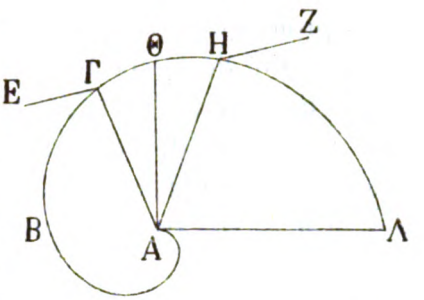
Si une ligne droite est tangente à la spirale, elle sera tangente en un seul point.

Soit une spirale sur laquelle on a les points A, B, Γ, Δ. Soit le point A l'origine de la spirale, la droite AΔ en position initiale de révolution, et EZ une droite quelconque tangente à la spirale. Je dis que cette droite sera tangente en un seul point.

En effet, qu'elle soit, si possible, tangente en deux points Γ et H. Menons AΓ, AH ; divisons l'angle compris sous AH, AΓ en deux

Digitized by Google

parties égales, et soit Θ le point où la droite qui divise l'angle en parties égales rencontre la spirale. Dès lors, AH dépassera AΘ et AΘ dépassera AΓ de la même grandeur, parce que ces droites forment des angles égaux entre eux (1) ; par conséquent, la somme de AH, AΓ est double de AΘ (2). Or, cette somme est plus grande que le double de la droite qui, dans le triangle (3), divise l'angle en deux parties égales (4). Il est donc évident que le point où la droite AΘ rencontre la droite ΓH est situé entre les points Θ et A. Dès lors, EZ coupe la spirale, parce que l'un des points de la droite ΓΘH est à l'intérieur de la spirale (5). Or, on avait supposé cette droite tangente ; par conséquent, EZ est tangente à la spirale en un seul point.



PROPOSITION XIV.

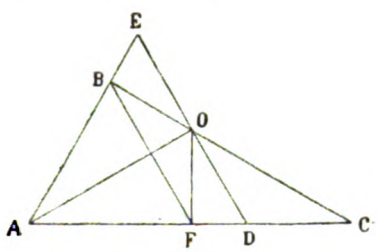
Si du point d'origine de la spirale on mène deux droites à une spirale décrite dans une première révolution, et si celles-ci sont prolongées jusqu'à la circonférence du premier cercle (6), les droites

1. Voir proposition XII.

2. Les droites AΓ, AΘ, AH sont en progression arithmétique, donc : AH — AΘ = AΘ — AΓ, d'où, comme le texte : AH + AΓ = 2 AΘ.

3. C'est-à-dire dans le triangle ΓAH.

4. En effet, soit un triangle ABC, et AO la bissectrice de l'angle A. Elevons en O une perpendiculaire DE sur AO, et par B menons BΓ parallèle à ED. Dès lors, puisque AO est la bissectrice, on a : $\frac{AC}{AB} = \frac{CO}{BO}$. Or, AC > AB, d'où : CO > BO. Mais BO = FO, donc CO > FO. D'autre part, les angles COD, FOD, tous deux égaux à l'angle BOE, sont égaux ; donc OD est la bissectrice de l'angle FOC, et, dès lors, on a aussi : $\frac{CO}{FO} = \frac{DC}{FD}$. Or, on a vu que CO > FO, donc DC > FD. On peut donc écrire : AF + AC > AF + AC + FD — DC ou, en observant que AF = AB, AB + AC > (AF + FD) + (AC — DC), ou AB + AC > 2 AD. Or, dans le triangle rectangle AOD on a : AD > AO, donc, à fortiori : AB + AC > 2 AO. C. q. f. d.



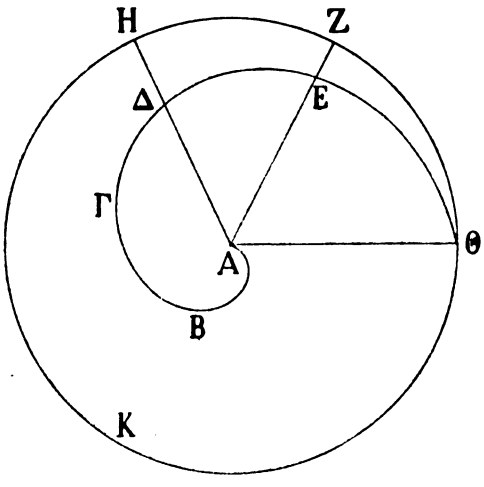
5. Voir EUCLIDE, livre III, proposition II, démontrant que la droite qui joint deux points quelconques pris sur une circonférence de cercle tombe à l'intérieur de ce cercle.

6. Voir : Définition VII.

Digitized by Google

menées à la spirale auront entre elles le même rapport que les arcs de cercle situés entre l'extrémité de la spirale et les extrémités des droites prolongées aboutissant à la circonférence ; ces arcs étant pris de l'extrémité de la spirale vers l'avant (1).

Soit une spirale ABΓΔEΘ décrite en première révolution, et le point A l'origine de cette spirale. Soit ΘA la droite initiale de révolution, et soit ΘKH le premier cercle. Menons les droites AE, AΔ du point A à la spirale, et prolongeons-les jusqu'à la circonférence du cercle en Z et H. On doit démontrer que le rapport de AE à AΔ est le même que celui de l'arc ΘKZ à l'arc ΘKH.



En effet, si la ligne AΘ tourne, il est évident que le point Θ est déplacé d'un mouvement uniforme sur la circonférence du cercle ΘKH ; alors que le point A, qui se déplace sur la droite, parcourt la ligne AΘ ; que le point Θ, qui se déplace sur la circonférence du cercle parcourt l'arc ΘKZ ; alors que le point A parcourt la droite AE, et que, de nouveau, le point A parcourt la droite AΔ ; alors que le point Θ parcourt l'arc ΘKH ; chacun de ces points se déplaçant d'ailleurs d'un mouvement uniforme. Il est donc évident que le rapport de AE à AΔ est le même que celui de l'arc ΘKZ à l'arc ΘKH (2).

On démontrera pareillement qu'il en serait de même si l'une des droites menées tombait à l'extrémité de la spirale.

PROPOSITION XV.

Si de l'origine de la spirale Γ on mène des droites à une spirale décrite en seconde révolution, elles seront entre elles dans le même

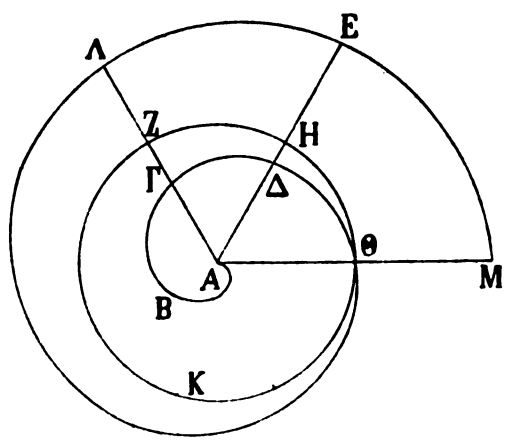
1. Voir : Définition VI, c'est-à-dire dans le sens du mouvement générateur de la spirale.
2. Voir proposition II.

Digitized by Google

rapport que les arcs, dont il a été question (1), auxquels on a ajouté la circonférence entière du cercle.

Soit une spirale sur laquelle on a l'arc ABΓΔΘ, telle que cet arc ABΓΔΘ soit décrit dans la première et l'arc ΘΛEM dans la seconde révolution, et menons les droites AE, AΛ. On doit démontrer que le rapport de AΛ à AE est le même que celui de l'arc ΘKZ, auquel la circonférence entière est ajoutée, à l'arc ΘKH auquel la circonférence entière est ajoutée.

En effet, le point A, qui se déplace sur la droite, parcourt la ligne AΛ, et le point Θ, qui se déplace sur la circonférence de cercle, parcourt la circonférence de cercle entière et, en outre, l'arc ΘKZ dans un même temps. Derechef, le point A parcourt la droite AE, et le point Θ la circonférence de cercle entière avec l'arc ΘKH; ces points se déplaçant l'un et l'autre d'un mouvement uniforme. Il est donc évident que le rapport de la ligne AΛ à la ligne AE est le même que celui de l'arc ΘKZ, auquel la circonférence de cercle entière est ajoutée, à l'arc ΘKH auquel la circonférence de cercle entière est ajoutée (2).



On démontrerait pareillement que, si les droites sont menées à la spirale décrite en troisième révolution, elles auront entre elles le même rapport que les dits arcs auxquels on a ajouté la circonférence entière prise deux fois. On montrerait encore, de la même manière, que les droites menées aux spirales suivantes ont entre elles même rapport que les dits arcs auxquels on a ajouté la circonférence du cercle prise autant de fois que l'indique le nombre moins un de révolutions, même lorsque l'une des droites menées tombe à l'extrémité de la spirale.

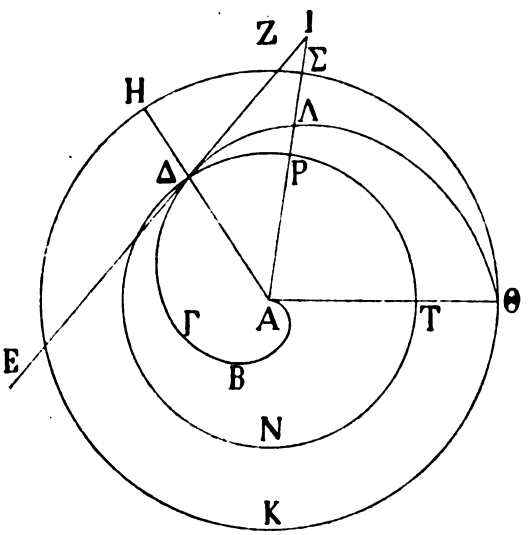
1. C'est-à-dire les arcs du premier cercle tels qu'ils sont définis dans l'énoncé de la proposition XIV.
2. Voir proposition II.

Digitized by Google

PROPOSITION XVI.

Si une ligne droite est tangente à une spirale décrite en première révolution, et si l'on mène une ligne droite du point de contact au point d'origine de la spirale, les angles formés par la tangente avec la droite menée seront inégaux, et l'angle situé dans la partie antérieure ([1]) sera obtus, tandis que celui qui est situé dans la partie postérieure sera aigu.

Soit une spirale décrite en première révolution, sur laquelle on a les points A, B, Γ, Δ, Θ. Soit le point A l'origine de la spirale, AΘ la droite initiale de révolution, et ΘKH le premier cercle. Soit EΔZ une ligne droite, tangente en Δ à la spirale, et menons la droite ΔA du point Δ au point A. Il faut démontrer que la droite ΔZ forme un angle obtus avec la droite AΔ. Décrivons le cercle ΔTN, dont le centre est A et le rayon AΔ. L'arc de cercle, situé à l'avant, tombe nécessairement à l'intérieur de la spirale ; tandis que l'arc, situé à l'arrière, tombe à l'extérieur, parce que, parmi les droites menées de A à la spirale, celles qui sont à l'avant sont plus grandes que AΔ, et celles qui sont à l'arrière sont plus petites. Dès lors, il est évident que l'angle compris sous les droites AΔ, ΔZ n'est pas aigu, puisqu'il est plus grand que l'angle du demi-cercle ([2]). On démontre d'ailleurs de la manière suivante que cet angle n'est pas droit : En effet, qu'il soit droit, s'il se peut ; dès



1. Voir définition VI. C'est-à-dire que l'angle situé du côté de la spirale qui est considéré comme l'avant par rapport à la droite AΔ sera obtus, tandis que l'angle situé du côté arrière par rapport à AΔ sera aigu.

2. C'est-à-dire plus grand que l'angle compris entre la droite AΔ et l'arc de cercle, angle qui lui-même est déjà plus grand que tout angle aigu rectiligne, de même que l'angle restant, compris entre cet arc de cercle et la tangente en Δ serait plus petit que tout angle aigu rectiligne. (Voir EUCLIDE, livre III, proposition 16, édition précitée de la traduction Peyrard, 1809, page 141.)

Digitized by Google

lors, EΔZ est une tangente au cercle ΔTN (1). Il est donc possible de mener, du point A à cette tangente, une droite telle que le rapport de la droite, située entre la tangente et la circonférence du cercle, au rayon du cercle soit moindre que celui de l'arc de cercle, situé entre le point de contact et la droite menée (2) à la tangente, à un arc de cercle donné (3). Menons donc la droite AI à la tangente ; elle coupera la spirale au point Λ et la circonférence du cercle ΔNT au point P. De plus, que le rapport de la droite PI à la droite AP soit moindre que celui de l'arc de cercle ΔP à l'arc de cercle ΔNT ; dès lors, le rapport de la droite entière AI à la droite AP sera aussi moindre que le rapport de l'arc de cercle PΔNT à l'arc de cercle ΔNT, c'est-à-dire moindre que le rapport de l'arc de cercle ΣHKΘ à l'arc de cercle HKΘ (4). Mais le rapport de l'arc de cercle ΣHKΘ à l'arc de cercle HKΘ est le même que celui de la droite AΛ à la droite AΔ ; car cela a été démontré ; par conséquent, le rapport de AI à AP est moindre que celui de AΛ à AΔ ; ce qui est impossible, car PA est égal à AΔ (5). Donc l'angle compris sous AΔ, ΔZ n'est pas droit. Mais il a été démontré qu'il n'est pas aigu ; donc il est obtus, et, par conséquent, l'angle restant est aigu. On démontrerait pareillement qu'il en est de même lorsque la tangente à la spirale est tangente en son extrémité.

---

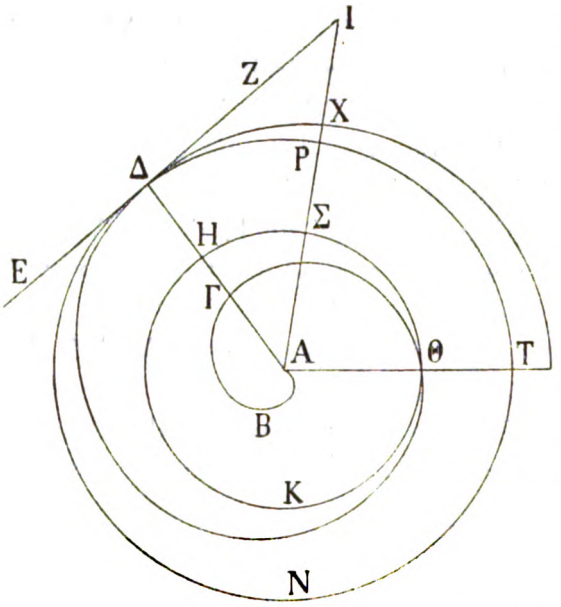
1. Voir EUCLIDE, livre III, proposition 16, corollaire.
2. Sous-entendu : menée du centre.
3. Voir proposition V.
4. On donne : $\frac{PI}{AP} < \frac{\text{arc } \Delta P}{\text{arc } \Delta NT}$, d'où : $\frac{PI + AP}{AP} < \frac{\text{arc } \Delta P - \text{arc } \Delta NT}{\text{arc } \Delta NT}$, ou $\frac{AI}{AP} < \frac{\text{arc } P\Delta NT}{\text{arc } \Delta NT}$. Or, dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les angles au centre ou aux circonférences sont proportionnels aux arcs interceptés (EUCLIDE, livre VI, proposition 33), d'où : $\frac{\text{angle PAT}(>180°)}{\text{angle } \Delta AT(>180°)} = \frac{\text{arc } P\Delta NT}{\text{arc } \Delta NT} = \frac{\text{arc } \Sigma HK\Theta}{\text{arc } HK\Theta}$, d'où : $\frac{AI}{AP} < \frac{\text{arc } \Sigma HK\Theta}{\text{arc } HK\Theta}$.
5. On a, en vertu de la proposition XIV : $\frac{\text{arc } \Sigma HK\Theta}{\text{arc } KH\Theta} = \frac{A\Lambda}{A\Delta}$, d'où, comparant avec la relation de la note précédente : $\frac{AI}{AP} < \frac{A\Lambda}{A\Delta}$, ce qui est absurde, car AP = AΔ. La phrase ἴσα γὰρ ἡ PA τῇ AΔ, c'est-à-dire : car PA est égal à AΔ, est considérée par Heiberg comme une petite interpolation (cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 59). En effet, Archimède abandonne trop souvent les relations intermédiaires à la sagacité du lecteur pour attirer simplement l'attention sur l'égalité de deux rayons d'un même cercle. Quelques éditions comportent, en outre, à cet endroit, une petite interpolation qui serait due à Commandin : μείζων δὲ ἡ IA τῆς AΛ, c'est-à-dire : IA est plus grand que AΛ.

Digitized by Google

PROPOSITION XVII.

Au reste, il en sera encore de même lorsque la droite est tangente à la spirale décrite en seconde révolution.

En effet, soit la droite EZ tangente à une spirale décrite en seconde révolution, et que les autres constructions soient identiques aux précédentes (1). La partie de la circonférence du cercle PNΔ, située à l'avant, tombera encore pareillement à l'intérieur de la spirale, et la partie située à l'arrière tombera en dehors. L'angle compris sous les droites AΔ, ΔZ n'est donc pas droit, mais obtus. En effet, qu'il soit droit, s'il se peut. Dès lors, la droite EZ est une tangente au cercle PNΔ au point Δ (2). Menons donc de nouveau la droite AI à la tangente ; elle coupera la spirale au point X et la circonférence du cercle PNΔ au point P. Que le rapport de PI à PA soit moindre que celui de l'arc ΔP à la circonférence entière du cercle ΔPN (4) augmentée de l'arc ΔNT ; car on a démontré que cela est possible (4). Dès lors, le rapport de la droite entière IA à la droite AP sera moindre que celui de l'arc PΔNT, augmenté de la circonférence entière de cercle, à l'arc ΔNT augmenté de la circonférence entière de cercle (5). Mais, le rapport de l'arc PΔNT, augmenté de la circonférence entière du cercle ΔNTP,



1. Voir proposition XVI.
2. EUCLIDE, livre III, proposition 16, corollaire.
3. C'est-à-dire du cercle ΔNTP.
4. En vertu de la proposition V.
5. On pose : $\frac{PI}{PA} < \frac{\text{arc } \Delta P}{\text{circonférence entière } \Delta NTP + \text{arc } \Delta NT}$, d'où : $\frac{PI + PA}{PA} < \frac{\text{arc } \Delta P + \text{circonf. } \Delta NTP + \text{arc } \Delta NT}{\text{circonf. } \Delta NTP + \text{arc } \Delta NT}$, ou $\frac{IA}{PA} < \frac{\text{arc } P\Delta NT + \text{circonf. } \Delta NTP}{\text{arc } \Delta NT + \text{circonf. } \Delta NTP}$.

Digitized by Google

à l'arc ΔNT, augmenté de la circonférence entière du cercle ΔNTP, est le même que le rapport de l'arc ΣHKΘ, augmenté de la circonférence entière du cercle ΘΣHK, à l'arc HKΘ augmenté de la circonférence entière du cercle ΘΣHK (1) ; tandis que le rapport des derniers arcs que nous venons de dire est le même que celui de la droite XA à la droite AΔ ; car cela a été démontré. En conséquence, le rapport de IA à AP est plus petit que celui de AX à AΔ ; ce qui est impossible (2). Il est donc évident que l'angle compris sous AΔ, ΔZ est obtus et que, par conséquent, l'angle restant est aigu.

On aurait encore les mêmes choses si la tangente à la spirale était tangente en son extrémité.

On démontrera pareillement que, lors même qu'une droite est tangente à une spirale décrite en révolutions aussi nombreuses qu'on voudra, lors même qu'elle est tangente en son extrémité, cette droite formera des angles inégaux avec la droite reliant le point de contact avec l'origine de la spirale, et que l'angle situé à l'avant sera obtus, tandis que l'angle situé à l'arrière sera aigu.

PROPOSITION XVIII.

Si une ligne droite est tangente à l'extrémité d'une spirale décrite en première révolution, et, si du point d'origine de la spirale, on élève une perpendiculaire sur la droite initiale de révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, tandis que la droite, située entre la tangente et l'origine de la spirale, sera égale à la circonférence du premier cercle.

---

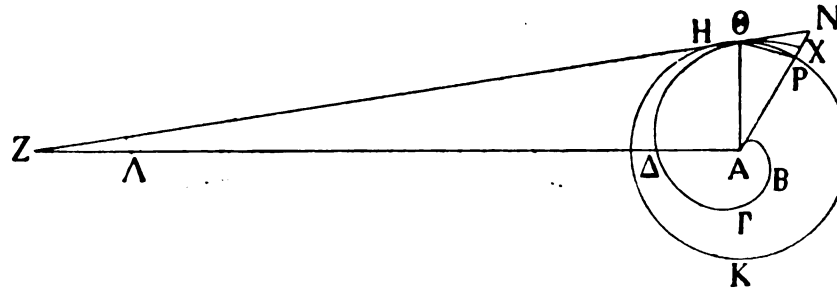
1. Si, pour simplifier, on pose : circonférence ΔNTP = C ; circonférence ΘΣHK = c ; arc ΔNT = A ; arc PΔNT = A′ ; arc HKΘ = a ; arc ΣHKΘ = a', on aura : $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a} = \frac{C}{c}$, d'où : $\frac{A' + C}{a' + c} = \frac{A + C}{a + c}$, d'où, par permutation : $\frac{A' + C}{A + C} = \frac{a' + c}{a + c}$. En substituant, il vient, comme le texte : $\frac{\text{arc PΔNT} + \text{circonf. ΔNTP}}{\text{arc ΔNT} + \text{circonf. ΔNTP}} = \frac{\text{arc ΣHKΘ} + \text{circ. ΘΣHK}}{\text{arc HKΘ} + \text{circ. ΘΣHK}}$.

2. La proposition XV donne : $\frac{XA}{A\Delta} = \frac{\text{arc ΣHKΘ} + \text{circ. ΘΣHK}}{\text{arc HKΘ} + \text{circ. ΘΣHK}}$, d'où, remontant à l'égalité de la note précédente et à l'inégalité de la note avant-précédente : $\frac{IA}{AP} < \frac{AX}{A\Delta}$; ce qui est absurde, car AP = AΔ.

Le texte présente ici l'interpolation suivante : « car PA est égal à AΔ et IA est plus grand que AX ». (Cfr. HEIBERG, *loc. cit.*, vol. II, p. 60.)

Digitized by Google

Soit la spirale ABΓΔΘ. Soit le point A l'origine de la spirale, ΘA la droite initiale de révolution, et ΘHK le premier cercle. Soit ΘZ une tangente à la spirale en Θ, et menons AZ perpendiculairement à ΘA du point A. Cette perpendiculaire rencontrera ΘZ, puisque ZΘ et ΘA comprennent un angle aigu (1). Soit Z le point de rencontre. On doit démontrer que la droite ZA est égale à la circonférence du cercle ΘKH.



En effet, si elle n'est pas égale, elle est plus grande ou plus petite. Qu'elle soit d'abord plus grande, s'il se peut. Dès lors, prenons une droite ΛA, plus petite que la droite ZA et plus grande que la circonférence du cercle ΘHK (2). On a donc un certain cercle ΘHK et, dans ce cercle, une droite ΘH plus petite que son diamètre (3) ; de plus, le rapport de ΘA à AΛ est plus grand que celui de la moitié de HΘ à la droite qui lui est menée perpendiculairement du point A, puisqu'il est plus grand aussi que le rapport de ΘA à AZ (4). Il est donc possible de mener, de A à la droite prolongée, une droite AN, de manière que le rapport de la droite NP, située entre la circonférence et la droite prolongée, à ΘP soit le même que celui de ΘA à AΛ (5). En conséquence, le rapport de NP à PA sera le même

1. En vertu de la proposition XVI et d'un postulatum de la géométrie euclidienne.

2. Donnée dont la possibilité est démontrée à la proposition IV.

3. La droite ΘH est tangente à la spirale ; elle ne peut donc jamais s'appliquer sur ΘA, et est donc nécessairement plus petite que le diamètre du premier cercle.

4. En effet, si de A on abaisse la perpendiculaire sur ΘH (non tracée sur la figure), on aura, par similitude de triangles rectangles : $\frac{\Theta A}{AZ} = \frac{\frac{1}{2}\Theta H}{\text{perpend. de A sur } \Theta H}$.

Or, par hypothèse : $A\Lambda < AZ$, donc : $\frac{\Theta A}{A\Lambda} > \frac{\Theta A}{AZ}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Theta A}{A\Lambda} > \frac{\frac{1}{2}\Theta H}{\text{perp. de A sur } \Theta H}$.

5. La proposition VII démontre qu'il est possible de mener AN de manière que l'on ait : $\frac{NP}{\Theta P} = \frac{\Theta A}{A\Lambda}$, pourvu que soit remplie la condition : $\frac{\Theta A}{A\Lambda} > \frac{\frac{1}{2}\Theta H}{\text{perp. de A sur } \Theta H}$.

Digitized by Google

que celui de la droite ΘP à la droite ΘΛ (1). Or, le rapport de ΘP à AΛ est plus petit que celui de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK ; car la droite ΘP est plus petite que l'arc ΘP, et la droite AΛ est plus grande que la circonférence du cercle ΘHK. Donc, le rapport de NP à PA sera aussi plus petit que celui de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK, et, par suite, le rapport de la droite entière NA à la droite AP est plus petit que celui de l'arc ΘP, augmenté de la circonférence entière du cercle, à la circonférence du cercle ΘHK (2). Or, le rapport de l'arc ΘP, augmenté de la circonférence entière du cercle ΘHK, à la circonférence du cercle ΘHK est le même que celui de XA à AΘ ; car cela a été démontré. Dès lors, le rapport de NA à AP est plus petit que celui de XA à AΘ ; ce qui est impossible, puisque NA est plus grand que AX, et que AP est égal à ΘA (3). Donc, la droite ZA ne sera pas plus grande que la circonférence du cercle ΘHK.

Que la droite ZA soit, au contraire, plus petite que la circonférence du cercle ΘHK, s'il se peut. Dès lors, prenons encore une certaine droite AΛ plus grande que AZ, mais plus petite que la circonférence du cercle ΘHK. Par le point Θ, menons ΘM parallèle à AZ. On a donc de nouveau un cercle ΘHK, une ligne ΘH dans ce cercle, plus petite que le diamètre (4), et une autre droite tangente à ce cercle au point Θ. De plus, le rapport de AΘ à AΛ est moindre que celui de la moitié de la droite HΘ à la droite qui lui est menée perpendiculairement du point A, puisqu'il est moindre aussi que celui

---

1. La relation donnée : $\frac{NP}{\Theta P} = \frac{\Theta A}{A\Lambda}$ donne : $\frac{NP}{\Theta A} = \frac{\Theta P}{A\Lambda}$. Or, ΘA = PA, d'où, comme le texte : $\frac{NP}{PA} = \frac{\Theta P}{A\Lambda}$.

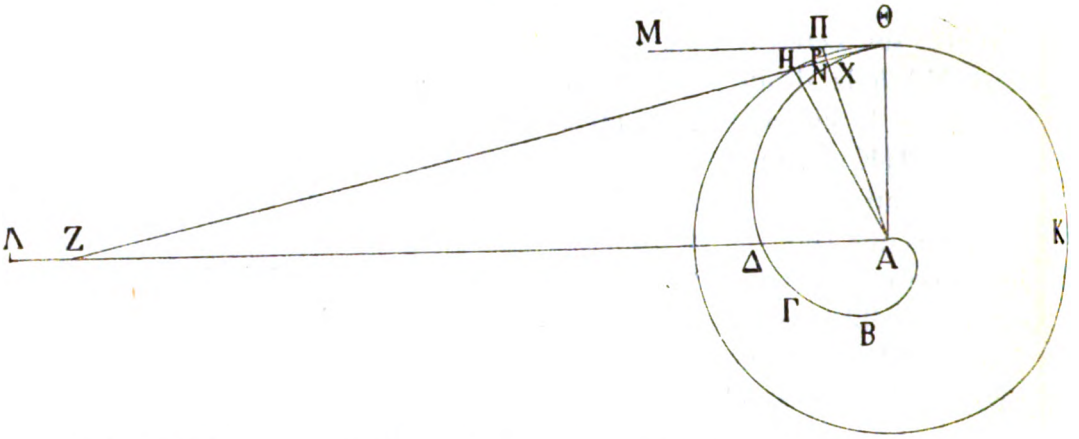
2. Par hypothèse: AΛ > circonf.ΘHK. Or, ΘP < arc ΘP, d'où: $\frac{\Theta P}{A\Lambda} < \frac{\text{arc } \Theta P}{\text{circonf.}\Theta HK}$, d'où, comparant avec la relation de la note précédente : $\frac{NP}{PA} < \frac{\text{arc } \Theta P}{\text{circonf. } \Theta HK}$, d'où : $\frac{NP+PA}{PA} = \frac{\text{arc } \Theta P + \text{circonf. } \Theta HK}{\text{circonf. } \Theta HK}$, ou $\frac{NA}{AP} < \frac{\text{arc } \Theta P + \text{circonf. } \Theta HK}{\text{circonf. } \Theta HK}$.

3. En vertu de la proposition XV, les droites AΘ, AX, qui sont menées à une spirale de seconde révolution, donnent : $\frac{AX}{A\Theta} = \frac{\text{arc } \Theta P + \text{circonf. } \Theta HK}{\text{circonf. } \Theta HK}$, d'où, en présence de la relation de la note précédente : $\frac{NA}{AP} < \frac{AX}{A\Theta}$; ce qui est absurde, car AP = AΘ et NA > AX.

4. Voir note 3 relative à la première partie de la démonstration.

Digitized by Google

de ΘA à AZ (1). Dès lors, il est possible de mener la droite AΠ du point A à la tangente de manière que le rapport de PN, situé entre la droite qui est dans le cercle (2) et la circonférence, au segment ΘΠ de la tangente (3) soit le même que le rapport de ΘA à AΛ (4). La



droite AΠ coupera d'ailleurs le cercle en P et la spirale en X, et, par permutation, le rapport de NP à PA sera aussi le même que celui de ΘΠ à AΛ (5). Or, le rapport de ΘΠ à AΛ est plus grand que celui de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK ; car la droite ΘΠ est plus grande que l'arc ΘP (6), et la droite AΛ est plus petite que la circonférence du cercle ΘHK. Donc, le rapport de NP à AP est plus grand que celui de l'arc ΘP à la circonférence du cercle ΘHK, et, par suite, le rapport de PA à AN est plus grand que celui de la circonférence du cercle ΘHK à l'arc ΘKP (7). Or, le rapport de la

1. Voir la note relative à la première partie de la démonstration.

2. C'est-à-dire la partie de la tangente HΘ à la spirale qui est interceptée par la circonférence du premier cercle.

3. C'est-à-dire de la tangente ΘM menée au premier cercle en Θ.

4. Puisque la condition : $\frac{\Theta A}{\Theta \Lambda} = \frac{\frac{1}{2}H\Theta}{\text{perpend. de A sur } H\Theta}$ est remplie, il est possible, en vertu de la proposition VIII, de mener AΠ de manière que : $\frac{PN}{\Theta\Pi} = \frac{\Theta A}{A\Lambda}$.

5. La relation précédente donne, par permutation : $\frac{PN}{\Theta A} = \frac{\Theta\Pi}{A\Lambda}$. Or, ΘA = PA, d'où, comme le texte : $\frac{PN}{PA} = \frac{\Theta\Pi}{A\Lambda}$.

6. Si du point Π l'on mène deux tangentes au cercle, leur somme sera plus grande que l'arc compris ; or, les tangentes sont égales, donc leur demi-somme ΠΘ sera plus grande que le demi-arc ΘP.

7. Par hypothèse : AΛ < circonférence ΘHK. Or, ΘΠ > arc ΘP, donc : $\frac{\Theta\Pi}{A\Lambda} > \frac{\text{arc } \Theta P}{\text{circonf. } \Theta HP}$. Or, $\frac{PN}{PA} = \frac{\Theta\Pi}{A\Lambda}$, d'où : $\frac{PN}{PA} > \frac{\text{arc } \Theta P}{\text{circonf. } \Theta HK}$, d'où : $\frac{PA - PN}{PA} >$

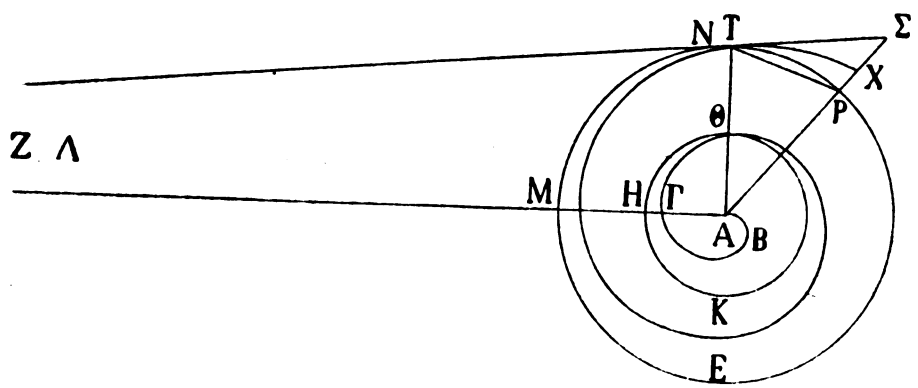
Digitized by Google

circonférence du cercle ΘHK à l'arc ΘKP est le même que celui de ΘA à AX ; car cela a été démontré ; par conséquent, le rapport de PA à AN est plus grand que celui de ΘA à AX ; ce qui est impossible (1). Dès lors, la droite ZA n'est ni plus grande ni plus petite que la circonférence du cercle ΘHK ; donc elle lui est égale.

PROPOSITION XIX.

Si une droite est tangente à l'extrémité d'une spirale décrite en seconde révolution, et, si à l'origine de la spirale on élève une perpendiculaire sur la droite initiale de révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, tandis que la droite située entre la tangente et l'origine de la spirale sera double de la circonférence du second cercle.

En effet, soit ABΓΘ la spirale décrite en première révolution, et ΘET celle décrite en seconde révolution. Soit ΘKH le premier cercle



et TMN le second. Soit TZ une tangente à la spirale en T, et menons ZA perpendiculairement à TA ; cette perpendiculaire rencontrera TZ,

---

$\frac{\text{circonf. ΘHK—arc ΘP}}{\text{circonf. ΘHK}}$ ou $\frac{AN}{PA} > \frac{\text{arc ΘKP}}{\text{circonf. ΘHK}}$ ou, comme le texte : $\frac{PA}{AN} > \frac{\text{circonf. ΘHK}}{\text{arc ΘKP}}$.

1. En vertu de la proposition XIV, les droites AΘ, AX qui sont menées à une spirale de première révolution, donnent : $\frac{A\Theta}{AX} = \frac{\text{circonf. ΘHK}}{\text{arc ΘKP}}$, d'où, en présence de la relation de la note précédente : $\frac{PA}{AN} > \frac{A\Theta}{AX}$; ce qui est absurde, car $PA = A\Theta$ et $AN > AX$.

Digitized by Google

puisqu'il a été démontré que l'angle compris sous AT, TZ est aigu(1). On doit démontrer que la droite ZA est double de la circonférence du cercle TMN.

En effet, si elle n'est pas double, elle est plus grande ou plus petite que double. Qu'elle soit d'abord plus grande que double, s'il se peut, et prenons une certaine droite ΛA, plus petite que ZA et plus grande que le double de la circonférence du cercle TMN (2). On a donc un certain cercle TMN, une droite TN donnée dans ce cercle, plus petite que le diamètre (3), et le rapport de TA à AΛ plus grand que celui de la moitié de la droite TN à la droite qui lui est menée perpendiculairement du point A (4). Dès lors, il est possible de mener une droite AΣ du point A à la droite TN prolongée, de manière que le rapport de la droite PΣ, située entre la circonférence et la droite prolongée, à la droite TP soit le même que celui de TA à AΛ (5). La droite AΣ coupe donc le cercle en P et la spirale en X, et, par permutation, le rapport de PΣ à TA est le même que celui de TP à AΛ. Or, le rapport de TP à AΛ est moindre que celui de l'arc TP au double de la circonférence du cercle, puisque la droite TP est plus petite que l'arc TP, et que la droite AΛ est plus grande que le double de la circonférence du cercle TMN ; par conséquent, le rapport de PΣ à AP est plus petit que celui de l'arc TP au double de la circonférence du cercle TMN. Dès lors, le rapport de la droite entière ΣA à la droite AP est plus petit que celui de l'arc TP, augmenté de la circonférence du cercle TMN, prise deux fois, à la circonférence du cercle TMN deux fois prise (6). Or, le rapport des dites circonférences

---

1. Voir proposition XVII.

2. Voir proposition XVIII, note 2 et proposition IV.

3. Voir proposition XVIII, note 3.

4. Si de A on abaisse la perpendiculaire sur TN (non tracée sur la figure), la similitude de deux triangles rectangles donne : $\frac{TA}{AZ} = \frac{\frac{1}{2}TN}{\text{perp. de A sur TN}}$ Or, par hypothèse : $A\Lambda < AZ$, d'où : $\frac{TA}{A\Lambda} > \frac{\frac{1}{2}TN}{\text{perp. de A sur TN}}$.

5. La proposition VII a démontré que, lorsque la condition précédente est remplie, on peut mener AΣ de manière que l'on ait : $\frac{P\Sigma}{TP} = \frac{TA}{A\Lambda}$.

6. Le rapport réalisé : $\frac{P\Sigma}{TP} = \frac{TA}{A\Lambda}$ donne, par permutation : $\frac{P\Sigma}{TA} = \frac{TP}{A\Lambda}$. Or, par hypothèse : $A\Lambda > 2$ circonférences TMN et TP < arc TP, d'où : $\frac{TP}{A\Lambda} < \frac{\text{arc TP}}{2 \text{ circ. TMN}}$ ou,

Digitized by Google

est le même que celui de XA à AT, car cela a été démontré ; par conséquent, le rapport de AΣ à AP est plus petit que celui de XA à TA ; ce qui est impossible (1). La droite ZA n'est donc pas plus grande que le double de la circonférence du cercle TMN. On démontrerait pareillement qu'elle n'est pas plus petite que le double. Il est donc évident qu'elle est le double.

On démontrera de la même manière que, lors même qu'une droite est tangente à l'extrémité d'une spirale décrite en révolutions aussi nombreuses qu'on voudra, et qu'une droite, menée de l'origine de la spirale, perpendiculairement à la ligne initiale de révolution, coupe cette tangente, cette droite sera multiple de la circonférence du cercle suivant le nombre même qui compte les révolutions.

PROPOSITION XX.

Si une droite est tangente à une spirale décrite en première révolution, sauf à l'extrémité de cette spirale ; si une droite relie le point de contact avec l'origine de la spirale ; si un cercle est décrit de l'origine de la spirale comme centre avec la droite de jonction comme rayon, et, si une perpendiculaire est menée de l'origine de la spirale sur la droite reliant le point de contact avec l'origine de la spirale, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, tandis que la droite située entre le point de rencontre et l'origine de la spirale sera égale à l'arc du cercle décrit, situé entre le point de contact et le point d'intersection où le cercle décrit coupe la ligne initiale de révolution ; cet arc étant pris vers l'avant, à partir du point situé sur la droite initiale de révolution.

Soit une spirale décrite en première révolution, sur laquelle on a l'arc ABΓΔ, et que la droite EZ lui soit tangente en Δ. Menons la

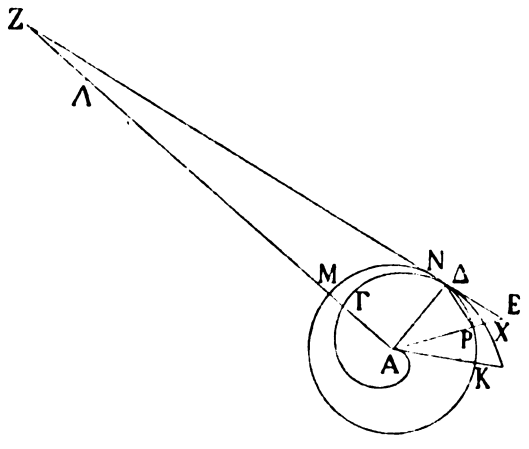
---

en observant que $TA = AP$, $\frac{P\Sigma}{AP} < \frac{\text{arc } TP}{2 \text{ circ. } TMN}$, d'où : $\frac{P\Sigma + AP}{AP} < \frac{\text{arc } TP + 2 \text{ circ. } TMN}{2 \text{ circ. } TMN}$, ou, comme le texte : $\frac{\Sigma A}{AP} < \frac{\text{arc } TP + 2 \text{ circ. } TMN}{2 \text{ circ. } TMN}$.

1. En vertu de la proposition XV, les droites AT, AX, qui sont menées à la spirale de troisième révolution, donnent : $\frac{AX}{AT} = \frac{\text{arc } TP + 2 \text{ circ. } TMN}{2 \text{ circ. } TMN}$, d'où, comparant avec la relation de la note précédente, il vient, comme le texte : $\frac{A\Sigma}{AP} < \frac{XA}{TA}$; ce qui est absurde, car $AP = TA$ et $A\Sigma > XA$.

Digitized by Google

droite AΔ du point Δ à l'origine de la spirale ; décrivons le cercle ΔMN, de centre A et de rayon AΔ, coupant la ligne initiale de révolution en K, et menons la droite ZA perpendiculairement à la droite AΔ. Il est évident que cette perpendiculaire aura un point de rencontre (1), et il faut démontrer, en outre, qu'elle est égale à l'arc KMNΔ.



En effet, si elle n'est pas égale, elle est plus grande ou plus petite. Qu'elle soit d'abord plus grande, s'il se peut. Prenons une certaine droite ΛA, plus petite que la droite ZA, mais plus grande que l'arc KMNΔ(2). On a donc de nouveau un cercle KMN, une droite ΔN dans ce cercle, plus petite que le diamètre(3), et le rapport de ΔA à AΛ plus grand que celui de la moitié de ΔN à la droite qui lui est menée perpendiculairement du point A (4). Dès lors, il est possible de mener une droite AE du point A à la droite prolongée, de manière que le rapport de EP à ΔP soit le même que celui de ΔA à AΛ ; car il a été démontré que cela est possible. Le rapport de EP à AP sera donc aussi le même que celui de ΔP à AΛ. Or, le rapport de ΔP à AΛ est moindre que celui de l'arc ΔP à l'arc KMΔ, puisque ΔP est plus petit que l'arc ΔP, et que AΛ est plus grand que l'arc KMΔ ; par conséquent, le rapport de la droite EP à la droite PA est moindre que celui de l'arc ΔP à l'arc KMΔ. Donc, le rapport de AE à AP sera moindre aussi que celui de l'arc KMP à l'arc KMΔ (5). Mais,

1. Sous-entendu : avec la tangente ΔZ, car il a été démontré à la proposition XVI que l'angle AΔZ est aigu.

2. Voir proposition IV.

3. Voir proposition XVIII et note relative à cette même droite donnée dans un cercle.

4. Si de A on abaisse la perpendiculaire sur ΔN, on aura par similitude de triangles rectangles : $\frac{\Delta A}{AZ} = \frac{\frac{1}{2}\Delta N}{\text{perp. de A sur } \Delta N}$. Or, par hypothèse première $A\Lambda < AZ$, donc : $\frac{\Delta A}{A\Lambda} > \frac{\frac{1}{2}\Delta N}{\text{perp. de A sur } \Delta N}$.

5. La proposition VII démontre que, sous condition de la relation de la note précédente, il est possible de réaliser : $\frac{EP}{\Delta P} = \frac{\Delta A}{A\Lambda}$, d'où, en observant que : $\Delta A = AP$

Digitized by Google

le rapport de l'arc KMP à l'arc KMΔ est le même que celui de XA à AΔ ; par conséquent, le rapport de EA à AP sera moindre que celui de AX à ΔA ; ce qui est impossible (1). Dès lors, la droite ZA n'est pas plus grande que l'arc KMΔ. Et l'on démontrerait, comme précédemment, qu'elle n'est pas plus petite ; donc elle lui est égale.

On démontrera encore, de la même manière, que, si une droite est tangente à une spirale décrite en seconde révolution, sauf à l'extrémité de cette spirale, les autres constructions étant les mêmes, la droite, située entre le point de rencontre avec la tangente et l'origine de la spirale (2), est égale à la circonférence entière du cercle décrit (3), augmentée de l'arc situé entre les points que nous avons dits ; cet arc étant pris de la même manière (4). De plus, si une droite est tangente à une spirale décrite en révolutions aussi nombreuses qu'on voudra, sauf à l'extrémité de cette spirale, les autres constructions étant les mêmes, la droite, située entre les points que nous avons dits, sera multiple de la circonférence du cercle décrit suivant le nombre qui compte, à une unité près, le nombre de révolutions, et vaudra, en plus, l'arc situé entre les dits points, et pris de la même manière.

PROPOSITION XXI.

Si l'on prend l'aire comprise entre une spirale décrite en première révolution et entre la première droite (5) à l'origine de la révolution,

---

et en permutant : $\frac{EP}{AP} = \frac{\Delta P}{A\Delta}$. Or, par hypothèse : $A\Delta >$ arc KMΔ et l'on a : $\Delta P <$ arc ΔP, d'où : $\frac{\Delta P}{A\Delta} < \frac{\text{arc } \Delta P}{\text{arc KM}\Delta}$, d'où : $\frac{EP}{AP} < \frac{\text{arc } \Delta P}{\text{arc KM}\Delta}$, d'où : $\frac{EP + AP}{AP} < \frac{\text{arc } \Delta P + \text{arc KM}\Delta}{\text{arc KM}\Delta}$ ou, comme le texte : $\frac{AE}{AP} < \frac{\text{arc KMP}}{\text{arc KM}\Delta}$.

1. En vertu de la proposition XIV, les droites XA, AΔ, qui sont menées à une spirale de première révolution, donnent : $\frac{XA}{A\Delta} = \frac{\text{arc KMP}}{\text{arc KM}\Delta}$, d'où, en présence de la relation de la note précédente : $\frac{EA}{AP} < \frac{XA}{A\Delta}$; ce qui est absurde, car AP = AΔ et EA > XA.

2. Puisque les constructions restent les mêmes, il est sous-entendu que cette droite est perpendiculaire à la droite qui va de l'origine de la spirale au point de contact de la tangente.

3. C'est-à-dire le cercle décrit de l'origine de la spirale comme centre avec un rayon égal à la droite qui joint l'origine au point de contact de la tangente.

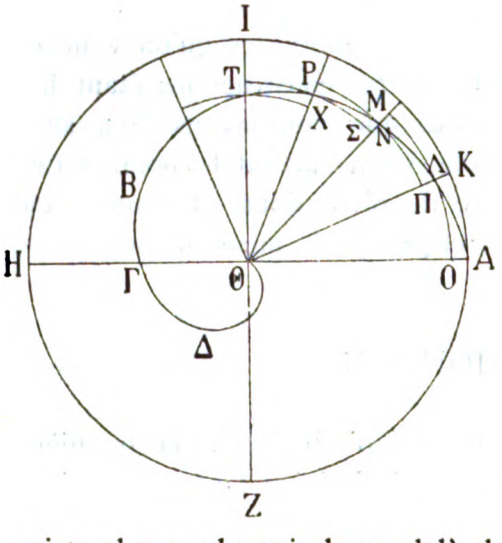
4. C'est-à-dire à l'avant de la spirale.

5. Voir définition IV.

Digitized by Google

il est possible de lui circonscrire une figure plane et de lui en inscrire une autre qui soient composées de secteurs semblables, de manière que la figure circonscrite excède la figure inscrite d'une aire moindre que toute aire donnée.

Soit une spirale décrite en première révolution sur laquelle on a l'arc ΑΒΓΔ. Soit le point Θ l'origine de la spirale, ΘA la ligne initiale de révolution, ZHIA le premier cercle et AH, ZI des diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre. Dès lors, si l'on partage continuellement en deux parties égales l'angle droit, ainsi que le secteur qui contient l'angle droit, le secteur restant sera moindre que l'aire donnée (1). Soit AΘK le secteur devenu moindre que l'aire donnée. Divisons les quatre angles droits en angles égaux à celui qui est compris sous les droites AΘ, ΘK, et prolongeons jusqu'à la spirale les droites qui forment ces angles. Dès lors, soit Λ le point où la droite ΘK coupe la spirale, et décrivons le cercle de centre Θ et de rayon ΘΛ. A l'avant, la circonférence de ce cercle tombera à l'intérieur de la spirale, tandis qu'à l'arrière, elle tombera à l'extérieur. Décrivons donc la circonférence jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite ΘA et la droite qui tombe sur la spirale au delà de la droite ΘK. Soit à nouveau N le point où la droite ΘM coupe aussi la spirale, et décrivons le cercle de centre Θ et de rayon ΘN, jusqu'à ce que la circonférence de ce cercle rencontre la droite ΘK et la droite qui tombe sur la spirale au delà de la droite ΘM. Décrivons, de même, du centre Θ, des cercles passant par tous les autres points où les droites, formant des angles égaux, coupent la spirale, jusqu'à ce que chacune de leurs circonférences rencontre les droites de l'avant et de l'arrière. On aura donc ainsi une certaine figure circonscrite et une autre qui est inscrite à l'aire prise. Nous allons démontrer que la figure circonscrite excède celle qui est inscrite de la plus petite aire donnée.



1. EUCLIDE, livre X, proposition 1 (voir trad. précitée de Peyrard, p. 283bis).

Digitized by Google

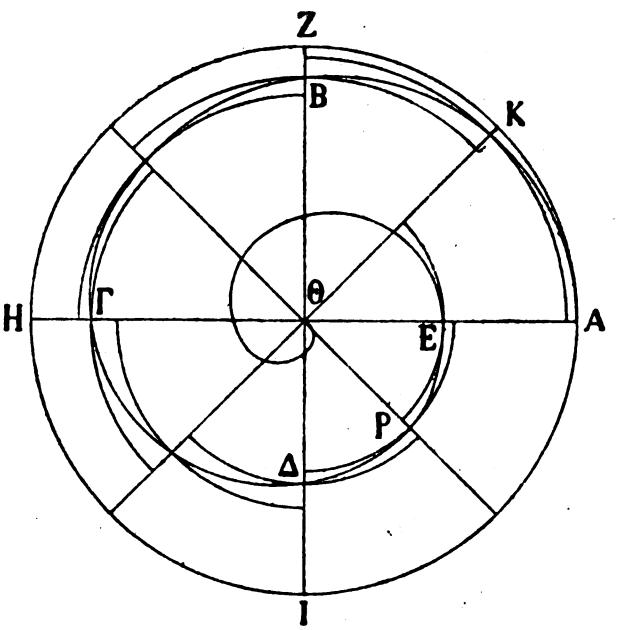
En effet, le secteur ΘΛO est égal au secteur ΘMΛ, le secteur ΘNΠ égal au secteur ΘNP, le secteur ΘXΣ égal au secteur ΘXT, et chacun des autres secteurs, dans la figure inscrite, est égal à celui qui possède un côté commun dans la figure circonscrite. Il est donc évident que la somme des secteurs sera égale à la somme des secteurs ; par conséquent, la figure inscrite dans l'aire équivaut à la figure circonscrite à l'aire, à moins du secteur ΘAK ; car ce dernier est le seul qui n'ait pas été pris parmi ceux de la figure circonscrite. Dès lors, il est évident que la figure circonscrite excède la figure inscrite du secteur ΘAK, qui est moindre que l'aire donnée.

COROLLAIRE.

D'après ce qui précède, il est clair qu'il est possible de circonscrire une figure à l'aire en question de la manière qui a été dite, de telle sorte que cette figure excède cette aire de moins que toute aire donnée.

PROPOSITION XXII.

Si l'on prend l'aire comprise entre une spirale décrite en seconde révolution et entre la seconde droite (1) à l'origine de la révolution, il est possible de lui circonscrire une figure plane et de lui en inscrire une autre, composées de secteurs semblables, de manière que la figure circonscrite excède la figure inscrite de moins que toute aire donnée.



1. Voir définition IV.

Digitized by Google

Soit une spirale décrite en seconde révolution, sur laquelle on a l'arc ABΓΔE. Soit le point Θ l'origine de la spirale, AΘ la ligne initiale de révolution, et EA la seconde droite à l'origine de la révolution. Soit AZH le second cercle, et AΓH, ZI des diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre. Ayant donc de nouveau divisé en deux parties égales l'angle droit et le secteur qui comprend cet angle droit, le secteur restant sera plus petit que l'aire donnée. Soit ΘKA le secteur obtenu, plus petit que l'aire donnée. Dès lors, si l'on divise les angles droits en angles égaux à celui qui est compris sous les droites KΘ, ΘA, et, si les autres constructions sont les mêmes que précédemment, la figure circonscrite excédera la figure inscrite d'une aire moindre que le secteur ΘKA ; car elle l'excédera de l'excédent du secteur ΘKA sur le secteur ΘEP.

COROLLAIRE.

Il est donc évidemment possible aussi que la figure circonscrite excède l'aire que l'on a prise de moins que toute aire donnée, et que, de son côté, l'aire prise excède la figure inscrite de moins que toute aire donnée.

Et, de la même manière, il est clair que, si l'on prend l'aire comprise entre une spirale décrite en un nombre de révolutions aussi grand qu'on voudra et entre la droite à l'origine désignée par ce même nombre, il est possible de circonscrire une figure plane, de la manière qui a été dite, de telle sorte que cette figure circonscrite excède l'aire prise de moins que toute aire donnée, et, d'un autre côté, d'en inscrire une de telle sorte que l'aire prise excède la figure inscrite de moins que toute aire donnée.

PROPOSITION XXIII.

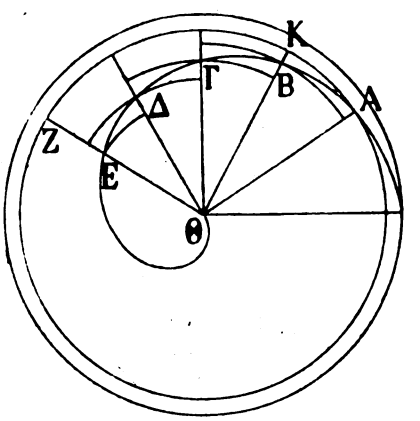
Si l'on prend l'aire comprise entre une spirale plus petite que celle qui est décrite dans une révolution, n'ayant pas d'extrémité à l'origine de la spirale (1), et entre des droites menées des extrémités de la

1. C'est-à-dire une portion de spirale dans laquelle une extrémité ne sera pas l'origine, ou bien dans laquelle l'un des rayons vecteurs limitant l'aire du secteur ne se réduira pas au seul point d'origine.

Digitized by Google

spirale, il est possible de circonscrire une figure plane à cette aire, et de lui en inscrire une autre, composées de secteurs semblables, de manière que la figure circonscrite excède la figure inscrite de moins que toute aire donnée.

Soit une spirale sur laquelle on a l'arc ABΓΔE, et dont les points A, E sont les extrémités. Soit Θ l'origine de la spirale et AΘ, ΘE les droites menées. Décrivons le cercle de centre Θ et de rayon ΘA, rencontrant la droite ΘE au point Z. Après avoir divisé continuellement l'angle en Θ et le secteur ΘAZ en deux parties égales, ce qui reste sera moindre que toute aire donnée. Soit ΘAK le secteur moindre que l'aire donnée. Décrivons, de la même manière que précédemment, des cercles passant par les points où les droites qui forment des angles égaux en Θ coupent la spirale, de telle sorte que chaque arc rencontre une droite à l'avant et une droite à l'arrière. Dès lors, une figure plane composée de secteurs semblables sera circonscrite, tandis qu'une autre sera inscrite à l'aire comprise entre la spirale ABΓΔE et les droites AΘ, ΘE, et la figure circonscrite excédera celle qui est inscrite de moins que l'aire donnée ; car le secteur ΘAK est moindre que cette aire donnée.



COROLLAIRE.

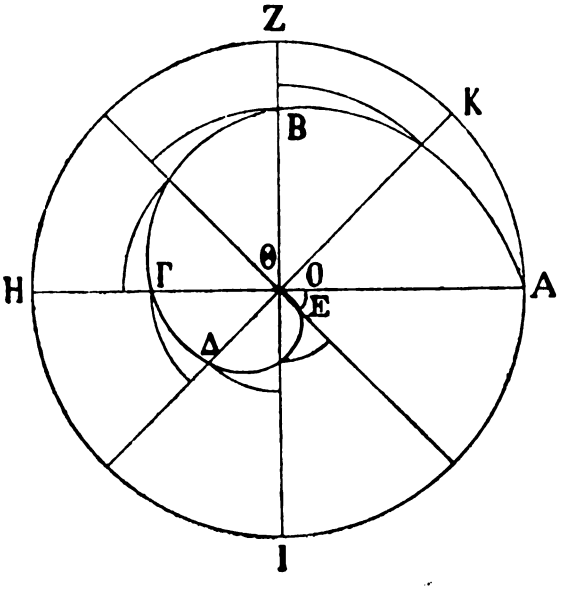
Il est clair, d'après cela, qu'il est possible de circonscrire, de la manière dite, une figure plane à l'aire en question, de telle sorte que la figure circonscrite excède cette aire de moins que toute aire donnée, et, d'un autre côté, de lui en inscrire une de telle sorte que cette aire excède la figure inscrite de moins que toute aire donnée.

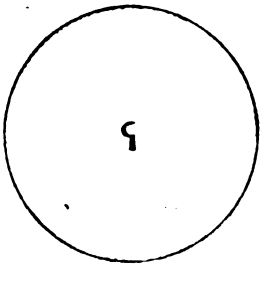
Digitized by Google

PROPOSITION XXIV.

L'aire comprise entre la spirale décrite en première révolution et la première des droites en position initiale de révolution est équivalente au tiers du premier cercle (1).

Soit une spirale décrite en première révolution sur laquelle on a l'arc ABΓΔEΘ. Soit le point Θ l'origine de la spirale, ΘA la première des droites en position initiale de révolution et AKZHI le premier cercle dont le tiers est le cercle placé en ϛ. On doit démontrer que l'aire que nous venons de dire est équivalente au cercle ϛ.





En effet, si elle ne lui est pas équivalente, elle est soit plus grande soit plus petite. Qu'elle soit d'abord plus petite, s'il se peut. Or, il est possible de circonscrire à l'aire comprise entre la spirale ABΓΔEΘ et la droite AΘ une figure plane, composée de secteurs semblables, de manière que la figure circonscrite excède l'aire de moins que l'excédent du cercle ϛ sur la dite aire (2). Circonscrivons-la donc, et soit ΘAK le plus grand et ΘEO le plus petit des secteurs dont se compose la dite figure. Dès lors, il est évident que la figure circonscrite est plus petite que le cercle ϛ (3). Prolongeons maintenant les droites qui forment

1. Proposition déjà mentionnée dans le préambule.
2. Voir proposition XXI, corollaire.
3. Par hypothèse première : fig. circonscrite — aire spirale < cercle ϛ — aire spirale, d'où : fig. circonscrite < cercle ϛ.

Digitized by Google

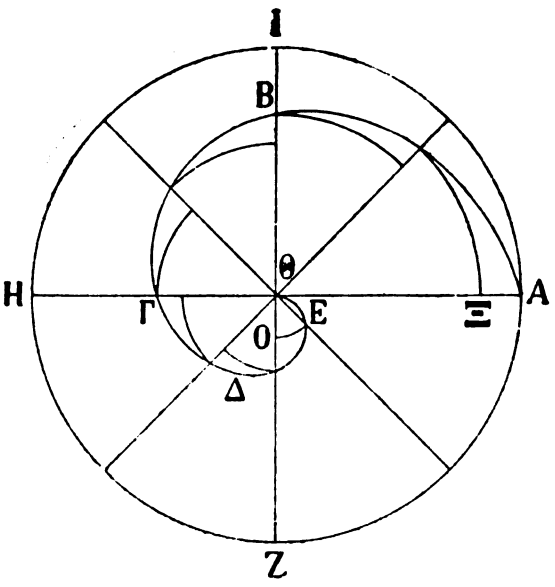
des angles égaux en Θ jusqu'à leur rencontre avec la circonférence du cercle. On a donc certaines droites menées du point Θ à la rencontre de la spirale, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, dont la plus grande est ΘA, la plus petite ΘE (1), et dont la plus petite est égale à l'excédent (2). De plus, on a d'autres droites menées du point Θ à la rencontre de la circonférence du cercle, en même nombre que les précédentes, toutes égales à la plus grande de celles-ci, et l'on a construit sur toutes des secteurs semblables, tant sur celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur que sur celles qui sont égales entre elles et égales à la plus grande. Il s'ensuit que l'ensemble des secteurs construits sur les droites égales à la plus grande sera moindre que le triple de l'ensemble des secteurs construits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur ; car cela a été démontré (3). Or, l'ensemble des secteurs construits sur les droites égales entre elles et égales à la plus grande équivaut au cercle AZHI ; tandis que l'ensemble des secteurs construits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur équivaut à la figure circonscrite ; par conséquent, le cercle AZHI est plus petit que le triple de la figure circonscrite. Or, ce cercle est le triple du cercle ϛ (4) ; donc le cercle ϛ est plus petit que la figure circonscrite. Or, il n'est pas plus petit, mais plus grand (5) ; par conséquent, l'aire comprise entre la spirale ABΓΔEΘ et la droite AΘ n'est pas plus petite que l'aire ϛ.

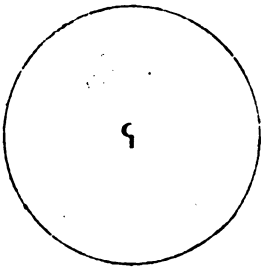
Au reste, elle n'est pas plus grande. En effet, qu'elle soit plus grande, s'il se peut. Il est donc de nouveau possible d'inscrire une figure dans l'aire comprise entre la spirale ABΓΔEΘ et la droite AΘ, de manière que la dite aire dépasse la figure inscrite de moins de l'excédent de la dite aire sur le cercle ϛ (6). Inscrivons-la donc, et soit ΘPΞ le plus grand et OΘE le plus petit des secteurs dont se compose la figure inscrite. Il est évident, que dès lors, la figure inscrite sera plus grande que le cercle ϛ (7). Prolongeons maintenant les droites qui forment des angles égaux en Θ jusqu'à leur rencontre avec la

1. Voir proposition XII.
2. Voir proposition I.
3. Voir proposition X, corollaire.
4. Par hypothèse.
5. Par hypothèse première.
6. Voir proposition XXI, corollaire.
7. Par hypothèse seconde : aire spirale — fig. inscrite < aire spirale — cercle ϛ, d'où : figure inscrite > cercle ϛ.

Digitized by Google

circonférence du cercle. On a donc de nouveau certaines droites menées du point Θ à la rencontre de la spirale, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, dont la plus grande est ΘA, la plus petite ΘE (1), et dont la plus petite est égale à l'excédent (4). De plus, on a certaines autres droites menées du point Θ à la rencontre de la circonférence du cercle AZHI, en même nombre que les précédentes, égales chacune à la plus grande de celles-ci ; et l'on a construit sur toutes des secteurs semblables, tant sur celles qui sont égales entre elles et égales à la plus grande, que sur celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur. Il en résulte que l'ensemble des secteurs construits sur les droites égales à la plus grande sera plus grand que le triple de l'ensemble des secteurs construits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, à moins du secteur construit sur la plus grande ; car cela a été démontré (3). Or, l'ensemble des secteurs construits sur les droites égales à la plus grande est équivalent au cercle AZHI, et l'ensemble des secteurs construits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, à moins du secteur construit sur la plus grande, est équivalent à la figure inscrite ; par conséquent, le cercle AZHI est plus grand que le triple de la figure inscrite. Or, ce cercle est le triple du cercle ϛ ; donc le cercle ϛ est plus grand que





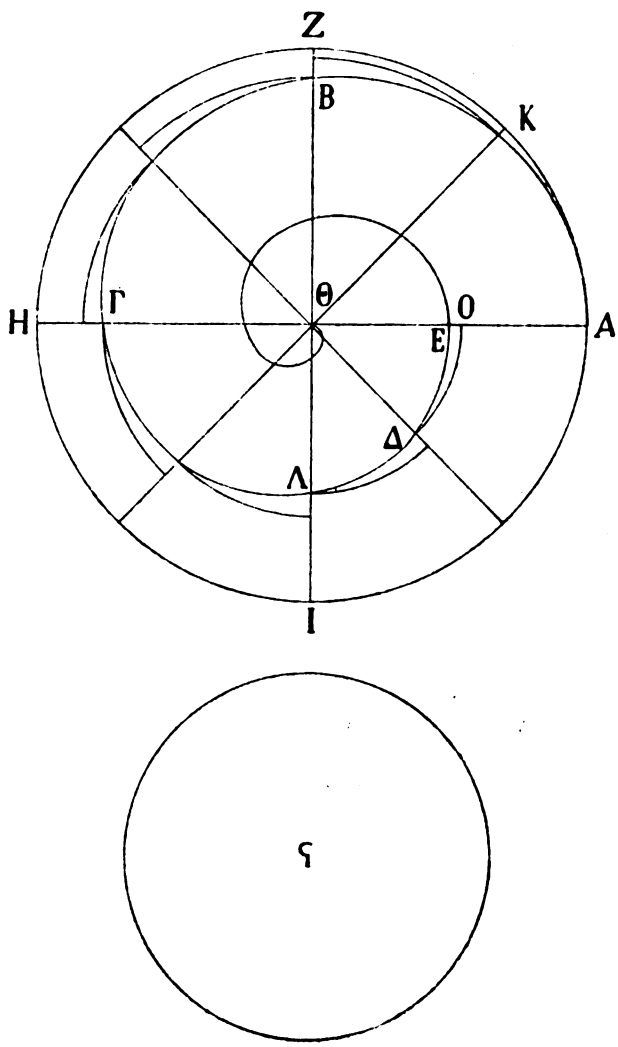
1. Voir proposition XII.
2. Voir proposition I.
3. Voir proposition X, corollaire.

Digitized by Google

la figure inscrite. Or, il n'est pas plus grand, mais plus petit (1) ; par conséquent, l'aire comprise entre la spirale ABΓΔEΘ et la droite AΘ n'est pas plus grande que le cercle Ϛ ; elle lui est donc équivalente.

PROPOSITION XXV.

Le rapport de l'aire comprise entre la spirale de seconde révolution et la seconde des droites en position initiale de révolution au second cercle est le même que le rapport de 7 à 12 ; rapport identique, lui-même, à celui de l'ensemble du rectangle,délimité sous le rayon du second cercle et le rayon du premier cercle, et du tiers du carré de l'excédent du rayon du second cercle sur le rayon du premier cercle, au carré du rayon du second cercle.



Soit une spirale décrite en seconde révolution, sur laquelle on a l'arc ABΓΔE. Soit le point Θ l'origine de la spirale, la droite ΘE la première de celles en position initiale de révolution et AE la seconde de celles en position initiale de révolution. Soit AZHI le second cercle et AH, IZ des diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre. On doit

1. Comme conséquence de l'hypothèse seconde.

Digitized by Google

démontrer que le rapport de l'aire comprise entre la spirale ABΓΔE et la droite AE au cercle AZHI est le même que celui de 7 à 12.

Soit donc un cercle ϛ dont le carré du rayon est équivalent au rectangle, délimité sous les droites AΘ, ΘE, augmenté du tiers du carré de la droite AE. Le cercle ϛ sera donc au cercle AHZI comme 7 est à 12, parce que le carré du premier cercle possède ce même rapport avec le carré du rayon du cercle AZHI (1). Nous allons donc démontrer que le cercle ϛ équivaut à l'aire comprise entre la spirale ABΓΔE et la droite AE.

En effet, s'il n'est pas équivalent, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, s'il se peut. Dès lors, il est possible de circonscrire à l'aire une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que la figure circonscrite excède l'aire de moins de l'excédent du cercle ϛ sur l'aire (2). Circonscrivons cette figure, et soit ΘAK le plus grand et ΘOΔ le plus petit des segments dont se compose la figure circonscrite. Il est, dès lors, évident que la figure circonscrite est plus petite que le cercle (3). Prolongeons les droites qui forment des angles égaux en Θ jusqu'à leur rencontre avec la circonférence du deuxième cercle. On a donc certaines droites menées du point Θ à la rencontre de la spirale, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, dont la plus grande est ΘA et la plus petite ΘE (4). De plus, on a certaines autres droites menées du point Θ à la rencontre de la circonférence du cercle AZHI, en même nombre, à moins d'une, que les précédentes, de même grandeur entre elles et égales à la plus grande ; et l'on a décrit des secteurs semblables sur les droites égales à la plus grande et sur celles qui se dépassent entre elles d'une même grandeur, tandis que l'on n'en a pas décrit sur la plus petite. En conséquence, le rapport de la somme des secteurs, décrits sur les droites égales à la plus grande, à la somme des secteurs décrits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, à moins du secteur décrit sur la plus petite, est moindre que le

1. Les cercles ϛ et AHZI sont entre eux comme les carrés de leurs rayons. Or, on a posé : carré rayon cercle $\varsigma = A\Theta \times \Theta E + \frac{1}{3}\overline{AE}^2$. Donc, en observant que $A\Theta = 2\,\Theta E$ et $\Theta E = \frac{1}{2}A\Theta = AE$; on a : $\frac{\text{cercle } \varsigma}{\text{cercle AHZI}} = \frac{A\Theta \times \Theta E + \frac{1}{3}\overline{AE}^2}{\overline{A\Theta}^2} = \frac{2\,\overline{\Theta E}^2 + \frac{1}{3}\overline{\Theta E}^2}{4\overline{\Theta E}^2} = \frac{7}{12}$.

2. Voir proposition XXII, corollaire.

3. Par hypothèse permise : fig. circonsc. — aire spirale < cercle ϛ — aire spirale, d'où : fig. circonscrite < cercle ϛ.

4. Voir proposition XII.

Digitized by Google

rapport du carré de la plus grande ΘA à l'ensemble du rectangle délimité sous les droites AΘ, ΘE et du tiers du carré de la droite EA ; car cela a été démontré (1). Or, le cercle AZHI équivaut à la somme des secteurs décrits sur les droites égales entre elles et égales à la plus grande, tandis que la figure circonscrite équivaut à la somme des secteurs décrits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, à moins du secteur décrit sur la plus petite ; par conséquent, le rapport du cercle (2) à la figure circonscrite est moindre que celui du carré de ΘA à l'ensemble du rectangle délimité sous AΘ, ΘE et du tiers du carré de AE. Or, le rapport du cercle AZHI au cercle ϛ est le même que celui du carré de ΘA au rectangle délimité sous ΘA, ΘE, augmenté du tiers du carré de AE ; par conséquent, le rapport du cercle AZHI à la figure circonscrite est moindre que son rapport au cercle ϛ ; en sorte que le cercle ϛ est plus petit que la figure circonscrite. Or, il n'est pas plus petit, mais plus grand (3) ; donc le cercle ϛ n'est pas plus grand que l'aire comprise entre la spirale ABΓΔE et la droite AE. Au reste, il n'est pas plus petit. En effet, qu'il soit plus petit, s'il se peut. Il est donc de nouveau possible d'inscrire dans l'aire comprise entre la spirale et la droite AE une figure plane composée de secteurs semblables, de manière que l'aire comprise entre la spirale et la droite AE excède la figure inscrite de moins de l'excédent de cette même aire sur le cercle ϛ (4). Inscrivons donc cette figure, et soit ΘKP le plus grand et ΘEO le plus petit des secteurs dont se compose la figure inscrite. Il est évident que, dès lors, la figure inscrite est plus grande que le cercle ϛ (5). Prolongeons les droites qui forment des angles égaux en Θ jusqu'à leur rencontre avec la circonférence du cercle. On a donc de nouveau cer-

1. Voir proposition XI, corollaire.
2. Sous-entendu : du cercle AZHI.
3. En vertu de la proposition XI, on aura :

$$\frac{\sum \text{ secteurs du cercle AZKI}}{\sum \text{ secteurs circonscrits} - \text{secteur } \Theta E} = \frac{\text{cercle AZHI}}{\text{fig. circonscrite}} < \frac{\overline{\Theta A}^2}{A\Theta \times \Theta E + \frac{1}{3}\overline{EA}^2}.$$

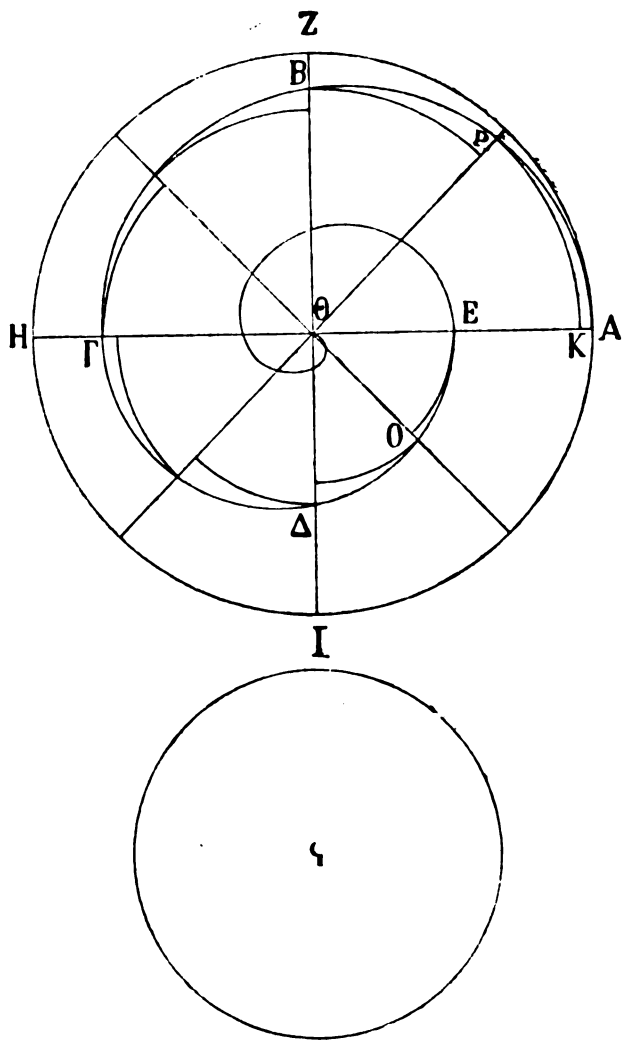
Or, on a eu : $\frac{\text{cercle } \varsigma}{\text{cercle AZHI}} = \frac{A\Theta \times \Theta E + \frac{1}{3}\overline{EA}^2}{\overline{A\Theta}^2}$, d'où, comme le texte :

$\frac{\text{cercle AZHI}}{\text{fig. circonscr.}} < \frac{\text{cercle AZHI}}{\text{cercle } \varsigma}$, d'où : cercle $\varsigma <$ fig. circonscrite ; ce qui est absurde, car on a vu plus haut que cercle $\varsigma >$ fig. circonscrite.

4. Voir proposition XXII, corollaire.
5. En hypothèse seconde, on a : aire spirale — fig. inscrite < aire spirale — cercle ϛ, d'où : figure inscrite > cercle ϛ.

Digitized by Google

taines droites menées du point Θ à la rencontre de la spirale, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, dont la plus grande est ΘA et la plus petite ΘE (1). De plus, on a certaines autres droites menées du point Θ à la rencontre du cercle, en même nombre, à moins d'une, que les précédentes, de même grandeur entre elles et égales à la plus grande. Enfin, on a décrit des secteurs semblables sur les droites qui se dépassent entre elles d'une même grandeur, ainsi que sur celles qui sont égales à la plus grande. Dès lors, le rapport de la somme des secteurs, décrits sur les droites égales à la plus grande, à la somme des secteurs, décrits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, à moins du secteur construit sur la plus grande, est plus grand que le rapport du carré de ΘA à l'ensemble du rectangle délimité sous les droites AΘ, ΘE et du tiers du carré de EA (2). Or, la figure inscrite dans l'aire est équivalente à la somme des secteurs décrits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, à moins du secteur décrit sur la plus grande, et le cercle équivaut à la somme des autres ; par conséquent, le rapport du cercle AZHI à la figure inscrite est plus grand que celui du carré



1. Voir proposition XII.
2. Voir proposition XI, corollaire.

Digitized by Google

de ΘA au rectangle délimité sous ΘA, ΘE, augmenté du tiers du carré de AE, c'est-à-dire plus grand que celui du cercle AZHI au cercle ϛ. Le cercle ϛ est donc plus grand que la figure inscrite ; ce qui est impossible, car il était plus petit (1). Donc, le cercle ϛ n'est pas plus petit non plus que l'aire comprise entre la spirale ABΓΔE et la droite AE ; en sorte qu'il lui est équivalent.

COROLLAIRE.

On démontrera, de la même manière, que le rapport de l'aire, comprise entre une spirale décrite en un nombre de révolutions aussi grand qu'on voudra et entre la droite désignée suivant ce nombre de révolutions, au cercle désigné suivant ce nombre de révolutions est le même que le rapport de l'ensemble du rectangle, délimité sous le rayon du cercle désigné suivant ce même nombre et sous le rayon du cercle désigné par le nombre de révolutions, à moins d'une, et du tiers du carré de l'excédent du rayon du plus grand des dits cercles sur le rayon du plus petit des dits cercles, au carré du rayon du plus grand des dits cercles.

PROPOSITION XXVI.

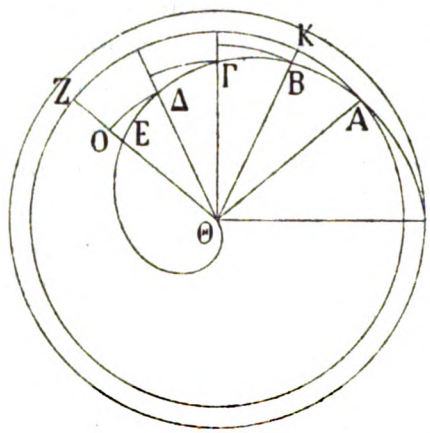
Le rapport de l'aire, comprise entre une spirale plus petite que celle décrite dans une révolution, n'ayant pas une extrémité à l'origine de la spirale, et entre les droites menées de ses extrémités à l'origine de la spirale, au secteur dont le rayon est égal à la plus grande des droites menées des extrémités à l'origine de la spirale, et dont l'arc est égal à celui qui est situé entre les dites droites, du côté même de la spirale, est le même que le rapport de l'ensemble du rectangle, délimité sous les droites menées des extrémités à l'origine de la spirale,

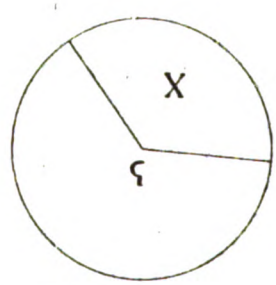
1. La proposition XI donne : $\frac{\sum \text{ secteurs du cercle AZHI}}{\sum \text{ secteurs inscrits} - \text{secteur } \Theta A} = \frac{\text{cercle AZHI}}{\text{fig. inscrite}} > \frac{\overline{\Theta A}^2}{A\Theta \times \Theta E + \frac{1}{3}\overline{EA}^2}$. Or, on a eu : $\frac{\text{cercle } \varsigma}{\text{cercle AZHI}} = \frac{A\Theta \times \Theta E + \frac{1}{3}\overline{EA}^2}{\overline{A\Theta}^2}$; donc, comme le texte : $\frac{\text{cercle AZHI}}{\text{fig. inscrite}} > \frac{\text{cercle AZHI}}{\text{cercle } \varsigma}$, d'où : cercle $\varsigma >$ figure inscrite ; ce qui est absurde, car, par hypothèse seconde, on a : cercle $\varsigma <$ fig. inscrite.

Digitized by Google

et du tiers du carré de l'excédent de la plus grande sur la plus petite des dites droites, au carré de la plus grande des droites reliant les extrémités à l'origine de la spirale (1).

Soit une spirale sur laquelle on a l'arc ABΓΔE, moindre que la spirale décrite en une révolution. Soient A, E les extrémités, et soit le point Θ l'origine de la spirale. Décrivons le cercle de centre Θ, de rayon ΘE, et que la droite ΘE rencontre sa circonférence au point Z. On doit démontrer que le rapport de l'aire, comprise entre la spirale ABΓΔE et les droites AΘ, ΘE, au secteur AΘZ est le même que celui de l'ensemble du rectangle délimité sous les droites AΘ, ΘE et du tiers du carré de la droite EZ au carré de la droite ΘA.





Soit donc un certain cercle dans lequel il y a ςX, dont le carré du rayon équivaut au rectangle délimité sous les droites AΘ, ΘE, augmenté du tiers du carré de EZ, et ayant au centre un angle égal à l'angle en Θ. Dès lors, le rapport du secteur ςX au secteur ΘAZ est le même que celui du rectangle sous AΘ, ΘE, augmenté du tiers du carré de EZ, au carré de ΘA ; car les carrés des rayons sont entre eux dans ce même rapport (2). Nous allons donc démontrer que le secteur Xς est équivalent à l'aire comprise entre la spirale ABΓΔE et les droites AΘ.ΘE.

En effet, s'il n'est pas équivalent, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, s'il se peut. Dès lors, il est possible de circons-

1. Ce long énoncé se traduit comme suit en notations usuelles :

$$\frac{\text{aire spirale ABΓΔEΘ}}{\text{secteur AΘZ}} = \frac{\text{AΘ} \times \text{ΘE} + \frac{1}{3}\overline{\text{EZ}}^2}{\overline{\text{ΘA}}^2}.$$

2. Les secteurs qui répondent à des angles au centre égaux sont semblables et sont entre eux comme les carrés des rayons. Or on a posé :

carré du rayon du cercle $\varsigma = \text{AΘ} \times \text{ΘE} + \frac{1}{3}\overline{\text{EZ}}^2$, d'où : $\frac{\text{secteur } \varsigma\text{X}}{\text{secteur ΘAZ}} = \frac{\text{AΘ} \times \text{ΘE} + \frac{1}{3}\overline{\text{EZ}}^2}{\overline{\text{ΘA}}^2}$.

Digitized by Google

crire à l'aire en question une figure plane, composée de secteurs semblables, de manière que la figure circonscrite excède cette aire de moins de l'excédent du secteur ϛX sur cette aire (1). Circonscrivons donc cette figure, et soit ΘAK le plus grand et ΘOΔ le plus petit des secteurs dont se compose la figure circonscrite. Dès lors, il est évident que la figure circonscrite est plus petite que le secteur ϛX (2). Prolongeons les droites qui forment des angles égaux en Θ jusqu'à leur rencontre avec l'arc du secteur ΘAZ. On a donc certaines droites menées du point Θ à la rencontre de la spirale, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, dont la plus grande est ΘA et la plus petite ΘE (3). De plus, on a certaines autres droites, en même nombre, à moins d'une, que les précédentes, de même grandeur entre elles et égales à la plus grande qui, à l'exception de la droite ΘZ, sont menées à l'arc du secteur AΘZ. De plus, on a décrit des secteurs semblables sur toutes les droites égales entre elles et égales à la plus grande, ainsi que sur celles qui se dépassent entre elles d'une même grandeur, tandis que l'on n'en a pas décrit sur la droite ΘE. En conséquence, le rapport de la somme des secteurs, décrits sur les droites égales entre elles et égales à la plus grande, à la somme des secteurs, décrits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, à moins du secteur décrit sur la plus petite, est moindre que le rapport du carré de ΘA à l'ensemble du rectangle délimité sous AΘ, ΘE et du tiers du carré de EZ (4). Or, le secteur ΘAZ est équivalent à la somme des secteurs décrits sur les droites égales entre elles et égales à la plus grande, tandis que la figure circonscrite est équivalente à la somme des secteurs décrits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur ; par conséquent, le rapport du secteur ΘAZ à la figure circonscrite est moindre que celui du carré de ΘA à l'ensemble du rectangle délimité sous ΘA, ΘE et du tiers du carré de ZE. Or, le rapport du carré de ΘA à l'ensemble que nous venons de dire est le même que celui du secteur ΘAZ au secteur ϛX ; en sorte que le secteur Xϛ est plus petit que la figure circonscrite. Or, il n'est pas

1. Voir prop. XXIII, coroll.

2. On a, en 1re hypothèse : fig. circonscrite — aire spirale < secteur ϛX — aire spirale, d'où : fig. circonscrite < secteur ϛX.

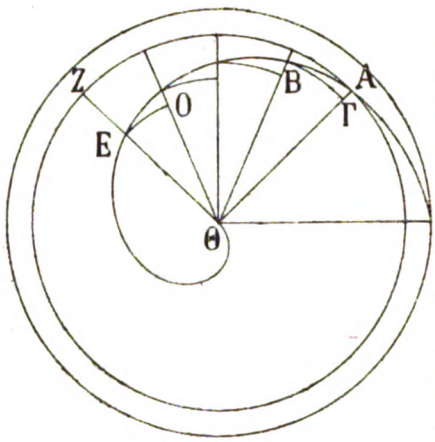
3. Voir prop. XII.

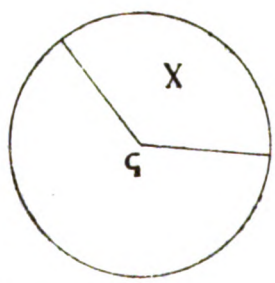
4. Voir prop. XI, coroll.

Digitized by Google

plus petit, mais plus grand (1) ; par conséquent, le secteur Xς ne sera pas plus grand que l'aire comprise entre la spirale ABΓΔE et les droites AΘ, ΘE.

Au reste, il n'est pas plus petit. En effet, qu'il soit plus petit, et que les autres constructions restent les mêmes. Il est de nouveau possible d'inscrire à l'aire une figure plane, composée de secteurs semblables, de manière que l'aire en question excède la figure inscrite de moins de l'excédent de cette même aire sur le secteur ςX (2). Inscrivons donc cette figure ; soit ΘBΓ le plus grand et OΘE le plus petit des secteurs dont se compose la figure inscrite. Dès lors, il est évident que la figure inscrite est plus grande que le secteur Xς (3). On a donc de nouveau certaines droites se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, menées du point Θ à la rencontre de la spirale, dont la plus grande est ΘA et la plus petite ΘE (4). De plus, on a certaines autres droites menées, à l'exception de la droite ΘA, du point Θ à la rencontre de l'arc du secteur ΘAZ, en même nombre, à moins d'une, que celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, égales entre elles et égales à la plus grande ; et l'on a décrit des secteurs semblables sur chacune de ces droites, tandis que l'on n'en a pas décrit sur la plus grande de





1. On a, en vertu de la proposition XI : $\frac{\text{secteur } \Theta AZ}{\text{fig. circonscr.}} < \frac{\overline{\Theta A}^2}{\Theta A \times \Theta E + \frac{1}{3}\overline{ZE}^2}$ Or, on a vu que $\frac{\text{secteur } \varsigma X}{\text{secteur } \Theta AZ} = \frac{A\Theta \times \Theta E + \frac{1}{3}\overline{ZE}^2}{\overline{\Theta A}^2}$, d'où : $\frac{\text{secteur } \Theta AZ}{\text{fig. circonscr.}} < \frac{\text{secteur } \Theta AZ}{\text{secteur } \varsigma X}$, d'où : secteur $\varsigma X <$ fig. circonscrite ; ce qui est absurde, car on a vu que secteur $\varsigma X >$ fig. circonscrite.

2. Voir prop. XXIII, coroll.

3. On a, en hypothèse seconde : aire spirale — fig. inscrite < aire spirale — secteur Xς, d'où : fig. inscrite > secteur Xς.

4. Voir prop. XII.

Digitized by Google

celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur. En conséquence, le rapport de la somme des secteurs, décrits sur les droites égales entre elles et égales à la plus grande, à la somme des secteurs décrits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, à moins du secteur décrit sur la plus grande, est plus grand que le rapport du carré de ΘA au rectangle, délimité sous ΘA, ΘE, augmenté du tiers du carré de EZ (1) ; en sorte que le rapport du secteur ΘAZ à la figure inscrite est aussi plus grand que son rapport au secteur XϚ, et que le secteur XϚ est plus grand que la figure inscrite. Or, il n'est pas plus grand, mais plus petit (2) ; par conséquent, le secteur XϚ n'est pas plus petit non plus que l'aire comprise entre la spirale ABΓΔE (3) et les droites AΘ, ΘE ; donc il est équivalent.

PROPOSITION XXVII.

Les aires comprises entre les spirales et les droites en révolution sont : la troisième double de la seconde, la quatrième triple, la cinquième quadruple, et l'aire suivante toujours un multiple de la seconde aire suivant l'ordre des nombres, et la première aire est la sixième partie de la seconde.

Que la spirale proposée soit décrite en première, en seconde et en révolutions successives aussi nombreuses qu'on voudra. Soit le point Θ l'origine de la spirale, et soit ΘE la droite en position initiale de révolution. Soit K la première des aires, A la seconde, M la troisième, N la quatrième et Ξ la cinquième. On doit démontrer que l'aire K est la sixième partie de l'aire suivante, que l'aire M est double de l'aire Λ, l'aire N triple de l'aire Λ, et que l'aire suivante est continuellement multiple de l'aire Λ dans l'ordre des nombres. On démon-

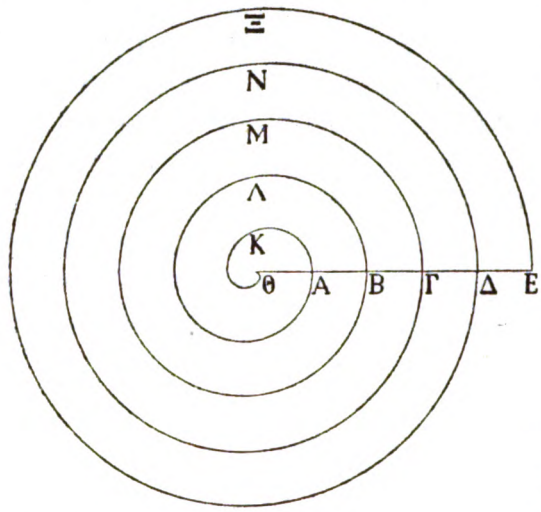
1. Voir prop. XI, coroll.

2. On a, en vertu de la proposition XI : $\frac{\text{secteur } \Theta AZ}{\text{fig. inscrite}} > \frac{\overline{\Theta A}^2}{\Theta A \times \Theta E + \frac{1}{3}\overline{EZ}^2}$. Or, on a vu que $\frac{\text{secteur } \varsigma X}{\text{secteur } \Theta AZ} = \frac{A\Theta \times \Theta E + \frac{1}{3}\overline{EZ}^2}{\overline{\Theta A}^2}$, d'où : $\frac{\text{secteur } \Theta AZ}{\text{fig. inscr.}} > \frac{\text{secteur } \Theta AZ}{\text{secteur } \varsigma X}$, d'où : secteur $\varsigma X >$ fig. inscrite ; ce qui est absurde, car on a vu plus haut que secteur $\varsigma X <$ fig. inscrite.

3. La notation du texte ABΓΔE se rapporte ici à la première figure de cette proposition.

Digitized by Google

tre, de la manière suivante, que l'aire K est la sixième partie de l'aire A : Puisqu'il a été démontré que le rapport de l'aire KΛ au second cercle est le même que celui de 7 à 12, que, d'autre part, chose évidente, le second cercle est au premier comme 12 est à 3, et que le premier cercle est à l'aire K comme 3 est à 1, il s'ensuit que l'aire K est la sixième partie de l'aire Λ (1). D'autre part, il a été démontré que le rapport de l'aire KΛM au troisième cercle est le même que celui de l'ensemble du rectangle délimité sous ΓΘ, ΘB et du tiers du carré de ΓB au carré de ΓΘ. Or, le troisième cercle est au deuxième cercle comme le carré de ΓΘ est au carré de ΘB, tandis que le second cercle est à l'aire KΛ comme le carré de BΘ est à l'ensemble du rectangle délimité sous BΘ, ΘA et du tiers du carré de AB. En conséquence, le rapport de l'aire KΛM à l'aire KΛ est le même que celui du rectangle délimité sous ΓΘ, ΘB, augmenté du tiers du carré de ΓB, au rectangle délimité sous BΘ, ΘA, augmenté du tiers du carré de AB (2). Or, ces dernières grandeurs sont entre



1. En vertu de la proposition XXV, on a : $\frac{\text{aire } K+\Lambda}{\text{second cercle}}=\frac{7}{12}$ (I). D'autre part, les cercles étant entre eux comme les carrés des rayons, on a : $\frac{2^{\text{d}}\text{ cercle}}{1^{\text{er}}\text{ cercle}}=\frac{\overline{\Theta B}^2}{\overline{\Theta A}^2}$. Or, $\Theta B=2\Theta A$; donc : $\frac{2^{\text{d}}\text{ cercle}}{1^{\text{er}}\text{ cercle}}=\frac{4\overline{\Theta A}^2}{\overline{\Theta A}^2}=\frac{4}{1}=\frac{12}{3}$ (II). De plus, en vertu de la proposition XXIV, on a : aire $K=\frac{1}{3}$ 1er cercle, d'où : $\frac{1^{\text{er}}\text{ cercle}}{\text{aire } K}=\frac{3}{1}$ (III). Combinant (I) et (II), il vient : $\frac{\text{aire } K+\Lambda}{1^{\text{er}}\text{ cercle}}=\frac{7}{3}$, d'où, combinant avec (III), il vient : $\frac{\text{aire } K+\Lambda}{\text{aire } K}=7$, ou aire $K+\Lambda=7$ aires K, d'où : aire $\Lambda=6$ aires K, ou, comme le texte : aire $K=\frac{1}{6}$ aire Λ.

2. Le corollaire de la proposition XXV donne : $\frac{\text{aire } K+\Lambda+M}{3^{\text{me}}\text{ cercle}}=\frac{\Gamma\Theta\times\Theta B+\frac{1}{3}\overline{\Gamma B}^2}{\overline{\Gamma\Theta}^2}$. Or, $\frac{3^{\text{me}}\text{ cercle}}{2^{\text{me}}\text{ cercle}}=\frac{\overline{\Gamma\Theta}^2}{\overline{\Theta B}^2}$: donc : $\frac{\text{aire } K+\Lambda+M}{2^{\text{me}}\text{ cercle}}=\frac{\Gamma\Theta\times\Theta B+\frac{1}{3}\overline{\Gamma B}^2}{\overline{\Theta B}^2}$. D'autre part, la pro-

Digitized by Google

elles dans le rapport de 19 à 7 ; de telle sorte que le rapport de l'aire KΛM à l'aire ΛK est le même que celui de 19 à 7. Donc, le rapport de l'aire M à l'aire KΛ est le même que celui de 12 à 7. Or, le rapport de l'aire KΛ à l'aire K est le même que celui de 7 à 6 ; dès lors, il est évident que l'aire M est le double de l'aire Λ (1).

Nous démontrerons d'ailleurs que les aires suivantes sont dans le rapport des nombres successifs.

En effet, le rapport de l'aire KΛMNΞ au cercle, dont le rayon est ΘE, est le même que celui de l'ensemble du rectangle délimité sous EΘ, ΘΔ et du tiers du carré de ΔE au carré de ΘE. Or, le rapport du cercle de rayon ΘE au cercle de rayon ΘΔ est le même que celui du carré de ΘE au carré de ΘΔ, et le rapport du cercle de rayon ΔΘ à l'aire KΛMN est le même que celui du carré de ΘΔ à l'ensemble du rectangle délimité sous ΘΔ, ΘΓ et du tiers du carré de ΔΓ. Par conséquent, le rapport de l'aire KΛMNΞ à l'aire KΛMN est le même que celui du rectangle délimité sous ΘE, ΘΔ, augmenté du tiers du carré de ΔE, au rectangle délimité sous ΔΘ, ΘΓ, augmenté du tiers du carré de ΔΓ, et, par division, le rapport de l'aire Ξ à l'aire KΛMN est le même que celui de l'excédent du rectangle délimité sous EΘ, ΘΔ, augmenté du tiers du carré de EΔ, sur le rectangle délimité sous ΔΘ, ΘΓ, augmenté du tiers du carré de ΓΔ, au rectangle délimité sous ΔΘ, ΘΓ, augmenté du tiers du carré de ΔΓ. Or, l'excédent d'une somme sur l'autre étant aussi celui du rectangle délimité sous EΘ, ΘΔ sur le rectangle délimité sous ΔΘ, ΘΓ, est le rectangle délimité sous ΔΘ, ΓE ; par conséquent, le rapport de l'aire Ξ à l'aire KΛMN est le même que celui du rectangle délimité sous ΘΔ, ΓE au

---

position XXV donne : $\frac{\text{aire } K+\Lambda}{2^{me} \text{ cercle}} = \frac{B\Theta \times \Theta A + \frac{1}{3}\overline{AB}^2}{\overline{\Theta B}^2}$, d'où, combinant avec la relation précédente, il vient : $\frac{\text{aire } K+\Lambda+M}{\text{aire } K+\Lambda} = \frac{\Gamma\Theta \times \Theta B + \frac{1}{3}\overline{\Gamma B}^2}{B\Theta \times \Theta A + \frac{1}{3}\overline{AB}^2}$.

1. La relation de la note précédente devient, en observant que $\Gamma\Theta = 3\Theta A$; $\Theta B = 2\Theta A$; $\Theta A = AB = B\Gamma$: $\frac{\text{aire } K+\Lambda+M}{\text{aire } K+\Lambda} = \frac{6\overline{\Theta A}^2 + \frac{1}{3}\overline{\Theta A}^2}{2\overline{\Theta A}^2 + \frac{1}{3}\overline{\Theta A}^2} = \frac{19\overline{\Theta A}^2}{7\overline{\Theta A}^2} = \frac{19}{7}$, d'où : $\frac{\text{aire } K+\Lambda+M - \text{aire } K+\Lambda}{\text{aire } K+\Lambda} = \frac{19-7}{7}$. ou : $\frac{\text{aire } M}{\text{aire } K+\Lambda} = \frac{12}{7}$. Or, on a démontré que aire $K = \frac{1}{6}$ aire Λ ; donc : $\frac{\text{aire } K}{\text{aire } \Lambda} = \frac{1}{6}$, d'où : $\frac{\text{aire } K+\Lambda}{\text{aire } \Lambda} = \frac{6+1}{6} = \frac{7}{6}$. Dès lors, combinant avec la relation précédente : $\frac{\text{aire } M}{\text{aire } \Lambda} = \frac{12}{6} = 2$, d'où, comme le texte : aire M = 2 aires Λ.

Digitized by Google

rectangle délimité sous $\Delta\Theta$, $\Theta\Gamma$, augmenté du tiers du carré de $\Gamma\Delta$(1). Or, on démontrera pareillement que le rapport de l'aire N à l'aire $K\Lambda M$ est le même que celui du rectangle délimité sous $\Theta\Gamma$, $B\Delta$ à l'ensemble du rectangle délimité sous $\Gamma\Theta$, ΘB et du tiers du carré de ΓB ; par conséquent, le rapport de l'aire N à l'aire $K\Lambda MN$ est le même que celui du rectangle délimité sous $\Theta\Gamma$, $B\Delta$ au rectangle délimité sous $\Theta\Gamma$, $B\Delta$, augmenté du rectangle délimité sous $\Theta\Gamma$, ΘB, et augmenté du tiers du carré de ΓB ; et inversement. Or, cette dernière somme est équivalente au rectangle délimité sous les droites $\Delta\Theta$, $\Theta\Gamma$, augmenté du tiers du carré de $\Gamma\Delta$. Dès lors, puisque le rapport de l'aire Ξ à l'aire $K\Lambda MN$ est le même que celui du rectangle délimité sous $\Theta\Delta$, ΓE à l'ensemble du rectangle délimité sous $\Theta\Delta$, $\Theta\Gamma$ et du tiers du carré de $\Delta\Gamma$, et que le rapport de l'aire $K\Lambda MN$ à l'aire N est le même que celui de l'ensemble du rectangle délimité sous $\Delta\Theta$, $\Theta\Gamma$ et du tiers du carré de $\Gamma\Delta$ au rectangle délimité sous $\Theta\Gamma$, ΔB, le rapport de l'aire Ξ à l'aire N sera le même que celui du rectangle délimité sous $\Theta\Delta$, ΓE au rectangle délimité sous $\Theta\Delta$, ΔB. Or, le rapport du rectangle délimité sous $\Theta\Delta$ ΓE au rectangle délimité sous $\Theta\Gamma$, ΔB est le même que le rapport de $\Theta\Delta$ à $\Theta\Gamma$, parce que les droites ΓE et $B\Delta$ sont égales ; donc, il est évident que le rapport de l'aire Ξ à l'aire N est le même que celui de $\Theta\Delta$ à $\Theta\Gamma$ (2).

1. La prop. XXV, corollaire, donne : $\dfrac{\text{aire } K+\Lambda+M+N+\Xi}{\text{cercle de rayon } \Theta E} = \dfrac{E\Theta \times \Theta\Delta + \frac{1}{3}\overline{\Delta E}^2}{\overline{\Theta E}^2}$.

Or, $\dfrac{\text{cercle } \Theta E}{\text{cercle } \Theta\Delta} = \dfrac{\overline{\Theta E}^2}{\overline{\Theta\Delta}^2}$; donc : $\dfrac{\text{aire } K+\Lambda+M+N+\Xi}{\text{cercle } \Theta\Delta} = \dfrac{E\Theta \times \Theta\Delta + \frac{1}{3}\overline{\Delta E}^2}{\overline{\Theta\Delta}^2}$. Or, la proposition XXV, corollaire, donne aussi : $\dfrac{\text{aire } K+\Lambda+M+N}{\text{cercle } \Theta\Delta} = \dfrac{\Theta\Delta \times \Theta\Gamma + \frac{1}{3}\overline{\Delta\Gamma}^2}{\overline{\Theta\Delta}^2}$; donc :

$$\frac{\text{aire } K+\Lambda+M+N+\Xi}{\text{aire } K+\Lambda+M+N} = \frac{E\Theta \times \Theta\Delta + \frac{1}{3}\overline{\Delta E}^2}{\Theta\Delta \times \Theta\Gamma + \frac{1}{3}\overline{\Delta\Gamma}^2}, \text{ d'où :}$$

$$\frac{\text{aire } K+\Lambda+M+N+\Xi - \text{aire } K+\Lambda+M+N}{\text{aire } K+\Lambda+M+N} = \frac{\text{aire } \Xi}{\text{aire } K+\Lambda+M+N} = \frac{E\Theta \times \Theta\Delta + \frac{1}{3}\overline{\Delta E}^2 - [\Theta\Delta \times \Delta\Gamma + \frac{1}{3}\overline{\Delta\Gamma}^2]}{\Theta\Delta \times \Theta\Gamma + \frac{1}{3}\overline{\Delta\Gamma}^2}.$$

Or, observant que $\Delta E = \Delta\Gamma$, on a : $E\Theta \times \Theta\Delta + \frac{1}{3}\overline{\Delta E}^2 - [\Theta\Delta \times \Delta\Gamma + \frac{1}{3}\overline{\Delta\Gamma}^2] = \Theta\Delta(E\Theta - \Theta\Gamma) = \Theta\Delta \times \Gamma E$; donc, comme le texte : $\dfrac{\text{aire } \Xi}{\text{aire } K+\Lambda+M+N} = \dfrac{\Theta\Delta \times \Gamma E}{\Theta\Delta \times \Theta\Gamma + \frac{1}{3}\overline{\Delta\Gamma}^2}$.

2. On aura, par analogie : $\dfrac{\text{aire N}}{\text{aire } K+\Lambda+M} = \dfrac{\Theta\Gamma \times B\Delta}{\Theta\Gamma \times \Theta B + \frac{1}{3}\overline{\Gamma B}^2}$, d'où :

$\dfrac{\text{aire N}}{\text{aire N} + \text{aire } K+\Lambda+M} = \dfrac{\Theta\Gamma \times B\Delta}{\Theta\Gamma \times B\Delta + \Theta\Gamma \times \Theta B + \frac{1}{3}\overline{\Gamma B}^2}$, et, inversement, en observant

Digitized by Google

On démontrera encore pareillement que le rapport de l'aire N à l'aire M est le même que celui de ΘΓ à ΘB, et que le rapport de l'aire M à l'aire Λ est le même que celui de BΘ à AΘ. Or, les droites ΔΘ, ΓΘ, BΘ, AΘ sont entre elles comme les nombres successifs(1).

PROPOSITION XXVIII.

Si, sur une spirale décrite en un nombre quelconque de révolutions, l'on prend deux points qui ne sont pas ses extrémités ; si des points ainsi pris l'on mène des droites à l'origine de la spirale, et si l'on décrit des cercles ayant comme centre l'origine de la spirale et comme rayons les droites menées des points à l'origine de la spirale, le rapport de l'aire, comprise sous le plus grand des arcs situés entre les droites, sous la spirale se trouvant entre ces mêmes droites, et sous la droite prolongée (2), à l'aire, comprise sous le plus petit arc, la même spirale, et la droite reliant leurs extrémités (3), est le même que le rapport du rayon du plus petit cercle, augmenté des deux tiers de l'excédent du rayon du plus grand cercle sur le rayon du plus petit cercle, au rayon du plus petit cercle augmenté du tiers de ce même excédent (4).

Soit la spirale décrite en une seule révolution sur laquelle on a l'arc ABΓΔ, et sur laquelle on prend les deux points A, Γ de manière que Θ soit l'origine de la spirale. Que des droites relient les points A,

---

que $\Gamma\Delta = \Gamma B$: $\frac{\text{aire } K+\Lambda+M+N}{\text{aire } N} = \frac{\Theta\Gamma(B\Delta+\Theta B)+\frac{1}{3}\overline{\Gamma\Delta}^2}{\Theta\Gamma\times B\Delta} = \frac{\Theta\Gamma\times\Delta\Theta+\frac{1}{3}\overline{\Gamma\Delta}^2}{\Theta\Gamma\times B\Delta}$; donc, combinant avec la relation de la note précédente, il vient : $\frac{\text{aire } \Xi}{\text{aire } N} = \frac{\Theta\Delta\times\Gamma E}{\Theta\Gamma\times B\Delta}$. Or, $\Gamma E = B\Delta$; donc : $\frac{\text{aire } \Xi}{\text{aire } N} = \frac{\Theta\Delta}{\Theta\Gamma}$.

1. En observant que $\Delta\Theta = 4\Theta A$, $\Theta\Gamma = 3\Theta A$, $\Theta B = 2\Theta A$, on aura : $\frac{M}{\Lambda} = \frac{B\Theta}{\Theta A} = 2$, d'où : $M = 2\Lambda$; $\frac{N}{M} = \frac{\Theta\Gamma}{\Theta B} = \frac{3}{2}$, d'où : $N = \frac{3}{2}M = 3\Lambda$; et $\frac{\Xi}{N} = \frac{\Theta\Delta}{\Theta\Gamma} = \frac{4}{3}$, d'où : $\Xi = \frac{4}{3}N = 4\Lambda$; et ainsi de suite. Donc, les aires suivantes sont des multiples de l'aire Λ dans l'ordre naturel des nombres.

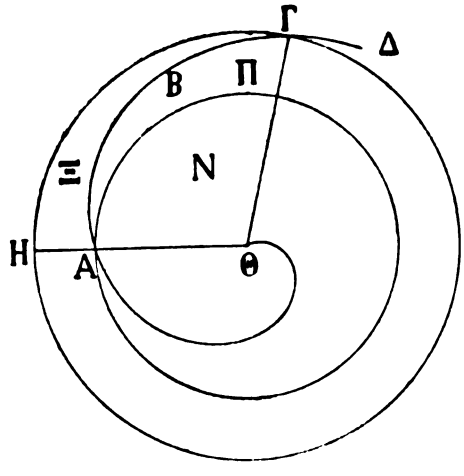
2. C'est-à-dire le rayon du plus petit cercle prolongé jusqu'à la rencontre avec le plus grand cercle.

3. C'est-à-dire qui relie les extrémités de l'arc du petit cercle et de la portion de spirale considérée.

4. Bien que l'énoncé vise le cas général de la spirale à révolutions multiples, la démonstration ne considérera que la spirale de première révolution.

Digitized by Google

Γ au point Θ, et que des cercles soient décrits du centre Θ avec les rayons ΘA, ΘΓ. On doit démontrer que le rapport de l'aire Ξ à l'aire Π est le même que celui de la somme de AΘ et des deux tiers de HA à la somme de AΘ et du tiers de HA.



En effet, il a été démontré que le rapport de l'aire NΠ au secteur HΓΘ est le même que celui du rectangle délimité sous HΘ, AΘ, augmenté du tiers du carré de AH, au carré de HΘ ; donc, le rapport de l'aire Ξ à l'aire NΠ est le même que celui du rectangle délimité sous ΘA, AH, augmenté des deux tiers du carré de HA, à la somme du rectangle délimité sous AΘ, ΘH et du tiers du carré de HA. Et puisque le rapport de l'aire NΠ au secteur NΠΞ est le même que le rapport de la somme du rectangle délimité sous ΘA, ΘH et du tiers du carré de HA au carré de ΘH, et que le rapport du secteur NΠΞ au secteur N est le même que celui du carré de ΘH au carré de ΘA, le rapport de l'aire NΠ à l'aire N est le même que celui de la somme du rectangle délimité sous ΘA, ΘH et du tiers du carré de HA au carré de ΘA. En conséquence, le rapport de l'aire NΠ à l'aire Π est le même que celui de la somme du rectangle délimité sous HΘ, ΘA et du tiers du carré de HA à la somme du rectangle délimité sous HA, ΘA et du tiers du carré de HA. Dès lors, puisque le rapport de l'aire Ξ à l'aire NΠ est le même que le rapport de la somme du rectangle délimité sous ΘA, AH et des deux tiers du carré de HA à la somme du rectangle délimité sous HΘ, ΘA et du tiers du carré de HA, et que, d'autre part, le rapport de l'aire NΠ à l'aire Π est le même que celui de la somme du rectangle délimité sous HΘ, ΘA et du tiers du carré de HA à la somme du rectangle délimité sous HA, AΘ et du tiers du carré de HA, le rapport de l'aire Ξ à l'aire Π est aussi le même que celui de la somme du rectangle délimité sous ΘA, AH et des deux tiers du carré de HA à la somme du rectangle délimité sous HA, AΘ et du tiers du carré de HA. Or, le rapport de la somme du rectangle délimité sous ΘA, AH et des deux tiers du carré de HA à la somme du rectangle délimité sous ΘA, AH et du tiers du carré de HA est

Digitized by Google

le même que le rapport de la somme de ΘA et des deux tiers de HA à la somme de ΘA et du tiers de HA ; par conséquent, il est évident que le rapport de l'aire Ξ à l'aire Π est aussi le même que le rapport de la somme de ΘA et des deux tiers de HA à la somme de ΘA et du tiers de HA (1).

1. En notations explicites, on doit démontrer : $\frac{\text{aire } \Xi}{\text{aire } \Pi} = \frac{\Theta A + \frac{2}{3} HA}{\Theta A + \frac{1}{3} HA}$. Or, en vertu de la prop. XXVI, on a : $\frac{\text{aire } N + \Pi}{\text{secteur } H\Gamma\Theta} = \frac{H\Theta \times A\Theta + \frac{1}{3}\overline{HA}^2}{\overline{H\Theta}^2}$ (I) ; donc,

$$\frac{\text{secteur } H\Gamma\Theta - \text{aire } N + \Pi}{\text{aire } N + \Pi} = \frac{\text{aire } \Xi}{\text{aire } N + \Pi} = \frac{\overline{H\Theta}^2 - [H\Theta \times A\Theta + \frac{1}{3}\overline{HA}^2]}{H\Theta \times A\Theta + \frac{1}{3}\overline{HA}^2} =$$

$$\frac{(HA + A\Theta)^2 - (HA + A\Theta)A\Theta - \frac{1}{3}\overline{HA}^2}{H\Theta \times A\Theta + \frac{1}{3}\overline{HA}^2} =$$

$$\frac{\overline{HA}^2 + \overline{A\Theta}^2 + 2HA \times A\Theta - HA \times A\Theta - \overline{A\Theta}^2 - \frac{1}{3}\overline{HA}^2}{H\Theta \times A\Theta + \frac{1}{3}\overline{HA}^2} =$$

$\frac{HA \times A\Theta + \frac{2}{3}\overline{HA}^2}{HA \times A\Theta + \frac{1}{3}\overline{HA}^2}$ (II). Mais, on a : $\frac{\text{secteur } H\Gamma\Theta = \text{aire } N + \Pi + \Xi}{\text{secteur } N = \text{aire } N} = \frac{\overline{\Theta H}^2}{\overline{A\Theta}^2}$, d'où, combinant avec (I) : $\frac{\text{aire } N + \Pi}{\text{aire } N} = \frac{H\Theta \times A\Theta + \frac{1}{3}\overline{HA}^2}{\overline{A\Theta}^2}$, d'où :

$$\frac{\text{aire } N + \Pi}{\text{aire } N + \Pi - \text{aire } N} = \frac{\text{aire } N + \Pi}{\text{aire } \Pi} = \frac{H\Theta \times A\Theta + \frac{1}{3}\overline{HA}^2}{H\Theta \times A\Theta + \frac{1}{3}\overline{HA}^2 - \overline{A\Theta}^2} = \frac{H\Theta \times A\Theta + \frac{1}{3}\overline{HA}^2}{A\Theta(H\Theta - A\Theta) + \frac{1}{3}\overline{HA}^2} =$$

$\frac{H\Theta \times A\Theta + \frac{1}{3}\overline{HA}^2}{A\Theta \times HA + \frac{1}{3}\overline{HA}^2}$, d'où, combinant avec (II), il vient, comme le texte :

$$\frac{\text{aire } \Xi}{\text{aire } \Pi} = \frac{HA \times A\Theta + \frac{2}{3}\overline{HA}^2}{A\Theta \times HA + \frac{1}{3}\overline{HA}^2} = \frac{HA(A\Theta + \frac{2}{3}HA)}{HA(A\Theta + \frac{1}{3}HA)} = \frac{A\Theta + \frac{2}{3}HA}{A\Theta + \frac{1}{3}HA}.$$

Digitized by Google

Digitized by Google

DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS,

ou

DES CENTRES DE GRAVITÉ DES PLANS.

LIVRES I ET II.

Digitized by Google

Digitized by Google

DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS,

ou

DES CENTRES DE GRAVITÉ DES PLANS.

LIVRE I.

I. Nous demandons que des poids égaux s'équilibrent à des distances égales, et que des poids égaux à des distances inégales ne s'équilibrent pas, mais qu'il y ait inclinaison du côté du poids placé à la plus grande distance.

II. Si, des poids étant en équilibre à certaines distances, on ajoute à l'un de ces poids, ils ne s'équilibrent plus, mais il y a inclinaison du côté du poids auquel on a ajouté.

III. Et pareillement, si l'on enlève quelque chose à l'un des poids, ils ne s'équilibrent plus, et il y a inclinaison du côté du poids auquel on n'a rien enlevé.

IV. Les centres de gravité de figures planes égales et semblables, qui coïncident, coïncident aussi.

V. D'autre part, les centres de gravité des figures inégales, mais semblables, seront situés semblablement. Nous disons d'ailleurs semblablement placés dans des figures semblables les points d'où les droites menées aux angles égaux forment des angles égaux avec les côtés homologues.

VI. Si des grandeurs s'équilibrent à certaines distances, des

Digitized by Google

grandeurs équivalentes aux premières s'équilibrent aussi aux mêmes distances.

VII. Le centre de gravité de toute figure, dont le périmètre est concave dans la même direction (1), doit être à l'intérieur de cette figure.

Telles sont les choses que nous assumons.

PROPOSITION I.

Les poids qui s'équilibrent à des distances égales sont égaux.

En effet, s'ils étaient inégaux, après avoir enlevé l'excès du plus grand, les poids restants ne s'équilibreraient plus, parce que l'on aurait enlevé quelque chose à l'un des poids qui s'équilibrent (2). Donc (3), les poids qui s'équilibrent à des distances égales sont égaux.

PROPOSITION II.

Des poids inégaux disposés à des distances égales ne s'équilibrent pas, mais il y a inclinaison du côté du plus grand.

En effet, une fois l'excédent enlevé, ils s'équilibreront, parce que des poids égaux s'équilibrent à des distances égales (4). Par conséquent, si l'on ajoute ce que l'on a enlevé, il y a inclinaison du côté du plus grand, parce qu'on a ajouté à l'un des poids qui s'équilibrent (5).

PROPOSITION III.

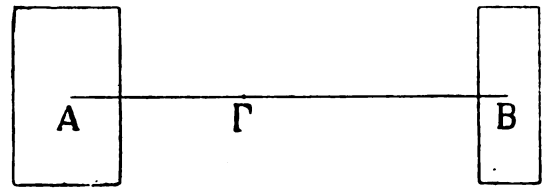
Des poids inégaux s'équilibreront à des distances inégales, et le plus grand sera situé à la plus petite distance.

Soient A, B des poids inégaux, soit A le plus grand, et qu'ils s'équilibrent aux distances AΓ, ΓB. Il faut démontrer que la distance AΓ est plus petite que la distance ΓB.

1. Voir *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, Définition 2.
2. Voir postulat III.
3. Voir postulat I.
4. Voir postulat I.
5. Voir postulat II.

Digitized by Google

En effet, que cette distance ne soit pas plus petite. Dès lors, l'excédent de A sur B étant enlevé, il y a inclinaison du côté de B, puisqu'on a enlevé quelque chose à l'un des poids qui s'équilibrent (1). Or, cette inclinaison n'aura pas lieu; car



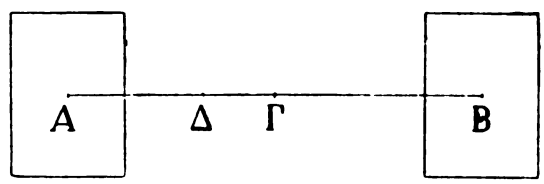
si ΓA est égal à ΓB, il y aura équilibre (2), et si ΓA est plus grand que ΓB, il y a inclinaison du côté de A, puisque des poids égaux ne s'équilibrent pas à des distances inégales, mais il y a inclinaison du côté du poids situé à la plus grande distance (3). Il s'ensuit que AΓ sera plus petit que ΓB. Il est clair aussi que des poids qui s'équilibrent à des distances inégales seront inégaux, et que le poids situé à la plus petite distance sera le plus grand.

PROPOSITION IV.

Si deux grandeurs égales n'ont pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux grandeurs sera au milieu de la droite reliant les centres de gravité de ces grandeurs.

Soit A le centre de gravité de la grandeur A, B celui de la grandeur B, et, la droite de jonction AB ayant été menée, divisons-la en deux parties égales en Γ. Je dis que Γ est le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs.

En effet, s'il ne l'est pas, soit Δ le centre de gravité (4), s'il se peut (5). Dès lors, puisque le point Δ est le centre de la grandeur composée des grandeurs A, B, il y a équilibre, le point Δ étant lié. Par consé-



1. Voir postulat III.
2. Voir postulat I. Une petite interpolation ajoute ici « car ils sont égaux à des distances égales ».
3. Voir postulat I.
4. Le texte présente ici cette interpolation : « de la (grandeur) composée des deux grandeurs A, B. »
5. Le texte présente ici ce commentaire interpolé : « car il a été démontré précédemment qu'il est situé sur AB. » Comme, en effet, Archimède ne déclare dans ses postulats, ni ne démontre ici, que le centre de gravité doit se trouver

Digitized by Google

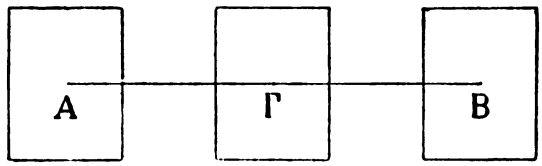
quent, les grandeurs A, B s'équilibreront aux distances AΔ, ΔB ; ce qui est impossible (1). Donc, il est évident que le point Γ est le centre de gravité de la grandeur composée des grandeurs A, B.

PROPOSITION V.

Si les centres de gravité de trois grandeurs sont situés sur une droite ; si les grandeurs ont même poids, et si les droites situées entre les centres (2) sont égales, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes les grandeurs sera le point qui est également le centre de gravité de la grandeur médiane.

Soient trois grandeurs A, B, Γ, et que leurs centres de gravité soient les points A, B, Γ situés sur une droite. Que les grandeurs A, B, Γ soient égales, et que les droites AΓ, ΓB soient égales. Je dis que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs est le point Γ.

En effet, puisque les grandeurs A, B ont même poids, leur centre de gravité sera le point Γ, parce que les droites AΓ, ΓB sont égales (3). Or, Γ est aussi le centre de gravité de la grandeur Γ ; donc, il est évident que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes les grandeurs sera aussi le point qui est le centre de gravité de la grandeur médiane.



COROLLAIRE I.

Il est clair, d'après cela, que si les centres de gravité d'un nombre impair aussi grand qu'on voudra de grandeurs sont situés sur une

sur AB, il est probable que le commentateur renvoie à une démonstration qu'il a pu encore lire, à son époque, dans un livre d'Archimède qui ne nous est pas parvenu, et qui aurait été intitulé : " Περὶ ζυγῶν ". « Sur les leviers ».

1. Voir postulat I. Le texte porte ici l'interpolation suivante : « car des (grandeurs) égales ne s'équilibrent pas à des distances inégales. »

2. Sous-entendu τοῦ βάρεος, de gravité.

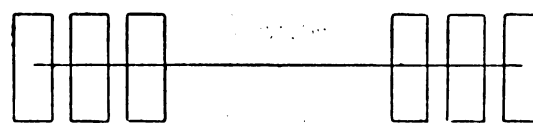
3. Voir proposition IV.

Digitized by Google

droite ; si les grandeurs également éloignées du centre ont même poids, et si les droites situées entre leurs centres de gravité sont égales, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes les grandeurs sera le point qui est également le centre de gravité de la grandeur médiane.

COROLLAIRE II.

Au reste, lorsque les grandeurs sont en nombre pair, que leurs centres de gravité sont situés sur une droite, que les grandeurs médianes, ainsi que celles qui sont également éloignées de ces dernières, ont même poids, et que les droites situées entre les centres sont égales, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes les grandeurs sera le milieu de la droite reliant les centres de gravité des grandeurs, comme nous l'avons dessiné.



PROPOSITION VI.

Des grandeurs commensurables s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles (1) à leurs poids.

Soient les grandeurs commensurables A, B, dont les centres sont les points A, B. Soit, de plus, une certaine longueur EΔ, et que la longueur ΔΓ soit à la longueur ΓE comme A est à B. Il faut démontrer que le point Γ est le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs A, B.

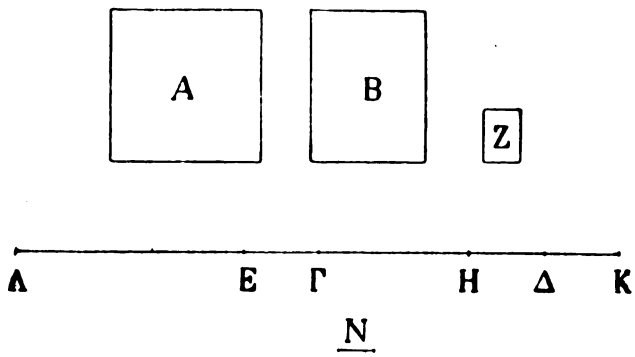
En effet, puisque ΔΓ est à ΓE comme A est à B, et que A et B sont commensurables, il en résulte que les longueurs, c'est-à-dire les droites ΓΔ, ΓE, sont aussi commensurables (2), de manière que ΓΔ, ΓE ont une commune mesure. Soit N cette commune mesure. Prenons des droites ΔH, ΔK respectivement égales à la droite

1. ἀντιπεπονθότως, forme singulière, tirée adverbialement du verbe πάσχειν, souffrir, être traité bien ou mal, qu'Aristote avait déjà employé avec la signification : « d'avoir rapport avec », et qu'Archimède affecte ici d'une préfixe pour marquer l'opposition ou la réciprocité.

2. Voir EUCLIDE, livre X, proposition 11.

Digitized by Google

ΕΓ, et la droite ΕΛ égale à la droite ΔΓ. De plus, puisque ΔΗ est égal à ΓΕ, ΔΓ est aussi égal à ΕΗ ; de manière que ΛΕ est aussi égal à ΕΗ ; par conséquent, ΛΗ est le double de ΔΓ, et ΗΚ est le double de ΓΕ. Il en résulte que Ν mesure aussi chacune des droites ΛΗ, ΗΚ, puisqu'il mesure aussi leurs moitiés. Et puisque ΔΓ est à ΓΕ comme Α est à Β, tandis que ΛΗ est à ΗΚ comme ΔΓ est à ΓΕ, car chacune des premières droites est respectivement double de chacune des secondes, il en résulte que ΛΗ est aussi à ΗΚ comme Α est à Β (1). Que Α soit un multiple de Ζ autant de fois que ΛΗ est un multiple de Ν ; dès lors, ΛΗ est à Ν comme Α est à Ζ. Or, ΚΗ est aussi à ΛΗ comme Β est à Α ; donc, par identité, ΚΗ est à Ν comme Β est à Ζ. En conséquence, Β est un multiple de Ζ autant de fois que ΚΗ est un multiple de Ν. Or, on a déclaré que Α est aussi un multiple de Ζ, en sorte que Ζ est la mesure commune des grandeurs Α, Β (2). Dès lors, la droite ΛΗ étant divisée en parties égales à Ν, tandis que Α étant divisé en parties égales à Ζ, les segments de longueur égale à Ν, contenus dans ΛΗ, seront en même nombre que les segments égaux à Ζ contenus dans Α ; de manière que, si sur chacun des segments de la droite ΛΗ on dispose une grandeur égale à Ζ, ayant son centre de gravité au milieu du segment, l'ensemble de ces grandeurs sera à égal à Α, et le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le



1. On a posé: $\Delta H = \Delta K = E\Gamma$, d'où : $\Delta H + \Gamma H = E\Gamma + \Gamma H$, ou $\Delta\Gamma = EH$. D'autre part, on a posé : $E\Lambda = \Delta\Gamma$, d'où : $E\Lambda = EH$; donc, $E\Lambda + EH = 2EH = 2\Delta\Gamma$, ou $\Lambda H = 2\Delta\Gamma$, et $\Delta H + \Delta K = 2E\Gamma$, ou $HK = 2E\Gamma$, d'où : $\frac{\Lambda H}{HK} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma E}$. Or, par hypothèse : $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma E} = \frac{A}{B}$, donc, comme le texte : $\frac{\Lambda H}{HK} = \frac{A}{B}$.

2. Si $\Lambda H = m \times N$, soit $A = m \times Z$,d'où : $\frac{\Lambda H}{N} = \frac{A}{Z}$, d'où, comparant avec la relation de la note précédente, il vient : $\frac{HK}{B} = \frac{N}{Z}$, ou, comme le texte : $\frac{HK}{N} = \frac{B}{Z} = p$, d'où : $B = p \times Z$. Donc, Z mesure A et B.

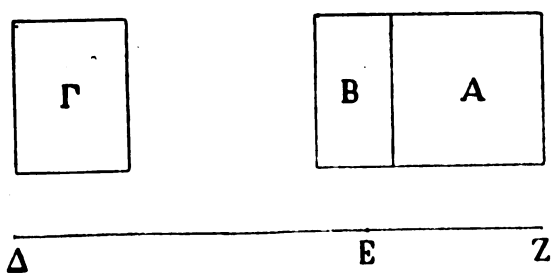
Digitized by Google

point E ; car toutes ces grandeurs sont en nombre pair, et elles sont en même nombre de chaque côté de E, parce que ΛE est égal à HE (1). On démontrera pareillement que, si sur chacun des segments (2) de la droite KH on dispose une grandeur égale à Z, ayant son centre de gravité au milieu du segment, l'ensembe de ces grandeurs sera égal à B, et que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point Δ. En conséquence, la grandeur A sera disposée au point E, tandis que la grandeur B le sera au point Δ. Dès lors, des grandeurs égales entre elles, dont les centres de gravité sont également distants entre eux, seront disposées en nombre pair sur une droite ; par conséquent, il est évident que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes les grandeurs est le milieu de la droite sur laquelle sont situés les centres des grandeurs médianes (3). Or, puisque la droite ΛE est égale à la droite ΓΔ, et que la droite EΓ est égale à la droite ΔK, la droite entière ΛΓ sera aussi égale à la droite entière ΓK ; de manière que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes les grandeurs est le point Γ. En conséquence, la grandeur A, disposée au point E, et la grandeur B, disposée au point Δ, s'équilibreront autour du point Γ.

PROPOSITION VII.

Au reste, si les grandeurs sont incommensurables, elles s'équilibreront pareillement à des distances inversement proportionnelles à leurs grandeurs.

Soient les grandeurs incommensurables AB, Γ ; soient des distances ΔE, EZ, et que le rapport de AB à Γ soit le même que celui de la distance EΔ à la distance EZ. Je dis que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs AB, Γ est le point E.



1. Voir proposition V, corollaire.
2. C'est-à-dire des segments de longueur égale à N.
3. Voir proposition V, corollaire 2.

Digitized by Google

En effet, si AB, disposé au point Z, n'équilibre pas Γ, disposé au point Δ, la grandeur AB est trop ou pas assez grande par rapport à la grandeur Γ pour qu'il y ait équilibre. Qu'elle soit trop grande, et retranchons de AB une grandeur moindre que l'excédent dont AB dépasse Γ pour pouvoir l'équilibrer, de manière que la grandeur restante A soit commensurable avec Γ. Dès lors, puisque les grandeurs A, Γ sont commensurables, et que le rapport de A à Γ est moindre que celui de ΔE à EZ, si A est disposé en Z, tandis que Γ est disposé en Δ, les grandeurs A, Γ ne s'équilibreront pas aux distances ΔE, EZ. Pour le même motif, il n'y aura pas équilibre si la grandeur Γ est trop grande par rapport à AB pour l'équilibrer (1).

PROPOSITION VIII.

Si, d'une certaine grandeur, l'on retranche quelque grandeur n'ayant pas le même centre (2) que la grandeur entière, le centre de gravité de la grandeur restante est situé à l'extrémité de la droite obtenue en prolongeant, dans la direction du centre de la grandeur entière, la droite reliant les centres de gravité de la grandeur entière et de la grandeur retranchée, et en prenant, sur le prolongement de la droite reliant les centres que nous venons de dire, une droite telle que son rapport à la droite située entre les centres soit le même que celui

1. Le texte de cette proposition doit avoir été fort altéré, car la démonstration est devenue obscure, et a perdu la conclusion annoncée. On peut la rétablir à peu près comme suit : Je dis que les grandeurs incommensurables A + B, Γ, disposées respectivement aux points Z, Δ, aux distances liées par la relation $\frac{A+B}{\Gamma}=\frac{\Delta E}{EZ}$, s'équilibrent autour du point E, c'est-à-dire que E est le centre de gravité de l'ensemble des grandeurs A + B, Γ.

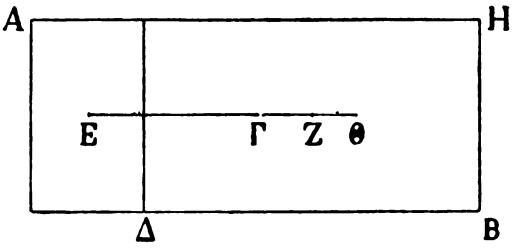
En effet, supposons d'abord que A + B soit trop grand pour pouvoir équilibrer Γ, c'est-à-dire qu'il y ait inclinaison du côté de Z. Retranchons de A + B une grandeur B trop petite pour que le reste A puisse équilibrer Γ, et suffisante pour que A et Γ deviennent commensurables. Dès lors, on a deux grandeurs commensurables, et $\frac{A}{\Gamma}<\frac{\Delta E}{EZ}$. Or, en vertu de la proposition VI, il n'y aura pas équilibre entre A et Γ, mais inclinaison du côté de Δ ; ce qui est absurde, puisque la grandeur B retranchée est trop petite pour que le reste A puisse équilibrer Γ, c'est-à-dire pour qu'il n'y ait plus inclinaison du côté de Z. Donc, A + B n'est pas trop grand pour équilibrer Γ. Supposons maintenant que A + B ne soit pas assez grand pour équilibrer Γ, ou, ce qui revient au même, que Γ soit trop grand pour équilibrer A + B, comme le dit le texte. En raisonnant de même, on conclura que Γ n'est pas trop grand. Dès lors, l'ensemble des grandeurs A + B, Γ a son centre de gravité au point E.

2. Sous-entendu : de gravité.

Digitized by Google

du poids de la grandeur retranchée au poids de la grandeur restante.

Soit Γ le centre de gravité d'une certaine grandeur AB, et retranchons de AB la grandeur AΔ dont le centre de gravité soit E. Ayant mené la droite de jonction EΓ, et l'ayant prolongée (1), prenons-y ΓZ, dont le rapport à ΓE soit le même que celui de la grandeur AΔ à la grandeur ΔH.



On doit démontrer que le centre de gravité de la grandeur ΔH est le point Z. En effet, qu'il n'en soit pas ainsi, et que le centre soit, si possible, le point Θ. Dès lors, puisque E est le centre de gravité de la grandeur AΔ, et que le point Θ est celui de la grandeur ΔH, le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs AΔ, ΔH sera situé sur la droite EΘ, divisée de telle sorte que ses segments soient inversement proportionnels aux grandeurs (2) ; de manière que le point Γ ne sera pas situé sur le segment correspondant à celui que nous venons de dire (3). En conséquence, Γ n'est pas le centre de la grandeur composée des grandeurs AΔ, ΔH, c'est-à-dire de la grandeur AB. Or, il l'est, puisqu'on l'a supposé ; donc, le point Θ n'est pas le centre de gravité de la grandeur ΔH (4).

PROPOSITION IX.

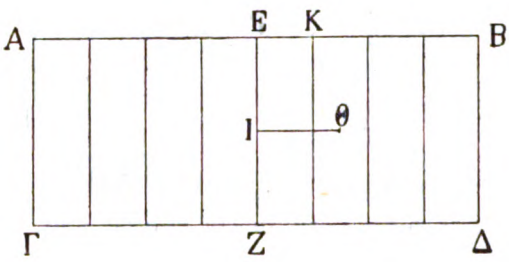
Le centre de gravité de tout parallélogramme est situé sur la droite reliant les points qui divisent les côtés opposés du parallélogramme en deux parties égales.

1. Prolongée du côté du point Γ.
2. Voir propositions VI et VII.
3. L'obscurité de cette phrase résulte probablement de quelque lacune dans le texte qui précède. Le raisonnement se poursuit d'ailleurs dans le sens suivant : Si Θ est le centre de gravité de ΔH, et vu que E est le centre de gravité de AΔ, le centre de gravité de AΔ + ΔH = AB sera tel, en vertu de la proposition VI, que $\frac{A\Delta}{\Delta H} = \frac{\Gamma\Theta}{\Gamma E}$. Or, par hypothèse, Γ est le centre de gravité de AB ; il est donc situé sur EZ, divisé de telle sorte que $\frac{A\Delta}{\Delta H} = \frac{\Gamma Z}{\Gamma E}$, d'où : $\frac{\Gamma Z}{\Gamma E} = \frac{\Gamma\Theta}{\Gamma E}$; ce qui est impossible ; etc.
4. Le texte paraît avoir perdu la conclusion disant que le point Z est donc le centre de gravité de la grandeur restante ΔH.

Digitized by Google

Soit le parallélogramme ABΓΔ, et soit EZ la droite menée aux points qui divisent AB, ΓΔ en deux parties égales. Je dis que le centre de gravité du parallélogramme ABΓΔ sera situé sur la droite EZ.

En effet, qu'il n'en soit pas ainsi, mais que le centre soit, si possible, le point Θ, et menons la droite ΘI parallèle à la droite AB. Dès lors, si la droite EB est continuellement divisée en deux parties égales, il restera bientôt une droite plus petite que ΘI. Divisons chacune des droites AE, EB en parties égales à EK (1), et, par les points de division, menons des parallèles à EZ. Le parallélogramme entier sera donc divisé en parallélogrammes égaux et semblables au parallélogramme KZ. Ces parallélogrammes égaux et semblables au parallélogramme KZ s'appliquant par conséquent l'un sur l'autre, leurs centres de gravité coïncideront aussi (2). On aura donc certaines grandeurs, des parallélogrammes égaux à KZ, en nombre pair ; leurs centres de gravité sont situés sur une droite ; les grandeurs médianes sont égales ; toutes celles qui sont situées de part et d'autre des grandeurs médianes sont aussi égales, et les droites placées entre les centres sont égales. En conséquence, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera situé sur la droite reliant les centres de gravité des aires médianes (3). Or, il n'en est pas ainsi, car le point Θ est situé en dehors des parallélogrammes médians (4) ; donc, il est clair que le centre de gravité du parallélogramme ABΓΔ est situé sur la droite EZ.



PROPOSITION X.

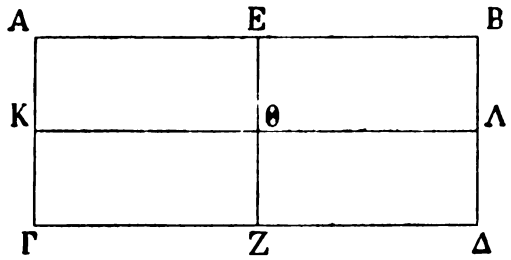
Le centre de gravité de tout parallélogramme est le point où ses diamètres se rencontrent.

Soit le parallélogramme ABΓΔ. Soit, dans ce parallélogramme, la droite EZ divisant les droites AB, ΓΔ en deux parties égales, et

1. C'est-à-dire égales à EK < IΘ.
2. Voir postulat IV.
3. Voir proposition V, corollaire.
4. Puisque, par hypothèse : EK < IΘ.

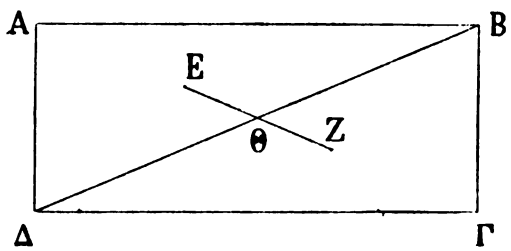
Digitized by Google

la droite KΛ divisant de même les droites AΓ, BΔ. Dès lors, le centre de gravité du parallélogramme ABΓΔ est situé sur la droite EZ ; car cela a été démontré (1). Or, pour le même motif, il est aussi situé sur la droite KΛ ; par conséquent, le point Θ est le centre de gravité. Or, les diamètres du parallélogramme se rencontrent au point Θ ; en sorte que ce qui a été proposé est démontré.



AUTRE DÉMONSTRATION.

Au reste, cette proposition se démontre encore autrement. Soit le parallélogramme ABΓΔ, et soit ΔB son diamètre. Dès lors, les triangles ABΔ, BΔΓ sont égaux et semblables (2) ; en sorte que ces triangles s'ajustant l'un sur l'autre, leurs centres de gravité tomberont aussi l'un sur l'autre (3). Soit donc le point E le centre de gravité du triangle ABΔ ; divisons ΔB en deux parties égales au point Θ; menons la droite EΘ que nous prolongeons, et découpons une droite ZΘ égale à la droite ΘE. Dès lors, le triangle ABΔ s'ajustant sur le triangle BΔΓ, et le côté AB étant posé sur le côté ΔΓ, tandis que le côté AΔ est posé sur le côté BΓ, la droite ΘE s'ajustera aussi sur la droite ZΘ, et le point E tombera sur le point Z. Or, il tombe également sur le centre de gravité du triangle BΔΓ (4) ; par conséquent, puisque le centre de gravité du triangle ABΔ est le point E, et que le point Z est celui du triangle ΔBΓ,



1. Voir proposition IX.
2. EUCLIDE, livre I, proposition 34.
3. Voir postulat IV.
4. Voir postulat IV. Heiberg a émis l'opinion que le texte aurait perdu ici une conclusion, et il a proposé une reconstitution grecque que nous traduisons ainsi : « le point Z est donc le centre de gravité du triangle BΔΓ ». (Cfr. *loc. cit.* Vol. II, p. 145.)

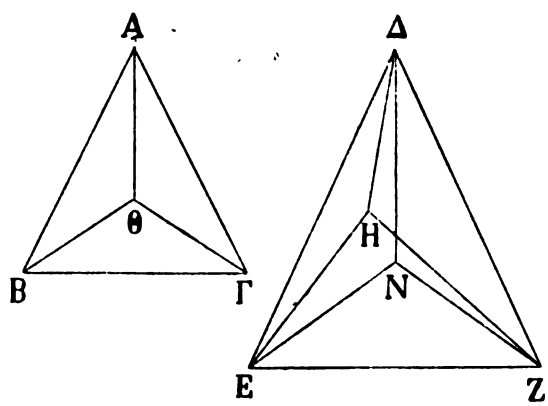
Digitized by Google

il est évident que le centre de gravité de la grandeur composée des deux triangles est le milieu de la droite EZ, c'est-à-dire le point Θ (1).

PROPOSITION XI.

Si l'on a deux triangles semblables entre eux, dans lesquels des points sont semblablement placés par rapport aux triangles ; si un point est le centre de gravité du triangle dans lequel il est situé, l'autre point est aussi le centre de gravité du triangle dans lequel il est situé (2).

Soient les deux triangles ABΓ, ΔEZ ; que AB soit à ΔE et BΓ à EZ comme AΓ est à ΔZ ; soient Θ, N des points semblablement placés dans les dits triangles (3), et que le point Θ soit le centre de gravité du triangle ABΓ. Je dis que le point N est aussi le centre de gravité du triangle ΔEZ. En effet, qu'il n'en soit pas ainsi ; que le point H soit, si possible, le centre de gravité du triangle ΔEZ, et menons les droites de jonction ΘA, ΘB, ΘΓ, ΔN, EN, ZN, ΔH, EH, ZH. Dès lors, puisque le triangle ABΓ est semblable au triangle ΔEZ, et que les centres de gravité sont les points Θ, H, tandis que les centres de gravité de figures semblables sont semblablement placés (4), l'angle sous HΔ, ΔE sera donc égal à l'angle sous ΘA, AB. Mais, l'angle sous ΘA, AB est égal à l'angle sous EΔ,ΔN (5), parce que les points Θ, N sont semblablement placés (6) ; donc, l'angle



1. Voir proposition IV.
2. Une interpolation reproduit ici partiellement le texte du postulat V : « Or, nous disons semblablement placés dans des figures semblables les points d'où les droites menées aux angles égaux forment des angles égaux avec les côtés homologues ».
3. Une petite interpolation ajoute : « par rapport aux triangles ABΓ, ΔEZ ».
4. Voir postulat V. Une interpolation ajoute encore ici : « de manière que des angles égaux soient formés respectivement avec les côtés homologues ».
5. Voir postulat V.
6. Phrase probablement interpolée.

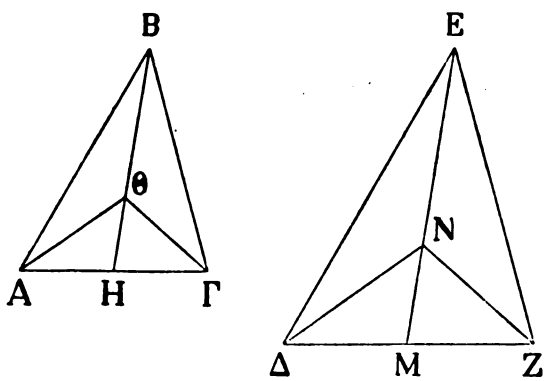
Digitized by Google

sous EΔ, ΔN est aussi égal à l'angle sous EΔ, ΔH, et un plus grand angle est égal à un plus petit ; ce qui est impossible. En conséquence, le point N ne peut pas ne pas être le centre de gravité du triangle ΔEZ; donc il l'est.

PROPOSITION XII.

Si l'on a deux triangles semblables ; si le centre de gravité de l'un des triangles est situé sur la droite menée d'un angle au milieu d'une base, le centre de gravité de l'autre triangle sera aussi situé sur la droite menée semblablement.

Soient les deux triangles ABΓ, ΔEZ, et que AB soit à ΔE et BΓ à ZE comme AΓ est à ΔZ. La droite AΓ étant divisée en deux parties égales au point H, menons la droite de jonction BH, et que le centre de gravité du triangle ABΓ, situé sur la droite BH, soit le point Θ. Je dis que le centre de gravité du triangle EΔZ est aussi situé sur la droite semblablement menée.



Divisons la droite ΔZ en deux parties égales au point M ; menons la droite de jonction EM ; faisons en sorte que ME soit à EN comme BH est à BΘ, et menons les droites de jonction AΘ, ΘΓ, ΔN, NZ. Puisque AH est la moitié de ΓA, et que ΔM est la moitié de ΔZ, AH est aussi à ΔM comme BA est à EΔ (1). De plus, les côtés adjacents à des angles égaux sont homologues ; donc, l'angle sous AH, HB est égal à l'angle sous ΔM, ME (2), et BH est à EM comme AH est à ΔM. Or, ME est aussi à EN comme BH est à BΘ ; donc, par identité, BΘ est aussi à EN comme AB est à ΔE (3), et

1. Par hypothèse : $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}=\frac{\frac{1}{2}A\Gamma}{\frac{1}{2}\Delta Z}=\frac{AH}{\Delta M}$.

2. EUCLIDE, livre VI, proposition 6 (édition précitée de la traduction d'Euclide par PEYRARD, p. 220).

3. On a : $\frac{BH}{EM}=\frac{AH}{\Delta M}$. Or, par hypothèse : $\frac{EM}{EN}=\frac{BH}{B\Theta}$, d'où : $\frac{B\Theta}{EN}=\frac{BH}{EM}$; donc : $\frac{B\Theta}{EN}=\frac{AH}{\Delta M}$, d'où (note pénultième) : $\frac{B\Theta}{EN}=\frac{AB}{\Delta E}$.

Digitized by Google

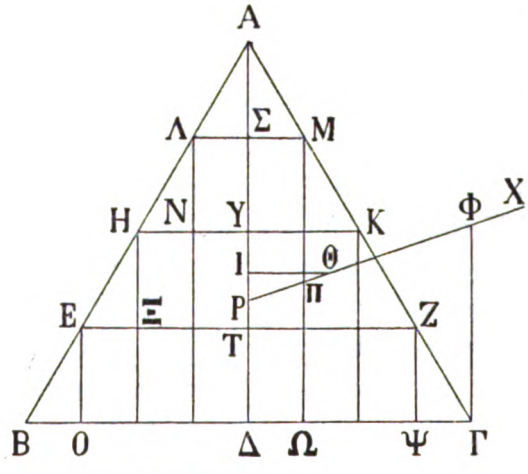
ces côtés adjacents à des angles égaux sont homologues. S'il en est ainsi, l'angle sous BA, AΘ est égal à l'angle sous EΔ, ΔN ; en sorte que l'angle restant sous ΘA, AΓ est aussi égal à l'angle sous NΔ, ΔZ (1). Pour les mêmes motifs, l'angle sous BΓ, ΓΘ est égal à l'angle sous EZ, ZN, et l'angle sous ΘΓ, ΓH égal à l'angle sous NZ, ZM. Or, on a démontré que l'angle sous AB, BΘ est aussi égal à l'angle sous ΔE, EM ; en sorte que l'angle restant sous ΘB, BΓ est égal à l'angle sous NE, EZ. Dès lors, tous les points Θ, N, sont semblablement placés (2). En conséquence, puisque les points Θ, N sont semblablement placés, et que Θ est le centre de gravité du triangle ABΓ, le point N sera aussi le centre de gravité du triangle ΔEZ (3).

PROPOSITION XIII.

Le centre de gravité de tout triangle est situé sur la droite menée d'un angle au milieu d'une base (4).

Soit le triangle ABΓ dans lequel la droite AΔ est menée au milieu de la base BΓ. On doit démontrer que le centre de gravité du triangle ABΓ est situé sur la droite AΔ.

En effet, qu'il n'en soit pas ainsi, mais que le centre de gravité soit, si possible, le point Θ, et, par ce point, menons la droite ΘI parallèlement à la droite BΓ. Dès lors, la droite ΔΓ étant continuellement divisée en deux parties égales, on aura bientôt un reste plus petit que ΘI. Divisons chacune des droites BΔ, ΔΓ en parties égales à ce reste ; menons par les points de division des parallèles à AΔ, et menons les droites de jonc-



1. On a : angle BAΘ = angle EΔN, d'où : angle BAΓ — angle BAΘ = angle EΔZ — angle EΔN, ou : angle ΘAΓ = angle NΔZ.

2. Le texte présente ici une petite interpolation qui manque d'ailleurs de précision : « ils forment des angles égaux avec les côtés homologues ».

3. Voir proposition XI.

4. C'est-à-dire au milieu du côté opposé à cet angle.

Digitized by Google

tion EZ, HK, ΛM. Ces dernières droites seront donc parallèles à la droite BΓ (1). Dès lors, le centre de gravité du parallélogramme MN est situé sur la droite ΥΣ ; le centre de gravité du parallélogramme KΞ sur la droite TΥ, et celui du parallélogramme ZO sur la droite TΔ (2). En conséquence, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes les grandeurs précédentes est situé sur la droite ΣΔ (3). Que ce centre soit le point P ; menons la droite de jonction PΘ, que nous prolongeons, et menons la droite ΓΦ parallèle à la droite AΔ. Dès lors, le rapport du triangle AΔΓ à la somme des triangles semblables au triangle AΔΓ, construits sur les droites AM, MK, KZ, ZΓ, est le même que le rapport de ΓA à AM, parce que les droites AM, MK, ZΓ, KZ sont égales (4).Or, puisque le rapport du triangle AΔB à la somme des triangles semblables, construits sur les droites AΛ, ΛH, HE, EB, est aussi le même que celui de BA à AΛ, il en résulte que le rapport du triangle ABΓ à la somme de tous les triangles que nous venons de dire, est le même que celui de ΓA à AM (5). Or, le rapport de ΓA à AM est plus grand que celui de ΦP à PΘ ; car le rapport de ΓA à AM est le même que celui de ΦP à PΠ, parce que l'on a des triangles semblables (6). Donc, le rapport du triangle ABΓ aux trian-

1. En effet, $\frac{BO}{B\Delta}=\frac{\Gamma\Psi}{\Gamma\Delta}$, d'où : $\frac{BO}{B\Delta-BO}=\frac{\Gamma\Psi}{\Gamma\Delta-\Gamma\Psi}$, ou : $\frac{BO}{O\Delta}=\frac{\Gamma\Psi}{\Psi\Delta}$. Or, $\frac{BO}{O\Delta}=\frac{BE}{EA}$, et $\frac{\Gamma\Psi}{\Psi\Delta}=\frac{\Gamma Z}{ZA}$; donc : $\frac{BE}{EA}=\frac{\Gamma Z}{ZA}$. Il en résulte que les deux côtés du triangle sont coupés proportionnellement (EUCLIDE, livre VI, prop. 2), et EZ est donc parallèle à BΓ. De même pour HK et ΛM.

2. Voir proposition IX.

3. Voir proposition IV.

4. Le rapport des aires de triangles semblables est égal au carré du rapport de similitude; donc : $\frac{\text{triangle } A\Delta\Gamma}{\text{triangle } A\Sigma M}=\frac{\overline{A\Gamma}^2}{\overline{AM}^2}$. Soit n le nombre des petits triangles égaux entre eux, on aura : $\sum$ triangles $=n\times$ triangle AΣM ; donc :

$$\frac{\text{triangle } A\Delta\Gamma}{n\times\text{triangle } A\Sigma M}=\frac{\overline{A\Gamma}^2}{n\times\overline{AM}^2},$$

d'où, observant que $A\Gamma=n\times AM$, il vient, comme le texte : $\frac{\text{triangle } A\Delta\Gamma}{\sum\text{ triangles}}=\frac{A\Gamma}{AM}$.

5. On aura, de même, pour les triangles décrits sur les segments de AB : $\frac{\text{triangle } A\Delta B}{\sum'\text{ triangles}}=\frac{BA}{A\Lambda}$. Or, $\frac{A\Gamma}{AM}=\frac{BA}{A\Lambda}$ donc (note précéd.) : $\frac{\text{triangle } A\Delta\Gamma}{\sum}=\frac{\text{triangle } A\Delta B}{\sum'}$, d'où : $\frac{\text{triangle } A\Delta\Gamma+\text{triangle } A\Delta B}{\sum+\sum'}=\frac{\text{triangle } AB\Delta}{\sum'}=\frac{BA}{A\Lambda}=\frac{A\Gamma}{AM}$, ou, comme le texte : $\frac{\text{triangle } AB\Gamma}{\text{somme petits triangles}}=\frac{A\Gamma}{AM}$.

6. On a : $\frac{A\Gamma}{AM}=\frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Omega}=\frac{\Phi P}{P\Pi}$. Or, $P\Theta>P\Pi$; donc : $\frac{A\Gamma}{AM}<\frac{\Phi P}{P\Theta}$

Digitized by Google

gles que nous avons dits est aussi plus grand que celui de ΦP à PΘ ; en sorte que, par division, le rapport des parallélogrammes MN, KΞ, ZO aux triangles restants est plus grand aussi que le rapport de ΦΘ à ΘP (1). Etablissons donc un rapport de XΘ à ΘP égal à celui des parallélogrammes aux triangles (2). Dès lors, puisque l'on a une certaine grandeur ABΓ dont le centre de gravité est Θ, qu'on en a retranché une grandeur composée des parallélogrammes MN, KΞ, ZO, et que le centre de gravité de la grandeur retranchée est le point P, il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur restante, composée des triangles laissés à l'entour, est situé sur la droite PΘ prolongée, sur laquelle on a pris une droite ayant avec ΘP le même rapport que la grandeur retranchée possède avec la grandeur restante (3). Donc, le point X est le centre de gravité de la grandeur composée des triangles qui restent à l'entour (4) ; ce qui est impossible, car ces derniers sont tous situés du même côté d'une droite, parallèle à AΔ, menée du point X dans le plan (5). Dès lors, la proposition est évidente (6).

AUTRE DÉMONSTRATION DE LA MÊME PROPOSITION.

Soit le triangle ABΓ, et menons la droite AΔ sur le milieu de la droite BΓ. Je dis que le centre de gravité du triangle ABΓ est situé sur la droite AΔ.

1. Les relations des deux notes précédentes donnent: $\frac{\text{triangle ABΓ}}{\text{somme petits triangles}} > \frac{\Phi P}{P\Theta}$, d'où : $\frac{\text{triangle ABΓ} - \text{somme petits triangles}}{\text{somme petits triangles}} > \frac{\Phi P - P\Theta}{P\Theta}$, ou : $\frac{\text{somme parallélogrammes}}{\text{somme petits triangles}} > \frac{\Phi\Theta}{P\Theta}$.

2. On pose : $\frac{X\Theta}{P\Theta} = \frac{\text{somme parallélogrammes}}{\text{somme petits triangles}}$; donc : $\frac{X\Theta}{P\Theta} > \frac{\Phi\Theta}{P\Theta}$, d'où : $X\Theta > \Phi\Theta$; donc, le point X est situé sur le prolongement de la droite PΦ.

3. Voir proposition VIII.

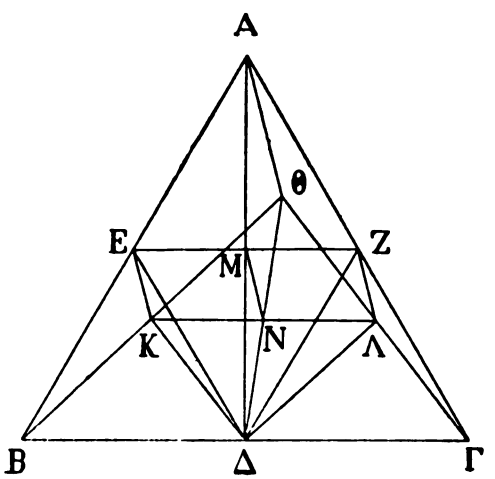
4. C'est-à-dire laissés à l'entour des parallélogrammes.

5. Le petit commentaire interpolé à cet endroit : « c'est-à-dire de l'un ou de l'autre côté », ne lève cependant pas l'obscurité de la phrase.

6. C'est-à-dire que le centre de gravité du triangle ABΓ ne peut être situé que sur la droite AΔ. La manière embarrassée dont se termine cette démonstration fait supposer quelque altération du texte original. En effet, celui-ci aura probablement invoqué le postulat VII contre l'impossibilité d'avoir le centre de gravité au point X ; car le fait même d'avoir énoncé ce postulat en tête du livre indiquait, tout au moins, qu'il serait invoqué dans l'une ou l'autre proposition.

Digitized by Google

En effet, qu'il n'en soit pas ainsi, et que le centre soit, si possible, le point Θ. Menons les droites de jonction AΘ, ΘB, ΘΓ, et les droites EΔ, ZE sur les milieux des droites BA, AΓ. Menons les droites EK, ZΛ parallèles à la droite AΘ, et menons les droites de jonction KΛ, ΛΔ, ΔK, ΔΘ, MN. Dès lors, puisque le triangle ABΓ est semblable au triangle ΔZΓ, parce que la droite ZΔ est parallèle à la droite BA (1), et que le centre de gravité du triangle ABΓ est le point Θ, il en résulte que le centre de gravité du triangle ZΔΓ est le point Λ (2) ; car les points Θ, Λ sont placés semblablement dans chacun des triangles (3). Dès lors, pour les mêmes raisons, le centre de gravité du triangle EBΔ est le point K (4) ;en sorte que le centre de gravité de la grandeur composée des deux triangles EBΔ, ZΔΓ est situé au milieu de la droite KΛ (5), parce que les triangles EBΔ, ZΔΓ sont égaux (6). D'autre part, le milieu de la droite KΛ est le point N, parce que BK est à ΘK comme BE est à EA, que ΓΛ est à ΛΘ comme ΓZ est à ZA, et que, s'il en est ainsi, la droite BΓ est parallèle à la droite KΛ. De plus, on a mené la droite de jonction ΔΘ ; donc,



1. On a : $\frac{\Gamma Z}{\Gamma A}=\frac{1}{2}$, et $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma B}=\frac{1}{2}$, d'où : $\frac{\Gamma Z}{\Gamma A}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma B}$, d'où (EUCLIDE, liv. VI, prop. 2) parallélisme des droites ΔZ, AB.

2. Voir proposition XI.

3. Les points Θ, Λ sont semblablement placés dans les deux triangles semblables ABΓ, ZΔΓ ; car il est facile de voir, par la considération de deux séries de triangles semblables, que les droites menées de Θ, A aux angles de leurs triangles respectifs forment des angles égaux avec les côtés homologues. Le texte porte d'ailleurs ici cette petite interpolation : « puisque des angles égaux sont formés avec les côtés homologues ; car cela est clair. »

4. On a, par construction : AB = 2EB, et BΓ = 2BΔ, d'où : $\frac{AB}{EB}=\frac{B\Gamma}{B\Delta}$, d'où similitude des triangles ABΓ, EBΔ dans lesquels, par considération d'une série de triangles semblables, les points Θ, K sont semblablement placés ; donc, K est le centre de gravité du triangle EBΔ.

5. Voir proposition IV.

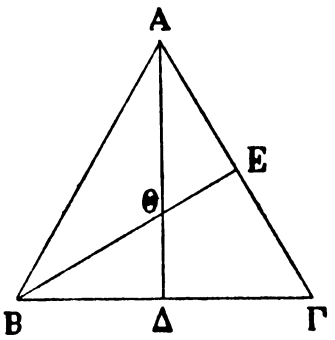
6. Cette phrase n'est peut-être qu'une interpolation (Cfr. HEIBERG, *loc. cit.* Vol. II, p. 157).

Digitized by Google

KN est à NΛ comme BΔ est à ΔΓ (1) ; en sorte que le centre de gravité de la grandeur composée des deux triangles en question est le point N. Or, le centre de gravité du parallélogramme AEΔZ est aussi le point M (2) ; en sorte que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes les grandeurs est situé sur la droite MN (3). Or, le centre de gravité du triangle ABΓ est aussi le point Θ (4) ; par conséquent, la droite MN prolongée passera par le point Θ ; ce qui est impossible (5). Le centre de gravité du triangle ABΓ ne peut donc pas ne pas être situé sur la droite AΔ ; donc, il est situé sur cette droite.

PROPOSITION XIV.

Le centre de gravité de tout triangle est le point où se rencontrent les droites menées des angles du triangle aux milieux des côtés.



Soit le triangle ABΓ. Menons la droite AΔ sur le milieu de la droite BΓ, et la droite BE sur le milieu de la droite AΓ. Dès lors, le centre de gravité du triangle ABΓ est situé sur chacune des droites AΔ, BE, car cela a été démontré (6) ; donc, le point Θ est le centre de gravité (7).

1. On a : $\frac{BK}{\Theta K} = \frac{BE}{EA}$, et $\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda\Theta} = \frac{\Gamma Z}{ZA}$. Or, $\frac{BE}{EA} = \frac{\Gamma Z}{ZA}$; donc : $\frac{BK}{\Theta K} = \frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda\Theta}$, d'où parallélisme des droites BΓ, KΛ, d'où : $\frac{KN}{N\Lambda} = \frac{B\Delta}{\Lambda\Gamma}$. Or, $B\Delta = \Delta\Gamma$; donc : $KN = N\Lambda$, d'où, comme le texte, le point N est le milieu de la droite KΛ.

2. Voir proposition X.

3. En effet, triangle EBΔ + triangle ZΔΓ = parallélogramme AEΔZ. Or, le centre de gravité de l'ensemble des deux triangles est N, et celui du parallélogramme est M ; donc, on se trouve dans le cas de deux grandeurs égales, dont l'ensemble a pour centre de gravité le milieu de MN qui relie leurs centres de gravité respectifs (prop. IV).

4. Par hypothèse.

5. Les points M, N sont respectivement au milieu de EZ et KΛ, d'où parallélisme des droites MN, ZΛ. Or, ZΛ est parallèle à AΘ ; donc, MN, AΘ sont parallèles.

6. Voir proposition XIII.

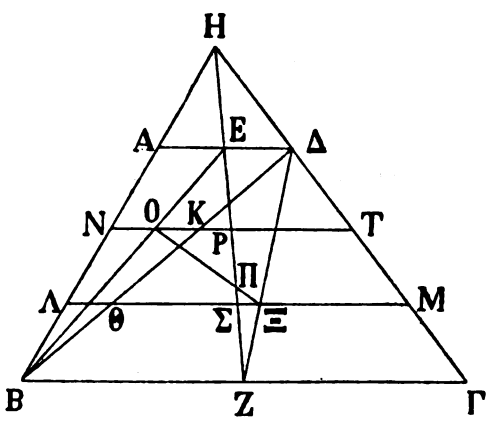
7. Proposition invoquée dans la démonstration de la proposition VI du livre *De la Quadrature de la Parabole*.

Digitized by Google

PROPOSITION XV.

Le centre de gravité de tout trapèze ayant deux côtés parallèles entre eux est situé sur la droite qui, reliant les points de division des parallèles en deux parties égales, est divisée de manière que le rapport de son segment, ayant le point de division de la plus petite parallèle comme extrémité, au segment restant soit le même que le rapport d'une droite égale au double de la plus petite parallèle, augmenté de la plus grande, à une droite égale au double de la plus grande parallèle, augmenté de la plus petite (1).

Soit le trapèze ABΓΔ ayant les côtés AΔ, BΓ parallèles, et que la droite EZ relie les points qui divisent les droites AΔ et BΓ en deux parties égales. Dès lors, il est clair que le centre (2) du trapèze est situé sur la droite EZ. En effet, si l'on prolonge les droites ΓΔH, ZEH, BAH, il est évident qu'elles se rencontreront en un même point, que le centre de gravité du triangle HBΓ sera situé sur la droite HZ, et que le centre de gravité du triangle AHΔ sera semblablement situé sur la droite EH (3). Donc, le centre de gravité du trapèze restant ABΓΔ sera aussi situé sur la droite EZ (4). D'autre part, ayant mené la droite de jonction BΔ, divisons-la en trois parties égales aux points K, Θ. Menons par ces points les droites ΛΘM, NKT parallèles à la droite BΓ, et menons les droites de jonction ΔZ, BE, OΞ. Dès lors, le centre de gravité du triangle ΔBΓ sera situé sur la droite ΘM, parce que ΘB est la troisième partie de BΔ, et que la droite MΘ a été menée



1. Proposition invoquée dans la démonstration de la proposition X du livre *De la Quadrature de la Parabole.*
2. Sous-entendu : de gravité.
3. Voir proposition XIII.
4. Voir proposition VIII.

Digitized by Google

parallèlement à la base par le point Θ (1). Or, le centre de gravité du triangle ΔΒΓ est situé aussi sur la droite ΔΖ (2), de manière que le centre de gravité du triangle en question est le point Ξ. Or, pour le même motif, le point O est le centre de gravité du triangle ΑΒΔ (3) ; par conséquent, le centre de gravité de la grandeur composée des deux triangles ΑΒΔ, ΒΔΓ, c'est-à-dire du trapèze, est situé sur la droite ΟΞ. Or, le centre de gravité du trapèze que nous venons de dire est situé sur la droite ΕΖ ; en sorte que le centre de gravité du trapèze ΑΒΓΔ est le point Π. D'autre part, le rapport du triangle ΒΔΓ au triangle ΑΒΔ sera le même que celui de ΟΠ à ΠΞ (4). Or, ΒΓ est à ΑΔ comme le triangle ΒΔΓ est au trangle ΑΒΔ (5), et ΡΠ est à ΠΣ comme ΟΠ est à ΠΞ (6) ; par conséquent, ΡΠ est aussi à ΠΣ comme ΒΓ est à ΑΔ ; en sorte que le double de ΡΠ, augmenté de ΠΣ, est aussi au double de ΠΣ, augmenté de ΠΡ, comme le double de ΒΓ, augmenté de ΑΔ, est au double de ΑΔ augmenté de ΒΓ. Or le double de ΡΠ, augmenté de ΠΣ, est égal à la somme de ΣΡ, ΡΠ, c'est-à-dire à ΠΕ, et le double de ΠΣ, augmenté de ΠΡ, est égal à la somme de ΡΣ, ΣΠ, c'est-à-dire à ΠΖ ; donc, la proposition est démontrée (7).

1. Bien que cette conclusion se déduise facilement de la proposition XIV, suivant laquelle le centre de gravité du triangle est au point de rencontre des médianes, Archimède admet que la droite ΘΜ, parallèle à ΒΓ, menée par le point Θ situé au tiers de ΒΔ, passera évidemment par le point de rencontre des médianes. Or, il ne démontre pas que les médianes d'un triangle se coupent en un même point, situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté correspondant. Archimède connaissait donc cette propriété, dont on ne trouve cependant pas de démonstration explicite chez les géomètres grecs antérieurs.

2. Voir proposition XIII.

3. Parce que, d'après le raisonnement qui précède, le centre O est à la fois sur ΟΤ, qui passe par le point de rencontre des médianes du triangle ΑΒΔ, et sur la médiane ΒΕ.

4. Voir propositions VI et VII.

5. Ces deux triangles, de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases.

6. Par similitude des triangles ΟΡΠ, ΞΣΠ.

7. On a (prop. VI et VII) : $\frac{\text{triangle } B\Delta\Gamma}{\text{triangle } AB\Delta} = \frac{O\Pi}{\Pi\Xi}$. Or, $\frac{B\Gamma}{A\Delta} = \frac{\text{triangle } B\Delta\Gamma}{\text{triangle } AB\Delta}$; donc : $\frac{B\Gamma}{A\Delta} = \frac{O\Pi}{\Pi\Xi}$. Or, $\frac{P\Pi}{\Pi\Sigma} = \frac{O\Pi}{\Pi\Xi}$; donc : $\frac{P\Pi}{\Pi\Sigma} = \frac{B\Gamma}{A\Delta}$, d'où : $\frac{2P\Pi + \Pi\Sigma}{2\Pi\Sigma + P\Pi} = \frac{2B\Gamma + A\Delta}{2A\Delta + B\Gamma}$. Or, $\frac{2P\Pi + \Pi\Sigma}{2\Pi\Sigma + P\Pi} = \frac{P\Pi + \Sigma P}{\Pi\Sigma + \Sigma P} = \frac{P\Pi + PE}{\Pi\Sigma + \Sigma Z} = \frac{\Pi E}{\Pi Z}$; donc, conformément à l'énoncé de la proposition, le centre de gravité est situé de telle sorte que l'on ait : $\frac{\Pi E}{\Pi Z} = \frac{2B\Gamma + A\Delta}{2A\Delta + B\Gamma}$.

Digitized by Google

DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS,

OU

DES CENTRES DE GRAVITÉ DES PLANS.

LIVRE II.

PROPOSITION I.

Si deux aires délimitées par une ligne droite et par une parabole, susceptibles d'être appliquées suivant une droite donnée (1), n'ont pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur formée de ces deux aires sera situé sur la droite reliant leurs centres de gravité ; cette droite étant divisée de telle sorte que ses segments aient un rapport inverse de celui des aires (2).

Soient deux aires AB, ΓΔ telles que nous les avons dites, dont les centres de gravité sont les points E, Z, et que le rapport de ZΘ à ΘE soit le même que celui de AB à ΓΔ. On doit démontrer que le point Θ est le centre de gravité de la grandeur composée des deux aires AB, ΓΔ.

Que chacune des droites ZH, ZK soit égale à la droite EΘ, et que

---

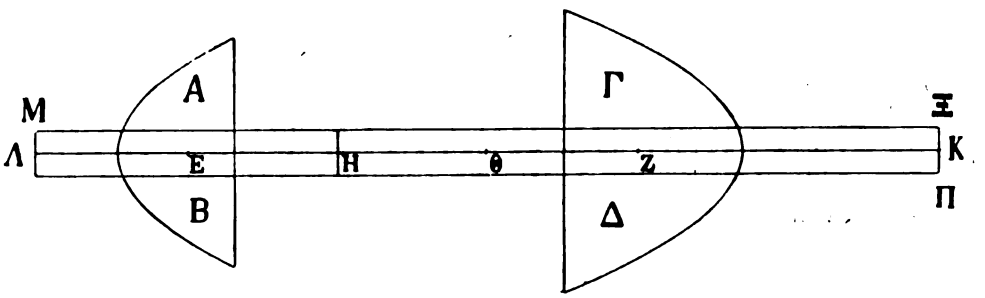
1. L'aire d'un segment parabolique équivalant aux quatre tiers de l'aire du triangle de même base et de même hauteur que ce segment, l'aire de ce triangle équivaut à l'aire d'un certain parallélogramme pouvant être appliqué suivant une droite donnée.

2. Cette proposition étend au cas des segments de parabole les propositions VI et VII du livre I, qui ne considèrent que les surfaces rectilignes.

Digitized by Google

la droite EΛ soit égale à la droite ZΘ, c'est-à-dire égale à la droite HE (1).

Dès lors, ΛΘ sera égal à KΘ (2), et AB sera à ΓΔ comme ΛH est à HK ; car ces droites sont respectivement doubles d'autres (3).



Appliquons l'aire AB suivant la droite ΛH, de part et d'autre de cette droite ΛH, de manière que l'aire MN soit équivalente à l'aire AB (4) ; il en résulte que le centre de gravité de l'aire MN sera le point E (5). Achevons maintenant l'aire NΞ ; dès lors, le rapport de MN à NΞ sera le même que celui de ΛH à HK (6). Or, le rapport de AB à ΓΔ est aussi le même que celui de ΛH à HK ; par conséquent, MN est à NΞ comme AB est à ΓΔ, et permutons. Or, l'aire AB est équivalente à l'aire MN ; donc, l'aire ΓΔ est aussi équivalente à l'aire NΞ (7), dont le centre de gravité sera le point Z (8). Et, puisque

1. On pose : EΛ = ZΘ. Or, ZΘ = ZH — ΘH = EΘ — ΘH = HE ; donc : EΛ = HE.

2. On a posé : EΛ = ZΘ, d'où : EΛ + EΘ = ZΘ + EΘ = ZΘ + ZK, ou : ΛΘ = KΘ.

3. Le texte ne dit pas de quelles droites ΛH, HK sont respectivement les doubles, mais il s'agit des droites ZΘ, ΘE ; car, par construction, on a : ΛH = EΛ + EH = ZΘ + ZΘ = 2ZΘ, et HK = ZH + ZK = EΘ + EΘ = 2EΘ, d'où : $\frac{\Lambda H}{HK} = \frac{Z\Theta}{E\Theta}$. Or, par hypothèse : $\frac{Z\Theta}{\Theta E} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$; donc : $\frac{\Lambda H}{HK} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$.

4. C'est-à-dire appliquons sur la droite ΛH un parallélogramme MN, dont l'aire soit équivalente à celle du segment parabolique AB, de manière que ΛH soit un diamètre de ce parallélogramme.

5. Voir livre I, proposition X. Car, par construction, ΛH est un diamètre de MN, et E est le milieu de ΛH.

6. Ces parallélogrammes ont même hauteur par construction, et sont entre eux comme leurs bases égales à ΛH, HK ; donc, comme le texte : $\frac{MN}{N\Xi} = \frac{\Lambda H}{HK}$.

7. On a vu que : $\frac{\Lambda H}{HK} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$, d'où, comparant avec la relation de la note précédente, on a : $\frac{MN}{N\Xi} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$, d'où : $\frac{MN}{AB} = \frac{N\Xi}{\Gamma\Delta}$. Or, par construction, AB = MN ; donc, comme le texte : ΓΔ = NΞ.

8. Voir livre I, proposition X. Car, par construction, HK est le diamètre du parallélogramme NΞ, et Z est le milieu de HK.

Digitized by Google

ΛΘ est égal à ΘK, et que la droite entière ΛK divise des côtés opposés en deux parties égales (1), le centre de gravité de l'aire entière ΠM est le point Θ (2). Mais, l'aire MΠ équivaut à l'ensemble des aires MN, NΞ ; en sorte que le point Θ est aussi le centre de gravité de l'ensemble des aires AB, ΓΔ (3).

PROPOSITION II.

Si, dans un segment délimité par une droite et une parabole, on inscrit un triangle ayant même base et même hauteur que ce segment ; si, dans les segments restants, on inscrit une seconde fois des triangles ayant même base et même hauteur que ces segments, et si l'on inscrit ensuite, toujours de la même manière, des triangles dans les segments restants, la figure obtenue est dite inscrite d'une manière définie (4). Or, il est manifeste que, dans la figure inscrite de cette manière, les droites qui relient les angles, tant ceux qui sont les plus rapprochés du sommet du segment que ceux qui les suivent, sont parallèles à la base du segment ; que ces droites sont coupées en deux parties égales par le diamètre du segment, et que ces droites divisent ce diamètre dans le rapport des nombres impairs successifs, le nombre un étant attribué au sommet du segment. Tout cela doit être démontré en son lieu (5).

1. C'est-à-dire que ΛK est un diamètre du parallélogramme entier ΠM.

2. Voir livre I, proposition X. Car, par construction, ΛK est le diamètre de ΠM, et Θ est le milieu de ΛK.

3. C'est-à-dire que, Θ étant le centre de gravité de l'ensemble des aires MN, NΞ, dont les centres de gravité respectifs sont E, Z, le point Θ sera aussi le centre de gravité de l'ensemble des aires paraboliques équivalentes AB, ΓΔ, dont les centres de gravité sont E et Z.

4. γνωρίμως, littéralement : « d'une manière connue ». La version latine de Barrow (Londini, 1675, p. 135) emploie les mots « evidenter, notabiliter » ; celle de Torelli (Oxford, 1792, p. 36) emploie le mot « perspicue » (clairement) ; la version latine d'Heiberg (*loc. cit.* Vol. II, p. 169) emploie le mot « proprie » (d'une manière propre, particulière). D'autre part, Heath (Cambridge, 1897, p. 294) dit : « in the recognized manner », et enfin, Peyrard (Paris, 1808, p. 297) traduit par le mot « régulièrement », qui, non seulement s'éloigne du sens de l'adverbe grec, mais prête à confusion en présence des polygones dits réguliers qui sont équilatéraux. Or, la figure inscrite dans le segment parabolique n'est pas équilatérale. Nous avons donc préféré traduire par l'expression « de manière définie », c'est-à-dire que la figure est inscrite conformément à la définition qui en est donnée, et, par conséquent, de manière connue ou définie.

5. Ces lemmes, que les anciennes éditions rattachent au texte de la proposition I, mais que l'édition critique d'Heiberg rattache, pour la première fois, à la pro-

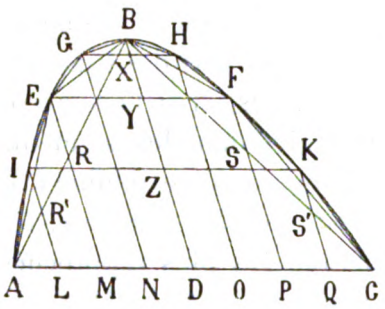
Digitized by Google

Si, dans un segment délimité par une droite et une parabole, on inscrit une figure rectiligne d'une manière définie, le centre de gravité de cette figure sera situé sur le diamètre du segment.

Soit le segment ABΓ tel que nous l'avons dit, et inscrivons-y la figure rectiligne AEZHBΘIKΓ (1). Il faut démontrer que le centre de gravité de la figure rectiligne est situé sur la droite BΔ.

---

position II, ne sont démontrés explicitement dans aucun ouvrage qui nous est parvenu d'Archimède. On peut les démontrer comme suit par la géométrie pure :



Soit le segment parabolique ABC dont le diamètre est BD. Inscrivons-y la figure définie AIEGBHFKC. Par les points I, E, G, H, F, K menons des parallèles au diamètre BD, et menons les droites de jonction GH, EF, IK. Ces droites seront parallèles à la base AC. En effet, EM, parallèle à BD, est le diamètre du segment AEB ; il divise la corde conjuguée AB en deux parties égales ; donc, AR = RB, d'où : AM = MD. Considérant, de même, le diamètre IL du segment AIE, on aura : AL = LM ; considérant le diamètre GN, on aura : MN = ND, d'où : AL = LM = MN = ND, et, de même, DO = OP = PQ = PC. Or, AD = DC ; donc : AL = LM = MN = ND = DO = OP = PQ = QC. Or, $\frac{AL}{LR'}=\frac{AD}{DB'}$, et $\frac{CQ}{QS'}=\frac{CD}{DB}=\frac{AD}{DB}$; donc : $\frac{AL}{LR'}=\frac{CQ}{QS'}$. Or, AL = CQ ; donc : LR' = QS'. D'autre part, on a (voir *De la Quadrature de la Parabole*, prop. IV) : $\frac{LR'}{R'I}=\frac{AD}{LD}$, et $\frac{QS'}{S'K}=\frac{CD}{QD}=\frac{AD}{LD}$, d'où : $\frac{LR'}{R'I}=\frac{QS'}{S'K}$. Or, LR' = QS' ; donc : R'I = S'K, d'où : IL = KQ. Donc, IK est parallèle à AB, et il en sera de même pour EF, GH.

Ensuite, puisque IK, EF, GH sont parallèles à AC, ces droites sont des cordes conjuguées du diamètre BD qui les divise en deux parties égales.

Enfin, dans la parabole, les carrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses (voir *De la Quadrature de la Parabole*, prop. III). On aura :

$\frac{\overline{GX}^2}{\overline{EY}^2}=\frac{\overline{GX}^2}{4\overline{GX}^2}=\frac{BX}{BY}$, d'où : $BX=\frac{BY}{4}=\frac{BX+XY}{4}$, ou : $BX=\frac{XY}{3}$. D'autre part :

$\frac{\overline{GX}^2}{\overline{IZ}^2}=\frac{\overline{GX}^2}{9\overline{GX}^2}=\frac{BX}{BZ}$, d'où : $BX:\frac{BZ}{9}=\frac{BY+YZ}{9}=\frac{4BX+YZ}{9}$, ou : $BX=\frac{YZ}{5}$, et

enfin, on a : $\frac{\overline{GX}^2}{\overline{AD}^2}=\frac{\overline{GX}^2}{16\overline{GX}^2}=\frac{BX}{B\Delta}$, d'où :

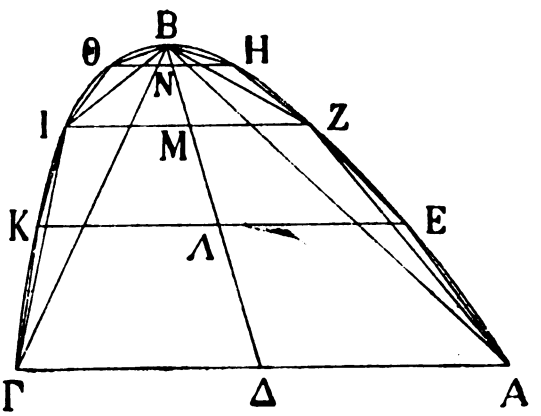
$$BX=\frac{B\Delta}{16}=\frac{BY+YZ+ZD}{16}=\frac{4BX+5BX+ZD}{16} \quad \text{ou :} \quad BX=\frac{ZD}{7}. \text{ d'où :}$$

$\frac{BX}{1}=\frac{XY}{3}=\frac{YZ}{5}=\frac{ZD}{7}$. C. q. f. d.

1. L'édition de Bâle (1544) et celle d'Oxford (1792) comportent, à cet endroit, la phrase suivante, que l'édition critique d'Heiberg élimine comme interpolation : « que BΔ soit le diamètre du segment. »

Digitized by Google

En effet, puisque le centre de gravité du trapèze AEKΓ est situé sur la droite ΛΔ, celui du trapèze EZIK sur la droite MΛ, celui du trapèze ZHΘI sur la droite MN (1), et que le centre de gravité du triangle HBΘ est situé sur la droite BN (2), il est évident que le centre de gravité de la figure rectiligne entière est situé sur la droite BΔ.



PROPOSITION III.

Si l'on inscrit respectivement une figure rectiligne d'une manière définie dans deux segments délimités par une droite et par une parabole, et si ces figures rectilignes ont le même nombre de côtés, leurs centres de gravité divisent les diamètres des segments d'une manière semblable.

Soient les deux segments ABΓ, ΞOΠ. Inscrivons-y des figures rectilignes de manière définie ayant respectivement le même nombre de côtés. Soient BΔ, OP les diamètres des segments, et menons les droites de jonction EK, ZI, HΘ et ΣT, ΥΦ, XΨ. Dès lors, puisque les diamètres BΔ et PO sont divisés par des parallèles dans le rapport de la suite des nombres impairs (3), et que leurs segments sont en même nombre, il est évident que les segments de ces diamètres seront dans les mêmes rapports, et que les parallèles auront mêmes rapports (4). De plus, les centres de gravité des tra-

1. Voir livre I, proposition XV. De plus, les droites ΔΛ, ΛM, MN divisent respectivement en deux parties égales les côtés parallèles AΓ, EK, ZI, HΘ des trapèzes.

2. Voir livre I, proposition XIII, et BN divise HΘ en deux parties égales.

3. Voir lemmes qui précèdent la proposition II.

4. On a donc : $\frac{BN}{1} = \frac{NM}{3} = \frac{M\Lambda}{5} = \frac{\Lambda\Delta}{7}$, et $\frac{O\varsigma}{1} = \frac{\varsigma\mathfrak{d}}{3} = \frac{\mathfrak{d}\Omega}{5} = \frac{\Omega P}{7}$, d'où :

$\frac{BN}{O\varsigma} = \frac{NM}{\varsigma\mathfrak{d}} = \frac{M\Lambda}{\mathfrak{d}\Omega} = \frac{\Lambda\Delta}{\Omega P}$, d'où : $\frac{BN}{O\varsigma} = \frac{BM}{O\mathfrak{d}} = \frac{B\Lambda}{O\Omega} = \frac{B\Delta}{OP}$.

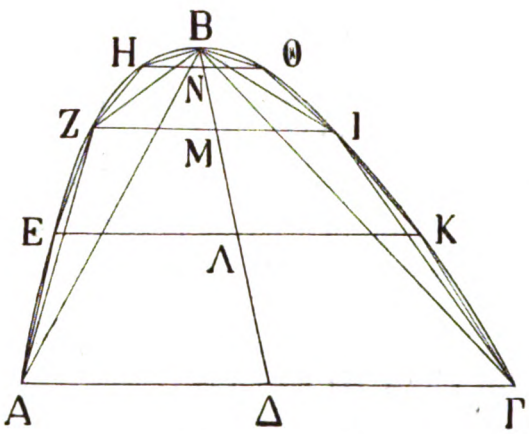
D'autre part (voir *De la Quadrature de la Parabole*, prop. III), on a :

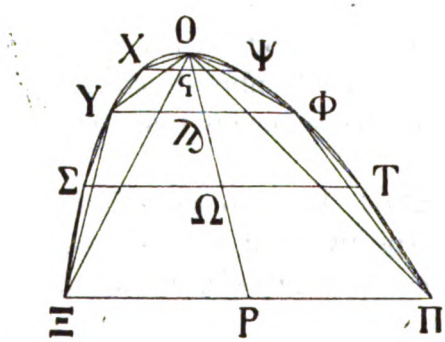
$\frac{\overline{HN}^2}{BN} = \frac{\overline{ZM}^2}{BM} = \frac{\overline{E\Lambda}^2}{B\Lambda} = \frac{\overline{\Lambda\Delta}^2}{B\Delta}$, et $\frac{\overline{X\varsigma}^2}{O\varsigma} = \frac{\overline{Y\mathfrak{d}}^2}{O\mathfrak{d}} = \frac{\overline{\Sigma\Omega}^2}{O\Omega} = \frac{\overline{\Xi P}^2}{OP}$, d'où:

$\frac{HN}{X\varsigma} = \frac{ZM}{Y\mathfrak{d}} = \frac{E\Lambda}{\Sigma\Omega} = \frac{\Lambda\Delta}{\Xi P}$, ou : $\frac{H\Theta}{X\Psi} = \frac{ZI}{Y\Phi} = \frac{EX}{\Sigma T} = \frac{A\Gamma}{\Xi\Pi}$.

Digitized by Google

pèzes AEKΓ et ΞΣTΠ seront semblablement situés sur les droites ΛΔ, ΩP, parce que les droites AΓ, EK ont même rapport que les droites ΞP, ΣT (1). Et, de même, les centres de gravité des trapèzes EZIK, ΣYΦT diviseront semblablement les droites ΛM, Ω⋔ ; les centres de gravité des trapèzes ZHΘI, YXΨΦ diviseront semblablement les droites MN, ϛ⋔, et les centres de gravité des triangles HBΘ, XOΨ seront semblablement situés sur les droites BN, Oϛ (2). Les trapèzes et les triangles ont d'ailleurs aussi même rapport (3). En conséquence, il est évident que le centre de gravité de la figure rectiligne entière, inscrite dans le segment ABΓ, divise la droite BΔ d'une manière semblable à celle dont le centre de gravité de la figure rectiligne entière, inscrite dans le segment ΞOΠ, divise la droite OP (4) ; chose qu'il fallait démontrer.





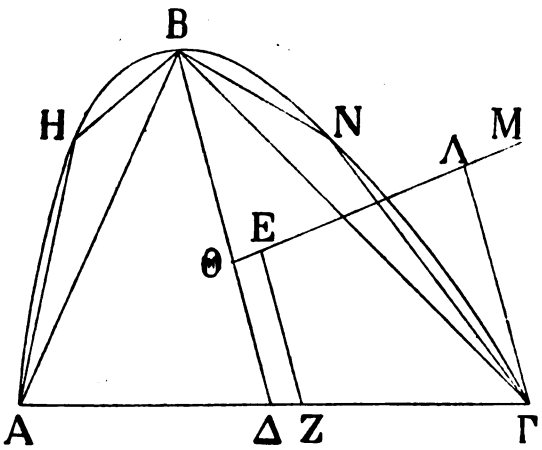
PROPOSITION IV.

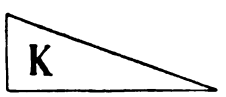
Le centre de gravité de tout segment délimité par une droite et par une parabole est situé sur le diamètre de ce segment.

1. Voir livre I, proposition XV.
2. Voir livre I, proposition XIV.
3. On a vu (lemme de la prop. II) que les diamètres des deux segments sont divisés suivant la même progression arithmétique, et que les parallèles aux bases sont proportionnelles ; donc, les trapèzes et les triangles ont les hauteurs et les bases proportionnelles.
4. Voir livre I, propositions VI et VII.

Digitized by Google

Soit ABΓ un segment tel que nous le disons, dont le diamètre est BΔ. On doit démontrer que le centre de gravité de ce segment est situé sur la droite BΔ. En effet, s'il n'en est pas ainsi, que le point E soit le centre de gravité, et, par ce point, menons la droite EZ parallèle à la droite BΔ. Inscrivons dans le segment un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et que le rapport du triangle ABΓ à une aire K soit le même que celui de la droite ΓZ à la droite ZΔ. De plus, inscrivons dans le segment une figure rectiligne de manière définie, telle que les segments restants soient plus petits que l'aire K (1). Le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite est donc situé sur la droite BΔ (2).





Que ce centre soit le point Θ ; menons la droite de jonction ΘE que nous prolongeons, et menons la droite ΓΛ parallèle à la droite BΔ. Dès lors, il est évident que le rapport de la figure rectiligne, inscrite dans le segment, aux segments restants est plus grand que celui du triangle ABΓ à K. Mais, ΓZ est à ZΔ comme le triangle ABΓ est à l'aire K ; par conséquent, le rapport de la figure rectiligne inscrite aux segments restants est plus grand que celui de ΓZ à ZΔ, c'est-à-dire que celui de ΛE à EΘ (3). Que le rapport de ME à EΘ soit le

---

1. Voir EUCLIDE, livre X, prop. 1 et suivantes sur les grandeurs commensurables et incommensurables. Voir aussi *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, propositions I à VII, et *De la Quadrature de la Parabole*, proposition X.

2. Voir proposition II.

3. On a : figure inscrite > triangle ABΓ, et Σ segments restants < aire K ; donc : $\frac{\text{fig. inscr.}}{\Sigma \text{ segts restants}} > \frac{\text{triangle ABΓ}}{\text{aire K}}$. Or, par hypothèse, on a : $\frac{\text{triangle ABΓ}}{\text{aire K}} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$; donc : $\frac{\text{fig. inscrite}}{\Sigma \text{ segts restants}} > \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$. Or, le parallélisme des droites ΔΘ, ZE, ΓΔ donne ; $\frac{\Gamma Z}{Z\Delta} = \frac{\Lambda E}{E\Theta}$; donc, comme le texte : $\frac{\text{fig. inscrite}}{\Sigma \text{ segts restants}} > \frac{\Lambda E}{E\Theta}$.

Digitized by Google

même que celui de la figure rectiligne aux segments (1). Dès lors, puisque E est le centre de gravité du segment entier, et que Θ est celui de la figure rectiligne inscrite dans ce segment, il est clair que le centre de gravité de la grandeur restante, composée des segments restants à l'entour, sera situé sur la droite ΘE telle, qu'étant prolongée, la droite qui en est découpée ait avec la droite ΘE le même rapport que la figure rectiligne inscrite possède avec les segments restants à l'entour (2). Il en résulte que le point M est le centre de gravité de la grandeur composée des segments restants à l'entour ; ce qui est absurde, car, si par le point M on mène une parallèle à la droite BΔ, tous les segments restants seront situés d'un même côté de celle-ci (3). Dès lors, il est évident que le centre de gravité (4) est situé sur la droite BΔ.

PROPOSITION V.

Si, dans un segment délimité par une droite et par une parabole, on inscrit une figure rectiligne de manière définie, le centre de gravité du segment entier est plus rapproché du sommet du segment que le centre de la figure rectiligne inscrite.

Soit ABΓ un segment tel que nous le disons, et soit ΔB son diamètre. Inscrivons-y d'abord le triangle ABΓ de manière définie, et divisons BΔ au point E de manière que BE soit le double de EΔ. Dès lors, le point E est le centre de gravité du triangle ABΓ (5). Coupons chacune des droites AB, BΓ en deux parties égales aux points Z, H, et, par les points Z, H, menons les droites ZK, ΛH parallèles à BΔ. Dès lors, le centre de gravité du segment AKB sera situé sur la droite KZ, et le centre de gravité du segment BΓΛ sera situé sur

---

1. Posons: $\frac{ME}{E\Theta} = \frac{\text{fig. inscrite}}{\sum \text{ segts restants}}$, d'où, en présence de la relation de la note précédente : $\frac{ME}{E\Theta} > \frac{\Lambda E}{E\Theta}$, d'où : $ME > \Lambda E$. Le point M est donc à l'extérieur du segment.

2. Voir livre I, proposition VIII.

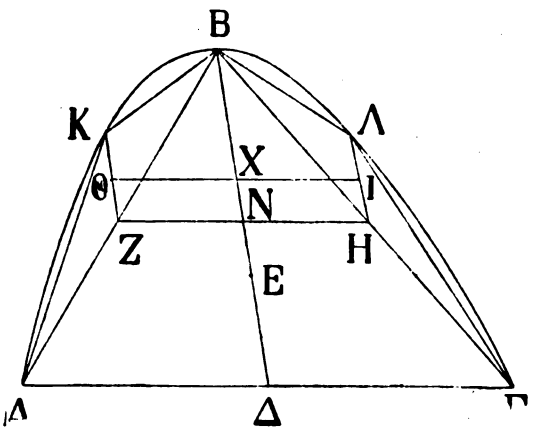
3. Voir livre I, postulat VII.

4. Sous-entendu : « du segment entier ».

5. Voir livre I, prop. XIV. En outre, le centre de gravité d'un triangle est situé sur la médiane, aux deux tiers de sa longueur à partir du sommet.

Digitized by Google

la droite HΛ (1). Soient Θ, I ces centres de gravité, et menons la droite de jonction ΘI. Et, puisque ΘZHI est un parallélogramme, et que ZN est égale à NH, il s'ensuit que XΘ est aussi égale à XI (2) ; en sorte que le centre de gravité de la grandeur formée des deux segments AKB, BΛΓ est situé au milieu de la droite ΘI (3), c'est-à-dire au point X (4). D'autre part, puisque le centre de gravité du triangle ABΓ est le point E, et que celui de la grandeur formée de l'ensemble de AKB, BΛΓ (5) est le point X, il est évident que le centre de



1. Les droites KZ, ΛH, menées parallèlement au diamètre BΔ par les points milieux de AB, BΓ, sont donc les diamètres des segments AKB, BΛΓ, et portent les centres de gravité de ces segments en vertu de la proposition IV.

2. On aurait XΘ=XI, même si ΘZHI était un trapèze, puisque les droites ZK, ΛH ont été menées parallèlement à BΔ. Si la figure ΘZHI est en réalité un parallélogramme, la démonstration n'est possible qu'en vertu de la proposition VII qui doit encore suivre. En effet, si ZΘ=HI, c'est, d'abord, parce que ZK=HΛ en vertu du lemme, placé en tête de la proposition II, qui pose le parallélisme des cordes KΛ, AΓ, d'où parallélisme de KΛ, ZH, d'où : ZK=HΛ ; c'est ensuite parce que ZK, HΛ, diamètres des segments AKB, BΛΓ, sont semblablement divisés aux points Θ, I par les centres de gravité des segments (prop. VII). Dès lors, on a : $\frac{K\Theta}{\Theta Z}=\frac{\Lambda I}{IH}$, d'où $\frac{K\Theta+\Theta Z}{\Theta Z}=\frac{\Lambda I+IH}{IH}$, ou : $\frac{KZ}{\Theta Z}=\frac{\Lambda H}{IH}$. Or, KZ=ΛH ; donc : ΘZ=IH.

Bien que la phrase καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΘZHI (et puisque ΘZHI est un parallélogramme) se rencontre dans toutes les anciennes éditions, depuis l'édition princeps de Bâle (1544) jusqu'à celle d'Oxford (1792), et qu'elle ait été maintenue dans l'édition critique d'Heiberg (*loc. cit.* Vol. II, p. 178), Heath (*loc. cit.* Cambridge, 1897, p. 211 et note) est le premier qui ait fait remarquer que cette phrase doit constituer une interpolation antérieure à l'époque d'Eutocius, dont le commentaire s'arrête à ce passage pour démontrer, par des considérations anticipées, que Θ et I divisent ZK et ΛH dans le même rapport.

3. Le texte est coupé à cet endroit par le petit commentaire interpolé : « puisque les segments sont égaux ».

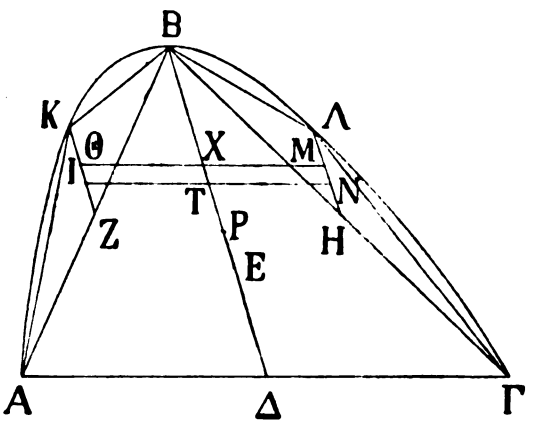
4. Les segments de parabole AKB, BΛΓ sont, en effet, équivalents ; car ils valent respectivement les $\frac{4}{3}$ des triangles inscrits AKB, BΛΓ (voir *De la Quadrature de la Parabole*, prop. XXIV), et ces triangles inscrits sont équivalents comme étant composés respectivement de deux triangles équivalents. En effet, triangle AKZ= triangle ZKB, car AZ=ZB, et triangle BΛH=triangle HΛΓ, car BH=HΓ. De plus, triangle KBZ=triangle HBΛ, car on a vu plus haut que KZ=ΛH, et la hauteur est la même, puisque KZ, ΛH sont parallèles à BΔ.

5. Sous-entendu : τμαμάτων, c'est-à-dire, des segments AKB, BΛΓ. Les versions latines de Torelli et d'Heiberg ont d'ailleurs interpolé le mot « segmentis » pour éviter toute confusion avec les triangles inscrits, désignés par les mêmes lettres.

Digitized by Google

gravité du segment entier sera situé sur la droite XE, c'est-à-dire entre les points X, E ; en sorte que le centre de gravité du segment entier est plus rapproché du sommet du segment que le centre de gravité du triangle inscrit de manière définie.

Inscrivons de nouveau dans le segment le pentagone rectiligne AKBΛΓ de manière définie. Soient BΔ le diamètre du segment entier et KZ, ΛH les diamètres respectifs des deux segments (1). Dès lors, soit Θ le centre de gravité du segment (2), et I celui du triangle (3) ; soit, d'autre part, M le centre de gravité du segment BΛΓ, et N celui du triangle (4). Il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur formée de l'ensemble des segments AKB, BΛΓ est X, et que celui de la grandeur formée de l'ensemble des triangles AKB, BΛΓ est T. D'autre part, puisque le centre de gravité du triangle ABΓ est E, et que celui de la grandeur formée de l'ensemble des segments AKB, BΛΓ est X, il est donc évident que le centre de gravité du segment entier ABΓ est situé sur la droite XE, divisée de telle sorte que le rapport de son segment, aboutissant en X, à son plus petit segment soit le même que le rapport du triangle ABΓ à la somme des segments AKB, BΛΓ (5). Or, le centre de gravité du



1. C'est-à-dire : des deux segments AKB, BΛΓ. Le texte présente ici l'interpolation suivante : « et puisque une figure rectiligne définie a été inscrite dans le segment, le centre de gravité du segment entier est plus rapproché du sommet que celui de la figure rectiligne. » C'est un commentaire qui rappelle inutilement une propriété qui vient d'être démontrée.

2. C'est-à-dire : du segment AKB.

3. C'est-à-dire : du triangle AKB inscrit dans le segment AKB d'une manière définie, c'est-à-dire ayant même base et même hauteur que le segment.

4. C'est-à-dire : du triangle BΛΓ inscrit d'une manière définie dans le segment BΛΓ.

Le texte de l'édition Torelli (Oxford, 1792, p. 42) comporte ici une phrase que l'édition d'Heiberg abandonne comme interpolation. Nous la traduisons pour mémoire, bien qu'elle constitue un commentaire inutile : « joignons ΘM, IN ; donc, ΘX est égale à XM, et IT égale à TN. Or, les triangles AKB, BΛΓ sont égaux, ainsi que les segments AKB, BΛΓ ; car il a été démontré ailleurs que ces segments valent les quatre tiers de ces triangles. »

5. On aura (livre I, prop. VI, VII et VIII) :
$\frac{\text{segment de XE aboutissant en X}}{\text{segment de XE aboutissant en E}} = \frac{\text{triangle ABΓ}}{\text{segment AKB + segt BΛΓ}}$. Or (*De la Quadra-*

Digitized by Google

pentagone AKBΛΓ est situé sur la droite ET, divisée de telle sorte que le rapport de son segment, aboutissant au point T, à son segment restant soit le même que le rapport du triangle ABΓ aux triangles AKB, BΛΓ (1) ; par conséquent, puisque le rapport du triangle ABΓ aux triangles KAB, ΛBΓ est plus grand que son rapport aux segments (2), il est évident que le centre de gravité du segment ABΓ est plus rapproché du sommet B que le centre de la figure rectiligne inscrite (3), et que le même raisonnement s'appliquera à toutes les figures rectilignes inscrites d'une manière définie dans les segments.

PROPOSITION VI.

Etant donné un segment délimité par une droite et par une parabole, il est possible d'inscrire dans ce segment une figure rectiligne de manière définie, de telle sorte que la droite, située entre les centres de gravité du segment et de la figure rectiligne inscrite, soit plus petite que toute droite donnée.

Soit donné le segment ABΓ tel que nous l'avons dit, dont le centre de gravité est Θ, et inscrivons-y le triangle ABΓ d'une manière définie. Soit Z la droite donnée, et que le rapport du triangle ABΓ à une aire X soit le même que celui de la droite BΘ à la droite Z. Ins-

---

ture de la Parabole, prop. XXIV), on a : segment parabolique ABΓ = $\frac{4}{3}$ triangle ABΓ ; donc : segment ABΓ — triangle ABΓ = segment AKB + segment BΛΓ = $\frac{1}{3}$ triangle ABΓ, d'où : triangle ABΓ = 3[segment AKB + segment BΛΓ] > segment AKB + segt BΛΓ, d'où : segment de XE aboutissant en X > segment de XE aboutissant en E.

1. On aura (livre I, prop. VI, VII et VIII) :

$$\frac{\text{segment de TE aboutissant en T}}{\text{segment de TE aboutissant en E}} = \frac{\text{triangle ABΓ}}{\text{triangle AKB} + \text{triangle BΛΓ}}.$$

Or (*De la Quadrature de la Parabole*, prop. XXI), on a : triangle ABΓ = 4[triangle AKB + triangle BΛΓ] > triangle AKB + triangle BΛΓ ; donc : segment de TE aboutissant en T > segment de TE aboutissant en E.

2. C'est-à-dire aux segments KAB, ΛBΓ. En effet, il résulte des deux notes précédentes que : $\frac{\text{triangle ABΓ}}{\text{triangle AKB} + \text{triangle ΛBΓ}} > \frac{\text{triangle ABΓ}}{\text{segment AKB} + \text{segment ΛBΓ}}$, puisque le premier rapport est égal à 4 et que le second est égal à 3.

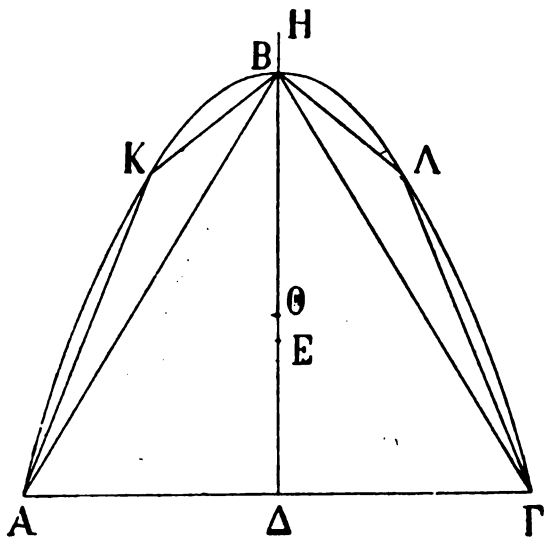
3. En comparant l'inégalité de la note précédente aux valeurs de ses deux membres données plus haut, il vient :

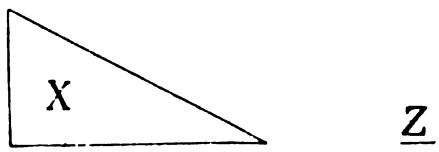
$\frac{\text{segment de TE aboutissant en T}}{\text{segment de TE aboutissant en E}} > \frac{\text{segment de XE aboutissant en X}}{\text{segment de XE aboutissant en E}}$; donc, le point de division de XE, ou centre de gravité du segment parabolique, sera toujours plus éloigné de E que n'en est éloigné le point de division de TE, ou centre de gravité de la figure inscrite, ou, comme le texte : le premier centre sera plus rapproché du sommet B que le second centre.

Digitized by Google

crivons dans le segment ABΓ la figure rectiligne AKBΛΓ d'une manière définie ; de telle sorte que les segments restants alentour (1) soient moindres que l'aire X (2), et soit E le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite. Je dis que la droite ΘE est plus petite que la droite Z.

En effet, s'il n'en est pas ainsi, cette droite lui est égale ou supérieure. Or, puisque le rapport de la figure rectiligne AKBΛΓ aux segments restants à l'entour est plus grand que celui du triangle ABΓ à X, c'est-à-dire que celui de ΘB à Z, et que le rapport de BΘ à Z n'est pas plus petit que son rapport à ΘE, parce que la droite ΘE n'est pas plus petite que la droite Z, le rapport de la figure rectiligne AKBΛΓ aux segments qui restent à l'entour est beaucoup plus grand que celui de BΘ à ΘE (3). Dès lors, si nous faisons en sorte qu'une autre droite soit à la droite ΘE comme la figure rectiligne AKBΛΓ est aux segments restants, et, puisque Θ est le centre de gravité du segment ABΓ, si nous prenons cette droite sur la droite EΘ, prolongée de manière que son rapport à EΘ soit le même que celui de la figure rectiligne AKBΛΓ aux segments restants (4), cette droite sera plus





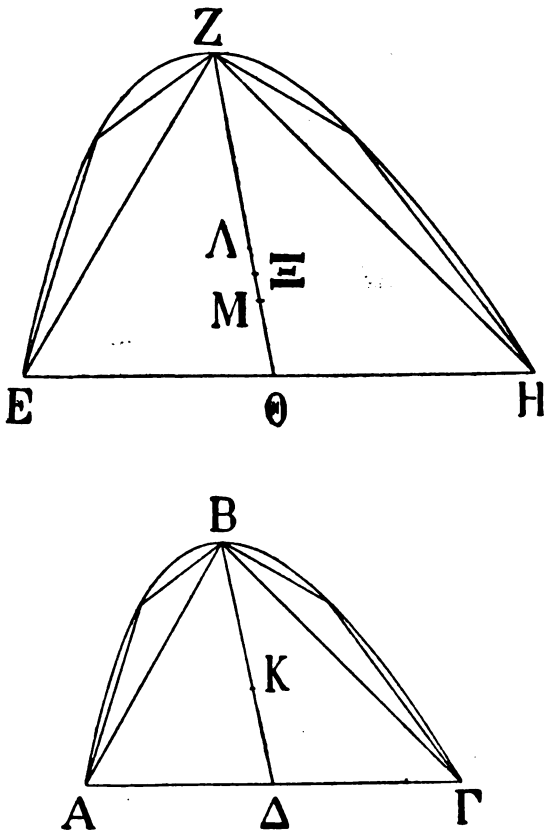
1. C'est-à-dire la somme de ces segments restants.
2. Voir proposition IV, note 1.
3. On a, par construction : fig. AKBΛΓ > triangle ABΓ, et on a, par définition : Σ segments restants < aire X, d'où : $\frac{\text{fig. AKBΛΓ}}{\Sigma \text{ segts restants}} > \frac{\text{triangle ABΓ}}{\text{aire X}}$. Or, on a posé : $\frac{\text{triangle ABΓ}}{\text{aire X}} = \frac{B\Theta}{Z}$; donc : $\frac{\text{fig. AKBΛΓ}}{\Sigma \text{ segts restants}} > \frac{B\Theta}{Z}$. Or, par hypothèse : $\Theta E \geqslant Z$; donc : $\frac{B\Theta}{Z} \geqslant \frac{B\Theta}{\Theta E}$ d'où, à fortiori, comme le texte : $\frac{\text{fig. AKBΛΓ}}{\Sigma \text{ segts restants}} > \frac{B\Theta}{\Theta E}$.
4. Voir livre I, proposition VIII.

Digitized by Google

grande que la droite ΘB. Que ce rapport soit donc celui d'une droite HΘ à la droite ΘE. Dès lors, le point H sera le centre de gravité de la grandeur formée des segments restants ; ce qui est impossible, car les segments sont situés du même côté d'une parallèle à AΓ menée par le point H (1). Il est donc évident que la droite ΘE est plus petite que la droite Z ; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VII.

Les centres de gravité de deux segments semblables, délimités par une droite et une parabole, divisent les diamètres dans le même rapport (2).



Soient ABΓ, EZH deux segments tels que nous les avons dits, dont les diamètres sont BΔ, ZΘ. Soit le point K le centre de gravité du segment ABΓ, et le point Λ celui du segment EZH. Il faut démontrer que les points K et Λ divisent les diamètres dans le même rapport.

En effet, s'il n'en est pas ainsi, que ZM soit à MΘ comme KB est à KΔ ; inscrivons dans le segment EZH une figure rectiligne de manière définie, de telle sorte que la droite, située en-

1. Etablissons : $\frac{H\Theta}{\Theta E} = \frac{\text{fig. AKB}\Delta\Gamma}{\sum \text{segts restants}}$, d'où, comparant avec l'inégalité de la note avant-précédente, on aura : $\frac{H\Theta}{\Theta E} > \frac{B\Theta}{\Theta E}$, d'où : $H\Theta > B\Theta$; ce qui est impossible, car le centre de gravité H serait situé à l'extérieur de la figure (livre I, postulat VII).

2. La proposition reste vraie dans le cas de segments de parabole non sem-

Digitized by Google

tre les centres (1) du segment et de la figure rectiligne inscrite, soit plus petite que ΛM (2), et soit le point Ξ le centre de gravité de la figure rectiligne inscrite (3). D'autre part, inscrivons dans le segment ABΓ une figure rectiligne semblable à celle qui est inscrite dans le segment EZH (4) ; son centre de gravité sera plus rapproché du sommet que le centre de gravité du segment (5) ; ce qui est impossible (6). Donc, il est évident que le rapport de BK à KΔ est le même que celui de ZΛ à ΛΘ.

PROPOSITION VIII.

Le centre de gravité de tout segment délimité par une droite et par une parabole divise le diamètre du segment d'une manière telle que la partie située du côté du sommet du segment soit de moitié (7) plus grande que la partie située du côté de la base.

Soit ABΓ un segment tel que nous l'avons dit ; soit BΔ son diamètre et le point Θ son centre de gravité. Il faut démontrer que la droite BΘ vaut une fois et demie la droite ΘΔ.

Inscrivons de manière définie, dans le segment ABΓ, le triangle ABΓ dont le centre de gravité est E. Divisons les droites AB, BΓ en

---

blables, et HEATH (*loc. cit.*, p. 213) a fait justement remarquer que le caractère général de la proposition n'a pu échapper à Archimède, puisqu'il suppose ce cas général au cours de la démonstration de la proposition suivante.

1. Sous-entendu : de gravité.

2. La possibilité de cette construction a été démontrée à la proposition VI.

3. Le point Ξ sera situé entre le point Λ et le point M ; car, par hypothèse, on a : $\Lambda\Xi < \Lambda M$, et, en vertu de la proposition V, le centre de gravité Ξ de la figure inscrite sera plus éloigné du sommet du segment que le centre de gravité Λ de ce segment.

4. Le texte présente ici cette petite interpolation empruntée au commentaire d'Eutocius : « c'est-à-dire de la manière définie ».

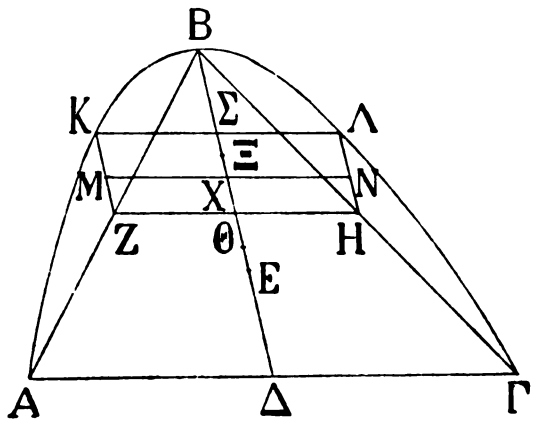
5. Si K′ désigne le centre de gravité (non représenté sur la figure) de la figure rectiligne semblable inscrite dans le segment ABΓ, on aura, en vertu de la proposition III : $\frac{BK'}{K'\Delta} = \frac{Z\Xi}{\Xi\Theta}$. Or, $Z\Xi < ZM$, et $\Xi\Theta > M\Theta$; donc : $\frac{Z\Xi}{\Xi\Theta} < \frac{ZM}{M\Theta}$, d'où : $\frac{BK'}{K'\Delta} < \frac{ZM}{M\Theta}$. Or, par hypothèse : $\frac{KB}{K\Delta} = \frac{ZM}{M\Theta}$; donc : $\frac{BK'}{K'\Delta} < \frac{KB}{K\Delta}$.

6. La relation de la note précédente montre que le centre de gravité K′ de la figure inscrite serait plus rapproché du sommet du segment que le centre de gravité K du segment ; ce qui est impossible en vertu de la proposition V.

7. ἡμιόλιον, c'est-à-dire dans le rapport de 3 à 2 ou, ce qui contient une fois et demie autant. Ce mot est rendu par « sesquialter » dans les versions latines de Barrow et de Torelli et par les mots « dimidia major » dans la version latine d'Heiberg (*loc. cit.* Vol. II, p. 189).

Digitized by Google

deux parties égales (1), et menons les droites KZ, HΛ (2) qui sont donc les diamètres des segments AKB, BΛΓ (3). Soit M le centre de gravité du segment AKB, N celui du segment BΛΓ (4), et menons les droites de jonction ZH, MN, KΛ. Dès lors, le centre de gravité de la grandeur formée des deux segments est le point X (5). Et, puisque KM est à MZ comme BΘ est à ΘΔ (6), par composition et par permutation, BΔ est à KZ comme ΔΘ est à MZ (7). Or, la droite BΔ est égale au quadruple de KZ ; car cela sera démontré à la fin, à l'endroit marqué du signe ✓ (8) ; par conséquent, ΔΘ est aussi le quadruple de MZ (9) ; de manière que le reste BΘ est aussi le quadruple du



1. Le texte de l'édition d'Oxford (1792, page 45) ajoute ici : « κατὰ τὰ Z, H », c'est-à-dire « aux points Z, H » ; mots qui ont disparu dans l'édition critique d'Heiberg.

2. L'édition d'Oxford (p. 46) ajoute ceci : « παρὰ τὰν ΒΔ », c.-à-d. « parallèle à la (droite) ΒΔ » ; mots qui ont disparu dans l'édition d'Heiberg, mais qui sont facilement sous-entendus, puisqu'il s'agit d'une figure déjà décrite à la prop. V.

3. Puisque KZ, ΛH divisent les cordes AB, BΓ en deux parties égales, et qu'elles sont parallèles à BΔ.

4. Voir proposition IV.

5. Voir proposition VI et note relative à l'équivalence des segments AKB, BΛΓ.

6. Voir prop. VII généralisée au cas des segments de parabole non semblables, dans lesquels les centres de gravité divisent les diamètres dans le même rapport, d'où : $\frac{KM}{MZ} = \frac{B\Theta}{\Theta\Delta}$.

7. La relation de la note précédente donne : $\frac{KM + MZ}{MZ} = \frac{B\Theta + \Theta\Delta}{\Theta\Delta}$, ou : $\frac{KZ}{MZ} = \frac{B\Delta}{\Theta\Delta}$, ou : $\frac{B\Delta}{KZ} = \frac{\Theta\Delta}{MZ}$.

8. Archimède ne donne pas la démonstration de cette relation annoncée pour la fin de la proposition ; mais Eutocius en donne une longue démonstration basée sur la proportionnalité du carré des ordonnées aux abscisses. On peut simplement s'appuyer sur le lemme 3, placé en tête de la proposition II, et écrire : $\frac{B\Sigma}{1} = \frac{\Sigma\Delta}{3}$, d'où : $\Sigma\Delta = 3B\Sigma$, d'où : $B\Delta = 4B\Sigma$. Or, par similitude de triangles, ZH coupe BΔ en deux parties égales ; donc : $\frac{1}{2}B\Delta = B\Sigma + KZ$, d'où : $\frac{4}{2}B\Sigma = B\Sigma + KZ$, ou : $B\Sigma = KZ$, d'où : $\frac{1}{4}B\Delta = KZ$, d'où, comme le texte : $B\Delta = 4KZ$.

9. Voir prop. VII. D'ailleurs, la relation de la note avant-précédente : $\frac{B\Delta}{KZ} = \frac{\Theta\Delta}{MZ}$ devient, en observant que $B\Delta = 4KZ$: $\frac{4KZ}{KZ} = \frac{\Theta\Delta}{MZ}$, d'où, comme le texte : $\Delta\Theta = 4MZ$.

Digitized by Google

reste KM, c'est-à-dire de ΣX (1), et que la somme des restes BΣ, XΘ est le triple de ΣX (2). Que BΣ soit le triple de ΣΞ ; dès lors, XΘ sera aussi le triple de ΞX (3). Et puisque BΔ est le quadruple de BΣ, car cela sera démontré aussi, et que BΣ est le triple de ΣΞ, il s'ensuit que ΞB est le tiers de BΔ (4). Or, EΔ est aussi le tiers de BΔ, parce que le point E est le centre de gravité du triangle ABΓ (5) ; par conséquent, le reste ΞE est le tiers de BΔ (6). Et puisque le point Θ est le centre de gravité du segment entier, que le point X est le centre de gravité de la grandeur formée de l'ensemble des segments AKB, BΛΓ, et que le point E est celui du triangle ABΓ, la droite XΘ sera à la droite ΘE comme le triangle ABΓ est aux segments qui restent à l'entour (7). Or, le triangle ABΓ équivaut au triple des segments (8) ; par conséquent, XΘ est aussi le triple de ΘE (9). Or, il a été démontré que XΘ est aussi le triple de XΞ ; par conséquent, ΞE est le quintuple de EΘ, c'est-à-dire que ΔE est le quintuple de EΘ ; car ces droites sont égales (10) ; en sorte que ΔΘ est le sextuple de ΘE. De plus, BΔ est le triple de ΔE ; par conséquent, BΘ est égal à trois fois la moitié de ΘΔ ; ce qu'il fallait démontrer (11).

1. Les relations des deux notes précédentes donnent : $B\Delta - \Delta\Theta = 4[KZ - MZ]$, ou : $B\Theta = 4KM$. Or, KΣXM est un parallélogramme ; donc, $KM = \Sigma X$, d'où : $B\Theta = 4\Sigma X$.

2. La relation de la note précédente donne : $B\Theta - \Sigma X = B\Sigma + X\Theta = 4\Sigma X - \Sigma X = 3\Sigma X$.

3. Si l'on pose : $B\Sigma = 3\Sigma\Xi$, la relation de la note précédente donne :
$$X\Theta = 3\Sigma X - B\Sigma = 3(\Sigma X - \Sigma\Xi) = 3\Xi X.$$

4. On a : $\Xi B = B\Sigma + \Sigma\Xi$. Or, par hypothèse : $B\Sigma = 3\Sigma\Xi$; donc : $\Xi B = B\Sigma + \frac{B\Sigma}{3} = \frac{4B\Sigma}{3}$. Or, on a démontré (voir note plus haut) que $B\Delta = 4B\Sigma$; donc : $\Xi B = \frac{1}{3} B\Delta$.

5. Voir livre I, prop. XIV. Le centre de gravité du triangle est au tiers de la médiane à partir de la base ; donc : $E\Delta = \frac{1}{3} B\Delta$.

6. $\Xi E = B\Delta - E\Delta - \Xi B$, d'où, substituant les valeurs trouvées dans les deux notes précédentes, il vient, comme le texte : $\Xi E = B\Delta - \frac{2}{3} B\Delta = \frac{1}{3} B\Delta$.

7. Voir livre I, proposition VIII, $\frac{X\Theta}{\Theta E} = \frac{\text{triangle ABΓ}}{\text{segment AKB} + \text{segment BΛΓ}}$

8. Le texte présente ici cette petite interpolation : « puisque le segment entier vaut les quatre tiers du triangle ABΓ ».

9. Voir *De la Quadrature de la Parabole*, proposition XXIV. On a : segment de parabole ABΓ = $\frac{4}{3}$ triangle ABΓ, d'où : segment ABΓ — triangle ABΓ = segment AKB + segment BΛΓ = $(\frac{4}{3} - 1)$ triangle ABΓ = $\frac{1}{3}$ triangle ABΓ, d'où, comme le texte : triangle ABΓ = 3[segment AKB + segment BΛΓ], d'où, remontant à la relation de la note pénultième : $\frac{X\Theta}{\Theta E} = 3$, ou, comme le texte : $X\Theta = 3\Theta E$.

10. On a vu, quelques notes plus haut, que $X\Theta = 3\Xi X$, d'où, en présence de la relation de la note précédente : $\Xi X = \Theta E$, d'où : $\Xi E = \Xi X + X\Theta + E\Theta = \Theta E + 3\Theta E + \Theta E = 5\Theta E$. Or, on a vu que $\Xi E = \frac{1}{3} B\Delta$, et $E\Delta = \frac{1}{3} B\Delta$; donc : $\Xi E = E\Delta$, d'où, comme le texte : $\Delta E = 5\Theta E$.

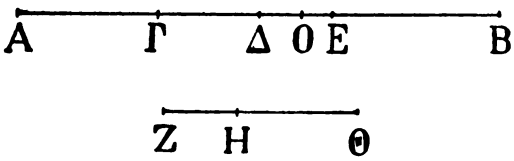
11. On aura : $\Delta\Theta = \Delta E + \Theta E = 5\Theta E + \Theta E = 6\Theta E$, d'où : $\Theta E = \frac{\Delta\Theta}{6}$. D'autre part, on

Digitized by Google

PROPOSITION IX.

Si quatre droites sont en proportion continue ; si l'on prend une droite dont le rapport aux trois cinquièmes de l'excédent de la plus grande sur la troisième soit le même que le rapport de la plus petite à l'excédent de la plus grande sur la plus petite, et si l'on prend une autre droite dont le rapport à l'excédent de la plus grande sur la troisième soit le même que le rapport d'une droite égale au double de la plus grande des droites proportionnelles, augmenté du quadruple de la seconde, du sextuple de la troisième et du triple de la quatrième, à une droite égale au quintuple de la plus grande, augmenté du décuple de la seconde, du décuple de la troisième et du quintuple de la quatrième, l'ensemble de ces deux droites vaudra les deux cinquièmes de la plus grande.

Soient AB, BΓ, BΔ, BE quatre droites proportionnelles (1). Que le rapport de ZH aux trois cinquièmes de AΔ soit le même que celui de BE à EA, et que le rapport de HΘ à AΔ soit le même que celui d'une droite égale au double de AB, augmenté du quadruple de BΓ, du sextuple de BΔ et du triple de BE, à une droite égale au quintuple de AB, augmenté du décuple de ΓB, du décuple de BΔ et du quintuple de BE. Il faut démontrer que la droite ZΘ est égale aux deux cinquièmes de la droite AB.



En effet, puisque les droites AB, BΓ, BΔ sont proportionnelles, les droites AΓ, ΓΔ, ΔE seront dans le même rapport (2) ; le rapport de la somme de AB, BΓ à BΔ, ou celui du double de la somme de

---

a eu : $E\Delta = \frac{1}{3} B\Delta$, d'où : $B\Delta = 3E\Delta$. Dès lors, observant que $\Delta E = 5\Theta E$, on a : $B\Theta = B\Delta - E\Delta - \Theta E = 3E\Delta - E\Delta - \Theta E = 2E\Delta - \Theta E = 10\Theta E - \Theta E = 9\Theta E = \frac{9}{5}\Delta\Theta = \frac{3}{5}\Delta\Theta$.

1. C'est-à-dire telles que $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{B\Delta}{BE}$.

2. C'est-à-dire que l'on aura : $\frac{AB - B\Gamma}{B\Gamma} = \frac{B\Gamma - B\Delta}{B\Delta}$, ou : $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$, d'où : $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{B\Gamma}{B\Delta}$; et, de même : $\frac{B\Gamma - B\Delta}{B\Delta} = \frac{B\Delta - BE}{BE}$, ou : $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta} = \frac{\Delta E}{BE}$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta E} = \frac{B\Delta}{BE}$, d'où, remontant à la proportion de la note précédente : $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta E} = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{B\Delta}{BE}$.

Digitized by Google

AB, BΓ au double de BΔ, sera le même que celui de AΔ à ΔE (1) ; le rapport de la somme de ΔB, BΓ à EB sera aussi le même (2), ainsi que celui de toutes à toutes les droites (3). En conséquence, le rapport de AΔ à ΔE sera le même que celui d'une droite égale au double de AB, augmenté du triple de ΓB, augmenté de ΔB, à une droite égale au double de BΔ, augmenté de BE (4). Or, le rapport d'une droite égale au double de AB, augmenté du quadruple de BΓ, du quadruple de BΔ et du double de BE, à une droite égale au double de ΔB, augmenté de EB, est le même que le rapport d'une droite ΔA à une droite plus petite que ΔE. Que ce soit son rapport à une droite ΔO (5) ; ces dernières droites auront aussi même rapport avec les premières (6). Dès lors, le rapport de OA à AΔ sera le même que celui d'une droite égale au double de AB, augmenté du quadruple de ΓB, du sextuple de BΔ et du triple de BE, à une droite égale au double de la somme de AB, BE, augmenté du quadruple de la somme de ΓB, BΔ (7). Or, le rapport de AΔ à HΘ est aussi le même que celui du quintuple de la somme de AB, BE, augmenté du décuple de la somme de ΓB, BΔ, à la somme du double

---

1. La relation $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$ donne : $\frac{AB+B\Gamma}{B\Gamma}=\frac{A\Gamma+\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}=\frac{A\Delta}{\Gamma\Delta}$, d'où, combinant avec $\frac{B\Gamma}{B\Delta}=\frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}$, il vient : $\frac{AB+B\Gamma}{B\Gamma}\times\frac{B\Gamma}{B\Delta}=\frac{A\Delta}{\Gamma\Delta}\times\frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}$, ou, comme le texte : $\frac{AB+B\Gamma}{B\Delta}=\frac{A\Delta}{\Delta E}$, ou : $\frac{2(AB+B\Gamma)}{2B\Delta}=\frac{A\Delta}{\Delta E}$.

2. On aurait, de la même manière : $\frac{\Delta B+B\Gamma}{EB}=\frac{A\Delta}{\Delta E}$.

3. πάντα ποτὶ πάντα, littéralement : toutes (les droites) à toutes. Il faut probablement sous-entendre tous les antécédents à tous les conséquents, c'est-à-dire, la somme des antécédents à la somme des conséquents.

4. La suite de rapports établie dans les deux notes antépénultièmes donne : $\frac{A\Delta}{\Delta E}=\frac{2(AB+B\Gamma)}{2B\Delta}=\frac{B\Delta+B\Gamma}{BE}=\frac{2(AB+B\Gamma)+B\Delta+B\Gamma}{2B\Delta+BE}=\frac{2AB+3B\Gamma+B\Delta}{2B\Delta+BE}$.

5. On peut trouver une droite $\Delta O<\Delta E$ telle que, ajoutant $B\Gamma+3B\Delta+2BE$ au numérateur du second membre de l'égalité de la note précédente, on ait l'égalité : $\frac{2AB+4B\Gamma+4B\Delta+2BE}{2\Delta B+EB}=\frac{A\Delta}{\Delta O}$.

6. C'est-à-dire que l'on aura aussi : $\frac{A\Delta}{\Delta O}=\frac{2AB+4B\Gamma+4B\Delta+2BE}{2\Delta B+EB}$.

7. La relation précédente donne, par addition :
$\frac{\Delta O+A\Delta}{A\Delta}=\frac{2\Delta B+EB+2AB+4B\Gamma+4B\Delta+2BE}{2AB+4B\Gamma+4B\Delta+2BE}$, ou, comme le texte :
$\frac{OA}{A\Delta}=\frac{2AB+4\Gamma B+6B\Delta+3BE}{2(AB+BE)+4(B\Gamma+B\Delta)}$.

Digitized by Google

de AB, du quadruple de ΓB, du triple de EB et du sextuple de BΔ(1). Les rapports étant d'ailleurs ordonnés dissemblablement, c'est-à-dire en proportion troublée, le rapport de OA à HΘ sera, par raison d'identité, le même que celui du quintuple de la somme de AB, BE, augmenté du décuple de la somme de ΓB, BΔ, à une droite composée du double de la somme de AB, BE et du quadruple de la somme de ΓB, BΔ. Or, le rapport d'une droite composée du quintuple de la somme de AB, BE et du décuple de la somme de ΓB, BΔ à une droite composée du double de la somme de AB, BE et du quadruple de la somme de ΓB, BΔ est le même que celui de cinq à deux ; par conséquent, le rapport de AO à HΘ est aussi le même que celui de cinq à deux (2). D'autre part, puisque le rapport de OΔ à ΔA est le même que celui de EB et du double de BΔ à la droite égale à celle qui est composée du double de la somme de AB, BE et du quadruple de la somme de ΓB, BΔ, et que la droite composée du double de AB, du triple de ΓB et de la droite BΔ est à une droite égale à EB et au double de BΔ comme la droite AΔ est à la droite ΔE, les rapports étant, dès lors, ordonnés dissemblablement, c'est-à-dire en proportion troublée, on aura, par raison d'identité, que le double de AB, augmenté du triple de BΓ, et augmenté de ΔB, est à la droite composée du double de la somme de AB, BE et du quadruple de la somme de ΓB, BΔ comme OΔ est à ΔE (3). En conséquence, la droite ΓB, augmentée du triple de BΔ et du double de EB, est aussi au double de la somme de AB, BE, augmenté du quadruple de

1. On a, par hypothèse, d'après le texte du début de la démonstration : $\frac{H\Theta}{A\Delta} = \frac{2AB+4B\Gamma+6B\Delta+3BE}{5AB+10\Gamma B+10B\Delta+5BE}$, relation que le texte met ici sous la forme comparable avec la relation de la note précédente : $\frac{A\Delta}{H\Theta} = \frac{5(AB+BE)+10(\Gamma B+B\Delta)}{2AB+4\Gamma B+6B\Delta+3BE}$.

2. Observant que les relations des deux notes précédentes se présentent en proportion troublée (EUCLIDE, livre V, prop. 23), ou bien, en les combinant par produit, il vient, comme le texte : $\frac{OA}{H\Theta} = \frac{5(AB+BE)+10(\Gamma B+B\Delta)}{2(AB+EB)+4(\Gamma B+B\Delta)} = \frac{5}{2}$, ou : $\frac{OA}{H\Theta} = \frac{5}{2}$.

3. Les deux relations trouvées précédemment : $\frac{2AB+4B\Gamma+4B\Delta+2BE}{2\Delta B+EB} = \frac{A\Delta}{\Delta O}$, et $\frac{A\Delta}{\Delta E} = \frac{2AB+3B\Gamma+B\Delta}{2B\Delta+BE}$, que le texte présente maintenant sous les formes adéquates : $\frac{O\Delta}{\Delta A} = \frac{EB+2B\Delta}{2(AB+BE)+4(\Gamma B+B\Delta)}$, $\frac{2AB+3\Gamma B+B\Delta}{EB+2B\Delta} = \frac{A\Delta}{\Delta E}$, donnent, par raison d'identité, ou combinées par produit : $\frac{2AB+3\Gamma B+B\Delta}{2(AB+BE)+4(\Gamma B+B\Delta)} = \frac{O\Delta}{\Delta E}$.

Digitized by Google

la somme de ΓB, BΔ comme OE est à EΔ (1). Or, AΓ est aussi à ΓB comme ΔE est à EB et, par composition, comme le triple de ΓΔ est au triple de ΔB, et comme le double de ΔE est au double de EB, et, par conséquent aussi, comme une droite composée de AΓ, du triple de ΓΔ et du double de ΔE est à une droite composée de ΓB, du triple de ΔB et du double de EB (2). Dès lors, les rapports étant de nouveau ordonnés dissemblablement, c'est-à-dire en proportion troublée, le rapport de EO à EB sera, par raison d'identité, le même que celui de la droite AΓ, augmentée du triple de ΓΔ et du double de ΔE, à une droite double de la somme de AB, BE, augmentée du quadruple de la somme de ΓB, BΔ (3). Par conséquent, le rapport de la droite entière OB à BE sera le même que celui d'une droite égale au triple de AB, augmenté du sextuple de ΓB et du triple de BΔ, à une droite double de la somme de AB, BE, augmentée du quadruple de la somme de ΓB, BΔ (4). Et puisque les droites EΔ, ΔΓ, ΓA sont proportionnelles, ainsi que les sommes des droites EB et BΔ, ΔB et BΓ, ΓB et BA, on aura aussi la somme de EB, BΔ à la somme de ΔB, BΓ, augmentée de la somme de ΓB, BA, comme EΔ est à ΔA (5). Dès lors, par composition, la somme

---

1. La relation précédente donne :
$\frac{2(AB+BE)+4(\Gamma B+B\Delta)-2(AB+3\Gamma B+B\Delta)}{2(AB+BE)+4(\Gamma B+B\Delta)}=\frac{\Delta E-O\Delta}{\Delta E}$, ou, comme le texte :
$$\frac{\Gamma B+3B\Delta+2EB}{2(AB+BE)+4(\Gamma B+B\Delta)}=\frac{OE}{E\Delta}.$$

2. La relation primitive $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{B\Gamma}{B\Delta}=\frac{B\Delta}{BE}$ donne successivement, comme le texte:
$$\frac{AB-B\Gamma}{B\Gamma}=\frac{B\Gamma-B\Delta}{B\Delta}=\frac{B\Delta-BE}{BE}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}=\frac{E\Delta}{BE}=\frac{3\Gamma\Delta}{3B\Delta}=\frac{2\Delta E}{2BE}=\frac{A\Gamma+3\Gamma\Delta+2\Delta E}{\Gamma B+3\Delta B+2EB},$$
d'où : $\frac{E\Delta}{EB}=\frac{A\Gamma+3\Gamma\Delta+2\Delta E}{\Gamma B+3\Delta B+2EB}$.

3. Observant que les relations des deux notes précédentes se présentent en proportion troublée, ou bien, en les combinant par produit, il vient, comme le texte :
$$\frac{OE}{EB}=\frac{A\Gamma+3\Gamma\Delta+2\Delta E}{2(AB+BE)+4(\Gamma B+B\Delta)}.$$

4. La relation précédente donne :
$\frac{OE+EB}{EB}=\frac{A\Gamma+3\Gamma\Delta+2\Delta E+2(AB+BE)+4(\Gamma B+B\Delta)}{2(AB+BE)+4(\Gamma B+B\Delta)}$, ou, comme le texte :
$$\frac{OB}{BE}=\frac{3AB+6\Gamma B+3B\Delta}{2(AB+BE)+4(\Gamma B+B\Delta)}.$$

5. La relation première : $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{B\Gamma}{B\Delta}=\frac{B\Delta}{BE}$ donne successivement :
$\frac{AB-B\Gamma}{AB+B\Gamma}=\frac{B\Gamma-B\Delta}{B\Gamma+B\Delta}=\frac{B\Delta-BE}{B\Delta+BE}=\frac{A\Gamma}{AB+B\Gamma}=\frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma+B\Delta}=\frac{E\Delta}{B\Delta+BE}$, d'où, comme le texte : $\frac{B\Delta+BE}{(B\Gamma+B\Delta)+(AB+B\Gamma)}=\frac{E\Delta}{\Delta\Gamma+A\Gamma}=\frac{E\Delta}{\Delta A}$.

Digitized by Google

de EB, BΔ, augmentée de la somme de AB, BΓ et de la somme de ΓB, BΔ, c'est-à-dire la somme de EB, BA augmentée du double de la somme de ΔB, BΓ, est à la somme de BΔ, BA augmentée du double de BΓ, comme AE est à AΔ ; en sorte que le rapport du double au double est aussi le même, c'est-à-dire que le double de la somme de EB, BA, augmenté du quadruple de la somme de ΓB, BΔ, est au double de la somme de AB, BΔ, augmenté du quadruple de ΓB, comme EA est à AΔ (1). Il s'ensuit aussi que la droite composée du double de la somme de AB, BE et du quadruple de la somme de ΓB, BΔ est aux trois cinquièmes de la droite composée du double de la somme de AB, BΔ et du quadruple de ΓB comme EA est aux trois cinquièmes de AΔ. Mais EB est à ZH comme AE est aux trois-cinquièmes de AΔ ; donc, le double de la somme de AB, BE, augmenté du quadruple de la somme de ΔB, BΓ, est aux trois cinquièmes de la droite composée du double de la somme de AB, BΔ et du quadruple de ΓB comme EB est à ZH (2). Or, il a été démontré que le triple de la somme de AB, BΔ et du sextuple de ΓB est au double de la somme de AB, BE et du quadruple de la somme de ΓB, BΔ comme OB est à EB ; donc, par raison d'identité, la droite composée du triple de la somme de AB, BΔ et du sextuple de ΓB est aux trois cinquièmes de la droite composée du double de la somme de AB, BΔ et du quadruple de ΓB comme OB est à ZH (3). Mais, le rapport d'une droite composée du triple de la somme de AB, BΔ et du sextuple de ΓB à une droite composée du double de la somme de AB, BΔ et du quadruple de ΓB est le même que le rapport

1. La relation précédente donne par addition :
$$\frac{BE+BA+2(B\Delta+B\Gamma)}{B\Delta+BA+2B\Gamma}=\frac{E\Delta+\Delta A}{\Delta A}=\frac{AE}{A\Delta},$$ d'où, comme le texte :
$$\frac{2(EB+BA)+4(\Gamma B+B\Delta)}{2(B\Delta+BA)+4B\Gamma}=\frac{AE}{A\Delta}.$$

2. Par hypothèse, on a : $\frac{ZH}{\frac{3}{5}A\Delta}=\frac{BE}{EA}$, d'où : $\frac{EB}{ZH}=\frac{AE}{\frac{3}{5}A\Delta}$, d'où, comparant avec la relation de la note précédente, que le texte reprend sous la forme :
$$\frac{2(AB+BE)+4(\Gamma B+B\Delta)}{\frac{3}{5}[2(AB+B\Delta)+4B\Gamma]}=\frac{EA}{\frac{3}{5}A\Delta},$$ il vient, comme dans le texte :
$$\frac{2(AB+BE)+4(\Delta B+B\Gamma)}{\frac{3}{5}[2(AB+B\Delta)+4\Gamma B]}=\frac{EB}{ZH}.$$

3. On a eu, dans une note plus haut, la relation : $\frac{OB}{BE}=\frac{3AB+6\Gamma B+3B\Lambda}{2(AB+BE)+4(\Gamma B+B\Delta)}$, et le texte la reprend sous la forme : $\frac{3(AB+B\Delta)+6\Gamma B}{2(AB+BE)+4(\Gamma B+B\Delta)}=\frac{OB}{BE}$. Donc, combinant avec la relation de la note précédente, il vient : $\frac{3(AB+B\Delta)+6\Gamma B}{\frac{3}{5}[2(AB+B\Delta)+4\Gamma B]}=\frac{OB}{ZH}$.

Digitized by Google

de trois à deux ; tandis que son rapport aux trois cinquièmes de cette même droite est le même que le rapport de cinq à deux (1), et qu'il a été démontré que le rapport de AO à HΘ est aussi le même que celui de cinq à deux ; par conséquent, le rapport de la droite entière BA à la droite entière ZΘ est aussi le même que celui de cinq à deux, et, dès lors, la droite ZΘ vaut les deux cinquièmes de la droite AB ; ce qu'il fallait démontrer (2).

PROPOSITION X.

Le centre de gravité de tout fragment (3) retranché d'une parabole est situé de telle sorte, sur la cinquième partie de la droite, constituant le diamètre du fragment, divisée en cinq parties égales, que le rapport du segment de cette droite, le plus rapproché de la plus grande base du fragment, au segment restant soit le même que le rapport du solide,

---

1. En effet : $\frac{3(AB+B\Delta)+6\Gamma B}{2(AB+B\Delta)+4\Gamma B} = \frac{3[AB+B\Delta+2\Gamma B]}{2[AB+B\Delta+2\Gamma B]} = \frac{3}{2}$, et, d'autre part : $\frac{3(AB+B\Delta)+6\Gamma B}{\frac{3}{5}[2(AB+B\Delta)+4\Gamma B]} = \frac{15[AB+B\Delta+2\Gamma B]}{6[AB+B\Delta+2\Gamma B]} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$.

2. La comparaison des relations des deux notes précédentes donne : $\frac{OB}{ZH} = \frac{5}{2}$. Or, on a vu, page 341, note 2, que $\frac{AO}{H\Theta} = \frac{5}{2}$; donc : $\frac{AO+OB}{H\Theta+ZH} = \frac{5}{2}$, ou, comme le texte : $\frac{AB}{Z\Theta} = \frac{5}{2}$, d'où : $Z\Theta = \frac{2}{5}AB$.

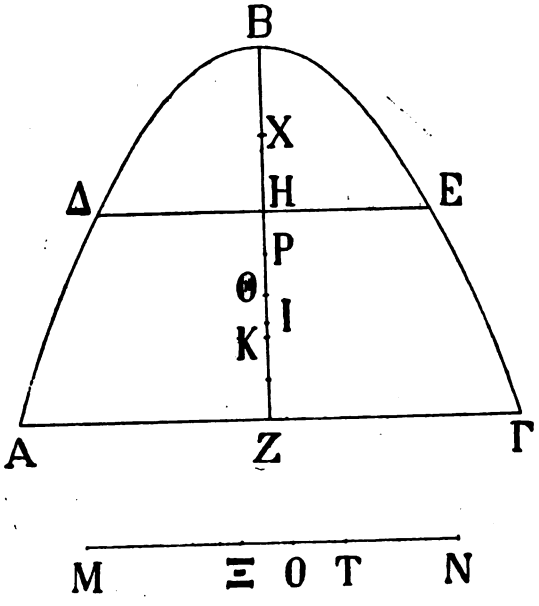
La longue démonstration de cette proposition constitue une application remarquable des propositions d'Euclide relatives aux grandeurs proportionnelles. Algébriquement, on aurait, en considérant quatre grandeurs a, b, c, d en progression géométrique décroissante : $b^2 = a \times c$; $c^2 = b \times d$ et $b \times c = a \times d$. Soient A, B deux grandeurs telles que l'on ait : $\frac{A}{\frac{3}{8}(a-c)} = \frac{d}{a-d}$, et $\frac{B}{a-c} = \frac{2a+4b+6c+3d}{5a+10b+10c+5d}$; il faut démontrer que $A + B = \frac{2}{5}a$. En effet, on aura : $A = \frac{3a.d - 3c.d}{5a - 5d}$, et $B = \frac{2a^2+4a.b+4a.c+3a.d-4b.c-6c^2-3c.d}{5a+10b+10c+5d}$. Additionnons membre à membre, et réduisons au même dénominateur en substituant $a.d$ à $b.c$ et $b.d$ à c^2, on aura : $A + B = \frac{2a^3+4a^2.b+4a^2.c-4a.b.d.-4a.c.d-2a.d^2}{5a^2+10a.b+10a.c-10b.d-10c.d-5d^2} =$ $\frac{2a[a^2+2a.b+2a.c-2b.d-2c.d-d^2]}{5[a^2+2a.b+2a.c-2b.d-2c.d-d^2]} = \frac{2}{5}a$.

3. Le mot τομᾶς, que nous traduisons ici par « fragment » pour éviter la confusion qui règne dans le texte grec avec le segment de parabole, désigne ici un trapèze parabolique, c'est-à-dire un trapèze ayant deux cordes pour côtés parallèles et deux arcs de parabole pour côtés non parallèles.

Digitized by Google

ayant comme base le carré construit sur (1) la plus grande des bases du fragment et comme hauteur la droite égale au double de la plus petite des bases et à la plus grande pris ensemble, au solide ayant comme base le carré construit sur (2) la plus petite des bases du fragment et comme hauteur la droite égale au double de la plus grande et à la plus petite des bases pris ensemble.

Soient AΓ, ΔE deux droites (3) situées dans une parabole, et soit BZ le diamètre du segment ABΓ. Il est clair que ZH sera également le diamètre du fragment AΔEΓ (4), et que les droites AΓ, ΔE sont des parallèles à la tangente à la parabole au point B (5). Soit ΘK la cinquième partie médiane de la droite HZ divisée en cinq parties égales, et que le rapport de ΘI à IK soit le même que celui du solide, ayant comme base le carré construit sur la droite AZ et comme hauteur la droite égale au double de ΔH et à AZ pris ensemble, au solide ayant comme base le carré construit sur ΔH et comme hauteur la droite égale au double de AZ et à ΔH pris ensemble. Il faut démontrer que le centre de gravité du fragment AΔEΓ est le point I (6). Qu'une droite MN soit égale



1. et 2. L'édition de Bâle porte en ces deux endroits les mots : ἀπὸ ἡμίσους, c'est-à-dire « sur la moitié », rendus dans les vieilles versions latines par les mots : « a medietate ». Bien que ces mots ne changent en rien la valeur du rapport exprimé par l'énoncé de la proposition, ils ont probablement été interpolés pour répondre plus exactement aux relations dont il sera fait usage dans la démonstration.

3. Le texte sous-entend, ou aura perdu, le mot « parallèles ». En effet, la démonstration ne considère qu'un seul diamètre pour les deux cordes AΓ, ΔE, et elle suppose dès lors qu'elles sont parallèles.

4. Puisque BZ est le diamètre du segment ABΓ, il divise la corde conjuguée AΓ en deux parties égales, ainsi que la corde ΔE parallèle à AΓ. Dès lors, HZ, qui relie les milieux des bases du trapèze parabolique, sera le diamètre de ce trapèze.

5. Cette phrase, qui rappelle ici inutilement une propriété des cordes conjuguées au diamètre, est au moins suspecte d'interpolation.

6. C'est-à-dire que le centre de gravité sera tel que : $\frac{\Theta I}{IK} = \frac{\overline{AZ}^2 \times (2\Delta H + AZ)}{\overline{\Delta H}^2 \times (2AZ + \Delta H)}$.

Digitized by Google

à la droite ZB et une droite NO égale à la droite HB. Prenons NΞ moyenne proportionnelle entre MN, NO, et TN quatrième proportionnelle (1). De plus, que la droite ZΘ soit à une droite IP, prise à partir du point I, en quelque endroit que tombe son autre point, sans qu'il importe que ce soit entre les points Z, H ou entre les points H, B, comme TM est à TN. Dès lors, puisque, dans la parabole, ZB est le diamètre du segment, diamètre principal (2) de la section ou mené parallèlement à ce diamètre, et que les droites AZ, ΔH lui sont menées d'une manière ordonnée (3), parce qu'elles sont parallèles à la tangente à la parabole au point B, il s'ensuit que la longueur ZB est à la longueur BH, c'est-à-dire que la droite MN est à la droite NO comme le carré (4) de AZ est au carré de ΔH (5). Or, le carré de MN est au carré de NΞ comme la longueur MN est à la longueur NO ; par conséquent, le carré de MN est au carré de NΞ comme le carré de AZ est au carré de ΔH ; en sorte que les longueurs sont aussi dans le même rapport. Dès lors, le cube de MN est aussi au cube de NΞ comme le cube de AZ est au cube de ΔH (6). Mais le seg-

1. C'est-à-dire TN quatrième proportionnelle à MN, NO et NΞ, de manière que l'on ait : $\frac{MN}{N\Xi} = \frac{N\Xi}{NO}$, et $\frac{MN}{NO} = \frac{N\Xi}{TN}$.

2. ἀρχικά désigne ici le diamètre original ou principal, c'est-à-dire l'axe de la parabole.

3. τεταγμένως καταγμέναι, littéralement : « amenées d'une manière ordonnée », expression que le texte emploie ici exceptionnellement pour désigner les perpendiculaires menées de points de la courbe sur l'axe, et que nous appelons les ordonnées. Ces droites sont désignées partout ailleurs par la circonlocution : « droites menées de la courbe sur le diamètre parallèlement à la base du segment. »

4. δυνάμει, c'est-à-dire « puissance », employé au datif au lieu du mot habituel τετράγωνος, carré, avec la même acception que Diophante attribuera plus tard au mot δύναμις pour désigner l'inconnue algébrique.

5. Archimède ne démontre pas la proportionnalité des abscisses aux carrés des ordonnées dans la parabole, et la proposition III de son traité *De la Quadrature de la Parabole* renvoie à cet égard à la démonstration d'un géomètre antérieur laquelle ne nous est pas parvenue. Une démonstration postérieure fait l'objet de la proposition XX du livre I *Des Coniques* d'Apollonius. On a donc : $\frac{ZB}{BH} = \frac{\overline{AZ}^2}{\overline{\Delta H}^2}$. Or ZB = MN et BH = NO ; donc : $\frac{MN}{NO} = \frac{\overline{AZ}^2}{\overline{\Delta H}^2}$.

6. On a posé : $\frac{MN}{N\Xi} = \frac{N\Xi}{NO}$, d'où : $\frac{\overline{MN}^2}{\overline{N\Xi}^2} = \frac{MN}{NO}$, d'où, en présence de la relation de la note précédente, on a : $\frac{\overline{MN}^2}{\overline{N\Xi}^2} = \frac{\overline{AZ}^2}{\overline{\Delta H}^2}$, d'où : $\frac{MN}{N\Xi} = \frac{AZ}{\Delta H}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{MN}^3}{\overline{N\Xi}^3} = \frac{\overline{AZ}^3}{\overline{\Delta H}^3}$.

Digitized by Google

ment ABΓ est au segment ΔBE comme le cube de AZ est au cube de ΔH (1), et MN est à NT comme le cube de MN est au cube de NΞ (2) ; en sorte que, par division, MT est à NT, c'est-à-dire que les trois cinquièmes de HZ sont à IP comme le fragment AΔEΓ est au segment ΔBE (3). De plus, puisque le rapport du solide, ayant comme base le carré de AZ et comme hauteur la droite composée de la droite ΔH doublée et de la droite AZ, au cube de AZ est le même que le rapport du double de la droite ΔH, augmenté de la droite AZ, à la droite ZA ; en sorte qu'il est aussi le même que celui du double de la droite NΞ, augmenté de la droite NM, à la droite MN (4) ; que MN est aussi à NT comme le cube de AZ est au cube de ΔH (5), et que ΔH est à la droite composée de la droite AZ doublée et de la droite ΔH, c'est-à-dire que la droite TN est aussi à la droite com-

---

1. Voir *De la Quadrature de la Parabole*, prop. XXIV; le segment de parabole vaut les $\frac{4}{3}$ du triangle ayant même base et même hauteur que le segment; donc : $\frac{\text{segment ABΓ}}{\text{segment ΔBE}} = \frac{\text{triangle ABΓ}}{\text{triangle ΔBE}} = \frac{AZ \times BZ}{\Delta H \times BH}$. Or, on a vu (note avant-précédente) que : $\frac{BZ}{BH} = \frac{\overline{AZ}^2}{\overline{\Delta H}^2}$; donc : $\frac{\text{segment ABΓ}}{\text{segment ΔBE}} = \frac{\overline{AZ}^3}{\overline{\Delta H}^3}$.

2. On a vu, note avant-précédente, que : $\frac{\overline{MN}^2}{\overline{N\Xi}^2} = \frac{MN}{NO}$. Or, on a posé : $\frac{MN}{NO} = \frac{N\Xi}{NT}$; donc : $\frac{N\Xi}{NT} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{N\Xi}^2}$, d'où : $\frac{N\Xi}{NT} \times \frac{MN}{N\Xi} = \frac{MN}{NT} = \frac{\overline{MN}^3}{\overline{N\Xi}^3}$.

3. On a eu plus haut : $\frac{\overline{MN}^3}{\overline{N\Xi}^3} = \frac{\overline{AZ}^3}{\overline{\Delta H}^3}$; donc, en présence de la relation de la note précédente, on a : $\frac{MN}{NT} = \frac{\overline{AZ}^3}{\overline{\Delta H}^3}$, d'où, en présence de la relation de la note avant-précédente, on a : $\frac{MN}{NT} = \frac{\text{segment ABΓ}}{\text{segment ΔBE}}$, d'où : $\frac{MN—NT}{NT} = \frac{\text{segment ABΓ—segment ΔBE}}{\text{segment ΔBE}}$, ou : $\frac{MT}{NT} = \frac{\text{fragment AΔEΓ}}{\text{segment ΔBE}}$. Or, on a, par hypothèse : $\frac{Z\Theta}{IP} = \frac{MT}{NT}$; donc, en observant que $Z\Theta = \frac{3}{5}HZ$, il vient, comme dans le texte : $\frac{\frac{3}{5}HZ}{IP} = \frac{\text{fragment AΔEΓ}}{\text{segment ΔBE}}$.

4. On peut écrire : $\frac{2\Delta H + AZ}{AZ} = \frac{\overline{AZ}^2 \times (2\Delta H + AZ)}{\overline{AZ}^3}$. Or, on a vu plus haut que $\frac{MN}{N\Xi} = \frac{AZ}{\Delta H}$; donc : $\frac{2N\Xi}{MN} = \frac{2\Delta H}{\Delta Z}$, d'où : $\frac{2N\Xi + MN}{MN} = \frac{2\Delta H + AZ}{\Delta Z}$, d'où, en présence de la relation précédente, on a, comme le texte : $\frac{2N\Xi + MN}{MN} = \frac{\overline{AZ}^2 \times (2\Delta H + AZ)}{\overline{AZ}^3}$.

5. On a eu plus haut : $\frac{\overline{MN}^3}{\overline{N\Xi}^3} = \frac{\overline{AZ}^3}{\overline{\Delta H}^3}$ et $\frac{MN}{NT} = \frac{\overline{MN}^3}{\overline{N\Xi}^3}$; donc : $\frac{MM}{NT} = \frac{\overline{AZ}^3}{\overline{\Delta H}^3}$.

Digitized by Google

posée de la droite ON doublée et de la droite TN comme le cube de ΔH est au solide ayant comme base le carré de ΔH et comme hauteur la droite composée du double de la droite AZ, augmenté de la droite ΔH (1), il en résulte que l'on a quatre grandeurs : le solide ayant comme base le carré de AZ et comme hauteur la droite composée de la droite ΔH doublée et de la droite AZ, le cube de la droite AZ, le cube de la droite ΔH, et le solide ayant comme base le carré de ΔH et comme hauteur la droite composée de la droite AZ doublée et de la droite ΔH. Or, ces grandeurs, prises deux à deux, sont proportionnelles aux quatre grandeurs suivantes : la droite composée de la droite NΞ doublée et de la droite NM, la grandeur MN, ensuite l'autre grandeur NT, et la dernière, composée de la droite NO doublée et de la droite NT. Donc, par raison d'identité, la droite, composée de la droite NΞ doublée et de la droite MN, est à la droite, composée de la droite NO doublée et de la droite NT, comme le solide, ayant comme base le carré de AZ et comme hauteur la droite composée de la droite ΔH doublée et de la droite AZ, est au solide ayant comme base le carré de ΔH et comme hauteur la droite composée de la droite AZ doublée et de la droite ΔH (2). Mais la droite ΘI est à la droite IK comme le solide que nous avons dit est au solide que nous venons de dire ; par conséquent, la droite composée est à la droite composée comme la droite ΘI est à la droite IK (3) ; en sorte que, par composition, et en multipliant les antécédents par cinq, le quintuple de la

---

1. On peut écrire : $\frac{\Delta H}{2AZ+\Delta H} = \frac{\overline{\Delta H}^3}{\overline{\Delta H}^2 \times (2AZ+\Delta H)}$. Or, on a, par hypothèse : $\frac{MN}{NO} = \frac{N\Xi}{NT}$, d'où : $\frac{MN}{N\Xi} = \frac{NO}{NT}$, et l'on a eu : $\frac{MN}{N\Xi} = \frac{AZ}{\Delta H}$; donc : $\frac{NO}{NT} = \frac{AZ}{\Delta H}$, ou : $\frac{2NO}{NT} = \frac{2AZ}{\Delta H}$, d'où : $\frac{2NO+NT}{NT} = \frac{2AZ+\Delta H}{\Delta H}$, d'où, en présence de la relation première, il vient : $\frac{NT}{2NO+NT} = \frac{\overline{\Delta H}^3}{\overline{\Delta H}^2 \times (2AZ+\Delta H)}$.

2. Par raison d'identité, ou multipliées membre à membre, les relations des notes précédente et antépénultième, en observant que la note pénultième a donné : $\frac{MN}{NT} = \frac{\overline{AZ}^3}{\overline{\Delta H}^3}$, donnent, comme dans le texte : $\frac{2N\Xi+MN}{2NO+NT} = \frac{\overline{AZ}^2 \times (2\Delta H+AZ)}{\overline{\Delta H}^2 \times (2AZ+\Delta H)}$.

3. On a par hypothèse : $\frac{\Theta I}{IK} = \frac{\overline{AZ}^2 \times (2\Delta H+AZ)}{\overline{\Delta H}^2 \times (2AZ+\Delta H)}$; donc, en présence de la relation de la note précédente on a : $\frac{2N\Xi+MN}{2NO+NT} = \frac{\Theta I}{IK}$.

Digitized by Google

somme de MN, NT, augmenté du décuple de la somme de NΞ, NO, est au double de la droite ON, augmenté de la droite NT, comme la droite ZH est à la droite IK (1). De plus, le quintuple de la somme de MN, NT, augmenté du décuple de la somme de ΞN, NO, est au double de la somme de MN, NT, augmenté du quadruple de la somme de ΞN, NO, comme ZH est à ses deux cinquièmes ZK (2) ; par conséquent, le quintuple de la somme de MN, NT, augmenté du décuple de la somme de ΞN, NO, est à la droite composée du double de MN, du quadruple de NΞ, du sextuple de ON, et du triple de NT, comme la droite ZH est à la droite ZI (3). Dès lors, puisque les quatre droites MN, NΞ, ON, NT sont en proportion continue (4), que la droite choisie PI est aux trois cinquièmes de la droite ZH, c'est-à-dire aux trois cinquièmes de la droite MO, comme la droite NT est à la droite TM (5), et que l'autre droite choisie IZ est à la droite ZH, c'est-à-dire à la droite MO (6), comme la droite composée du double de NM, du quadruple de NΞ, du sextuple de NO, et du triple de NT, est à la droite composée du quintuple de la somme de MN, NT et du décuple de la somme de ΞN, NO, il s'ensuit, en vertu de ce qui

---

1. La relation de la note précédente donne : $\frac{2N\Xi + MN + 2NO + NT}{2NO + NT} = \frac{\Theta I + IK}{IK}$, ou : $\frac{(MN + NT) + 2(N\Xi + NO)}{2NO + NT} = \frac{\Theta K}{IK}$, d'où, observant que, par hypothèse, $ZH = 5\Theta K$, il vient, comme dans le texte : $\frac{5(MN + NT) + 10(N\Xi + NO)}{2NO + NT} = \frac{5\Theta K}{IK} = \frac{ZH}{IK}$.

2. La relation de la note précédente donne, en observant que $ZK = \frac{2}{5} ZH$, les relations : $\frac{\frac{2}{5}[5(MN + NT) + 10(N\Xi + NO)]}{2NO + NT} = \frac{2(MN + NT) + 4(N\Xi + NO)}{2NO + NT} = \frac{\frac{2}{5}ZH}{IK} = \frac{ZK}{IK}$, d'où, comparant avec la relation de la note précédente :

$$\frac{5(MN + NT) + 10(N\Xi + NO)}{2(MN + NT) + 4(N\Xi + NO)} = \frac{ZH}{ZK}.$$

3. La relation $\frac{2(MN + NT) + 4(N\Xi + NO)}{2NO + NT}$ de la note précédente donne :

$\frac{2(MN + NT) + 4(N\Xi + NO)}{2(MN + NT) + 4(N\Xi + NO) + 2NO + NT} = \frac{ZK}{ZK + IK}$, ou, en observant que $ZK = \frac{2}{5} ZH$: $\frac{2(MN + NT) + 4(N\Xi + NO)}{2MN + 4N\Xi + 6NO + 3NT} = \frac{ZK}{ZI} = \frac{\frac{2}{5}ZH}{ZI}$, d'où : $\frac{5(MN + NT) + 10(N\Xi + NO)}{2MN + 4N\Xi + 6NO + 3NT} = \frac{ZH}{ZI}$.

4. On a, par hypothèse : $\frac{MN}{ON} = \frac{M\Xi}{NT}$, d'où, comme le texte : $\frac{MN}{N\Xi} = \frac{ON}{NT}$.

5. On a, par hypothèse : $\frac{Z\Theta}{PI} = \frac{TM}{TN}$, d'où, en observant que $Z\Theta = \frac{3}{5} ZH$, il vient : $\frac{PI}{\frac{3}{5}ZH} = \frac{TN}{TM}$. Mais, on a posé : MN = ZB, et NO = HB, d'où : MN — NO = ZB — HB, ou MO = ZH, donc : $\frac{PI}{\frac{3}{5}MO} = \frac{TN}{TM}$.

6. En substituant MO = ZH dans la relation de la note antépénultième.

Digitized by Google

précède (1), que la droite PZ sera les deux cinquièmes de la droite MN, c'est-à-dire les deux cinquièmes de la droite ZB (2). En conséquence, le point P est le centre de gravité du segment ABΓ (3). Que le point X soit d'autre part le centre de gravité du segment ΔBE. Dès lors, le centre de gravité du fragment AΔEΓ sera situé sur la droite, prolongement de la droite XP, avec laquelle cette dernière a même rapport que celui du fragment avec le segment restant (4). Or, il en est ainsi pour le point I. En effet, puisque la droite BP constitue les trois cinquièmes de la droite ZB, et que la droite BX constitue les trois cinquièmes de la droite HB, la droite XP constitue donc les trois cinquièmes de la droite restante HZ (5). En conséquence, puisque la droite MT est à la droite TN comme le fragment AΔEΓ est au segment ΔBE, et que les trois cinquièmes de la droite HZ, c'est-à-dire la droite XP, est à la droite PI comme la droite MT est à la droite TN, la droite XP sera donc aussi à la droite PI comme le fragment AΔEΓ est au segment ΔBE. De plus, le centre de gravité du segment entier est le point P, et le centre de gravité du segment ΔBE est le point X ; par conséquent, il est clair que le centre de gravité du fragment AΔEΓ est le point I (6).

---

1. Voir proposition IX.

2. En effet, s'en rapportant à la démonstration algébrique donnée en dernière note de la proposition IX, et si l'on pose : MN = a ; NΞ = b ; ON = c ; NT = d ; PI = A ; ZI = B, la relation de la note antépénultième devient : $\frac{A}{\frac{3}{5}(a-c)} = \frac{d}{a-d}$, et la relation obtenue quelques notes plus haut, que le texte nous représente sous la forme: $\frac{ZI}{ZH=MO} = \frac{2MN+4N\Xi+6NO+3NT}{5(MN+NT)+10(N\Xi+NO)}$, devient : $\frac{B}{a-c} = \frac{2a+4b+6c+3d}{5a+10b+10c+5d}$. Or, $A+B=\frac{2}{5}a$; donc : $PI+ZI=\frac{3}{5}MN$ ou, comme dans le texte : $PZ=\frac{2}{5}ZB$.

3. Puisque $PZ=\frac{2}{5}ZB$, on a : $BP=ZB-PZ=\frac{5}{5}PZ-PZ=\frac{3}{2}PZ$; donc, en vertu de la proposition VIII, le point P est le centre de gravité du segment ABΓ.

4. Voir livre I, prop. VIII.

5. Puisque $PZ=\frac{2}{5}ZB$, on a : $BP=ZB-PZ=ZB-\frac{2}{5}ZB=\frac{3}{5}ZB$. D'autre part, puisque X est le centre de gravité du segment ΔBE, la proposition VIII donne : $BX=\frac{3}{2}XH$, d'où: $BX=BH-XH=BH-\frac{2}{5}BX=\frac{3}{5}BH$. Donc: $BP-BX=\frac{3}{5}(ZB-BH)$ ou, comme le texte : $XP=\frac{3}{5}HZ$.

6. On a eu, dans une note précédente : $\frac{\frac{3}{5}HZ}{IP} = \frac{\text{fragment } A\Delta E\Gamma}{\text{segment } \Delta BE}$, d'où, en présence de la relation de la note précédente, il vient, comme dans le texte : $\frac{XP}{IP} = \frac{\text{fragment } A\Delta E\Gamma}{\text{segment } \Delta BE}$; relation d'après laquelle, en vertu de la proposition VIII du livre I, le point I est le centre de gravité du fragment ou trapèze parabolique AΔEΓ.

Digitized by Google

L'ARÉNAIRE

Digitized by Google

Digitized by Google

L'ARÉNAIRE

D'aucuns pensent, roi Gélon (1), que le nombre des grains de sable est infiniment grand ; et ils visent ainsi, non seulement le sable des environs de Syracuse et du reste de la Sicile, mais encore celui qui gît dans toute contrée habitée ou inhabitable. D'autres soutiennent que ce nombre n'est pas infini, mais que l'on ne pourrait pas en énoncer un qui fût assez grand pour surpasser la multitude de ces grains de sable. Cependant, si ceux qui pensent ainsi se représentaient un volume de sable équivalent au volume de la terre, en supposant toutes les mers et les vallées de la terre remplies jusqu'au niveau des plus hautes montagnes, il est évident qu'ils comprendraient encore beaucoup moins que l'on puisse énoncer un nombre surpassant une pareille multitude de grains de sable. Or, je tâcherai de te faire voir, au moyen de démonstrations géométriques dont tu pourras suivre les raisonnements, que certains nombres, que j'ai, moi-même, exprimés et exposés dans des écrits adressés à Zeuxippe, surpassent non seulement le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui de la terre, remplie de la manière que nous avons dite, mais encore le nombre de grains de sable dont le volume serait égal à celui du monde.

Tu auras retenu que le monde est le nom donné par la plupart des astronomes à la sphère dont le centre est le centre de la terre, et dont le rayon est égal à la droite située entre le centre du soleil et le centre

1. Gélon, fils d'Hiéron, roi de Syracuse, partagea le pouvoir avec son père. Le titre de roi lui est également attribué par Diodore de Sicile dans le passage suivant de ses œuvres: « Les rois Gélon et Hiéron étant morts à Syracuse, Hiéronyme, encore tout jeune, leur succéda, et le trône ne fut pas dignement occupé. » (Diodore de Sicile, traduction de M. Hoefer, Paris, 1865, 4 vol. in-12. Voir vol. IV, fragment du livre XXVI, p. 336).

Digitized by Google

de la terre ; car tu as appris cela dans les dissertations publiées à ce sujet par les astronomes. Or, Aristarque de Samos a, dans ses écrits, émis certaines hypothèses dont les arguments feraient admettre que le monde est beaucoup plus étendu qu'on ne l'avait dit jusqu'à présent. En effet, il suppose que les étoiles fixes et le soleil demeurent immobiles, que la terre tourne suivant une circonférence de cercle autour du soleil, qui est situé au milieu de l'orbite de la terre (1), et qu'enfin, la grandeur de la sphère des étoiles fixes, disposée autour du même centre que celui du soleil, est telle que le cercle, à la circonférence duquel on suppose que la terre évolue, a le même rapport avec la distance des étoiles fixes que le centre d'une sphère avec sa surface. Mais, il est évident que ceci est impossible ; car le centre d'une sphère n'ayant aucune grandeur, on ne peut admettre qu'il ait quelque rapport avec la surface de cette sphère. On peut néanmoins croire qu'Aristarque imagine que, si l'on considère la terre comme le centre du monde, le rapport de la terre avec ce que nous appelons le monde est le même que celui de la sphère, contenant le cercle autour duquel on suppose que la terre évolue, avec la sphère des étoiles fixes. C'est, en effet,

1. Ce passage des *Œuvres* d'Archimède présente la plus ancienne allusion au système héliocentrique de notre monde, exposé par Aristarque de Samos, 260 ans avant J.-C., dans un ouvrage perdu, intitulé : *Les Hypothèses*. On incline cependant à croire que Pythagore, initié à la science des Mages pendant sa longue captivité à Babylone, avait émis, longtemps auparavant, l'idée de ranger notre terre parmi les planètes en la faisant tourner autour du soleil, et que, dès lors, Aristarque n'aurait fait que reprendre l'hypothèse pythagoricienne en l'appuyant sur certains arguments. Les écrits d'Aristarque, qui furent d'ailleurs accusés d'impiété envers les dieux protecteurs de l'univers, ne firent guère qu'ébranler le système géocentrique; car Ptolémée devait, au contraire, le consolider encore pour de longs siècles dans son *Almageste*, et il ne devait être renversé qu'en 1543, par Copernic, dans son ouvrage célèbre, intitulé : *De revolutionibus cœlestibus*. Plutarque, dont les écrits mentionnent plusieurs fois Aristarque, lui attribue encore, ainsi qu'à Séleucus, l'idée de la révolution de la terre autour de son axe; et il ajoute : « Il est vrai que le premier de ces philosophes l'a seulement supposé, et que l'autre l'a affirmé d'une manière positive. » (PLUTARQUE, *Œuvres morales*, traduction de RICARD, Paris, 1783, an III, 17 vol. in-12. Voir vol. XIII : *Questions platoniques*, p. 484.) On ne trouve cependant aucune trace du système héliocentrique dans l'ouvrage d'Aristarque, le seul qui nous soit parvenu, ayant comme titre : *Des grandeurs et des distances du soleil et de la lune*. Aristarque y expose une méthode, peu exacte, mais qui fut pendant longtemps la meilleure connue, pour déterminer le rapport des distances de la lune et du soleil à la terre. Cet ouvrage parut pour la première fois, accompagné du commentaire de Pappus, dans la traduction latine de Commandin, à Pise, en 1572. La première édition du texte grec fut donnée par Wallis, à Oxford, en 1688, et une traduction française, due à Fortia d'Urban, parut à Paris, en 1823. Enfin une édition critique du texte grec, accompagnée d'une traduction anglaise, a été donnée par Thomas Heath, à Oxford, en 1913.

Digitized by Google

d'une telle conception des apparences (1) qu'il fait dépendre ses démonstrations, et il semble principalement supposer que la grandeur de la sphère, dans laquelle il imagine que la terre se meut, est égale à celle que nous appelons le monde (2).

Dès lors, je dis que, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'Aristarque suppose être la sphère des étoiles fixes, on démontrerait, moyennant les données qui vont suivre, que, parmi les nombres, de l'expression desquels il a été question plus haut (3), certains surpasseraient le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui d'une pareille sphère.

Admettons d'abord que le périmètre de la terre ait une longueur de trois cents myriades de stades, et pas davantage. Il est vrai que d'autres, comme tu le sais, ont tenté de démontrer que cette longueur est de trente myriades de stades ; mais moi, allant plus loin, et regardant cette dimension de la terre admise par mes devanciers comme étant environ dix fois plus grande, je suppose que son périmètre est à peu près de trois cents myriades de stades, mais pas davantage (4).

1. Bien que les mots τῶν φαινομένων aient été rendus par « phaenomena », c'est-à-dire phénomènes, dans les traductions latines, nous avons préféré les traduire par « apparences ». Nous trouvons d'ailleurs cette même acception du mot grec dans ce passage assez intéressant de Plutarque relatif au système d'Aristarque : « Je le veux bien, lui dit Lucius en souriant, à condition que vous n'intentiez pas contre nous une action d'impiété, comme Cléanthe le Samien voulait que les Grecs en accusassent Aristarque, pour avoir, disait-il, troublé le repos de Vesta et des Dieux Lares protecteurs de l'univers, lorsqu'en raisonnant d'après les apparences, il supposait que le ciel était immobile, que la terre faisait une révolution oblique le long du Zodiaque, et, qu'outre cela, elle tournait sur son axe ». (PLUTARQUE, *Œuvres morales,* édition précitée de la traduction de Ricard. Voir vol. XIII : *De la face qui paraît sur la lune,* p. 27.)

2. Archimède, qui s'en tient ici à la définition du point donnée par Euclide (*Les Eléments,* liv. I, déf. 1), interprète la comparaison d'Aristarque d'une manière qui la lui fait rejeter. Or, Aristarque semble vouloir comparer l'orbite terrestre à un point en présence de l'immensité de la sphère des étoiles, de même qu'il considère la terre comme un point et comme le centre de l'orbite de la lune dans son ouvrage : *Des grandeurs et des distances du soleil et de la lune.* (Voir édition précitée de la traduction de Fortia d'Urban, déf. II, p. 5). D'ailleurs, plus tard, Ptolémée, dans son *Almageste,* considère aussi la terre comme un point et comme le centre de l'orbite du soleil. (Voir PTOLÉMÉE, édition critique d'Heiberg, I, 6, p. 20, ou édition précitée de la traduction française de l'abbé Halma.)

3. Les anciennes éditions portent : ἐν Ἀρχαῖς, mots que les versions latines rendent par : « in Principiis », c'est-à-dire : dans le livre des Principes. Nous avons suivi la leçon admise par Heiberg (*loc. cit.,* vol. II, p. 220) : ἐν ἀρχα, c'est-à-dire au commencement, ou plus haut. Archimède ne semble pas renvoyer ici à un ouvrage particulier, mais simplement à ce qu'il a dit plus haut de son système de numération communiqué à Zeuxippe.

4. D'après Aristote, la circonférence du globe terrestre avait 400.000 stades ; d'après Eratosthène, Hipparque et Strabon, 250.000 stades ; d'après Posidonius,

Digitized by Google

Je pose ensuite que le diamètre de la terre est plus grand que celui de la lune, et que le diamètre du soleil est plus grand que celui de la terre ; ce qui est conforme à ce que la plupart des astronomes antérieurs ont admis. Je suppose encore que le diamètre du soleil est trente fois plus grand que celui de la lune, mais pas davantage ; bien que, parmi les astronomes qui nous ont précédés, Eudoxe (1) ait déclaré qu'il était neuf fois aussi grand, Phidias, mon père (2), douze fois aussi grand, et qu'Aristarque ait essayé de démontrer que le diamètre du soleil était plus grand que dix-huit fois et plus petit que vingt fois le diamètre de la lune (3). Or, moi, je vais même au delà de ce dernier, et, afin que ma proposition soit démontrée sans contestation, je suppose que le diamètre du soleil est à peu près égal à trente fois le diamètre de la lune, mais pas davantage. Je suppose, en outre, que le diamètre du soleil est plus grand que le côté du chiliagone inscrit dans le plus grand cercle du monde (4). Je suppose cela, étant donné qu'Aristarque aurait trouvé que le soleil nous apparaît comme étant à peu près le sept cent vingtième du cercle du zodiaque (5), et que, moi-même, j'ai tâché de prendre l'angle qui embrasse le soleil, et a son sommet à l'œil, en le recherchant, au moyen d'instruments, de la manière suivante.

240.000 stades, et, d'après Ptolémée, 180.000 stades. Archimède donne son évaluation, non comme exacte, mais comme le maximum de ce que l'on peut supposer.

1. Eudoxe de Cnide (360 ans avant J.-C.), fils d'Eschine et disciple de Platon. Il enseigna, le premier en Grèce, la doctrine du mouvement des planètes, et fit une correction au cycle de Méton. Ses ouvrages sont perdus; mais ils ont servi de matériaux à Aratus pour la composition de son poème astronomique. Vitruve nous a conservé la description d'un cadran solaire construit par Eudoxe. (Voir VITRUVE, édition précitée de la traduction de Tardieu et Coussin, livre IX, chap. IV, p. 201.)

2. Φειδίας δὲ τοῦ ἁμοῦ πατρός, c'est-à-dire « Phidias, mon père ». Cette leçon est due à BLASS (*Jahrb. f. Philol.* CXXVII, 1883), qui corrigea de cette manière le texte altéré des anciennes éditions : Φειδίας δὲ τοῦ Ἀκούπατρος, rendu par « Phidias vero Acupatri filius » dans la version latine de Torelli, et par « Phidias, fils d'Acupatre » dans l'ancienne traduction de l'*Arénaire* de Peyrard. (Paris, 1808, p. 350). Un passage des *Œuvres* de S. GRÉGOIRE DE NAZIANZE dit d'ailleurs : « Phidias, astronome originaire de Syracuse était le père d'Archimède ».

3. ARISTARQUE : *Des grandeurs et des distances du soleil et de la lune,* traduction précitée de Fortia d'Urban, prop. X, p. 23. Aristarque démontre sa proposition en s'appuyant sur une proposition qui précède, énonçant que la distance à laquelle le soleil se trouve de la terre est plus grande que dix-huit fois, mais plus petite que vingt fois la distance à laquelle la lune se trouve de la terre.

4. C'est-à-dire plus grand que le côté du polygone régulier de mille côtés inscrit dans le grand cercle de la sphère ayant comme rayon la distance du centre de la terre au centre du soleil.

5. τοῦ κύκλου τῶν ζῳδίων, littéralement : « du cercle des petits animaux », c'est-à-dire le cercle des constellations principales en forme d'animaux auquel nous avons conservé le nom grec de cercle du zodiaque.

Digitized by Google

Toutefois, cet angle n'est pas aisé à prendre avec précision, parce que, ni la vue, ni les mains, ni les instruments qui sont nécessaires pour le prendre ne sont assez sûrs pour nous le faire connaître exactement. Mais, c'est une chose au sujet de laquelle il n'est guère opportun de discourir davantage pour le moment ; car elle a été souvent signalée. Au reste, pour démontrer ma proposition, il me suffit de prendre un angle qui ne soit pas plus grand que celui qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil ; puis de prendre un autre angle qui ne soit pas plus petit que celui qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil. Ayant donc établi une longue règle sur un socle vertical, je l'ai disposée en un lieu d'où l'on peut voir le soleil à son lever. Aussitôt après le lever du soleil, j'ai posé verticalement sur la règle un petit cylindre fait au tour. Lorsque le soleil fut à l'horizon, et que les yeux purent le regarder en face (1), après avoir dirigé la règle vers le soleil, j'ai mis l'œil à son extrémité, tandis que le cylindre posé entre le soleil et l'œil cachait entièrement le soleil. Dès lors, j'ai déplacé peu à peu le cylindre par rapport à l'œil jusqu'à ce que, le soleil commençant à se montrer légèrement de chaque côté du cylindre, ce dernier fût fixé en place. Si l'œil voyait réellement d'un point unique, en menant de l'extrémté de la règle, où l'œil est posé, des droites tangentes au cylindre, l'angle compris sous ces droites serait plus petit que l'angle qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil, parce que l'on verrait quelque peu du soleil de chaque côté du cylindre. Or, comme les yeux ne voient pas d'un point unique, mais sous une certaine dimension (2), j'ai choisi une dimension cylindrique telle qu'elle ne soit pas inférieure à celle de la vision. Cette dimension étant disposée à l'extrémité de la règle où se trouve l'œil, et, des droites étant menées, tangentes à la fois à cette dimension (3) et au cylindre, l'angle compris sous ces droites était donc plus petit que l'angle qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil.

Une dimension non inférieure à celle de la vision se trouve

1. L'astronome Delambre a fait remarquer que les anciens, dans leurs observations astronomiques, prenaient le soleil à l'horizon lorsqu'il est encore dépourvu d'un éclat qu'ils n'avaient pas les moyens d'atténuer pour l'œil.

2. ἐπεὶ αἱ ὄψιες οὐκ ἀφ' ἑνὸς σαμείου βλέποντι, ἀλλὰ ἀπό τινος μεγέθεος, littéralement : puisque les yeux ne voient pas d'un seul point, mais d'une certaine grandeur.

3. C'est-à-dire tangentes à la fois à la petite dimension cylindrique correspondant à la dimension visuelle et au premier cylindre curseur dont il a été question.

Digitized by Google

d'ailleurs de la manière suivante : on prend deux minces cylindres de même épaisseur, l'un blanc, mais l'autre pas ; on les place devant l'œil de telle sorte que le blanc en soit éloigné, et que celui qui n'est pas blanc soit rapproché de l'œil jusqu'à toucher le visage. Dès lors, si les cylindres choisis sont moins larges que la vision, le cylindre le plus rapproché est embrassé par l'œil qui aperçoit le blanc derrière le premier ; si les cylindres sont beaucoup moins larges, le blanc est vu en entier, et, s'ils ne sont pas beaucoup moins larges, on aperçoit une certaine partie du blanc de chaque côté de celui qui est le plus rapproché de l'œil. On prend d'ailleurs des cylindres d'une largeur convenable pour que l'un cache l'autre, sans cependant cacher un espace plus grand, et il est donc certain que la dimension en grosseur des cylindres qui se présentent ainsi n'est pas inférieure à celle de la vision.

L'angle plus petit que l'angle qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil est pris de la manière suivante : le cylindre est éloigné de l'œil, sur la règle, de façon à ce qu'il cache entièrement le soleil, et, des droites étant menées de l'extrémité de la règle où est placé l'œil, tangentiellement au cylindre, l'angle compris sous les droites menées ainsi n'est pas plus petit que l'angle qui embrasse le soleil en ayant son sommet à l'œil.

Les angles relevés de cette manière ayant été mesurés avec l'angle droit, l'angle qui aboutit au point de repère (1) a été trouvé plus petit que la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit, et le plus petit angle a été trouvé plus grand que la deux centième partie de l'angle droit. Il en résulte évidemment que l'angle qui embrasse le soleil, en ayant son sommet à l'œil, est aussi plus petit que la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit, et plus grand que la centième partie de l'angle droit.

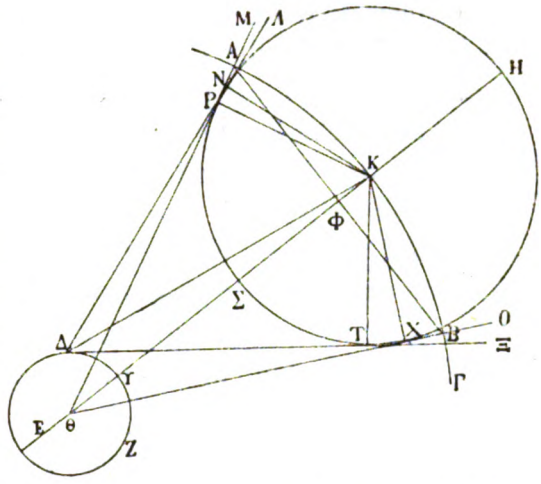
Ces choses étant établies, je vais démontrer que le diamètre du soleil est plus grand que le côté du chiliagone inscrit dans le plus grand cercle du monde.

En effet, imaginons un plan passant à la fois par le centre du

1. ἃ ἐν στίγῳ, forme abrégée pour : ἃ (γονία) ἐν (τῷ) στίγῳ, littéralement : l'angle qui est au point marqué, c'est-à-dire au point de repère. Ce point de repère a été déterminé plus haut; il est situé à l'extrémité de la règle où est placé l'œil, et l'angle ayant son sommet en ce point est donc plus grand, par opposition avec le plus petit, dont il sera question aussitôt, qui a son sommet à l'œil, nécessairement placé en deçà de l'extrémité de la règle, puisque le premier des deux petits cylindres, larges comme la pupille, a été fixé à l'extrémité même de la règle.

Digitized by Google

soleil, le centre de la terre, et par l'œil, au moment où le soleil est un peu au-dessus de l'horizon ; le plan ainsi mené coupe le monde suivant le cercle ABΓ, la terre suivant le cercle ΔEZ, et le soleil suivant le cercle ΣH. Soit Θ le centre de la terre, K celui du soleil, et soit Δ l'œil. Menons des tangentes au cercle ΣH : du point Δ les tangentes ΔΛ, ΔΞ, en N et en T ; du point Θ les tangentes ΘM, ΘO, en X et en P ; et que les droites ΘM, ΘO coupent le cercle ABΓ aux points A et B. Dès lors, puisque l'on a supposé le soleil au-dessus de l'horizon, la droite ΘK sera plus grande que la droite ΔK (1) ; donc, l'angle compris sous les droites ΔΛ, ΔΞ sera plus grand que l'angle compris sous les droites ΘM, ΘO (2). Or, l'angle compris sous les droites ΔΛ, ΔΞ est plus grand que la deux centième partie de l'angle droit, et plus petit que la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit ; car il est égal à l'angle qui embrasse le soleil et a son sommet à l'œil.



En conséquence, l'angle compris sous les droites ΘM, ΘO est plus petit que la cent soixante-quatrième partie de l'angle droit, et la droite AB est plus petite que celle qui sous-tend un segment de la circonférence du cercle ABΓ divisé en 656 parties (3). Mais, le rapport du périmètre du polygone, dont il a été question (4), au rayon du cercle ABΓ est plus petit que celui de 44 à 7, parce que le rapport du périmètre de tout polygone inscrit dans un cercle au rayon est plus petit que celui de 44 à 7. Tu sais, d'ailleurs, que j'ai démontré que

1. Si le centre du soleil était à l'horizon, la droite ΔK serait une tangente à la terre, l'angle ΘΔK serait droit, et l'on aurait déjà ΘK > ΔK. Or, le centre du soleil est supposé être au-dessus de l'horizon ; donc, l'angle ΘΔK est obtus, et, à fortiori, ΘK > ΔK.

2. Dans les triangles ΔNK, ΘPK, on a : NK = PK, ΔK < ΘK et les angles en N et P droits ; donc : angle ΘKP > angle ΔKN, d'où : angle complémentaire KΘP < angle complémentaire KΔN. Dès lors, considérant les doubles de ces angles, on a, comme le texte : angle ΛΔΞ > angle MΘO.

3. L'angle MΘO ayant comme mesure la 164me partie du quart de cercle, il aura comme mesure la 656me partie du cercle entier ABΓ.

4. C'est-à-dire le polygone régulier inscrit de mille côtés ou chiliagone.

Digitized by Google

la circonférence de tout cercle est plus grande que le triple de son diamètre augmenté de moins de la septième partie de ce diamètre (1), et que le périmètre du polygone inscrit est plus petit que cette circonférence (2). En conséquence, le rapport de la droite BA à la droite ΘK est plus petit que le rapport de 11 à 1148, et il s'ensuit que la droite BA est plus petite que la centième partie de la droite ΘK (3). Or, le diamètre du cercle ΣH est égal à la droite BA, parce que sa moitié, c'est-à-dire la droite ΦA, est égale à la droite KP ; car les droites ΘK, ΘA étant égales, des perpendiculaires opposées au même angle ont été menées de leurs extrémités (4). Donc, il est évident que le diamètre du cercle ΣH est plus petit que la centième partie de la droite ΘK. Or, le diamètre EΘY est plus petit que le diamètre du cercle ΣH, parce que le cercle ΔEZ est plus petit que le cercle ΣH (5) ; par conséquent, la somme des droites ΘY et KΣ est plus petite que la centième partie de la droite ΘK, et il en résulte que le rapport de la droite ΘK à la droite YΣ est plus petit que celui de 100 à 99 (6). De plus, puisque la droite ΘK n'est pas plus petite que la droite ΘP, et que la droite ΣY est plus petite que la droite ΔT, le rapport de la droite ΘP à la droite ΔT sera donc plus petit que celui de 100 à 99 (7). D'autre part,

1. Voir : *De la Mesure du Cercle*, prop. III.
2. Voir : *De la Sphère et du Cylindre*, liv. I, prop. I.
3. On a : $\frac{\text{périmètre polygone de 656 côtés}}{\text{rayon } \Theta K} < \frac{44}{7}$, d'où : $\frac{\text{côté polyg. de 656 côtés}}{\text{rayon } \Theta K} < \frac{44}{656 \times 7} = \frac{44}{4592} = \frac{11}{1148}$. Or, AB < côté polyg. de 656 côtés ; donc : $\frac{AB}{\Theta K} < \frac{11}{1148}$, ou : $\frac{AB}{\Theta K} < \frac{1}{100 + \frac{4}{11}}$, d'où, à fortiori : $\frac{AB}{\Theta K} < \frac{1}{100}$, d'où, comme le texte : $BA < \frac{1}{100}\Theta K$.
4. Les triangles rectangles KΘP, AΘΦ sont égaux ; car l'angle Θ est commun, les côtés ΘA, ΘK sont égaux et opposés aux seconds angles égaux en Φ et en P (EUCLIDE, liv. I, prop. 26) ; donc, ΦA = KP.
5. Seconde hypothèse émise au début.
6. Puisque ΦA = KP, on a : 2ΦA = 2KP, ou : AB = ΣH. Or, $AB < \frac{1}{100}\Theta K$; donc : $\Sigma H < \frac{1}{100}\Theta K$. Or, ΘY < KΣ ; donc : ΘY + KΣ < ΣH, d'où : $\Theta Y + K\Sigma < \frac{1}{100}\Theta K$. Or, ΘY + KΣ = ΘK − YΣ, donc : $\Theta K - Y\Sigma < \frac{1}{100}\Theta K$, d'où : $Y\Sigma > \frac{99}{100}\Theta K$, d'où, comme le texte : $\frac{\Theta K}{Y\Sigma} < \frac{100}{99}$.
7. Dans le triangle rectangle ΘPK, on a : ΘK > ΘP. Or, on a : YΣ < ΔT ; car si l'on menait ΔY et ΣT, les angles en Y et en Σ seraient obtus ; donc, la somme ΔT des côtés opposés à ces angles est plus grande que la somme YΣ des côtés adjacents à ces angles. Dès lors : $\frac{\Theta K}{Y\Sigma} > \frac{\Theta P}{\Delta T}$. Or, $\frac{\Theta K}{Y\Sigma} < \frac{100}{99}$; donc : $\frac{\Theta P}{\Delta T} < \frac{100}{99}$.

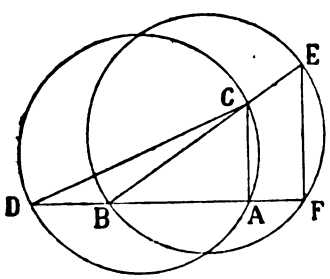
Digitized by Google

puisque, dans les triangles rectangles ΘKP, ΔKT, les côtés KP, KT sont égaux, que les côtés ΘP, ΔT sont inégaux, et que le côté ΘP est le plus grand (1), le rapport de l'angle compris sous les droites ΔT, ΔK à l'angle compris sous les droites ΘP, ΘK est plus grand que le rapport de la droite ΘK à la droite ΔK, mais plus petit que celui de la droite ΘP à la droite ΔT. En effet, si les côtés adjacents à l'angle droit de deux triangles rectangles sont, les uns égaux et les autres inégaux, le rapport du plus grand au plus petit des angles compris sous les côtés inégaux est plus grand que le rapport de la plus grande à la plus petite des droites opposées à l'angle droit, mais il est plus petit que le rapport de la plus grande à la plus petite des droites adjacentes à l'angle droit (2). Dès lors, le rapport de l'angle compris

1. On a vu plus haut (p. 359, note 1) que $\Theta K > \Delta K$.

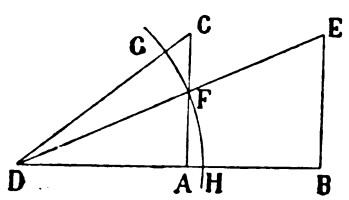
2. Archimède invoque ici subsidiairement une proposition qui se démontre aisément par la trigonométrie, mais dont nous ne connaissons pas la démonstration géométrique des anciens. Voici en traduction libre et résumée la démonstration donnée par Commandin dans le commentaire de sa traduction latine de l'*Arénaire*. (Cfr. ARCHIMEDIS *opera nonnulla a* Fed. COMMANDINO *nuper in lat. conversa et comment. illustrata*. Venetiis, 1558, in-fol. p. 62) :

Soient, en premier cas, les triangles rectangles CAD, CAB, ayant les côtés de l'angle droit, les uns égaux et les autres inégaux. Prolongeons BC; prenons BE = DC; décrivons sur les diamètres égaux deux cercles dont l'un passera par A et l'autre par F, pied de la perpendiculaire abaissée de E sur BA prolongé. Dans ces cercles égaux on a : $\frac{\text{angle EBF}}{\text{angle CDA}} = \frac{\text{arc EF}}{\text{arc CA}}$. Or, dans des cercles égaux, le rapport des arcs est plus grand que le rapport des cordes. (Cfr. PTOLÉMÉE, *Almageste*, édition précitée de la traduction de l'abbé Halma, I, p. 34). Donc : $\frac{\text{angle EBF}}{\text{angle CDA}} > \frac{EF}{CA}$. Or, $\frac{EF}{CA} = \frac{EB}{CB} = \frac{CD}{CB}$; donc : $\frac{\text{angle EBF}}{\text{angle CDA}} > \frac{CD}{CB}$; c'est-à-dire que le rapport du plus grand au plus petit des angles compris entre les côtés inégaux est plus grand que le rapport de la plus grande à la plus petite des droites opposées à l'angle droit. C. q. f. d.



Soient, en deuxième cas, les triangles rectangles DAC, DBE, ayant les côtés DA, DB adjacents à l'angle droit inégaux, et les côtés CA, EB égaux. Du centre D décrivons le cercle de rayon DF. On aura : $\frac{\text{secteur GDF}}{\text{secteur FDH}} < \frac{\text{secteur GDF}}{\text{triangle FDA}}$ d'où, à fortiori : $\frac{\text{secteur GDF}}{\text{secteur FDH}} < \frac{\text{triangle CDF}}{\text{triangle FDA}}$. Or, $\frac{\text{secteur GDF}}{\text{secteur FDH}} = \frac{\text{angle CDF}}{\text{angle FDA}}$, et $\frac{\text{triangle CDF}}{\text{triangle FDA}} = \frac{CF}{FA}$; donc : $\frac{\text{angle CDF}}{\text{angle FDA}} < \frac{CF}{FA}$, d'où :

$\frac{\text{angle CDF} + \text{angle FDA}}{\text{angle FDA}} < \frac{CF + FA}{FA}$, ou :



Digitized by Google

sous les droites ΔΛ, ΔΞ à l'angle compris sous les droites ΘO et ΘM est plus petit que le rapport de la droite ΘP à la droite ΔT, plus petit, lui-même, que le rapport de 100 à 99 ; en sorte que le rapport de l'angle compris sous les droites ΔΛ, ΔΞ à l'angle compris sous les droites ΘM, ΘO est aussi plus petit que celui de 100 à 99. De plus, puisque l'angle compris sous les droites ΔΛ et ΔΞ est plus grand que la deux centième partie de l'angle droit, l'angle compris sous les droites ΘM et ΘO sera plus grand que les quatre-vingt-dix-neuf vingt millièmes de l'angle droit ; en sorte que cet angle sera plus grand que la deux cent troisième partie de l'angle droit (1). Dès lors, la droite BA est plus grande que celle qui sous-tend un segment de la circonférence du cercle ABΓ divisée en huit cent douze parties. Or, le diamètre du soleil est égal à la droite AB ; donc, il est évident que le diamètre du soleil est plus grand que le côté du chiliagone (2).

Ces choses étant admises, on peut démontrer aussi que le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre, et que, de plus, le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades (3).

En effet, puisque l'on a supposé que le diamètre du soleil n'est pas plus grand que trente fois le diamètre de la lune, et que le diamètre de la terre est plus grand que le diamètre de la lune, il est évident que le diamètre du soleil est plus petit que trente fois le

---

$\frac{\text{angle CDA}}{\text{angle FDA}} < \frac{EB}{FA}$. Or, $\frac{EB}{FA} = \frac{DB}{DA}$; donc : $\frac{\text{angle CDA}}{\text{angle FDA}} < \frac{DB}{DA}$; c'est-à-dire que le rapport du plus grand au plus petit des angles compris entre les côtés inégaux est plus petit que le rapport de la plus grande à la plus petite des droites adjacentes à l'angle droit. C. q. f. d.

1. Appliquant la proposition précédente à la figure du texte, on a : $\frac{\text{angle } \Lambda\Delta\Xi}{\text{angle O}\Theta\text{M}} < \frac{\Theta P}{\Delta T}$. Or, on a (note avant-précédente) : $\frac{\Theta P}{\Delta T} < \frac{100}{99}$; donc : $\frac{\text{angle } \Lambda\Delta\Xi}{\text{angle O}\Theta\text{M}} < \frac{100}{99}$. Or, angle le plus petit ΛΔΞ sous lequel on a pris le soleil $< \frac{1}{200}$ d'angle droit; donc, par substitution, comme le texte : angle OΘM $> \frac{99}{20.000}$ d'angle droit, ou : angle OΘM $> \frac{1}{203}$ d'angle droit.

2. La relation de la note précédente entraîne : corde AB $> \frac{\text{cercle ABΓ}}{4 \times 203} = \frac{\text{cercle ABΓ}}{812}$, ou, à fortiori : AB $> \frac{\text{cercle ABΓ}}{1000}$. Or, on a vu que AB = ΣH = diamètre du soleil, et que $\frac{\text{cercle ABΓ}}{1000} >$ côté du chiliagone; donc : diamètre soleil > côté chiliagone.

3. ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες $\bar{\rho}$, c'est-à-dire cent myriades de myriades, ou dix milliards de stades.

Digitized by Google

diamètre de la terre. D'autre part, puisque l'on a démontré que le diamètre du soleil est plus grand que le côté du chiliagone inscrit dans le plus grand cercle du monde, il est clair que le périmètre du chiliagone en question est plus petit que mille fois le diamètre du soleil. Or, le diamètre du soleil est plus petit que trente fois le diamètre de la terre ; donc, le périmètre du chiliagone est plus petit que trente mille fois le diamètre de la terre (1). Dès lors, puisque le périmètre du chiliagone est plus petit que trente mille fois le diamètre de la terre, tandis qu'il est plus grand que trois fois le diamètre du monde ; car on t'a démontré que le diamètre de tout cercle est plus petit que le tiers du périmètre de tout polygone inscrit dans ce cercle ayant les côtés égaux et plus de six angles (2) ; il en résulte que le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre (3). Dès lors, il est démontré que le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre. D'autre part, il est évident, d'après ce qui va suivre, que le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades.

En effet, puisque l'on a supposé que le périmètre de la terre n'est pas plus grand que trois cents myriades de stades (4), et, comme le périmètre de la terre est plus grand que le triple de son diamètre, parce que la circonférence de tout cercle est plus grande que le triple de son diamètre (5), il est évident que le diamètre de la terre est plus petit que cent myriades de stades. Donc, puisque le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre, il est évident que le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades (6).

---

1. On a, par hypothèses du début : diam. soleil $\leqslant$ 30 diam. lune, et diam. terre $>$ diam. lune ; d'où : diam. sol. $<$ 30 diam. lune. Or, diam. sol. $> \frac{\text{périmètre chiliagone}}{1000}$; donc : périmètre chiliagone $<$ 1000 diam. soleil $<$ 30.000 diam. terre.

2. On a : rayon = côté hexagone inscrit, d'où : diamètre = 2 côtés hexagone = $\frac{1}{3}$ périmètre hexagone. Donc : diamètre $<$ $\frac{1}{3}$ périmètre polygone régulier de plus de 6 côtés. (EUCLIDE, liv. IV, prop. 15).

3. La relation de la note précédente donne donc : diam. du monde $<$ $\frac{1}{3}$ périmètre chiliagone, d'où, en présence de la relation de la note avant-précédente :
diam. du monde $<$ 10.000 diam. de la terre.

4. Voir hypothèse du début.

5. Voir : *De la Mesure du Cercle*, prop. III.

6. On a, par hypothèse : périmètre terre $<$ 3.000.000 stades. Or, périm. terre $>$ 3 diam. terre, donc : 3 diam. terre $<$ 3.000.000 stades, ou : diam. terre $<$ 1.000.000 stades, d'où, en présence de la relation de la note antépénultième : diam. du monde $<$ 10.000.000.000 stades.

Digitized by Google

Telles sont les choses que j'admets au sujet des grandeurs et des distances, et voici maintenant pour ce qui concerne le sable : Si l'on rassemble un volume de sable non supérieur à une graine de pavot, le nombre des grains de sable ne dépassera pas dix mille, tandis que le diamètre d'une graine de pavot n'est pas inférieur à un quarantième de doigt. Ces données ont d'ailleurs été relevées de la manière suivante : Des graines de pavot ayant été déposées en ligne droite sur une règle polie, de manière à se toucher l'une l'autre, vingt-cinq de ces graines ont occupé un espace supérieur à la longueur d'un doigt. Dès lors, j'adopte pour la graine de pavot un diamètre plus petit, que je suppose être environ le quarantième d'un doigt, mais pas moins ; car, pour ceci, je désire également démontrer ma proposition sans aucune contestation.

Voilà donc les choses que j'admets. Cependant, je crois utile de parler de la dénomination des nombres, afin que, s'il n'en était pas question dans le présent livre, on ne soit pas dérouté au sujet d'autres nombres encore qu'on ne trouvera pas dans le livre que j'ai écrit pour Zeuxippe.

On s'entend sur les noms qui nous ont été transmis pour les nombres allant jusqu'à dix mille, et l'on distingue suffisamment les myriades en énonçant leurs nombres jusqu'à dix mille myriades. Dès lors, appelons primes les nombres en question jusqu'à dix mille myriades ; appelons unité des nombres seconds dix mille myriades des nombres primes, et comptons les unités des nombres seconds, les dizaines de ces unités, les centaines, les milliers et les myriades jusqu'à dix mille myriades. Appelons de nouveau unité des nombres troisièmes dix mille myriades des nombres seconds, et comptons les unités des nombres troisièmes, les dizaines de ces unités, les centaines, les milliers et les myriades jusqu'à dix mille myriades. Appelons, de même, unité des nombres quatrièmes dix mille myriades des nombres troisièmes, unité des nombres cinquièmes dix mille myriades des nombres quatrièmes, et continuons à appeler de cette manière les nombres successifs jusqu'à dix mille myriades de dix mille myriades.

Bien que la connaissance de ces nombres soit suffisante pour la chose qui nous occupe, on peut aller encore plus loin. En effet, appelons nombres de la première période ceux que nous avons énoncés jusqu'ici, et appelons unité des nombres primes de la seconde période le dernier nombre de la première période. Appelons, de même, unité des nombres

Digitized by Google

seconds de la seconde période dix mille myriades des nombres primes de la seconde période ; appelons, de même, unité des nombres troisièmes de la seconde période le dernier des nombres précédents, et continuons à appeler de cette manière les nombres successifs de la seconde période jusqu'à dix mille myriades de nombres de dix mille myriades. Appelons encore, de même, unité des nombres primes de la troisième période le dernier nombre de la seconde période, et, ainsi de suite, les nombres successifs jusqu'à dix mille myriades de nombres de dix mille myriades de la dix mille myriadième période (1).

Les nombres étant dénommés de cette manière, si des nombres en proportion continue sont disposés par ordre à partir de l'unité, et, si le nombre qui suit l'unité est dix, les huit premiers, y compris l'unité, feront partie de ceux qui sont nommés nombres primes, les huit suivants feront partie de ceux qui sont nommés seconds, et les autres feront, de même, partie de ceux qui sont appelés du nom même du rang de leur octade de nombres à partir de la première octade de nombres. Il en résulte que le huitième nombre de la première octade de nombres est mille myriades, et que le premier nombre de la seconde octade, puisqu'il est décuple de celui qui le précède, sera dix mille myriades. Ce dernier nombre est d'ailleurs l'unité des nombres seconds, tandis que le huitième nombre de la seconde octade sera mille myriades des nombres seconds. Le premier nombre de la troisième octade sera de nouveau dix mille myriades des nombres seconds, parce qu'il est décuple de celui qui le précède. Ce dernier nombre est d'ailleurs

1. Le système de numération d'Archimède se schématise comme suit :

1re période :
- série des nombres primes, de 1 à 10.000 myriades, ou à 10^8.
- série des nombres seconds, de 10^8 à 10.000 myriades, ou à $10^{8\times2}=10^{16}$.
- série des nombres troisièmes, de 10^{16} à 10.000 myriades, ou à $10^{8\times3}=10^{24}$.
- série des nombres quatrièmes, de 10^{24} à 10.000 myriades, ou à $10^{8\times4}=10^{32}$.
- . . . . . .
- série des nombres 10^8ièmes, de $10^{8(10^8-1)}$ à 10.000 myriades, ou à $10^{8\times10^8}=A$.

2me période :
- série des nombres primes, de A à 10.000 myriades, ou à $A\times10^8$.
- série nombres seconds, de $A\times10^8$ à 10.000 myriades, ou à $A\times10^{8\times2}=A\times10^{16}$.
- série nombr. troisièmes, de $A\times10^{16}$ à 10.000 myriades, ou à $A\times10^{8\times3}=A\times10^{24}$.
- . . . . . .
- série nombr. 10^8ièmes, de $A\times10^{8(10^8-1)}$ à 10.000 myriad., ou à $A\times10^{8\times10^8}=A^2$.

3me période, séries des nombres primes, seconds, etc., de A^2 à A^3.
10^8ième période, séries de nombres primes, seconds, etc., de A^{10^8-1} à $A^{10^8}=10^{8\times10^{16}}$.

Le système s'étend donc jusqu'au nombre de dix mille myriades de la dix mille dix millième série de la dix mille dix millième période; nombre qui, dans notre système de numération, s'exprimerait par l'unité suivie de 80 millions de milliards de chiffres.

Digitized by Google

l'unité des nombres troisièmes, et il est évident que, pour une octade quelconque, il en sera comme nous venons de le dire (1).

Il est encore utile de connaître ce qui suit : Lorsque des nombres sont en proportion continue à partir de l'unité, et que certains de ces nombres sont multipliés entre eux, le produit sera, dans la même progression, éloigné du plus grand des nombres multipliés d'autant de nombres que le plus petit des nombres multipliés l'est de l'unité dans la progression, et éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés de l'unité (2).

Soient donc des nombres tels que A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I, K, Λ en proportion continue à partir de l'unité. Soit A l'unité ; multiplions Δ par Θ, et soit X leur produit. Prenons, dans la progression, Λ aussi éloigné de Θ que Δ est éloigné de l'unité. On doit démontrer que X est égal à Λ. En effet, puisque, parmi les nombres proportionnels, Δ est éloigné de A comme Λ est éloigné de Θ, le rapport de Δ à A est le même que celui de Λ à Θ. Mais, Δ est le produit de Δ par A ; donc, Λ est le produit de Θ par Δ, et, dès lors, K est égal à X (3). Il est donc évident que le produit fait partie de la progression, et qu'il est aussi éloigné du plus grand des nombres multipliés entre eux que le plus petit est éloigné de l'unité. De plus, il est clair que ce produit est éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont Δ et Θ sont éloignés de l'unité ; car A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ sont les nombres dont Θ est distancé à partir de l'unité, et I, K, Λ sont, à un nombre près, ceux dont Δ est distancé à partir de l'unité. Or, en ajoutant Θ, on a la somme de ces nombres.

---

1. On a donc la progression géométrique : 1, 10, 10^2, 10^3,... 10^n, partagée en séries de 8 termes, telles que la série 1, 10, 10^2, 10^3... 10^7, qui est l'octade des nombres primes, la série 10^8, 10^9,... 10^{15}, qui est l'octade des nombres seconds, et ainsi de suite ; séries d'octades qui sont, en outre, de la 1^{re} période. Donc, le 8^{me} terme de la 1^{re} octade est $10^7 = 10.000.000$, ou mille myriades ; le premier terme de la seconde octade est $10^8 = 10 \times 10^7$, ou dix mille myriades, et ainsi de suite.

2. Algébriquement, considérons la progression par quotient q à partir de l'unité : 1, q, q^2... q^{n-1}, q^n, q^{n+1}. Le produit q^{2n} de deux termes quelconques q^{n-1} et q^{n+1} fait partie de la progression ; il est situé à la distance de n nombres à partir du plus grand facteur q^{n+1}, de même que le plus petit facteur q^{n-1} est situé à la distance de n nombres à partir de l'unité. Observant que q^{2n} est à la distance de $2n+1$ nombres à partir de l'unité, on aura : $2n+1 = n+(n+2) - 1 =$ somme $- 1$ des nombres dont q^{n-1} et q^{n+1} sont éloignés à partir de l'unité.

3. On a : $\frac{\Delta}{A} = \frac{\Lambda}{\Theta}$, d'où : $\Lambda \times A = \Delta \times \Theta$. Or, A est l'unité ; donc : $\Delta = \Delta \times A$, d'où : $\Lambda \times A = \Delta \times A \times \Theta$, ou : $\Lambda = \Delta \times \Theta$. Or, $\Delta \times \Theta = X$; donc : $\Lambda = X$.

Digitized by Google

De toutes les choses qui précèdent, les unes étant admises et les autres étant démontrées, je vais démontrer ma proposition.

En effet, puisque l'on a admis que le diamètre d'une graine de pavot n'est pas plus petit que le quarantième d'un doigt, il est évident qu'une sphère du diamètre d'un doigt n'est pas plus grande que pour contenir soixante-quatre mille graines de pavot ; car c'est de ce dernier nombre qu'elle est un multiple de la sphère du diamètre d'un quarantième de doigt ; d'autant plus que l'on t'a démontré que les sphères sont entre elles dans le rapport du cube des diamètres (1). Or, comme on a supposé, en outre, que le nombre des grains de sable contenus dans le volume d'une graine de pavot n'est pas supérieur à dix mille, il est évident que, si une sphère du diamètre d'un doigt est remplie de sable, le nombre des grains de sable ne sera pas supérieur à dix mille fois soixante-quatre mille (2). Or, ce nombre vaut six unités des nombres seconds plus quatre mille myriades des nombres primes ; il est donc inférieur à dix unités des nombres seconds (3).

D'autre part, une sphère ayant un diamètre de cent doigts est cent myriades de fois multiple de la sphère ayant un diamètre d'un doigt, puisque les sphères sont entre elles dans le rapport du cube des diamètres (4). En conséquence, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de cent doigts, il est évident que le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant dix unités des nombres seconds par cent myriades (5). Et puisque dix unités des nombres seconds sont le dixième nombre, à partir de l'unité, dans une progression dont les nombres sont en rapport décuple, et que cent myriades sont le septième nombre, à

1. Τριπλάσιον λόγον, littéralement : en raison triplée, c'est-à-dire dans le rapport du cube.

Puisque les sphères sont entre elles comme les cubes des diamètres (EUCLIDE, livre XII, prop. 18), on aura :

Volume sphère de diam. 1 doigt $= 40^3 \times$ volume graine de pavot de diam. $\frac{1}{40}$ de doigt $= 64.000$ graines de pavot.

2. ἡ μυριάκις τὰ ἑξακισμύρια καὶ τετρακισχίλια, littéralement : une myriade de fois six myriades plus quatre mille, ou $10.000[60.000 + 4000] = 640.000.000$.

3. En effet, $640.000.000 = 6 \times 10^8 + 4000$ myriades $= 6$ unités des nombres seconds $+ 4000$ myriades d'unités des nombres primes $< 10 \times 10^8$, c'est-à-dire, à fortiori, $<$ 10 unités des nombres seconds.

4. Vol. sphère diam. 100 doigts $= 100^3$ vol. sphère de diam. 1 doigt $= 100 \times 10.000$ vol. sphère de diam. 1 doigt $=$ (comme le texte) 100 myriades de fois vol. sphère de diam. 1 doigt.

5. Sphère de diam. 1 doigt contient $< 10 \times 10^8$ grains de sable, d'où : sphère de diam. 100 doigts en contient $< 100 \times 10.000 \times 10 \times 10^8$, ou $< 10^{15}$.

Digitized by Google

partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre formé en multipliant sera le seizième, à partir de l'unité, dans la même progression ; car il a été démontré que ce produit est éloigné, à partir de l'unité, de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés à partir de l'unité. Or, de ces seize nombres, les huit premiers, y compris l'unité, font partie de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, et le dernier d'entre eux est mille myriades des nombres seconds. Il est donc clair que la quantité de grains de sable, dont le volume vaut une sphère du diamètre de cent doigts, est plus petite que mille myriades des nombres seconds (1).

Derechef, une sphère du diamètre de dix mille doigts est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de cent doigts (2). En conséquence, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de dix mille doigts, il est évident que le nombre de grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant mille myriades des nombres seconds par cent myriades (3). Et puisque mille myriades des nombres seconds sont le seizième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre formé en multipliant sera le vingt-deuxième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces vingt-deux nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés

1. Reprenons le texte à partir de celui qui a été considéré dans la note précédente, et l'on aura, en littérature chiffrée : 10^8 = unité des nombres seconds, et on a vu que : nombre grains de sable de sphère de diam. 1000 doigts $< 100 \times 10.000 \times 10^8$, ou < 100 myriades $\times 10$ unités des nombres seconds. Les deux termes de ce dernier produit, multiples de 10, sont les termes d'une progression dont le premier terme est 1 et le quotient 10. Donc, le facteur 10 unités des nombres seconds sera le terme de rang 10, et le facteur 100 myriades, ou 10^6, sera le terme de rang 7 à partir de l'unité. Or, en vertu du théorème démontré plus haut, le produit de ces deux facteurs, ou 10^{15}, occupera le rang $10+7-1=16$. Les 8 premiers termes, y compris l'unité, sont nombres primes dans la progression, les 8 termes suivants sont nombres seconds. Donc, le nombre de grains de sable exprimé par le dernier terme de l'octade des nombres seconds sera $< 10^7 = 1000 \times 10.000 = 1000$ myriades des nombres seconds.

2. Vol. sphère de diam. 10.000 doigts $= 100^3$ vol. sphère de diam. 100 doigts $=$ 100×10.000 vol. sphère de diam. 100 doigts = (comme le texte) 100 myriades de sphères de diam. 100 doigts.

3. Sphère de diam. 100 doigts contient $<$ 1000 myriades des nombres seconds de grains de sable, ou $< 10^{15}$ unités des nombres primes, d'où : sphère de diam. 10.000 doigts contient $< 10^6 \times 10^{15}$, ou $< 10^{21}$ unités des nombres primes de grains de sable.

Digitized by Google

seconds, les six restants, de ceux qui ont été appelés troisièmes, et le dernier d'entre eux est dix myriades des nombres troisièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable dont le volume égale une sphère du diamètre de dix mille doigts est plus petite que dix myriades des nombres troisièmes (1). Et comme une sphère ayant un diamètre d'un stade est plus petite qu'une sphère ayant un diamètre de dix mille doigts (2), il est encore évident que la quantité de sable dont le volume égale une sphère du diamètre d'un stade est plus petite que dix myriades des nombres troisièmes.

Derechef, une sphère du diamètre de cent stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre d'un stade (3). Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de cent stades, il est évident que le nombre de grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant dix myriades des nombres troisièmes par cent myriades (4). Et puisque dix myriades des nombres troisièmes sont le vingt-deuxième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre formé en multipliant sera le vingt-huitième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces vingt-huit nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les huit subséquents, de ceux qui ont été appelés troisièmes, enfin, les quatre restants, de ceux qui ont été appelés quatrièmes, et le dernier d'entre eux est mille unités des nombres quatrièmes. Il est donc clair que la quantité de

1. On a obtenu: nombre de grains de sable dans sphère de diam. 10.000 doigts $< 10^{6} \times 10^{15}$, ou $< 10^{21}$ unités des nombres primes. Or, des deux facteurs de ce produit, 10^{6} occupe le rang 7 dans la progression, le facteur 10^{15} occupe le rang 16, et le produit occupe le rang $7+16-1=22$. Or, le 22^{me} terme est le 6^{me} de la 3^{me} octade; donc, 10^{21} vaut 10^{5} unités de l'octade des nombres troisièmes, ou 10×10.000, ou, comme le texte : 10 myriades des nombres troisièmes.

2. D'après la *Métrique* de HÉRON (Cfr. Dom BERNARD DE MONTFAUCON, *Analecta graeca*, Paris, 1688, in-4°, *Fragments de Héron*, p. 308), le stade valait 600 pieds philétères, ou bien 720 pieds italiques. D'autre part, le pied philétère valait 4 palmes ou 16 doigts, tandis que le pied italique valait 13 doigts. Donc, le stade valait 9600 doigts, ou bien 9360 doigts, d'où, comme le texte : sphère de diam. 1 stade $<$ sphère de diamètre 10.000 doigts.

3. On a : vol. sphère de diam. 100 stades $= 100^{3}$ vol. sphère de diam. 1 stade $=$ 100×10.000, ou, comme le texte : 100 myriades sphères de diam. 1 stade.

4. Sphère de diam. 10.000 doigts, ou de 1 stade, contient $<$ 10 myriades des nombres troisièmes de grains de sable, ou $< 10^{21}$ unités des nombres primes; donc, la sphère de diam. 100 stades en contiendra $< 10^{21} \times 10^{6}$, ou 10^{27}.

Digitized by Google

grains de sable, dont le volume égale une sphère du diamètre de cent stades, est plus petite que mille unités des nombres quatrièmes (1).

Derechef, une sphère du diamètre de dix mille stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de cent stades (2). Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de dix mille stades, il est évident que le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant mille unités des nombres quatrièmes par cent myriades (3). Et puisque mille unités des nombres quatrièmes sont le vingt-huitième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre formé en multipliant sera le trente-quatrième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces trente-quatre nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés troisièmes, les huit subséquents, de ceux qui ont été appelés quatrièmes, enfin, les deux restants seront de ceux qui ont été appelés cinquièmes, et le dernier d'entre eux est dix unités des nombres cinquièmes. Il est donc évident que la quantité de grains de sable dont le volume égale une sphère du diamètre de dix mille stades est plus petite que dix unités des nombres cinquièmes (4).

Derechef, une sphère du diamètre de cent myriades de stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de dix mille stades (5). Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande

1. Considérant le produit $10^{21} \times 10^6 = 10^{27}$ de la note précédente, des deux facteurs de ce produit, 10^{21} est le 22^{me} terme de la progression, et 10^6 en est le 7^{me} terme, tandis que le produit occupe le rang $22+7-1=28$. Or, le 28^{me} terme est le 4^{me} terme de la 4^{me} octade; donc, 10^{27} vaut 10^3 unités de l'octade des nombres quatrièmes, ou, comme le texte : mille unités des nombres quatrièmes.

2. Vol. sphère de diam. 10.000 stades $= 100^3$ vol. sphère de diam. 100 stades $=$ 100 x 10.000, ou, comme le texte : 100 myriades sphères de diam. 100 stades.

3. Le sable de la sphère de 100 stades de diamètre est représenté par < 1000 unités des nombres quatrièmes, ou par $< 10^{27}$ unités des nombres primes; donc, le sable de la sphère de 10.000 stades de diamètre sera représenté par < 100 myriades de fois plus, ou par $< 10^{27} \times 10^8 = 10^{35}$.

4. Des deux facteurs du produit obtenu dans la note précédente, 10^{27} est le 28^{me} terme de la progression, et 10^8 en est le 7^{me}. Le produit occupera le rang $28+7-1=34$. Or, le 34^{me} terme est le 2^{me} terme de la 5^{me} octade; donc, 10^{33} vaut 10 unités des nombres cinquièmes.

5. Vol. sphère de diam. 100 myriades de stades $= 100^3$ vol. sphère de diam. 10.000 stades $=$ 100 x 10.000, ou, comme le texte : 100 myriades sphères de diam. 10.000 stades.

Digitized by Google

qu'une sphère du diamètre de cent myriades de stades, il est évident que le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant dix unités des nombres cinquièmes par cent myriades(1). Et puisque dix unités des nombres cinquièmes sont le trente-quatrième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre qui a été formé en multipliant sera le quarantième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces quarante nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés troisièmes, les huit qui suivent les troisièmes, de ceux qui ont été appelés quatrièmes, enfin, les huit subséquents, de ceux qui ont été appelés cinquièmes, et le dernier d'entre eux est mille myriades des nombres cinquièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable, dont le volume égale une sphère du diamètre de cent myriades de stades, est plus petite que mille myriades des nombres cinquièmes (2).

D'autre part, une sphère du diamètre de dix mille myriades de stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de cent myriades de stades (3). Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de dix mille myriades de stades, il est clair que le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant mille myriades des nombres cinquièmes par cent myriades (4). Et puisque mille myriades des nombres cinquièmes sont le quarantième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à

1. Le sable de la sphère de diam. 10.000 stades est représenté par < 10 unités des nombres cinquièmes, ou 10^{33} unités des nombres primes; donc, le sable d'une sphère de diam. 100 myriades de stades sera représenté par un nombre plus petit que cent myriades de fois plus, soit par $< 10^{33} \times 10^{6} = 10^{39}$.

2. Des deux facteurs du produit obtenu dans la note précédente, 10^{33} sera le 34^{me} terme de la progression, 10^{6} en sera le 7^{me}, et le produit occupera le rang $34 + 7 - 1 = 40$. Or, le 40^{me} terme est évidemment le dernier terme de la 5^{me} octade; donc, 10^{39} vaut 10^{7} unités des nombres cinquièmes, ou 1000×10.000, ou, comme le texte : mille myriades des nombres cinquièmes.

3. Vol. sphère diam. 10.000 myriades de stades $= 100^{3}$ vol. sphère de diam. 100 myriades de stades $= 100 \times 10.000$, ou, comme le texte : 100 myriades de fois vol. sphère de diam. 100 myriades de stades.

4. Le sable de la sphère de diam. 100 myriades de stades est représenté par $<$ 1000 myriades des nombres primes, ou 10^{39} unités des nombres primes ; donc, le sable de la sphère du diamètre de 10.000 myriades de stades est représenté par 100 myriades de fois plus, soit par $< 10^{39} \times 10^{6} = 10^{45}$.

Digitized by Google

partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre qui a été formé en multipliant sera le quarante-sixième à partir de l'unité. Or, de ces quarante-six nombres, les huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, les huit suivants, de ceux qui ont été appelés seconds, les huit autres suivants, de ceux qui ont été appelés troisièmes, les huit autres qui suivent les troisièmes, de ceux qui ont été appelés quatrièmes, les huit qui suivent les quatrièmes, de ceux qui ont été appelés cinquièmes, enfin, les six restants sont de ceux qui ont été appelés sixièmes, et le dernier d'entre eux est dix myriades des nombres sixièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable dont le volume égale une sphère du diamètre de dix mille myriades de stades est plus petite que dix myriades des nombres sixièmes ([1]).

Une sphère du diamètre de cent myriades de myriades ([2]) de stades est cent myriades de fois multiple d'une sphère du diamètre de dix mille myriades de stades ([3]). Donc, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'une sphère du diamètre de cent myriades de myriades de stades, il est clair que le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant dix myriades des nombres sixièmes par cent myriades ([4]). Et puisque dix myriades des nombres sixièmes sont le quarante-sixième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que cent myriades sont le septième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre qui a été formé en multipliant sera le cinquante-deuxième, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, de ces cinquante-deux nombres, les quarante-huit premiers, y compris l'unité, sont de ceux qui ont été appelés primes, seconds, troisièmes, quatrièmes, cinquièmes et sixièmes;

---

1. Des deux facteurs du produit obtenu dans la note précédente, 10^{39} sera le 40^{me} terme de la progression, et 10^{6} en sera le 7^{me}. Le produit 10^{45} occupera le rang $40+7-1=46$. Or, le 46^{me} terme est le 6^{me} terme de la 6^{me} octade; donc, 10^{45} vaut 10^{5} unités des nombres sixièmes, ou 10×10.000, ou, comme le texte: dix myriades des nombres sixièmes.

2. μυριάκις μυριάδων $\overline{\rho}$, c'est-à-dire 100 myriades de myriades $= 100 \times 10.000 \times 10.000 = 10.000.000.000$.

3. Vol. sphère diam. 100 myriades de myriades de stades $= 100^{3}$ vol. sphère de diam. 10.000 myriades de stades $= 100 \times 10.000 =$ (comme le texte) 100 myriades de fois vol. sphère de diam. 10.000 myriades de stades.

4. Le sable de la sphère du diamètre 10.000 myriades de stades est représenté par 10 myriades des nombres sixièmes, ou 10^{45} unités des nombres primes; donc, le sable de la sphère du diamètre de cent myriades de myriades de stades est représenté par 100 myriades de fois plus, ou par $< 10^{45} \times 10^{6} = 10^{51}$.

Digitized by Google

tandis que les quatre restants sont de ceux qui ont été appelés septièmes, et le dernier d'entre eux est mille unités des nombres septièmes. Il est donc clair que la quantité de grains de sable, dont le volume égale une sphère du diamètre de cent myriades de myriades de stades, est plus petite que mille unités des nombres septièmes (1). Or, on a démontré que le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades ; donc, il est évident aussi qu'une quantité de grains de sable, dont le volume égale celui du monde, est plus petite que mille unités des nombres septièmes. Dès lors, il est démontré que la quantité de grains de sable, dont le volume égale le monde, tel que se le représentent beaucoup d'astronomes, est plus petite que mille unités des nombres septièmes (2).

Au reste, je vais encore démontrer que la quantité de grains de sable, dont le volume égalerait une sphère telle qu'Aristarque suppose être la sphère des étoiles fixes, est plus petite que mille myriades des nombres huitièmes.

En effet, puisque l'on a supposé que le rapport de la terre au monde, tel que je l'ai défini, est le même que celui du dit monde à la sphère des étoiles fixes, telle que la suppose Aristarque, les diamètres de ces sphères auront entre eux le même rapport. D'autre part, on a démontré que le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre ; donc, il est évident aussi que le diamètre de la sphère des étoiles fixes est plus petit que dix mille fois le diamètre du monde. Or, comme les sphères sont entre elles dans le rapport du cube de leurs diamètres, il est clair que la sphère des étoiles fixes, imaginée par Aristarque, est plus petite que dix mille myriades de myriades de fois la sphère du monde (3). Or, on a démontré qu'une

1. Des deux facteurs du produit obtenu dans la note précédente, 10^{45} sera le 46^{me} terme de la progression, et 10^{6} en sera le 7^{me}. Le produit 10^{51} occupera le rang $46+7-1=52$. Or, le 52^{me} terme est le 4^{me} terme de la 7^{me} octade ; donc, 10^{51} vaut 10^{3} unités des nombres septièmes ou, comme le texte : 1000 unités des nombres septièmes.

2. La sphère considérée en dernier lieu ayant un diamètre plus grand que celui que l'on a démontré plus haut être celui de la sphère du monde solaire, le sable contenu dans la sphère du monde solaire sera donc $< 10^{3}$ unités des nombres septièmes, ou $< 10^{51}$.

3. On a, par hypothèse : $\frac{\text{sphère de la terre}}{\text{sphère du monde solaire}} = \frac{\text{sphère du monde solaire}}{\text{sphère du monde stellaire}}$, d'où, après substitution du cube des diamètres :

$$\frac{\text{diam. sphère de la terre}}{\text{diam. sphère du monde solaire}} = \frac{\text{diam. sphère du monde solaire}}{\text{diam. sphère du monde stellaire}}.$$

Or, on a démontré : diam. sphère du monde solaire $<$ 10.000 diam. sphère de la

Digitized by Google

quantité de grains de sable, dont le volume égale le monde, est plus petite que mille unités des nombres septièmes ; donc, il est évident que, si l'on composait une sphère de sable aussi grande que la sphère des étoiles fixes imaginée par Aristarque, le nombre des grains de sable serait plus petit que le nombre formé en multipliant ces mille unités par dix mille myriades de myriades (1). Et puisque mille unités des nombres septièmes sont le cinquante-deuxième nombre, à partir de l'unité, dans la progression, et que dix mille myriades de myriades sont le treizième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression, il est évident que le nombre qui a été formé en multipliant sera le soixante-quatrième nombre, à partir de l'unité, dans la même progression. Or, ce nombre est le huitième des nombres huitièmes, ou mille myriades des nombres huitièmes ; par conséquent, il est clair que la quantité des grains de sable dont le volume égalerait la sphère des étoiles fixes, imaginée par Aristarque, est inférieure à mille myriades des nombres huitièmes (2).

Je conçois, roi Gélon, que ces choses paraîtront incroyables à la plupart de ceux auxquels les mathématiques ne sont point familières ; mais ceux qui y sont versés et qui ont médité sur les distances et les grandeurs de la terre, du soleil et du monde entier, les admettront après ma démonstration. Et c'est pourquoi j'ai cru qu'il n'était pas hors de propos que, toi aussi, tu en prennes connaissance.

---

terre ; donc : diam. sphère du monde stellaire $<$ 10.000 diam. sphère du monde solaire, d'où : sphère du monde stellaire $<$ 10.000^3 sphères du monde solaire, ou $<$ 10.000 × 10.000 × 10.000, ou, comme le texte : $<$ 10.000 myriades de myriades sphères du monde solaire.

1. Le sable de la sphère de 100 myriades de myriades de stades, ou sphère du monde solaire, est représenté par 1000 unités des nombres septièmes, ou 10^{51} unités des nombres primes ; donc, le sable de la sphère stellaire sera représenté par 10.000 myriades de myriades de fois plus, soit par $< 10^{51} \times 10^{12} = 10^{63}$.

2. Des deux facteurs du produit obtenu dans la note précédente, 10^{51} sera le 52^{me} terme de la progression, et 10^{12} en sera le 13^{me}. Le produit 10^{63} occupera donc le rang $52 + 13 - 1 = 64$. Or, le 64^{me} terme est bien le 8^{me} terme de la 8^{me} série de 8 termes de la progression ; donc, $10^{63} = 10^7$ unités des nombres huitièmes = 1000 × 10.000 ou, comme le texte : mille myriades des nombres huitièmes.

Ainsi donc, Archimède démontre, sans effectuer aucun calcul, par déductions successives dans le système de numération qu'il imagine, que le nombre des grains de sable qui rempliraient la sphère étoilée ne dépasserait pas le nombre 10^{63}, c'est-à-dire l'unité suivie de 63 zéros, ou le vigintillion.

Digitized by Google

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

Digitized by Google

Digitized by Google

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

Archimède à Dosithée, prospérité !

Lorsque j'appris que Conon, dont l'amitié à mon égard ne fut jamais en défaut, était mort ; que tu avais été lié avec Conon, et que tu étais habile en géométrie, je fus affligé de la mort d'un homme qui était à la fois un ami et un mathématicien distingué, et je m'occupai de te faire parvenir par écrit, comme j'avais pensé d'en écrire à Conon, un théorème de géométrie qui n'avait pas encore été examiné, et qu'après l'avoir étudié maintenant moi-même, j'ai trouvé d'abord par la mécanique, puis démontré par la géométrie.

Parmi ceux qui, d'ailleurs, se sont occupés de géométrie avant nous, d'aucuns se sont efforcés d'exposer par écrit qu'il était possible de trouver une aire rectiligne équivalente à celle d'un cercle donné ou d'un segment de cercle donné (1) ; puis ils ont essayé de carrer l'aire, délimitée par une section de cône entier (2) et une droite, en assumant des lemmes inadmissibles ; motif pour lequel beaucoup ont reconnu que ces choses n'avaient pas été découvertes par eux. Mais aucun de mes prédécesseurs n'a encore, que je sache, cherché la quadrature d'un segment délimité par une droite et une parabole, chose que nous avons trouvée maintenant. Nous démontrons, en effet, que

1. Allusion aux premières recherches de la quadrature exacte du cercle et notamment à celles d'Hippocrate de Chio qui, combinant la constance du rapport du cercle au carré du rayon avec la proposition de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse, découvrit la proposition sur les lunules, célèbre dans l'antiquité.

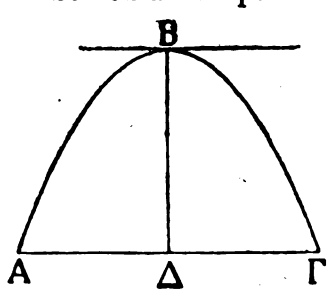
2. L'expression ὑπό τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς, littéralement « par une section de cône entier », est incompréhensible, et a probablement été altérée par un copiste. Il s'agit sans doute de l'aire comprise entre un arc d'ellipse et une droite, c'est-à-dire de l'aire d'un segment elliptique.

Digitized by Google

tout segment délimité par une droite et par une parabole dépasse d'un tiers le triangle ayant même base et même hauteur que le segment, en admettant d'ailleurs pour la démonstration ce lemme : que l'excès dont la plus grande de deux aires inégales dépasse la plus petite peut être ajouté à lui-même jusqu'à dépasser toute aire finie donnée. Les géomètres qui nous ont précédé ont également fait usage de ce lemme; car ils s'en sont servis pour démontrer que le rapport de cercles entre eux est le même que celui des carrés de leurs diamètres, et que le rapport de sphères entre elles est le même que celui des cubes de leurs diamètres. De plus, ils ont assumé un lemme semblable pour démontrer que toute pyramide est le tiers du prisme ayant même base et même hauteur que cette pyramide, et que tout cône est le tiers du cylindre ayant même base et même hauteur que ce cône. Il se fait cependant que les divers théorèmes que nous venons de mentionner ne sont pas considérés comme moins vrais que ceux qui ont été démontrés sans ce lemme, et il me suffira que ceux que je publie maintenant soient traités avec ce même degré de certitude. Je t'envoie donc les démonstrations que j'en ai écrites, d'abord telles que je les ai examinées par la mécanique, puis telles que je les ai établies par la géométrie. Elles sont d'ailleurs précédées de propositions élémentaires sur les sections coniques qui seront utiles à la démonstration. Sois en bonne santé.

PROPOSITION I.

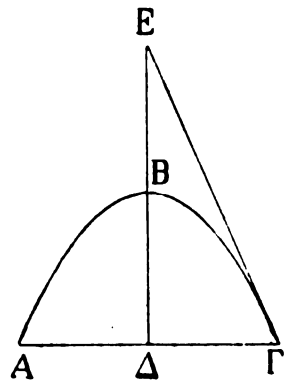
Si l'on a une parabole, sur laquelle se trouve l'arc ABΓ, une droite BΔ parallèle au diamètre, ou diamètre elle-même (1), une droite AΓ parallèle à la tangente à la parabole en B, la droite AΔ sera égale à la droite ΔΓ, et, si la droite AΔ est égale à la droite ΔΓ, la droite AΓ et la tangente à la parabole en B seront parallèles (2).



1. C'est-à-dire si BΔ est une parallèle à l'axe de la parabole, ou l'axe même.
2. Archimède ne donne pas la démonstration de cette proposition, probablement donnée déjà par ses prédécesseurs; mais on en trouve plus tard, une démonstration dans le traité *Des Coniques* d'Apollonius (livre I, prop. XLVI).

Digitized by Google

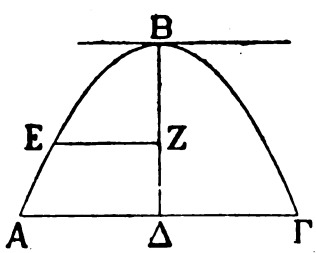
PROPOSITION II.



Si ABΓ est une parabole, la droite BΔ une parallèle au diamètre, ou diamètre elle-même, la droite AΔΓ une parallèle à la tangente à la parabole au point B, et si la droite EΓ est une tangente à la parabole au point Γ, les droites BΔ, BE seront égales (1).

PROPOSITION III.

Si ABΓ est une parabole, la droite BΔ une parallèle au diamètre, ou le diamètre même, et, si des droites AΔ, EZ sont menées parallèlement à la tangente à la parabole au point B, le carré de la droite AΔ sera au carré de la droite EZ comme la droite BΔ est à la droite BZ (2). Ces propositions sont d'ailleurs démontrées dans les *Eléments* relatifs aux sections coniques (3).



PROPOSITION IV.

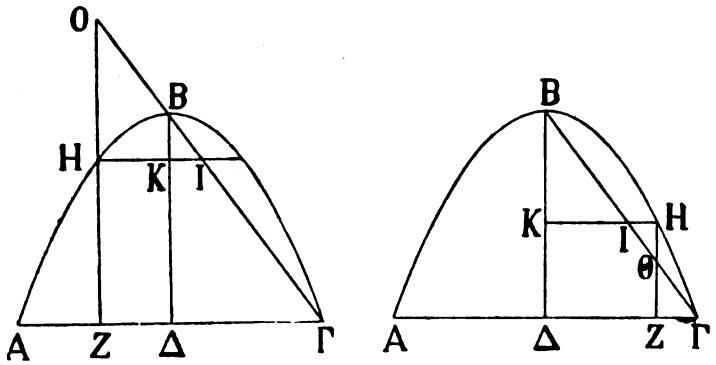
Soit ABΓ un segment délimité par une droite et par une parabole ; menons, du milieu de la droite AΓ, la droite BΔ parallèle au diamètre, c'est-à-dire étant elle-même un diamètre, et prolongeons la droite de jonction BΓ. Dès lors, si une autre droite ZΘ est menée parallèlement à la droite BΔ, coupant la droite menée par les points B, Γ, le rapport de ZΘ à ΘH sera le même que celui de ΔA à ΔZ.

En effet, par le point H menons la droite KH parallèle à la droite AΓ. Dès lors, le carré de ΔΓ est au carré de KH comme la

1. Voir APOLLONIUS, *Les Coniques*, livre I, prop. XXV.
2. *Ibidem*, livre I, proposition XX.
3. C'est-à-dire dans les ouvrages élémentaires qui auraient été écrits par Aristée et Euclide, lesquels ne nous sont pas parvenus.

Digitized by Google

longueur BΔ est à la longueur BK ; car cela a été démontré (1). Par conséquent, le carré de BΓ sera au carré de BΘ comme la longueur BΓ



est à la longueur BI ; car les droites ΔZ, KH sont égales (2). Dès lors, les droites BΓ, BΘ, BI sont proportionnelles ; en sorte que le rapport de BΓ à BΘ est le même que celui de ΓΘ à ΘI. En conséquence, ΘZ est à ΘH comme ΓΔ est à ΔZ. Or, ΔA est égal à ΔΓ ; donc il est évident que le rapport de ΔA à ΔZ est le même que celui de ZΘ à ΘH (3).

PROPOSITION V.

Soit ABΓ un segment délimité par une droite et par une parabole ; par le point A menons la droite ZA parallèle au diamètre, et par le point Γ la droite ΓZ tangente à la parabole en Γ. Dès lors, si dans le triangle ZAΓ l'on mène une parallèle quelconque à la droite AZ, la droite menée sera partagée par la parabole dans le même rapport que celui dans lequel la droite AΓ est partagée par la droite menée,

1. Même renvoi à des démonstrations perdues de prédécesseurs.

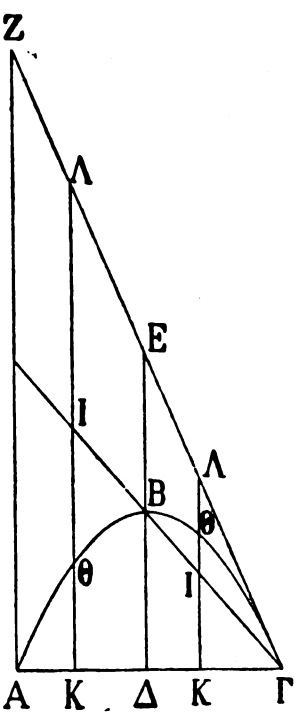
2. On a : $\frac{\overline{\Delta\Gamma}^2}{\overline{KH}^2} = \frac{B\Delta}{BK}$, par similitude de triangles : $\frac{B\Delta}{BK} = \frac{B\Gamma}{BI}$, et $\frac{\Delta\Gamma}{KH} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{B\Theta}$; donc : $\frac{\overline{\Delta\Gamma}^2}{\overline{KH}^2} = \frac{\overline{B\Gamma}^2}{\overline{B\Theta}^2}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{B\Gamma}^2}{\overline{B\Theta}^2} = \frac{B\Gamma}{BI}$.

3. La relation de la note précédente peut s'écrire : $\frac{B\Gamma}{B\Theta} = \frac{B\Theta}{BI}$, c'est-à-dire, comme le texte, que les droites BΓ, BΘ, BI sont proportionnelles, et, suivant que l'on considère l'une ou l'autre figure du texte, on aura : $\frac{B\Gamma}{B\Theta} = \frac{B\Gamma \pm B\Theta}{B\Theta \pm BI} = \frac{\Gamma\Theta}{\Theta I}$. Or, $\frac{B\Gamma}{B\Theta} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z}$, et $\frac{\Gamma\Theta}{\Theta I} = \frac{\Theta Z}{\Theta H}$; donc : $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z} = \frac{\Theta Z}{\Theta H}$. Mais, $\Delta A = \Gamma\Delta$; donc, comme le texte : $\frac{\Delta A}{\Delta Z} = \frac{Z\Theta}{\Theta H}$.

Digitized by Google

et le segment de la droite AΓ, situé du côté du point A, correspondra au segment de la droite menée situé du côté du point A.

En effet, menons une parallèle quelconque ΔE à la droite AZ, et que la droite ΔE partage d'abord la droite AΓ en deux parties égales. Dès lors, puisque ABΓ est une parabole, que la droite BΔ a été menée parallèlement au diamètre, et que les droites AΔ, ΔΓ sont égales, la tangente en B à la parabole sera parallèle à la droite AΓ (1). D'autre part, puisque ΔE est parallèle au diamètre, que la droite ΓE, menée par le point Γ, est tangente à la parabole en Γ, et que la droite ΔΓ est parallèle à la tangente en B, la droite EB sera égale à la droite BΔ (2) ; en sorte que le rapport de AΔ à ΔΓ est le même que celui de ΔB à BE. La proposition est donc démontrée dans le cas où la droite menée divise AΓ en deux parties égales. Mais, s'il n'en est pas ainsi, menons une autre parallèle quelconque KΛ à AZ. Il faut démontrer que le rapport de AK à KΓ est le même que celui de KΘ à ΘΛ. En effet, puisque la droite BE est égale à la droite BΔ, la droite IΛ est aussi égale à la droite KI.



Donc, le rapport de ΛK à KI est le même que celui de AΓ à ΔA, et le rapport de KI à KΘ est aussi le même que celui de ΔA à AK ; car cela a été démontré antérieurement dans une proposition. En conséquence, le rapport de la droite KΘ à la droite ΘΛ est le même que celui de la droite AK à la droite KΓ (3), et, dès lors, la proposition est démontrée.

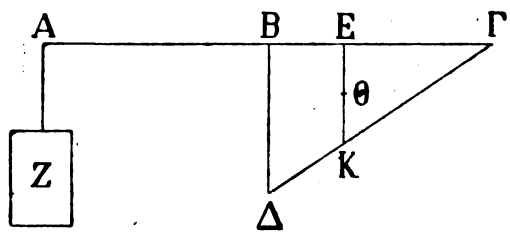
---

1. Voir proposition I.
2. Voir proposition II.
3. On a, par construction : $\Delta\Gamma = \Delta\Lambda$, et la proposition II donne : $BE = B\Delta$; donc, par similitude de triangles : $I\Lambda = KI$. Dès lors : $\frac{I\Lambda}{KI} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta A}$, d'où : $\frac{2I\Lambda}{KI} = \frac{2\Delta\Gamma}{\Delta A}$, ou, comme le texte : $\frac{\Lambda K}{KI} = \frac{A\Gamma}{\Delta A}$. D'autre part, la proposition IV donne : $\frac{KI}{I\Theta} = \frac{A\Delta}{K\Delta}$, d'où : $\frac{KI}{KI - I\Theta} = \frac{A\Delta}{A\Delta - K\Delta}$, ou, comme le texte : $\frac{KI}{K\Theta} = \frac{A\Delta}{AK}$; donc : $\frac{\Lambda K}{KI} \times \frac{KI}{K\Theta} = \frac{A\Gamma}{\Delta A} \times \frac{\Delta A}{AK}$, ou : $\frac{\Lambda K}{K\Theta} = \frac{A\Gamma}{AK}$, d'où : $\frac{K\Theta}{AK - K\Theta} = \frac{AK}{A\Gamma - AK}$ ou, comme le texte : $\frac{K\Theta}{\Theta\Lambda} = \frac{AK}{K\Gamma}$.

Digitized by Google

PROPOSITION VI.

Imaginons que le plan qui se présente au regard soit perpendiculaire à l'horizon ; figurons-nous comme étant au-dessous, ce qui est situé du côté d'une droite AB, où se trouve le point Δ, et comme au-dessus, ce qui est situé de l'autre côté. Soit un triangle rectangle BΔΓ ayant l'angle droit situé au point B et le côté BΓ égal à la moitié d'un levier (1). Que ce triangle soit suspendu aux points B, Γ; qu'une autre aire Z soit suspendue au point A, dans l'autre partie du levier, et que cette aire, suspendue au point A, fasse équilibre au triangle BΔΓ dans la position qu'il occupe maintenant. Je dis que l'aire Z est la troisième partie du triangle BΔΓ.



En effet, puisque l'on suppose le levier en équilibre, la ligne AΓ sera parallèle à l'horizon, et les perpendiculaires à AΓ, menées dans le plan perpendiculaire à l'horizon, seront perpendiculaires à l'horizon. Coupons la ligne BΓ en un point E, de manière que la droite ΓE soit double de la droite EB ; menons la droite KE parallèle à la droite ΔB, et divisons-la en deux parties égales au point Θ. Le point Θ sera le centre de gravité du triangle BΔΓ ; car cela est démontré dans les propositions mécaniques (2). Dès lors, si le triangle BΔΓ est détaché de ses points de suspension B et Γ pour être suspendu au point E, le triangle restera comme il est placé maintenant, attendu que tout corps, suspendu en quelque point que ce soit, reste dans une position telle que le point de suspension et le centre de gravité du corps suspendu soient sur une perpendiculaire ; chose qui, du reste, a été démontrée aussi (3). Dès lors, puisque la position du triangle BΓΔ

1. ζυγὸς, littéralement : joug ; mot qu'Archimède emploie pour désigner les bras conjugués d'un fléau ou levier de balance.

Le texte présente ici une petite interpolation : « il est évident que BΓ est égal à AB ».

2. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, proposition XIV.

3. Nous ne possédons pas la démonstration de cette proposition de mécanique qui aurait été donnée, quelque part, par Archimède. D'après Heiberg, cette démonstration aurait trouvé place dans un ouvrage perdu, ayant comme titre : Κεντροβαρικά c'est-à-dire *Des Centres de gravité* » (*loc. cit.* vol. II, p. 275). D'après Heath,

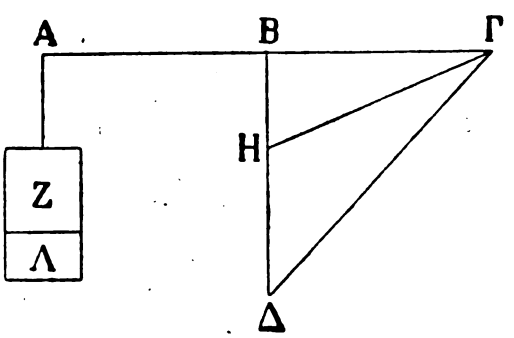
Digitized by Google

est restée la même par rapport au levier, l'aire Z équilibrera le triangle de la même manière. De plus, puisque l'aire Z, suspendue au point A, équilibre le triangle BΔΓ, suspendu au point E, il est évident que les distances sont inversement proportionnelles (1), et que le triangle BΔΓ est à l'aire Z comme AB est à BE. Or, AB est triple de BE ; par conséquent, le triangle est aussi triple de l'aire Z. Il est donc clair aussi que, si le triangle BΔΓ est triple de l'aire Z, il y aura équilibre.

PROPOSITION VII.

Que la ligne AΓ soit de nouveau un levier, dont le milieu est le point B, et qu'il soit suspendu en ce point B. Soit ΓΔH un triangle obtusangle, dont la base est la droite ΔH, et dont la hauteur est égale à la moitié du levier. Suspendons le triangle ΔΓH aux points B, Γ, et qu'une aire Z, suspendue au point A, fasse équilibre au triangle ΓΔH dans la position qu'il occupe maintenant. Nous démontrerons, de la même manière, que l'aire Z est la troisième partie du triangle ΓΔH.

En effet, suspendons, au point A, une autre aire qui soit la troisième partie du triangle BΓH. Dès lors, le triangle BΔΓ sera en équilibre avec l'aire ZΛ. Donc, puisque le triangle BΓH est en équilibre avec l'aire Λ, que le triangle BΓΔ est en équilibre avec l'aire ZΛ, et que l'aire ZΛ est le tiers du triangle BΓΔ, il est clair que le triangle ΓΔH est le triple de l'aire Z.



au contraire, cette démonstration devait se trouver dans l'ouvrage perdu intitulé : Περὶ Ζυγῶν, c'est-à-dire *Des Balances ou des Leviers* (*loc. cit.*, p. 238). La proposition convenait en tout cas à l'un et l'autre de ces deux ouvrages, dont la perte ne fut pas étrangère à l'état de stagnation dans lequel est restée la mécanique rationnelle jusqu'au XVI[e] siècle, c'est-à-dire jusqu'aux travaux de Stévin et de Galilée.

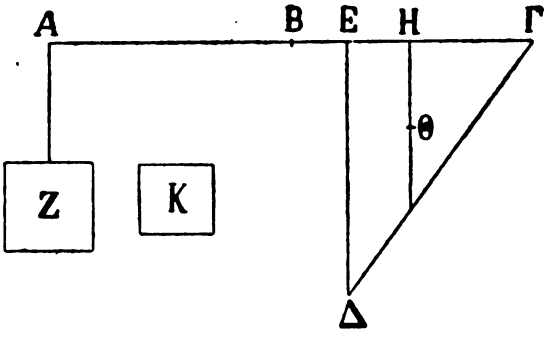
1. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, prop. VI et VII.

Digitized by Google

PROPOSITION VIII.

Soit un levier ABΓ, dont le milieu est le point B, et qui est suspendu au point B. Soit un triangle rectangle ΓΔE, ayant l'angle droit du côté du point E, suspendu au levier aux points Γ, E. Soit une aire Z, suspendue au point A, en équilibre avec le triangle ΓΔE dans la position qu'il occupe maintenant, et que le rapport du triangle ΓΔE à une aire K soit le même que celui de AB à BE. Je dis que l'aire Z est plus petite que le triangle ΓΔE, et plus grande que l'aire K.

En effet, prenons le centre de gravité du triangle ΔEΓ ; que ce soit le point Θ (1), et menons la droite ΘH parallèle à la droite ΔE. Dès lors, puisque le triangle ΓΔE est en équilibre avec l'aire Z, le rapport de l'aire ΓΔE à l'aire Z sera le même que celui de AB à BH (2) ; de manière que l'aire Z sera plus petite que le triangle ΓΔE. D'autre part, puisque le rapport du triangle ΓΔE à l'aire Z est le même que celui de BA à BH, et que son rapport à l'aire K est le même que celui de BA à BE (3), il est évident que le rapport du triangle ΓΔE à l'aire K est plus grand que son rapport à l'aire Z ; en sorte que l'aire Z est plus grande que l'aire K (4).



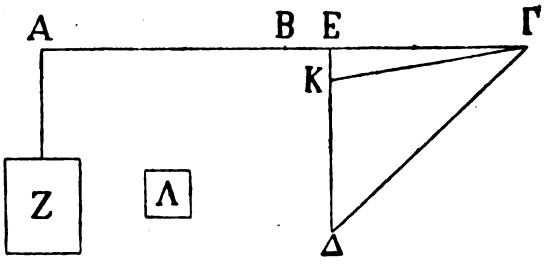
PROPOSITION IX.

Soit de nouveau un levier AΓ, dont le milieu est le point B, et un triangle obtusangle ΓΔK, ayant comme base ΔK et comme hauteur

1. Voir proposition VI et note.
2. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, propositions VI et VII.
3. Par hypothèse.
4. On a démontré : $\frac{\Gamma\Delta E}{Z} = \frac{AB}{BH}$. Or, $BH < AB$; donc : $Z < \Gamma\Delta E$. D'autre part, on a posé : $\frac{\Gamma\Delta E}{K} = \frac{AB}{BE}$. Or, $BE < BH$; donc : $\frac{\Gamma\Delta E}{K} > \frac{AB}{BH}$, d'où : $\frac{\Gamma\Delta E}{K} > \frac{\Gamma\Delta E}{Z}$, d'où, comme le texte : $Z > K$.

Digitized by Google

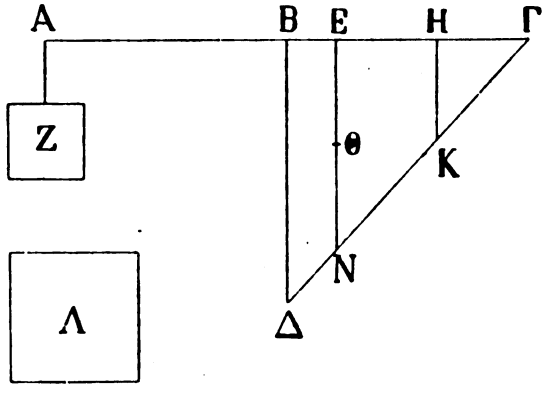
ΕΓ. Que le triangle soit suspendu au levier aux points Γ, Ε, et qu'une aire Ζ, suspendue au point Α, fasse équilibre au triangle ΔΓΚ dans la position qu'il occupe maintenant. Que le rapport du triangle ΓΔΚ à une aire Λ soit le même que celui de ΑΒ à ΒΕ. Dès lors, je dis que l'aire Ζ est plus grande que l'aire Λ, et qu'elle est plus petite que le triangle ΔΓΚ ; ce qui se démontrera de la même manière que dans la proposition précédente.



PROPOSITION X.

Soit de nouveau un levier ΑΒΓ dont le milieu est le point Β ; soit un trapèze dont les angles situés aux points Β et Η sont droits, et dont le côté ΚΔ est dirigé vers le point Γ, et que le rapport du trapèze ΒΔΗΚ à une aire Λ soit le même que celui de ΑΒ à ΒΗ. Que le trapèze ΒΔΗΚ soit suspendu au levier aux points Β et Η, et qu'une aire Ζ, suspendue au point Α, fasse équilibre au trapèze ΒΔΚΗ dans la position qu'il occupe maintenant. Je dis que l'aire Ζ est plus petite que l'aire Λ.

En effet, coupons la droite ΑΓ en un point Ε, de manière que le rapport de ΕΗ à ΒΕ soit le même que celui du double de ΔΒ, augmenté de ΚΗ, au double de ΚΗ augmenté de ΒΔ (1), et coupons la droite ΕΝ, menée par le point Ε, parallèlement à la droite ΒΔ, en deux parties égales au point Θ. Dès lors, le point Θ est le centre de gravité du trapèze ΒΔΗΚ ; car cela est



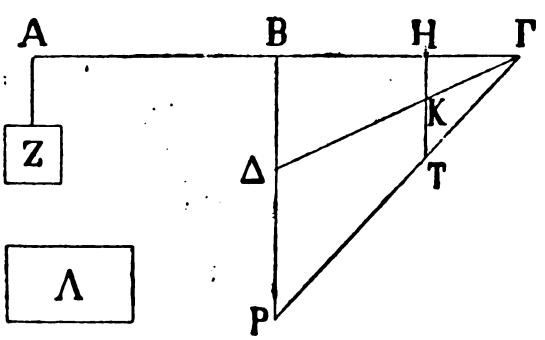
1. Archimède s'en rapporte au problème résolu à la proposition X du livre VI d'Euclide, laquelle est énoncée comme suit : « Partager une droite donnée, qui n'est point partagée, de la même manière qu'une autre droite donnée est partagée » (traduction Peyrard, Paris, 1809, p. 228.)

Digitized by Google

démontré dans les propositions mécaniques (1). Donc, si le trapèze BΔHK est suspendu au point E, et qu'il est détaché aux points B et H, il restera dans la position qu'il occupe pour des raisons identiques à celles qui précèdent (2), et il fera équilibre à l'aire Z. Par conséquent, puisque le trapèze BΔHK, suspendu au point E, fait équilibre à l'aire Z, suspendue au point A, le trapèze BΔHK sera à l'aire Z comme AB est à BE (3). Donc, le rapport du trapèze BΔHK à l'aire Z sera plus grand que son rapport à l'aire Λ, puisque le rapport de AB à BE est aussi plus grand que celui de AB à BH ; en sorte que l'aire Z sera plus petite que l'aire Λ (4).

PROPOSITION XI.

Soit de nouveau un levier AΓ dont le milieu est le point B, et soit un trapèze KΔTP, ayant ses côtés KΔ, TP dirigés vers le point Γ, ses côtés ΔP, KT perpendiculaires sur la droite BΓ, et le côté ΔP tombant au point Δ. Que le rapport du trapèze ΔKTP à une aire Λ soit le même que celui de AB à BH; que le trapèze soit suspendu au levier aux points B et H ; qu'une aire Z soit suspendue au point A, et que l'aire Z fasse équilibre au trapèze ΔKPT dans la position qu'il occupe maintenant. On démontrera, comme précédemment, que l'aire Z est plus petite que l'aire Λ.



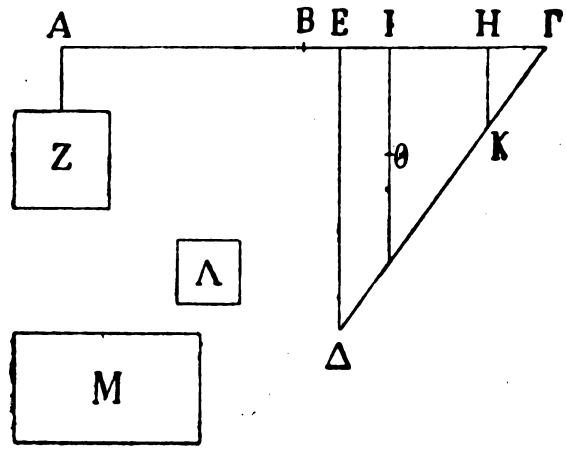
1. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, proposition XV.
2. Voir proposition VI et note.
3. Voir *De l'Equilibre des Plans*, propositions VI et VII.
4. En vertu des propositions rappelées dans la note qui précède, on aura : $\frac{B\Delta HK}{\text{aire } Z} = \frac{AB}{BE}$, et, par hypothèse, on a : $\frac{B\Delta HK}{\text{aire } \Lambda} = \frac{AB}{BH}$. Or, $BE < BH$; donc : $\frac{AB}{BE} > \frac{AB}{BH}$ d'où : $\frac{B\Delta HK}{\text{aire } Z} > \frac{B\Delta HK}{\text{aire } \Lambda}$, d'où, comme le texte : aire $Z <$ aire Λ.

Digitized by Google

PROPOSITION XII.

Soit de nouveau un levier AΓ dont le milieu est le point B ; soit un trapèze ΔEKH, ayant les angles situés aux points E, H droits, et les lignes KΔ, EH dirigées vers le point Γ. Que le rapport du trapèze ΔKEH à M soit le même que celui de AB à BH, et que le rapport du trapèze ΔKEH à Λ soit le même que celui de AB à BE. Que le trapèze ΔKEH soit suspendu au levier aux points E, H, et qu'une aire Z soit suspendue au point A en faisant équilibre au trapèze tel qu'il est placé maintenant. Je dis que l'aire Z est plus grande que l'aire Λ et plus petite que l'aire M.

En effet, prenons le centre de gravité du trapèze ΔKEH, et que ce soit le point Θ. Que ce centre soit pris de la même manière que précédemment(1),et menons la droite ΘI parallèlement à la droite ΔE. Dès lors, si le trapèze est suspendu au levier au point I, et qu'il en est détaché aux points E, H, il restera dans la position qu'il occupe, et il fera équilibre à l'aire Z pour les mêmes raisons que précédemment (2). D'autre part, puisque le trapèze, suspendu au point I, fait équilibre à l'aire Z, suspendue au point A, le rapport du trapèze à l'aire Z est le même que celui de AB à BI. Dès lors, il est évident que le rapport du trapèze ΔKEH à l'aire Λ est plus grand que son rapport à l'aire Z, et que son rapport à l'aire M est plus petit que son rapport à l'aire Z ; en sorte que l'aire Z est plus grande que l'aire Λ, et qu'elle est plus petite que l'aire M (3).

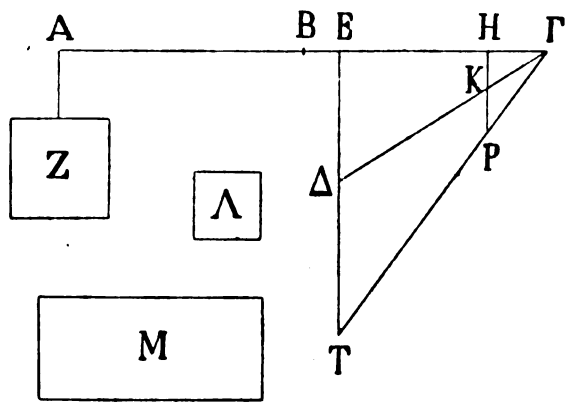


1. Voir proposition X.
2. Voir proposition VI.
3. Voir proposition X et notes.

Digitized by Google

PROPOSITION XIII.

Soit de nouveau un levier AΓ, le point B étant placé en son milieu, et un trapèze KΔTP ayant ses côtés ΔK, TP dirigés vers le point Γ, et ses côtés ΔT, KP perpendiculaires à la droite BΓ. Que le trapèze soit suspendu au levier aux points E, H, et qu'une aire Z, suspendue au point A, fasse équilibre au trapèze ΔKTP dans la position qu'il occupe maintenant. De plus, que le rapport du trapèze ΔKTP à une aire Λ soit le même que celui de AB à BE, et que le rapport de ce trapèze à une aire M soit le même que celui de AB à BH. Dès lors, on démontrera, de la même manière que précédemment, que l'aire Z est plus grande que l'aire Λ et plus petite que l'aire M (1).



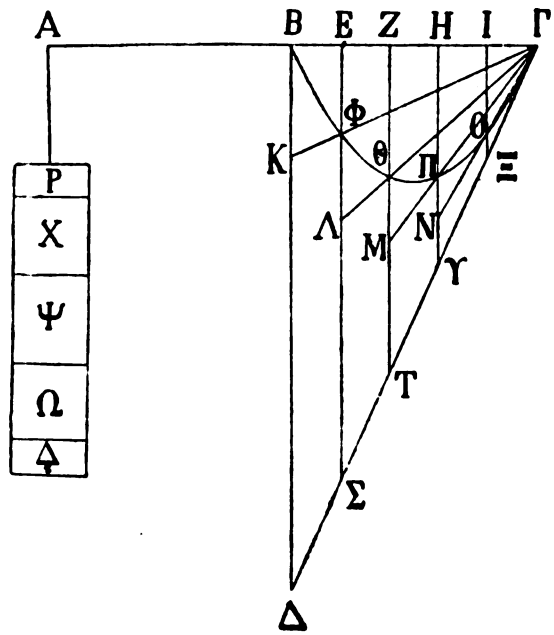
PROPOSITION XIV.

Soit BΘΓ un segment délimité par une droite et par une parabole. Soit, dans un premier cas, la droite BΓ perpendiculaire au diamètre. Menons, par le point B, la droite BΔ parallèle au diamètre, et, par le point Γ, la droite ΓΔ tangente à la parabole au point Γ; le triangle BΓΔ sera donc rectangle. Partageons la droite BΓ en autant de parties égales qu'on voudra : BE, EZ, ZH, IΓ; menons, par les points de division, les parallèles au diamètre EΣ, ZT, HΥ, IΞ, et relions au point Γ, par des droites que nous prolongeons, les points où ces parallèles coupent la parabole. Dès lors, je dis que le triangle BΔΓ est plus petit que le triple de l'ensemble des trapèzes KE, ΛZ, MH, NI et du triangle ΞIΓ, et qu'il est plus grand que le triple de l'ensemble des trapèzes ZΦ, HΦ, III et du triangle IOΓ.

1. Voir proposition XI.

Digitized by Google

En effet, menons la droite ABΓ ; découpons-en une droite AB égale à la droite BΓ, et imaginons que AΓ soit un levier, dont le milieu est le point B, et qui soit suspendu au point B. Suspendons aussi le triangle BΔΓ au levier aux points B, Γ, et suspendons à l'autre partie du levier, au point A, des aires P, X, Ψ, Ω, Ϟ. Que l'aire P fasse équilibre au trapèze ΔE tel qu'il est placé, l'aire X au trapèze ZΣ, l'aire Ψ au trapèze TH, l'aire Ω au trapèze ΥI, et l'aire Ϟ au triangle ΞIΓ. Dès lors, l'un ensemble fera équilibre à l'autre, en sorte que le triangle BΔΓ sera triple de l'aire PXΨΩϞ (1). De plus, puisque BΓΘ est un segment délimité par une droite et par une parabole, que la droite BΔ a été menée du point B parallèlement au diamètre, que la droite ΓΔ a été menée du point Γ tangentiellement à la parabole en Γ, et qu'une autre droite ΣE a aussi été menée parallèlement au diamètre, le rapport de BΓ à BE sera le même que celui de ΣE à EΦ (2) ; en sorte que le rapport de BA à BE sera aussi le même que celui du trapèze ΔE au trapèze KE (3). On démontrerait, de la même manière, que le rapport de AB à BZ est le même que celui du trapèze ΣZ au



1. Voir proposition VI.

2. On a, en vertu de la proposition V : $\frac{E\Gamma}{BE} = \frac{\Phi\Sigma}{E\Phi}$, d'où : $\frac{BE+E\Gamma}{BE} = \frac{E\Phi+\Phi\Sigma}{E\Phi}$, ou, comme le texte : $\frac{B\Gamma}{BE} = \frac{\Sigma E}{E\Phi}$.

3. Les trapèzes étant entre eux comme leurs aires :
$\frac{\text{trap. } \Delta E}{\text{trap. } KE} = \frac{BE \times \frac{1}{2}[B\Delta + \Sigma E]}{BE \times \frac{1}{2}[BK + E\Phi]} = \frac{B\Delta + \Sigma E}{BK + E\Phi}$. Or, par similitude de triangles : $\frac{B\Delta}{BK} = \frac{\Sigma E}{E\Phi}$; donc : $\frac{B\Delta + \Sigma E}{BK + E\Phi} = \frac{\Sigma E}{E\Phi}$, d'où : $\frac{\text{trap. } \Delta E}{\text{trap. } KE} = \frac{\Sigma E}{E\Phi}$, et, comparant avec la relation de la note précédente, en observant que BA = BΓ, il vient, comme le texte : $\frac{BA}{BE} = \frac{\text{trapèze } \Delta E}{\text{trapèze } KE}$.

Digitized by Google

trapèze ΛZ, que son rapport à BH est le même que celui du trapèze TH au trapèze MH, et que son rapport à BI est le même que celui du trapèze ΥI au trapèze NI. Dès lors, puisque l'on a un trapèze ΔE, ayant les angles placés aux points B et E droits et les côtés dirigés vers le point Γ, tandis qu'une aire P, suspendue au levier au point A, fait équilibre à ce trapèze dans la position qu'il occupe maintenant, et que le trapèze ΔE est au trapèze KE comme BA est à BE, il s'ensuit que l'aire KE est plus grande que l'aire P ; car cela a été démontré (1). D'autre part, on a de nouveau un trapèze ZΣ, ayant les angles situés en Z et E droits et la droite ΣT dirigée vers le point Γ, tandis qu'une aire X, suspendue au levier en A, fait équilibre à ce trapèze dans la position qu'il occupe maintenant ; de plus, le trapèze ZΣ est au trapèze ZΦ comme AB est à BE, et le trapèze ZΣ est au trapèze ΛZ comme AB est à BZ. En conséquence, l'aire X sera plus petite que le trapèze ΛZ et plus grande que le trapèze ZΦ ; car cela a été démontré aussi (2). Enfin, pour les mêmes raisons, l'aire Ψ sera plus petite que le trapèze MH et plus grande que le trapèze ΘH ; l'aire Ω sera plus petite que le trapèze NOIH et plus grande que le trapèze ΠI, et, de même (3) encore, l'aire ϡ sera plus petite que le triangle ΞIΓ et plus grande que le triangle ΓIO. Dès lors, puisque le trapèze KE est plus grand que l'aire P, le trapèze ΛZ plus grand que l'aire X, le trapèze MH plus grand que l'aire Ψ, le trapèze NI plus grand que l'aire Ω, et le triangle ΞIΓ plus grand que l'aire ϡ, il est clair que l'ensemble des aires, que nous venons de dire, est plus grand que l'aire PXΨΩϡ. Or, l'aire PXΨΩϡ est la troisième partie du triangle BΓΔ ; par conséquent, il est évident que le triangle BΓΔ est plus petit que le triple de l'ensemble des trapèzes KE, ΛZ, MH, NI et du triangle ΞIΓ. D'un autre côté, puisque le trapèze ZΦ est plus petit que l'aire X, le trapèze ΘH plus petit que l'aire Ψ, le trapèze ΠI plus petit que l'aire Ω, et le triangle IOΓ plus petit que l'aire ϡ, il est clair que l'ensemble des aires, que nous venons de dire, sera aussi plus petit que l'aire ϡΩΨX. Donc, il est évident que le triangle BΔΓ est plus grand que le triple de l'ensemble des trapèzes ΦZ, ΘH, ΠI et du

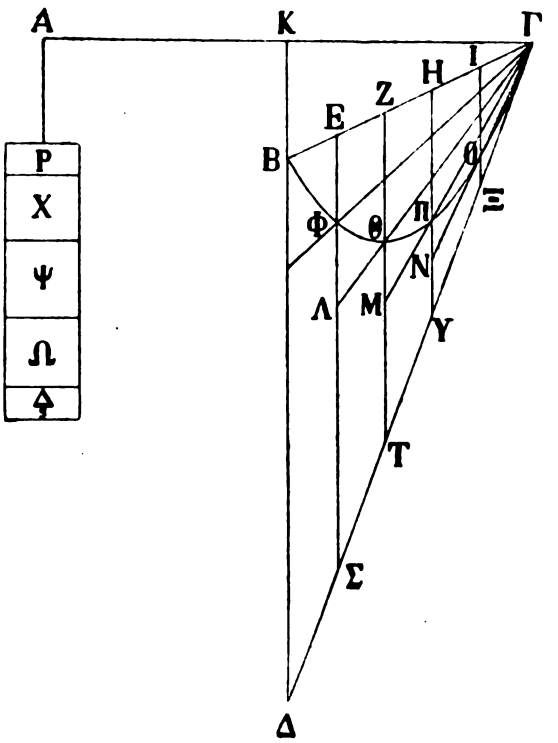
1. Voir proposition X.
2. Voir proposition XII.
3. Voir proposition VIII.

Digitized by Google

triangle IΓO, et qu'il est plus petit que le triple des aires désignées en premier lieu (1).

PROPOSITION XV.

Soit de nouveau un segment BΘΓ délimité par une droite et par une parabole, et que la droite BΓ ne soit plus perpendiculaire au diamètre. Dès lors,il faut nécessairement qu'un angle obtus soit formé avec la droite BΓ, soit par la droite menée du point B parallèlement au diamètre du côté du segment,soit par la droite menée du point Γ. Que la droite formant l'angle obtus soit celle qui est située du côté du point B. Du point B, menons la droite BΔ parallèle au diamètre, et du point Γ, la droite ΓΔ tangente à la parabole en Γ. Divisons la droite BΓ en autant de parties égales qu'on voudra: BE, EZ, ZH, HI, IΓ ; des points E, Z, H, I, menons les droites EΣ, ZT, HY, IΞ, et, des points où ces dernières coupent la parabole, menons, vers le point Γ, les droites de jonction que nous prolongeons. Je dis que, maintenant encore, le triangle BΔΓ est plus petit que le triple des trapèzes BΦ,



1. On aura, en vertu des propositions VIII et XII :
Σ trapèzes (KE, ΛZ, MH, NI) + triangle ΞIΓ > aire (P + X + Ψ + Ω + Ϟ), et Σ trapèzes (ZΦ, ΘH, IΠ) + triangle IOΓ < aire (X + Ψ + Ω + Ϟ). Or, en vertu de la proposition VI, on a : aire (P + X + Ψ + Ω + Ϟ) = ⅓ triangle BΓΔ ; donc :
triangle BΓΔ = 3 aires (P + X + Ψ + Ω + Ϟ), et triangle BΓΔ > 3 aires (X + Ψ + Ω + Ϟ), d'où, par substitution des valeurs précédentes, il vient, comme dans le texte :
triangle BΔΓ < 3 [Σ trapèzes (KE, ΛZ, MH, NI) + triangle ΞIΓ], et triangle BΔΓ > 3[Σ trapèzes (ZΦ, ΘH, IΠ) + triangle IOΓ].

Digitized by Google

ΛZ, MH, NI, augmentés du triangle ΓIΞ, et qu'il est plus grand que le triple des trapèzes ZΦ, HΘ, IΠ, augmentés du triangle ΓOI.

Prolongeons la droite ΔB de l'autre côté (1). Ayant mené perpendiculairement la droite ΓK, prenons la droite AK égale à la droite ΓK. Imaginons de nouveau que AΓ est un levier, dont le milieu est le point K, et qu'il est suspendu au point K. Suspendons le triangle ΓKΔ, tel qu'il est disposé maintenant, à la moitié du levier, aux points Γ et K, et suspendons à l'autre partie du levier, au point A, des aires P, X, Ψ, Ω, $\dot{\Delta}$. Que l'aire P fasse équilibre au trapèze ΔE tel qu'il est placé maintenant, l'aire X au trapèze ZΣ, l'aire Ψ au trapèze TH, l'aire Ω au trapèze TI, et l'aire $\dot{\Delta}$ au triangle ΓIΞ. Dès lors, l'un ensemble fera équilibre à l'autre ; en sorte que le triangle ΔBΓ sera triple de l'aire PXΨΩ$\dot{\Delta}$ (2). On démontrerait, comme précédemment (3), que le trapèze BΦ est plus grand que l'aire P ; que le trapèze ΘE est plus grand que l'aire X, et que le trapèze ZΦ est plus petit ; que le trapèze MH est plus grand que l'aire Ψ, et que le trapèze HΘ est plus petit ; que le trapèze NI est plus grand que l'aire Ω, et que le trapèze IΠ est plus petit ; que le triangle ΞIΓ est plus grand que l'aire $\dot{\Delta}$, et que le triangle ΓIO est plus petit. En conséquence, la proposition est évidente.

PROPOSITION XVI.

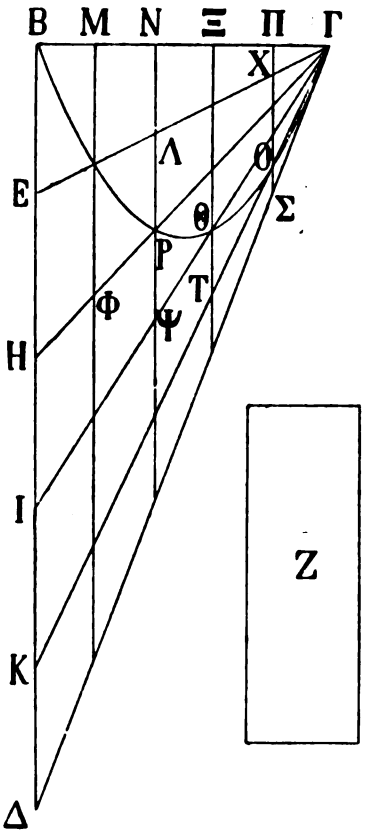
Soit de nouveau un segment BΘΓ délimité par une droite et par une parabole. Par le point B, menons la droite BΔ parallèle au diamètre, et, par le point Γ, la droite ΓΔ tangente à la parabole au point Γ. Soit une aire Z la troisième partie du triangle BΔΓ. Dès lors, je dis que le segment BΓΘ est équivalent à l'aire Z.

En effet, s'il n'est pas équivalent, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, s'il se peut. Dès lors, l'excédent dont

1. C'est-à-dire de l'autre côté du segment.
2. Voir proposition VII.
3. Voir proposition XIV, et, subsidiairement, les propositions IX, XI et XIII, au lieu des propositions VIII, X et XII qui visent les cas particuliers du triangle rectangle et du trapèze à angles droits.

Digitized by Google

le segment dépasse l'aire Z, ajouté à lui-même (1), sera plus grand que le triangle BΓΔ (2). Au reste, il est possible de choisir une certaine aire qui, plus petite que cet excédent, soit une portion du triangle BΔΓ. Soit donc BΓE un triangle, plus petit que l'excédent en question, et qui soit une portion du triangle BΔΓ ; il en résulte que la droite BE sera une portion adéquate de la droite BΔ (3). Dès lors, divisons la droite BΔ dans la mesure de cette portion. Soient H, I, K les points de division, et menons les droites qui relient les points H, I, K au point Γ ; ces droites coupent la parabole, parce que la droite ΓΔ lui est tangente au point Γ. Par les points où ces droites coupent la parabole, menons les droites MΦ, NP, ΞΘ, ΠO parallèlement au diamètre ; elles seront elles-mêmes parallèles à BΔ (4). En conséquence, puisque le triangle BΓE est plus petit que l'excédent dont le segment BΘΓ dépasse l'aire Z, il est évident que l'ensemble de l'aire Z et du triangle BΓE sera plus petit que le segment. De plus, les trapèzes ME, ΦΛ, ΘP, ΘO et le triangle ΓOΣ, au travers desquels passe la parabole, valent le triangle BΓE ; car le trapèze ME est commun, et le trapèze MΛ équivaut au trapèze ΦΛ, le trapèze ΛΞ au trapèze ΘP, le trapèze XΞ au trapèze OΘ, et le triangle ΓXΠ au triangle ΓOΣ (5). Donc, l'aire Z sera plus petite que l'ensemble des trapèzes MΛ, ΞP,



1. C'est-à-dire ajouté continuellement à lui-même.
2. Voir le lemme invoqué par Archimède dans son introduction adressée à Dosithée.
3. Car, les triangles BΓE, BΓΔ ont même hauteur et sont entre eux comme les bases.
4. Car, BΔ a été mené par le point B parallèlement au diamètre du segment.
5. La droite BΔ, ayant été divisée en parties égales, le faisceau qui relie les points de division au point Γ divise les parallèles à BΔ en parties égales, d'où équivalence des trapèzes de même rang, ayant même hauteur et côtés parallèles égaux, et équivalence des triangles ΓXΠ, ΓOΣ, ayant même hauteur et bases égales. Dès lors, on a, comme le texte : trap. ME + trap. ΦΛ + trap. ΘP + trap. ΘO + triangle ΓOΣ = triangle BEΓ.

Digitized by Google

ΠΘ et du triangle ΠΟΓ (1). Or, le triangle ΒΔΓ est triple de l'aire Z; par conséquent, le triangle ΒΔΓ sera plus petit que le triple de l'ensemble des trapèzes ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ et du triangle ΠΟΓ; ce qui est impossible, car il a été démontré qu'il est plus grand que le triple (2). Donc, le segment ΒΘΓ n'est pas plus grand que l'aire Z.

D'autre part, je dis qu'il n'est pas plus petit. Et, en effet, qu'il soit plus petit, s'il se peut. Dès lors, l'excédent dont l'aire Z dépasse le segment ΒΘΓ, ajouté à lui-même, sera aussi plus grand que le triangle ΒΔΓ, et il est possible de choisir une certaine aire, plus petite que cet excédent, qui soit une portion du triangle ΒΔΓ. Soit donc ΒΓΕ le triangle, plus petit que cet excédent, qui soit une portion du triangle ΒΔΓ, et que les autres constructions soient les mêmes que les précédentes. En conséquence, puisque le triangle ΒΓΕ est plus petit que l'excédent dont l'aire Z dépasse le segment ΒΘΓ, l'ensemble du triangle ΒΕΓ et du segment ΒΘΓ est moindre que l'aire Z. Or, l'aire Z est aussi moindre que l'ensemble des quadrilatères ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ et du triangle ΓΠΣ ; car le triangle ΒΔΓ est triple de l'aire Z, et il est plus petit que le triple des aires que nous venons de dire, comme on l'a démontré à la proposition précédente. Donc, l'ensemble du triangle ΒΓΕ et du segment ΒΘΓ sera moindre que l'ensemble des quadrilatères ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΠΤ et du triangle ΓΠΣ ; en sorte que, si nous retranchons le segment commun, le triangle ΓΒΕ sera moindre que les aires restantes ; ce qui est impossible. En effet, il a été démontré que le triangle ΒΕΓ équivaut aux trapèzes ΕΜ, ΦΑ, ΘΡ, ΘΟ, augmentés du triangle ΓΟΣ ; ce qui est plus grand que les aires restantes (3). Donc, le segment ΒΘΓ n'est pas plus petit que l'aire Z. Or,

---

1. Par hypothèse, triangle ΒΓΕ < segment ΒΘΓ — aire Z, d'où, en présence de la relation de la note précédente et de la relation évidente : ΜΕ + ΝΦ + ΞΨ + ΠΤ + ΠΣΓ > segt ΒΘΓ, on aura: ΜΕ + ΦΛ + ΘΡ + ΘΟ + ΓΟΣ < ΜΕ + ΝΦ + ΞΨ + ΠΤ + ΠΣΓ — aire Z, d'où : aire Z < (ΝΦ — ΦΛ) + (ΞΨ — ΟΡ) + (ΠΤ — ΘΟ) + (ΠΣΓ — ΓΟΣ), ou, comme le texte : aire Z < ΜΛ + ΞΡ + ΠΘ + triangle ΠΟΓ.

2. Par hypothèse : aire Z = ⅓ triangle ΒΔΓ, d'où, en présence de la relation de la note précédente : triangle ΒΔΓ < 3[ΜΛ + ΡΞ + ΘΠ + ΠΟΓ] ; ce qui est absurde, car, en vertu des propositions XIV et XV, on a : triangle ΒΔΓ > 3[ΜΛ + ΡΞ + ΘΠ + ΠΟΓ].

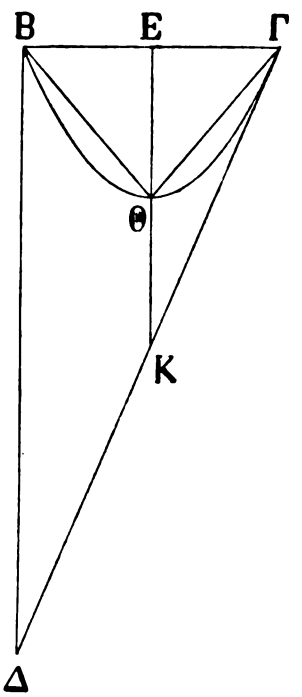
3. La seconde partie de la démonstration se résume comme suit :
On a, en 2de hypothèse : triangle ΒΓΕ < aire Z — segment ΒΘΓ. Or, on a posé : aire Z = ⅓ triangle ΒΔΓ, et on a, en vertu des propositions XIV et XV :
triangle ΒΔΓ < 3[ΕΜ + ΦΝ + ΨΞ + ΠΤ + ΓΠΣ] ; donc, comme le texte :
triangle ΒΓΕ + segment ΒΘΓ < ΕΜ + ΦΝ + ΨΞ + ΠΤ + ΓΠΣ, d'où :
triangle ΒΓΕ < ΕΜ + ΦΝ + ΨΞ + ΠΤ + ΓΠΣ — segment ΒΘΓ ; ce qui est impossible, car on a vu (1re partie de la démonstration) que : triangle ΒΕΓ = ΜΕ + ΦΛ + ΘΡ +

Digitized by Google

il a été démontré qu'il n'est pas plus grand ; par conséquent, le segment équivaut à l'aire Z.

PROPOSITION XVII.

Ces choses étant démontrées, il est manifeste que tout segment, délimité par une droite et par une parabole, équivaut aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment (1).



En effet, soit un segment délimité par une droite et par une parabole ; soit le point Θ son sommet, et inscrivons le triangle BΘΓ ayant même base et même hauteur que le segment. Dès lors, puisque le point Θ est le sommet du segment, la droite menée du point Θ, parallèlement au diamètre (2), divise la droite BΓ en deux parties égales (3), et la droite BΓ est parallèle à la tangente à la parabole au point Θ(4). Menons la droite ΘE parallèle au diamètre ; menons encore, par le point B, la droite BΔ parallèle au diamètre, et, par le point Γ, la droite ΓΔ tangente à la parabole en Γ. Dès lors, puisque la droite KΘ est parallèle au diamètre, que la droite ΓΔ est tangente à la parabole en Γ, et que la droite EΓ est parallèle à la tangente à la parabole au point Θ, le triangle BΔΓ sera quadruple du

---

ΘO + ΓOΣ. Or, ΦΛ + ΘP + ΘO + ΓOΣ > ΦN + ΨΞ + ΠT + ΓΠΣ — segment BΘΓ, ou : ME + ΦΛ + ΘP + ΘO + ΓOΣ > ME + ΦN + ΨΞ + ΠT + ΓΠΣ — segment BΘΓ ; donc : triangle BEΓ > ME + ΦN + ΨΞ + ΠT + ΓΠΣ — segment BΘΓ.

1. Les propositions qui précèdent, basées sur la notion baricentrique des aires, et sur la notion de l'équilibre du levier, aboutissent donc ici à l'invention mécanique de la quadrature de la parabole. La série des sept propositions suivantes reprendra, au contraire, la démonstration de la quadrature de la parabole par la géométrie pure.

2. C'est-à-dire menée parallèlement au diamètre principal ou à l'axe.

3. Comme l'avaient, du reste, déjà fait remarquer Heath (*loc. cit.*, p. 246) et Heiberg (*loc. cit.*, vol. II, p. 299), Archimède emploie ici les termes de base et de sommet du segment parabolique, dont il ne donnera cependant la définition qu'à la suite de cette proposition. De plus, il anticipe sur la proposition XVIII en invoquant sa réciproque.

4. Voir proposition I.

Digitized by Google

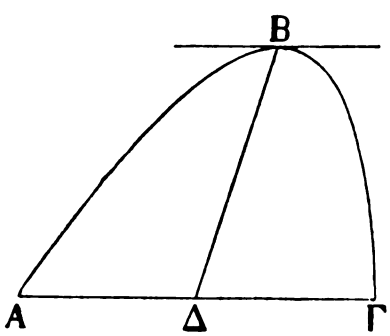
triangle BΘΓ (1). De plus, puisque le triangle BΔΓ est triple du segment BΘΓ (2), et qu'il est quadruple du triangle BΘΓ, il est évident que le segment BΘΓ vaut les quatre tiers du triangle BΘΓ.

J'appelle base, la droite des segments délimités par une droite et par une ligne courbe ; hauteur, la plus grande perpendiculaire menée de la ligne courbe sur la base du segment, et sommet, le point d'où est menée la plus grande perpendiculaire.

PROPOSITION XVIII.

Si, dans un segment délimité par une droite et par une parabole, l'on mène, du milieu de la base, une parallèle au diamètre, le sommet du segment sera le point où la parallèle au diamètre coupe la section de cône.

En effet, soit ABΓ un segment délimité par une droite et par une parabole, et, du milieu de la droite AΓ, menons la droite ΔB parallèle au diamètre. Dès lors, puisque la droite BΔ a été menée, parallèlement au diamètre dans une parabole, et que les droites AΔ, ΔΓ sont égales, il est évident que la droite AΓ et la tangente à la parabole au point B sont parallèles (3). Donc, il est clair que, parmi les perpendiculaires menées de la parabole sur la droite AΓ, la plus grande sera celle qui est menée du point B. Dès lors, le point B est le sommet du segment (4).



1. Puisque ΘE est un diamètre et BΓ une corde conjuguée, on a : BE = EΓ ; donc : BΔ = 2EK, d'où : triangle BΓΔ = 4 triangles EΓK. Or, puisque ΓK est une tangente à la parabole, on a : EΘ = ΘK. Dès lors, considérant des triangles de même hauteur et ayant des bases égales : triangle BΘE = triangle EΘΓ = triangle ΘΓK, d'où : triangle EΓK = triangle BΘΓ, d'où, comme le texte : triangle BΔΓ = 4 triangles BΘΓ.

2. En vertu de la proposition XVI, on a : segment BΘΓ = $\frac{1}{3}$ triangle BΔΓ, d'où, en présence de la relation de la note précédente : segment BΘΓ = $\frac{4}{3}$ triangle BΘΓ.

3. Voir proposition I.

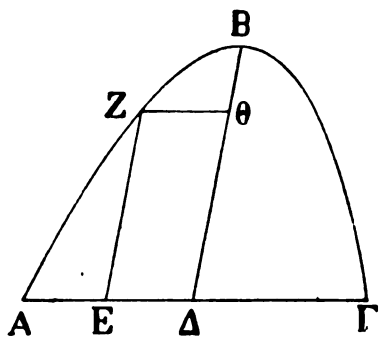
4. Voir les définitions qui terminent la proposition XVII.

Digitized by Google

PROPOSITION XIX.

Dans un segment délimité par une droite et par une parabole, la droite menée (1) du milieu de la base a comme longueur les quatre tiers de la droite menée (2) du milieu de la moitié de la base.

En effet, soit ABΓ un segment délimité par une droite et par une parabole. Menons, parallèlement au diamètre, la droite BΔ du milieu de la droite AΓ, la droite EZ du milieu de la droite AΔ, et menons aussi la droite ZΘ parallèle à la droite AΓ. Dès lors, puisque la droite BΔ a été menée parallèlement au diamètre dans une parabole, et que les droites AΔ, ZΘ sont parallèles à la tangente au point B, il est évident que le rapport de la longueur BΔ à la longueur BΘ est le même que celui du carré de AΔ au carré de ZΘ (3). Par conséquent, la longueur BΔ sera quadruple de la longueur BΘ (4). Il est donc clair que la longueur BΔ vaut les quatre tiers de la longueur EZ (5).



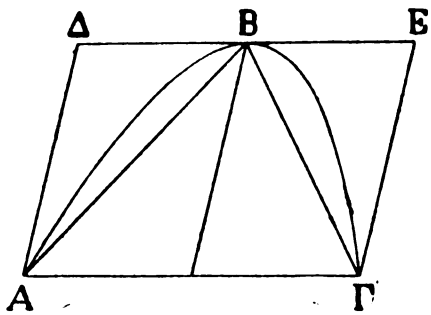
PROPOSITION XX.

Si, dans un segment délimité par une droite et par une parabole, l'on inscrit un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, le triangle inscrit sera plus grand que la moitié du segment.

En effet, soit ABΓ un segment, tel que nous venons de le dire, ayant même base et même hauteur que le segment entier. Dès lors, puisque le triangle a même base et même hauteur que le segment, il est

1. Sous-entendu : menée parallèlement à un diamètre ou à l'axe de la parabole.
2. Sous-entendu : menée parallèlement au diamètre du segment.
3. Voir proposition III.
4. On a, en vertu de la prop. III : $\frac{B\Delta}{B\Theta} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{Z\Theta}^2}$. Or, $A\Delta = 2E\Delta = 2Z\Theta$; donc : $\frac{B\Delta}{B\Theta} = \frac{4\overline{Z\Theta}^2}{\overline{Z\Theta}^2}$, d'où : $B\Delta = 4B\Theta$.
5. $B\Delta = 4B\Theta = 4(B\Delta - \Delta\Theta) = 4(B\Delta - EZ)$, d'où : $B\Delta = \frac{4}{3}EZ$.

Digitized by Google



nécessaire que le point B soit le sommet du segment (1). Donc, la droite AΓ est parallèle à la tangente à la parabole en B (2). Par le point B, menons la droite ΔE parallèle à la droite AΓ, et, par les points A, Γ, les droites AΔ, ΓE parallèles au diamètre ; ces dernières tomberont donc en dehors du segment (3). Dès lors, puisque le triangle ABΓ est la moitié du parallélogramme AΔEΓ, il est clair qu'il est plus grand que la moitié du segment.

COROLLAIRE.

Cela étant démontré, il est évident que, dans un pareil segment, il est possible d'inscrire un polygone tel que les segments restants soient plus petits que toute aire donnée. En effet, il est clair que, si l'on retranche continuellement ce qui, en vertu de cette proposition (4), est plus grand que leur moitié, les segments restants, devenant continuellement plus petits, deviendront moindres que toute aire donnée (5).

PROPOSITION XXI.

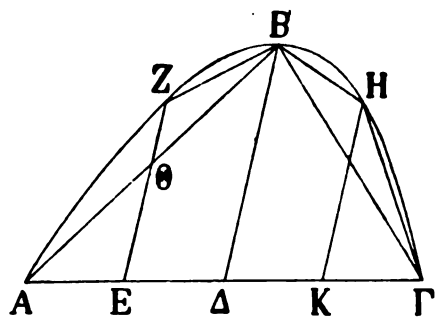
Si, dans un segment délimité par une droite et une parabole, l'on inscrit un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et si, dans les segments restants, l'on inscrit d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments, le triangle inscrit dans

1. Voir les définitions à la fin de la proposition XVII.
2. En vertu de la réciproque de la proposition XVIII, la droite menée du sommet du segment, parallèlement au diamètre, divise AΓ en deux parties égales, d'où, en vertu de la proposition I, la droite AΓ est parallèle à la tangente en B.
3. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XVI.
4. C'est-à-dire en vertu de la proposition XX qui précède.
5. Euclide démontre directement ce corollaire à la proposition I du livre X de ses *Eléments*. Elle est énoncée comme suit : « Deux grandeurs inégales étant proposées, si de la plus grande on retranche une partie plus grande que sa moitié ; si du reste on retranche une partie plus grande que sa moitié, et ainsi de suite ; il restera enfin une certaine grandeur qui sera moindre que la plus petite des grandeurs proposées (Traduction Peyrard, Paris, 1809, p. 283*bis*).

Digitized by Google

le segment entier sera octuple de chacun des triangles inscrits dans les segments qui restent à l'entour.

Soit ABΓ un segment tel que nous venons de le dire ; divisons la droite AΓ en deux parties égales en Δ, et menons la droite BΔ parallèlement au diamètre. Le point B est donc le sommet du segment, et le triangle ABΓ a donc même base et même hauteur que le segment (1). Divisons de nouveau la droite AΔ en deux parties égales au point E, et menons la droite EZ parallèle au diamètre ; la droite AB est coupée par cette dernière au point Θ. Dès lors, le point Z est le sommet du segment AZB (2), et, par conséquent, le triangle AZB a même base et même hauteur que ce segment. Il faut démontrer que le triangle ABΓ est octuple du triangle AZB. La droite BΔ vaut les quatre tiers de la droite EZ (3), et vaut le double de la droite EO (4) ; la droite EΘ est donc double de la droite ΘZ (5) ; en sorte que le triangle AEB est aussi double du triangle ΔBA ; car le triangle AEΘ est double du triangle AΘZ, et le triangle ΘBE est double du triangle ZΘB (6). En conséquence, le triangle ABΓ est octuple du triangle AZB, et l'on démontrerait, de la même manière, qu'il est octuple du triangle inscrit dans le segment BHΓ (7).



1. Voir proposition XVII, *in fine*. Puisque le point B est le sommet du segment ABΓ, on pourra, de ce point, abaisser sur AΓ la plus grande perpendiculaire, laquelle sera à la fois la hauteur du segment et du triangle ABΓ.

2. Puisque AE = EΔ, on a, par similitude de triangles, AΘ = ΘB. Donc, puisque ΘZ, qui passe par le milieu de AB, est parallèle au diamètre, ΘZ est le diamètre du segment AZB, et (proposition XVIII), le point Z est son sommet.

3. Voir proposition XIX et note.

4. On a : $\frac{AE}{A\Delta} = \frac{E\Theta}{B\Delta}$; or, AΔ = 2AE ; donc : BΔ = EΘ.

5. On a, en vertu de la proposition XIX : $B\Delta = \frac{4}{3}EZ$, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente : $E\Theta = \frac{2}{3}EZ = \frac{2}{3}(\Theta Z + E\Theta)$, d'où : EΘ = 2ΘZ.

6. Les triangles AΘZ, AEΘ, qui ont même hauteur, ont comme bases ΘZ et EΘ = 2ΘZ ; donc : triangle AEΘ = 2 triangles AΘZ. D'autre part, les triangles ZΘB, ΘBE, qui ont même hauteur, ont comme bases ΘZ et EΘ = 2ΘZ ; donc : triangle ΘBE = 2 tirangles ZΘB. Dès lors, triangle AEΘ + triangle ΘBE = 2[triangle AΘZ + triangle ZΘB], ou triangle AEB = 2 triangles ZBA.

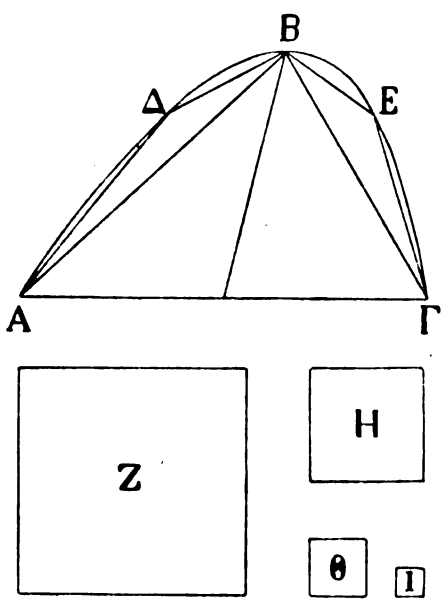
7. On a : triangle ABΔ = 2 triangles AEB, et triangle ABΓ = 2 triangles ABΔ = 4 triangles AEB, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente : triangle ABΓ = 8 triangles AZB, et, de même : triangle ABΓ = 8 triangles BHΓ.

Digitized by Google

PROPOSITION XXII.

Etant donné un segment délimité par une droite et par une parabole, si des aires en nombre quelconque sont établies en une série dont la raison est quatre (1), la plus grande aire étant équivalente au triangle ayant même base et même hauteur que le segment, l'ensemble de toutes ces aires sera plus petit que le segment.

En effet, soit AΔBEΓ un segment délimité par une droite et par une parabole ; soient des aires en nombre quelconque Z, H, Θ, I établies en série ; que celle qui précède soit quadruple de la suivante, l'aire Z étant la plus grande, et que l'aire Z soit équivalente au triangle ayant même base et même hauteur que le segment. Je dis que le segment est plus grand que les aires Z, H, Θ, I.



Soit B le sommet du segment entier, et soient Δ, E les sommets des segments restants. Dès lors, puisque le triangle ABΓ est octuple de chacun des triangles AΔB, BEΓ, il est évident qu'il est quadruple de leur ensemble (2). De plus, puisque le triangle ABΓ équivaut à l'aire Z, les triangles AΔB, BEΓ, par raison identique, équivaudront à l'aire H(3). On démontrera pareillement que les triangles inscrits dans les segments restants, ayant même base et même hauteur que ces segments, sont équivalents à l'aire Θ, et que les triangles inscrits dans les segments obtenus ensuite sont équivalents à l'aire I. Dès lors, l'ensemble des aires données sera équivalent à un certain polygone inscrit dans le segment. Il est donc clair que cet ensemble est plus petit que le segment.

1. C'est-à-dire, comme l'indique la démonstration, en progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{4}$.

2. En vertu de la proposition XXI, on a : ABΓ = 8AΔB = 8BEΓ, d'où : 2ABΓ = 8[AΔB + BEΓ] ou, comme le texte : ABΓ = 4[AΔB + BEΓ].

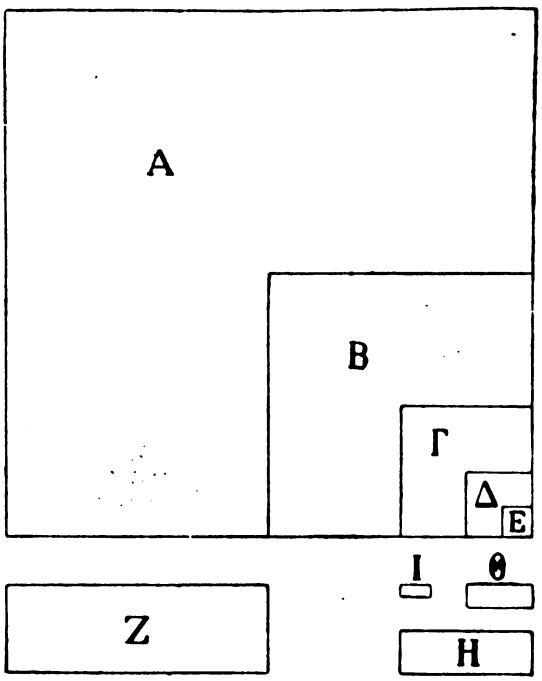
3. Par hypothèse : Z = 4 aires H, et aire Z = triangle ABΓ, d'où, en présence de l'égalité de la note précédente : triangle AΔB + triangle BEΓ = aire H.

Digitized by Google

PROPOSITION XXIII.

Lorsque certaines grandeurs sont établies dans une série dont la raison est quatre, la somme de toutes ces grandeurs, augmentée du tiers de la plus petite, vaudra les quatre tiers de la plus grande.

Soient A, B, Γ, Δ, E des grandeurs en nombre quelconque, établies en série, dont chacune est quadruple de la suivante, et soit A la plus grande. D'autre part, soit Z le tiers de B, H le tiers de Γ, Θ le tiers de Δ, et I le tiers de E. Dès lors, puisque Z est la troisième partie de B, tandis que B est la quatrième partie de A, l'ensemble de B, Z sera la troisième partie de A; par conséquent, pour la même raison, l'ensemble de H, Γ, sera la troisième partie de B ; l'ensemble de Θ, Δ, la troisième partie de Γ, et l'ensemble de I, E, la troisième partie de Δ. Il en résulte que l'ensemble de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I sera aussi la troisième partie de l'ensemble de A, B, Γ, Δ. Or, l'ensemble de Z,H,Θ est aussi la troisième partie de l'ensemble de B, Γ, Δ ; par conséquent, l'ensemble de B, Γ, Δ, E, I est aussi la troisième partie du reste A. Dès lors, il est évident que l'ensemble de A, B, Γ, Δ, E, augmenté de I, c'est-à-dire augmenté du tiers de E, vaut les quatre tiers de A (1).



1. Les grandeurs A, B, Γ, Δ, E étant en progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{4}$, on aura : $B=\frac{1}{4}A$. Or, on pose : $Z=\frac{1}{3}B$; donc : $B+Z=(\frac{1}{4}+\frac{1}{12})A=\frac{1}{3}A$. On aura de même : $H+\Gamma=\frac{1}{3}B$, $\Theta+\Delta=\frac{1}{3}\Gamma$, et $I+E=\frac{1}{3}\Delta$; d'où : $B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta+I=\frac{1}{3}(A+B+\Gamma+\Delta)$. Or, on a posé : $Z=\frac{1}{3}B$, $H=\frac{1}{3}\Gamma$, et $\Theta=\frac{1}{3}\Delta$; donc : $Z+H+\Theta=\frac{1}{3}(B+\Gamma+\Delta)$, d'où, substituant dans l'égalité précédente, il vient : $B+\Gamma+\Delta+E+\frac{1}{3}(B+\Gamma+\Delta)+I=\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B+\Gamma+\Delta$, ou $B+\Gamma+\Delta+E+I=\frac{1}{3}A$, d'où, ajoutant A de part et d'autre, et observant que l'on a posé $I=\frac{1}{3}E$, il vient, comme le texte : $A+B+\Gamma+\Delta+E+\frac{1}{3}E=\frac{4}{3}A$.

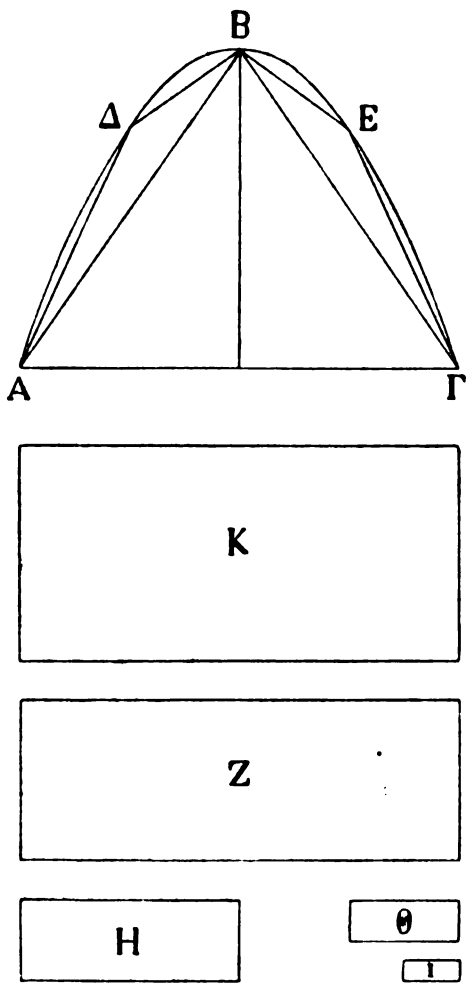
Algébriquement, la somme d'une progression décroissante par quotient s'obte-

Digitized by Google

PROPOSITION XXIV.

Tout segment délimité par une droite et par une parabole équivaut aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment.

En effet, soit AΔBEΓ un segment délimité par une droite et par une parabole ; soit ABΓ un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et soit une aire K équivalente aux quatre tiers du triangle ABΓ. Il faut démontrer que cette aire est équivalente au segment AΔBEΓ. En effet, si elle n'est pas équivalente, elle est plus grande ou plus petite. Que le segment AΔBEΓ soit d'abord plus grand que l'aire K, s'il se peut. Dès lors, inscrivons les triangles AΔB, BEΓ, comme il a été dit (1), et, dans les segments qui restent alentour, inscrivons d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments ; enfin, inscrivons, dans les segments successivement obtenus, deux triangles ayant même base et même hauteur que les segments. Il en résulte que les segments abandonnés seront plus petits que l'excédent dont le segment AΔBEΓ dépasse l'aire K (2) ; en



nant en retranchant du premier terme le produit du dernier terme par la raison, et en divisant la différence par l'excès de l'unité sur la raison, on aurait aussitôt : $S = \frac{A - \frac{1}{4}E}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E$, d'où : $S + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}A$.

1. C'est-à-dire, comme il a été dit à la proposition XXI.
2. Voir proposition XX, corollaire.

Digitized by Google

sorte que le polygone inscrit sera plus grand que l'aire K ; ce qui est impossible. En effet, puisque certaines aires sont disposées dans une série dont la raison est quatre, que le triangle ABΓ est d'abord quadruple des triangles AΔB, BEΓ (1), qu'ensuite ces derniers sont quadruples des triangles inscrits dans les segments suivants, et ainsi continuellement, il est évident que l'ensemble de ces aires est plus petit que les quatre tiers de la plus grande (2). Or, l'aire K vaut les quatre tiers de la plus grande aire (3) ; par conséquent, le segment AΔBEΓ n'est pas plus grand que l'aire K.

Au reste, qu'il soit plus petit, s'il se peut. Dès lors, disposons une aire Z équivalente au triangle ABΓ, une aire H équivalente au quart de l'aire Z, et, de même, une aire Θ équivalente au quart de l'aire H ; et disposons ainsi successivement des aires jusqu'à l'obtention d'une dernière aire plus petite que l'excédent dont l'aire K dépasse le segment. Soit I cette plus petite aire. Donc, l'ensemble des aires Z, H, Θ, I, augmenté du tiers de l'aire I, vaut les quatre tiers de l'aire Z(4).

Or, l'aire K vaut aussi les quatre tiers de l'aire Z ; par conséquent, l'aire K équivaut à l'ensemble des aires Z, H, Θ, I, augmenté de la troisième partie de l'aire I (5). Dès lors, puisque l'aire K excède l'ensemble des aires Z, H, Θ, I d'une aire plus petite que l'aire I, et qu'elle excède le segment d'une aire plus grande que l'aire I, il est évident que l'ensemble des aires Z, H, Θ, I est plus grand que le segment ; ce qui est impossible. En effet, il a été démontré que, lorsque des aires en nombre quelconque sont établies dans une série dont la raison est quatre, et que la plus grande est équivalente au triangle inscrit dans le segment, l'ensemble de ces aires sera plus petit que le segment (6). En conséquence, le segment AΔBEΓ n'est pas plus petit que l'aire K. Or, il a été démontré qu'il n'est pas plus

1. Voir proposition XXI.
2. Voir proposition XXIII et note.
3. Par hypothèse : $K=\frac{4}{3}$ triangle ABΓ, et triangle ABΓ est la plus grande aire.
4. Voir proposition XXIII. On aura : $Z+H+\Theta+I+\frac{1}{3}I=\frac{4}{3}Z$.
5. On a posé : $K=\frac{4}{3}Z$; donc, en présence de l'égalité de la note précédente, on a, comme le texte : $K=Z+H+\Theta+I+\frac{1}{3}I$.
6. L'égalité de la note précédente donne : $K-(Z+H+\Theta+I)=\frac{1}{3}I<I$. D'autre part, en 2de hypothèse, on a : aire $K>$ segt AΔBEΓ, et aire $K-$ segt AΔBEΓ $>I$, d'où, comparant avec la 1re inégalité, on a, à fortiori : $K-(Z+H+\Theta+I)<K-$ segment AΔBEΓ, ou, comme le texte : $Z+H+\Theta+I>$ segment AΔBEΓ ; relation impossible. En effet, la proposition XXII a démontré que l'on a : $Z+H+\Theta+I<$ segment AΔBEΓ.

Digitized by Google

grand ; donc, il est équivalent à l'aire K. Or, l'aire K vaut les quatre tiers du triangle ABΓ ; donc, le segment AΔBEΓ vaut aussi les quatre tiers du triangle ABΓ.

Digitized by Google

DES CORPS FLOTTANTS

LIVRES I ET II

Digitized by Google

Digitized by Google

DES CORPS FLOTTANTS.

LIVRE I.

Nous posons en principe que la nature d'un fluide est telle que, ses parties étant uniformément disposées et continues, celle qui est moins comprimée est déplacée par celle qui l'est davantage, et que chacune de ses parties est comprimée, suivant la perpendiculaire, par le fluide placé au-dessus, à moins que ce fluide ne soit renfermé quelque part, ou qu'il ne soit comprimé par quelqu'autre chose.

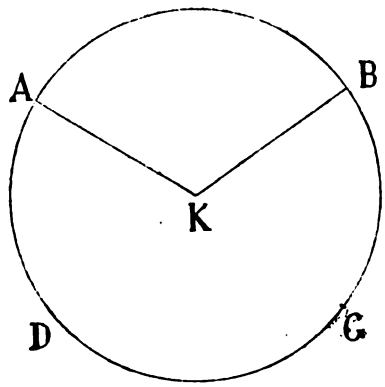
PROPOSITION I.

Lorsqu'une surface est coupée par un plan, passant toujours par un même point, déterminant, comme section (1), *une circonférence de cercle ayant comme centre le point par où passe le plan sécant, la surface sera celle d'une sphère.*

En effet, soit une certaine surface coupée par un plan passant par le point K, *et déterminant toujours, comme section, une circonférence*

1. Les deux livres *Des Corps Flottants* n'étaient connus jusqu'ici que dans une version latine, faite au moyen-âge, sur le texte grec d'un manuscrit qui a disparu, lorsque le palimpseste de Jérusalem, récemment découvert, est venu nous restituer la majeure partie du texte grec de l'ouvrage. Notre traduction suit donc ce nouveau texte grec, et, dans tous les passages où ce texte fait malheureusement défaut, principalement au livre II, notre traduction, usant de caractères italiques, s'en rapportera à la version latine du XIII[e] siècle, infiniment précieuse, due au moine flamand Guillaume de Moerbeke, dit de Brabant.

Digitized by Google

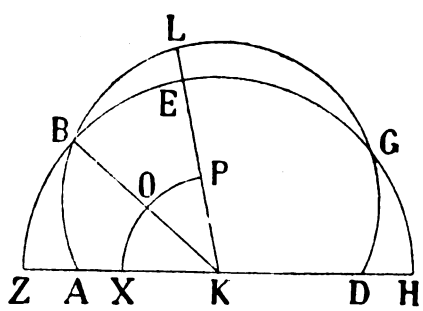


de cercle dont le centre est K. *Si, dès lors, cette surface n'est pas une surface sphérique, les droites qui aboutissent du centre à la surface ne seront pas toutes égales. Soient donc* A, B, G, D *des points de la surface, et que les droites* AK, KB *soient inégales. Menons par* KA, KB *un plan qui détermine la ligne* DABG *comme section dans la surface. Cette ligne fait partie d'un cercle dont le centre est* K, *puisque cela a été supposé ainsi pour la surface ; par conséquent, les lignes* KA, KB *ne sont pas inégales. Dès lors, il est nécessaire que la surface soit une surface sphérique.*

PROPOSITION II.

La surface de tout fluide, dont l'état est tel qu'il reste en repos, aura la forme d'une sphère dont le centre est le même que celui de la terre.

En effet, imaginons un fluide dont l'état soit tel qu'il reste immobile, et coupons sa surface par un plan passant par le centre de la terre. Soit K *le centre de la terre, et soit la ligne* ABGD *la section de la surface. Je dis que la ligne* ABGD *est une circonférence de cercle dont le centre est* K. *En effet, s'il n'en est pas ainsi, les droites qui, menées du point* K, *rencontrent la ligne* ABGD *ne seront pas égales. Dès lors, prenons une certaine droite, plus grande que telle droite menée de* K *à la ligne* ABGD, *et plus petite que telle autre, et, du centre* K *décrivons un cercle à la distance de la ligne choisie. La circonférence de ce cercle tombera donc en partie à l'extérieur et en partie à l'intérieur de la ligne* ABGD, *parce que la ligne qui part du centre est plus grande que telle ligne menée de* K *à la rencontre de la ligne* ABGD *et plus petite que telle autre. Soit donc* ZBH *la circonférence du cercle décrit ; menons la droite qui relie* B *à* K, *et*



Digitized by Google

que les droites ZK, KEL *rencontrent cette dernière en formant des angles égaux. D'autre part, du point* K *décrivons une certaine circonférence dans le plan et dans le fluide. Dès lors, les parties du fluide situées suivant la circonférence* XOP *sont uniformément réparties et continues entre elles ; celles qui sont situées suivant l'arc* XO *sont pressées par le fluide de la région* AB, *et celles qui sont situées suivant l'arc* OP *sont pressées par le fluide de la région* BL. *Les parties du fluide situées suivant l'arc* XO *sont donc pressées d'une manière différente de celles qui sont situées* (1) suivant l'arc OΠ (2) ; en sorte que celles qui sont moins pressées seront déplacées par celles qui le sont davantage (3), et que, par conséquent, le fluide ne restera pas en repos. Or, on a supposé qu'il était placé dans un état tel qu'il reste en repos. Donc, il est nécessaire que la ligne ABΓΔ (4) soit une circonférence de cercle, et que son centre soit le point K. On démontrerait pareillement que, si la surface du fluide était coupée de quelque autre manière par un plan passant par le centre de la terre, la section serait encore une circonférence de cercle dont le centre serait le même que le centre de la terre. En conséquence, il est évident que la surface d'un fluide, restant en repos, a la figure d'une sphère ayant même centre que la terre, puisque, cette surface étant coupée suivant un même point, la section obtenue est une circonférence de cercle ayant comme centre le point où passe le plan sécant (5).

PROPOSITION III.

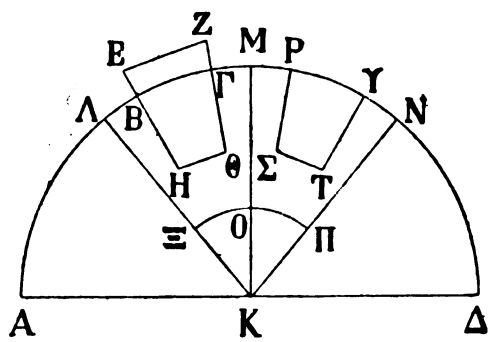
Les grandeurs solides, de même densité (6) qu'un fluide, et abandonnées dans ce fluide, s'immergent de manière à ne pas dépasser la

1. Reprise du nouveau texte grec. Faisons remarquer que ce texte se rapporte à la figure au moyen de lettres capitales grecques auxquelles la version latine, que nous venons de suivre, avait substitué des caractères romains.
2. C'est-à-dire OP sur la figure de la version latine.
3. Voir les hypothèses sur la nature des fluides, en tête de la proposition I.
4. C'est-à-dire ABGD sur la figure de la version latine.
5. Voir proposition I.
6. Le mot ἰσοβαρέοντα, littéralement : « qui ont même poids », doit être pris ici dans le sens d'avoir même poids sous même volume, c'est-à-dire même densité. C'est d'ailleurs le sens adopté par la plus ancienne version latine qui dit : « aequalis molis et aequalis ponderis », et par les versions latines de Barrow (*loc. cit.*, p. 246) et de Torelli (*loc. cit.*, p. 334) qui emploient l'expression : « quae aequalem molem habentes aeque graves sunt ». La version latine récente d'Heiberg (*loc. cit.*, vol. II,

Digitized by Google

surface du fluide, et ne descendent pas dans la partie inférieure du fluide.

En effet, abandonnons, dans un fluide, une grandeur solide ayant même densité que ce fluide, et qu'une de ses parties dépasse, si possible, la surface du fluide, tandis que le fluide est dans un état tel qu'il reste immobile. Imaginons donc un plan passant par le centre de la terre et du fluide, ainsi que par la grandeur solide. Soit l'arc ABΓΔ la section de la surface du fluide ; soit la figure EZHΘ la section de la grandeur solide, et soit K le centre de la terre. Soit, d'autre part, BΓHΘ la section du solide plongée dans le fluide, et BEZΓ la section qui en émerge. Dès lors, imaginons une figure solide, en forme de pyramide, ayant comme base un parallélogramme dans la surface du fluide, comme sommet le centre de la terre, et que les droites KΛ, KM soient les sections du plan dans lequel est situé l'arc ABΓΔ et celles des plans de la pyramide. Décrivons autour du cercle K quelque autre surface sphérique dans le fluide, au-dessous de EZHΘ, et qu'elle soit coupée par le plan (1). Prenons encore une autre pyramide égale, semblable et contiguë à celle qui embrasse le solide. Que les droites KM, KN soient les sections de ses plans, et imaginons, dans le fluide, une certaine grandeur PΣTϒ, empruntée au fluide, égale et semblable à la partie du solide plongée dans le fluide suivant les lettres B, H, Θ, Γ. Dès lors, les parties de fluide qui, dans la première pyramide, sont dans la surface où se trouve l'arc ΞO, et celles qui, dans l'autre pyramide, sont dans la surface où se trouve l'arc ΠO, sont uniformément disposées et continues. Elles ne sont d'ailleurs pas pressées de la même manière. En effet, celles qui sont disposées suivant l'arc ΞO sont pressées par le solide ΘHEZ, ainsi que par le fluide situé entre les surfaces suivant les arcs ΞO, ΛM et entre les plans de la pyramide ; tandis que celles qui sont disposées suivant



p. 321) emploie néanmoins l'expression : « quae eandem gravitatem habent », tandis que Heath, dans sa traduction anglaise libre et résumée (*loc. cit.*, p. 255), dit : « of solids those which, size for size, are of equal weight with a fluid. »

1. C'est-à-dire par le plan dans lequel est situé l'arc ABΓΔ.

Digitized by Google

l'arc ΠΟ sont pressées par le fluide situé entre les surfaces suivant les arcs ΠΟ, MN et entre les plans de la pyramide. Or, le poids du fluide situé entre MN, ΟΠ sera plus petit. En effet, le fluide situé suivant ΡΣΤΥ est plus petit que le solide ΕΖΗΘ (car il équivaut à la partie du solide suivant ΗΒΘΓ, parce que la grandeur est la même, et que le solide a été supposé avoir la même densité que le fluide) (1), et le reste du solide équivaut à un reste de fluide. Dès lors, il est évident que la partie (2) située suivant l'arc ΟΠ sera déplacée par la partie située suivant l'arc ΟΞ (3), et le fluide ne sera pas immobile. Or, on a supposé qu'il était immobile ; par conséquent, rien de la grandeur solide ne dépassera la surface du fluide. Le solide immergé ne descendra cependant pas à la partie inférieure ; car toutes les parties du fluide uniformément disposées sont également pressées, parce que le solide a la même densité que le fluide.

PROPOSITION IV.

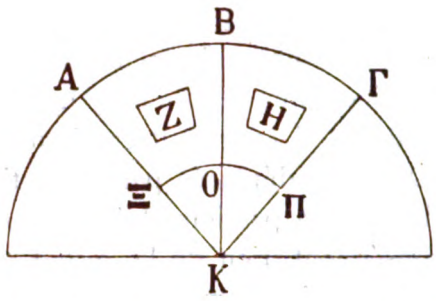
Une grandeur solide, moins dense qu'un fluide, abandonnée dans ce fluide, ne sera pas immergée entièrement ; mais une partie sera à l'extérieur de la surface du fluide.

En effet, soit une grandeur solide moins dense qu'un fluide qui, abandonnée dans ce fluide, soit, si possible, entièrement immergée, et dont aucune partie ne soit à l'extérieur de la surface du fluide ; le fluide étant, du reste, placé dans des conditions telles qu'il demeure sans mouvement. Dès lors, imaginons un plan quelconque mené par le centre de la terre, et au travers du fluide et de la grandeur solide. Que la surface du fluide soit coupée par ce plan suivant l'arc ΑΒΓ, la grandeur solide suivant la figure où se trouve Ζ, et que le point Κ soit le centre de la terre. Imaginons, comme précédemment (4), une pyramide embrassant la figure Ζ, dont le sommet soit le point Κ, et dont les plans (5) soient coupés par le plan ΑΒΓ suivant les droites ΑΚ, ΚΒ. Prenons encore une autre pyramide, égale et semblable à la pre-

1. La phrase incidente placée entre parenthèses constitue probablement un petit commentaire interpolé.
2. Sous-entendu : du fluide.
3. Voir les hypothèses émises avant la proposition I.
4. Voir proposition III.
5. C'est-à-dire, les surfaces latérales de la pyramide.

Digitized by Google

mière, et coupons ses plans par le plan (1) suivant les droites KB, KΓ. D'autre part, dans le fluide, au-dessous de la grandeur solide, décrivons encore une autre surface sphérique autour du centre K, et que le plan coupe cette surface suivant l'arc ΞOΠ. Imaginons aussi une grandeur empruntée au fluide, dans laquelle se trouve H, égale au solide qui se trouve en Z dans l'autre pyramide. Il s'ensuit que les parties de fluide qui, dans la première pyramide, sont situées dans la surface qui règne suivant l'arc ΞO, et que celles qui, dans la seconde pyramide, sont situées dans la surface qui règne suivant l'arc OΠ, sont uniformément disposées et continues entre elles. Elles ne sont cependant pas pressées de la même manière. En effet, celles qui sont dans la première pyramide sont pressées par la grandeur solide placée en Z et par le fluide enveloppant contenu dans l'espace pyramidal suivant A, B, O, Ξ ; tandis que celles qui sont dans l'autre pyramide sont pressées par le fluide environnant contenu dans l'espace pyramidal suivant Π, O, B, Γ. Or, le poids de la grandeur Z est moindre que le poids de la grandeur H, parce que ces grandeurs sont égales, et que l'on a supposé la grandeur solide moins dense que le fluide; d'autre part, les poids du fluide enveloppant les grandeurs Z, H dans chacune des pyramides sont égaux. En conséquence, la partie du fluide située dans la surface qui règne suivant l'arc OΠ sera pressée davantage ; elle déplacera donc la partie moins pressée, et le fluide ne restera pas immobile. Or, il a été supposé immobile ; par conséquent, la grandeur solide ne sera pas immergée entièrement, mais une de ses parties sera à l'extérieur de la surface du fluide.



PROPOSITION V.

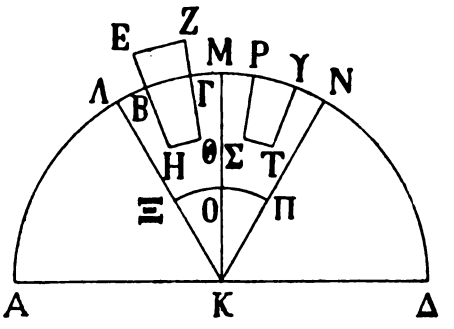
Une grandeur solide, moins dense qu'un fluide, abandonnée dans ce fluide, sera immergée jusqu'au point où un volume (2) de fluide,

1. C'est-à-dire, par le plan ABΓ.
2. Le mot ὄγκος, que les versions latines rendent par le mot « moles », ne pourrait être traduit en français par le mot « masse » sans prêter à confusion en

Digitized by Google

tel que le volume de la partie immergée, ait le même poids que la grandeur entière.

Faisons les mêmes constructions que précédemment (1) ; que le fluide soit sans mouvement, et soit EZHΘ une grandeur moins dense que le fluide. Dès lors, puisque le fluide est sans mouvement, ses parties uniformément disposées sont pressées semblablement ; par conséquent, le fluide situé dans la surface qui règne suivant les arcs ΞO, ΠO est pressé semblablement; en sorte que le poids qui les presse est le même. Or, le poids du fluide contenu dans la première pyramide, exception faite du solide BHΘΓ, est égal au poids du fluide contenu dans l'autre pyramide, exception faite du fluide PΣTY. Dès lors, il est évident que le poids de la grandeur EZHΘ est égal au poids du fluide PΣTY. Il est donc clair qu'un volume de fluide, tel que celui de la partie immergée de la grandeur solide, a le même poids que la grandeur entière.



PROPOSITION VI.

Les solides moins denses qu'un fluide, introduits forcément dans ce fluide, sont renvoyés vers le haut avec une force telle que celle du poids dont le volume de fluide, égal au volume de la grandeur solide, l'emporte sur le poids de cette grandeur.

Soit A une certaine grandeur moins dense qu'un fluide ; soit B le poids de la grandeur A, et BΓ (2) celui du fluide ayant même volume que la grandeur A. On doit démontrer que la grandeur A, introduite forcément dans le fluide, sera renvoyée vers le haut par une force représentée par le poids Γ.

En effet, prenons une certaine grandeur Δ ayant un poids égal au

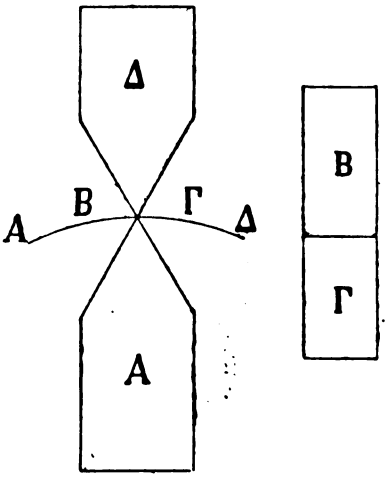
---

présence de la signification de rapport, plutôt que de quantité, donnée à ce mot en mécanique. Adoptant ses significations figurées de « grosseur »ou d' « enflure », nous l'avons traduit par le mot « volume ».

1. C'est-à-dire celles de la figure qui accompagne la proposition III.
2. C'est-à-dire B + Γ.

Digitized by Google

poids Γ. Dès lors, la grandeur formée de l'ensemble des deux grandeurs A, Δ est moins dense que le fluide ; car le poids de la grandeur formée de ces deux grandeurs est BΓ, et celui du fluide ayant même volume que cette grandeur est plus grand que BΓ, parce que BΓ est le poids du fluide ayant même volume que la grandeur A. Donc, si la grandeur formée de l'ensemble des deux grandeurs A, Δ est abandonnée dans le fluide, elle sera immergée jusqu'au point où un volume de fluide, tel que celui de la partie immergée de la grandeur, ait le même poids que la grandeur entière ; car cela a été démontré (1). Que l'arc ABΓΔ soit la surface d'un certain fluide. Dès lors, puisqu'un volume de fluide, tel que celui de la grandeur A, a même poids que l'ensemble des grandeurs A, Δ, il est évident que la partie immergée de cet ensemble sera la grandeur A, et que son reste Δ sera entièrement au-dessus de la surface du fluide ; car si le solide était immergé d'une autre manière, ce serait en opposition avec ce qui a été démontré antérieurement (2). Il est donc évident que la grandeur A est renvoyée vers le haut avec une force telle que celle avec laquelle la grandeur Δ, située au-dessus, presse vers le bas, puisque l'une ne l'emporte pas sur l'autre (3). Or, la grandeur Δ presse vers le bas d'un poids tel que Γ, vu qu'on a supposé le poids de la grandeur Δ égal au poids Γ ; par conséquent, ce qui devait être démontré est évident.



PROPOSITION VII.

Les grandeurs plus denses qu'un fluide, abandonnées dans ce fluide, sont portées vers le bas jusqu'à ce qu'elles soient au fond ; et elles

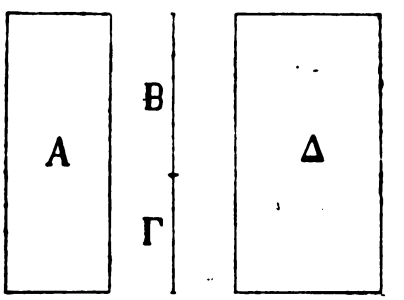
1. Voir proposition V.
2. La phrase qui précède, à partir du mot « car », présente une lacune de quelques mots. Nous la traduisons d'après une reconstitution conjecturale proposée par Heiberg (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 333).
3. C'est-à-dire que la force ascensionnelle du solide A est équilibrée par le poids de la grandeur Δ.

Digitized by Google

seront allégées, dans le fluide, du poids d'un volume de fluide équivalent au volume de la grandeur solide.

Il est évident que ces grandeurs seront portées vers le bas jusqu'à ce qu'elles arrivent au fond ; car les parties de fluide situées au-dessous d'elles sont pressées davantage que les parties situées symétriquement autour d'elles, puisque nous avons supposé la grandeur solide plus dense que le fluide. Nous allons démontrer, d'autre part, que ces grandeurs solides seront allégées comme nous venons de le dire.

Soit une certaine grandeur A plus dense que le fluide ; soit BΓ (1) le poids de la grandeur A, et soit B le poids d'un volume de fluide équivalent à celui de la grandeur A. On doit démontrer que la grandeur A aura, dans le fluide, un poids égal à Γ.



En effet, prenons une certaine grandeur, dans laquelle se trouve Δ, moins dense que le fluide ; que le poids de la grandeur dans laquelle se trouve Δ soit égal au poids B, et que le poids d'un volume de fluide, équivalent à celui de la grandeur Δ, soit égal au poids BΓ. Dès lors, les grandeurs dans lesquelles se trouvent A, Δ étant prises ensemble, la grandeur formée de l'une et de l'autre aura la même densité que le fluide. En effet, le poids de ces grandeurs prises ensemble vaut l'ensemble des poids BΓ et B. Or, le poids d'un volume de fluide équivalent à celui des deux grandeurs prises ensemble est égal aux poids de ces grandeurs ; par conséquent, ces grandeurs, abandonnées dans le fluide, seront en équilibre avec le fluide, et elles ne seront portées ni vers le haut ni vers le bas (2). Ainsi, la grandeur, dans laquelle se trouve A, sera sollicitée vers le bas, et elle sera sollicitée vers le haut, avec la même force, par la grandeur dans laquelle se trouve Δ ; tandis que la grandeur, dans laquelle se trouve Δ, puisqu'elle est moins dense que le fluide, sera sollicitée vers le haut par une force représentée par le poids Γ ; car il a été démontré que les grandeurs solides, moins denses qu'un fluide, introduites forcément dans ce fluide, sont renvoyées vers le haut avec une force telle que celle du poids dont le volume de fluide, équivalent à la grandeur solide,

1. C'est-à-dire B + Γ.
2. Voir proposition III.

Digitized by Google

l'emporte sur le poids de cette grandeur (1). Or, le poids d'un volume de fluide équivalent à la grandeur Δ l'emporte du poids Γ sur le poids de la grandeur Δ ; par conséquent, il est évident que la grandeur, dans laquelle se trouve A, est aussi portée vers le bas avec une force telle que celle du poids Γ (2).

Nous posons en principe que toutes les grandeurs qui, dans un fluide, sont portées vers le haut, le sont suivant la verticale menée par leur centre de gravité.

---

1. Voir proposition VI.

2. La proposition qui précède dégage le principe fondamental de l'hydrostatique connu sous le nom de principe d'Archimède. D'après Vitruve, Archimède aurait découvert son principe en cherchant les quantités d'or et d'argent contenues dans la couronne du roi Hiéron, au moyen d'une méthode qu'il suppose être la suivante, et qui se résume algébriquement ainsi :

Soit C le poids de la couronne d'alliage, O le poids d'or, A le poids d'argent. La couronne déplace un volume d'eau E ; un poids d'or égal à celui de la couronne déplace un volume d'eau E′ ; un poids d'argent égal à celui de la couronne déplace E″. Le poids d'or O déplacera donc le volume d'eau $\frac{O}{C}E'$, et le poids d'argent déplacera $\frac{A}{C}E''$. L'alliage $C=O+A$ déplacera donc le volume d'eau $E=\frac{O}{C}E'+\frac{A}{C}E''$, d'où : $(O+A)E=OE'+AE''$, ou: $O(E-E')=A(E''-E)$, d'où : $\frac{O}{A}=\frac{E''-E}{E-E'}$, ou rapport de l'or à l'argent exprimé en volume ou en poids du liquide. (Voir Vitruve, éd. précitée, tome II, liv. IX, chap. III, p. 175). Une autre méthode, aboutissant d'ailleurs au rapport qui précède, est indiquée par Priscianus dans le curieux poème de 31 vers qui termine le chapitre « de ponderibus et mensuris » de son ouvrage intitulé : *Volumen de octo partibus orationis*. Cet ouvrage, imprimé d'abord chez Vindelin de Spire, à Venise, 1470, in-fol., et, en dernier lieu, chez les Alde, à Venise, en 1527, in-4°, est devenu fort rare; mais le poème relatif à la méthode d'Archimède a été reproduit dans l'édition d'Archimède de Torelli. (Oxford, 1792, p. 364).

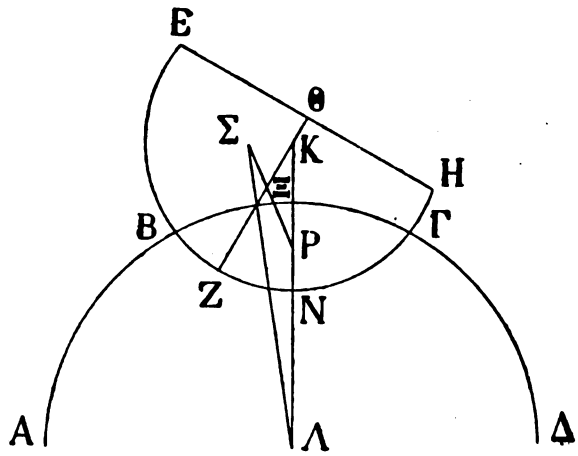
Dans son édition de Vitruve, précieuse à cause des notes qui l'accompagnent pour la première fois, Guillaume Philander donne la méthode suivante, que nous traduisons librement en la résumant : « mesurer ou peser l'eau qui déborde à l'immersion successive d'une couronne en alliage, en or et en argent. Soit l le poids de la couronne, b le poids ou la mesure de l'eau correspondant à l'immersion de l'or; c correspondant à l'argent, et d correspondant à l'alliage. Soit $c-b=f$; $d-b=g$; $c-d=h$; $\frac{l}{f}=m$; $m\times g=n$, et $m\times h=p$. En observant que p est le poids de l'or, et n celui de l'argent, appliquez la proposition 17 du livre VII d'Euclide. » Or, cette proposition d'Euclide dit : « Si un nombre en multiplie deux autres, les produits ont entre eux le même rapport que les multipliés. » Dès lors, les relations précédentes donnent : $\frac{p}{n}=\frac{c-d}{d-b}$; ce qui fait retomber sur le même rapport que précédemment. (Voir : M. Vitruvii Pollionis, *de Architectura libri decem, accesserunt Gulielmi Philandri annotationes* etc., Lugduni, 1552, in-8°, p. 361).

Digitized by Google

PROPOSITION VIII.

Si une grandeur solide, moins dense qu'un fluide, et ayant la figure d'un segment sphérique, est abandonnée dans ce fluide de manière que la base du segment ne soit pas en contact avec le fluide, la figure se mettra droite, de telle sorte que l'axe du segment soit dans la direction de la verticale ; d'autre part, si une cause quelconque fait pencher la figure de manière que la base vienne en contact avec le fluide, si on l'abandonne, elle ne restera pas inclinée, mais elle se remettra droite(1).

En effet, imaginons une certaine grandeur, comme nous venons de le dire, abandonnée dans un fluide, et imaginons un plan mené par l'axe du segment et par le centre de la terre. Soit ABΓΔ la section de la surface du fluide, l'arc EZHΘ la section de la figure abandonnée dans le fluide, et soit ΘZ l'axe du segment. Le centre de la sphère est donc situé sur la droite ΘZ. Que ce centre soit K si, en premier lieu, le segment est plus grand que l'hémisphère, et que la figure soit, si possible, inclinée par quelque cause ou de son propre



1. On ne possédait que le simple énoncé de cette proposition dans la version latine qui nous restait des deux livres *Des Corps flottants*, lorsque le palimpseste de Jérusalem est venu nous restituer le texte grec de la démonstration. Cependant, Fréd. Commandin avait déjà reconstitué une bonne démonstration de la prop. VIII dans son ouvrage édité à Bologne, en 1565, sous le titre: « Archimedis de iis quae vehuntur in aqua, libri duo, a Fred. Commandino restituti et illustrati. Ejusdem F. Commandini liber de centro gravitatis solidorum ». La démonstration de Commandin a été reproduite dans l'édition d'Archimède de Torelli (Oxford, 1792, p. 337). De son côté, Barrow avait également donné une démonstration satisfaisante de la proposition VIII dans sa version latine abrégée des œuvres d'Archimède (Londres, 1675, p. 249). La démonstration de Commandin se rapproche très fort de la démonstration originale que nous traduisons ici, et il y a lieu d'attribuer le fait, non seulement à la grande connaissance que Commandin avait acquise de la manière d'Archimède, mais à la circonstance qu'il a pu être guidé par l'ordonnance de la démonstration de la proposition IX, qui est pour ainsi dire la contre-partie de la proposition VIII.

Digitized by Google

chef. Dès lors, on doit démontrer qu'elle ne restera pas ainsi, mais qu'elle se remettra droite, de manière que les points Z, Θ soient situés suivant la verticale.

En effet, puisqu'on suppose la figure inclinée, les points Z, Θ ne sont pas situés suivant la verticale. Menons donc la droite KΛ par les points K et Λ, et supposons que le point Λ soit le centre de la terre (1). Dès lors, la figure découpée dans le fluide, à partir de la surface du fluide, a son axe sur la droite KΛ ; car, lorsque deux surfaces sphériques se coupent réciproquement, la section est un cercle perpendiculaire à la droite reliant les centres de ces sphères (2). Il en résulte que le centre de gravité de la figure, découpée dans le fluide suivant l'arc BNΓ, est situé sur la droite KΛ. Soit P ce centre de gravité. Or, le centre de gravité du segment entier, suivant l'arc ΘHZE, est situé sur la droite ZΘ. Que ce centre soit Ξ. Dès lors, le centre de gravité de la figure, qui reste en dehors de la surface du fluide, est situé sur la droite PΞ, prolongée et coupée suivant une certaine droite ΣΞ, dont le rapport à la droite ΞP est le même que celui du poids du segment, suivant l'arc BNΓ, au poids du segment extérieur au fluide ; car cela a été démontré (3). Soit donc Σ le centre de la figure que nous venons de dire. Dès lors, puisque le poids de la figure, située à l'extérieur du fluide, la sollicite vers le bas suivant la droite ΛΣ, et que la figure, située dans le fluide, est portée vers le haut suivant la droite PK (4), il est évident que la figure ne restera pas immobile, mais que ses parties, situées du côté de E, seront dé-

1. La droite KΛ est donc la verticale qui passe par le point K.

2. Archimède admet ici, comme démontré, que l'intersection de deux sphères est une circonférence de cercle, dont le plan est perpendiculaire à la droite qui relie les centres des deux sphères, et dont le centre est situé sur cette droite. Or, la démonstration de ce théorème, à l'époque d'Archimède, devait invoquer successivement les propositions 8, 4 et 13 du livre I, la proposition 9 du livre II et la proposition 4 du livre XI d'Euclide.

Nous n'avons cependant pas trouvé une démonstration directe de cette proposition par la géométrie ancienne dans le magnifique traité *De la Sphère*, véritable introduction à la trigonométrie sphérique, de Théodose de Tripolis, qui écrivit 60 ans avant J.-C., et dont l'ouvrage, publié pour la première fois avec une version latine par Jean Pena, à Paris, 1558, in-4°, n'a pas encore été traduit complètement en français.

En géométrie récente, le principe de la rotation permet de démontrer cette proposition, en disant que cette intersection est la circonférence engendrée par la rotation, autour de la ligne des centres, du point commun aux deux circonférences suivant lesquelles les deux sphères sont coupées par un plan quelconque passant par la ligne des centres.

3. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, proposition VIII.

4. Voir l'hypothèse qui précède l'énoncé de la proposition.

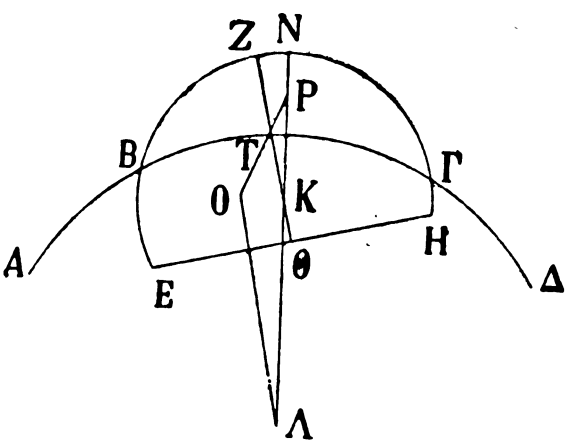
Digitized by Google

placées vers le bas, tandis que celles qui sont situées du côté de H le seront vers le haut ; et elles seront ainsi déplacées continuellement jusqu'à ce que la droite ZΘ s'établisse suivant la verticale. Or, la droite ZΘ, une fois établie suivant la verticale, les centres de gravité de la partie située dans le fluide et de la partie située hors du fluide seront sur la même verticale ; car ils seront situés sur la droite ZΘ. Donc, les poids se presseront l'un l'autre en sens contraire suivant la même verticale, l'un porté vers le haut, l'autre vers le bas, de manière que la figure restera immobile ; car l'un ne sera pas déplacé par l'autre. Il en sera encore de même si la figure était un hémisphère, ou si elle était plus petite que l'hémisphère.

PROPOSITION IX.

Au reste, même si cette figure (1), moins dense que le fluide, est abandonnée dans le fluide de manière que sa base soit entièrement dans le fluide, la figure se mettra droite, de telle sorte que son axe soit dans la direction verticale.

En effet, imaginons qu'une certaine grandeur, telle que nous venons de le dire, soit abandonnée dans le fluide. Imaginons aussi un plan mené par l'axe du segment et par le centre de la terre. Soit l'arc ABΓΔ la section de la surface du fluide ; soient l'arc EZH et la droite EH la section de la figure, et soit ZΘ l'axe du segment. Que la droite ZΘ ne soit pas, si possible, dans la direction verticale. Il faut donc démontrer que la figure ne restera pas en repos, mais qu'elle se mettra droite. Le centre de la sphère est donc sur la droite ZΘ. Que la figure soit encore une fois d'abord plus grande que l'hémisphère, et soit K le centre. Menons la droite KΛ par le point K et par



1. C'est-à-dire la figure considérée dans la proposition VIII en forme de segment sphérique.

Digitized by Google

le centre de la terre Λ ([1]). Dès lors, la figure découpée à l'extérieur du fluide par la surface du fluide a son axe dans la droite menée par le point K ([2]), et, pour les mêmes motifs que précédemment ([3]), son centre de gravité est situé sur la droite NK. Soit P ce centre. D'autre part, le centre de gravité du segment entier est situé sur la droite ZΘ, entre les points K, Z. Que ce centre soit T. Dès lors, le centre de gravité de la figure restante, immergée dans le fluide, sera situé sur la droite TP, prolongée et découpée d'une certaine droite dont le rapport à la droite TP est le même que celui du poids du segment, placé hors du fluide, au poids du segment placé dans le fluide ([4]). Soit O le centre de la figure que nous venons de dire, et soit OΛ la verticale passant par le point O. Dès lors, le poids du segment qui émerge du fluide sera sollicité vers le bas suivant la droite PΛ, et celui de la figure immergée dans le fluide sera sollicité vers le haut suivant la droite OΛ ([5]). Par conséquent, la figure ne restera pas en place, mais les parties de la figure, situées du côté de H, seront déplacées vers le bas, tandis que celles situées du côté de E le seront vers le haut ; et il en sera continuellement ainsi jusqu'à ce que la droite ΘZ s'établisse suivant la verticale.

1. C'est-à-dire que KΛ soit la verticale passant par le point K.
2. C'est-à-dire dans la verticale menée par le point K.
3. Voir proposition VIII et note.
4. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, proposition VIII.
5. Voir l'hypothèse qui précède la proposition VIII.

Digitized by Google

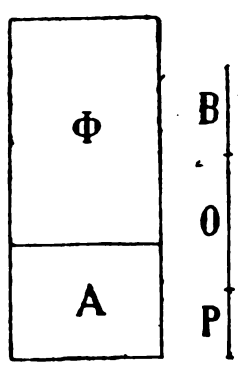
DES CORPS FLOTTANTS.

LIVRE II.

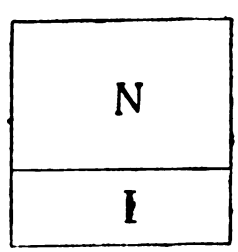
PROPOSITION I.

Si quelque grandeur, moins dense qu'un fluide, est abandonnée dans ce fluide, son rapport en poids à son volume de fluide (1) sera le même que celui de la grandeur immergée à la grandeur entière.

En effet, abandonnons, dans un fluide, une certaine grandeur solide ΦA moins dense que ce fluide ; soit A sa partie immergée, et Φ celle qui émerge du fluide. On doit démontrer que le rapport en poids de la grandeur ΦA au volume équivalent de fluide est le même que celui de A à ΦA.



Prenons donc une certaine grandeur de fluide NI, ayant même volume que la grandeur ΦA ; que N soit équivalent à Φ, et I équivalent à A. En outre, soit B le poids de la grandeur ΦA, PO celui de NI, et P celui de I. Dès lors, le rapport de ΦA à NI sera le même que celui de B à PO. Mais, puisque la grandeur ΦA, abandonnée dans le fluide, est



1. Le texte dit simplement ποτὶ τὸ ὑγρόν, c'est-à-dire (le rapport) au fluide. Il faut évidemment entendre qu'il s'agit du rapport à un même volume de fluide. Les anciennes versions latines présentent d'ailleurs toutes l'expression : « ad humidum molis aequalis. »

Digitized by Google

moins dense que ce fluide, il est évident que le volume de la grandeur immergée a le même poids que la grandeur ΦA ; car cela a été démontré (1). Donc, le poids B est égal au poids P, puisque B est le poids de la grandeur entière ΦA, et que P est celui du fluide I, dont le volume a été pris équivalent à celui de la grandeur immergée A. Dès lors, la grandeur ΦA est à la grandeur NI en poids comme P est à PO. Or, le rapport de I à IN, ainsi que celui de A à ΦA, sont les mêmes que celui de P à PO ; par conséquent, ce qui a été proposé est démontré (2).

PROPOSITION II.

Lorsqu'un segment droit (3) de paraboloïde (4), dont l'axe ne dépasse pas de moitié le paramètre (5), et dont la densité est quelconque

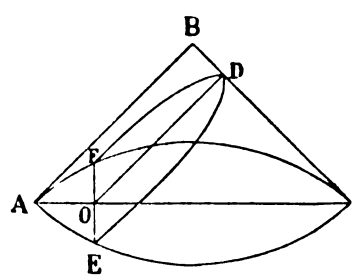
1. Voir livre I, proposition V.

2. En résumé : Il résulte des données : $\frac{\Phi A}{NI} = \frac{B}{PO}$. Or, il résulte de la prop. V du livre I que $B = P$; donc : $\frac{\Phi A}{NI} = \frac{P}{PO}$. Or, on a aussi : $\frac{A}{\Phi A} = \frac{I}{NI}$, et $\frac{I}{NI} = \frac{P}{PO}$; donc : $\frac{\Phi A}{NI} = \frac{A}{\Phi A}$.

3. C'est-à-dire, dont la base est perpendiculaire à l'axe.

4. τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, littéralement : de conoïde rectangle, c'est-à-dire de conoïde engendré par la révolution d'une section de cône rectangle ou d'une parabole, c'est-à-dire un paraboloïde de révolution. Voir le préambule du livre *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*.

5. τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, littéralement : « de la (droite) qui va jusqu'à l'axe, » c'est-à-dire la droite qui va du sommet de la parabole, suivant une génératrice du cône d'origine, jusqu'au point de rencontre avec l'axe de ce cône, c'est-à-dire jusqu'au sommet de ce cône. C'est la droite que nous appellerons le paramètre ou distance du foyer de la parabole à sa directrice. Nous emploierons donc ce terme pour remplacer la périphrase d'Archimède qui revient continuellement dans la suite. L'identité de notre paramètre avec la droite qu'Archimède appelle « la droite qui va jusqu'à l'axe » peut d'ailleurs se démontrer de la manière suivante :



Soit un cône droit rectangle ; ABC est une section plane passant par l'axe, et DO la trace d'un plan normal à la génératrice BC. La courbe FDE est donc une parabole dont le point E a DO comme abscisse et OE comme ordonnée. Considérant l'équation cartésienne, on a : $y^2 = 2px = OA \times OC$, d'où : $OA = \frac{2px}{OC}$.

D'autre part : $\frac{BD}{OA} = \frac{DC}{OC} = \frac{x}{OC}$, d'où :

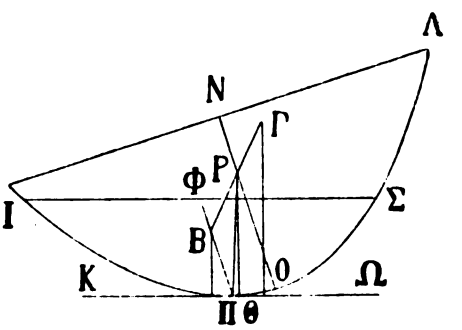
$BD = \frac{OA \times x}{OC} = \frac{2px^2}{\overline{OC}^2}$. Or, $\overline{OC}^2 = 2x^2$; donc :

$BD = \frac{2px^2}{2x^2} = p$.

Digitized by Google

par rapport à un fluide, est abandonné dans ce fluide de manière que la base ne touche pas le fluide (1), et est posé incliné, il ne restera pas incliné, mais se remettra droit. Je dis d'ailleurs que le segment est posé droit, lorsque le plan qui le découpe est parallèle à la surface du fluide.

Soit un segment de paraboloïde tel que nous venons de le dire, et qu'il soit mis dans une position inclinée. On doit démontrer qu'il ne restera pas dans cette position, mais qu'il se remettra droit. Soit donc la parabole AΠOΛ la section du segment coupé par un plan qui, passant par l'axe, est perpendiculaire au plan de la surface du fluide (2); soit NO l'axe du segment et diamètre de la section (3), et soit IΣ la section de la surface du fluide. Dès lors, puisque le segment n'est pas vertical, la droite AΛ ne sera pas parallèle à la droite IΣ (4) ; en sorte que NO ne formera pas un angle droit avec la droite IΣ. Menons à cette dernière droite une parallèle KΩ, tangente à la section conique au point Π, et, du point Π, menons la droite ΠΦ parallèle à la droite NO (5). La droite ΠΦ divise donc la droite IΣ en deux parties égales; car cela a été démontré dans les *Coniques* (6). Divisons ΠΦ de telle sorte que ΠB soit double de BΦ, et NO, au point P, de telle sorte que OP soit aussi double de PN. Dès lors, le point P sera le centre de



1. Bien que, d'après l'énoncé, la proposition vise un paraboloïde de densité quelconque par rapport au fluide, la démonstration n'examinera que le cas du solide moins dense que le fluide dans lequel il est abandonné. Il en sera d'ailleurs de même pour la proposition suivante.

2. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XI. Il y a lieu de remarquer que les constructions relatives aux propositions du livre I considéraient la surface du fluide comme une surface sphérique ayant le même centre que la terre, tandis que les constructions relatives aux propositions du livre II seront indépendantes du centre de la terre, et la surface du fluide sera assimilée à un plan.

3. C'est-à-dire diamètre de la parabole.

4. Voir la définition qui termine l'énoncé de la proposition.

5. La démonstration de la proposition II s'arrête à cet endroit dans la seule version latine que nous possédions jusqu'ici des deux livres *Des Corps flottants*. Lorsque Fréd. Commandin donna une édition revue et commentée de cette version, à Bologne, en 1565, cet excellent géomètre acheva la démonstration qui passa, ainsi complétée, dans les éditions postérieures. Le palimpseste de Jérusalem est venu nous restituer le texte grec de la démonstration entière.

6. Voir *De la Quadrature de la Parabole*, proposition I.

Digitized by Google

gravité du plus grand segment du solide, et le point B sera celui du segment situé suivant l'arc ΠΟΣ ; car il a été démontré, dans le livre *Des Equilibres*, que le centre de gravité de tout segment de conoïde parabolique est situé sur l'axe, divisé de telle sorte que le segment de l'axe du côté du sommet soit double du segment restant (1). Le centre de gravité de ce qui reste, après avoir retranché le segment solide suivant l'arc ΠΟΣ du segment entier, sera donc situé sur la droite BΓ; car il a été démontré dans les *Eléments de mécanique* que, si l'on retranche une grandeur n'ayant pas le même centre de gravité que la grandeur entière, le centre de gravité de la grandeur restante est situé sur la droite reliant les centres de gravité de la grandeur entière et de la grandeur retranchée, cette droite étant prolongée du côté où se trouve le centre de gravité de la grandeur entière (2). Prolongeons donc BP vers Γ, et soit Γ le centre de gravité de la grandeur restante. Dès lors, puisque NO vaut une fois et demie OP, et ne dépasse pas une fois et demie le paramètre, il est évident que PO ne dépassera pas le paramètre (3). Il s'ensuit que ΠP forme des angles inégaux avec KΩ, et que l'angle compris sous les droites PΠ, ΠΩ sera aigu (4). Donc, la droite menée perpendiculairement de P sur ΠΩ tombera entre Π et Ω. Que la droite PΘ tombe de cette manière ; dès lors, la droite PΘ est perpendiculaire au plan (5), dans lequel se trouve la droite ΣI, situé à la surface du fluide. Menons maintenant des points B, Γ des

1. Archimède renvoie à la démonstration qu'il aurait donnée « ἐν ταῖς Ἰσορροπίαις », c'est-à-dire dans le livre *Des Equilibres*. Or, comme cette démonstration ne se retrouve pas dans le livre *De l'Equilibre des Plans*, il y a lieu de croire qu'il s'agit d'un ouvrage qui ne nous est pas parvenu. Il n'est pas douteux qu'Archimède renvoie ici à une démonstration purement géométrique du centre de gravité du segment de paraboloïde de révolution; car, autrement, il aurait renvoyé à la démonstration mécanique qu'il donne dans son traité *De la Méthode mécanique*, que le palimpseste de Jérusalem vient de nous rendre. A défaut de cette démonstration géométrique, Fréd. Commandin fut le premier parmi les géomètres de la Renaissance, à en donner une à la proposition 29 de son célèbre traité, édité à Bologne, en 1565, intitulé: « *Féd. Commandini Urbinatis liber de centro gravitatis solidorum* ».

2. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, proposition VIII.

3. Dans le segment de paraboloïde, le centre de gravité P est situé de manière que $NO = \frac{3}{2} OP$. Or, par hypothèse, $NO \leqslant \frac{3}{2}$ paramètre p; donc, $OP \leqslant p$.

4. Si l'on mène la normale en Π, on sait que la sous-normale est constante et égale au paramètre. Or, on vient de voir que OP n'est pas plus grand que le paramètre; donc, la normale en Π coupera ON en un point situé entre P et N, et la droite ΠP, qui sera plus petite que la normale, fera avec la droite ΠΩ un angle plus petit que l'angle droit formé par la normale avec ΠΩ; donc, l'angle PΠΩ sera aigu.

5. Le texte présente ici une lacune d'un mot, ou de deux mots au plus, dont il ne subsiste que trois lettres. Heiberg a proposé une reconstitution très plausible au moyen du mot « parallèle ». (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 353.)

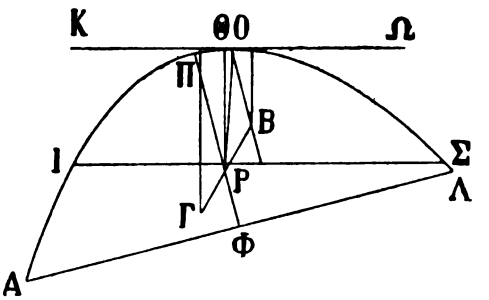
Digitized by Google

parallèles à la droite PΘ. Dès lors, la partie de la grandeur située hors du fluide sera portée vers le bas suivant la verticale menée par Γ, car on a supposé que tous les poids sont portés vers le bas suivant la verticale passant par le centre (1) ; d'autre part, la grandeur située dans le fluide, vu qu'elle est moins dense que le fluide, sera portée vers le haut suivant la verticale menée par le point B. Or, puisque ces grandeurs ne se pressent pas l'une l'autre en sens contraire suivant la même verticale, la figure ne restera pas en place, mais ses parties situées du côté de A seront portées vers le haut, et celles situées du côté de Λ le seront vers le bas ; et il en sera continuellement ainsi jusqu'à ce qu'elle s'établisse droite.

PROPOSITION III.

Lorsqu'un segment droit de paraboloïde, dont l'axe ne dépasse pas de moitié le paramètre, et dont la densité est quelconque par rapport à un fluide, est abandonné dans ce fluide de manière que sa base soit entièrement dans le fluide, et est posé incliné, il ne restera pas incliné, mais se relèvera de telle sorte que son axe soit dans la verticale.

En effet, abandonnons dans un fluide un segment tel que nous venons de le dire, et que sa base soit dans le fluide. Soit la parabole ΑΠΟΛ la section du segment coupé par un plan qui, passant par l'axe, est perpendiculaire à la surface du fluide (2) ; soit ΠΦ l'axe du segment et diamètre de la section, et soit IΣ la section de la surface du fluide. Dès lors, puisque le segment est posé incliné, son axe ne sera pas dans la direction verticale ; par conséquent, ΠΦ ne formera pas des angles égaux avec IΣ. Menons donc une droite KΩ qui, parallèle à la droite IΣ, soit tangente à la section ΑΠΟΛ au point O ; soit P le centre de gravité du solide ΑΠΟΛ, B celui du solide ΙΠΟΣ, et, prolongeant la



1. Voir l'hypothèse qui précède la proposition VIII.
2. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XI.

Digitized by Google

droite de jonction BP, soit Γ le centre de gravité du solide ΙΣΛΑ (1). On démontrerait, de la même manière (2), que l'angle formé sous les droites PO, OK est aigu, et que la perpendiculaire menée de P sur la droite KΩ tombe entre les points K et O. Soit PΘ cette perpendiculaire. Dès lors, si des points Γ, B l'on mène des parallèles à la droite PΘ, la partie plongée dans le fluide sera portée vers le haut suivant la droite menée par Γ, tandis que la partie extérieure au fluide le sera vers le bas suivant la droite menée par B (3) ; et le solide ΑΠΟΛ ne restera pas tel qu'il est placé dans le fluide, mais la partie située du côté de A subira une poussée vers le haut, et celle située du côté de Λ une poussée vers le bas, jusqu'à ce que ΠΦ s'établisse suivant la verticale.

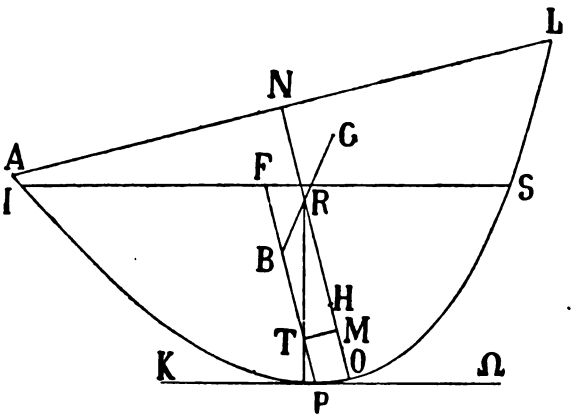
PROPOSITION IV.

Lorsqu'un segment droit de paraboloïde, moins dense qu'un fluide, dont l'axe dépasse de moitié le paramètre, et dont le rapport en poids à son volume de fluide n'est pas inférieur au rapport du carré de l'excédent de l'axe sur une fois et demie le paramètre au carré de l'axe (4), abandonné dans ce fluide de manière que la base ne touche pas le fluide, est posé incliné; il ne restera pas incliné, mais se remettra droit.

Soit un segment de paraboloïde tel que nous venons de le dire, et que, abandonné dans le fluide, il ne soit pas vertical, s'il se peut, mais incliné. Ce segment étant coupé par un plan qui, passant par l'axe, est perpendiculaire à la surface du fluide, que la section du segment (5) *soit la parabole* APOL (6) ; *que* NO *soit l'axe du segment et diamètre de la section, et soit* IS *la section de la surface du fluide. Dès lors, si le segment n'est pas vertical, la droite* NO *ne formera pas des angles*

1. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, proposition VIII.
2. Voir proposition II et note relative au même passage.
3. Voir livre I, hypothèse qui précède la proposition VIII.
4. C'est-à-dire si le segment satisfait à la condition :
$$\frac{\text{Poids du segment}}{\text{Poids même vol. fluide}} \geqslant \frac{(\mathrm{NO} - \frac{3}{2}p)^2}{\overline{\mathrm{NO}}^2}.$$
5. Le texte grec du palimpseste de Jérusalem présente, à partir de cet endroit, une longue lacune qui s'étend jusqu'à la fin de la proposition VI. Notre traduction reprendra donc ici la version latine dans laquelle on connaissait jusqu'ici les deux livres *Des Corps Flottants*.
6. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XI.

Digitized by Google



égaux avec IS. *Menons la droite* KΩ *qui, tangente à la parabole en* P, *est parallèle à IS, et, par le point* P, *menons la droite* PF *parallèle à* ON. *Déterminons les centres de gravité :* R *sera le centre du solide* APOL, B *celui du solide immergé dans le fluide, et, menant la droite* BR, *que nous prolongeons vers* G, *soit* G *le centre de gravité du solide qui émerge du fluide* (1). *Dès lors, puisque la droite* NO *vaut une fois et demie la droite* RO, *qu'elle est plus grande qu'une fois et demie le paramètre, il est clair que la droite* RO *est plus grande que le paramètre* (2). *Soit donc la droite* RM *égale au paramètre, et que la droite* OM *soit double de la droite* HM. *Dès lors, puisque* NO *vaut une fois et demie* RO, *et que* HO *vaut une fois et demie* OM, *le reste* NH *vaut une fois et demie le reste* RM (3) ; *par conséquent, l'axe dépasse de la droite* HO *une fois et demie le paramètre qui vaut la droite* RM (4). *Et puisque l'on a supposé que le rapport en poids du segment à son volume de fluide n'est pas inférieur au rapport du carré de l'excédent de l'axe sur une fois et demie le paramètre au carré de l'axe, il est clair que le rapport en poids du segment à son volume de fluide ne sera pas inférieur au rapport du carré de* HO *au carré de* NO (5). *Or, le rapport de la partie immergée au segment solide entier est le même que le rapport en poids du seg-*

---

1. Voir *De l'Equilibre des Plans,* livre I, proposition VIII.

2. Dans le segment de paraboloïde, le centre de gravité est situé aux deux tiers de l'axe à partir du sommet ; donc : $NO = \frac{3}{2}RO$. Or, par hypothèse : $NO > \frac{3}{2}p$, donc : $\frac{3}{2}RO > \frac{3}{2}p$, ou, comme le texte : $RO > p$.

3. On a posé : RM = paramètre, et OM = 2HM, d'où : $HO = OM + HM = \frac{3}{2}OM$. Or, $NO = \frac{3}{2}RO$; donc : $NO - HO = \frac{3}{2}(RO - OM)$ ou, comme le texte : $NH = \frac{3}{2}RM$.

4. $NO = HO + NH = HO + \frac{3}{2}RM = HO + \frac{3}{2}p$.

5. On a, par hypothèse : $\frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}} \geqslant \frac{(NO - \frac{3}{2}p)^2}{\overline{NO}^2}$. Or, l'égalité de la note précéd. donne : $HO = NO - \frac{3}{2}p$; donc : $\frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}} \geqslant \frac{\overline{HO}^2}{\overline{NO}^2}$.

Digitized by Google

ment à son volume de fluide ; car cela a été démontré (1), *et le rapport du carré de* PF *au carré de* NO *est le même que celui du segment immergé au segment entier. En effet, il a été démontré au livre* Des Conoïdes *que, lorsqu'un paraboloïde est découpé en deux segments par des plans menés d'une manière quelconque, les segments sont entre eux comme les carrés de leurs axes* (2). *Dès lors, le rapport du carré de* PF *au carré de* NO *n'est pas inférieur au rapport du carré de* HO *au carré de* NO ; *en sorte que* PF *n'est pas plus petit que* HO, *ni* BP *plus petit que* MO (3) ; *et, si en* M *on élève la perpendiculaire sur* NO, *elle tombera entre les points* B *et P. Donc, puisque* PF *est parallèle au diamètre, que* MT *est perpendiculaire au diamètre, et que la droite* RM *est égale au paramètre, la droite reliant les points* R, T, *et que l'on prolonge, formera des angles droits avec la tangente au point* P (4); *en sorte qu'elle formera aussi des angles égaux avec* IS, *ainsi qu'avec la surface du fluide qui passe par* IS. *Dès lors, si, par les points* B, G *l'on mène des parallèles à* RT, *elles formeront des angles droits avec la surface du fluide ; la partie du conoïde solide immergée dans le fluide sera portée vers le haut, suivant la parallèle menée du point* B *à* RT, *et la partie qui émerge du fluide sera portée vers le bas, dans le fluide, suivant la parallèle menée du point* G *à* RT. *Il en sera continuellement ainsi jusqu'à ce que le conoïde se soit rétabli verticalement.*

---

1. Voir proposition I, on aura : $\frac{\text{poids segment entier}}{\text{poids même vol. fluide}} = \frac{\text{segment immergé}}{\text{segment entier}}$.

2. On a, en vertu de la proposition XXIV du livre *Des Conoïdes et des Sphéroïdes* : $\frac{\text{segment immergé}}{\text{segment entier}} = \frac{\overline{PF}^2}{\overline{NO}^2}$.

3. La comparaison des relations des trois notes précédentes donne : $\frac{\overline{PF}^2}{\overline{NO}^2} \geqslant \frac{\overline{HO}^2}{\overline{NO}^2}$, d'où : $\frac{PF}{NO} \geqslant \frac{HO}{NO}$, d'où, comme le texte : PF ⩾ HO. Or, on a vu que $HO = \frac{3}{2}OM$, et, puisque B est le centre de gravité du segment immergé, $BP = 2FB$, d'où : $PF = \frac{3}{2}BP$; donc, substituant dans l'inégalité précédente, on a, comme le texte : BP ⩾ MO.

4. En effet, menons l'ordonnée et la normale du point P. Or, la sous-normale est égale au paramètre ; elle sera donc égale à la droite RM, prise égale au paramètre. D'autre part, l'ordonnée de P est égale à TM, et les angles en M et au pied de l'ordonnée sont droits ; donc, le triangle TRM est égal au triangle formé par la normale, la sous-normale et l'ordonnée. Il s'ensuit que RT est parallèle à la normale, c'est-à-dire que RT formera des angles droits avec la tangente en P.

Digitized by Google

PROPOSITION V.

Lorsqu'un segment droit de paraboloïde, moins dense qu'un fluide, dont l'axe dépasse de moitié le paramètre, et dont le rapport en poids à son volume de fluide n'est pas supérieur au rapport de l'excédent du carré de l'axe sur le carré de l'excédent de l'axe sur une fois et demie le paramètre au carré de l'axe (1), *abandonné dans ce fluide de manière que la base soit entièrement dans le fluide, est posé incliné, il ne restera pas incliné, mais se remettra de telle sorte que son axe soit dans la direction verticale.*

En effet, abandonnons dans le fluide un segment tel que nous venons de le dire, et que sa base soit entièrement dans le fluide. La section du segment coupé par un plan qui, passant par l'axe, est perpendiculaire à la surface du fluide, sera une parabole (2). *Soit* APOL *cette parabole ; soit* NO *l'axe du segment et diamètre de la section, et soit* IS *la section de la surface du fluide. Dès lors, puisque l'axe n'est pas dans la direction verticale,* NO *ne formera pas des angles égaux avec* IS. *Menons la droite* KΩ *qui, tangente en* P *à la section* APOL, *est parallèle à* IS, *et, du point* P, *menons la droite* PF *parallèle à* NO. *Déterminons les centres de gravité ; soit* R *le centre de* APOL, B *celui de la partie qui émerge du fluide, et, menant la droite* BR, *que nous prolongeons vers* G, *soit* G *le centre de gravité du solide immergé dans le fluide* (3). *Prenons* RM *égal au paramètre ; soit* OM *double de* HM, *et que les autres constructions soient les mêmes que précédemment* (3). *Dès lors, puisque l'on a supposé que le rapport en poids du segment à son volume de fluide n'est pas supérieur au rapport de l'excédent du carré de* NO *sur le carré de* HO *au carré de* NO (4) ; *mais que le*

---

1. Les conditions imposées sont donc :

$$NO > \tfrac{3}{2}p, \text{ et } \frac{\text{poids du segment}}{\text{poids même vol. fluide}} \leqslant \frac{\overline{NO}^2 - (NO - \frac{3}{2}p)^2}{\overline{NO}^2}.$$

2. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, proposition VIII.

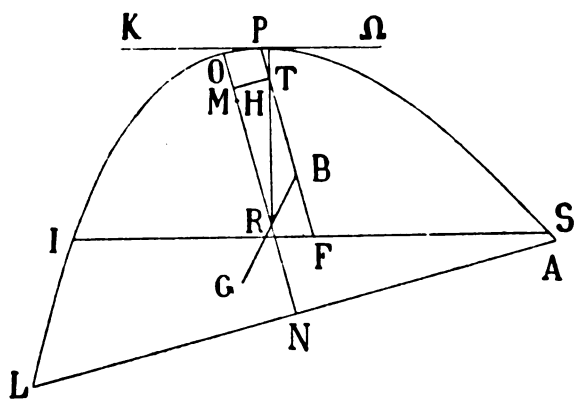
3. C'est-à-dire les mêmes constructions que dans la proposition IV.

4. Puisque les constructions sont les mêmes que dans la proposition précédente, on a (voir note) : $NO = HO + \frac{3}{2}p$, d'où : $HO = NO - \frac{3}{2}p$, d'où, substituant dans la relation imposée par l'énoncé de la proposition, on aura :

$$\frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}} \leqslant \frac{\overline{NO}^2 - (NO - \frac{3}{2}p)^2}{\overline{NO}^2} \leqslant \frac{\overline{NO}^2 - \overline{HO}^2}{\overline{NO}^2}.$$

Digitized by Google

rapport du segment immergé au solide entier est le même que le rapport en poids du segment à son volume de fluide; car cela a été démontré dans la première proposition; il en résulte que le rapport du volume immergé du segment au segment entier ne sera pas supérieur au rapport que nous venons de dire. Donc, le rapoprt du segment entier au segment qui émerge du fluïde ne sera pas supérieur à celui du carré de NO *au carré de* HO (1). *Mais, le rapport du segment entier au segment qui émerge du fluide est le même que celui du carré de* NO *au carré de* PF (2); *par conséquent, le rapport du carré de* NO *au carré de* PF *n'est pas supérieur à celui du carré de* NO *au carré de* HO, *et il s'ensuit que* PF *n'est pas plus petit que* OH, *et que* PB *n'est pas plus petit que* MO (3). *Dès lors, si au point* M *on élève la perpendiculaire sur* RO, *elle rencontrera* BP, *entre les points* P *et* B, *au point* T. *Et puisque, dans la parabole, la droite* PF *est parallèle au diamètre* RO, *que la droite* MT *est perpen-*



---

1. On a: $\frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}} = \frac{\text{segment immergé}}{\text{segment entier}}$ en vertu de la proposition I, d'où, en présence de l'inégalité de la note précéd.: $\frac{\text{segment immergé}}{\text{segment entier}} \leqslant \frac{\overline{NO}^2 - \overline{HO}^2}{\overline{NO}^2}$, ou: $\frac{\text{segment entier}}{\text{segment immergé}} \geqslant \frac{\overline{NO}^2}{\overline{NO}^2 - \overline{HO}^2}$, ou, comme le texte :

$$\frac{\text{segment entier}}{\text{segment entier} - \text{segt immergé}} = \frac{\text{segt entier}}{\text{segt émergé}} \leqslant \frac{\overline{NO}^2}{\overline{NO}^2 - (\overline{NO}^2 - \overline{HO}^2)} \leqslant \frac{\overline{NO}^2}{\overline{HO}^2}.$$

2. En vertu de la prop. XIV du livre *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, on a: $\frac{\text{segment entier}}{\text{segment émergé}} = \frac{\overline{NO}^2}{\overline{PF}^2}$.

3. Les relations des deux notes précédentes donnent: $\frac{\overline{NO}^2}{\overline{PF}^2} \leqslant \frac{\overline{NO}^2}{\overline{HO}^2}$, d'où: $\frac{NO}{PF} \leqslant \frac{NO}{HO}$, d'où, comme le texte : PF ⩾ HO. Or, HO = $\frac{2}{3}$MO, et PF = $\frac{2}{3}$BP; donc : BP ⩾ MO.

Digitized by Google

diculaire à ce diamètre, et que la droite RM *est égale au paramètre*(1), *il est clair que la droite* RT *prolongée forme des angles droits avec la droite* KPΩ (2) *et, par conséquent, avec la droite* IS. *Il s'ensuit que la droite* RT *est perpendiculaire à la surface du fluide, et que les parallèles à* RT, *menées par les points* B *et* G, *seront perpendiculaires à la surface du fluide. Dès lors, la partie qui émerge du fluide sera portée vers le bas, dans le fluide, suivant la perpendiculaire menée par le point* B, *et la partie immergée dans le fluide sera portée vers le haut suivant la perpendiculaire menée par le point* G. *Donc, le segment solide* APOL *ne restera pas en repos, mais sera mu dans le fluide jusqu'à ce que la droite* NO *soit établie suivant la verticale.*

PROPOSITION VI.

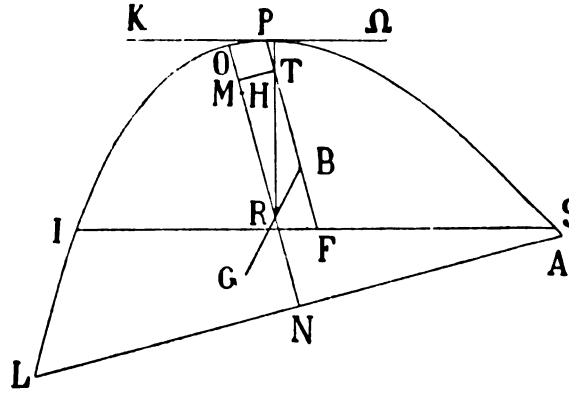
Lorsqu'un segment droit de paraboloïde, moins dense qu'un fluide, dont l'axe dépasse de moitié le paramètre tout en étant trop petit pour que son rapport au paramètre soit le même que celui de quinze à quatre (3), *est abandonné dans ce fluide de manière que sa base touche le fluide, il ne restera jamais incliné de telle sorte que sa base touche le fluide en un point.*

Soit un segment tel que nous venons de le dire, abandonné dans le fluide de manière, comme nous le montrons, que sa base touche le fluide en un point. Soit la parabole APOL (4) *la section superficielle du segment coupé par un plan passant par l'axe perpendiculaire à la surface du fluide ; soit* AS *la section de la surface du fluide, et soit* NO *l'axe du segment et diamètre de la section. Coupons cette dernière droite, d'une part, en* F, *de manière que* OF *soit double de* FN, *d'autre part, en* Ω, *de manière que le rapport de* NO *à* FΩ *soit le même que celui de quinze à quatre, et menons la droite* ΩK *perpendiculaire à* NO. *Le rapport de* NO *à* FΩ *sera d'ailleurs plus grand*

1. Par construction.
2. Voir la note relative à la même conclusion en fin de la démonstration de la proposition IV.
3. Les conditions imposées sont donc : $NO > \frac{8}{5} p$, et $\frac{NO}{p} < \frac{15}{4}$.
4. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XI.

Digitized by Google

rapport du segment immergé au solide entier est le même que le rapport en poids du segment à son volume de fluide; car cela a



été démontré dans la première proposition; il en résulte que le rapport du volume immergé du segment au segment entier ne sera pas supérieur au rapport que nous venons de dire. Donc, le rapoprt du segment entier au segment qui émerge du fluide ne sera pas supérieur à celui du carré de NO *au carré de* HO (1). *Mais, le rapport du segment entier au segment qui émerge du fluide est le même que celui du carré de* NO *au carré de* PF (2); *par conséquent, le rapport du carré de* NO *au carré de* PF *n'est pas supérieur à celui du carré de* NO *au carré de* HO, *et il s'ensuit que* PF *n'est pas plus petit que* OH, *et que* PB *n'est pas plus petit que* MO (3). *Dès lors, si au point* M *on élève la perpendiculaire sur* RO, *elle rencontrera* BP, *entre les points* P *et* B, *au point* T. *Et puisque, dans la parabole, la droite* PF *est parallèle au diamètre* RO, *que la droite* MT *est perpen-*

---

1. On a: $\frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}} = \frac{\text{segment immergé}}{\text{segment entier}}$ en vertu de la proposition I, d'où, en présence de l'inégalité de la note précéd.: $\frac{\text{segment immergé}}{\text{segment entier}} \leqslant \frac{\overline{NO}^2 - \overline{HO}^2}{\overline{NO}^2}$, ou: $\frac{\text{segment entier}}{\text{segment immergé}} \geqslant \frac{\overline{NO}^2}{\overline{NO}^2 - \overline{HO}^2}$, ou, comme le texte :

$$\frac{\text{segment entier}}{\text{segment entier} - \text{segt immergé}} = \frac{\text{segt entier}}{\text{segt émergé}} \leqslant \frac{\overline{NO}^2}{\overline{NO}^2 - (\overline{NO}^2 - \overline{HO}^2)} \leqslant \frac{\overline{NO}^2}{\overline{HO}^2}.$$

2. En vertu de la prop. XIV du livre *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, on a: $\frac{\text{segment entier}}{\text{segment émergé}} = \frac{\overline{NO}^2}{\overline{PF}^2}$.

3. Les relations des deux notes précédentes donnent: $\frac{\overline{NO}^2}{\overline{PF}^2} \leqslant \frac{\overline{NO}^2}{\overline{HO}^2}$, d'où: $\frac{NO}{PF} \leqslant \frac{NO}{HO}$, d'où, comme le texte : PF ⩾ HO. Or, $HO = \frac{3}{4}MO$, et $PF = \frac{3}{4}BP$; donc : BP ⩾ MO.

Digitized by Google

diculaire à ce diamètre, et que la droite RM *est égale au paramètre*(1), *il est clair que la droite* RT *prolongée forme des angles droits avec la droite* KPΩ (2) *et, par conséquent, avec la droite* IS. *Il s'ensuit que la droite* RT *est perpendiculaire à la surface du fluide, et que les parallèles à* RT, *menées par les points* B *et* G, *seront perpendiculaires à la surface du fluide. Dès lors, la partie qui émerge du fluide sera portée vers le bas, dans le fluide, suivant la perpendiculaire menée par le point* B, *et la partie immergée dans le fluide sera portée vers le haut suivant la perpendiculaire menée par le point* G. *Donc, le segment solide* APOL *ne restera pas en repos, mais sera mu dans le fluide jusqu'à ce que la droite* NO *soit établie suivant la verticale.*

PROPOSITION VI.

Lorsqu'un segment droit de paraboloïde, moins dense qu'un fluide, dont l'axe dépasse de moitié le paramètre tout en étant trop petit pour que son rapport au paramètre soit le même que celui de quinze à quatre (3), *est abandonné dans ce fluide de manière que sa base touche le fluide, il ne restera jamais incliné de telle sorte que sa base touche le fluide en un point.*

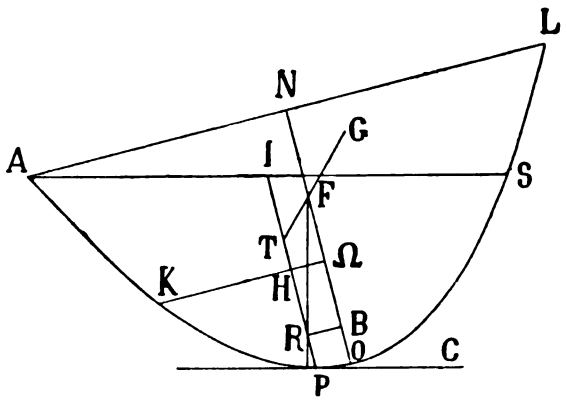
Soit un segment tel que nous venons de le dire, abandonné dans le fluide de manière, comme nous le montrons, que sa base touche le fluide en un point. Soit la parabole APOL (4) *la section superficielle du segment coupé par un plan passant par l'axe perpendiculaire à la surface du fluide ; soit* AS *la section de la surface du fluide, et soit* NO *l'axe du segment et diamètre de la section. Coupons cette dernière droite, d'une part, en* F, *de manière que* OF *soit double de* FN, *d'autre part, en* Ω, *de manière que le rapport de* NO *à* FΩ *soit le même que celui de quinze à quatre, et menons la droite* ΩK *perpendiculaire à* NO. *Le rapport de* NO *à* FΩ *sera d'ailleurs plus grand*

1. Par construction.
2. Voir la note relative à la même conclusion en fin de la démonstration de la proposition IV.
3. Les conditions imposées sont donc : $NO > \frac{8}{3} p$, et $\frac{NO}{p} < \frac{15}{4}$.
4. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XI.

Digitized by Google

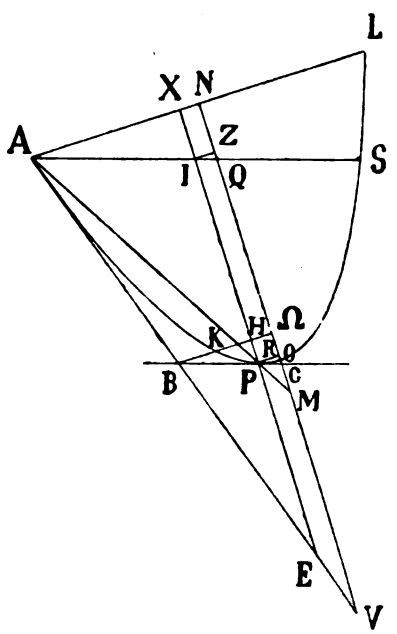
que son rapport au paramètre (1). *Soit la droite* FB *égale au paramètre, et menons la droite* PC *parallèle à la droite* AS *et tangente à la parabole* APOL *au point* P, *ainsi que la droite* PI *parallèle à la droite* NO.

Que, dans un premier cas, la droite PI *coupe la droite* KΩ. *Dès lors, puisque dans le segment* APOL, *délimité par une droite et par une parabole, la droite* KH *est parallèle à la droite* AL, *que la droite* PI, *parallèle au diamètre est coupée par la droite* KΩ, *et que la droite* AS *est parallèle à la tangente au point* P, *il faut que le rapport de* PI *à* PH *soit égal ou supérieur au rapport de* NΩ *à* ΩO ; *car cela a été démontré dans les* Lemmes (2). *Or,* ΩN



1. Puisque le point Ω est pris tel que $\frac{NO}{F\Omega}=\frac{15}{4}$, et que, par hypothèse, $\frac{NO}{p}<\frac{15}{4}$, on a : $\frac{NO}{F\Omega}>\frac{NO}{p}$.

2. La démonstration à laquelle Archimède renvoie ici est perdue avec la série de lemmes qui faisait probablement suite à son traité *Des Corps Flottants*. Après avoir vainement recherché cette démonstration chez les autres géomètres de l'antiquité, notamment chez Apollonius, Commandin fournit lui-même une démonstration, excessivement longue et accompagnée de nombreuses figures, dans son commentaire sur le traité *Des Corps Flottants*, dont il donna la seconde édition latine, à Bologne, en 1565. Plus tard, Robertson établit également une démonstration de cette proposition dans l'édition des *Œuvres d'Archimède* due à Torelli (Oxford, 1792, p. 375), où elle occupe toute une page in-folio.



La démonstration de la relation $\frac{PI}{PH}\geqslant\frac{N\Omega}{\Omega O}$ peut s'établir. comme suit, par la géométrie élémentaire : Menons la tangente à la parabole par le point d'intersection B de la droite ΩK avec la tangente PC. Supposons que, dans un premier cas, cette tangente touche la parabole au point A. Considérant que les sous-tangentes sont doubles des abscisses des points de contact P et A, on aura : VN = 2ON ; CR = 2OR ; EI = 2PI, d'où : ON = OV ; OR = OC ; PI = PE ; RN = VC. Considérant parallélogrammes et triangles semblables, on aura :

Digitized by Google

vaut une fois et demie ΩO (1) ; *par conséquent, la droite* IP *est égale ou supérieure à une fois et demie la droite* HP (2), *et la droïte* PH *est double ou plus petite que le double de la droïte* HI (3). *Que la droite* PT *soit double de la droite* TI ; *le point* T *est donc le centre de gravité de la partie immergée dans le fluide* (4). *Menons la droite de jonction* TF *que nous prolongeons, et soit* G *le centre de gravité de la partie qui émerge du fluide* (5) ; *enfin, élevons en* B *la perpendiculaire* BR *sur* NO. *Dès lors, puisque la droite* PI *est parallèle au diamètre* NO, *que la droite* BR *est perpendiculaire à ce diamètre, et que la droite* FB *est égale au paramètre, la droïte* FR *prolongée formera des angles égaux avec la tangente à la parabole* APOL *en* P (6), *et, par conséquent, avec la droite* AS, *ainsi qu'avec la surface du fluide. Or, les parallèles menées à la droite* FR *par les points* T, G *seront*

$RZ = IP = PE$; $VM = MQ$; $\frac{EP}{VC} = \frac{BP}{BC} = \frac{PH}{C\Omega}$, d'où : $\frac{RZ}{VC} = \frac{PH}{C\Omega} = \frac{R\Omega}{C\Omega}$, ou : $\frac{RZ}{RN} = \frac{R\Omega}{C\Omega}$, d'où : $\frac{RZ}{RN - RZ} = \frac{R\Omega}{C\Omega - R\Omega}$, ou : $\frac{RZ}{ZN} = \frac{R\Omega}{CR}$, (I). D'autre part, on a : $\frac{IP}{CM} = \frac{AP}{PM} = \frac{AX}{NX} = \frac{AX}{IZ} = \frac{IX}{QZ} = \frac{ZN}{QZ}$, d'où : $\frac{IP}{CM} = \frac{ZN}{QZ}$, ou : $\frac{RZ}{CM} = \frac{ZN}{QZ}$, ou : $\frac{RZ}{ZN} = \frac{CM}{QZ}$. (II). De (I) et (II) on tire : $\frac{R\Omega}{CR} = \frac{CM}{QZ}$. Or, $QZ = CR$, donc : $R\Omega = CM$. De plus : $\frac{VA}{VB} = \frac{VN}{V\Omega} = \frac{VQ}{VC}$, ou : $\frac{\frac{1}{2}VN}{V\Omega} = \frac{\frac{1}{2}VQ}{VC}$, ou : $\frac{VO}{V\Omega} = \frac{VM}{VC}$, d'où : $\frac{VO}{V\Omega - VO} = \frac{VM}{VC - VM}$, ou : $\frac{VO}{O\Omega} = \frac{VM}{MC}$, ou : $\frac{NO}{O\Omega} = \frac{MQ}{MC}$, d'où : $\frac{NO - O\Omega}{O\Omega} = \frac{MQ - MC}{MC}$, ou : $\frac{N\Omega}{O\Omega} = \frac{CQ}{MC}$. Or, $CQ = PI$, et on a vu plus haut que $CM = R\Omega = PH$; donc : $\frac{N\Omega}{O\Omega} = \frac{PI}{PH}$. Si, dans un second cas, la tangente menée de B touchait la parabole en un point plus éloigné du sommet que le point A, on démontrerait de même que $\frac{N\Omega}{O\Omega} < \frac{PI}{PH}$.

1. En effet, F étant le centre de gravité du segment entier, on a : $OF = 2FN$, d'où : $FN = \frac{NO}{3}$ et, par hypothèse : $\frac{NO}{F\Omega} = \frac{15}{4}$, d'où : $F\Omega = \frac{4}{15}NO$. Dès lors : $\Omega N = FN + F\Omega = (\frac{1}{3} + \frac{4}{15})NO = \frac{3}{5}NO$, d'où : $\frac{\Omega N}{NO} = \frac{3}{5}$, d'où : $\frac{\Omega N}{NO - \Omega N} = \frac{\Omega N}{\Omega O} = \frac{3}{2}$, d'où, comme le texte : $\Omega N = (1 + \frac{1}{2})\Omega O$.

2. On a démontré (note avant-précédente) que : $\frac{\Omega N}{\Omega O} \leqslant \frac{PI}{PH}$, et on a vu (note précédente) que : $\frac{\Omega N}{\Omega O} = \frac{3}{2}$, d'où : $\frac{PI}{PH} \geqslant \frac{3}{2}$, d'où : $PI \geqslant \frac{5}{2}PH$.

3. Car : $\frac{PI}{PH} \geqslant \frac{3}{2}$, ou : $\frac{HI + PH}{PH} \geqslant \frac{3}{2}$, ou : $\frac{HI}{PH} + 1 \geqslant \frac{3}{2}$, d'où : $HI \geqslant \frac{1}{2}PH$, ou, comme le texte : $PH \leqslant 2HI$.

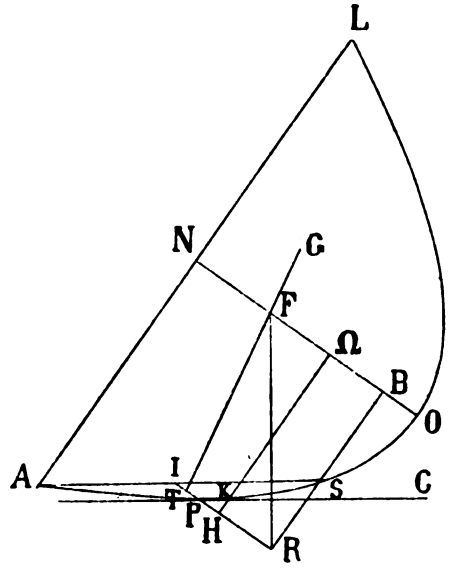
4. Voir proposition II et note.

5. Voir *De l'Equilibre des Plans*, liv. I, proposition VIII.

6. Voir proposition IV et dernière note.

Digitized by Google

aussi perpendiculaires à la surface du fluide, et la grandeur qui, prise du solide APOL, *est immergée dans le fluide, sera portée vers le haut suivant la perpendiculaire menée par le point* T, *tandis que celle qui émerge du fluide sera portée vers le bas, dans le fluide, suivant la perpendiculaire menée par le point* G. *Le solide* APOL *subira donc une rotation, et sa base ne touchera pas la surface du fluide en un point.*



D'ailleurs, si la droite PI *ne coupait pas la droite* KΩ(1), *comme le montre la seconde figure, il est clair que le point* T, *centre de gravité de la partie immergée, tomberait entre les points* P *et* I, *et le reste se démontrerait de la même manière.*

PROPOSITION VII (2).

Lorsqu'un segment droit de paraboloïde, moins dense qu'un fluide, dont l'axe dépasse de moitié le paramètre tout en étant trop petit pour que son rapport au paramètre soit le même que celui de quinze à quatre (3), est abandonné dans ce fluide de manière que sa base soit entièrement dans le fluide, il ne s'établira jamais de telle sorte que sa base touche la surface du fluide, mais de sorte que celle-ci soit entièrement dans le fluide, sans aucun point de contact avec sa surface.

Soit un segment, tel que nous venons de le dire, abandonné, comme nous l'avons dit, de manière que sa base touche la surface du fluide. Il faut démontrer qu'il ne restera pas en place, mais qu'il subira une rotation, de telle sorte que sa base ne touche la surface du fluide en aucun point.

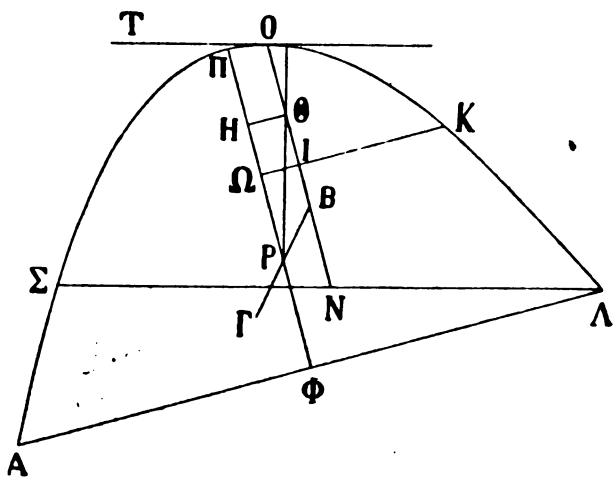
1. C'est-à-dire : si PI ne coupe pas KΩ à l'intérieur de la figure, ou bien, si le point H ne tombe pas entre les points P et I, mais sur la droite IP prolongée.

2. Reprise de la traduction sur le texte grec du palimpseste.

3. Les conditions imposées sont donc : $\Pi\Phi > \frac{3}{2}p$, et $\frac{\Pi\Phi}{p} < \frac{15}{4}$.

Digitized by Google

En effet, soit la parabole ΑΠΟΛ la section du segment coupé par un plan perpendiculaire à la surface du fluide (1) ; soit ΣΛ la section de la surface du fluide, et soit ΠΦ l'axe du segment et le diamètre (2). Divisons de nouveau la droite ΠΦ au point P de manière que PΠ soit double de PΦ, et au point Ω de manière que le rapport de ΠΦ à PΩ soit le même



que celui de quinze à quatre. De plus, menons la droite ΩΚ perpendiculaire sur la droite ΠΦ ; il en résulte que la droite PΩ sera plus petite que le paramètre (3). Dès lors, prenons la droite PH égale au paramètre, et menons la droite TO parallèle à la droite ΣΛ et tangente à la section en O ; menons la droite NO parallèle à la droite ΠΦ, et que, dans un premier cas, la droite NO coupe la droite ΚΩ au point I. On démontrera, de la même manière que précédemment, que la droite NO est égale ou supérieure à une fois et demie la droite OI (4), et il s'ensuit que la droite OI est plus petite que le double de la droite IN (5). Que la droite OB soit donc double de la droite BN,

1. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XI.

2. C'est-à-dire le diamètre de la section ou de la parabole.

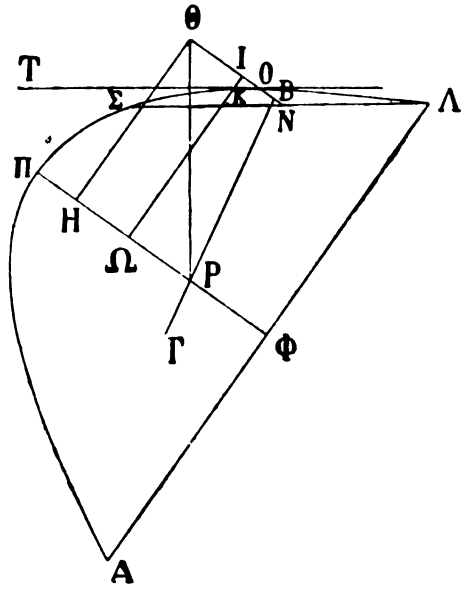
3. Puisque Ω est pris tel que $\frac{\Pi\Phi}{P\Omega} = \frac{15}{4}$, et que, par hypothèse, $\frac{\Pi\Phi}{p} < \frac{15}{4}$, on aura : $\frac{\Pi\Phi}{P\Omega} > \frac{\Pi\Phi}{p}$, d'où : $P\Omega < p$.

4. On a : $P\Phi = \frac{1}{3}\Pi\Phi$, et, par hypothèse : $\frac{\Pi\Phi}{P\Omega} = \frac{15}{4}$, d'où : $P\Omega = \frac{4}{15}\Pi\Phi$, d'où : $\Omega\Phi = P\Omega + P\Phi = \frac{9}{15}\Pi\Phi$, ou : $\frac{\Omega\Phi}{\Pi\Phi} = \frac{3}{5}$, d'où : $\frac{\Omega\Phi}{\Pi\Phi - \Omega\Phi} = \frac{\Omega\Phi}{\Pi\Omega} = \frac{3}{2}$. Or, il a été admis comme démontré à la prop. VI (voir démonstration en note) que $\frac{\Omega\Phi}{\Omega\Pi} \leqslant \frac{ON}{OI}$; donc : $\frac{ON}{OI} \geqslant \frac{3}{2}$, d'où, comme le texte : $ON \geqslant \frac{3}{2}$ OI.

5. Le texte semble comporter ici une petite lacune ; car OI peut aussi être égal au double de IN. En effet, la relation $NO \geqslant \frac{3}{2}$ OI, démontrée dans la note précédente, donne : $IN + OI \geqslant \frac{3}{2}$ OI, d'où : $OI \leqslant 2IN$.

Digitized by Google

et faisons les mêmes constructions que précédemment (1). Dès lors, on démontrera pareillement que la droite PΘ forme des angles égaux avec la droite TO, ainsi qu'avec la surface du fluide (2), et les droites menées par les points B et Γ, parallèlement à la droite PΘ, seront perpendiculaires à la surface du fluide. Il en résulte que le segment situé hors du fluide sera abaissé dans le fluide suivant la verticale menée par le point B, et que celui qui est dans le fluide sera relevé suivant la verticale menée par le point Γ. Il est donc clair que le solide s'inclinera de manière que sa base ne touche la surface du fluide en aucun point, puisque, la touchant en un point, comme maintenant, il est abaissé du côté du point Λ.



Il est d'ailleurs manifeste aussi que, si la droite ON ne coupait pas la droite ΩK (3), on démontrerait la même chose.

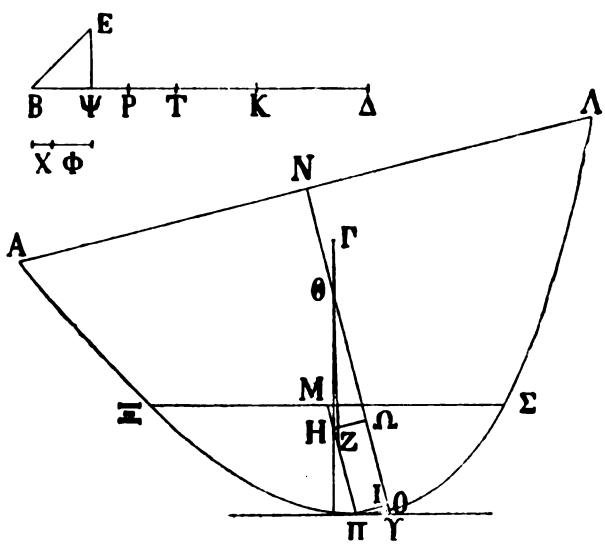
PROPOSITION VIII.

Lorsqu'un segment droit de paraboloïde, dont l'axe dépasse de moitié le paramètre, tout en étant trop petit pour que son rapport au paramètre soit le même que celui de quinze à quatre, et dont le rapport en poids à son volume de fluide est inférieur au rapport du carré de l'excédent de l'axe sur une fois et demie le paramètre au carré de l'axe, est abandonné dans le fluide de manière que sa base ne touche pas le fluide, il ne s'établira pas verticalement, et il ne restera incliné que dans la position où l'axe forme avec la surface du fluide un angle égal à celui que nous aurons à déterminer.

1. C'est-à-dire abaissons des perpendiculaires des points B et Γ sur la surface du fluide comme dans la proposition VI.
2. Voir proposition IV et dernière note.
3. C'est-à-dire si ON coupait ΩK à l'extérieur de la figure.

Digitized by Google

Soit un segment tel que nous venons de le dire (1) ; soit une droite BΔ égale à l'axe, une droite BK double de la droite KΔ, et une droite KP égale au paramètre. De plus, soit une droite TB égale à une fois et demie la droite BP, une droite TΔ égale à une fois et demie la droite KP (2), et que le rapport du carré d'une droite ΦX au carré de la droite ΔB soit le même que le rapport en poids du segment à son volume de fluide (3), la droite Φ étant aussi *double de la droite* X. *Dès lors, il est évident que* (4) le rapport de la droite ΦX à la droite ΔB est moindre que celui de la droite TB à la droite BΔ : car la droite TB est l'excédent de l'axe sur une fois et demie le paramètre. Donc, la droite ΦX est plus petite que la droite BT ; en sorte que la droite Φ est plus petite que la droite BP (5). Soit alors la droite PΨ égale à la droite Φ ; élevons sur BΔ une perpendiculaire ΨE dont le carré soit équivalent à la moitié du rectangle construit sous les droites KP, BΨ, et menons la droite de jonction BE. Il faut démontrer



1. C'est-à-dire un segment qui réponde aux conditions : $NO > \frac{3}{2}p$, $\frac{NO}{p} < \frac{15}{4}$, et $\frac{\text{poids du segment}}{\text{poids même vol. fluide}} < \frac{(NO - \frac{3}{2}p)^2}{\overline{NO}^2}$.

2. La relation $T\Delta = \frac{3}{2}KP$ n'est pas une donnée, mais résulte déjà des relations données : $BK = 2K\Delta$ et $TB = \frac{3}{2}BP$. En effet, $BK = 2K\Delta$ donne $B\Delta = \frac{3}{2}BK$, et $TB = \frac{3}{2}BP$ s'écrit : $B\Delta - T\Delta = \frac{3}{2}[BK - KP]$, ou $\frac{3}{2}BK - T\Delta = \frac{3}{2}BK - \frac{3}{2}KP$, d'où : $T\Delta = \frac{3}{2}KP$.

3. C'est-à-dire que $\frac{(\Phi + X)^2}{\overline{\Delta B}^2} = \frac{\text{poids du segment}}{\text{poids même vol. fluide}}$.

4. Le texte présente ici une lacune à laquelle nous suppléons au moyen de l'ancienne version latine.

5. La relation de la note avant-précédente, comparée avec la relation d'hypothèse donne : $\frac{(\Phi + X)^2}{\overline{\Delta B}^2} < \frac{(NO - \frac{3}{2}p)^2}{\overline{NO}^2}$. Or, $NO = \Delta B$; $KP = p$, et $T\Delta = \frac{3}{2}KP$, donc : $NO - \frac{3}{2}p = \Delta B - \frac{3}{2}KP = \Delta B - T\Delta = TB$, d'où : $\frac{(\Phi + X)^2}{\overline{\Delta B}^2} < \frac{\overline{TB}^2}{\overline{\Delta B}^2}$, d'où : $\Phi + X < TB$. Or, $\Phi = 2X$, et $TB = \frac{3}{2}BP$; donc : $\Phi + \frac{1}{2}\Phi < \frac{3}{2}BP$, ou, comme le texte : $\Phi < BP$.

Digitized by Google

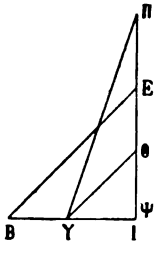
que, si le segment est abandonné dans le fluide, comme nous l'avons dit, il s'établira dans une inclinaison telle que son axe forme avec la surface du fluide un angle égal à l'angle EBΨ.

En effet, abandonnons un segment dans le fluide de manière que sa base ne touche pas la surface du fluide, et que, s'il se peut, l'axe fasse avec la surface du fluide, non pas un angle égal à l'angle B, mais d'abord un angle plus grand.

Dès lors, soit la parabole AΠΟΛ la section du segment coupé par un plan qui, passant par l'axe, est perpendiculaire à la surface du fluide ; soit la droite Ξ dans la surface du fluide, et soit la droite NO l'axe et le diamètre (1). Menons la droite ΠΥ tangente à la parabole AΠΟΛ en Π, parallèlement à la droite ΞΣ, la droite ΠΜ parallèle à la droite NO, et la droite ΠΙ perpendiculaire sur NO. Soit encore OΩ égal à BP, ΩΘ égal à PK, et ΩH perpendiculaire à l'axe. Dès lors, puisque l'on a supposé que l'axe du segment fait avec la surface du fluide un angle plus grand que l'angle B, il est évident que l'angle du triangle ΠΙΥ, situé en Υ, est plus grand que l'angle B ; par conséquent, le rapport du carré de ΠΙ au carré de ΙΥ est plus grand que celui du carré de EΨ au carré de ΨB (2). Mais, le rapport de KP à ΥΙ est le même que celui du carré de ΠΙ au carré de ΙΥ (3), et le rapport de la moitié de KP à ΨB est le même que celui du carré de EΨ au carré de ΨB (4) ; par conséquent, le rapport de KP à ΥΙ est plus grand que celui de la moitié de KP à ΨB. Dès lors, ΙΥ est plus petit

---

1. C'est-à-dire l'axe du segment et le diamètre de la parabole.



2. Appliquons les triangles ΠΙΥ, EΨB l'un sur l'autre en faisant coïncider les côtés de l'angle droit, et menons YΘ parallèle à BE. On aura : $\frac{\Pi\Iota}{\Iota\Upsilon} > \frac{\Theta\Iota}{\Iota\Upsilon}$. Or, par similitude de triangles on a : $\frac{\Theta\Iota}{\Iota\Upsilon} = \frac{E\Psi}{\Psi B}$; donc : $\frac{\Pi\Iota}{\Iota\Upsilon} > \frac{E\Psi}{\Psi B}$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\Pi\Iota}^2}{\overline{\Iota\Upsilon}^2} > \frac{\overline{E\Psi}^2}{\overline{\Psi B}^2}$.

3. Dans la parabole, le carré de l'ordonnée d'un point équivaut au produit de la sous-tangente par le paramètre, donc : $\overline{\Pi\Iota}^2 = p \times \Iota\Upsilon$. Or, on a posé : $KP = p$, d'où : $\overline{\Pi\Iota}^2 = KP \times \Iota\Upsilon$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\Pi\Iota}^2}{\overline{\Iota\Upsilon}^2} = \frac{KP \times \Iota\Upsilon}{\overline{\Iota\Upsilon}^2} = \frac{KP}{\Iota\Upsilon}$. Cette relation se déduit d'ailleurs de l'équation de la parabole $y^2 = 2px$, dans laquelle $y = \Pi\Iota$, $p = KP$, $x = O\Iota$, et $2x = \Iota\Upsilon$.

4. On a, par construction : $\overline{\Psi E}^2 = \frac{1}{2}KP \times B\Psi$, d'où : $\frac{\overline{\Psi E}^2}{\overline{\Psi B}^2} = \frac{\frac{1}{2}KP \times B\Psi}{\overline{\Psi B}^2} = \frac{\frac{1}{2}KP}{\Psi B}$.

Digitized by Google

que le double de ΨB (1). Or, IY est le double de OI ; par conséquent, OI est plus petit que ΨB ; en sorte que IΩ est plus grand que ΨP (2). Or, ΨP est égal à Φ ; par conséquent, IΩ est plus grand que Φ. Et, puisque l'on a supposé que le rapport en poids du segment à son volume de fluide est le même que celui du carré de ΦX au carré de BΔ, que, d'autre part, le rapport de la partie immergée du segment au segment entier est le même que le rapport en poids du segment à son volume de fluide (3), et que le rapport du carré de ΠM au carré de ON est le même que celui de la partie immergée au segment entier (4), il s'ensuit que le rapport du carré de MΠ au carré de ON est le même que celui du carré de ΦX au carré de BΔ ; donc, la droite ΦX est égale à la droite ΠM (5). Or, on a démontré que la droite ΠH est plus grande que la droite Φ (6) ; donc, il est évident que la droite ΠM est plus petite qu'une fois et demie la droite ΠH, et que la droite ΠH est plus grande que le double de la droite HM (7). Dès lors, soit ΠZ une droite double de la droite ZM ; il s'ensuit que le point Θ sera le centre de gravité du solide (8), tandis que le point Z

---

1. Puisque $\frac{\overline{\Pi\Pi}^2}{\overline{IY}^2} > \frac{\overline{E\Psi}^2}{\overline{\Psi B}^2}$, on aura, par substitution des valeurs des deux notes précédentes : $\frac{KP}{IY} > \frac{\frac{1}{2}KP}{\Psi B}$, d'où : $IY < 2\Psi B$.

2. La sous-tangente IY est double de l'abscisse OI, d'où, en présence de l'inégalité de la note précédente : $2OI = IY < 2\Psi B$, ou : $OI < \Psi B$. Or, $OI = O\Omega - I\Omega$, et $\Psi B = BP - \Psi P$; donc : $O\Omega - I\Omega < BP - \Psi P$. Mais, on a pris : $O\Omega = BP$; donc : $BP - I\Omega < BP - \Psi P$, d'où, comme le texte : $I\Omega > \Psi P$.

3. Voir proposition I.

4. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XXIV.

5. Par hypothèse : $\frac{(\Phi + X)^2}{\overline{\Delta B}^2} = \frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}}$; la proposition I donne : $\frac{\text{segment immergé}}{\text{segment entier}} = \frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}}$; et la proposition XXIV du livre *Des Conoïdes et Sphéroïdes* donne : $\frac{\overline{\Pi M}^2}{\overline{ON}^2} = \frac{\text{segment immergé}}{\text{segment entier}}$; donc en observant que $\Delta B = ON$, on a : $\frac{\overline{\Pi M}^2}{\overline{\Delta B}^2} = \frac{(\Phi + X)^2}{\overline{\Delta B}^2}$, d'où : $\Pi M = \Phi + X$.

6. On a vu plus haut que $I\Omega > \Psi P$. Or, on a posé : $\Psi P = \Phi$; donc : $I\Omega > \Phi$. Or, $\Pi H = I\Omega$; d'où : $\Pi H > \Phi$.

7. La note pénultième a donné : $\Pi M = \Phi + X$. Or, $\Phi = 2X$; donc : $\Pi M = \Phi + \frac{1}{2}\Phi = \frac{3}{2}\Phi$, d'où, en présence de l'inégalité de la note précédente : $\Pi M < \frac{3}{2}\Pi H$, d'où : $(\Pi H + HM) < \frac{3}{2}\Pi H$, d'où : $HM < \frac{1}{2}\Pi H$, d'où, comme le texte : $\Pi H > 2HM$.

8. Si Θ est le centre de gravité du segment entier, on doit avoir : $O\Theta = \frac{3}{8}ON = \frac{3}{4}B\Delta$. En effet, on a : $O\Theta = \Theta\Omega + O\Omega = PK + BP = BK$. Or, $BK = 2K\Delta = 2(B\Delta - BK)$, d'où : $BK = \frac{2}{3}B\Delta$; donc : $O\Theta = \frac{2}{3}B\Delta = \frac{3}{8}ON$.

Digitized by Google

sera celui de la partie immergée dans le fluide. Le centre de gravité de la grandeur restante sera donc situé sur la droite de jonction ZΘ prolongée (1). Prolongeons cette droite jusqu'au point Γ (2). On démontrera, comme précédemment, que la droite ΘH est perpendiculaire sur la surface du fluide (3), que le segment immergé dans le fluide sera porté hors du fluide suivant la perpendiculaire menée du point Z à la surface du fluide, et que le segment qui émerge du fluide sera porté à l'intérieur du fluide suivant la perpendiculaire menée par le point Γ. En conséquence, le segment ne demeurera pas dans l'inclinaison que nous avons supposée.

Toutefois, le segment ne se remettra pas verticalement. La chose est d'ailleurs évidente pour les raisons suivantes : puisque, parmi les perpendiculaires menées par les points Z, Γ, celle qui est menée par le point Z tombe du côté de la droite ΓZ où se trouve le point Λ, et que celle qui est menée par le point Γ tombe du côté où se trouve le point A, il est évident que, en vertu de ce que nous avons dit antérieurement (4), le centre Z sera porté vers le haut, et le centre Γ vers le bas ; en sorte que les parties de la grandeur entière situées du côté du point A seront portées vers le bas.

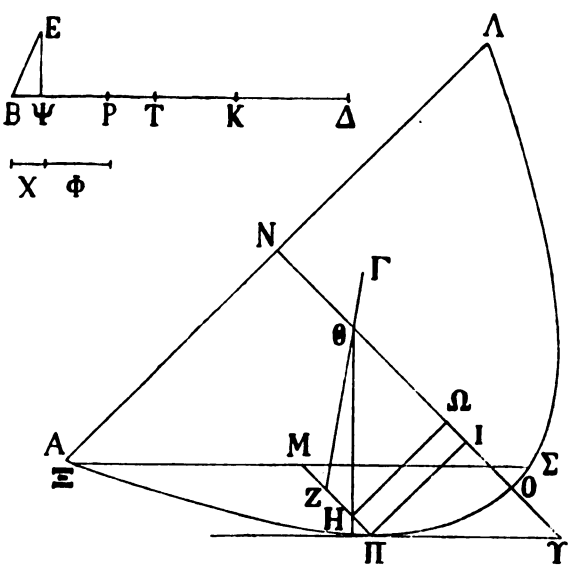
Au reste, ce qui précède était utile à la démonstration.

Supposons de nouveau toutes les mêmes choses, sauf que l'axe du segment fasse avec la surface du fluide un angle plus petit que celui qui est situé au point B. Dès lors, le rapport du carré de ΠΙ au carré de ΙΥ est plus petit que celui du carré de ΕΨ au carré de ΨΒ ; le rapport de ΚΡ à ΥΙ est plus petit que celui de la moitié de ΚΡ à ΨΒ ; ΙΥ sera donc plus grand que le double de ΨΒ (5), et ΩΙ sera donc plus petit que ΨΡ. Il s'ensuit que ΠΗ sera aussi plus petit que Φ (6). Or, la droite ΜΠ est égale à la drote ΦΧ (7) ; par conséquent, il est évident

1. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, proposition VIII.
2. C'est-à-dire jusqu'au centre de gravité Γ de la partie qui émerge du fluide.
3. Voir proposition IV, dernière note.
4. Voir l'hypothèse précédant la proposition VIII du livre I.
5. De même que dans la première partie de la démonstration, on démontrerait que : $\frac{\overline{\Pi\Pi}^2}{\overline{\Upsilon\Upsilon}^2} < \frac{\overline{\Psi E}^2}{\overline{\Psi B}^2}$. Or, on a obtenu plus haut : $\frac{\overline{\Pi\Pi}^2}{\overline{\Upsilon\Upsilon}^2} = \frac{KP}{\Upsilon I}$, et $\frac{\overline{\Psi E}^2}{\overline{\Psi B}^2} = \frac{\frac{1}{2}KP}{\Psi B}$; donc : $\frac{KP}{\Upsilon I} < \frac{\frac{1}{2}KP}{\Psi B}$, d'où, comme le texte : $\Upsilon I > 2\Psi B$.
6. On a : $\Upsilon I = 2OI$, d'où, en présence de l'inégalité de la note précédente: $OI > \Psi B$. Or, $OI = O\Omega - I\Omega$, et $\Psi B = B\Pi - \Psi P$, donc : $O\Omega - I\Omega > B\Pi - \Psi P$. Mais : $O\Omega = B\Pi$; donc : $I\Omega < \Psi P$. Or, $I\Omega = \Pi H$, et $\Psi P = \Phi$; donc : $\Pi H < \Phi$.
7. Voir première partie de la démonstration et note.

Digitized by Google

que la droite ΠM est plus grande qu'une fois et demie la droite ΠH, et que la droite ΠH est plus petite que le double de la droite HM (1). Dès lors, soit ΠZ le double de ZM. Le point Θ sera donc de nouveau le centre de gravité du segment entier, et Z celui de la partie immergée dans le fluide. En conséquence, si l'on mène la droite de jonction ZΘ, et si on la prolonge, le centre de gravité de la partie qui émerge du fluide sera situé sur cette droite prolongée (2). Soit Γ ce centre de gravité, et, par les points Z, Γ, menons à la droite HΘ des parallèles qui sont perpendiculaires à la surface du fluide. Dès lors, il est évident que le segment entier ne restera pas en repos, mais qu'il s'inclinera de manière que son axe fasse avec la surface du fluide un angle plus grand que celui qu'il fait maintenant. Donc, puisque le segment ne se fixera, ni lorsque son axe fait avec la surface du fluide un angle plus grand que l'angle B, ni lorsqu'il fait un angle plus petit, il est clair qu'il se fixera lorsqu'il fera cet angle même. En effet, la droite IO sera ainsi égale à la droite ΨB, ΩI égale à ΨP, et ΠH égale à Φ ; par conséquent, MΠ sera égale à une fois et demie ΠH, et ΠH égale au double de HM (3). Dès lors, le point H est le centre de gravité de la partie immergée dans le fluide ; en sorte que celle-ci se relèvera suivant la verticale de ce point, et que la partie qui émerge s'abaissera. Donc, le segment se fixera ; car les parties se sollicitent l'une l'autre en sens contraire.



1. On a : $\Pi M = \Phi + X = \Phi + \frac{1}{2}\Phi$, d'où : $\Phi = \frac{2}{3}\Pi M$. Or, $\Pi H < \Phi$; donc : $\Pi H < \frac{2}{3}\Pi M$, ou, comme le texte : $\Pi M > \frac{3}{2}\Pi H$. Or, $\Pi M = \Pi H + HM$; donc, comme le texte : $\Pi H < 2HM$.

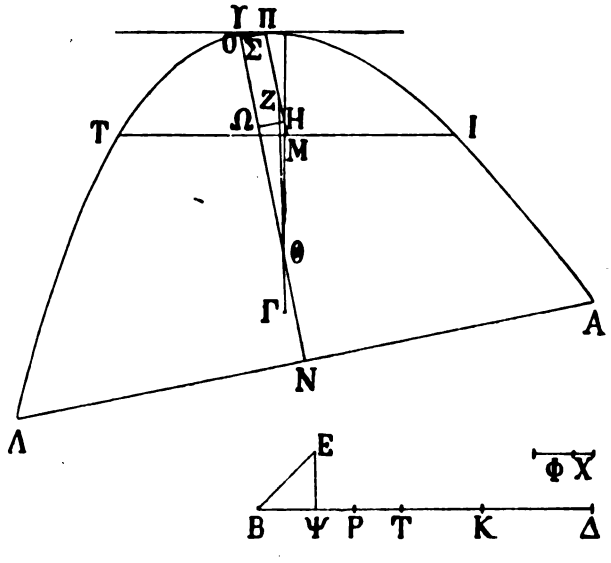
2. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, proposition VIII.

3. Si les angles en B et en Y deviennent égaux, les triangles EBΨ, ΠYI deviennent semblables, et l'on aura : $\frac{\overline{\Pi I}^2}{\overline{IY}^2} = \frac{\overline{\Psi E}^2}{\overline{\Psi B}^2}$. Dès lors, les inégalités qui, dans les

Digitized by Google

PROPOSITION IX.

Lorsqu'un segment droit de paraboloïde, dont l'axe dépasse de moitié le paramètre, tout en étant trop petit pour que son rapport (1) soit le même que celui de quinze à quatre, dont le rapport en poids à son volume de fluide est supérieur au rapport de l'excédent du carré de l'axe sur le carré de l'excédent de l'axe sur une fois et demie le paramètre au carré de l'axe, abandonné dans le fluide de manière que sa base soit entièrement dans le fluide, est posé incliné, il ne se relèvera pas de telle sorte que son axe s'établisse suivant la verticale, et il ne restera incliné que dans la position où son axe forme avec la surface du fluide un angle égal à celui qui sera déterminé de la même manière que précédemment (2).



Soit un segment tel que nous venons de le dire (3) ; prenons une droite ΔB égale à l'axe du segment ; soit la droite BK double de la droite KΔ, la droite KP égale au paramètre, la droite TB égale à une fois et demie la droite BP, et que le rapport de l'excédent du carré de BΔ sur le carré d'une droite ΦX au carré

---

deux parties de la démonstration résultent des inégalités $\frac{\overline{\Pi\Gamma}^2}{\overline{\Gamma Y}^2} \lessgtr \frac{\overline{\Psi E}^2}{\overline{\Psi B}^2}$ deviennent des égalités.

1. Le texte sous-entend ici évidemment, ou aura perdu, les mots : ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ ἄξονος, littéralement « à la (droite) qui va jusqu'à l'axe », c'est-à-dire au paramètre. Voir proposition II, la note relative à cette expression.

2. C'est-à-dire comme dans la proposition VIII.

3. C'est-à-dire un segment qui réponde aux conditions : $NO > \frac{3}{2}p$; $\frac{NO}{p} < \frac{15}{4}$, et $\frac{\text{poids du segment}}{\text{poids même vol. de fluide}} > \frac{\overline{NO}^2 - [NO - \frac{3}{2}p]^2}{\overline{NO}^2}$.

Digitized by Google

de BΔ soit le même que le rapport en poids du segment à son volume de fluide. Soit, en outre, la droite Φ double de la droite X. Dès lors, il est évident que le rapport de l'excédent du carré de BΔ sur le carré de BT au carré de BΔ est plus petit que le rapport de l'excédent du carré de BΔ sur le carré de ΦX au carré de BΔ ; car BT est l'excédent de l'axe sur une fois et demie le paramètre. En conséquence, l'excédent du carré de BΔ sur le carré de ΦX est plus grand que l'excédent du carré de BΔ sur le carré de BT ; en sorte que la droite ΦX est plus petite que la droite BT, et Φ plus petite que BP (1).

Que la droite PΨ soit donc égale à la droite Φ, et menons sur BΔ une perpendiculaire ΨE dont le carré soit équivalent à la moitié du rectangle délimité par les droites KP, ΨB. Je dis que le segment, abandonné dans le fluide de manière que sa base soit entièrement dans le fluide, se fixera de telle sorte que son axe forme avec la surface du fluide un angle égal à l'angle B.

En effet, abandonnons le segment dans le fluide de la manière que nous venons de dire, et que son axe fasse avec la surface du fluide, non pas un angle égal à l'angle B, mais d'abord un angle plus grand.

Soit la parabole AΠΟΛ la section du segment coupé par un plan perpendiculaire à la surface du fluide (2), TI la section de la surface du fluide, et NO l'axe et diamètre (3), que nous coupons en Ω et en Θ, comme précédemment (4). De plus, menons, parallèlement à la droite TI, la droite ΥΠ tangente à la parabole au point Π, la droite ΠΜ (5)

---

1. On a, par hypothèse : $\frac{\text{poids du segment}}{\text{poids même vol. fluide}} > \frac{\overline{NO}^2 - [NO - \frac{3}{4}p]^2}{\overline{NO}^2}$, et l'on a posé : $\frac{\overline{B\Delta}^2 - (\Phi + X)^2}{\overline{B\Delta}^2} = \frac{\text{poids du segment}}{\text{poids même vol. fluide}}$; donc : $\frac{\overline{NO}^2 - [NO - \frac{3}{4}p]^2}{\overline{NO}^2} < \frac{\overline{B\Delta}^2 - (\Phi + X)^2}{\overline{B\Delta}^2}$. Or, NO = BΔ ; KP = p ; BK = $\frac{3}{4}$BΔ, et BP = $\frac{3}{4}$TB ; d'où : $NO - \frac{3}{4}p = B\Delta - \frac{3}{4}KP = B\Delta - \frac{3}{4}[BK - BP] = B\Delta - \frac{3}{4}[\frac{3}{4}B\Delta - \frac{3}{4}TB] = TB$; donc : $\frac{\overline{B\Delta}^2 - \overline{BT}^2}{\overline{B\Delta}^2} < \frac{\overline{B\Delta}^2 - (\Phi + X)^2}{\overline{B\Delta}^2}$, d'où : $\overline{B\Delta}^2 - (\Phi + X)^2 > \overline{B\Delta}^2 - \overline{BT}^2$, d'où, comme le texte : $\Phi + X < BT$. Or, $\Phi = 2X$, et $BT = \frac{3}{2}BP$; donc : $\Phi + \frac{1}{2}\Phi < \frac{3}{2}BP$, ou, comme le texte : $\Phi < BP$.

2. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XI.

3. C'est-à-dire l'axe du segment et diamètre de la section ou de la parabole.

4. Voir proposition VIII pour ce qui concerne la situation respective des points Ω et Θ.

5. Le texte grec du palimpseste présente une lacune à partir de cet endroit, et notre traduction a recours à l'ancienne version latine.

Digitized by Google

parallèle à la droite NO, *et la droite* ΠΣ *perpendiculaire à l'axe. Dès lors, puisque l'axe du segment forme avec la surface du fluide un angle plus grand que l'angle* B, *l'angle compris sous les droites* ΣΥ, ΥΠ *sera plus grand que l'angle* B. *Par conséquent, le rapport du carré de* ΠΣ *au carré de* ΣΥ *est plus grand que celui du carré de* ΨE *au carré de* ΨB ; *le rapport de* KP *à* ΣΥ *est donc plus grand que celui de la moitié de* KP *à* ΨB ; *la droite* ΣΥ *est donc plus petite que le double de la droite* ΨB, *et* ΣO *est plus petite que* ΨB (1). Donc, la droite ΣΩ est plus grande que la droite PΨ, et ΠH plus grande que Φ (2). Et puisque le rapport en poids du segment à son volume de fluide est le même que celui de l'excédent du carré de BΔ sur le carré de ΦX au carré de BΔ, et que le rapport de la partie immergée au segment entier est le même que le rapport en poids du segment à son volume de fluide, il est évident que le rapport de la partie immergée au segment entier est le même que celui de l'excédent du carré de BΔ sur le carré de ΦX au carré de BΔ. Donc, le rapport du segment entier à sa partie qui émerge du fluide sera le même que celui du carré de BΔ au carré de ΦX. Or, le rapport du carré de NO au carré de ΠM est le même que celui du segment entier à sa partie qui émerge du fluide ; par conséquent, MΠ est égale à ΦX (3). Or, nous

1. Fin de la lacune, et reprise de la traduction sur le texte grec.

2. Les relations qui précèdent découlent de la relation : $\frac{\overline{\Pi\Sigma}^2}{\overline{\Sigma Y}^2} > \frac{\overline{\Psi E}^2}{\overline{\Psi B}^2}$ démontrée en note à la proposition VIII. En effet, $\overline{\Pi\Sigma}^2 = 2\Sigma O \times p = \Sigma Y \times KP$, d'où : $\frac{\overline{\Pi\Sigma}^2}{\overline{\Sigma Y}^2} = \frac{\Sigma Y \times KP}{\overline{\Sigma Y}^2} = \frac{KP}{\Sigma Y}$. D'autre part, on a posé : $\overline{\Psi E}^2 = \frac{1}{2}KP \times \Psi B$, d'où : $\frac{\overline{\Psi E}^2}{\overline{\Psi B}^2} = \frac{\frac{1}{2}KP \times \Psi B}{\overline{\Psi B}^2} = \frac{\frac{1}{2}KP}{\Psi B}$, d'où, remontant à l'inégalité première : $\frac{KP}{\Sigma Y} > \frac{\frac{1}{2}KP}{\Psi B}$, d'où : $\Sigma Y < 2\Psi B$. Or, $\Sigma Y = 2\Sigma O$, d'où : $\Sigma O < \Psi B$. Or, $\Sigma O = O\Omega - \Sigma\Omega$, et $\Psi B = BP - \Psi P$, d'où, en observant que $O\Omega = BP$, on a, comme le texte : $\Sigma\Omega > \Psi P$. Or, $\Sigma\Omega = \Pi H$, et on a pris : $\Psi P = \Phi$, d'où, comme le texte : $\Pi H > \Phi$.

3. On a posé : $\frac{\overline{B\Delta}^2 - (\Phi + X)^2}{\overline{B\Delta}^2} = \frac{\text{poids du segment}}{\text{poids même vol. fluide}}$, et la prop. I donne : $\frac{\text{segment immergé}}{\text{segment entier}} = \frac{\text{poids du segment}}{\text{poids même vol. fluide}}$; donc : $\frac{\text{segment immergé}}{\text{segment entier}} = \frac{\overline{B\Delta}^2 - (\Phi + X)^2}{\overline{B\Delta}^2}$, d'où : $\frac{\text{segment entier}}{\text{segment entier} - \text{segment immergé}} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{B\Delta}^2 - [\overline{B\Delta}^2 - (\Phi + X)^2]}$ ou, comme le texte : $\frac{\text{segment entier}}{\text{segment émergé}} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{(\Phi + X)^2}$. Or, la proposition XXIV du livre *Des Co-*

Digitized by Google

avons démontré que ΠH est plus grande que Φ ; donc, MH est plus petite que X (1), et ΠH est plus grande que le double de HM (2). Que la droite ΠZ soit double de la droite ZM, et menons la droite de jonction ZΘ que nous prolongeons vers le point Γ. Le centre de gravité du segment entier sera donc le point Θ, celui de la partie qui émerge du fluide sera le point Z, et celui de la partie immergée sera situé sur la droite ΘΓ (3). Soit le point Γ ce centre. Dès lors, on démontrera, comme précédemment, que la droite ΘH est perpendiculaire à la surface du fluide, et que les droites menées des points Z, Γ, parallèlement à la droite ΘH, sont aussi perpendiculaires à la surface du fluide. En conséquence, le segment qui émerge du fluide sera porté vers le bas suivant la droite menée par le point Z, et le segment immergé sera porté vers le haut suivant la droite menée par le point Γ. Donc, le segment entier ne se fixera pas sans inclinaison ; mais il ne se redressera pas de telle sorte que son axe soit perpendiculaire à la surface du fluide, parce que les parties, situées du côté du point Λ, sont sollicitées vers le bas, et que les parties, situées du côté du point A, le sont vers le haut pour des raisons identiques à celles que nous avons exposées dans la proposition précédente (4).

D'autre part, si l'axe formait un angle plus petit que l'angle B avec la surface du fluide, on démontrerait, de la même manière que précédemment (5), que le segment ne restera pas en place, mais qu'il s'inclinera jusqu'à ce que l'axe forme un angle égal à l'angle B avec la surface du fluide.

---

noïdes et des Sphéroïdes donne : $\frac{\overline{NO}^2}{\overline{\Pi M}^2} = \frac{\text{segment entier}}{\text{segment émergé}}$; donc, en observant que $B\Delta = NO$, on a : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Pi M}^2} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{(\Phi + X)^2}$, d'où, comme le texte : $\Pi M = \Phi + X$.

1. On a (note pénultième) : $\Pi H > \Phi$, ou $M\Pi - MH > \Phi$, d'où, en présence de la relation de la note précédente : $\Phi + X - MH > \Phi$, ou, comme le texte : $MH < X$.

2. En observant que $\Phi = 2X$, les relations précédentes $\Pi H > \Phi$ et $MH < X$ donnent : $\Pi H > 2MH$.

3. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, proposition VIII.

4. Voir proposition VIII.

5. Voir proposition VIII, seconde partie de la démonstration.

Digitized by Google

PROPOSITION X.

Lorsqu'un segment droit de paraboloïde, moins dense qu'un fluide, dont l'axe est trop grand pour que son rapport au paramètre soit le même que celui de quinze à quatre, est abandonné dans ce fluide de manière que sa base ne touche pas le fluide, il s'établira, tantôt verticalement, tantôt incliné : tantôt incliné de telle sorte que sa base touche la surface du fluide en un point, cas se présentant sous deux inclinaisons, tantôt incliné de telle sorte que sa base soit immergée sur un espace plus considérable, enfin de telle sorte que sa base ne touche la surface du fluide en aucun point. Au reste, nous indiquerons d'abord quel sera, dans chacun de ces cas, le rapport en poids du segment avec le fluide (1).

Soit un segment tel que nous venons de le dire. Soit la parabole ΑΠΟΛ la section de ce segment dans la surface d'un plan perpendiculaire à la surface du fluide (2) ; soit BΔ l'axe (3) et le diamètre de la section, et coupons BΔ, d'une part, au point K, de manière que BK soit double de KΔ, d'autre part, au point T, de manière que le rapport de ΔB à KT soit le même que celui de quinze à quatre. Dès lors, il est évident que la droite KT est plus grande que le paramètre (4). Que la droite KP soit donc égale au paramètre, et que la droite PΣ soit égale à la moitié de la droite BP ; il en résulte que la droite ΣB est égale à une fois et demie la droite BP (5). Menons la droite de jonction AB, et, élevant la perpendiculaire TE, menons la droite EZ parallèle à la droite BΔ. Divisons de nouveau la droite BA en deux parties égales au point Θ, et menons la droite ΘH parallèle à BΔ. Enfin, prenons une parabole AEI autour du diamètre EZ, et une parabole AΘΔ autour du diamètre ΘH, de manière que leurs segments AEI, AΘΔ soient semblables au segment ABΛ (6). Dès lors, la

1. C'est-à-dire avec son volume de fluide.
2. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XI.
3. C'est-à-dire l'axe du segment.
4. Le point T est pris tel que $\frac{\Delta B}{KT} = \frac{15}{4}$. Or, par hypothèse : $\frac{\Delta B}{p} > \frac{15}{4}$; donc : $KT > p$.
5. Si l'on donne $P\Sigma = \frac{1}{2}BP$, on aura : $\Sigma B = BP + P\Sigma = \frac{3}{2}BP$.
6. C'est-à-dire de manière que les bases soient entre elles comme les diamètres ou axes.

Digitized by Google

parabole AEI sera décrite par le point K (1), et la perpendiculaire élevée en P sur BΔ coupera la parabole AEI (2). Que cette perpendiculaire la coupe aux points Υ, Γ, et, par ces points Υ, Γ, menons les droites ΥX, ΓN, parallèles à la droite BΔ, et coupant la parabole AΘΔ aux points Ξ, Φ. Menons encore les droites ΠΨ, Oϛ tangentes à la parabole AΠOΛ aux points O, Π. On a donc trois segments AΠOΛ, AEI, AΘΔ, délimités par des droites et par des paraboles, droits, semblables, mais non équivalents ; de plus, leurs bases respectives coïncident, et les droites NΞ, NΓ, NO sont issues du point N. Il s'ensuit que le rapport de OΓ à ΓΞ sera le même que le rapport composé de celui de IΛ à ΛA et de celui de AΔ à ΔI (3). Or, ΛI est à ΛA comme deux est à cinq ; car TB est à

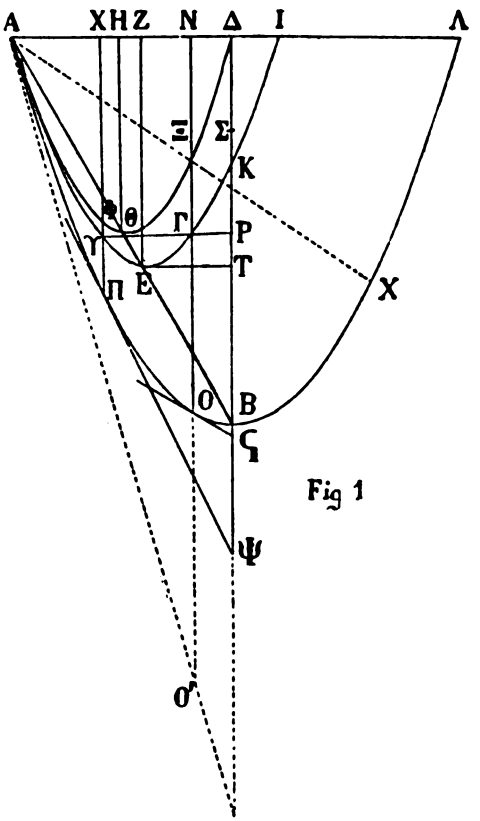


Fig 1

1. Il résulte de la proposition IV du livre *De la Quadrature de la Parabole* que la parabole AEI passera par le point K s'il est satisfait à la relation $\frac{AZ}{Z\Delta}=\frac{\Delta B}{BK}$. En effet, on a pris $BK=2K\Delta$, d'où : $\Delta B=\frac{3}{2}BK$, (I). D'autre part, la même relation $BK=2K\Delta$ donne : $BT+TK=2[\Delta T-TK]$, d'où : $TK=\frac{2\Delta T-BT}{3}$. Or, on a posé : $\frac{B\Delta}{TK}=\frac{15}{4}$; donc : $TK=\frac{4}{15}B\Delta=\frac{4}{15}[BT+\Delta T]$. Donc : $\frac{4}{15}[BT+\Delta T]=\frac{2\Delta T-BT}{3}$, d'où : $\Delta T=\frac{3}{2}BT$, (II). Comparons (I) et (II), il vient : $\frac{\Delta B}{BK}=\frac{\Delta T}{BT}$. Or, les triangles semblables donnent : $\frac{\Delta T}{BT}=\frac{AE}{EB}=\frac{AZ}{Z\Delta}$; donc : $\frac{AZ}{Z\Delta}=\frac{\Delta B}{BK}$.

2. Car $\Delta P<\Delta T$, d'où : $\Delta P<ZE$.

3. La relation $\frac{O\Gamma}{\Gamma\Xi}=\frac{I\Lambda}{\Lambda A}\times\frac{A\Delta}{\Delta I}$ résulte de la proposition V du livre *De la Quadrature de la Parabole*, à condition que la tangente en A à la parabole extérieure soit aussi tangente en A aux deux paraboles intérieures. Or, cette condition est réalisée, puisque la sous-tangente du point A dans la parabole extérieure est double de l'abscisse de ce point, et que les axes des deux paraboles intérieures, menés parallèlement à l'axe de la parabole extérieure, rencontreront la tangente en A à la

Digitized by Google

BΔ comme deux est à cinq, de même que EB est à BA, et que ΔZ est à ΔA (1), tandis que les droites ΛI, ΛA sont doubles de ces dernières (2). D'autre part, AΔ est à ΔI comme cinq est à un (3). Or, le rapport composé de celui de deux à cinq et de celui de cinq à un est le même que celui de deux à un ; par conséquent, OΓ est double de ΓΞ, et, pour les mêmes raisons, ΠΥ est double de ΥΦ (4). Or, puisque ΔZ vaut une fois et demie KP, il est évident que BZ est l'excédent dont l'axe dépasse une fois et demie le paramètre (5).

Dès lors, si le rapport en poids du segment à son volume de fluide est le même que celui du carré de BΣ au carré de BΔ ou, s'il est plus grand que ce rapport, le segment étant abandonné dans le fluide de manière que sa base ne touche pas le fluide, il s'établira verticalement :

---

parabole extérieure au double de leur longueur. La tangente en A à la parabole extérieure étant donc tangente aux deux paraboles intérieures, on aura, en vertu de la proposition précitée, après avoir complété la figure du texte au moyen des constructions en pointillé : $\frac{NO}{O'O}=\frac{N\Lambda}{NA}$, d'où : $\frac{NO+O'O}{O'O}=\frac{N\Lambda+NA}{NA}$ ou : $\frac{NO'}{O'O}=\frac{A\Lambda}{NA}$, d'où : $O'O=\frac{NA\times NO'}{A\Lambda}$. Et de même: $\frac{NO'}{O'\Gamma}=\frac{AI}{NA}$, d'où: $O'\Gamma=\frac{NA\times NO'}{AI}$, et $\frac{NO'}{O'\Xi}=\frac{A\Delta}{NA}$, d'où : $O'\Xi=\frac{NA\times NO'}{A\Delta}$. Et, par différence : $O'\Gamma-O'O=O\Gamma=NA\times NO'\left[\frac{1}{AI}-\frac{1}{A\Lambda}\right]$, et $O'\Xi-O'\Gamma=\Gamma\Xi=NA\times NO'\left[\frac{1}{A\Delta}-\frac{1}{AI}\right]$, d'où :

$$\frac{O\Gamma}{\Gamma\Xi}=\frac{A\Delta(A\Lambda-AI)}{A\Lambda(AI-A\Delta)}=\frac{A\Delta\times I\Lambda}{A\Lambda\times\Delta I}=\frac{I\Lambda}{A\Lambda}\times\frac{A\Delta}{\Delta I}.$$

1. On a eu, note avant-précédente : $\Delta T=\frac{3}{2}BT$, d'où : $\frac{BT}{\Delta T}=\frac{2}{3}$, d'où : $\frac{BT}{BT+\Delta T}=\frac{BT}{B\Delta}=\frac{2}{5}$ Or, par similitude de triangles, on a : $\frac{TB}{B\Delta}=\frac{EB}{BA}=\frac{\Delta Z}{\Delta A}=\frac{2}{5}$, d'où : $\frac{\Delta A-\Delta Z}{A\Delta}=\frac{AZ}{\Delta A}=\frac{3}{5}$. Or, $\frac{AZ}{\Delta A}=\frac{EZ}{\Delta B}$, et, puisque les paraboles sont semblables par hypothèse, on a : $\frac{EZ}{\Delta B}=\frac{AI}{A\Lambda}$, d'où : $\frac{AI}{A\Lambda}=\frac{3}{5}$, d'où : $\frac{A\Lambda-AI}{A\Lambda}=\frac{5-3}{5}$, ou, comme le texte : $\frac{I\Lambda}{A\Lambda}=\frac{2}{5}$.

2. $\Lambda I=A\Lambda-AI=2[A\Delta-AZ]=2\Delta Z$.

3. La relation $\Delta T=\frac{3}{2}BT$ donne : $\frac{BT+\Delta T}{\Delta T}=\frac{B\Delta}{\Delta T}=\frac{5}{3}$, d'où : $\frac{\frac{1}{2}B\Delta}{\Delta T}=\frac{5}{6}$. Or, $\frac{1}{2}B\Delta=\Theta H$, et $\Delta T=EZ$; donc : $\frac{\Theta H}{EZ}=\frac{5}{6}$. Or, $\frac{\Theta H}{EZ}=\frac{A\Delta}{AI}$, d'où : $\frac{A\Delta}{AI}=\frac{5}{6}$, d'où :

$$\frac{A\Delta}{AI-A\Delta}=\frac{A\Delta}{\Delta I}=\frac{5}{1}.$$

4. Les valeurs trouvées dans les deux notes précédentes, substituées dans la relation $\frac{O\Gamma}{\Gamma\Xi}=\frac{I\Lambda}{\Lambda A}\times\frac{A\Delta}{\Delta I}$, donnent : $\frac{O\Gamma}{\Gamma\Xi}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{1}=2$, d'où, comme le texte : $O\Gamma=2\Gamma\Xi$. On aurait de même : $\Pi Y=2Y\Phi$.

5. On a : $\Delta\Sigma=B\Delta-B\Sigma$. Or, $B\Delta=3K\Delta$, et on a vu que $B\Sigma=\frac{3}{2}BP$; donc : $\Delta\Sigma=3K\Delta-\frac{3}{2}BP$. Or, par hypothèse : $BK=2K\Delta$, d'où, comme le texte: $\Delta\Sigma=\frac{3}{2}(BK-BP)=\frac{3}{2}KP$. D'autre part, $B\Sigma=B\Delta-\Delta\Sigma=B\Delta-\frac{3}{2}KP$, ou, comme le texte : $B\Sigma=B\Delta-\frac{3}{2}p$.

Digitized by Google

car il a été démontré précédemment que lorsqu'un segment, dont l'axe dépasse une fois et demie le paramètre, et dont le rapport en poids à son volume de fluide n'est pas inférieur à celui du carré de l'excédent de l'axe sur une fois et demie le paramètre au carré de l'axe, est abandonné dans le fluide, comme il a été dit, il s'établira verticalement (1).

Toutefois, si le rapport en poids du segment à son volume de fluide est moindre que celui du carré de ΣB au carré de BΔ, mais néanmoins supérieur à celui du carré de OΞ au carré de BΔ, le segment étant abandonné dans le fluide dans une position inclinée telle que sa base ne touche pas le fluide, il restera incliné, de telle sorte que sa base ne touche la surface du fluide en aucun point, et que son axe fasse avec la surface du fluide un angle plus grand que l'angle ϥ (2).

Si le rapport en poids du segment à son volume de fluide est le même que celui du carré de ΞO au carré de BΔ, le segment étant abandonné dans le fluide, incliné de manière que sa base ne touche pas le fluide, il restera incliné, de telle sorte que sa base touche la surface du fluide en un point, et que son axe fasse avec la surface du fluide un angle égal à l'angle ϥ (3).

Si le rapport en poids du segment à son volume de fluide est moindre que celui du carré de ΞO au carré de BΔ, mais néanmoins supérieur à celui du carré de ΠΦ au carré de BΔ, le segment étant abandonné dans le fluide, incliné de manière que sa base ne touche pas le fluide, il restera incliné, de telle sorte que sa base soit coupée par le fluide sur un espace plus considérable (4).

Si le rapport en poids du segment à son volume de fluide est le

---

1. Le premier cas répond donc à la condition : $\frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}} \geqslant \frac{\overline{B\Sigma}^2}{\overline{B\Delta}^2}$.

Or, on a vu (note précédente) que $B\Sigma = B\Delta - \frac{3}{4}p$. Donc, ce cas a déjà été démontré dans la proposition IV qui avait posé la condition :

$$\frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}} \geqslant \frac{(B\Delta - \frac{3}{4}p)^2}{\overline{B\Delta}^2}.$$

2. Le second cas à démontrer répondra donc aux conditions :

$$\frac{\overline{O\Xi}^2}{\overline{B\Delta}^2} < \frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}} < \frac{\overline{\Sigma B}^2}{\overline{B\Delta}^2}.$$

3. Le troisième cas répondra à la condition $\frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}} = \frac{\overline{\Xi O}^2}{\overline{B\Delta}^2}$.

4. Le 4e cas répondra aux conditions $\frac{\overline{\Pi\Phi}^2}{\overline{B\Delta}^2} < \frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}} < \frac{\overline{\Xi O}^2}{\overline{B\Delta}^2}$.

Digitized by Google

même que celui du carré de ΠΦ au carré de BΔ, le segment étant abandonné dans le fluide, incliné de manière que sa base ne touche pas le fluide, il restera incliné, de telle sorte que sa base touche la surface du fluide en un point, et que son axe fasse un angle égal à l'angle Ψ (1).

Si le rapport en poids du segment à son volume de fluide est moindre que celui du carré de ΠΦ au carré de BΔ, le segment étant abandonné dans le fluide, incliné de manière que sa base ne touche pas le fluide, il restera incliné, de telle sorte que son axe fasse avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle Ψ, et que sa base ne touche la surface du fluide en aucun point (2).

Ces propositions vont donc être démontrées successivement :

Que le rapport en poids du segment à son volume de fluide soit donc, en premier lieu, supérieur à celui du carré de ΞO au carré de BΔ, mais néanmoins inférieur à celui du carré de l'excédent de l'axe sur une fois et demie le paramètre au carré de BΔ, et supposons que, dans la figure qui précède, le rapport du carré de Ψ au carré de BΔ soit le même que le rapport en poids du segment à son volume de fluide. Dès lors, la droite Ψ sera plus grande que la droite ΞO, mais plus petite que l'excédent de l'axe sur une fois et demie le paramètre(3). Intercalons du reste entre les sections coniques AΠOΛ, AΞΔ (4) *une droite* NO, *égale à la droite* Ψ (5), *coupant la section conique restante*

---

1. Le cinquième cas répondra à la condition $\frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}} = \frac{\overline{\Pi\Phi}^2}{\overline{B\Delta}^2}$.

2. Le sixième cas répondra à la condition : $\frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}} < \frac{\overline{\Pi\Phi}^2}{\overline{B\Delta}^2}$.

3. Le cas à démontrer répond aux conditions : $\frac{(B\Delta - \frac{3}{2}p)^2}{\overline{B\Delta}^2} > \frac{\text{poids du segment}}{\text{poids même vol. fluide}} > \frac{\overline{\Xi O}^2}{\overline{B\Delta}^2}$ qui, pour se concilier, exigent que $\Xi O < B\Delta - \frac{3}{2}p$, ou que $\Xi O < B\Sigma$. En effet, $\Xi O = O\Gamma + \Gamma\Xi = O\Gamma + \frac{1}{2}O\Gamma = \frac{3}{2}O\Gamma$; et $B\Sigma = BP + P\Sigma = BP + \frac{1}{2}BP = \frac{3}{2}BP$. Or, on a évidemment : $O\Gamma < BP$; donc : $\Xi O < B\Sigma$. Et puisque l'on pose : $\frac{\Psi^2}{\overline{B\Delta}^2} = \frac{\text{poids segment}}{\text{poids même vol. fluide}}$, on a aussi : $\Psi > \Xi O$, et $\Psi < B\Delta - \frac{3}{2}p$.

4. Début d'une lacune fort étendue dans le texte grec du palimpseste, et continuation de la traduction sur l'ancienne version latine précitée.

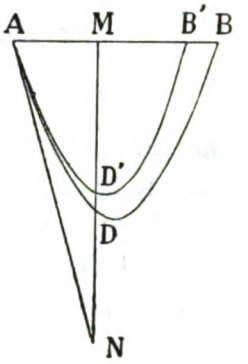
5. Le texte sous-entend évidemment que la droite de longueur donnée à intercaler entre les deux paraboles est parallèle aux axes. Archimède ne montre cependant pas qu'il est possible de mener cette droite. Cette possibilité peut se déduire simplement de la proposition V *De la Quadrature de la Parabole*. En effet, suppo-

Digitized by Google

au point ⋔, *et la droite* PϚ *au point* Bι. *On démontrera d'ailleurs que* O⋔ *est double de* ⋔N, *comme on a démontré que* MϚ *est double de* ϚΞ(1). *Du point* O *menons la droite* OY *tangente à la parabole* ΑΠΟΛ, *la droite* OT *perpendiculaire sur la droite* BΔ, *et menons la droite de jonction* AN. *Les droites* AN, XN *seront donc égales entre elles. En effet, puisque les droites* AN, AX *ont été menées des bases aux paraboles, dans les segments semblables* ΑΠΟΛ, ΑΞΔ, *en faisant des angles égaux avec les bases, les droites* XA, AN *auront même rapport que celui des droites* ΛA, AΔ, *en vertu des constructions mêmes de la seconde figure ; par conséquent, la droite* AN *est égale à la droite* XN (2), *et la droite* OY *est parallèle à ces dernières* (3). *On doit*

---

sons le problème résolu, et soit DD' la droite de longueur donnée intercalée, parallèlement aux axes, entre deux paraboles semblables ayant le point A commun sur les bases de segment qui coïncident. Il a été démontré, dans une note précédente, que la tangente en A est commune aux deux paraboles. Dès lors, il suffit de déterminer le point d'intersection M de la droite DD' prolongée avec la base AB du segment. Or, en vertu de la proposition précitée, l'on a : $\frac{ND'}{NM}=\frac{AM}{AB}$, et $\frac{ND}{NM}=\frac{AM}{AB}$; donc : $ND'=\frac{AM\times NM}{AB'}$, et $ND=\frac{AM\times NM}{AB}$, d'où :



$ND'-ND=DD'=\frac{AM\times NM(AB-AB')}{BB'}$, d'où :

$AM\times NM=\frac{DD'\times AB\times AB'}{BB'}$. D'autre part, on a :

$\frac{NM}{AM}=\frac{\text{sous-tangente A}}{\text{ordonnée de A}}$. Dès lors, on connaît le produit et le rapport des droites NM, AM, d'où la valeur de AM, et la position du point M.

1. On a vu dans une note précédente qui considérait les constructions de la figure I : $O\Gamma=2\Gamma\Xi$, et $\Pi Y=2Y\Phi$; ce qui, dans la figure II, donne : $O⋔=2⋔N$, et $M\text{Ϛ}=2\text{Ϛ}\Xi$.

2. Le texte se borne à renvoyer aux constructions mêmes de la figure pour démontrer l'égalité des droites AN, XN. Reportons-nous-en à la première figure de cette proposition, et complétons-la par la droite AΞ, tracée en pointillé, et que nous prolongeons jusqu'au point de rencontre X avec la courbe. Il faut démontrer que $A\Xi=\Xi X$. En effet, en vertu de la proposition V *De la Quadrature de la Parabole*, on aura : $\frac{\Lambda N}{NA}=\frac{NO}{OO'}$, d'où : $\frac{\Lambda N+NA}{NA}=\frac{NO+OO'}{OO'}$, ou : $\frac{A\Lambda}{NA}=\frac{NO}{OO'}$; et, d'autre part : $\frac{NA}{A\Delta}=\frac{\Xi O}{NO}$, d'où : $\frac{A\Lambda}{NA}\times\frac{NA}{A\Delta}=\frac{NO'}{OO'}\times\frac{\Xi O'}{NO'}$, ou : $\frac{A\Lambda}{A\Delta}=\frac{\Xi O'}{OO'}$. Or, $A\Lambda=2A\Delta$; donc : $\Xi O'=2OO'$, d'où : $\Xi O=OO'$. Mais, en vertu de la même proposition V, on a aussi : $\frac{X\Xi}{\Xi A}=\frac{\Xi O}{OO'}$, d'où : $X\Xi=\Xi A$; ce qui, dans la notation relative à la figure 2, devient : $AN=XN$.

3. La tangente en O sera parallèle à la droite AX, car toutes les cordes parallèles à AX seront divisées en deux parties égales par le diamètre conjugué ON, et la tangente en O jouit de la même propriété à la limite.

Digitized by Google

démontrer que si le segment est abandonné dans le fluide, de manière que sa base ne touche le fluide en aucun point, il restera incliné, de telle sorte que sa base ne touche la surface du fluide en aucun point, et que son axe forme avec la surface du fluide un angle aigu plus grand que l'angle Υ.

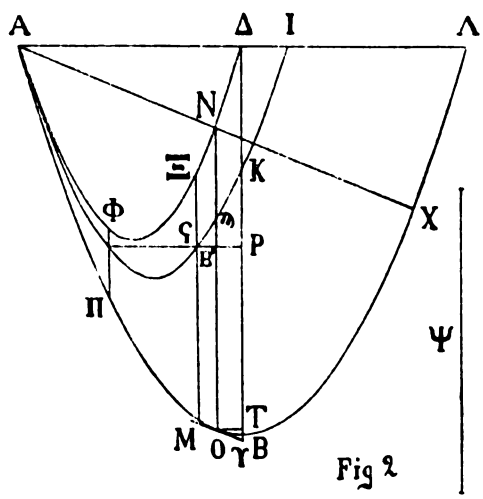


Fig 2

En effet, abandonnons le segment de manière que sa base touche la surface du fluide en un seul point. Soit la parabole ΑΠΟΛ *la section du segment coupé par un plan qui, passant par l'axe, est perpendiculaire à la surface du fluide* (1), *soit la droite* AO *la section de la surface du fluide, et soit* BΔ *l'axe et le diamètre* (2). *Coupons la droite* BΔ *aux points* K *et* P, *comme nous l'avons dit* (3). *Menons la droite* ΠΓ, *parallèle à la droite* AO *et tangente à la parabole* ΑΠΟΛ *au point* Π; *la droite* ΠΘ *parallèle à la droite* BΔ, *et la droite* ΠΣ *perpendiculaire sur la droite* BΔ. *Dès lors, puisque le rapport en poids du segment à son volume de fluide est le même que celui du carré de* Ψ *au carré de* BΔ, *que le rapport de la partie immergée au segment entier est le même que celui du segment au fluide* (4) *et que le rapport du carré de* ΘΠ *au carré de* ΔB *est le même que celui de la partie immergée au segment entier* (5), *il s'ensuit que la droite* Ψ *est égale à la droite* ΘΠ (6), *et que la droite* NO *est égale à la droite* ΘΠ (7). *Donc, les segments* ΑΠΧ, ΑΠΟ *sont égaux entre eux* (8). *Dès lors, puisque dans les segments égaux et semblables* ΑΠΟΛ, ΑΜΧΛ, *on a mené*

1. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XI.
2. C'est-à-dire l'axe du segment et diamètre de la parabole.
3. C'est-à-dire de manière que $BK = 2K\Delta$, et que $\frac{B\Delta}{KP} = \frac{15}{4}$.
4. Voir proposition I.
5. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XXIV.
6. Il résulte de cette série de rapports égaux que $\frac{\Psi^2}{B\Delta^2} = \frac{\overline{\Theta\Pi}^2}{\overline{B\Delta}^2}$, d'où : $\Psi = \Theta\Pi$.
7. Voir figure 2 dans laquelle on a posé : $NO = \Psi$, d'où : $NO = \Theta\Pi$.
8. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XXIV.

Digitized by Google

les droites OA, AX *des extrémités des bases, et que les segments ainsi retranchés forment des angles égaux avec les diamètres, suivant les constructions de la troisième figure, il en résulte que les angles en* Υ *et* Γ *sont égaux, et que les droites* ΥB, ΓB *sont égales. Donc, les droites* ΣP, TP *sont aussi égales, ainsi que les droites* ΠZ, OB′ *et les droites* ZΘ, B′N. *D'ailleurs, puisque la droite* OB′ *est plus petite que le double de la droite* B′N, *il est clair que la droite* ΠZ *est plus petite que le double de la droite* ZΘ (1). *Dès lors, que la droite* ΠΩ *soit double de la droite* ΩΘ, *et menons la droite de jonction* KΩ, *que nous prolongeons vers* E. *Le point* K *sera donc le centre de gravité du segment entier, le point* Ω *le centre de la partie immergée dans le fluide, tandis que celui de la partie qui émerge sera situé sur la droite* KE, *soit au point* E (1). *D'autre part, la droite* KZ *sera perpendiculaire à la surface du fluide* (2) ; *par conséquent, les droites menées des points* E, Ω, *parallèlement à la droite* KZ, *le seront aussi. Dès lors, le segment ne restera pas en position, mais il s'inclinera de manière que sa base ne touche plus la surface du fluide en un point, puisqu'il est incliné maintenant avec la base la touchant en un point. Il est donc manifeste que le segment s'établira de telle sorte que son axe fasse avec la surface du fluide un angle plus grand que l'angle* Υ.

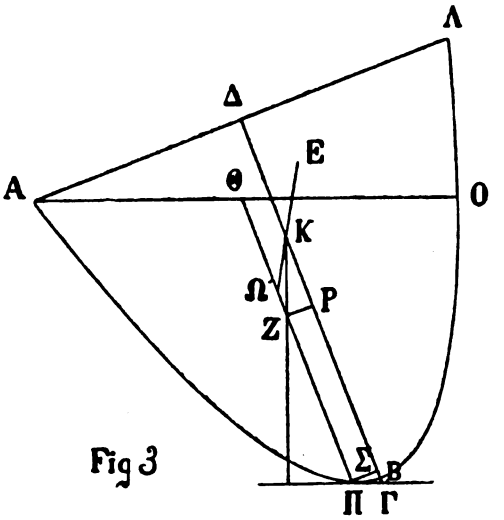


Fig 3

Que le rapport en poids du segment à son volume de fluide soit maintenant le même que celui du carré de ΞO *au carré de* BΔ, *et abandonnons-le dans le fluide de la manière qui a été indiquée* (3). *Soit la parabole* AΠOΛ *la section du segment par un plan perpendiculaire à la surface du fluide, et la droite* OI *la section de la surface du fluide. Soit* BΔ *l'axe du segment et le diamètre de la section, et*

1. On a démontré dans une note précédente que OΘ = 2ΘN, et que MΣ = ΣΞ.
2. Voir *De l'Equilibre des Plans*, proposition VIII.
3. Voir proposition IV, note dernière.
4. C'est-à-dire : de manière que la base ne touche la surface du fluide en aucun point.

Digitized by Google

coupons BΔ *comme précédemment* (1). *Menons la droite* ΠN *parallèle à la droite* IO *et tangente à la section au point* Π, *la droite* ΠΘ *parallèle à* BΔ, *et la droite* ΠΣ *perpendiculaire à* BΔ. *On doit démontrer que le segment ne restera pas incliné de cette manière, mais qu'il s'inclinera jusqu'à ce que sa base touche la surface du fluide en un seul point. Considérons les constructions antérieures, notamment celles de la figure qui précède* (2). *Menons la droite* ΓO *perpendiculaire à la droite* BΔ, *et prolongeons jusqu'en* X *la droite de jonction* AΞ. *La droite* AΞ *sera d'ailleurs égale à la droite* EX (3). *Menons enfin la droite* Oϛ *parallèle à la droite* AX. *Dès lors, puisque l'on suppose que le rapport en poids du segment à son volume de fluide est le même que celui du carré de* ΞO *au carré de* BΔ, *tandis que la partie immergée possède ce même rapport avec le segment entier* (4), *c'est-à-dire le rapport du carré de* ΘΠ *au carré de* BΔ (5), *il en résulte que la droite* ΠΘ *sera égale à la droite* ΞO, *et les segments* IBO, ABX *seront égaux parce que leurs diamètres sont égaux* (6). *D'autre part, puisque, dans les segments égaux et sem-*

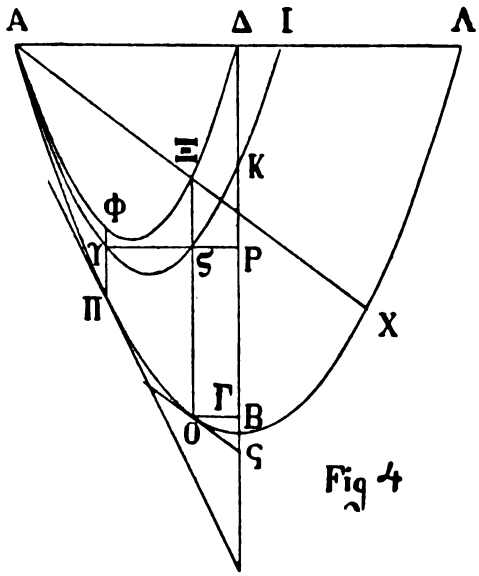


Fig 4

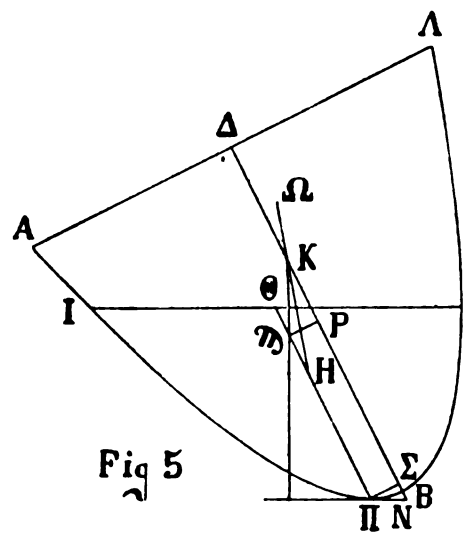


Fig 5

1. C'est-à-dire : de manière que $BK = 2K\Delta$ et $\frac{B\Delta}{KP} = \frac{15}{4}$.
2. Voir concurremment les figures 2, 4 et 5, en tenant compte de la littération différente de ces figures.
3. L'égalité de ces droites a été démontrée dans une note plus haut.
4. Voir proposition I.
5. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XXIV.
6. *Ibidem.*

Digitized by Google

blables ΑΠΟΛ, ΑΧΟΛ, *les droites* ΑΧ, ΙΟ, *qui retranchent des segments égaux, ont été menées, l'une d'une extrémité de la base, et l'autre non d'une extrémité, il est clair que celle qui a été menée d'une extrémité de base fait un angle aigu plus petit avec le diamètre du segment entier* (1). *Et puisque l'angle situé en* ϛ *est plus petit que l'angle situé en* Ν, *la droite* ΒΓ *est plus grande que la droite* ΒΣ, *et la droite* ΓΡ *plus petite que la droite* ΡΣ (2) ; *par conséquent, la droite* Οϛ *est plus petite que la droite* Π⊗, *et la droite* ϛΞ *plus grande que la droite* ⊗Θ (3). *Et puisque la droite* Οϛ *est double de la droite* ϛΞ (4) *il est clair que la droite* Π⊗ *est plus grande que le double de la droite* ⊗Θ (5). *Dès lors, que la droite* ΠΗ *soit double de la droite* ΗΘ (6), et menons la droite de jonction ΗΚ que nous prolongeons vers le point Ω. Le point Κ sera donc le centre de gravité du segment entier, le point Η celui de la partie immergée dans le fluide (7), tandis que celui de la partie qui émerge sera situé sur la droite ΚΩ (8), c'est-à-dire au point Ω. On démontrerait, de la même manière (9), que la droite Κ⊗ est perpendiculaire à la surface du fluide, ainsi que les parallèles menées par les points Η, Ω à la droite Κ⊗ ; par conséquent, il est évident que le segment ne restera pas en place, mais qu'il s'inclinera davantage jusqu'à ce que sa base touche la surface du fluide en un seul point, comme (10) *nous allons le démontrer sur la troisième figure, telle qu'elle se présente dans le troisième cas de la proposition* (11), *et que le segment restera fixé dans cette position.*

1. Les segments étant égaux, si le point I se relève, le point O restant fixe, la nouvelle droite IO forme un angle plus aigu avec l'axe ; mais les segments sont devenus inégaux. Pour qu'ils redeviennent égaux, le point O doit être abaissé, tandis que le point I garde sa position relevée. Dès lors, la troisième droite IO forme un angle encore plus aigu avec l'axe. Donc, dans sa position primitive, la droite IO formait avec l'axe un angle moins aigu que celui qui est formé par la droite AX avec l'axe.

2. Puisque l'angle ϛ < angle N, on a : ϛΓ > ΝΣ, d'où : ½ϛΓ > ½ΝΣ, ou : ΒΓ > ΒΣ, d'où : ΒΡ — ΒΓ < ΒΡ — ΒΣ, ou, comme le texte : ΓΡ < ΡΣ.

3. La relation ΓΡ < ΡΣ donne : Οϛ < Π⊗. (Or, ΟΞ = ΠΘ ; donc : ΟΞ — Οϛ > ΠΘ — Π⊗, ou, comme le texte : Ξϛ > Θ⊗.

4. Voir note plus haut.

5. Puisque ϛΞ > ⊗Θ, on a : 2ϛΞ > 2⊗Θ. Or, Οϛ = 2ϛΞ ; donc : Οϛ > 2⊗Θ. Or, Οϛ < Π⊗ ; donc : Π⊗ > 2⊗Θ.

6. Fin de la lacune, et reprise de la traduction sur le texte grec du palimpseste.

7. Voir proposition II.

8. Voir *De l'Equilibre des Plans,* livre I, proposition VIII.

9. Voir proposition IV et note.

10. Lacune dans le texte grec, et traduction sur la version latine.

11. Voir figure 6 qui est en réalité la troisième répondant au troisième cas subordonné à la condition : $\frac{\text{poids du segment}}{\text{poids même vol. fluide}} = \frac{\overline{\Xi O}^2}{\overline{B\Delta}^2}$.

Digitized by Google

En effet, les droites AX, AO *auront été menées en retranchant des segments égaux, à partir des extrémités des bases, dans les segments égaux* AΠOΛ, AOXΛ (1) ; *car on démontrerait, comme précédemment, que le segment* AΠX *est égal au segment* AΠO (2). *Donc, puisque les angles situés en* N *et* ϛ *sont égaux, les droites* AO, AX *forment des angles aigus égaux avec les diamètres des segments. Que la droite* Π℞ *soit donc double de la droite* ℞Θ ; *menons la droite de jonction* ℞K, *et prolongeons-la vers* Ω. *Le centre de gravité du segment entier sera donc le point* K, *celui de la partie immergée dans le fluide sera le point* ℞, *et celui de la partie qui émerge sera situé sur la droite* KΩ, *c'est-à-dire au point* Ω (3). *Or, la droite* K℞ (4) est perpendiculaire à la surface du fluide (5) ; par conséquent, la partie immergée dans le fluide et la partie qui émerge du fluide seront sollictées suivant les mêmes verticales. Le segment restera dans sa position, sa base touchera la surface du fluide en un seul point, et son axe formera avec la surface du fluide un angle égal à celui que nous avons indiqué plus haut (6).

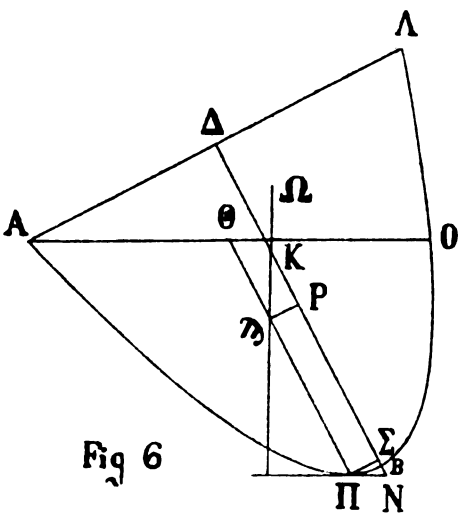


Fig 6

Que le rapport en poids du segment à son volume de fluide soit maintenant moindre que celui du carré de NΘ *au carré de* BΔ, *et que le rapport du carré d'une droite* Ψ *au carré de* BΔ *soit le même que le rapport en poids du segment à son volume de fluide. La droite* Ψ *est, dès lors, plus petite que la droite* ΘN. *Intercalons donc de nouveau entre les paraboles* AMΔ, AΠOΛ (7) *une droite* III, *menée parallèlement à* BΔ, *et égale à la droite* Ψ (8) ; *cette droite coupera*

1. Voir figures 4 et 6.
2. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XXIV.
3. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, proposition VIII.
4. Fin de la lacune et reprise de la traduction sur le texte grec.
5. Voir la démonstration dans une note précédente.
6. Commencement d'une lacune dans le texte grec et reprise de la traduction sur la version latine.
7. Voir figure 7.
8. La possibilité de mener cette droite a été démontrée dans une note précédente.

Digitized by Google

la parabole intermédiaire au point Υ, *et coupera la droite* ΞP (1) au point H. Dès lors, on démontrera que la droite ΠΥ est double de la droite ΥI, comme on a démontré que la droite ΟΓ est double de la droite ΓΞ (2). Menons encore la droite ΠΩ tangente à la parabole ΑΠΟΛ au point Π, la droite ΠΕ perpendiculaire sur la droite ΒΔ, et la droite de jonction ΙΑ que nous prolongeons jusqu'au point Χ ; la droite ΑΙ sera d'ailleurs égale à la droite ΙΧ, et la droite ΑΧ sera parallèle à la droite ΠΩ (3). On doit donc démontrer que si le segment est abandonné dans le fluide, dans une inclinaison telle que sa base ne touche pas le fluide, il s'établira dans une inclinaison telle que son axe forme avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle Φ (4), et que sa base ne touche la surface du fluide en aucun point.

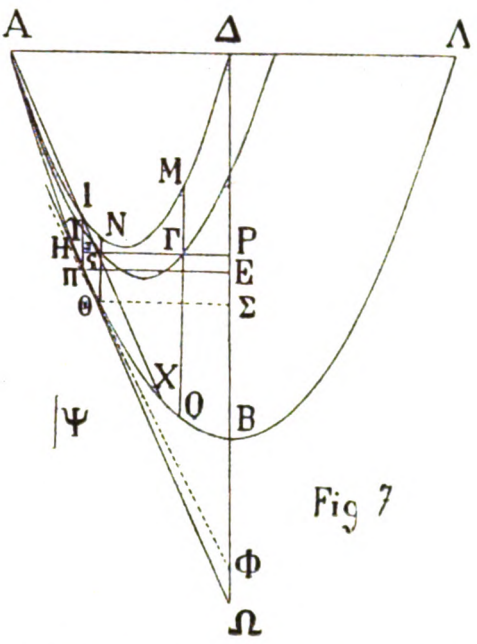


Fig 7

En effet, abandonnons le segment dans le fluide, et qu'il soit établi de manière que sa base touche la surface du fluide en un seul point (5). Soit la parabole ΑΗΒΛ la section du segment coupé par un plan mené par l'axe perpendiculairement à la surface du fluide (6), et la droite ΑΖ la section de la surface du fluide. Soit ΒΔ l'axe et le diamètre de la section, et coupons ΒΔ au point Κ, de la même manière (7) *que précédemment* (8). *Menons la droite* ΗΙ *parallèle*

1. Fin de la lacune et reprise de la traduction sur le texte grec.
2. Voir figure 1 et démonstration en note.
3. Voir notes précédentes.
4. Cet angle Φ est désigné par la lettre Ψ dans la 1re figure. Faisons remarquer ici combien le texte se soucie peu d'adopter les mêmes lettres pour désigner des constructions identiques au cours de la démonstration d'une même proposition.
5. Voir figure 8.
6. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XI.
7. Début d'une lacune dans le texte grec et traduction sur la version latine.
8. C'est-à-dire de manière que $BK = 2K\Delta$ et $\frac{B\Delta}{KP} = \frac{15}{4}$.

Digitized by Google

à la droite AZ *et tangente à la section conique au point* H ; *la droite* HΘ *parallèle à la droite* BΔ, *et la droite* HΣ *perpendiculaire sur la droite* BΔ. *Dès lors, puisque le rapport en poids du segment à son volume de fluide est le même que celui du carré de* Ψ *au carré de* BΔ, *et que le rapport du carré de* HΘ *au carré de* BΔ *est le même que le rapport en poids du segment à son volume de fluide, pour les mêmes motifs que précédemment*(1), *il est clair que la droite* HΘ *est égale à la droite* Ψ (2), *et que, par conséquent, les segments* AHZ, AΠX(3) *sont égaux* (4). *Et*

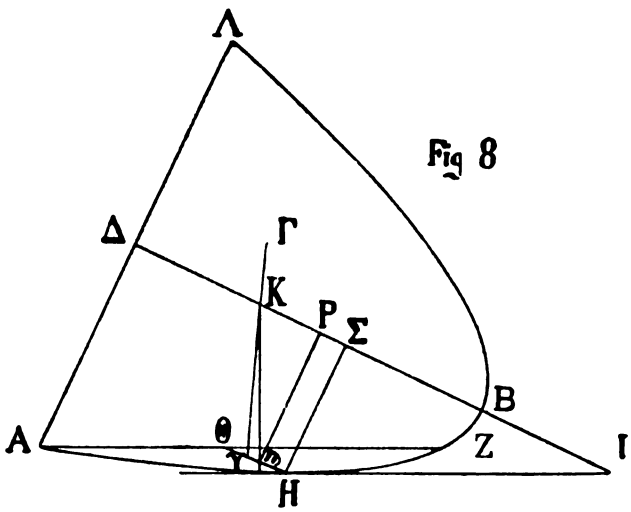


Fig 8

puisque les droites AX, AZ, *qui retranchent des segments égaux, ont été menées à partir des extrémités des bases dans les segments égaux et semblables* AΠOΛ, AHZΛ, *il est évident que ces droites font des angles égaux avec les diamètres des segments. Dès lors, les angles en* I *et en* Ω *des triangles* HIΣ, ΠΩE *sont égaux, et les droites* ΣB, EB *seront donc égales ; en sorte que les droites* ΣP, EP *seront égales, ainsi que les droites* H𐆖, ΠH *et les droites* 𐆖Θ, HI. *Et puisque la droite* ΠY *est double de la droite* YI, *il est clair que la droite* H𐆖 *est plus petite que le double de la droite* 𐆖Θ(5). *Que la droite* HY *soit donc double de la droite* YΘ, *et menons la droite de jonction* YKΓ *prolongée. Le centre de gravité du segment entier est donc le point* K, *celui de la partie immergée le point* Y, *et celui de la partie qui émerge est situé sur la droite* KΓ, *c'est-à-dire au point* Γ (6). *Or, d'après la proposition qui précède, il est manifeste que le segment ne restera pas en place, mais*

1. Voir note plus haut.
2. Voir note plus haut.
3. Voir figure 7.
4. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XXIV.
5. On a vu, dans une note précédente, que ΠY = 2YI, d'où : ΠH < 2HI. Or, ΠH = H𐆖, et HI = 𐆖Θ ; donc, comme le texte : H𐆖 < 2𐆖Θ.
6. Voir *De l'Equilibre des Plans*, proposition VIII.

Digitized by Google

qu'il s'inclinera de telle sorte que sa base ne touche la surface du fluide en aucun point.

Nous allons d'ailleurs démontrer que le segment s'établira de manière que son axe forme avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle Φ.

En effet, qu'il s'établisse, si possible, de telle sorte que l'angle formé ne soit pas plus petit que l'angle Φ, *et que les autres* (1) constructions soient les mêmes que dans la troisième figure (2). On démontrera pareillement que la droite ΘH est égale à la droite Ψ et, par conséquent, égale à la droite ΠΙ (3). Dès lors, puisque l'angle Λ n'est pas plus petit que l'angle Φ, la droite ΓB ne sera pas plus grande que la droite ΣB, ni la droite ΓP plus petite que la droite ΣP, ni la droite H⊘ plus petite que la droite Θϛ (4). Et puisque la droite ΠΙ vaut une fois et demie la droite ΠΥ (5), que la droite ΠΥ est plus petite que la droite Θϛ (6), que la droite HΘ est égale à la droite ΠΙ (7), et que la droite H⊘ n'est pas plus petite que la droite Θϛ, la droite ⊘H sera plus grande que la droite ΠΥ (8) ; il en résulte que la droite H⊘ est plus grande que le double de la droite ⊘Θ (9). Que la droite HΥ soit donc double de la droite ΥΘ, et menons la droite de jonction ΥΚ que nous prolongeons. Dès lors, il est évident, pour les mêmes raisons que précédemment, que le segment ne restera pas en position, mais qu'il

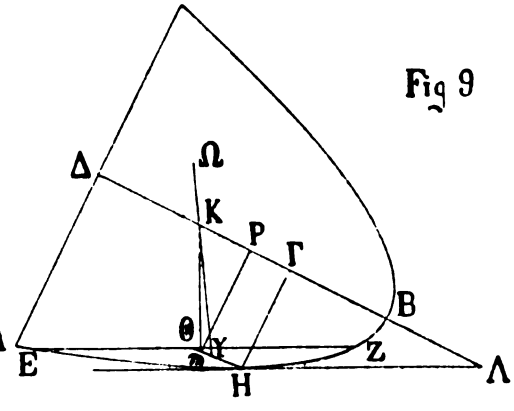


Fig 9

1. Fin de la lacune et reprise de la traduction sur le texte grec.
2. Voir fig. 3 concurremment avec la fig. 9.
3. Voir figure 7.
4. S'il est possible que l'angle Λ ⩾ l'angle Φ, on aura : ΛΓ ⩽ ΦB, ou ½ΛΓ ⩽ ½ΦB, ou ΓB ⩽ ΣB, d'où : BP — ΓB ⩾ BP — ΣB, ou ΓP ⩾ ΣP, ou H⊘ ⩾ Θϛ.
5. La relation démontrée ΠΥ = 2ΥΙ donne : ΠΙ = ΥΙ + ΠΥ = ½ΠΥ + ΠΥ = ⅔ΠΥ.
6. On a : ΠΙ < NΘ, d'où : ⅔ΠΙ < ⅔NΘ. Or, la relation de la note précédente donne : ⅔ΠΙ = ΠΥ, et l'on a : ⅔NΘ = Θϛ ; donc, comme le texte : ΠΥ < Θϛ.
7. On a : H⊘ = ΠΗ, et ⊘Θ = ΗΙ, d'où : H⊘ + ⊘Θ = ΠΗ + ΗΙ, ou, comme le texte : HΘ = ΠΙ.
8. Puisque H⊘ ⩾ Θϛ, et Θϛ > ΠΥ, on a : H⊘ > ΠΥ.
9. On a : HΘ = ΠΙ, ou H⊘ + ⊘Θ = ΠΥ + ΥΙ. Or, ⊘H > ΠΥ ; donc : ⊘Θ < ΥΙ. Or, H⊘ > ΠΥ ; donc : ½H⊘ > ½ΠΥ, ou : ½H⊘ > ΥΙ, d'où : ½H⊘ > ⊘Θ, d'où, comme le texte : H⊘ > 2⊘Θ.

Digitized by Google

s'inclinera de telle sorte que son axe forme avec la surface du fluide un angle plus petit que l'angle Φ (1).

On démontrerait de la même manière que, si le rapport en poids du segment à son volume de fluide est le même que celui du carré de NΘ *au carré de* BΔ, *le segment étant abandonné dans le fluide de manière que sa base ne touche pas la surface du fluide, il s'établira dans une inclinaison telle que sa base ne touche la surface du fluide qu'en un seul point, et que son axe forme avec la surface du fluide un angle égal à l'angle* Φ (2).

Que le rapport en poids du segment à son volume de fluide soit de nouveau plus grand que celui du carré de ZΠ au carré de BΔ, mais néanmoins plus petit que celui du carré de ΞO au carré de BΔ, et que le rapport du carré d'une droite Ψ au carré de BΔ soit le même que le rapport en poids du segment à son volume de fluide (3). Il s'ensuit évidemment que la droite Ψ est plus grande que la droite ZΠ, mais plus petite que la droite ΞO (4). Intercalons donc entre les paraboles AΞΔ, AΠOΛ une droite ΦI, égale à la droite Ψ et parallèle à BΔ, qui coupe la parabole intermédiaire au point Υ. On démontrera de nouveau que ΦΥ est double de ΥI, de même que OΓ était double de ΞΓ (5). Menons, par le point Φ, la droite ΦΩ tangente en Φ à la parabole AΠOΛ. On démontrerait, de la même manière que précédemment, que AI est égale à XI, et que AX est parallèle à ΦΩ (6). On doit démontrer que, si le segment, étant posé incliné, est abandonné dans le fluide de manière que sa base ne touche pas la surface du

1. Dernière lacune dans le texte grec, et traduction sur la version latine.

2. Fin de la dernière lacune et reprise de la traduction sur le texte grec du palimpseste de Jérusalem. Nous ferons remarquer ici que l'ancienne version latine, faite sur un texte grec perdu, et dont nous nous sommes servi pour combler les lacunes du texte grec, récemment remis au jour, se termine par l'indication précieuse suivante, qui fixe la date de sa rédaction par Guillaume de Moerbeke, dit de Brabant : « *Archimedis de insidentibus in humido liber secundus explecit. Completa fuit translatio ejus decima die decembris anno 1269.* (Cfr. HEIBERG, *loc. cit.*, vol. II, p. 413.)

3. Voir figure 10.

4. Le cas à démontrer répond donc aux conditions :

$$\frac{\overline{\Xi O}^2}{\overline{B\Delta}^2} > \frac{\text{poids du segment}}{\text{poids même vol. fluide}} > \frac{\overline{Z\Pi}^2}{\overline{B\Delta}^2}, \text{ et } \frac{\Psi^2}{\overline{B\Delta}^2} = \frac{\text{poids du segment}}{\text{poids même vol. de fluide}}, \text{ d'où :}$$

$$\frac{\overline{\Xi O}^2}{\overline{B\Delta}^2} > \frac{\Psi^2}{\overline{B\Delta}^2} > \frac{\overline{Z\Pi}^2}{\overline{B\Delta}^2}, \text{ d'où : } \Xi O > \Psi > Z\Pi.$$

5. Voir note plus haut.

6. Voir démonstration dans les notes précédentes.

Digitized by Google

fluide, il s'inclinera de telle sorte que sa base soit coupée par la surface du fluide sur un plus grand espace (1).

En effet,abandonnons le segment dans le fluide de la manière que nous venons de dire, et qu'il soit d'abord incliné de telle sorte que sa base ne touche la surface du fluide en aucun point. Soit ABΓ la section déterminée à la surface du segment par un plan passant par l'axe perpendiculairement à la surface du fluide (2), soit la droite EZ la section dans la surface du fluide. Soit BΔ l'axe du segment et le diamètre de la section, et coupons BΔ aux points K, P de la même manière que précédemment (3). De plus, menons la droite HΛ, parallèlement à la droite EZ, et tangente à la section ABΓ au point H ; la droite HΘ parallèle à la droite BΔ, et la droite HΣ perpendiculaire à la droite BΔ. Dès lors, puisque le rapport en poids du segment à son volume de fluide est le même que celui du carré de Ψ au carré de BΔ, il est évident que la droite Ψ est égale à la droite HΘ ; car cela serait démontré de la même manière que précédemment (4) ; en sorte que la droite HΘ est égale à la droite ΦI, et les segments AΦX, EBZ sont donc

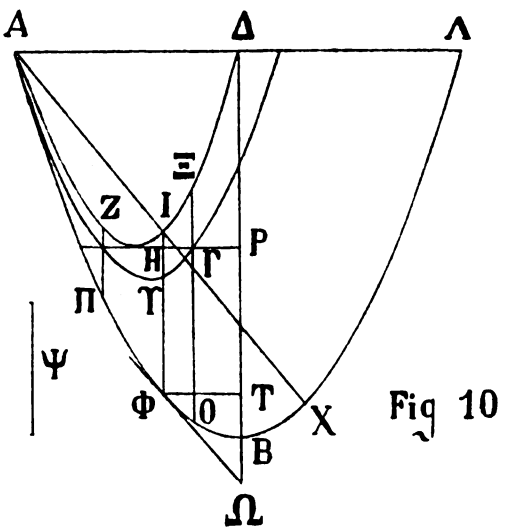


Fig 10

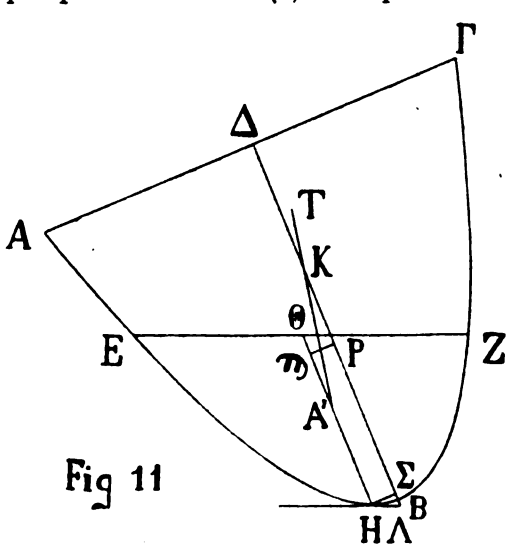


Fig 11

1. C'est-à-dire sur un plus grand espace en comparaison avec le cas précédent où la base ne touche le fluide qu'en un seul point.
2. C'est-à-dire la parabole ABΓ, figure 11.
3. C'est-à-dire de manière que $BK = 2K\Delta$, et $\frac{B\Delta}{KP} = \frac{15}{4}$.
4. Voir deux notes précédentes.

Digitized by Google

égaux entre eux (1). D'autre part, puisque les droites AX, EZ, qui retranchent des segments égaux dans les segments égaux et semblables AΠOΛ, ABΓ, ont été menées, l'une de l'extrémité de la base, l'autre non de l'extrémité, celle qui a été menée de l'extrémité de la base fait le plus petit angle aigu avec le diamètre du segment. Et puisque l'angle Λ du triangle HΛΣ est plus grand que l'angle Ω du triangle ΦTΩ, il est évident que la droite BΣ est plus petite que la droite BT, ΣP plus grande que PT, H$\not\Theta$ plus grande que ΦH, et, par conséquent, $\not\Theta\Theta$ plus petite que HI. De plus, puisque ΦΥ est le double de ΥI, il est évident que H$\not\Theta$ est plus grande que le double de $\not\Theta\Theta$ (2). Que la droite HA′ soit donc double de la droite A′Θ. Il résulte évidemment de tout ceci que le segment ne restera pas en place, mais qu'il s'inclinera davantage jusqu'à ce que sa base touche la surface du fluide en un seul point.

Que le segment touche d'ailleurs la surface du fluide en un seul point comme le montre la troisième figure (3), et que les autres constructions soient maintenues. On démontrera de nouveau que la droite ΘH est égale à la droite ΦI, et que les segments AΦX, ABZ sont égaux entre eux. Et puisque les droites AX, AZ, menées dans les segments égaux et semblables AΠOΛ, ABΓ, en retranchant des segments égaux, font des angles égaux avec les diamètres des segments, il s'ensuit que les angles des triangles ΛHΣ, ΦTΩ, situés en Λ et Ω, sont égaux, que la droite BΣ est égale à la droite BT, la droite ΣP égale à la droite PT, la droite H$\not\Theta$ égale à la droite ΦH, et la droite $\not\Theta\Theta$ égale à la droite HI. Or, puisque la droite ΦΥ est double de la droite ΥI, il est clair que la droite H$\not\Theta$ est plus

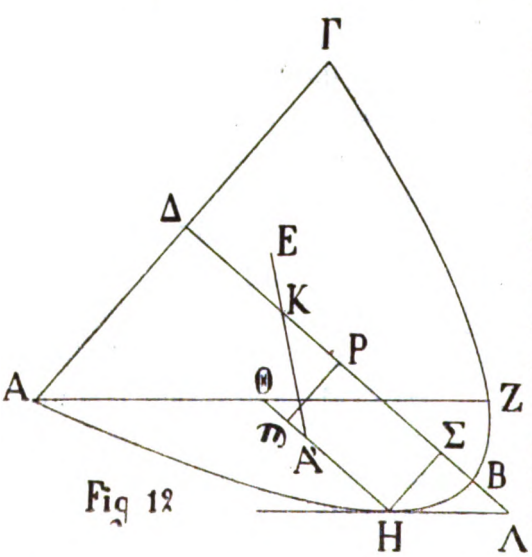


Fig 12

1. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XXIV.
2. Ces relations ont été démontrées dans les notes précédentes.
3. C'est-à-dire la troisième figure se rapportant au cas examiné et que nous désignons ici par la figure 12.

Digitized by Google

grande que le double de la droite $\Omega\Theta$ (1). Que la droite HA′ soit donc double de la droite A′Θ. Il est de nouveau évident, d'après ceci, que le segment ne restera pas en place, mais qu'il s'inclinera davantage du côté où est situé le point A. Dès lors, comme on a supposé que le segment touche la surface du fluide en un seul point, il est évident que la base sera submergée par le fluide sur un plus grand espace.

1. Les relations $H\Omega = \Phi H$, $\Omega\Theta = HI$ et $\Phi Y = 2YI$ donnent : $H\Omega = \Phi Y + HY = 2YI + HY$, et $\Omega\Theta = YI - HY$, ou $2\Omega\Theta = 2YI - 2HY$, d'où : $H\Omega > 2\Omega\Theta$.

Digitized by Google

Digitized by Google

LE STOMACHION

Digitized by Google

Digitized by Google

LE STOMACHION [1]

I. — Ce que nous appelons le Stomachion, donnant lieu à une étude variée de la transposition des figures dont il se compose, j'ai cru nécessaire de traiter d'abord des . . . . [2] dans lesquelles il est partagé ainsi que de celles auxquelles elles peuvent respectivement être comparées. Je dirai ensuite quels sont les angles qui, pris deux à deux, ... [3], afin de concevoir les arrangements de figures qui peuvent être obtenus, soit que les côtés présentés par ces figures aient une même direction, soit qu'ils s'écartent un peu de cette direction d'une manière qui échappe à la vue ; car il y a là une question d'adresse, et, si ces côtés dévient légèrement en trompant la vue, ce n'est cependant pas un motif pour rejeter d'emblée les figures qui sont composées.

II. — D'après cela, il peut donc se faire qu'il n'y ait pas qu'un petit nombre de figures . . . . [4], parce que . . . . [5] de transposer dans un autre endroit une partie de figure équivalente et équiangle, et de lui en substituer une autre [6]. D'ailleurs, deux figures prises ensemble étant parfois équivalentes à une seule figure, et semblables à une figure, ou bien, deux figures prises ensemble étant

1. L'ouvrage intitulé : *Le Stomachion,* semble se rapporter à une espèce de jeu de taquin ou de patience. Le texte grec, qui vient d'en être révélé par le palimpseste de Jérusalem, ne se compose malheureusement que de quelques fragments parsemés de lacunes.

2. La version latine d'Heiberg remplit cette première lacune par les mots : « de singulis partibus ejus, » c'est-à-dire : de ses diverses parties. (Cf. HEIBERG, *loc. cit.*, vol. II, p. 417.)

3. Le débris de mot qui termine cette lacune a permis, à Heiberg, de proposer la reconstitution suivante : « forment deux (angles) droits ». (Cf. *loc. cit.*, p. 417.)

4. Lacune pouvant être remplie par les mots : « qui composent le Stomachion ».

5. Lacune pouvant être remplie par l'expression : « il est possible, ou il est loisible de ».

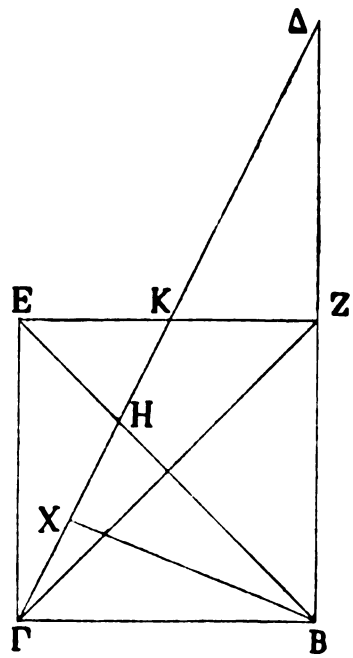
6. Le sens de cette phrase, parsemée de petites lacunes, nous échappe.

Digitized by Google

équivalentes et semblables à deux autres figures prises ensemble, plusieurs figures seront composées par transposition.

Nous exposerons d'abord quelques propositions qui se rapportent à ce sujet.

III. — Soit donc un parallélogramme rectangulaire ΖΓ (1), ... (2) la droite EZ au point K, menons les droites ΓK, BE des points Γ, B ; . . . . . (3), et prolongeons les droites ΓK, BZ qui se rencontrent . . . (4). Puisque la droite EK est égale à la droite KZ, la droite ΓE, c'est-à-dire la droite BZ est égale à la droite ZΔ ; en sorte que la droite ΓZ est plus grande que la droite ZΔ, et, par conséquent, l'angle compris sous les droites ZΔ, ΔΓ est plus grand que l'angle compris sous les droites ΖΓ, ΓΔ (5). Or, les angles compris sous HB, BΔ et sous ΖΓ, ΓB sont égaux, car ils valent respectivement la moitié d'un angle droit ; par conséquent, l'angle sous ΓH, HB est plus grand que l'angle sous HΓ, ΓB, puisque l'angle sous ΓH, HB vaut les deux angles internes et opposés sous HB, BΔ et sous HΔ, ΔB (6), et la droite ΓB est donc plus grande que la droite BH (7). Dès lors, si la droite ΓH est divisée en deux parties égales au point X, l'angle sous ΓX, XB sera obtus. En effet, puisque ΓX est égal à XH, que XB est commun, on a deux côtés égaux à deux côtés et une base ΓB plus grande qu'une base BH, et, par conséquent,



1. Les relations qui vont être invoquées aussitôt indiquent qu'il s'agit d'un carré. Le manuscrit comporte une figure erronée et incomplète; nous reproduisons celle qui a été reconstituée par Heiberg.

2. Lacune dont le texte pourrait être rétabli comme suit : « divisons la droite EZ en deux parties égales au point K ».

3. Petite lacune probablement relative au tracé de la droite ΓZ.

4. Lacune à reconstituer probablement par les mots : « au point Δ. »

5. EUCLIDE, livre I, proposition 18 : « Dans tout triangle, un plus grand côté est opposé à un plus grand angle. »

6. Angle ΖΔΓ > angle ΖΓΔ. Or, angle HBΔ = angle ΖΓB ; donc : ΖΔΓ + HBΔ > ΖΓΔ + ΖΓB. Mais ΖΔΓ + HBΔ = ΓHB, et ΖΓΔ + ΖΓB = HΓB, d'où, comme le texte : angle ΓHB > angle HΓB.

7. EUCLIDE, livre I, proposition 19 : « Dans tout triangle, un plus grand angle est opposé à un plus grand côté. »

Digitized by Google

un angle plus grand que l'autre angle. Il en résulte donc que l'angle sous ΓX, XB est obtus, tandis que l'angle adjacent est aigu (1). Or, l'angle sous ΓB, BH vaut la moitié d'un angle droit, car cela a été supposé pour ce parallélogramme (2), tandis que l'angle sous BX, XH, est aigu. Et . . . . . .
. . . . . (3).

IV. — . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . (4).

V. — Coupons la droite ΓA en deux parties égales au point E, et, du point E, menons la droite EZ parallèle à la droite BΓ. Dès lors, ΓZ, ZA sont des carrés. Menons les diamètres ΓΔ, BE, EΔ, divisons les droites ΓH, EΔ en deux parties égales aux points Θ, X, et menons les droites de jonction BΘ, XZ. Par les points . . . ., K menons les droites . . . . K, ... Ξ parallèles à la droite BΔ ; il résulte donc d'une proposition précédente (5) que l'angle qui, dans le triangle BΓΘ, est situé au point Θ est obtus, tandis que l'angle restant est aigu . . . . . D'autre part, il est clair que . .
. . . . . (6).

Le livre d'Archimède sur la division de la figure Stomachion en quatorze figures qui sont en rapport avec elle (7).

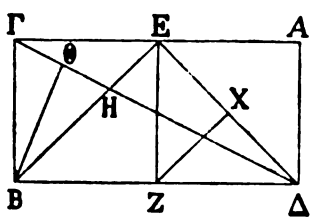
1. Car les triangles ΓXB, HXB répondent à la proposition 25 du livre d'Euclide, énoncée comme suit : « Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et si la base de l'un est plus grande que la base de l'autre, ils auront aussi les angles compris entre les côtés égaux plus grands l'un que l'autre. »

2. C'est-à-dire que le parallélogramme a été supposé être un carré.

3. Ce paragraphe III se termine par une phrase de quatorze mots trop altérée pour pouvoir en rétablir le sens.

4. Tout le paragraphe IV n'est qu'une lacune semée de vingt-quatre mots ou parties de mots dont le sens ne peut plus être rétabli. Ce paragraphe devait viser une figure nouvelle; car les débris de son texte mentionnent une droite AB ainsi qu'une droite ΓA qui sont absentes dans la figure précédente.

5. Voir paragraphe III.

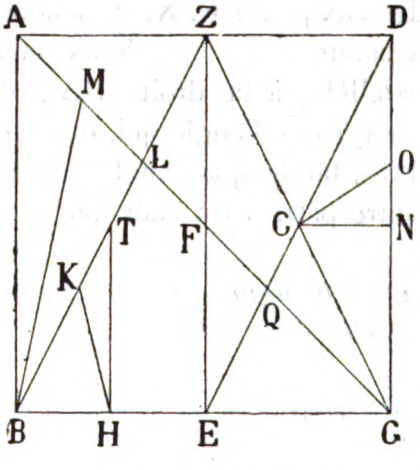


6. Le texte grec de la fin de l'ouvrage est perdu. Ce paragraphe renvoie du reste à une figure absente au manuscrit et dont Heiberg a proposé la reconstitution que nous donnons ci-contre. (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 421).

7. Dernière proposition du *Stomachion*, dont on ne possède plus qu'une version arabe, publiée en 1899, sur l'un des trois manuscrits existants, par Henri Suter. Nous en donnons la traduction d'après l'interprétation allemande de cet orientaliste. (Cfr. *Abhandlungen z. Geschichte der Mathematik*, IX, 1899, p. 491.)

Digitized by Google

Décrivons un parallélogramme tel que ABGD ; *divisons* BG *en deux parties égales en* E ; *élevons la perpendiculaire* EZ *sur* BG, *et menons les diagonales* AG, BZ, ZG. *Divisons aussi* BE *en deux parties égales en* H, *et élevons la perpendiculaire* HT *sur* BE. *Plaçons maintenant une règle au point* H, *visons au point* A, *et menons* HK. *Divisons* AL *en deux parties égales en* M, *et menons* BM. *Le rectangle* AE *est ainsi partagé en sept parties. Divisons maintenant* GD *en deux parties égales en* N *ainsi que* ZG *en* C. *Menons* EC, *plaçons la règle aux points* B *et* C, *et menons* CO *ainsi que* CN. *Dès lors, le rectangle* ZG *est aussi partagé en sept parties, mais d'une manière différente de celle du premier rectangle ; en sorte que le carré entier est divisé en quatorze parties.*



Nous allons démontrer maintenant que chacune de ces quatorze parties est dans un rapport commensurable avec le carré entier. Puisque ZG *est la diagonale du rectangle* ZG, *le triangle* DZG *est la moitié de ce rectangle, et, par conséquent, le quart du carré. Or, le triangle* GNC *est le quart du triangle* DZG, *puisque, si nous prolongeons la droite* EC, *elle rencontre le point* D, *et qu'ainsi le triangle* GDC *est la moitié du triangle* DZG, *et équivaut à la somme des deux triangles* GNC, DNC. *Il en résulte que le triangle* GNC *équivaut au seizième du carré* (1). *Si nous admettons maintenant que la ligne* OC *soit dirigée vers le point* B, *comme elle a été tracée en réalité, la ligne* NC *est parallèle au côté* BG *du carré ou du triangle* OBG ; *en sorte que l'on a la proportion* BG *est à* NC *comme* GO *est à* NO. *Or,* BG *est le quadruple de* NC, *et* GO *est donc aussi le quadruple de* NO ; *par conséquent,* GN *est le triple de* NO, *et le triangle* GNC *est le triple du triangle* ONC (2). *Or, puisque, ainsi que nous l'avons montré,*

1. Puisque C est le milieu de ZG, les triangles ZDC, CDG ayant même hauteur et bases égales sont équivalents, d'où : $GDC = \frac{1}{2}DZG$. Or, $GDC = GNC + DNC = 2GNC$; donc : $2GNC = \frac{1}{2}DZG$, d'où, comme le texte : $GNC = \frac{1}{4}DZG = \frac{1}{16}ABGD$.

2. On a : $\frac{BG}{NC} = \frac{GO}{NO}$. Or, $EG = 2NC$; donc : $BG = 4NC$, d'où : $GO = 4NO$, d'où : $GO - NO = 3NO$, ou : $GN = 3NO$, d'où : triangle GNC = 3 triangles ONC.

Digitized by Google

le triangle GNC *équivaut au seizième du carré, le triangle* ONC *équivaut au quarante-huitième du carré* (1). *D'autre part, puisque le triangle* GDZ *équivaut au quart du carré, que, dès lors, le triangle* GNC *en est le seizième, et que le triangle* NCO *en est le quarante-huitième, il reste comme excédent le tétragone* DOCZ *équivalent au sixième de l'aire du carré* (2). *D'après l'hypothèse, la ligne* NC *prolongée passerait par le point* F, *et* CF *serait parallèle à* GE (3) ; *en sorte que l'on a la proportion* EG *est à* CF *comme* EQ *est à* CQ, *comme* GQ *est à* FQ. *Or, puisque* EQ *est le double de* CQ, *et que* GQ *est le double de* FQ, *le triangle* EQG *est le double de chacun des deux triangles* GCQ *et* EFQ (4). *D'ailleurs, il est clair que le triangle* EGZ *équivaut au double du triangle* EFG, *parce que* ZE *est le double de* FE. *Or, le triangle* EGZ *est le quart du carré, tandis que le triangle* EFG *en est le huitième. D'autre part, ce dernier triangle est le triple de chacun des deux triangles* EFQ, GCQ ; *en sorte que chacun de ces deux triangles équivaut au vingt-quatrième du carré* AG. *De plus, le triangle* EGQ *est le double de chacun des deux triangles* EFQ, GCQ ; *de manière qu'il équivaut au douzième du carré* (5). *En outre, puisque* ZF *est égal à* EF, *le triangle* ZFG *équivaut au triangle* EFG. *Si nous retranchons maintenant le triangle* GCQ *qui équivaut au triangle* EFQ, *il reste un tétragone* FQCZ *équivalent au triangle* EGQ ; *en sorte que le tétragone* FQCZ *équivaut aussi au douzième du carré* AG (6). *Dès lors, nous avons partagé le rectangle* ZG *en sept parties, et nous passons au partage de l'autre rectangle.*

---

1. On a vu que triangle $GNC = \frac{1}{16}$ ABGD. Or, GNC = 3ONC; donc : triangle $ONC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{16}$ ABGD $= \frac{1}{48}$ ABGD.

2. On a : $DOCZ = GDZ - GNC - NCO = [\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{48}]$ABGD $= \frac{1}{6}$ ABGD.

3. Par hypothèse, la droite ZE est égale et parallèle à la droite DG, et les points N, C, F sont respectivement les milieux de DG, ZG, ZE; donc, NC passe par F, et NF serait parallèle à GE.

4. Par similitude des triangles EQG, FQC on a : $\frac{EG}{CF} = \frac{EQ}{CQ} = \frac{GQ}{FQ}$. Or, EG = 2CF, donc : EQ = 2CQ, et GQ = 2FQ, d'où, considérant les triangles de même hauteur et de base double, on a : EQG = 2GCQ = 2EFQ.

5. On a : ZE = 2FE, d'où : EGZ = 2EFG. Or, EGZ = $\frac{1}{4}$ABGD ; donc : EFG = $\frac{1}{8}$ ABGD. Or, on a vu que EQG = 2GCQ = 2EFQ ; donc : EQG + EFQ = 3EFQ, ou EFG = 3EFQ = 3GCQ, d'où : 3EFG = 3GCQ = $\frac{1}{8}$ABGD, d'où : EFQ = GCQ = $\frac{1}{24}$ABGD, d'où, substituant dans la relation de la note précédente, il vient, comme le texte : EQG = $\frac{2}{24}$ ABGD = $\frac{1}{12}$ ABGD.

6. On a : ZF = EF, d'où : ZFG = EFG. Or, GCQ = EFQ, d'où : ZFG — GCQ = EFG — EFQ, ou FQCZ = EGQ, d'où, considérant la relation de la note précédente : FQCZ = $\frac{1}{12}$ ABGD.

Digitized by Google

Puisque BZ *et* EC *sont deux diagonales parallèles* (1), *et que* ZF *est égal à* EF, *le triangle* ZLF *équivaut au triangle* EFQ ; *par conséquent, le triangle* ZLF *équivaut au vingt-quatrième du carré* AG(2). *Puisque* BH *est égal à* HE, *le triangle* BEZ *est le quadruple du triangle* BHT ; *car chacun d'eux est rectangle. Or, puisque le triangle* BEZ *équivaut au quart du carré* ABGD, *le triangle* BHT *sera équivalent au seizième de ce dernier* (3). *D'après ce que nous avons supposé, la ligne* HK *prolongée passe par le point* A ; *en sorte qu'on a la proportion* AB *est à* HT *comme* BK *est à* KT. *Or,* AB *est égal au double de* HT ; *par conséquent,* BK *est aussi égal au double de* KT ; *en sorte que le triangle* BHT *est le triple du triangle* KHT. *D'autre part, puisque le triangle* BHT *équivaut au seizième du carré, il en résulte que le triangle* KHT *équivaut au quarante-huitième du carré* (4). *De plus, le triangle* BKH *équivaut au double du triangle* KHT, *ainsi qu'au vingt-quatrième du carré* (5). *Et, puisque* BL *est égal au double de* ZL, *et que* AL *est égal au double de* LF, *il en résulte que le triangle* ABL *est le double du triangle* ALZ, *et que le triangle* ALZ *est le double du triangle* ZLF. *Or, puisque le triangle* ZLF *équivaut au vingt-quatrième du carré entier, il en résulte que le triangle* ALZ *équivaut au douzième de ce carré, et que le triangle* ABL *en vaut le sixième* (6). *D'autre part, le triangle* ABM *équivaut au triangle* BML ; *en sorte que chacun de ces deux triangles équivaut au douzième du carré* (7). *Il reste encore le pentagone* LFEHT, *qui équi-*

---

1. EUCLIDE, livre III, proposition 2.

2. On a : ZF = EF, et ZL est parallèle à EQ, d'où : ZLF = EFQ. Or, EFQ = $\frac{1}{24}$ ABGD ; donc : ZLF = $\frac{1}{24}$ ABGD.

3. On a : BH = HE, et les triangles BEZ, BHT sont semblables, d'où : $\frac{BEZ}{BHT} = \frac{\overline{BE}^2}{\overline{BH}^2} = \frac{4\overline{BH}^2}{\overline{BH}^2} = 4$, d'où : BEZ = 4BHT. Or, BEZ = $\frac{1}{4}$ ABGD ; donc : triangle BHT = $\frac{1}{16}$ ABGD.

4. On a, par similitude des triangles : AKB, TKH, $\frac{AB}{HT} = \frac{BK}{KT}$. Or, AB = 2HT, donc : BK = 2KT, d'où : BK + KT = BT = 3KT, d'où, considérant le triangle de même hauteur et de base triple, on a : BHT = 3KHT. Mais, BHT = $\frac{1}{16}$ ABGD, d'où : triangle KHT = $\frac{1}{48}$ ABGD.

5. On a : BK = 2KT, d'où : triangle BKH = 2 triangles KHT = $\frac{2}{48}$ ABGD = $\frac{1}{24}$ ABGD.

6. Par similitude des triangles ALB, ZLF, on a : $\frac{AB}{ZF} = \frac{BL}{ZL} = \frac{AL}{LF}$. Or, AB = 2ZF ; donc : BL = 2ZL, et AL = 2LF. D'où, considérant le triangle de même hauteur et de base double, on a : ABL = 2ALZ, et ALZ = 2ZLF. Or, on a vu, dans une note précédente, que ZLF = $\frac{1}{24}$ ABGD ; donc : ALZ = $\frac{1}{12}$ ABGD et ABL = $\frac{1}{6}$ ABGD.

7. Par hypothèse : AM = ML, d'où : triangle ABM = triangle MBL, d'où : triangle ABM = $\frac{1}{2}$ triangle ABL = $\frac{1}{12}$ ABGD ; et, de même : triangle MBL = $\frac{1}{12}$ ABGD.

Digitized by Google

vaut à la moitié du sixième augmenté de la moitié du huitième du carré entier (1).

De cette manière, nous avons aussi partagé le rectangle en sept parties; par conséquent, la figure entière ABGD *est partagée en quatorze parties commensurables avec elle; et c'est ce que nous voulions.*

---

1. On a : LFEHT = ABGD — [ZEGD + ZLF + ALZ + ABM + MBL + BKH + KHT], d'où, par substitution des valeurs trouvées précédemment : LFEHT = ABGD — $[\frac{1}{2}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}]$ABGD = $[1-\frac{41}{48}]$ABGD = $\frac{7}{48}$ ABGD. Or, $\frac{7}{48}=\frac{6}{48}+\frac{3}{48}=\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}(\frac{1}{6})+\frac{1}{2}(\frac{1}{8})$; donc, comme le texte : LFEHT = $[\frac{1}{2}(\frac{1}{6})+\frac{1}{2}(\frac{1}{8})]$ABGD.

Digitized by Google

Digitized by Google

LA MÉTHODE RELATIVE AUX THÉORÈMES MÉCANIQUES

Digitized by Google

Digitized by Google

LA MÉTHODE RELATIVE AUX THÉORÈMES MÉCANIQUES.

Archimède à Eratosthène (1), *prospérité !*

Je t'ai transmis antérieurement, par écrit, les énoncés de théorèmes que j'ai découverts, en te chargeant de trouver les démonstrations que je n'en avais pas encore données. Les énoncés des théorèmes déjà envoyés étaient les suivants :

En premier lieu, si, dans un prisme droit, ayant comme base un parallélogramme, l'on inscrit un cylindre ayant ses bases inscrites dans les parallélogrammes (2) opposés et ses côtés dans les plans restants du prisme (3), et si l'on mène un plan par le centre du cercle de base

1. Eratosthène de Cyrène (276-194 av. J.-C.), fils d'Aglaüs, fut appelé à la bibliothèque d'Alexandrie par Ptolémée III Evergète. Il s'occupa d'histoire, de géographie, de géométrie, d'astronomie, de philosophie, de grammaire et de poésie. Il composa le premier système géographique basé sur la forme sphérique de la terre. Ayant mesuré la distance de Syène à Alexandrie à l'aide d'un gnomon, il évalua la longueur de la circonférence terrestre à 252.000 stades. Son ouvrage en trois livres sur la géographie est perdu, et nous n'en connaissons que des extraits dans les *Œuvres* de Strabon. Comme astronome, il nous a laissé, sous le titre de *Catastérismes,* un catalogue d'étoiles, dont l'unique manuscrit d'Oxford fut publié pour la première fois, en cette ville, par Jean Fell, en 1672, et qui fut traduit en français par l'abbé Halma (Paris, 1823, in-4°). Eratosthène avait écrit un ouvrage sur la Duplication du cube, que nous ne connaissons que par l'esquisse qu'Eutocius en a donnée dans son commentaire sur le traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède. Tous les fragments des œuvres d'Eratosthène ont été publiés sous le titre de *Eratosthenica,* par J. BERNHARDY. (Berlin, 1822, in-8°.)

2. Le mot παραλληλόγραμμον, parallélogramme, est employé ici deux fois dans l'acception restreinte de carré, comme l'indique du reste le mot τετράγωνον, carré, employé dans la phrase suivante.

3. C'est-à-dire ayant sa surface latérale tangente aux plans du prisme autres que les bases, ou bien, ayant quatre de ses génératrices dans les plans du prisme.

Digitized by Google

du cylindre et par un côté du carré situé dans le plan opposé, le plan ainsi mené séparera du cylindre un segment délimité par deux plans et par la surface du cylindre, l'un des plans étant celui qui a été mené, l'autre celui dans lequel se trouve la base du cylindre, la surface étant celle qui est située entre les dits plans, et le segment séparé du cylindre sera la sixième partie du prisme entier.

L'énoncé de l'autre théorème était le suivant : Si, dans un cube, on inscrit un cylindre ayant ses bases dans des carrés opposés et sa surface tangente aux quatre plans restants, et si, dans ce même cube, on inscrit encore un autre cylindre ayant ses bases dans d'autres carrés et sa surface tangente aux quatre plans restants, la figure qui, enveloppée par les surfaces des cylindres, est située dans l'un et l'autre cylindre, vaut les deux tiers du cube entier ([1]).

Au reste, il se fait que ces théorèmes diffèrent de ceux qui ont été trouvés précédemment ; car dans ceux-là, nous avons comparé, en volume, des figures de conoïdes, de sphéroïdes ([2]), et leurs segments avec des figures de cônes et de cylindres ; mais aucune d'elles n'a été trouvée équivalente à une figure solide délimitée par des plans, tandis que chacune de ces figures-ci, délimitée par deux plans et par des surfaces cylindriques, a été trouvée équivalente à une figure solide délimitée par des plans.

Ce sont donc les démonstrations de ces théorèmes que je te transmets par écrit dans le présent livre.

D'ailleurs, te considérant, ainsi que je l'ai déjà dit, comme habile, excellemment à la hauteur de la philosophie, et comme ne reculant pas devant les questions mathématiques qui se présentent, j'ai songé à t'exposer par écrit, et à illustrer, dans ce même livre, la nature particulière d'une méthode qui te permettra éventuellement de venir à bout de certaines propositions mathématiques par la mécanique. Or, je suis persuadé que cette méthode n'est pas moins utile pour la démonstration même des propositions ; car certaines d'entre elles, d'abord évidentes pour moi par la mécanique, ont été démontrées après coup par la géométrie, parce que l'investigation par cette méthode est exclusive d'une démonstration. La recherche de la démonstration, précédée d'une certaine connaissance des questions par cette méthode,

1. C'est-à-dire le volume commun aux deux cylindres qui s'intersectionnent à angle droit dans le cube.
2. C'est-à-dire les paraboloïdes, hyperboloïdes et ellipsoïdes de révolution.

Digitized by Google

est, en effet, plus aisée que sa recherche sans cette connaissance. Et c'est ainsi que, pour ce qui concerne les propositions relatives au cône et à la pyramide, dont Eudoxe (1) a le premier trouvé la démonstration, notamment que le cône est la troisième partie du cylindre, et la pyramide la troisième partie du prisme ayant même base et même hauteur, l'on doit attribuer une part non négligeable à Démocrite (2) qui, le premier, a affirmé les choses, sans démonstration, pour les figures que nous venons de dire. Comme il se fait que la découverte des propositions, que nous allons exposer maintenant, m'est venue de la même manière que pour les précédentes, j'ai voulu divulguer cette méthode par écrit, aussi bien pour ne paraître à personne avoir lancé des paroles vaines, d'autant plus que j'en ai déjà parlé antérieurement (3), que parce que je suis convaincu qu'elle ne doit pas apporter un mince avantage à l'objet de nos études. En effet, je suis persuadé qu'à la faveur de cette méthode, une fois qu'elle aura été exposée, d'autres propositions, qui ne se sont pas encore présentées à moi-même, seront trouvées par d'autres, tant parmi ceux qui vivent que parmi ceux qui doivent encore naître.

En conséquence, je mettrai d'abord par écrit ce qui m'a aussi été révélé en premier lieu par la mécanique ; notamment que tout segment

1. Eudoxe de Cnide (environ 300 ans av. J.-C.), fils d'Eschine, et disciple d'Archytas et de Platon, géomètre, astronome et médecin. Initié à la science sacerdotale en Egypte, il enseigna, le premier en Grèce, la doctrine du mouvement des planètes, construisit le cadran solaire dont Vitruve nous a laissé la description (VITRUVE, édition de la traduction précitée, livre IX, chap. IX, tome II, p. 201), et corrigea le cycle de Méton. Ses ouvrages, dans lesquels il établissait probablement les théorèmes qu'Archimède lui attribue, ne nous sont point parvenus. Ils existaient encore à l'époque où Aratus (270 ans av. J.-C.) mit en vers les deux ouvrages d'Eudoxe intitulés *Le Miroir* et *Les Phénomènes*, dont il fit un seul poème intitulé : *Des Phénomènes et des Signes*. Edité pour la première fois chez les Alde, à Venise, en 1499, l'ouvrage d'Aratus a été traduit en français par l'abbé Halma, avec les scholies de Théon, les *Catastérismes* d'Eratosthène et la *Sphère* de Léontius. (Paris, 1823, in-4°.)

2. Démocrite d'Abdère (469-361 ans av. J.-C.), philosophe qui fonda, avec Leucippe, l'école des atomistes, dont le système admettait comme principe de toutes choses le vide et les atomes. Il passe pour avoir inventé la construction de la voûte. D'après Vitruve, il aurait écrit sur la perspective; d'après Varron et Columelle, il aurait écrit sur l'agriculture; enfin, d'après Plutarque, il aurait écrit sur les sections parallèles à la base du cône. Stobée nous a conservé quelques extraits de ses *Contes moraux* et de ses *Diatribes*. Il ne nous est parvenu sous son nom qu'un ouvrage, peut-être apocryphe, intitulé : *Choses physiques et mystiques*, qui n'a été publié que dans une version latine, à Padoue, en 1573, sous le titre : *Democritus Abderida de Arte magna*. C'est le plus ancien ouvrage sur la pierre philosophale, et il fut fort en honneur chez les Alchimistes.

3. Dans le préambule du livre *De la Quadrature de la Parabole*.

Digitized by Google

de parabole vaut une fois et un tiers le triangle ayant même base et hauteur égale, puis diverses propositions qui ont été examinées par cette méthode. D'autre part, à la fin du livre, j'écrirai les démonstrations géométriques des théorèmes dont je t'ai déjà transmis les énoncés.

LEMMES (1).

I. — Si l'on retranche une grandeur d'une grandeur, et si un même point est le centre de gravité de la grandeur entière et de celle qui en est retranchée, ce point est le centre de gravité de la grandeur restante.

II. — Si l'on retranche une grandeur d'une grandeur, et si le même point n'est pas le centre de gravité de la grandeur entière et de celle qui en a été retranchée, le centre de gravité de la grandeur restante est situé sur la droite reliant les centres de gravité des grandeurs entière et retranchée, au point où cette droite prolongée est coupée à une distance dont le rapport à la droite, placée entre les dits centres de gravité, est le même que celui du poids de la grandeur retranchée au poids de la grandeur restante (2).

III. — Si les centres de gravité d'un nombre de grandeurs aussi élevé qu'on voudra sont situés sur une même droite, le centre de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera situé aussi sur cette même droite (3).

IV. — Le centre de gravité de toute droite est le point qui divise cette droite en deux parties égales (4).

V. — Le centre de gravité de tout triangle est le point où se coupent les droites menées des angles du triangle au milieu des côtés (5).

VI. — Le centre de gravité de tout parallélogramme est le point où les diagonales se rencontrent (6).

VII. — Le centre de gravité du cercle est le centre même du cercle.

1. La plupart des propositions, qui précèdent ici sous le nom de « Lemmes », ont été démontrées par Archimède dans son traité *De l'Equilibre des Plans*. Elles sont simplement rappelées comme étant utiles aux démonstrations des propositions du traité *De la Méthode mécanique*.
2. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, prop. VIII.
3. *Ibidem*, prop. V, corollaire.
4. *Ibidem*, prop. IV restreinte au cas particulier d'une droite.
5. *Ibidem*, prop. XIV.
6. *Ibidem*, prop. X.

Digitized by Google

VIII. — Le centre de gravité de tout cylindre est le point qui divise son axe en deux parties égales.

IX. — Le centre de gravité de tout prisme est le point qui divise son axe (1) en deux parties égales.

X. — Le centre de gravité de tout cône est situé sur l'axe, divisé de telle sorte que le segment se trouvant du côté du sommet soit triple du segment restant (2).

XI. — Nous ferons d'ailleurs également usage de la proposition suivante, qui a déjà été exposée dans le livre *Des Conoïdes* (3) :

Si le rapport de grandeurs aussi nombreuses qu'on voudra, prises deux à deux, est le même que celui d'autres grandeurs aussi nombreuses de même rang, et si les premières grandeurs, ou certaines d'entre elles, ont, avec d'autres grandeurs, un rapport quelconque qui soit le même que celui des secondes grandeurs avec encore d'autres grandeurs de même rang, le rapport de la somme des premières grandeurs à la somme de celles que nous avons dites est le même que celui de la somme des secondes grandeurs à la somme des autres grandeurs que nous avons dites (4).

PROPOSITION I.

Soit un segment ABΓ délimité par la droite AΓ et par la parabole ABΓ. Coupons la droite AΓ en deux parties égales au point Δ,

1. L'axe désigne ici la droite qui relie les centres de gravité des plans des bases opposées du prisme.

2. Le problème relatif à la détermination du centre de gravité du cône ne se rencontre pas dans les *Œuvres* d'Archimède qui nous sont parvenues. Il est possible qu'il ait été donné dans le traité perdu *Des Leviers*, ou dans une partie perdue du traité *De l'Equilibre des Plans*.

3. ἐν τῷ προγεγραμμένῳ Κωνοειδῶν, littéralement, dans le (livre) précédemment écrit sur les conoïdes. Cette phrase, dont la forme est d'ailleurs négligée, semble n'être qu'une interpolation, ou une note de référence, ayant passé de marge en corps de texte du manuscrit. (Cfr. HEIBERG, *loc. cit.*, vol. II, p. 434.)

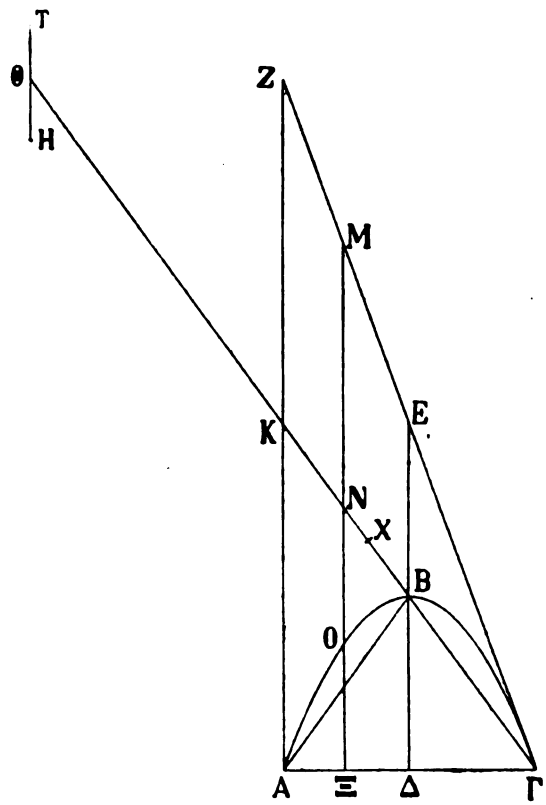
4. La traduction textuelle de cette proposition est d'une lecture un peu pénible; mais son interprétation en notations usuelles est la suivante :

Soient deux séries de grandeurs : A ; A_1 ; $A_2 \dots$; A_n et B ; B_1 ; $B_2 \dots$; B_n, telles que : $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$; $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$; $\frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{B_{n-1}}{B_n}$. Soient d'autre part les séries : A ; A_1 A_2 ; A_n et C ; C_1 ; $C_2 \dots$; C_n telles que : $\frac{A}{C} = \frac{A_1}{C_1} = \frac{A_n}{C_n} = m$, et les séries B ; B_1 ; $B_2 \dots$; B_n, et D ; D_1 ; $D_2 \dots$; D_n, telles que : $\frac{B}{D} = \frac{B_1}{D_1} = \frac{B_n}{D_n} = m$, on aura : $\frac{A + A_1 + A_2 + \dots A_n}{C + C_1 + C_2 + \dots C_n} = \frac{B + B_1 + B_2 + \dots B_n}{D + D_1 + D_2 + \dots D_n}$. La démonstration de cette relation est donnée à la proposition I du livre *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*.

Digitized by Google

menons la droite ΔBE parallèlement au diamètre, et menons les droites de jonction AB, BΓ. Je dis que le segment ABΓ vaut une fois et un tiers le triangle ABΓ (1).

Des points A, Γ menons la droite AZ parallèle à la droite ΔBE, et la droite ΓZ tangente à la parabole ; prolongeons la droite ΓB au delà du point K, et prenons une droite KΘ égale à la droite ΓK. Imaginons que la droite ΓΘ soit un levier dont le milieu est le point K, et soit la droite MΞ une parallèle quelconque à la droite EΔ.



Dès lors, puisque ΓBA est une parabole, que la droite ΓZ est une tangente, et que la droite ΓΔ est menée de manière ordonnée (2), la droite EB est égale à la droite BΔ ; car cela est démontré dans les *Eléments* (3). Pour ce motif, et parce que les droites ZA, MΞ sont parallèles à la droite EΔ, la droite MN est aussi égale à la droite NΞ, et la droite ZK égale à la droite KA (4). Et

1. Il est intéressant de comparer cette démonstration mécanique de la quadrature de la parabole avec une première démonstration mécanique, plus longue, qui en est donnée au traité *De la Quadrature de la Parabole*, concurremment avec la démonstration géométrique.

2. C'est-à-dire l'ordonnée du point Γ, ou demi-corde conjuguée.

3. Archimède renvoie à une démonstration qui aurait été donnée dans un traité élémentaire sur les sections coniques, dû à Euclide ou à l'un de ses prédécesseurs, ouvrage qui ne nous est pas parvenu. La proposition que nous formulons maintenant en disant que la sous-tangente relative à un point de la parabole est double de l'abscisse de ce point, est formulée en d'autres termes, et sans être accompagnée de démonstration, dans le traité *De la Quadrature de la Parabole* (prop. II). Une démonstration de cette proposition a été donnée plus tard par Apollonius, dans son traité *Des Coniques* (livre II, prop. 35).

4. Par similitude de triangles.

Digitized by Google

puisque MΞ est à ΞO comme ΓA est à AΞ (1), que ΓK est à KN comme ΓA est à AΞ, et que ΓK est égal à KΘ, il s'ensuit que MΞ est à ΞO comme ΘK est à KN (2). Et puisque le point N est le centre de gravité de la droite MΞ, parce que la droite MN est égale à la droite NΞ (3), si nous prenons une droite TH, égale à la droite ΞO, ayant son centre de gravité au point Θ, de manière que la droite TΘ soit égale à la droite ΘH (4), la droite TΘH fera équilibre à la droite MΞ laissée en place, parce que la droite ΘN est divisée dans le rapport inverse des poids de TH et de MΞ, et que MΞ est à HT comme ΘK est à KN (5) ; en sorte que le centre de gravité de l'ensemble de ces poids sera le point K (6). Il en sera d'ailleurs de même pour toutes les droites menées parallèlement à la droite EΔ dans le triangle ZAΓ, lesquelles, laissées en place, feront respectivement équilibre à leurs parties, découpées par la parabole et déplacées au point Θ, de manière que le point K soit le centre de gravité de la grandeur composée des unes et des autres. Et puisque le triangle ΓZA est constitué par les droites menées dans le triangle ΓZA, et que le segment ABΓ est constitué par les droites prises dans la parabole de la même manière que la droite ΞO, il s'ensuit que le triangle ZAΓ, laissé en place, fera équilibre, par rapport au point K, au segment de parabole dont le centre de gravité aura été transporté au point Θ, de manière que le point K soit le centre de gravité de l'ensemble. Dès lors, divisons la droite ΓK au point X de manière que la droite ΓK soit triple de la droite KX ; le point X sera donc le centre de gravité du triangle AZΓ ; car cela a été démontré dans le livre *Des Équilibres* (7). Donc, puisque le triangle ZAΓ, maintenu en place, s'équilibre au point K avec le segment ABΓ, dont le centre de gravité est transporté au point Θ, et que le point X est le centre de gravité du triangle ZAΓ, la droite ΘK est à la droite XK comme le triangle AZΓ

1. Voir *De la Quadrature de la Parabole*, proposition V. Une petite interpolation ajoute ici : « car cela est démontré dans un lemme ».

2. En vertu de la proposition rappelée dans la note précédente, on a : $\frac{M\Xi}{\Xi O} = \frac{\Gamma A}{A\Xi}$, et l'on a : $\frac{\Gamma A}{A\Xi} = \frac{\Gamma K}{KN}$, d'où : $\frac{M\Xi}{\Xi O} = \frac{\Gamma K}{KN}$. Or, par hypothèse : $\Gamma K = \Theta K$; donc : $\frac{M\Xi}{\Xi O} = \frac{\Theta K}{KN}$.

3. Voir lemme IV.

4. Voir lemme IV.

5. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, propositions VI-VII.

6. Voir lemme III.

7. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, proposition XIV, et le lemme V placé en tête de ce traité.

Digitized by Google

est au segment ABΓ placé autour du centre Θ. Or, la droite ΘK est triple de la droite KX ; par conséquent, le triangle AZΓ est aussi triple du segment ABΓ (1). Or, le triangle ZAΓ est quadruple du triangle ABΓ, parce que la droite ZK est égale à la droite KA, et que la droite AΔ est égale à la droite ΔΓ (2) ; par conséquent, le segment ABΓ vaut les quatre tiers du triangle ABΓ (3).

PROPOSITION II.

Ce que nous venons de dire ne démontre sans doute pas ce qui précède, mais donne jusqu'à un certain point l'idée que la conclusion est juste. C'est pourquoi, reconnaissant nous-même que la conclusion n'est pas démontrée, mais ayant dans l'idée qu'elle est exacte, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique que nous avons trouvée et déjà publiée (4).

Au reste, d'après cette méthode, nous allons voir, de la manière suivante, que toute sphère est quadruple du cône ayant la base égale au plus grand cercle de la sphère et la hauteur égale au rayon de la sphère (5), et que le cylindre, ayant la base égale au plus grand cercle d'une sphère et la hauteur égale au diamètre de cette sphère, vaut une fois et demie cette sphère (6).

En effet, soit une sphère dans laquelle ABΓΔ est un grand cercle, les droites AΓ, BΔ étant des diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre. Soit, dans cette sphère, un cercle de diamètre BΔ perpendiculaire au cercle ABΓΔ. Construisons, sur ce cercle perpendiculaire, un cône

1. On a, en vertu des propositions VI et VII *De l'Equilibre des Plans*, livre I : $\frac{\Theta K}{KX} = \frac{\text{triangle } AZ\Gamma}{\text{segment } AB\Gamma}$. Or, on a posé : $\Theta K = \Gamma K$, et $\Gamma K = 3KX$; donc : $\frac{\Theta K}{KX} = 3$, d'où : triangle $AZ\Gamma = 3$ segments ABΓ.

2. On a : $ZK = KA$, $A\Delta = \Delta\Gamma$, et $KB = B\Gamma$, d'où, considérant les triangles ayant même hauteur et bases égales : $AZ\Gamma = 2A\Gamma K = 2(AB\Gamma + ABK) = 2(AB\Gamma + AB\Gamma) = 4AB\Gamma$.

3. Les relations des deux notes précédentes donnent : 4 triangles $AB\Gamma = 3$ segments ABΓ, d'où, comme le texte : segment $AB\Gamma = \frac{4}{3}$ triangle ABΓ.

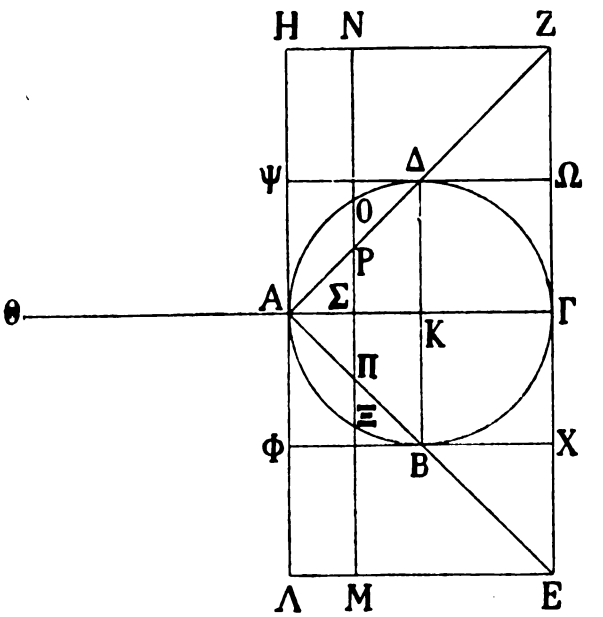
4. Archimède vise ici la démonstration purement géométrique de la quadrature du segment parabolique déjà publiée dans la seconde partie du livre *De la Quadrature de la Parabole*. Bien que le préambule ait annoncé la reproduction de cette démonstration à la fin du traité *De la Méthode mécanique*, elle n'a pas été retrouvée dans le palimpseste de Jérusalem.

5. Voir la démonstration géométrique au traité *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, prop. XXXIV.

6. Voir la démonstration géométrique au traité *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, prop. XXXIV, corollaire.

Digitized by Google

ayant son sommet au point A, et, sa nappe étant prolongée, coupons ce cône par un plan mené par le point Γ parallèlement à la base ; ce plan déterminera donc un cercle perpendiculaire à la droite AΓ, dont le diamètre sera la droite EZ. Construisons sur ce cercle un cylindre ayant l'axe égal à la droite AΓ, et soient EΛ, ZH les côtés de ce cylindre. Prolongeons la droite ΓA ; prenons une droite AΘ qui lui soit égale, et imaginons que la droite ΓΘ soit un levier dont le milieu est le point A. Menons une parallèle quelconque MN à BΔ, coupant le cercle ABΓΔ en Ξ et O, le diamètre AΓ en Σ, la droite AE en Π, et la droite AZ en P. Menons par la droite MN un plan perpendiculaire à la droite AΓ; il déterminera donc une section, laquelle sera le cercle de diamètre MN dans le cylindre, le cercle de diamètre ΞO dans la sphère ABΓΔ, et le cercle de diamètre ΠP dans le cône. Dès lors, puisque le rectangle sous ΓA, AΣ équivaut au rectangle sous MΣ, ΣΠ, car AΓ est égal à ΣM et AΣ égal à ΠΣ, et que le rectangle sous ΓA, AΣ équivaut au carré de AΞ, c'est-à-dire aux carrés de ΞΣ, ΣΠ, il en résulte que le rectangle sous MΣ, ΣΠ équivaut aux carrés de ΞΣ, ΣΠ (1). Et puisque MΣ est à ΣΠ comme ΓA est à AΣ, et que ΓA est égal à AΘ, il s'ensuit que MΣ est à ΣΠ, c'est-à-dire que le carré de MΣ est au rectangle sous MΣ, ΣΠ, comme ΘA est à AΣ. Or, on a démontré que le rectangle sous MΣ, ΣΠ équivaut aux carrés de ΞΣ, ΣΠ; par conséquent, le carré de MΣ est aux carrés de ΞΣ, ΣΠ comme AΘ



1. On a : AΓ = EΓ = ΣM, et, par similitude de triangles : AΣ = ΠΣ, d'où, par produit : ΓA × AΣ = MΣ × ΣΠ. D'autre part, dans le cercle, une corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre qui passe par une de ses extrémités et entre la projection de cette corde sur ce diamètre ; donc : $\Gamma A \times A\Sigma = \overline{A\Xi}^2 = \overline{\Xi\Sigma}^2 + \overline{A\Sigma}^2 = \overline{\Xi\Sigma}^2 + \overline{\Sigma\Pi}^2$, d'où, comme le texte : $M\Sigma \times \Sigma\Pi = \overline{\Xi\Sigma}^2 + \overline{\Sigma\Pi}^2$.

Digitized by Google

est à $A\Sigma$ (1). Or, le carré de MN est aux carrés de ΞO, ΠP comme le carré de $M\Sigma$ est aux carrés de $\Xi\Sigma$, $\Sigma\Pi$, tandis que le cercle, ayant dans le cylindre le diamètre MN, est à l'ensemble des cercles, de diamètre ΠP dans le cône et de diamètre ΞO dans la sphère, comme le carré de MN est aux carrés de ΞO, ΠP. En conséquence, le cercle situé dans le cylindre est aux cercles situés, l'un dans la sphère, l'autre dans le cône, comme ΘA est à $A\Sigma$ (2). Dès lors, puisque ΘA est à $A\Sigma$ comme ce même cercle, situé dans le cylindre et laissé en place, est aux deux cercles ayant comme diamètres les droites ΞO, ΠP, déplacés et disposés en Θ de manière que Θ soit leur centre de gravité commun, comme ΘA est à $A\Sigma$, ces cercles s'équilibreront par rapport au point A. On démontrerait pareillement que, si l'on mène une autre parallèle à EZ dans le parallélogramme ΛZ, et si, par la droite ainsi menée, on élève un plan perpendiculaire à la droite $A\Gamma$, le cercle déterminé dans le cylindre, laissé en place, fera équilibre autour du point A aux deux cercles déterminés dans la sphère et dans le cône, déplacés et disposés en Θ sur le levier de manière que Θ soit leur centre de gravité commun. Par conséquent, le cylindre, la sphère et le cône étant remplis de cercles ainsi déterminés, le cylindre laissé en place fera équilibre autour du point A à l'ensemble de la sphère et du cône, déplacés et disposés en Θ sur le levier, de manière que Θ soit leur centre de gravité commun. Dès lors, puisque les solides que nous venons de dire se font équilibre autour du point A, le cylindre restant en place autour de son centre de gravité K (3), et la sphère et le cône étant déplacés autour du centre de gravité Θ, le cylindre sera à la sphère et au cône comme ΘA est à AK (4). Or, ΘA est le double de AK ; par conséquent, le cylindre équivaut aussi au double

---

1. On a: $\frac{\Gamma E}{\Sigma\Pi} = \frac{\Gamma A}{A\Sigma}$. Or, $\Gamma E = M\Sigma$, et on a posé: $\Theta A = \Gamma A$; donc: $\frac{M\Sigma}{\Sigma\Pi} = \frac{M\Sigma^2}{M\Sigma \times \Sigma\Pi} = \frac{\Theta A}{A\Sigma}$, d'où, par substitution de la valeur trouvée dans la note précédente, il vient, comme le texte : $\frac{\overline{M\Sigma}^2}{\overline{\Xi\Sigma}^2 + \overline{\Sigma\Pi}^2} = \frac{A\Theta}{A\Sigma}$.

2. Observant que les cercles sont entre eux comme les carrés des diamètres, la relation de la note précédente devient :

$$\frac{\overline{M\Sigma}^2}{\overline{\Xi\Sigma}^2 + \overline{\Sigma\Pi}^2} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{\Xi O}^2 + \overline{\Pi P}^2} = \frac{\text{cercle MN}}{\text{cercle } \Xi O + \text{cercle } \Pi P} = \frac{A\Theta}{A\Sigma}.$$

3. Voir lemme VIII.

4. Voir *De l'Equilibre des Plans*, livre I, propositons VI et VII.

Digitized by Google

de l'ensemble de la sphère et du cône (1). Or, ce même cylindre vaut le triple du cône (2) ; par conséquent, trois cônes valent deux de ces mêmes cônes et deux sphères. Retranchons deux cônes de ces cônes ; il s'ensuit qu'un cône, dont AEZ est le triangle passant par l'axe, vaut deux sphères telles que nous les avons dites (3). Or, le cône, dont AEZ est le triangle passant par l'axe, vaut huit cônes dont ABΔ est le triangle passant par l'axe, parce que EZ est le double de BΔ ; par conséquent, huit cônes tels que nous venons de dire valent deux sphères. Dès lors, la sphère, dont ABΓΔ est un grand cercle, est quadruple du cône dont le sommet est le point A, et dont la base est le cercle décrit autour du diamètre BΔ perpendiculaire à la droite AΓ (4).

Menons maintenant, dans le parallélogramme ΛZ, par les points B et Δ, les droites ΦBX, ΨΔΩ parallèles à la droite AΓ, et imaginons le cylindre dont les bases sont les cercles décrits autour des diamètres ΦΨ, XΩ, et dont la hauteur est AΓ. Dès lors, puisque le cylindre, dont ΦΩ est le parallélogramme passant par l'axe, est double du cylindre dont ΦΔ est le parallélogramme passant par l'axe (5), et que, d'après *Les Eléments* (6), ce dernier cylindre lui-même est triple du cône dont ABΔ est le triangle passant par l'axe, il en résulte que le cylindre, dont ΦΩ est le parallélogramme passant par l'axe, est sextuple du cône dont ABΔ est le triangle passant par l'axe. Or, nous avons démontré que la sphère, dont ABΓΔ est un grand cercle, est

1. En observant que ΘA = AΓ = 2AK, la relation donnée par les propositions rappelées dans la note précédente devient : $\frac{\text{cylindre}}{\text{sphère} + \text{cône}} = \frac{\Theta A}{AK} = \frac{2AK}{AK} = 2$, d'où, comme le texte : cylindre = 2[sphère + cône].

2. EUCLIDE, livre XII, proposition 10 : « Le cône est tiers du cylindre de même base et de même hauteur. »

3. Les deux notes précédentes donnant : cylindre = 2 sphères + 2 cônes, et cyl. = 3 cônes, on a, comme le texte : 3 cônes = 2 cônes + 2 sphères, d'où, comme le texte : cône = 2 sphères.

4. En vertu de la proposition 12 du livre XII d'EUCLIDE (« Les cônes semblables sont entre eux comme les cubes des diamètres de leurs bases »), et en observant que EZ = 2BΔ, on aura : $\frac{\text{cône ABΔ}}{\text{cône AEZ}} = \frac{\overline{B\Delta}^3}{\overline{EZ}^3} = \frac{\overline{B\Delta}^3}{\overline{8B\Delta}^3} = \frac{1}{8}$, d'où, comme le texte : cône AEZ = 8 cônes ABΔ. Or, on vient de voir, note précédente, que : cône AEZ = 2 sphères ABΓΔ ; donc, comme le texte : 8 cônes ABΔ = 2 sphères ABΓΔ, d'où : sphère ABΓΔ = 4 cônes ABΔ, relation dont la démonstration purement géométrique est donnée au traité *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, prop. XXXIV.

5. EUCLIDE, livre XII, proposition 14 : « Cônes et cylindres de bases égales sont entre eux comme leurs hauteurs ».

6. *Eléments* d'EUCLIDE, livre XII, prop. 10 : ***Voir note 2 plus haut.***

Digitized by Google

quadruple de ce dernier cône ; par conséquent, le cylindre vaut une fois et demie la sphère (1) ; ce qu'il fallait démontrer.

Considérant que toute sphère est quadruple du cône dont la base est égale au plus grand cercle et la hauteur égale au rayon de la sphère, j'ai conçu que la surface de toute sphère équivaut à quatre de ses plus grands cercles (2) ; car j'avais eu l'intuition que, puisque tout cercle équivaut au triangle dont la base est égale à la circonférence du cercle et la hauteur égale au rayon (3), toute sphère équivaut au cône dont la base est équivalente à la surface de la sphère, et dont la hauteur est égale à son rayon (4).

PROPOSITION III.

L'on perçoit aussi par cette méthode qu'un cylindre, ayant la base égale au plus grand cercle d'un sphéroïde (5), et la hauteur égale à l'axe de ce sphéroïde, vaut une fois et demie ce sphéroïde. Or, cela étant perçu, il est clair que lorsqu'un sphéroïde quelconque est coupé par un plan passant par son centre, perpendiculairement à son axe, la moitié de ce sphéroïde est double du cône ayant même base et même axe que le segment (6).

En effet, soit un sphéroïde quelconque, et coupons-le par un plan passant par l'axe ; soit ABΓΔ l'ellipse déterminée dans la surface de ce plan ; soient AΓ, BΔ les diamètres, et K le centre de cette ellipse; soit enfin, dans le sphéroïde, le cercle décrit autour du diamètre BΔ perpendiculairement à AΓ. Imaginons, d'autre part, un cône ayant comme base le cercle que nous venons de dire, et comme sommet le point A, et, sa nappe étant prolongée, coupons ce cône par un plan mené par le point Γ parallèlement à sa base. La section de ce plan

1. Cylindre $\Phi\Omega = 2$ cyl. $\Phi\Delta$. Or, cylindre $\Phi\Delta = 3$ cônes BAΔ; donc : cyl. $\Phi\Omega =$ 6 cônes BAΔ. Or, on a vu dans une note précédente que : sphère ABΓΔ = 4 cônes BAΔ, d'où, comme le texte : cyl. $\Phi\Omega = \frac{3}{2}$ sphère ABΓΔ.

2. Voir démonstration géométrique au traité *De la Sphère et du Cylindre*, livre I, proposition XXXIII.

3. Voir *De la Mesure du cercle*, proposition I.

4. On a : volume sphère de rayon $R = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3} R \times 4\pi R^2 =$ volume du cône de hauteur R et de base $4\pi R^2$. Or, $4\pi R^2 =$ aire de la sphère; donc : vol. sphère = volume cône de hauteur R et de base égale à l'aire de la sphère.

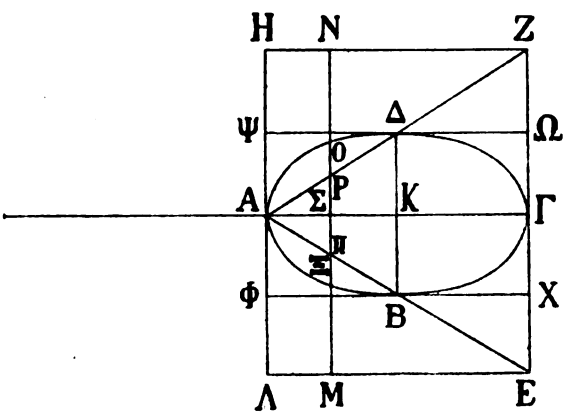
5. C'est-à-dire un ellipsoïde de révolution.

6. Voir démonstration géométrique au traité *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, propositions XXVII et XXVIII.

Digitized by Google

sera donc un cercle perpendiculaire à la droite AΓ, dont le diamètre sera la droite EZ. Soit encore un cylindre ayant comme base ce même cercle de diamètre EZ et comme axe la droite AΓ. Prenons une droite AΘ, égale à la droite ΓA, sur cette dernière droite prolongée. Imaginons que la droite ΘΓ soit un levier dont le milieu est le point A; menons une certaine droite MN parallèle à la droite EZ dans le parallélogramme ΛZ, et, par la droite MN, élevons un plan perpendiculaire à la droite AΓ. Ce plan déterminera un cercle de diamètre MN comme section dans le cylindre, un cercle de diamètre ΞO dans le sphéroïde, et un cercle de diamètre ΠP dans le cône.

Dès lors, puisque EA est à AΠ, c'est-à-dire MΣ à ΣΠ, comme ΓA est à AΣ, et que la droite ΓA est égale à la droite AΘ, il s'ensuit que MΣ est à ΣΠ comme ΘA est à AΣ. Or, le carré de MΣ est au rectangle sous MΣ, ΣΠ comme MΣ est à ΣΠ (1), tandis que le rectangle sous MΣ, ΣΠ équivaut aux carrés de ΠΣ, ΣΞ. En effet, puisque le rectangle sous AK, KΓ, c'est-à-dire le carré de AK, est au carré de KB comme le rectangle sous AΣ, ΣΓ est au carré de ΣΞ (2), et que le carré de AΣ est au carré de ΣΠ comme le carré de AK est au carré de KB, il s'ensuit que, par permutation, le carré de ΠΣ sera au carré de ΣΞ comme le carré de AΣ est au rectangle sous AΣ, ΣΓ. Or, le carré de ΣΠ est au rectangle sous ΣΠ, ΠM comme le carré de AΣ



1. On a, par similitude de triangles : $\frac{EA}{A\Pi} = \frac{E\Gamma}{\Sigma\Pi} = \frac{M\Sigma}{\Sigma\Pi} = \frac{\Gamma A}{A\Sigma} = \frac{\Theta A}{A\Sigma}$, d'où : $\frac{\overline{M\Sigma}^2}{M\Sigma \times \Sigma\Pi} = \frac{\Theta A}{A\Sigma}$.

2. La constance du rapport $\frac{A\Sigma \times \Sigma\Gamma}{\overline{\Sigma\Xi}^2}$ peut se déduire de ce que l'ordonnée au grand axe de l'ellipse est à l'ordonnée correspondante du cercle décrit sur ce grand axe dans le rapport constant du petit axe au grand. Or, dans le cercle, le carré de l'ordonnée vaut le rectangle délimité par les segments déterminés sur le diamètre; donc dans l'ellipse, le carré de l'ordonnée vaut le rectangle de ces segments multiplié par une constante. La constance du rapport en question est mise en évidence par l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes,

Digitized by Google

est au rectangle sous AΣ, ΣΓ ; par conséquent, le rectangle sous MΠ, ΠΣ équivaut au carré de ΞΣ (1). Ajoutons de part et d'autre le carré de ΠΣ ; il s'ensuit que le rectangle sous MΣ, ΣΠ équivaut aux carrés de ΠΣ, ΣΞ ; par conséquent, le carré de MΣ est aux carrés de ΠΣ, ΣΞ comme ΘA est à AΣ (2). Or, le cercle qui, dans le cylindre, a pour diamètre MN est à l'ensemble des cercles, dont les diamètres sont ΞO, ΠP, comme le carré de MΣ est aux carrés de ΣΞ, ΣΠ ; par conséquent, le cercle de diamètre MN, maintenu en place, équilibrera autour du point A l'ensemble des cercles de diamètres ΣO, ΠP, déplacés et disposés au point Θ du levier de manière

---

$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, d'où : $\frac{(a+x)(a-x)}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$ = constante ; relation dans laquelle $a+x$ et $a-x$ sont les segments déterminés par l'ordonnée sur l'axe. On aura donc, comme le texte : $\frac{A\Sigma \times \Sigma\Gamma}{\overline{\Sigma\Xi}^2} = \frac{AK \times K\Gamma}{\overline{KB}^2} = \frac{\overline{AK}^2}{\overline{KB}^2}$.

Le texte est coupé à cet endroit par la phrase incidente suivante : ἀμφότεροι γὰρ οἱ λόγοι ἐν τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν εἰσίν, c'est-à-dire : car ces deux rapports sont les mêmes que celui de l'axe principal au paramètre. Cette phrase est considérée comme une interpolation par Heiberg. (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 449). En effet, elle emprunte à Apollonius le mot πλαγία, c'est-à-dire « axe transversal », qui désigne ici le grand axe de l'ellipse, et le mot ὀρθία, c'est-à-dire droite, par lequel, plus tard, Apollonius désignera une perpendiculaire au grand axe, constante, ou paramètre, choisie telle que le rectangle formé par cette droite avec le grand axe soit équivalent au carré construit sur le petit axe, ou bien, que le rapport de ce paramètre au grand axe soit égal à celui du carré du petit axe au carré du grand axe. Apollonius démontre (*Coniques*, livre I, prop. 21) que le rapport de ce paramètre au grand axe est le même que celui du carré d'une ordonnée de l'ellipse au rectangle délimité par les segments déterminés par cette ordonnée sur le grand axe.

1. La relation $\frac{A\Sigma \times \Sigma\Gamma}{\overline{\Sigma\Xi}^2} = \frac{\overline{AK}^2}{\overline{K\Gamma}^2}$ de la note précédente devient, en observant que $\frac{AK}{KB} = \frac{A\Sigma}{\Sigma\Pi} : \frac{A\Sigma \times Z\Gamma}{\overline{\Sigma\Xi}^2} = \frac{\overline{A\Sigma}^2}{\overline{\Sigma\Pi}^2}$, d'où, par inversion et permutation, il vient, comme le texte : $\frac{\overline{A\Sigma}^2}{AK \times \Sigma\Gamma} = \frac{\overline{\Sigma\Pi}^2}{\overline{\Sigma\Xi}^2}$. Or, par similitude de triangles : $\frac{\Sigma\Pi}{\Pi M} = \frac{A\Sigma}{EM}$, ou $\frac{\Sigma\Pi}{\Pi M} = \frac{A\Sigma}{\Sigma\Gamma}$, que l'on peut écrire : $\frac{\overline{\Sigma\Pi}^2}{\Sigma\Pi \times \Pi M} = \frac{\overline{A\Sigma}^2}{A\Sigma \times \Sigma\Gamma}$; donc : $\frac{\overline{\Sigma\Pi}^2}{\Sigma\Pi \times \Pi M} = \frac{\overline{\Sigma\Pi}^2}{\overline{\Sigma\Xi}^2}$, d'où : $\Sigma\Pi \times \Pi M = \overline{\Sigma\Xi}^2$.

2. L'égalité de la note précédente peut s'écrire : $\overline{\Pi\Sigma}^2 + \Pi\Sigma \times \Pi M = \overline{\Pi\Sigma}^2 + \overline{\Sigma\Xi}^2$, ou : $\Pi\Sigma[\Pi\Sigma + \Pi M] = \Pi\Sigma \times M\Sigma = \overline{\Pi\Sigma}^2 + \overline{\Sigma\Xi}^2$. Substituons dans la relation $\frac{\overline{M\Sigma}^2}{M\Sigma \times \Sigma\Pi} = \frac{\Theta A}{A\Sigma}$ trouvée plus haut, il vient, comme le texte : $\frac{\overline{M\Sigma}^2}{\overline{\Pi\Sigma}^2 + \overline{\Sigma\Xi}^2} = \frac{\Theta A}{A\Sigma}$.

Digitized by Google

que le point Θ soit le centre de gravité de chacun d'eux. Le point Θ est donc le centre de gravité de l'ensemble des deux cercles déplacés dont les diamètres sont ΣO, ΠP (1). Dès lors, le cercle, dont le diamètre est MN, est à l'ensemble des cercles, dont les diamètres sont ΞO, ΠP, comme ΘA est à AZ (2). On démontrerait de la même manière que, si quelque autre droite est menée parallèlement à la droite EZ dans le parallélogramme ΛZ, et si par la droite ainsi menée on élève un plan perpendiculaire à AΓ, le cercle déterminé dans le cylindre, laissé en place, fera équilibre autour du point A à l'ensemble des cercles déterminés dans l'ellipsoïde et dans le cône, déplacés au point Θ du levier, de manière que le point Θ soit leur centre de gravité commun. Par conséquent, comme le cylindre, le sphéroïde et le cône sont remplis de cercles ainsi déterminés, le cylindre laissé en place fera équilibre autour du point A au sphéroïde et au cône, déplacés et disposés au point Θ sur le levier, de manière que le point Θ soit leur centre de gravité commun. Or, le centre de gravité du cylindre est le point K (3), tandis que le centre de gravité de l'ensemble du sphéroïde et du cône est, comme nous l'avons dit, le point Θ ; donc, le cylindre sera à l'ensemble du sphéroïde et du cône comme ΘA est à AK. Or, AΘ est double de AK ; par conséquent, le cylindre vaudra aussi le double de l'ensemble du sphéroïde et du cône ; en sorte qu'un cylindre équivaut à deux cônes et deux sphéroïdes. Or, un cylindre équivaut à trois de ces cônes ; par conséquent, trois cônes valent deux cônes et deux sphéroïdes. Retranchons deux cônes de ces cônes ; il s'ensuit que le cône restant, dont AEZ est le triangle passant par l'axe, vaut deux sphéroïdes. Or, ce même cône seul vaut huit fois le cône dont ABΔ est le triangle passant par l'axe ; donc, huit cônes tels que nous venons de dire valent deux sphéroïdes; en sorte que quatre cônes valent un sphéroïde. Dès lors, le sphéroïde est quadruple du cône dont le sommet est le point A, et dont la base est le cercle décrit autour du diamètre BΔ, perpendiculairement à la

1. Voir lemme I.

2. On a : $\frac{\text{cercle MN}}{\text{cercle ΞO} + \text{cercle ΠP}} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{\Xi O}^2 + \overline{\Pi P}^2} = \frac{\overline{M\Sigma}^2}{\overline{\Sigma\Xi}^2 + \overline{\Pi\Sigma}^2}$, d'où, en présence de la relation de la note avant-précédente : $\frac{\text{cercle MN}}{\text{cercle ΞO} + \text{cercle ΠP}} = \frac{\Theta A}{A\Sigma}$.

3. Voir lemme VIII.

Digitized by Google

droite AΓ, et le demi-sphéroïde est double du cône que nous venons de dire (1).

Menons maintenant dans le parallélogramme ΛZ, par les points B, Δ, les droites ΦX, ΨΩ parallèles à la droite AΓ, et imaginons le cylindre dont les bases sont les cercles décrits autour des diamètres ΦΨ, XΩ, et dont l'axe est la droite AΓ. Dès lors, puisque le cylindre, dont ΦΩ est le parallélogramme passant par l'axe, est double du cylindre dont ΦΔ est le parallélogramme passant par l'axe, parce que leurs bases sont égales, tandis que l'axe de l'un est double de l'axe de l'autre ; et que ce même cylindre, dont ΦΔ est le parallélogramme passant par l'axe, est triple du cône dont le sommet est le point A et la base le cercle décrit autour du diamètre BΔ, perpendiculairement à la droite AΓ, le cylindre, dont ΦΩ est le parallélogramme passant par l'axe, est sextuple du cône que nous venons de dire. Or, nous avons démontré que le sphéroïde est quadruple de ce même cône ; par conséquent, le cylindre vaut une fois et demie le sphéroïde (2) ; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION IV.

La méthode en question laisse percevoir, de la manière suivante, que tout segment de paraboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe vaut une fois et demie le cône ayant même base et même axe que le segment (3).

En effet, soit un paraboloïde ; coupons-le par un plan passant par l'axe, et soit ABΓ la parabole déterminée dans la surface de ce plan (4).

1. Les relations qui précèdent se succèdent comme suit :
$\frac{\text{cylindre } \Lambda Z}{\text{ellipsoïde} + \text{cône EAZ}} = \frac{\Theta A}{AK} = \frac{2AK}{AK} = 2$, d'où : cyl. $\Lambda Z = 2$ cônes EAZ + 2 ellipsoïdes. Or, cyl. $\Lambda Z = 3$ cônes EAZ ; donc, comme le texte : 3 cônes EAZ = 2 cônes EAZ + 2 ellipsoïdes, ou cône EAZ = 2 ellipsoïdes. Or, en observant que $EZ = 2B\Delta$, on a : $\frac{\text{cône BA}\Delta}{\text{cône EAZ}} = \frac{\overline{B\Delta}^3}{\overline{EZ}^3} = \frac{\overline{B\Delta}^3}{\overline{8B\Delta}^3} = \frac{1}{8}$; donc : cône EAZ = 8 cônes BAΔ, d'où, comme le texte : 8 cônes BAΔ = 2 ellipsoïdes, ou : ellipsoïde = 4 cônes BAΔ, et $\frac{1}{2}$ ellipsoïde = 2 cônes BAΔ.

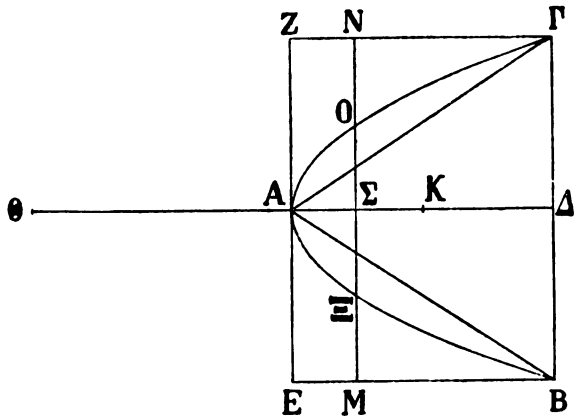
2. On a : cyl. ΦΩ = 2 cyl. ΦΔ. Or, cyl. ΦΔ = 3 cônes BAΔ ; donc : cyl. ΦΩ = 6 cônes BAΔ. Or, on a vu, note précédente, que ellipsoïde = 4 cônes BAΔ, d'où : $\frac{\text{cyl. } \Phi\Omega}{\text{ellipsoïde}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, d'où : cyl. $\Phi\Omega = \frac{3}{2}$ ellipsoïde.

3. Voir démonstration géométrique *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, prop. XXI.

4. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XI.

Digitized by Google

Coupons encore par un autre plan perpendiculaire à l'axe, et soit BΓ la section commune de ces plans. Soit ΔA l'axe du segment ; prolongeons ΔA vers le point Θ ; prenons une droite AΘ égale à ΔA, et imaginons que la droite ΔΘ soit un levier dont le milieu est le point A. Que la base du segment soit le cercle décrit autour du diamètre BΓ perpendiculairement à la droite AΔ ; imaginons le cône ayant comme base le cercle de diamètre BΓ et comme sommet le point A, et soit encore un cylindre ayant comme base le cercle de diamètre BΓ et comme axe la droite AΔ. Menons, dans le parallélogramme, une droite quelconque MN parallèle à la droite BΓ, et, par la droite MN, élevons un plan perpendiculaire à la droite AΔ. Ce plan déterminera donc un cercle de diamètre MN comme section dans le cylindre, et un cercle de diamètre ΞO comme section dans le segment de paraboloïde.



Puisque BAΓ est une parabole dont AΔ est le diamètre, et que les droites ΞΣ, BΔ sont menées de manière ordonnée (1), le carré de BΔ est au carré de ΞΣ comme ΔA est à AΣ. Or, la droite ΔA est égale à la droite AΘ ; donc, le carré de MΣ est au carré de ΛΞ comme ΘA est à AΣ. Or, le cercle de diamètre MN, situé dans le cylindre, est au cercle de diamètre ΞO, situé dans le segment de paraboloïde, comme le carré de MΣ est au carré de ΣΞ ; donc, le cercle de diamètre MN est au cercle de diamètre ΞO comme ΘA est à AΞ (2). Il en résulte que, restant en place, le cercle de diamètre MN, situé dans le cylindre, équilibrera autour du point A le cercle de diamètre ΞO, déplacé et

1. τεταγμένως κατηγμέναι, littéralement : menées en ordre, c'est-à-dire menées en ordre parallèle à la tangente au sommet de la parabole.

2. On a (*De la Quadrature de la Parabole*, prop. III) : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Xi\Sigma}^2} = \frac{\Delta A}{A\Sigma}$. Or, $\Theta A = \Delta A$, et $M\Sigma = B\Delta$; donc: $\frac{\overline{M\Sigma}^2}{\overline{\Xi\Sigma}^2} = \frac{\Theta A}{A\Sigma}$. Or, $\frac{\text{cercle MN}}{\text{cercle }\Xi O} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{\Xi O}^2} = \frac{\overline{M\Sigma}^2}{\overline{\Xi\Sigma}^2}$; donc: $\frac{\text{cercle M}}{\text{cercle }\Xi O} = \frac{\Theta A}{A\Sigma}$.

Digitized by Google

disposé au point Θ du levier de manière que ce point Θ soit son centre de gravité. De plus, le point Σ est le centre de gravité du cercle de diamètre MN, tandis que le point Θ est le centre de gravité du cercle de diamètre ΞO qui a été déplacé, et le rapport de ΘA à AΣ se présente d'une manière opposée à celui du cercle de diamètre MN au cercle de diamètre ΘO (1). On démontrerait semblablement que, si quelque autre droite est menée parallèlement à la droite BΓ dans le parallélogramme EΓ, et, si, par la droite menée ainsi, on élève un plan perpendiculaire à la droite AΘ, le cercle déterminé dans le cylindre, laissé en place, fera équilibre autour du point A au cercle déterminé dans le segment de paraboloïde, déplacé au point Θ sur le levier de manière que ce point Θ soit son centre de gravité. Dès lors, le cylindre et le segment de paraboloïde une fois remplis, le cylindre resté en place fera équilibre autour du point A au segment de paraboloïde, déplacé et disposé au point Θ sur le levier de manière que ce point Θ soit son centre de gravité. Or, puisque les grandeurs que nous venons de dire se font équilibre autour du point A, que le centre de gravité du cylindre est le point K, divisant la droite AΔ en deux parties égales (2), et que le centre de gravité du segment déplacé est le point Θ, le rapport de ΘA à AK se présente d'une manière opposée à celui du cylindre au segment. Or, la droite ΘA est double de la droite AK ; donc, le cylindre est également double du segment. Or, ce cylindre même est triple du cône ayant comme base le cercle de diamètre BΓ et comme sommet le point A ; donc, il est évident que le segment vaut une fois et demie ce dernier cône (3).

PROPOSITION V.

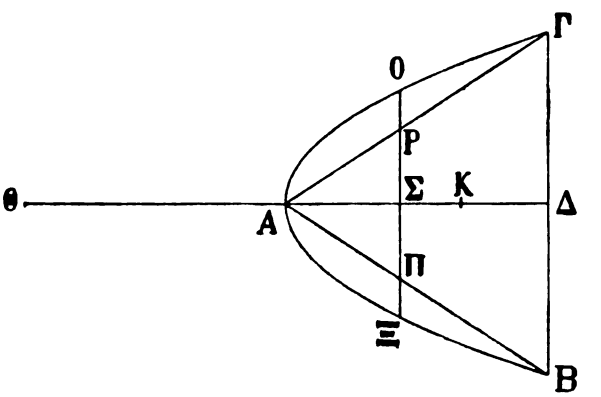
La méthode fait percevoir, de la manière suivante, que le centre de gravité d'un segment de paraboloïde, découpé par un plan perpendiculaire à l'axe, est situé sur la droite qui constitue l'axe du segment ;

1. ἀντιπεπονθότως, littéralement : d'une manière opposée, c'est-à-dire que les bras de levier sont inversement proportionnels aux cercles auxquels ils aboutissent.
2. Voir lemme VIII.
3. On a : $\frac{\text{cylindre}}{\text{segment}} = \frac{\Theta A}{AK}$. Or, $\Theta A = 2AK$; donc : cylindre = 2 segments. Or, cylindre = 3 cônes BAΓ ; donc : 2 segments = 3 cônes BAΓ, d'où : segment = $\frac{3}{2}$ cône BAΓ.

Digitized by Google

cette droite étant coupée de telle sorte que sa partie du côté du sommet soit double du segment restant.

Soit un segment de paraboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe, et coupé par un autre plan passant par l'axe, qui détermine dans sa surface la parabole ABΓ (1). Soit BΓ l'intersection du plan qui découpe le segment et du plan qui le coupe, et soit AΔ l'axe du segment et le diamètre de la section ABΓ. Prenons une droite AΘ égale à la droite ΔA, sur le prolongement de cette dernière, et imaginons que la droite ΔΘ soit un levier dont le milieu est le point A. Soit encore un cône, inscrit dans le segment, dont les droites BA, AΓ sont les côtés (2), et menons, dans la parabole, une parallèle quelconque ΞO à la droite BΓ, coupant la parabole aux points Ξ, O et les côtés du cône aux points Π, P.



Dès lors, puisque les droites ΞΣ, BΔ ont été menées dans la parabole perpendiculairement à son diamètre, le carré de BΔ est au carré de ΞΣ comme ΔA est à AΣ. Or, BΔ est à ΠΣ comme ΔA est à AΣ, tandis que le carré de BΔ est au rectangle sous BΔ, ΠΣ comme BΔ est à ΠΣ ; par conséquent, le carré de BΔ sera aussi au rectangle sous BΔ, ΠΣ comme le carré de BΔ est au carré de ΞΣ, et le carré de ΞΣ équivaut donc au rectangle sous BΔ, ΠΣ. Dès lors, les droites BΔ, ΣΞ, ΣΠ sont proportionnelles, et il en résulte que le carré de ΞΣ est au carré de ΣΠ comme BΔ est à ΠΣ. Or, ΔA est à AΣ, c'est-à-dire ΘA est à AΣ, comme BΔ est à ΠΣ ; par conséquent, le carré de ΞΣ est au carré de ΣΠ comme ΘA est à AΣ (3). Menons maintenant par la

1. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XI.

2. πλευραί, les côtés, c'est-à-dire les traces de la nappe du cône inscrit dans le segment de paraboloïde sur le plan qui coupe ce segment suivant l'axe.

3. On a (*De la Quadrature de la Parabole*, prop. III) : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Xi\Sigma}^2} = \frac{\Delta A}{A\Sigma}$. Or, on a : $\frac{B\Delta}{\Pi\Sigma} = \frac{\Delta A}{A\Sigma}$, et l'on peut écrire : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{B\Delta \times \Pi\Sigma} = \frac{B\Delta}{\Pi\Sigma}$; donc : $\frac{\overline{B\Delta}^2}{B\Delta \times \Pi\Sigma} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Xi\Sigma}^2}$, d'où : $B\Delta \times$

Digitized by Google

droite ΞO un plan perpendiculaire à la droite AΔ ; il déterminera un cercle de diamètre ΞO dans le segment de paraboloïde (1), et un cercle de diamètre ΠP dans le cône. Puisque le carré de ΞΣ est au carré de ΣΠ comme ΘA est à AΣ, et que le cercle de diamètre ΞO est au cercle de diamètre ΠP comme le carré de ΞΣ est au carré de ΣΠ, il en résulte que le cercle de diamètre ΞO est au cercle de diamètre ΠP comme ΘA est à AΣ. Dès lors, le cercle de diamètre ΞO, resté en place, fera équilibre autour du point A au cercle de diamètre ΠP, déplacé au point Θ du levier de manière que Θ soit son centre de gravité. En conséquence, puisque le point Σ est le centre de gravité du cercle de diamètre ΞO, laissé en place (2), que le point Θ est le centre de gravité du cercle de diamètre ΠP, déplacé commne nous l'avons dit, et que le rapport de ΘA à AΣ se présente dans un ordre opposé à celui du cercle de diamètre ΞO au cercle de diamètre ΠP, ces cercles se feront équilibre autour du point A. On démontrera semblablement que, si quelque autre droite est menée dans la parabole parallèlement à la droite BΓ, et si, par la droite ainsi menée, on élève un plan perpendiculaire à la droite AΔ, le cercle déterminé dans le segment de paraboloïde, maintenu en place, fera équilibre autour du point A au cercle déterminé dans le cône, déplacé et disposé au point Θ du levier de manière que ce point Θ soit son centre de gravité. En conséquence, le segment et le cône étant remplis de tels cercles, tous les cercles situés dans le segment, maintenus en place, feront équilibre autour du point A à tous les cercles situés dans le cône, déplacés et disposés au point Θ du levier de manière que leurs centres de gravité soient ce point Θ. Dès lors, le segment de paraboloïde laissé en place fera également équilibre autour du point A au cône, déplacé et disposé au point Θ du levier, de manière que ce point Θ soit son centre de gravité. Donc, puisque le point A est le centre de gravité des deux grandeurs précédentes, considérées comme grandeur unique (3), que le point Θ est le centre de gravité du cône déplacé

$\Pi\Sigma = \overline{\Xi\Sigma}^2$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\Xi\Sigma}^2}{\overline{\Pi\Sigma}^2} = \frac{B\Delta}{\Pi\Sigma}$. Or, par similitude de triangles : $\frac{\Delta A}{A\Sigma} = \frac{\Theta A}{A\Sigma} = \frac{B\Delta}{\Pi\Sigma}$; donc : $\frac{\overline{\Xi\Sigma}^2}{\overline{\Pi\Sigma}^2} = \frac{\Theta A}{A\Sigma}$.

1. Voir *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XI.
2. Voir lemme VII.
3. Voir lemme III.

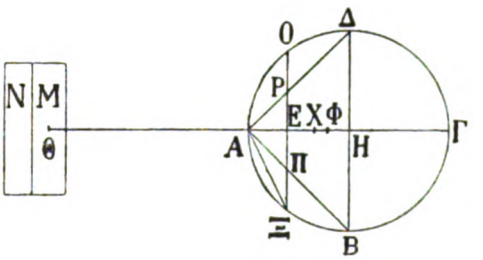
Digitized by Google

même, le centre de gravité de la grandeur restante est situé sur la droite AΘ, prolongée du côté de A, dont on a séparé une droite AK telle que le rapport de AΘ à cette dernière droite soit le même que le rapport du segment au cône (1). Or, le segment vaut une fois et demie le cône (2) ; donc, la droite ΘA vaut une fois et demie la droite AK, et le centre de gravité du segment de paraboloïde est le point K de la droite AΔ, divisée de telle sorte que sa partie située du côté du sommet du segment soit double de la partie restante (3).

PROPOSITION VI.

Le centre de gravité de tout hémisphère est situé sur la droite qui constitue son axe, divisée de manière que le rapport de son segment placé du côté de la surface de l'hémisphère au segment restant soit celui de cinq à trois.

Soit une sphère ; coupons-la par un plan passant par le centre et déterminant dans sa surface le cercle ABΓΔ. Soient les droites AΓ, BΔ des diamètres du cercle perpendiculaires l'un sur l'autre, et, par la droite BΔ, élevons un plan perpendiculaire à la droite AΓ. Soit encore un cône ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre BΔ, comme sommet le point A, et soient BA, AΔ les côtés du cône. Prolongeons la droite ΓA, et prenons une droite AΘ égale à la droite ΓA. Imaginons que la droite ΘΓ soit un levier dont le milieu est le point A, et menons, dans le demi-cercle BAΔ, une droite ΞO, parallèle à la droite BΔ, coupant la circonférence du demi-cercle aux points Ξ, O, les côtés du cône aux points Π, P, et la droite AΓ au point E. Par la droite ΞO faisons passer un plan per-



1. Voir lemme II.
2. Voir proposition IV.
3. On a : $\frac{A\Theta}{AK} = \frac{\text{segment}}{\text{cône}}$. Or, en vertu de la proposition IV on a : segment = $\frac{3}{4}$ cône ; donc : $\frac{A\Theta}{AK} = \frac{3}{2}$, d'où, comme le texte : $A\Theta = A\Delta = AK + K\Delta = \frac{3}{2} AK$, d'où, comme le texte : $AK = 2K\Delta$.

Digitized by Google

pendiculaire à la droite AE ; il déterminera le cercle de diamètre ΞO comme section dans l'hémisphère, et le cercle de diamètre ΠP comme section dans le cône.

Dès lors, puisque le carré de ΞA est au carré de AE comme AΓ est à AE, que les carrés de AE, EΞ valent le carré de ΞA, et que la droite EΠ est égale à la droite AE, il s'ensuit que les carrés de ΞE, EΠ sont au carré de EΠ comme AΓ est à AE (1). Or, le cercle décrit autour du diamètre ΞO, pris avec le cercle décrit autour du diamètre ΠP, est au cercle décrit autour du diamètre ΠP, comme les carrés de ΞE, EΠ sont au carré de EΠ, tandis que la droite ΓA est égale à la droite AΘ; par conséquent, le cercle décrit autour du diamètre ΞO, pris avec le cercle décrit autour du diamètre ΠP, est au cercle décrit autour du diamètre ΠP comme ΘA est à AE (2). Dès lors, les deux cercles de diamètres ΞO, ΠP, laissés en place, feront équilibre autour du point A au cercle de diamètre ΠP, déplacé et disposé au point Θ de manière que ce point Θ soit son centre de gravité. En conséquence, puisque le point E est le centre de gravité des deux cercles de diamètres ΞO, ΠP restés en place (3), et que le point Θ est celui du cercle de diamètre ΠP qui a été déplacé, le cercle de diamètre ΠP est aux cercles de diamètres ΞO, ΠP comme EA est à AΘ. Et, de même, si, dans le demi-cercle, on mène quelque autre parallèle à la droite BHΔ, et, si par cette droite on élève un plan perpendiculaire à la droite AΓ, les deux cercles déterminés dans l'hémisphère et dans le cône, laissés en place, feront équilibre autour du point A au cercle déterminé dans le cône, déplacé et disposé au point Θ du levier. Dès lors, l'hémisphère et le cône étant remplis de ces cercles, tous les cercles situés dans l'hémisphère et dans le cône, laissés en place,

---

1. On a : $\overline{\Xi A}^2 = AE \times A\Gamma$, d'où : $\frac{\overline{\Xi A}^2}{\overline{AE}^2} = \frac{A\Gamma}{AE}$. Or, $\overline{\Xi A}^2 = \overline{E\Xi}^2 + \overline{AE}^2$, donc : $\frac{\overline{E\Xi}^2 + \overline{AE}^2}{\overline{AE}^2} = \frac{A\Gamma}{AE}$. Or, le triangle AEΠ étant semblable au triangle AHB ayant les côtés de l'angle droit égaux, on a : AE = EΠ; d'où, comme le texte : $\frac{\overline{\Xi E}^2 + \overline{E\Pi}^2}{\overline{E\Pi}^2} = \frac{A\Gamma}{AE}$.

2. Observant que, par hypothèse : ΘA = AΓ, la relation de la note précédente donne : $\frac{\text{cercle } \Xi O + \text{cercle } \Pi P}{\text{cercle } \Pi P} = \frac{\pi\overline{\Xi E}^2 + \pi\overline{E\Pi}^2}{\pi\overline{E\Pi}^2} = \frac{\Theta A}{AE}$.

3. Voir lemme VII.

Digitized by Google

feront équilibre autour du point A à tous les cercles situés dans le cône, déplacés et disposés au point Θ du levier de manière que le point Θ soit leur centre de gravité. En conséquence, l'hémisphère et le cône, laissés en place, feront équilibre autour du point A au cône, déplacé et disposé au point Θ du levier de manière que ce point Θ soit son centre de gravité. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . Et puisque la sphère est quadruple du cône ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre BΔ, et comme axe la droite AH, ...

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . (1).

---

1. Le texte grec présente une lacune qui s'étend jusqu'à la fin de la démonstration.

Si l'on se base sur les constructions de la figure et sur les principes de la méthode employée, cette démonstration pourra néanmoins s'achever comme suit :

Soit Φ le centre de gravité connu du cône, et X le centre de gravité cherché de l'hémisphère. Soit un cylindre M ayant son centre de gravité au point Θ du levier, et faisant équilibre au cône BAΔ. On aura : $\frac{\text{cylindre M}}{\text{cône BA}\Delta} = \frac{A\Phi}{A\Theta} = \frac{A\Phi}{A\Gamma} = \frac{A\Phi}{2AH}$. Or, en vertu du lemme X, on a : $A\Phi = 3\Phi H$; donc : $A\Phi = 3[AH - A\Phi] = \frac{3}{4}AH$, d'où, remontant à la relation précédente : $\frac{\text{cylindre M}}{\text{cône BA}\Delta} = \frac{3}{8}$, d'où : cylindre $M = \frac{3}{8}$ cône BAΔ. Or, en vertu de la proposition III, on a : cône $BA\Delta = \frac{1}{4}$ sphère $= \frac{1}{2}$ hémisphère ; d'où : cylindre $M = \frac{3}{16}$ hémisphère. Soit maintenant un autre cylindre N, ayant même base que le cylindre M, dont le centre de gravité est disposé en Θ, et faisant équilibre à l'hémisphère. On aura donc : $\frac{\text{cyl. N}}{\text{hémisphère}} = \frac{AX}{A\Theta} = \frac{AX}{2AH}$. Or, on a vu plus haut que le cône BAΔ, déplacé au point Θ, fait équilibre à la fois à l'hémisphère et au cône laissés en place, et, puisque le cylindre M + N fait aussi équilibre à l'ensemble de l'hémisphère et du cône, on aura : cylindre M + N = cône $BA\Delta = \frac{1}{2}$ hémisphère ; donc : cylindre N = $\frac{1}{2}$ hémisphère — cylindre M = $\frac{1}{2}$ hémisphère — $\frac{3}{16}$ hémisphère = $\frac{5}{16}$ hémisphère, d'où : $\frac{\text{cyl. N}}{\text{hémisphère}} = \frac{5}{16}$. Dès lors, remontant à la relation précédente, on aura : $\frac{AX}{2AH} = \frac{5}{16}$, ou : $\frac{AX}{AH} = \frac{5}{8}$, d'où : $\frac{AX}{AH - AX} = \frac{5}{8-5}$, ou : $\frac{AX}{XH} = \frac{5}{3}$.

C. q. f. d.

Digitized by Google

PROPOSITION VII.

On perçoit également par cette méthode que le rapport de tout segment de sphère au cône ayant même base et même axe que le segment est le même que le rapport de la somme du rayon de la sphère et de la hauteur du segment restant à la hauteur du segment restant (1).

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . (2), et menons par la droite MN un plan perpendiculaire à la droite AΓ. Il déterminera un cercle de diamètre MN comme section dans le cylindre, un cercle de diamètre ΞO comme section dans le segment de sphère, et un cercle de diamètre ΠP dans le cône, dont la base est le cercle décrit autour du diamètre EZ et dont le sommet est le point A. On démontrera, comme précédemment (3), que le cercle de diamètre MN, restant en place, fait équilibre autour du point A à l'ensemble des cercles de diamètres ΞO, ΠP, déplacés au point Θ sur le levier de manière que ce point Θ soit leur centre de gravité commun ; et de même d'ailleurs pour tous autres cercles. Dès lors, le cylindre, le cône et le segment de sphère étant remplis de ces cercles, le cylindre resté en place fera également équilibre à l'ensemble du cône et du segment de sphère, déplacés et disposés au point Θ du levier.

---

1. L'énoncé de la proposition, incomplet dans le texte du palimpseste, a été reconstitué par Heiberg (*loc. cit.*, vol. II, p. 470) au moyen du texte de l'énoncé de la même proposition qui est démontrée géométriquement au traité *De la Sphère et du Cylindre*, livre II, proposition II.

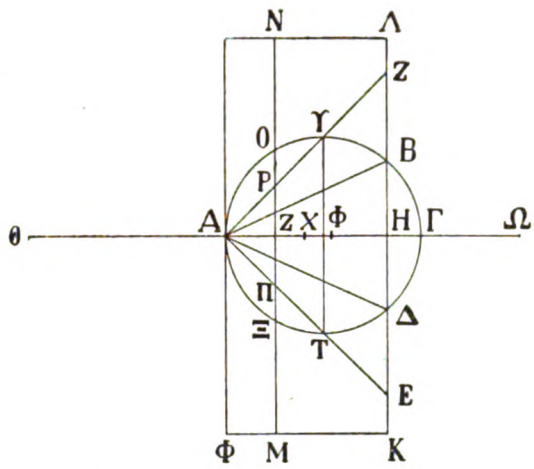
2. Une lacune de quelques lignes affecte le début de la démonstration relativement aux constructions de la figure. La conservation de cette figure et l'ordonnance de la démonstration permettent de rétablir le texte perdu, à peu près de la manière suivante :

Soit une sphère, le grand cercle ABΓΔ et des diamètres perpendiculaires AΓ, TY. Coupons la sphère par un plan perpendiculaire à AΓ ; il déterminera un segment ayant comme base le cercle de diamètre BΔ. Construisons deux cônes ayant respectivement comme base les cercles de diamètres BΔ, TY, et comme sommet le point A. Prolongeons la nappe du cône, dont la base est le cercle de diamètre TY, jusqu'à sa rencontre avec le plan du cercle de diamètre BΔ. Construisons encore un cylindre de hauteur AH, et dont la base soit le cercle de diamètre HΛ = AΓ. Prolongeons la droite AΓ de part et d'autre, et prenons ΘA = AΓ et ΓΩ = ½AΓ. Imaginons que ΘΓ soit un levier dont le milieu est le point A. Menons une parallèle quelconque MN à la droite BΔ, et... (voir texte).

3. Voir proposition II.

Digitized by Google

Coupons la droite AH aux points Φ, X, de telle sorte que AX soit égal à XH, et que HΦ soit la troisième partie de AH. Le point X sera donc le centre de gravité du cylindre, parce qu'il divise l'axe AH en deux parties égales (1). Dès lors, puisque les grandeurs que nous venons de dire se font équilibre autour du point A, le cylindre sera à l'ensemble du cône, dont EZ est le diamètre de base, et du segment de sphère BAΔ comme ΘA est à AX. Et puisque HA est triple de HΦ, le rectangle sous ΓH, HΦ sera le tiers du rectangle sous AH, HΓ. Or, le carré de HB équivaut au rectangle sous AH, HΓ ; par conséquent, le rectangle sous ΓH, HΦ équivaut aussi au tiers du carré de BH (2). . .



. . . . . .

. . . . . .

. . . . . Or, on a démontré aussi que le cylindre, dont la base est le cercle de diamètre KΛ, est au segment sphérique ABΔ, augmenté du cône, comme ΘA est à AX. . . . . .

. . . . . (3).

1. Voir lemme VIII.

2. On a : $\frac{\text{cylindre } \Phi\Lambda}{\text{cône } EAZ + \text{segment sphérique } BA\Delta} = \frac{\Theta A}{AX}$. Or, on a : $H\Phi = \frac{1}{3}AH$; donc, comme le texte : $\Gamma H \times H\Phi = \frac{1}{3}AH \times \Gamma H$. De plus, on a : $\overline{HB}^2 = AH \times \Gamma H$, d'où : $\Gamma H \times H\Phi = \frac{1}{3}\overline{HB}^2$.

3. Le reste de la démonstration est perdu. On peut toutefois l'achever comme suit en notations usuelles : Il s'agit, d'après l'énoncé, de démontrer la relation suivante : $\frac{\text{segment sphérique } BA\Delta}{\text{cône } BA\Delta} = \frac{\frac{1}{2}A\Gamma + H\Gamma}{H\Gamma}$. Au point où le texte fait défaut, on est arrivé à la relation : $\frac{\text{cyl. } \Phi\Lambda}{\text{cône } EAZ + \text{segt. sph. } BA\Delta} = \frac{\Theta A}{AX} = \frac{A\Gamma}{\frac{1}{2}AH} = \frac{2A\Gamma}{AH}$ (I). Or, on a : $\frac{\text{cyl. de base } EZ}{\text{cyl. } \Phi\Lambda} = \frac{\overline{HZ}^2}{\overline{H\Lambda}^2}$, et l'on a : cylindre de base EZ = 3 cônes EAZ; donc : $\frac{\text{cône } EAZ}{\text{cyl. } \Phi\Lambda} = \frac{\overline{HZ}^2}{3\overline{H\Lambda}^2}$. Or, par similitude de triangles, dont l'un a les côtés de

Digitized by Google

PROPOSITION VIII.

Au reste, l'on perçoit aussi, de la même manière, par cette méthode, que le rapport de tout segment de sphéroïde, découpé par un plan perpendiculaire à l'axe, au cône ayant même base et même axe que le segment, est identique au rapport de la somme du demi-axe du sphéroïde et de l'axe du segment opposé (1) à l'axe de ce segment opposé (2).

PROPOSITION IX.

Le centre de gravité de tout segment de sphère est situé sur la droite qui, constituant l'axe du segment, est divisée de telle sorte que le rapport de la partie se trouvant du côté du sommet du segment à la partie restante soit le même que le rapport de la somme de l'axe du segment et du quadruple de l'axe compris dans le segment opposé à la somme de l'axe du segment et du double de l'axe compris dans le segment opposé (3).

. . . . . .

---

l'angle droit égaux, on a : $HZ = AH$, et l'on a posé : $H\Lambda = A\Gamma$; donc : $\frac{\text{cône } EAZ}{\text{cyl. } \Phi\Lambda} = \frac{\overline{AH}^2}{3\overline{A\Gamma}^2}$ (II).

Combinant (I) et (II), on aura : $\frac{\text{cône } EAZ}{\text{cône } EAZ + \text{segt. sph. } BA\Delta} = \frac{2AH}{3A\Gamma}$, d'où : $\frac{\text{cône } EAZ}{\text{cône } EAZ + \text{segt. sph. } BA\Delta - \text{cône } EAZ} = \frac{\text{cône } EAZ}{\text{segt. sph. } BA\Delta} = \frac{2AH}{3A\Gamma - 2AH}$, (III).

D'autre part, on a : $\frac{\text{cône } BA\Delta}{\text{cône } EAZ} = \frac{\overline{HB}^2}{\overline{HZ}^2}$. Or, $\overline{HB}^2 = AH \times H\Gamma$, et $HZ = AH$; donc : $\frac{\text{cône } BA\Delta}{\text{cône } EAZ} = \frac{H\Gamma}{AH}$, (IV). Combinant (III) et (IV), il vient : $\frac{\text{segt. sph. } BA\Delta}{\text{cône } BA\Delta} = \frac{3A\Gamma - 2AH}{2H\Gamma}$, d'où, observant que $AH = A\Gamma - H\Gamma$: $\frac{\text{segment sph. } BA\Delta}{\text{cône } BA\Delta} = \frac{A\Gamma + 2H\Gamma}{2H\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}A\Gamma + H\Gamma}{H\Gamma}$.

C. q. f. d.

1. τοῦ ἀντικειμένου τμήματος, littéralement : du segment placé d'une manière opposée, c'est-à-dire du segment complémentaire au segment considéré.

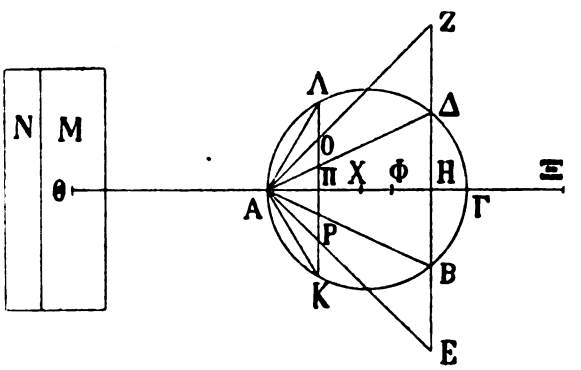
2. Cette proposition, qui généralise la proposition précédente, n'est pas accompagnée de sa démonstration mécanique, laquelle serait, du reste, analogue à celle de la proposition VII. Voir la démonstration géométrique au livre *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, propositions XXIX et XXXI.

3. L'énoncé de cette proposition fait défaut dans le texte du palimpseste ; mais il a été reconstitué dans l'édition critique de Heiberg, par analogie avec l'énoncé de la proposition X suivante, relative au cas plus général de l'ellipsoïde de révolution. (Cfr. *loc. cit.*, vol. II, p. 474).

Digitized by Google

. . . . . .

. . . (1), soit BΔ la section du plan qui découpe le segment, et soit la droite ΓA un diamètre, perpendiculaire à la droite BΔ, coupant cette dernière au point H. La droite AH sera donc l'axe du segment dont le sommet est le point A, et la droite HΓ sera l'axe du segment opposé. Divisons la droite AH en un point X, tel que AX soit à XH comme AH,augmenté du quadruple de HΓ, est à AH,augmenté du double de HΓ. Je dis que le point X est le centre de gravité du segment dont le sommet est le point A . . . .



. . . . . .

. . . . . (2). Prolongeons la droite AΓ; soit la droite AΘ égale à la droite AΓ, la droite ΓΞ égale au rayon du cercle, et imaginons que la droite ΓΘ soit un levier dont le point A est le milieu. En outre, décrivons un cercle de centre H et de rayon égal à la droite AH dans le plan qui découpe le segment, et, sur ce cercle, construisons un cône ayant le point A comme sommet. Soient AE, AZ les côtés de ce cône, et menons une droite KΛ, parallèle quelconque à la droite EZ, rencontrant la périphérie du segment aux points K, Λ, les côtés du cône AEZ aux points P, O, et la droite AΓ au point Π. Dès lors, puisque le carré de KA est au carré de AΠ comme AΓ est à AΠ, que les carrés des droites AΠ, ΠK valent le carré de la droite KA, que le carré de ΠO équivaut au carré de AΠ, et que, de plus, le carré de EH équivaut au carré de AH, il s'ensuit que les carrés de KΠ, ΠO sont au carré de ΠO comme ΓA est à AΠ. Or, le cercle décrit autour du diamètre KΛ, pris avec le cercle décrit autour du diamètre OP, est au cercle décrit autour du diamètre OP

1. La première phrase du texte de la démonstration fait défaut. Comme elle est relative aux constructions de la figure, on peut la rétablir ainsi : Soit une sphère dont on sépare un segment par un plan. Coupons cette sphère par un autre plan passant par le centre, perpendiculaire au plan sécant, et déterminant le cercle ABΓΔ comme section...

2. Lacune d'une étendue d'environ quarante mots, mais parsemée de vingt-et-un fragments de mots qui ne permettent aucune reconstitution acceptable.

Digitized by Google

comme les carrés de KΠ, ΠO sont au carré de ΠO, tandis que la droite ΓA est égale à la droite AΘ ; par conséquent, le cercle de diamètre KΛ, pris avec le cercle de diamètre OP, est au cercle de diamètre OP comme ΘA est à AΠ (1). Dès lors, puisque AΘ est à ΠA comme les cercles de diamètres KΛ, OP sont au cercle de diamètre OP, déplaçons le cercle de diamètre OP, et disposons-le au point Θ sur le levier de manière que ce point Θ soit son centre de gravité ; il en résulte que le cercle décrit autour du diamètre KΛ, pris avec le cercle décrit autour du diamètre OP, laissés en place, est au cercle décrit autour du diamètre OP, déplacé et disposé au point Θ sur le levier de manière que ce point Θ soit son centre de gravité, comme ΘA est à AΠ. En conséquence, les cercles situés dans le segment BAΔ et dans le cône AEZ feront équilibre autour du point A au cercle situé dans le cône AEZ. Et pareillement, tous les cercles situés dans le segment BAΔ et dans le cône AEZ, restés en place, feront équilibre autour du point A à tous les cercles situés dans le cône AEZ, déplacés et disposés au point Θ du levier de manière que le point Θ soit leur centre de gravité. Donc, le segment de sphère ABΔ et le cône AEZ, restés en place, feront aussi équilibre autour du point A au cône EAZ, déplacé et disposé au point Θ sur le levier de manière que ce point Θ soit son centre de gravité. Soit maintenant un cylindre MN équivalent au cône ayant comme base le cercle décrit autour du diamètre EZ et comme sommet le point A, et divisons la droite AH au point Φ, de manière que la droite AH soit quadruple de la droite ΦH. Le point Φ est donc le centre de gravité du cône EAZ, comme nous l'avons écrit au début (2). Coupons ensuite le cylindre MN par un plan perpendiculaire, de manière que le cylindre M fasse équilibre au cône EAZ. Dès lors, puisque le cône EAZ et le seg-

1. Dans le demi-cercle AKΓ on a : $\overline{KA}^2 = A\Pi \times A\Gamma$, d'où, comme le texte : $\frac{\overline{KA}^2}{\overline{A\Pi}^2} = \frac{A\Gamma}{A\Pi}$, d'où, observant que $\overline{KA}^2 = \overline{A\Pi}^2 + \overline{\Pi K}^2$, et que la construction HZ = HE = AH donne : AΠ = ΠO, il vient : $\frac{\overline{\Pi O}^2 + \overline{\Pi K}^2}{\overline{\Pi O}^2} = \frac{A\Gamma}{A\Pi}$. Or, on a : $\frac{\text{cercle diam. } K\Lambda + \text{cercle diam. } OP}{\text{cercle diam. } OP} = \frac{\overline{\Pi O}^2 + \overline{\Pi K}^2}{\overline{\Pi O}^2}$; donc, en observant que ΘA = AΓ, il vient, comme le texte : $\frac{\text{cercle diam. } K\Lambda + \text{cercle diam. } OP}{\text{cercle diam. } OP} = \frac{\Theta A}{A\Pi}$.

2. Voir lemme X et note.

Digitized by Google

ment ABΔ, laissés en place, font équilibre au cône EAZ, déplacé et disposé au point Θ du levier de manière que le point Θ soit son centre de gravité ; que le cylindre MN équivaut au cône EAZ, que les cylindres M, N sont disposés l'un et l'autre au point Θ, et que le cylindre MN fait équilibre à la fois au segment et au cône, le cylindre N fera également équilibre au segment sphérique autour du point A. D'autre part, ΞH est à HΓ comme le segment de sphère BAΔ est au cône dont la base est le centre décrit autour du diamètre BΔ, et dont le sommet est le point A ; car cela a été démontré précédemment (1). De plus, le cercle décrit autour du diamètre BΔ est au cercle décrit autour du diamètre EZ comme le cône BAΔ est au cône EAZ, tandis que le carré de BH est au carré de HE comme le premier cercle est au second. Enfin, le carré de BH équivaut au rectangle sous ΓH, HA, tandis que le carré de HE est égal au carré de HA, et que ΓH est à HA comme le rectangle sous ΓH, HA est au carré de HA. En conséquence, ΓH est à HA comme le cône BAΔ est au cône EAZ (2). Or, on a démontré que ΓH est aussi à HΞ comme le cône BAΔ est au segment BAΔ ; donc, par raison d'identité, ΞH est à HA comme le segment BAΔ est au cône EAZ (3). D'autre part, puisque la droite HA, augmentée du quadruple de HΓ, est à la droite AH, augmentée du double de HΓ, comme la droite AX est à la droite XH, par inversion, le double de la droite ΓH, augmenté de HA, sera au quadruple de la droite ΓH, augmenté de HA, comme la droite HX est à la droite XA, et, par composition, le sextuple de la droite ΓH, augmenté du double de HA, sera à la droite HA, augmentée du quadruple de HΓ, comme la droite HA est à la droite AX (4). De

1. En observant que l'on a posé : ΓΞ = rayon de la sphère, la proposition VII donne : $\frac{\Gamma\Xi + H\Gamma}{H\Gamma} = \frac{\Xi H}{H\Gamma} = \frac{\text{segment sphérique BA}\Delta}{\text{cône BA}\Delta}$.

2. On a : $\frac{\overline{BH}^2}{\overline{HE}^2} = \frac{\text{cercle B}\Delta}{\text{cercle EZ}} = \frac{\text{cône BA}\Delta}{\text{cône EAZ}}$, d'où, observant que $\Gamma H \times HA = \overline{BH}^2$, et que HA = HE, il vient, comme le texte : $\frac{\Gamma H \times HA}{\overline{HA}^2} = \frac{\Gamma H}{HA} = \frac{\text{cône BA}\Delta}{\text{cône EAZ}}$.

3. La combinaison des relations des deux notes précédentes donne, comme le texte : $\frac{\Xi H}{HA} = \frac{\text{segment sphér. BA}\Delta}{\text{cône EAZ}}$.

4. La proposition étant supposée résolue et le point X trouvé, l'énoncé donne : $\frac{HA + 4H\Gamma}{HA + 2H\Gamma} = \frac{AX}{XH}$, relation que le texte reprend sous la forme : $\frac{2H\Gamma + HA}{4H\Gamma + HA} = \frac{XH}{AX}$, d'où : $\frac{2H\Gamma + HA + 4H\Gamma + HA}{4H\Gamma + HA} = \frac{XH + AX}{AX}$, ou, comme le texte : $\frac{6H\Gamma + 2HA}{HA + 4H\Gamma} = \frac{HA}{AX}$.

Digitized by Google

plus, HΞ vaut la quatrième partie du sextuple de HΓ augmenté du double de HA, tandis que ΓΦ vaut la quatrième partie du quadruple de HΓ augmenté de HA; car cela est manifeste(1). Donc, la droite ΞH est à la droite ΓΦ comme la droite HA est à la droite AX ; en sorte que la droite ΓΦ est aussi à la droite XA comme la droite ΞH est à la droite HA. Or, on a démontré aussi que le segment, dont le sommet est le point A et la base le cercle décrit autour du diamètre BΔ, est au cône, dont le sommet est le point A et la base le cercle décrit autour du diamètre EZ, comme la droite ΞH est à la droite HA ; par conséquent, la droite ΓΦ est à la droite XA comme le segment BAΔ est au cône EAZ (2). Et puisque le cylindre M fait équilibre au cône EAZ autour du point A, que le point Θ est le centre de gravité du cylindre, et que le point Φ est celui du cône EAZ, il s'ensuit que ΘA sera à AΦ, c'est-à-dire ΓA à AΦ, comme le cône EAZ est au cylindre M. Or, le cylindre MN équivaut au cône EAZ ; donc, par division, la droite AΓ est à la droite ΓΦ comme le cylindre MN est au cylindre N. De plus, le cylindre MN équivaut au cône EAZ ; donc, la droite ΓA est à la droite ΓΦ, c'est-à-dire la droite ΘA à la droite ΓΦ, comme le cône EAZ est au cylindre N (3). Or, on a démontré aussi que la droite ΓΦ est à la droite XA comme le segment BAΔ est au cône EAZ ; donc, par raison d'identité, la droite ΘA sera à la droite AX comme le segment BAΔ est au cylindre N (4). D'autre part, on a démontré que le segment BAΔ fait équilibre au cylindre N autour du point A, tandis que le point Θ est le centre de gravité du cylindre N;

---

1. On a posé : $\Gamma\Xi = \frac{1}{2}A\Gamma$, d'où : $\Xi H = H\Gamma + \Gamma\Xi = H\Gamma + \frac{1}{2}A\Gamma = H\Gamma + \frac{1}{2}(H\Gamma + HA) = \frac{3}{2}H\Gamma + \frac{1}{2}HA = \frac{1}{4}(6H\Gamma + 2HA)$. D'autre part, $H\Phi = \frac{1}{4}HA$, d'où : $\Gamma\Phi = H\Gamma + H\Phi = H\Gamma + \frac{1}{4}HA = \frac{1}{4}(4H\Gamma + HA)$.

2. Comparant les relations de la note précédente avec celles de la note avant-précédente, on a : $\frac{\Xi H}{\Gamma\Phi} = \frac{HA}{AX}$, d'où, comme le texte : $\frac{\Gamma\Phi}{AX} = \frac{\Xi H}{HA}$, d'où, comparant avec la relation de la note antépénultième, on a : $\frac{\Gamma\Phi}{AX} = \frac{\text{segment sphér. } BA\Delta}{\text{cône EAZ}}$.

3. On a : $\frac{\Theta A}{A\Phi} = \frac{\Gamma A}{A\Phi} = \frac{\text{cône EAZ}}{\text{cyl. M}}$. Or, on a pris : cylindres M + N = cône EAZ; donc : $\frac{\Gamma A}{A\Phi} = \frac{\text{cyl. M} + \text{N}}{\text{cyl. M}}$, d'où : $\frac{\Gamma A}{\Gamma A - A\Phi} = \frac{\text{cyl. M} + \text{N}}{\text{cyl. M} + \text{N} - \text{cyl. M}}$, ou : $\frac{\Gamma A}{\Gamma\Phi} = \frac{\text{cyl. M} + \text{N}}{\text{cyl. N}}$, d'où, observant que cyl. M + N = cône EAZ, et que ΓA = ΘA, il vient, comme le texte : $\frac{\Theta A}{\Gamma\Phi} = \frac{\text{cône EAZ}}{\text{cyl. N}}$.

4. Combinant les relations des deux notes précédentes, il vient, comme le texte : $\frac{\Theta A}{AX} = \frac{\text{segment sphér. } BA\Delta}{\text{cyl. N}}$.

Digitized by Google

par conséquent, le point X est aussi le centre de gravité du segment BAΔ (1).

PROPOSITION X.

On percevra aussi, de la même manière que pour ce qui précède, que le centre de gravité de tout segment de sphéroïde est situé sur la droite qui, constituant l'axe du segment, est divisée de telle sorte que le rapport de la partie se trouvant du côté du sommet du segment à la partie restante soit le même que le rapport de la somme de l'axe du segment et du quadruple de l'axe du segment opposé à la somme de l'axe du segment et du double de l'axe compris dans le segment opposé.

PROPOSITION XI.

Au reste, l'on percevrait encore, au moyen de notre méthode, que le rapport de tout segment d'hyperboloïde au cône ayant même base et même axe que le segment est identique au rapport de la somme de l'axe du segment et du triple de la droite ajoutée à l'axe (2) à la somme de l'axe du segment d'hyperboloïde et du double de la droite ajoutée à l'axe (3), tandis que le centre de gravité de l'hyperboloïde(4) est situé sur l'axe, divisé de telle sorte que le rapport de la partie se trouvant du côté du sommet du segment à la partie restante soit le même que le rapport de la somme du triple de l'axe et de l'octuple de la droite ajoutée à l'axe même de l'hyperboloïde augmenté du quadruple de la droite ajoutée à l'axe.

On pourrait percevoir ainsi encore beaucoup d'autres propositions,

---

1. Le point X étant le centre de gravité du segment sphérique, la relation qui, d'après l'énoncé de la proposition, détermine la situation de ce point est donc vraie. Archimède ne donne donc ici qu'une simple vérification mécanique d'une relation qu'il avait sans doute établie par une voie directe, mais dont on ne retrouve pas l'exposé dans ses ouvrages.

2. τῆς προσούσης τῷ ἄξονι, littéralement : de la (droite) ajoutée à l'axe, c'est-à-dire la partie de l'axe de l'hyperboloïde de révolution comprise entre son sommet et le sommet de son cône asymptote, ou le demi-axe transverse de l'hyperbole génératrice. (Voir le préambule du livre *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, et note).

3. Voir la démonstration géométrique de cette proposition au livre *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, proposition XXV.

4. C'est-à-dire du segment d'hyperboloïde.

Digitized by Google

que nous laissons exprès, puisque notre méthode est suffisamment exposée par ce que nous en avons déjà dit.

PROPOSITION XII.

On perçoit par cette méthode que, si dans un prisme droit à bases carrées l'on inscrit un cylindre ayant ses bases dans les carrés opposés et sa surface tangente aux quatre plans restants, et si l'on mène un plan par le centre d'un cercle de base du cylindre et par un côté du carré opposé, la figure découpée par le plan ainsi mené (1) est la sixième partie du prisme entier. La chose une fois reconnue, nous reviendrons à la démonstration géométrique de cette proposition (2).

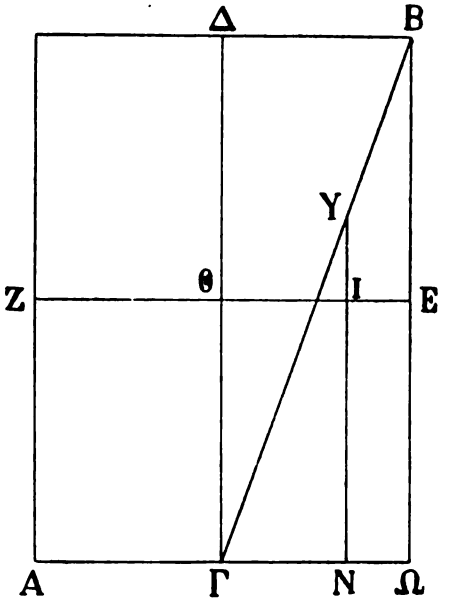
Imaginons un prisme droit, ayant les bases carrées, et un cylindre inscrit dans ce prisme de la manière que nous venons de dire. Ce prisme étant coupé par un plan passant par l'axe, perpendiculaire au plan qui découpe le segment du cylindre, soit le parallélogramme AB la section du prisme contenant le cylindre, et soit la droite BΓ la section commune du plan qui découpe le segment du cylindre et du plan mené par l'axe perpendiculairement au plan qui découpe le segment du cylindre. Que la droite ΓΔ soit l'axe du prisme et du cylindre; que la droite EZ coupe cette dernière droite à angles droits, en deux parties égales, et, par la droite EZ, élevons un plan perpendiculaire à la droite ΓΔ. Ce plan déterminera un carré comme section dans le prisme, et un cercle comme section dans le cylindre. Que la section du prisme soit donc le carré MN, et la section du cylindre le cercle ΞOΠP. Que ce cercle soit tangent aux côtés du carré aux points Ξ, O, Π, P, et que la droite KΛ soit la section commune du plan qui découpe le segment du cylindre et du plan mené par la droite EZ, perpendiculairement à l'axe du cylindre. La droite ΠΘΞ coupe cette droite KΛ en deux parties égales. Menons maintenant, dans le demi-cercle OΠP, une droite ΣT perpendiculaire à la droite ΠX, et étendons, de part et d'autre du plan contenant le cercle ΞOΠP, un plan mené par la droite ΣT, perpendiculairement à la droite ΞΠ. Ce plan déterminera comme section, dans le demi-cylindre dont la base est le

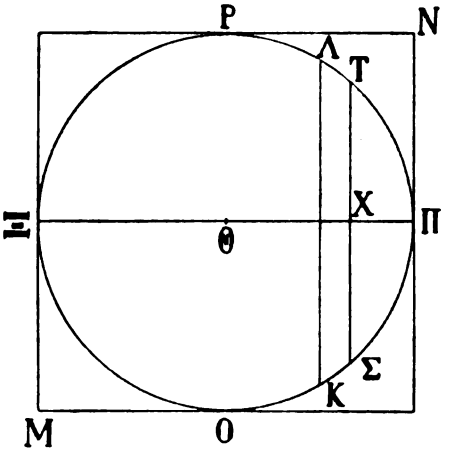
1. C'est-à-dire la figure qui, découpée dans le cylindre, est appelée sabot ou onglet.

2. Cette démonstration géométrique est donnée à la proposition XV.

Digitized by Google

demi-cercle OΠ et dont la hauteur est l'axe du prisme, un parallélogramme dont un côté est égal à la droite ΣT, et dont l'autre est égal au côté du cylindre (1) ; il déterminera aussi comme section, dans le segment découpé du cylindre, un parallélogramme dont un côté sera égal à la droite ΣT, et dont l'autre sera égal à la droite NY. Que la droite NY soit menée parallèlement à la droite BΩ, dans le parallélogramme ΔE (2), de manière à découper une droite EI égale à la droite ΠX. Dès lors, puisque EΓ est un parallélogramme, que la droite NI est parallèle à la droite ΘΓ, que les droites EΘ, ΓB sont menées au travers de ces dernières, ΩΓ est à ΓN, c'est-à-dire BΩ est à YN, comme EΘ est à ΘI. Or, le parallélogramme déterminé dans le demi-cylindre est à celui qui est déterminé dans le segment découpé du cylindre comme BΩ est à YN ; car la droite ΣT est un côté commun aux deux parallélogrammes. De plus, la droite EΘ est égale à la droite ΘΠ, tandis que la droite IΘ est égale à la droite XΘ. Enfin, puisque la droite ΠΘ est égale à la droite ΘΞ, il s'ensuit que le parallélogramme déterminé dans le demi-cylindre est à celui qui est déterminé dans le segment découpé du cylindre comme ΘΞ est à ΘX (3).





1. τοῦ κυλίνδρου πλευρᾷ, littéralement : au côté du cylindre, c'est-à-dire à la trace ΩB de la surface latérale du cylindre sur le plan vertical AB.

2. Le texte dit défectueusement ΔE au lieu de ΔΩ ou de ΓB.

3. Les deux parallélogrammes ayant base commune sont entre eux comme leurs hauteurs : $\frac{\text{parallélogramme du demi-cylindre}}{\text{parallélogramme de l'onglet}} = \frac{\Omega B}{NY}$. Or, on a : $\frac{\Omega B}{NY} = \frac{\Omega\Gamma}{N\Gamma} = \frac{E\Theta}{I\Theta}$,

Digitized by Google

Imaginons que le parallélogramme situé dans le segment (1) soit déplacé et disposé au point Ξ, de manière que ce point Ξ soit son centre de gravité, et imaginons que la droite ΠΞ soit un levier dont le point Θ est le milieu. Dès lors, le parallélogramme situé dans le demi-cylindre, restant en place, fera équilibre, autour du point Θ, au parallélogramme déterminé dans le segment découpé du cylindre, déplacé et disposé au point Ξ du levier, de manière que ce point Ξ soit son centre de gravité. Et puisque le point X est le centre de gravité du parallélogramme déterminé dans le demi-cylindre (2), tandis que le point Ξ est le centre de gravité du parallélogramme déterminé dans le segment découpé qui a été déplacé, et que le rapport de ΞO à ΘX est le même que celui du parallélogramme, que nous avons dit avoir le point X comme centre de gravité, au parallélogramme que nous avons dit avoir le point Ξ comme centre de gravité, il s'ensuit que le parallélogramme, dont le centre de gravité est X, fera équilibre autour du point Θ au parallélogramme dont le centre de gravité est Ξ. On démontrera encore de la même manière que, si une autre droite quelconque est menée perpendiculairement à la droite ΠΘ dans le demi-cercle OΠP, et si, par la droite ainsi menée, on élève, perpendiculairement à la droite ΠΘ, un plan que l'on étend de part et d'autre du plan dans lequel est situé le cercle ΞOΠP, le parallélogramme déterminé dans le demi-cylindre, restant en place, fera équilibre, autour du point Θ, au parallélogramme déterminé dans le segment découpé du cylindre, déplacé et disposé au point Ξ du levier, de manière que ce point Ξ soit son centre de gravité. En conséquence, tous les parallélogrammes déterminés dans le demi-cylindre, restés en place, feront aussi équilibre, autour du point Θ, à tous les parallélogrammes déterminés dans le segment découpé du cylindre, déplacés et disposés au point Ξ du levier ; en sorte que le demi-cylindre, resté en place, fera aussi équilibre autour du point Θ au segment découpé, déplacé et disposé au point Ξ du levier, de manière que ce point Ξ soit son centre de gravité.

---

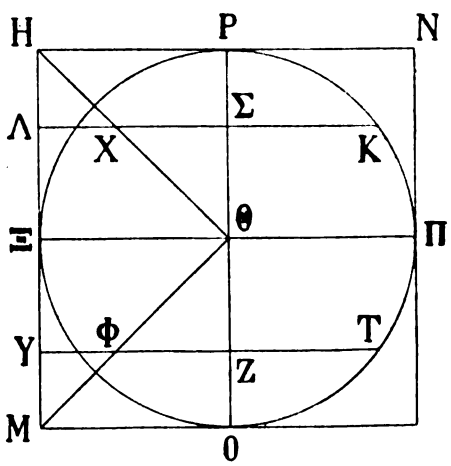
d'où, en observant que $E\Theta = \Pi\Theta = \Theta\Xi$, et $I\Theta = X\Theta$, il vient, comme le texte : $\frac{\text{parallélogramme du demi-cylindre}}{\text{parallélogramme de l'onglet}} = \frac{\Theta\Xi}{X\Theta}$.

1. Sous-entendu : du cylindre, c'est-à-dire le parallélogramme situé dans l'onglet.
2. Voir lemme VI.

Digitized by Google

PROPOSITION XIII.

Soient de nouveau le parallélogramme MN (1) et le cercle ΞΟΠΡ. Menons les droites de jonction ΘM, ΘH ; menons par ces droites des plans perpendiculaires au plan dans lequel est situé le demi-cercle ΟΠΡ, et étendons les dits plans de part et d'autre (2). Dès lors, on aura un prisme de base telle que le triangle ΘMN et de hauteur égale à l'axe du cylindre ; prisme qui est la quatrième partie du prisme entier enveloppant le cylindre. Menons, dans le demi-cercle ΟΠΡ et dans le carré MN, des droites ΚΛ, ΤΥ équidistantes de la droite ΠΞ ; elles couperont la périphérie du demi-cercle ΟΠΡ aux points Κ, Τ, le diamètre ΟΡ aux points Σ, Ζ, et les droites ΘH, ΘM aux points Φ, Χ. Par les droites ΚΛ, ΤΥ élevons des plans perpendiculaires à la droite ΟΡ, et étendons-les de part et d'autre du plan dans lequel se trouve le cercle ΘΟΠΡ. L'un de ces plans déterminera donc comme section, dans le demi-cylindre dont la base est le demi-cercle ΟΠΡ et la hauteur celle du cylindre, un parallélogramme dont l'un des côtés est égal à la droite ΚΣ et l'autre égal à l'axe du cylindre ; il déterminera, de la même manière, dans le prisme ΘHM, un parallélogramme dont un côté sera égal à la droite ΛΧ et l'autre côté égal à l'axe. Par la même raison, on aura, dans le même demi-cylindre, un parallélogramme dont un côté est égal à la droite ΤΖ, l'autre côté égal à l'axe du cylindre ; tandis que, dans le prisme, on aura un parallélogramme dont un côté est égal à la droite ΥΦ et l'autre côté égal à l'axe du cylindre. . . . . .



. . . . . .

1. Ce parallélogramme MN est un carré, le même qui, dans la proposition précédente, a été déterminé par un plan coupant le prisme à mi-hauteur, perpendiculairement à l'axe. La proposition XIII constitue d'ailleurs la suite de la proposition XII, et le texte ne l'affecte, peut-être, d'un chiffre ordinal que parce que l'on considère une construction nouvelle.

2. C'est-à-dire au-dessus et au-dessous du plan du demi-cercle ΟΠΡ.

Digitized by Google

. . . . . .

. . . . . (1).

1. Le reste de cette démonstration est perdu. Toutefois, ses prémisses, appuyées sur les constructions de la figure, permettent de l'achever comme suit en notations usuelles :

Il faut démontrer : segment cylindre, c'est-à-dire onglet $= \frac{1}{6}$ prisme circonscrit au cylindre. D'après les constructions de la proposition précédente, la section carrée MN est située à mi-hauteur du prisme circonscrit au cylindre. Donc, dans le demi-cylindre, le parallélogramme de base ΣK, perpendiculaire au plan MN, a son centre de gravité au milieu de ΣK, c'est-à-dire à une distance $\frac{1}{2}\Sigma K$ du point Σ. De même, dans le prisme, dont la base est le triangle HΘM, le parallélogramme de base ΛX a son centre de gravité au milieu de ΛX, c'est-à-dire à une distance du point Σ égale à $\frac{1}{2}\Lambda X + X\Sigma = \frac{1}{2}(\Lambda\Sigma - X\Sigma) + \Sigma X = \frac{1}{2}(\Lambda\Sigma + \Sigma X)$. Ces deux parallélogrammes s'équilibreront autour du point Σ si leurs centres de gravité sont placés à des distances du point Σ inversement proportionnelles aux poids ou aux aires de ces parallélogrammes. Or, il en est ainsi ; car, observant que, par similitude de triangles, $\Theta\Sigma = \Sigma X$, on a successivement : $\overline{\Sigma K}^2 = \overline{\Theta K}^2 - \overline{\Theta\Sigma}^2 = \overline{\Lambda\Sigma}^2 - \overline{\Sigma X}^2 = (\Lambda\Sigma + \Sigma X)(\Lambda\Sigma - \Sigma X) = (\Lambda\Sigma + \Sigma X)\Lambda X$, d'où : $\frac{\Lambda X}{\Sigma K} = \frac{\Sigma K}{\Lambda\Sigma + \Sigma X} = \frac{\frac{1}{2}\Sigma K}{\frac{1}{2}(\Lambda\Sigma + \Sigma X)}$; relation dans laquelle les poids ou aires de ces deux parallélogrammes de même hauteur sont représentés par leurs bases ΛX, ΣK.

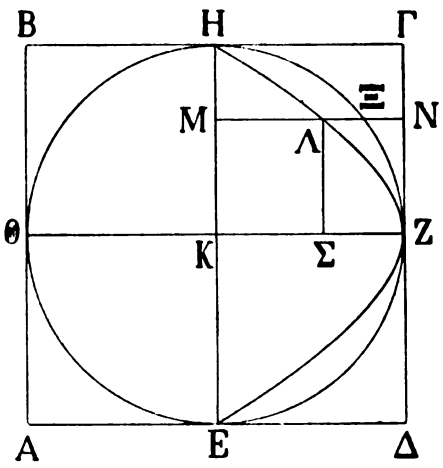
La même relation existera, par symétrie, pour les parallélogrammes de bases ZT, YΦ, et elle existera pour l'ensemble des parallélogrammes qui remplissent le volume du demi-cylindre et celui du prisme triangulaire. Ces deux solides, maintenus à leurs centres de gravité respectifs, s'équilibreront donc autour du point Θ. Or, le centre de gravité du prisme triangulaire est situé sur ΞΘ, à une distance $\frac{2}{3}$ ΘΞ du point Θ, tandis que le centre de gravité du demi-cylindre est situé sur ΘΠ, en un point qu'il n'importe pas de connaître ici. Or, on a vu, proposition XII, que le demi-cylindre, restant en place, fait équilibre autour du point Θ au segment de cylindre, ou onglet, dont le centre de gravité a été déplacé en Ξ. Par conséquent, si l'on dispose l'onglet sur l'autre bras de levier, de manière que son centre de gravité soit placé à la même distance de Θ, c'est-à-dire au point Π, l'onglet fera équilibre au prisme triangulaire, et l'on aura : $\frac{\text{onglet}}{\text{prisme HΘM}} = \frac{\frac{2}{3}O\Xi}{\Theta\Pi} = \frac{\frac{2}{3}\Theta\Pi}{\Theta\Pi} = \frac{2}{3}$, d'où : onglet $= \frac{2}{3}$ prisme. Or, prisme HΘM $= \frac{1}{4}$ prisme entier MN ; donc : onglet $= \frac{1}{6}$ prisme entier circonscrit au cylindre. C. q. f. d.

Heath a fait remarquer (Cfr. *The method of Archimedes*, Cambridge, 1912, p. 40), que l'on peut déduire aisément de cette proposition la détermination du centre de gravité du demi-cercle et, partant, du demi-cylindre. En effet, l'équilibre entre le demi-cylindre et le prisme triangulaire autour du point Θ subsiste pour leurs sections droites, demi-cercle et triangle, et l'équation d'équilibre donne : $\frac{\text{demi-cercle OΠP}}{\text{triangle HΘM}} = \frac{\frac{2}{3}\Theta\Xi}{x} = \frac{2\Theta\Pi}{3x}$, en désignant par x la distance du centre de gravité du demi-cercle au point Θ. Or, demi-cercle et triangle sont entre eux comme leurs poids ou aires : $\frac{\text{demi-cercle}}{\text{triangle}} = \frac{\frac{1}{2}\pi\overline{\Theta\Pi}^2}{\overline{\Theta\Xi}^2} = \frac{\frac{1}{2}\pi\overline{\Theta\Pi}^2}{\overline{\Theta\Pi}^2} = \frac{1}{2}\pi$; donc : $\frac{2\Theta\Pi}{3x} = \frac{1}{2}\pi$, d'où : $x = \frac{4}{3\pi}\Theta\Pi$.

Digitized by Google

PROPOSITION XIV (1).

Soit un prisme droit à bases carrées, et soit le carré ABΓΔ l'une de ses bases. Inscrivons un cylindre dans ce prisme, et que la base de ce cylindre soit le cercle EZHΘ, qui touche les côtés du carré ABΓΔ aux points E, Z, H, Θ. Menons un plan par le centre de ce cercle et par le côté du carré qui, situé dans le plan opposé à ABΓΔ, correspond au côté ΓΔ. Ce plan découpera du prisme entier un autre prisme, qui sera le quart du prisme entier, et sera délimité par trois parallélogrammes et par deux triangles opposés l'un à l'autre. Inscrivons une parabole dans le demi-cercle EZH, et soit ZK son diamètre. Menons, dans le parallélogramme ΔH, une droite quelconque MN parallèle à la droite KZ ; elle coupera la périphérie du demi-cercle au point Ξ, celle de la parabole au point Λ, et le rectangle sous MN, NΛ sera équivalent au carré de NZ ; car cela est manifeste (2). Il en résulte donc que le carré de KH sera au carré de ΛΣ comme MN est à NΛ (3). Élevons maintenant, par la droite MN, un plan perpendiculaire à la droite EH ; ce plan déterminera donc



1. Variante de la démonstration de la proposition XII-XIII par une méthode autre que la méthode mécanique.

2. Archimède invoque ici une relation dont on ne trouve pas la démonstration dans ses œuvres, mais qui avait probablement été déjà démontrée par ses prédécesseurs. En tout cas, Apollonius démontre, plus tard (*Des Coniques*, livre I, prop. 11), que le rayon KZ du cercle vaut le double paramètre de la parabole HZE inscrite dans le demi-cercle. L'équation de la parabole $y^2 = 2px$ devient donc ici $\overline{\Lambda\Sigma}^2 = KZ \times \Sigma Z$, ou $\overline{NZ}^2 = MN \times \Lambda N$.

D'ailleurs, considérant que les carrés des ordonnées sont proportionnels aux abscisses (*De la Quadrature de la Parabole*, prop. III), on aurait directement : $\frac{\overline{KH}^2}{\overline{\Lambda\Sigma}^2} = \frac{KZ}{\Sigma Z}$, d'où : $\overline{\Lambda\Sigma}^2 = \frac{\overline{KH}^2 \times \Sigma Z}{KZ} = KH \times \Sigma Z$, ou $\overline{NZ}^2 = MN \times N\Lambda$.

3. La relation de la note précédente donne : $\frac{\overline{MN}^2}{\overline{NZ}^2} = \frac{MN}{N\Lambda}$, ou : $\frac{\overline{KH}^2}{\overline{\Lambda\Sigma}^2} = \frac{MN}{N\Lambda}$; relation qui pouvait se déduire directement de la proportion de la note précédente sans passer par la considération d'une équivalence d'aires.

Digitized by Google

comme section, dans le prisme découpé du prisme entier, un triangle rectangle dont un côté adjacent à l'angle droit sera la droite MN, dont l'autre côté, situé dans le plan ΓΔ et élevé perpendiculairement à la droite ΓΔ au point N, sera égal à l'axe du cylindre, et dont l'hypoténuse sera située dans le plan sécant même. D'autre part, ce plan déterminera comme section, dans le segment qui a été découpé dans le cylindre par le plan mené par la droite EH et par le côté du carré opposé à ΓΔ, un triangle rectangle dont un côté adjacent à l'angle droit sera la droite MΞ, dont l'autre côté sera situé dans la surface du cylindre et élevé perpendiculairement au plan KN au point Ξ, et dont l'hypoténuse sera dans le plan sécant. En conséquence, de la même manière, puisque le rectangle délimité sous MN, MΛ équivaut au carré de MΞ, chose manifeste (1), le carré de MN sera au carré de MΞ comme MN est à MΛ (2). Or, le triangle basé sur la droite MN, obtenu dans le prisme, est au triangle basé sur la droite MΞ, découpé dans le segment par la surface du cylindre, comme le carré de MN est au carré de MΞ ; par conséquent, le premier triangle sera à l'autre triangle comme la droite MN est à la droite MΛ (3). On démontrera semblablement que, si quelque autre droite est menée parallèlement à la droite KZ dans le parallélogramme circonscrit à la parabole, et si on élève, par la droite ainsi menée, un plan perpendiculaire à la droite EH, la droite menée parallèlement à la droite KZ, dans le parallélogramme ΔH, sera à la droite, découpée par la parabole EHZ et par le diamètre EH, comme le triangle déterminé dans le prisme est au triangle déterminé dans le segment découpé du cylindre. Dès lors, comme le parallélogramme est rempli de droites menées parallèlement à la droite KZ, et que le segment délimité par la parabole et

---

1. On a : $\overline{M\Xi}^2 = MH \times ME = (HK - KM)(HK + KM) = HK^2 - \overline{KM}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{NZ}^2$. Or (note pénultième) : $\overline{NZ}^2 = MN \times N\Lambda$; donc : $\overline{M\Xi}^2 = \overline{MN}^2 - MN \times N\Lambda = MN(MN - N\Lambda) = MN \times M\Lambda$.

2. La relation $\overline{M\Xi}^2 = MN \times M\Lambda$ de la note précédente donne : $\frac{\overline{MN}^2}{\overline{M\Xi}^2} = \frac{MN}{M\Lambda}$.

3. Les triangles basés, l'un sur MN dans le segment de prisme, l'autre sur MΞ dans le segment de cylindre ou onglet sont semblables ; ils sont donc entre eux comme les carrés des côtés homologues : $\frac{\text{triangle de base MN}}{\text{triangle de base M}\Xi} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{M\Xi}^2}$, d'où, en présence de la relation de la note précédente : $\frac{\text{triangle de base MN}}{\text{triangle de base M}\Xi} = \frac{MN}{M\Lambda}$.

Digitized by Google

par le diamètre est rempli de droites découpées dans ce segment (1),

. . . . . .

. . . . . .

. . , et toutes les droites situées dans le parallélogramme ΔH seront à toutes les droites situées entre la parabole et la droite EH comme tous les triangles situés dans le prisme sont à tous les triangles situés dans le segment découpé du cylindre. Or, le prisme se compose des triangles situés dans le prisme, le segment se compose des triangles situés dans le segment découpé du cylindre, le parallélogramme ΔH se compose des parallèles menées à la droite KZ dans le parallélogramme ΔH, et le segment de parabole se compose des droites situées entre la parabole et la droite EH ; par conséquent, le parallélogramme ΔH est au segment EZH, délimité par la parabole et par la droite EH, comme le prisme est au segment découpé par le cylindre. Or, le parallélogramme ΔH vaut une fois et demie le segment délimité par la parabole et par la droite EH ; car cela a été démontré dans les propositions données précédemment ; donc, le prisme vaut une fois et demie le segment découpé du cylindre (2) ; en sorte que le prisme est à trois comme le segment du cylindre est à deux. Or, le prisme entier, qui enveloppe le cylindre, est à douze comme le prisme est à trois, parce que l'un est le quart de l'autre ; par conséquent, le prisme entier est à douze comme le segment du cylindre est à deux ; en sorte que le segment découpé du cylindre vaut la sixième partie du prisme (3).

---

1. Le texte présente ici une lacune pouvant affecter une soixantaine de mots au plus ; elle est semée de mots et de parties de mots épars, et se termine par ce membre de phrase complet : « menées parallèlement à KZ dans le parallélogramme ΔH ». Cette lacune, dont la reconstitution est impossible, ne peut cependant plus comporter rien d'essentiel au point où en est arrivée la démonstration.

2. On a donc : $\frac{\text{parallélogr. } \Delta H}{\text{segment de parabole EZH}} = \frac{\text{segment de prisme}}{\text{segment de cylindre ou onglet}}$. Or, la proposition XXIV du livre *De la Quadrature de la Parabole* donne : segment de parabole EZH $= \frac{4}{3}$ triangle inscrit EZH, et l'on a : parallélogramme ΔH $= 2$ triangles EZH, d'où, comme le texte : parallélogramme ΔH $= \frac{3}{2}$ segment de parabole EZH ; donc, substituant dans la relation première, on a, comme le texte : segment de prisme $= \frac{3}{2}$ segment cylindre ou onglet.

3. La relation de la note précédente peut s'écrire, comme dans le texte : $\frac{\text{segment de prisme}}{3} = \frac{\text{segment cylindre}}{2}$. Or, prisme entier $= 4$ segments de prisme, d'où, comme le texte : $\frac{\text{prisme entier}}{12} = \frac{\text{segment de prisme}}{3}$; donc : $\frac{\text{prisme entier}}{12} = \frac{\text{segment de cylindre}}{2}$, d'où, comme le texte : segment de cylindre ou onglet $= \frac{1}{6}$ prisme entier.

On remarquera la manière, aussi élégante qu'imprévue, avec laquelle Archi-

Digitized by Google

PROPOSITION XV.

Soit un prisme ayant les bases carrées, dont l'une est le carré ABΓΔ. Inscrivons, dans ce prisme, un cylindre dont la base est le cercle EZH ; cercle qui touchera donc les côtés du carré aux points E, Z, H, Θ (1). Soit K le centre du cercle, et faisons passer un plan par le diamètre EH et par un côté . . . . . (2). Ce plan découpera un prisme dans le prisme entier, et un segment de cylindre (3) dans le cylindre. Dès lors, je dis qu'il peut être démontré que ce segment, découpé du cylindre par le plan ainsi mené, équivaut à la sixième partie du prisme entier.

Nous démontrerons d'abord qu'il est possible d'inscrire une figure solide dans le segment découpé du cylindre, et de lui en circonscrire une autre, composées de prismes ayant même hauteur et ayant des triangles semblables comme bases, de manière que la figure circonscrite excède la figure inscrite d'une grandeur moindre que toute grandeur donnée (4). . . . . .

---

mède fait intervenir ici son invention de la quadrature de la parabole dans la recherche de la cubature de l'onglet. Bien que cette proposition, relative au volume de l'onglet, diffère des deux propositions précédentes, en ce sens qu'elle abandonne la méthode mécanique comme étant moins rigoureuse, Archimède nous donne, dans la proposition suivante, une troisième démonstration par la méthode d'exhaustion qui lui est habituelle.

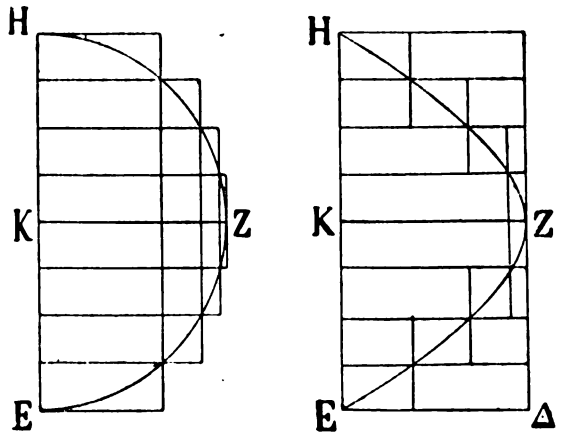
1. Voir figure relative à la proposition précédente.

2. Lacune de quelques mots pouvant être reconstituée comme suit d'après le texte de la proposition précédente décrivant la même figure : « du carré opposé correspondant au côté ΓΔ ».

3. C'est-à-dire un onglet.

4. Le texte de cette proposition présente ici une première et longue lacune, parsemée de cent vingt-deux mots, parties de mots et lettres isolées, défiant toute restauration. Toutefois, le passage manquant peut être rétabli, sinon dans sa forme, du moins dans son esprit, en s'en référant aux deux figures, et en s'inspirant des propositions XIX et XXV du livre *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, dont les démonstrations sont basées sur la méthode par exhaustion, annoncée par les prémisses de la démonstration. En effet, divisons le diamètre EH en un certain nombre de parties égales. Par les points de division menons des perpendiculaires à EH, par lesquelles nous faisons passer des plans perpendiculaires au plan de base du cylindre. Ces plans déterminent des triangles rectangles, dont l'hypoténuse est l'intersection du plan perpendiculaire et du plan sécant qui découpe l'onglet, dont un côté de l'angle droit est la perpendiculaire à EH, et dont le troisième côté est la trace du plan perpendiculaire sur la surface latérale du cylindre. Par ces traces à la surface du cylindre menons des plans perpendiculaires à la base du cylindre. On détermine ainsi deux séries de prismes de même hauteur, ayant comme bases les triangles semblables que nous venons de dire. L'ensemble des prismes d'une série constitue un solide circonscrit au cylindre, et les prismes de l'autre série

Digitized by Google



le prisme découpé par le plan oblique

constituent un solide inscrit. Or, chacun des prismes circonscrits équivaut à un prisme inscrit, exception faite pour les deux prismes qui ont base commune dans le plan vertical passant par KZ. Ces deux derniers prismes forment l'excédent de volume de la figure circonscrite sur la figure inscrite. Or, le diamètre EH peut être divisé en parties égales plus petites que toute grandeur donnée, et les plans verticaux peuvent donc être rapprochés à cette plus petite grandeur; par conséquent, les prismes de chaque série pourront différer entre eux d'un plus petit volume donné. Dès lors, les solides circonscrit et inscrit, constitués par l'ensemble des prismes de chaque série, pourront différer entre eux d'un plus petit volume donné.

Traçons maintenant, dans le demi-cercle HZE, la parabole HZE, dont le segment est limité par EH. Les deux séries de plans verticaux donnent, dans le plan du segment de parabole, des traces parallèles et perpendiculaires à EH. Ces traces forment deux séries de rectangles. L'ensemble des rectangles d'une série constitue une figure circonscrite à la parabole, et l'ensemble des rectangles de l'autre série une figure inscrite dans la parabole. Or, chacun des rectangles circonscrits équivaut à un rectangle inscrit, exception faite pour les deux rectangles qui ont le côté KZ commun. Ces deux derniers rectangles constituent l'excédent de l'aire de la figure circonscrite sur celle de la figure inscrite. En raisonnant comme plus haut, les aires circonscrite et inscrite pourront différer entre elles d'une plus petite aire donnée.

Dès lors, si l'onglet n'équivaut pas au sixième du prisme entier, on aura : onglet $\gtrless \frac{1}{6}$ prisme entier. Supposons d'abord : onglet $> \frac{1}{6}$ prisme entier. On aura donc (proposition XIV et note) : segment du prisme découpé par le plan oblique $< \frac{2}{3}$ onglet. Circonscrivons une figure solide à l'onglet, et inscrivons-lui-en une autre, de manière que l'excédent de volume de la première sur la seconde soit moindre que tout volume donné. On a démontré (prop. XIV et note) que l'on a : $\frac{\text{triangle MN}}{\text{triangle M}\Xi} = \frac{\text{MN}}{\text{M}\Lambda}$. Or, les prismes élémentaires, de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases, et l'on aura: $\frac{\text{prisme élém. du segment de prisme}}{\text{prisme élém. de la fig. inscr. dans l'onglet}} = \frac{\text{MN}}{\text{M}\Lambda}$, d'où : $\frac{\Sigma \text{ prismes élém. du segt. de prisme} - 2}{\Sigma \text{ prismes élém. inscrits dans l'onglet}} = \frac{\text{MN}}{\text{M}\Lambda}$ ou : $\frac{\text{segment du prisme entier}}{\text{figure inscrite dans l'onglet}} = \frac{\text{MN}}{\text{M}\Lambda}$. On aura de même :

Digitized by Google

sera plus petit qu'une fois et demie le solide inscrit dans le segment découpé du cylindre. Or, il a été démontré que le parallélogramme ΔH est aux parallélogrammes inscrits dans le segment délimité par la parabole et par la droite EH comme le prisme découpé par le plan oblique est à la figure solide inscrite dans le segment du cylindre ; par conséquent, le parallélogramme ΔH est une fois et demie plus petit que les parallélogrammes inscrits dans le segment délimité par la parabole et par la droite EH ; ce qui est impossible, puisque nous avons démontré ailleurs (1) que le parallélogramme ΔH vaut une fois et demie le segment délimité par la parabole et par la droite EH. Dès lors, le segment de cylindre n'est pas plus grand que la sixième partie du prisme entier. . . . . .

. . . . . .

. . . . . (2) l'ensemble des prismes contenus dans le prisme découpé par le plan oblique est à l'ensemble des prismes contenus dans la figure circonscrite au segment de cylindre dans le rapport de tous les parallélogrammes situés dans le parallélogramme ΔH à tous les parallélogrammes situés dans la figure circonscrite au segment délimité par la parabole et par la droite EH ; c'est-à-dire que le prisme découpé par le plan oblique est à la figure circonscrite au segment de cylindre dans le rapport du parallélogramme ΔH à la figure circonscrite au segment délimité par la parabole et par la droite EH. Or, le prisme découpé par le plan oblique est une fois et demie plus grand que la figure solide circonscrite au segment de

---

$\frac{\sum \text{parallélogrammes élémentaires dans } \Delta H - 2}{\sum \text{parallélogr. élémentaires inscrits dans la parabole}} = \frac{MN}{M\Lambda}$, d'où, en vertu du lemme XI : $\frac{\text{segment du prisme entier}}{\text{fig. inscrite dans l'onglet}} = \frac{\text{parallélogramme } \Delta H}{\text{fig. inscrite dans parabole}}$. Mais, on a vu que la première hypothèse entraîne la relation : segment de prisme entier $< \frac{5}{4}$ onglet. Or, l'onglet excède la figure qui lui est inscrite d'un moindre volume donné; par conséquent... (reprise du texte).

1. Voir *De la Quadrature de la Parabole*, prop. XXIV, et proposition précédente, note 2, p. 515.

2. Seconde lacune dont l'importance peut être évaluée à deux cents mots au moins. Le passage manquant peut être résumé comme suit, par analogie avec ce qui précède :

Supposons en second lieu : onglet $< \frac{1}{6}$ prisme entier. On aura donc (prop. XIV et note) : segment du prisme $> \frac{5}{4}$ onglet. En raisonnant comme précédemment, on démontrera la relation :

$\frac{\text{prisme élém. du segment de prisme}}{\text{prisme élém. de la fig. circ. à l'onglet}} = \frac{\text{parallélogr. élém. dans } \Delta H}{\text{parallél. élém. circ. dans segt. parabole}}$;

par conséquent,... (reprise du texte).

Digitized by Google

cylindre (1). . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

1. Une dernière lacune s'étend jusqu'à la fin de la démonstration. Cette démonstration s'achèverait donc, en résumé, comme suit :

Par conséquent, l'on aurait : parallélogramme $\Delta H > \frac{5}{3}$ figure circonscrite au segment de parabole ; ce qui est impossible, vu que l'on a démontré : parallélogramme $\Delta H = \frac{5}{3}$ segment de parabole. Dès lors, l'onglet n'est pas plus petit que le sixième du prisme entier. Or, on a démontré qu'il n'est pas plus grand ; donc il équivaut au sixième du prisme entier.

Le reste du traité relatif à la méthode mécanique est malheureusement perdu. Comme Archimède l'annonce dans le préambule, ce traité comportait encore les démonstrations mécanique et géométrique de la proposition relative au volume engendré par l'intersection de deux cylindres inscrits dans le cube. Des reconstitutions de la démonstration de cette dernière proposition ont été données par Zeuthen (*Bibliotheca mathematica*, VII-1907, p. 356) ; par Th. Reinach (*Revue générale des Sciences pures et appliquées*, Paris, 15 déc. 1907, p. 959), et enfin, par Thomas L. Heath (*The method of Archimedes*. Cambridge, 1912, p. 48). Ces reconstitutions, qui pourraient du reste être étendues à un grand nombre d'autres propositions, n'intéressent que comme applications de la méthode mécanique d'Archimède, ou comme exercices d'archéologie mathématique.

Digitized by Google

Digitized by Google

LE LIVRE DES LEMMES

Digitized by Google

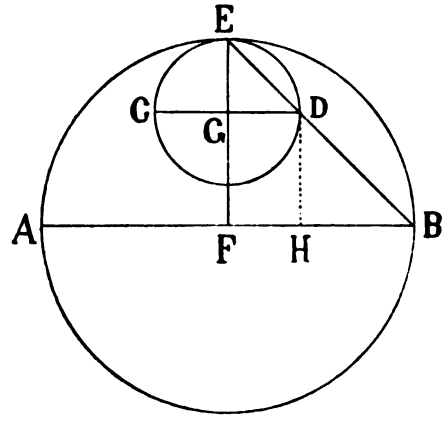
Digitized by Google

LE LIVRE DES LEMMES [1].

PROPOSITION I.

Si deux cercles sont tangents, comme les deux cercles AEB, CED le sont au point E ; si leurs diamètres sont parallèles, comme le sont les deux diamètres AB, CD, et si l'on relie les deux points B, D au point E au moyen des droites DE, BD, la ligne BE sera droite.

Soient les deux centres G, F ; menons la droite de jonction GF ; prolongeons-la jusqu'au point E [2], et menons la droite DH parallèle à la droite GF. Puisque la droite HF est égale à la droite GD, et que les droites GD, EG sont égales, il restera donc, de droites égales FB, FE, les droites GF, c'est-à-dire DH et HB qui seront égales, et les deux angles HDB, HBD seront égaux. Et puisque les deux angles EGD,



1. Le texte grec des *Lemmes* est perdu. La version arabe, dans laquelle les lemmes nous sont parvenus, a fait l'objet de deux versions latines au XVII[e] siècle (Voir Introduction). Notre traduction française a suivi la version latine de Abraham Ecchellensis, éditée par Borelli, à Florence, en 1661.

2. Euclide démontre successivement, pour les deux cas des cercles tangents intérieurement et extérieurement (livre III, prop. 11 et 12) que la droite reliant les centres de deux cercles tangents passe par le point de contact. (Voir EUCLIDE, traduction Peyrard, Paris, 1809, p. 130). Théon d'Alexandrie a donné une démonstration plus rigoureuse de ce théorème dans son commentaire sur les *Eléments* d'Euclide. On trouvera cette démonstration de Théon dans la traduction française des *Eléments* d'Euclide par Le Mardelé, Paris, 1632, in-8°, p. 246.

Digitized by Google

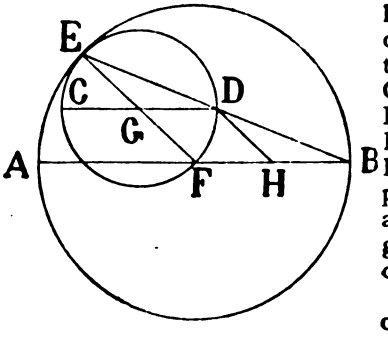
EFB sont droits, et que les angles EGD, DHB sont égaux, les deux angles GED, GDE, égaux entre eux, seront égaux aux deux angles HDB, HBD. Donc, l'angle EDG est égal à l'angle DBF. Considérons l'angle GDF comme commun ; les deux angles GDB, FBD, qui valent deux angles droits, vaudront donc les deux angles GDB, GDE ; par conséquent, ces derniers angles valent aussi deux angles droits. Dès lors, la ligne EDB est droite, et c'est ce que nous avons voulu démontrer(1).

PROPOSITION II.

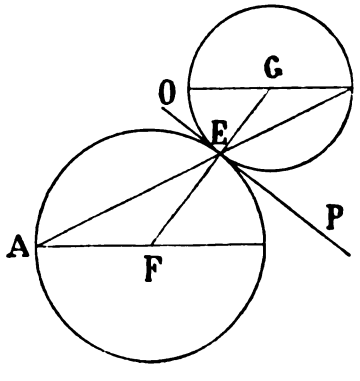
Soit le demi-cercle CBA, que touchent les droites DC, DB ; soit la perpendiculaire BE sur AC, et menons la droite de jonction AD. La droite BF sera égale à la droite FE.

Démonstration. Menons la droite de jonction AB, et prolongeons-la en direction ; prolongeons la droite CD jusqu'à sa rencontre avec

1. La démonstration ne considère que le cas particulier des diamètres perpendiculaires à la droite qui relie les centres des cercles tangents. La démonstration serait analogue pour le cas des diamètres parallèles coupant la ligne des centres sous un angle quelconque. En effet, faisons les mêmes constructions que celles qui sont indiquées dans le texte. On aura : FH = GD = EG et FB = FE, d'où : FB — FH = HB, et FE — EG = GF, d'où : GF = DH = HB, d'où : angle HDB = angle HBD. Le triangle DHB est isocèle, le triangle EGD est isocèle, et, par construction, angle EGD = angle DHB ; donc, angle EDG = angle DBH, d'où : angle EDG + angle GDB = angle DBH + angle GDB = 2 angles droits ; donc, EDB est une ligne droite.



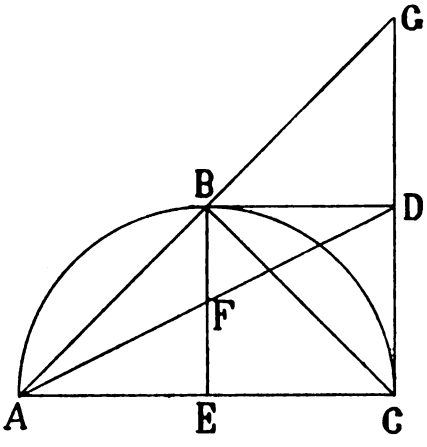
La proposition reste vraie dans le cas de deux cercles tangents extérieurement. On en trouve une ancienne démonstration dans la *Collection Mathématique* de Pappus, dont une première version latine fut donnée par Commandin, à Pise, en 1588, et dont une édition critique du texte est due à Hultsch (Berlin, 1875-78, 3 vol. in-8°). Voici le résumé de cette démonstration : menons la tangente OP en E. L'angle GEO est droit ainsi que l'angle OEF, et GEF est une ligne droite. On a : $\frac{GD}{GE} = \frac{EF}{FA}$, et angle DGE = angle EFA, d'où : angle GED = angle FEA. Or, GF est une ligne droite ; donc, AED est une ligne droite.



Barrow a donné une autre démonstration dans son édition latine des œuvres abrégées d'Archimède (Londini, 1675, in-4°, p. 265).

Digitized by Google

cette dernière droite au point G, et menons la droite de jonction CB. Puisque l'angle CBA est situé dans un demi-cercle, il sera droit (1), l'angle restant CBG est droit (2), et DBEC est un parallélogramme rectangulaire (3). Dès lors, la droite BD, menée du point B, est perpendiculaire à la base dans le triangle GBC, et les droites BD, DC seront égales parce qu'elles sont tangentes au cercle. En conséquence, la droite CD est aussi égale à la droite DG, comme nous l'avons montré dans les propositions relatives aux rectangles (4). Et puisque, dans le triangle GAC, la droite BE est parallèle à la base, et que la droite DA, menée du point milieu D de cette base, coupe cette parallèle en F, la droite BF sera égale à la droite FE ; ce que nous voulions démontrer.



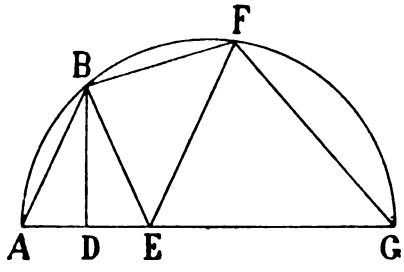
PROPOSITION III.

Soient un segment de cercle CA, un point B quelconque sur celui-ci, la droite BD perpendiculaire sur AC, un segment DE égal à DA, et un arc BF égal à l'arc BA ; la droite de jonction CF sera égale à la droite CE (5).

1. EUCLIDE, livre III, proposition 31.
2. EUCLIDE, livre I, proposition 13.
3. Il y a lieu de remarquer, à propos de cette conclusion, que le compilateur grec des *Lemmes* d'Archimède, ou le traducteur arabe ne considère que le cas particulier du point B situé au milieu de l'arc du demi-cercle et de la perpendiculaire BE passant donc par le centre. Torelli (*loc. cit.*, p. 355) et Barrow (*loc. cit.*, p. 266), dans leurs éditions des *Lemmes*, substituent une démonstration du cas général du point B quelconque sur l'arc de cercle à la démonstration que l'on trouve dans les deux versions latines faites sur l'arabe par Forster, en 1659, et par Borelli, en 1661. Une démonstration brève et élégante du cas général a été donnée par Heath (*The Works of Archimedes edited in modern notations*, Cambridge, 1897, p. 302).
4. Cet ouvrage d'Archimède ne nous est pas parvenu, mais existait probablement encore à l'époque de la compilation grecque ou de la traduction arabe des *Lemmes*. L'égalité CD = DG résulte de ce que le triangle BDC est isocèle, et le triangle CBG rectangle. L'angle DBC est le complément de DBG, et DCB = DBC est le complément de DGB ; donc : angle DBG = angle DGB, d'où : GD = BD = DC.
5. La figure qui accompagne le texte rapporte la démonstration au cas du demi-

Digitized by Google

Démonstration. Menons les droites de jonction AB, BF, FE, EB.



Puisque l'arc BA est égal à l'arc BF, la droite AB sera égale à la droite BF. Et puisque la droite AD est égale à la droite ED, que les deux angles en D sont droits, et que la droite DB est commune, la droite AB est donc égale à la droite BE, et, de plus, les droites BF, BE sont égales, et les deux angles BFE, BEF sont égaux. Et puisque le quadrilatère CFBA est inscrit dans un cercle, l'angle CFB, augmenté de l'angle CAB qui lui est opposé, ou augmenté de l'angle BEA, vaut deux angles droits (1). Or, l'angle CEB, augmenté de l'angle BEA, vaut deux angles droits ; par conséquent, les deux angles CFB, CEB sont égaux, et il reste les angles égaux CFE, CEF. Dès lors, la droite CE est égale à la droite CF ; ce que nous avons voulu démontrer.

PROPOSITION IV.

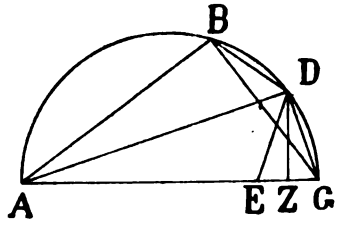
Soit un demi-cercle ABC. Décrivons deux demi-cercles sur le diamètre AC ; soit AD l'un, DC l'autre, et élevons la perpendiculaire DB.

---

cercle ; mais il est facile de voir que la proposition reste vraie pour un segment de cercle quelconque.

C'est du reste sur la proposition appliquée au cas particulier du demi-cercle que Claude Ptolémée s'appuie pour déterminer la corde sous-tendant la moitié d'un arc en fonction de la corde de l'arc et du diamètre du cercle. Résumons ici cette détermination, que nous traduisons sur le texte du premier livre de Ptolémée, donné dans l'édition rare, intitulée : *Ptolemaei Mathematicae constructionis liber primus, additae explicationes ab* Erasmo RHEINHOLT, Lutetiae, Cavellat, 1556, in-12 (p. 33) :

Soit BG la corde donnée. Divisons l'arc en deux parties égales en D. Joignons AB, AD, DB, DG. De D abaissons DZ perpendiculaire sur le diamètre AG. Je dis que $ZG = \frac{1}{2}(AG - AB)$. Prenons $AE = AB$, joignons DE. Dans les triangles BAD, EAD, on a les angles en A égaux, $AB = AE$, et le côté AD commun. Donc : $DE = BD$. Or, $DG = BD$; donc : $DG = DE$. Le triangle EDG est donc isocèle ; et, puisque l'on a abaissé la perpendiculaire DZ, on aura : $EZ = ZG$. Or, $EG = AG - AB$, d'où : $ZG = \frac{1}{2}(AG - AB)$. Mais, dans le triangle rectangle ADG, on a : $\overline{GD}^2 = AG \times GZ$. Donc, GD sera la longueur qui sous-tend la moitié de l'arc. La démonstration sous-entend que $AB = \sqrt{\overline{AG}^2 - \overline{BG}^2}$, d'où : $GD^2 = \frac{1}{2}AG[AG - \sqrt{\overline{AG}^2 - \overline{BG}^2}]$. On trouvera aussi cette démonstration *in extenso* dans l'*Almageste* de Ptolémée, texte et traduction française de l'abbé Halma, Paris, 1813-1815, 2 vol. in-4°, I, 9, p. 31, ainsi que dans *Ptolemaei opera*, éd. Heiberg, I, 10, p. 39.

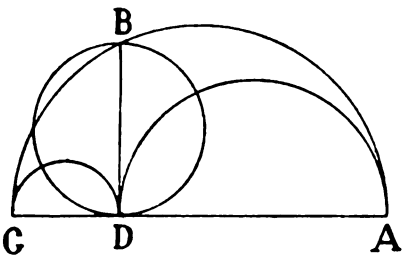


1. EUCLIDE, livre III, proposition XXII.

Digitized by Google

On détermine ainsi une figure qu'Archimède appelle *Arbelon* (1), dont l'aire comprise entre l'arc du plus grand demi-cercle et les deux circonférences des petits demi-cercles équivaut au cercle dont le diamètre est la perpendiculaire DB.

Démonstration. Puisque la droite DB est moyenne proportionnelle entre les deux droites DA, DC, le rectangle construit sur les droites AD, DC équivaut au carré de la droite DB. Ajoutons de part et d'autre le rectangle construit sur AD, DC et les deux carrés de AD, DC ; il s'ensuit que le double du rectangle construit sur AD, DC, augmenté des deux carrés de AD, DC, c'est-à-dire le carré de AC, équivaut au double du carré de DB augmenté des deux carrés de AD, DC (2). Or, le rapport des cercles est le même que celui de ces derniers carrés ; par conséquent, le cercle de diamètre AC équivaut au double du cercle de diamètre DB augmenté des deux cercles de diamètres AD, DC. Or, le demi-cercle AC équivaut au cercle de diamètre DB augmenté des deux demi-cercles AD, DC. Retranchons de part et d'autre les deux demi-cercles AD, DC, et il restera la figure comprise entre les demi-cercles AC, AD, DC, qu'Archimède appelle *Arbelon*, et qui équivaut au cercle de diamètre DB (3) ; ce que nous avons voulu démontrer (4).



1. ἄρβηλος, littéralement : tranchet de cordonnier, mot qui a été conservé tel quel dans les versions arabes et latines, et que nous conservons dans notre traduction.

2. On a, en effet (Euclide, livre VI, prop. 13) : $\overline{DB}^2 = AD \times DC$, relation qui peut s'écrire : $AD \times DC + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{DB}^2 = AD \times DC + AD \times DC + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$, ou : $\overline{DB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{DB}^2 = 2AD \times DC + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$, ou (Euclide, livre I, prop. 4) : $2\overline{DB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = (AD + DC)^2 = \overline{AC}^2$.

3. Les cercles étant entre eux comme les carrés des diamètres (Euclide, livre XII, prop. 2), on aura : $\frac{\text{cercle AC}}{\overline{AC}^2} = \frac{\text{cercle AD}}{\overline{AD}^2} = \frac{\text{cercle DC}}{\overline{DC}^2} = \frac{\text{cercle DB}}{\overline{DB}^2} = \frac{2 \text{ cercles DB}}{2\overline{DB}^2}$, d'où : $\frac{\text{cercle AC}}{\overline{AC}^2} = \frac{\text{cercle AD} + \text{cercle DC} + 2 \text{ cercles DB}}{\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + 2\overline{DB}^2}$. Or, d'après la note précédente, il y a égalité des conséquents, d'où égalité des antécédents et égalité de leurs moitiés : $\frac{1}{2}$ cercle AC $= \frac{1}{2}$ cercle AD $+ \frac{1}{2}$ cercle DC + cercle DB, d'où :

$\frac{1}{2}$ cercle AC $- \frac{1}{2}$ cercle AD $- \frac{1}{2}$ cercle DC = figure Arbelon = cercle DB.

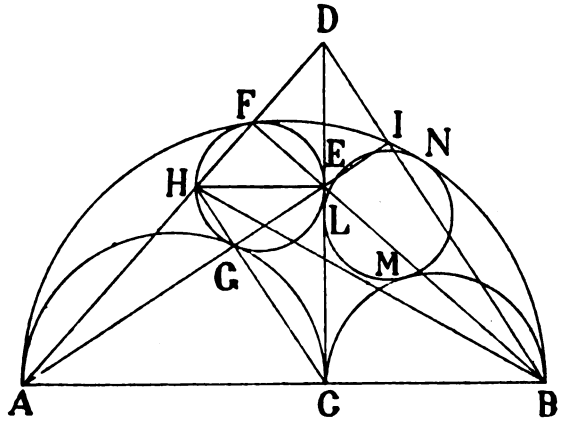
4. On pourra consulter, au sujet de la proposition de l'*Arbelon*, le petit ouvrage de F. Buchner : *De Arbelo Archimedis*, Elbing, 1824, in-4°, et l'on trouvera une solution moderne et élégante de cette proposition dans la troisième édition de l'ou-

Digitized by Google

PROPOSITION V.

Soient le demi-cercle AB et un point C quelconque sur son diamètre. Décrivons sur ce diamètre les deux demi-cercles AC, CB ; élevons en C la perpendiculaire CD sur AB, et décrivons de part et d'autre de cette perpendiculaire deux cercles tangents à cette perpendiculaire et aux demi-cercles. Ces deux cercles seront égaux.

Démonstration. Que l'un des cercles touche DC en E, le demi-cercle AB en F, le demi-cercle AC en G, et menons le diamètre HE(1).Ce diamètre sera parallèle au diamètre AB,parce que les deux angles HEC, ACE sont droits. Menons les droites de jonction FH, HA; la ligne AF est donc droite, comme cela a été montré dans la proposition première (2), et AF, CE se rencontrent en un point D, parce qu'elles surgissent sous des angles A, C qui valent moins que deux angles droits. Menons encore les droites de jonction FE, EB ; la ligne EFB est donc également une droite, comme cela a été dit (3), et elle est perpendiculaire sur AD, parce que l'angle AFB est droit comme étant inscrit dans le demi-cercle AB (4). Menons les droites de jonction HG, GC ; la ligne HC sera aussi une droite. Menons les droites de jonction EG, GA, et la ligne EA sera une droite. Prolongeons cette dernière droite jusqu'en I, et menons la droite de jonction BI qui sera aussi perpendiculaire sur AI. Menons la droite de jonction DI. Dès lors, puisque AD, AB sont deux droites,



vrage de CATALAN intitulé : *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, Paris, 1858, p. 185.

1. On trouvera une bonne discussion du problème relatif à la description d'une circonférence tangente à une droite donnée et à deux circonférences données dans l'ouvrage de CATALAN intitulé : *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, Paris, 1879. (Voir livre III, prop. 25, p. 205).

2. Voir proposition I étendue au cas des cercles tangents extérieurement.

3. Voir proposition I.

4. EUCLIDE, livre III, proposition 31.

Digitized by Google

que DC est mené perpendiculairement du point D sur la ligne AB, tandis que BF est mené perpendiculairement du point B sur DA, lesquelles droites se coupent en E, et que la droite AE prolongée en I est perpendiculaire sur BI, la ligne BID sera droite (1), comme nous l'avons montré dans les propositions que nous avons établies dans le traité relatif aux triangles rectangles (2). Et puisque les deux angles AGC, AIB sont droits, les droites BD, CG sont parallèles. De plus, le rapport de AD à DH qui est le même que celui de AC à HE, est le même que celui de AB à BC ; par conséquent, le rectangle de AC sur CB équivaut au rectangle de AB sur HE. On démontrera pareillement que, dans le cercle LMN, le rectangle de AC sur CB équivaut au rectangle de AB sur le diamètre de ce cercle. Enfin, on démontrerait aussi que les deux diamètres des cercles EFG, LMN sont égaux ; donc ces deux cercles sont égaux (3) ; chose que nous avons voulu démontrer (4).

1. En effet, puisque E est le point de rencontre de deux hauteurs du triangle ADB, AE sera la troisième hauteur perpendiculaire sur BD. Or, AE, qui est déjà perpendiculaire sur BI, ne peut l'être à la fois sur BD que si les points D, I, B sont sur la même droite.

2. Propositions probablement démontrées dans un commentaire sur un livre perdu d'Archimède, relatif aux propriétés des triangles rectangles (Cfr. HEIBERG, *Quaestiones Archimedeae,* Copenhague, 1879, p. 30). Le compilateur des *Lemmes* fait donc allusion ici à une démonstration ancienne de la proposition concernant les hauteurs d'un triangle qui se coupent en un même point. On trouvera une démonstration élégante de ce théorème par la géométrie élémentaire dans l'ouvrage précité de CATALAN (livre I, p. 1), et une démonstration par la théorie des transversales dans l'ouvrage de ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, intitulé : *Eléments de Géométrie,* Paris, 1904 (voir page 362).

3. La similitude des triangles ADC, HDE et des triangles BAD, CAH donne : $\frac{AD}{DH} = \frac{AC}{HE} = \frac{AB}{BC}$, d'où, comme le texte : $AC \times CB = AB \times HE$. De même, pour le cercle LMN, on aura : $AC \times CB = AB \times$ diamètre cercle LMN ; donc : $HE =$ diam. cercle LMN, d'où cercle HE = cercle LMN.

Cette proposition reste vraie : 1° lorsque les deux demi-cercles, au lieu d'être tangents, se coupent, et que la perpendiculaire CD est abaissée du point d'intersection C ; 2° lorsque les deux demi-cercles sont séparés, et que la perpendiculaire CD est élevée en un point C du diamètre AB, tel que les tangentes menées de ce point C aux deux demi-cercles soient égales. Un commentateur arabe des *Lemmes,* Abusahal Alkuhi, a donné, pour ces deux cas, une démonstration dont on trouve la traduction latine d'Abraham Ecchelensis dans l'édition des *Lemmes* de Borelli (Cfr. *loc. cit.,* p. 393).

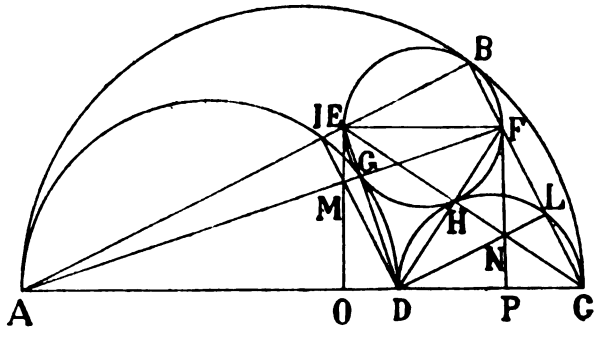
4. L'ouvrage que Pappus d'Alexandrie écrivit, à la fin du IV^e^ siècle, sous le titre de *Collections mathématiques* (Μαθηματικαὶ συναγωγαί), en huit livres, constitue un des plus précieux monuments de l'ancienne géométrie, qui mérite surtout d'être étudié par ceux qui font des recherches sur l'histoire des sciences exactes. Pappus y rassemble le précis d'un grand nombre d'ouvrages presque tous perdus aujourd'hui, et il y joint, de son propre fonds, un grand nombre de propositions nouvelles et intéressantes. C'est ainsi que, se basant sur la proposition d'Archimède relative à l'*Arbelon,* il expose toute une série d'autres propositions curieuses sur

Digitized by Google

PROPOSITION VI.

Soit un demi-cercle ABC ; prenons, sur son diamètre, un point D tel que AD soit égal à une fois et demie DC, et décrivons deux demi-cercles sur AD et DC. On donne, dans l'intervalle des trois demi-cercles, le cercle EF qui leur est tangent (1), et menons, dans ce cercle, le diamètre EF parallèle au diamètre AC. Il s'agit de trouver le rapport du diamètre AC au diamètre EF.

En effet, menons les deux droites de jonction AE, EB et les deux droites de jonction CF, FB ; les lignes CB, AB seront droites, comme il a été dit dans la première proposition. Traçons aussi les deux lignes FGA, EHC, et l'on démontrera qu'elles sont aussi droites, et qu'il en est de même pour les deux lignes DE, DF (2). Menons les droites de jonction DI, DL, et EM, FN que nous prolongeons jusqu'aux points O, P. Dès lors, puisque, dans le triangle AED, la droite AG est perpendiculaire sur la



cette figure. La proposition qui précède notamment le conduit à la relation : $\frac{AB}{BC} = \frac{\overline{CE}^2}{\overline{HE}^2}$. En effet, on a : $\overline{CE}^2 = HC \times CG$, et $\overline{HE}^2 = HC \times HG$; donc : $\frac{CG}{HG} = \frac{\overline{CE}^2}{\overline{HE}^2}$. Or, on a : $\frac{CG}{HG} = \frac{AC}{HE} = \frac{AD}{HD} = \frac{AB}{BC}$; donc : $\frac{AB}{BC} = \frac{\overline{CE}^2}{\overline{HE}^2}$. L'ouvrage de Pappus n'a pas encore été traduit en français, et il mériterait cependant de l'être ; mais on trouvera les propositions en question dans la traduction latine de COMMANDIN (*Pappi Alexandrini Mathematicae collectiones, in latinum conversae et commentariis illustratae a* F. COMMANDINO. Bononiae, 1660, pet. in-fol., p. 81), ou dans la première édition du texte grec, donnée par HULTSCH, avec une version latine (*Pappi Alexandrini Collectiones quae supersunt edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit* F. HULTSCH. Berolini, 1875-78, 3 vol. in-8°).

1. La solution du problème du cercle tangent à trois cercles donnés, due à Apollonius, est perdue, et sa reconstitution fit l'objet de nombreux essais de la part des géomètres de la Renaissance. Descartes traita le problème par la géométrie analytique, Viète et Adrien Romain par les sections coniques, et Newton donna enfin une solution élémentaire par la règle et le compas. Une dernière solution élégante du problème est celle de Bobillier et Gergonne, reproduite dans le traité précité de Catalan, p. 206.

2. Proposition I étendue au cas des cercles tangents extérieurement.

Digitized by Google

droite ED, que la droite DI est aussi perpendiculaire sur la droite AE, et que ces dernières droites se coupent en M, il s'ensuit que la droite EMO sera également une perpendiculaire, comme nous l'avons montré dans l'exposé que nous avons fait des propriétés des triangles ; démonstration qui, du reste, a déjà été invoquée dans la proposition qui précède (1). Semblablement aussi, la droite FP sera perpendiculaire sur CA. Et puisque les deux angles situés en L et en B sont droits, DL sera parallèle à AB, et DI sera de même parallèle à CB. Par conséquent, le rapport de AD à DC est le même que celui de AM à FM, c'est-à-dire le même que le rapport de AO à OP ; et le rapport de CD à DA est le même que celui de CN à NE, c'est-à-dire le même que le rapport de CP à PO. Or, AD vaut une fois et demie DC; par conséquent, AO vaut une fois et demie OP, et OP vaut une fois et demie CP. Dès lors, les trois lignes AO, OP, PC sont proportionnelles, et, dans la mesure où PC vaut quatre, OP vaudra six, AO neuf et CA dix-neuf. Et puisque la droite PO est égale à la droite EF, le rapport de AC à EF sera le même que celui de dix-neuf à six (2). Nous avons donc trouvé le rapport en question. Si AD était à DC dans un rapport quelconque, tel que celui de quatre à trois, ou de cinq à quatre ou dans un autre, on procéderait et raisonnerait comme nous venons de le faire. Et c'est ce que nous avons voulu montrer (3).

---

1. Voir proposition V et note. Le point M est le point d'intersection des deux premières hauteurs du triangle AED, la droite EM prolongée sera donc perpendiculaire sur AD.

2. La considération de deux séries de triangles semblables donne: $\frac{AD}{DC}=\frac{AM}{FM}=\frac{AO}{OP}$, et $\frac{CD}{DA}=\frac{CN}{NE}=\frac{CP}{PO}$. Or, on a posé : $AD=\frac{3}{2}DC$ ou : $\frac{AD}{DC}=\frac{3}{2}$, d'où : $\frac{AO}{OP}=\frac{3}{2}$, et $\frac{CP}{PO}=\frac{2}{3}$. Dès lors, si l'on pose : $PC=4$, on aura : $OP=\frac{3\times 4}{2}=6$, $AO=\frac{6\times 3}{2}=9$ et $CA=AO+OP+PC=9+6+4=19$, d'où : $\frac{CA}{PO}=\frac{19}{6}$. Or, $PO=EF$; donc : $\frac{CA}{EF}=\frac{19}{6}$.

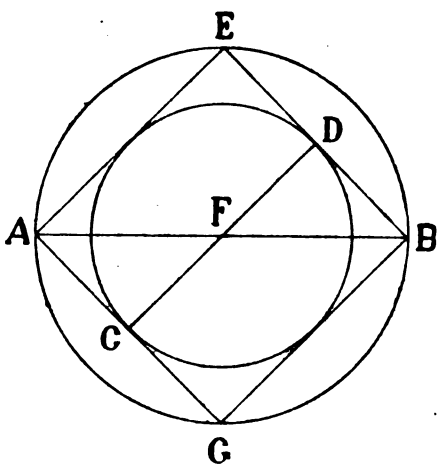
3. Les deux relations $\frac{AD}{DC}=\frac{AO}{OP}$ et $\frac{CD}{DA}=\frac{CP}{PO}$ montrent immédiatement que le centre du cercle tangent aux trois demi-cercles de l'*Arbelon* est situé à une distance du diamètre AC égale à son propre diamètre EF. En effet, ces deux relations donnent : $\overline{PO}^2=AO\times CP$. Faisons glisser le triangle PFC parallèlement à lui-même de manière que FP s'applique sur EO; FC sera donc perpendiculaire sur AE, d'où : $\overline{EO}^2=AO\times CP$, d'où, comparant avec la relation précédente : $\overline{EO}^2=\overline{PO}^2$, d'où : $EO=PO=EF$.

C'est en démontrant cette dernière relation par d'autres considérations que

Digitized by Google

PROPOSITION VII.

Lorsqu'un cercle est décrit autour d'un carré, et qu'un autre cercle est décrit à l'intérieur de ce carré, le cercle circonscrit est double du cercle inscrit.



Soient donc AB le cercle enveloppant le carré AB, et CD le cercle inscrit. Soit AB le diamètre (1) du carré et diamètre du cercle circonscrit, et menons un diamètre CD du cercle inscrit, parallèle à la droite AE, diamètre qui est donc égal à cette dernière droite. Puisque le carré de AB est double du carré de AE, c'est-à-dire du carré de DC, et que le rapport des carrés des diamètres des cercles est le même que celui d'un cercle à l'autre, il s'ensuit que le cercle AB est double du cercle CD; ce que nous avons voulu démontrer.

PROPOSITION VIII.

Si, dans un cercle, une droite AB émane d'un point quelconque; si on la prolonge en direction; si l'on prend une droite BC égale à la moitié du diamètre du cercle, et si l'on prolonge jusqu'en E la droite reliant le point C au centre D du cercle, l'arc AE sera triple de l'arc BF.

Menons donc la droite EG parallèle à la droite AB, et menons les

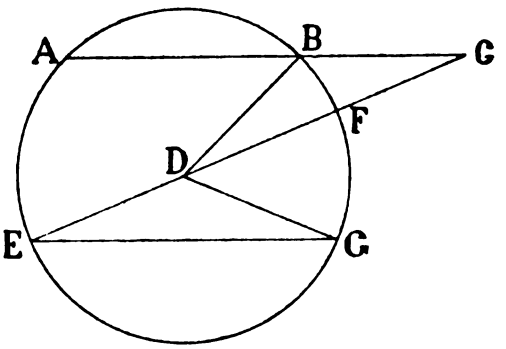
---

Pappus l'applique à la démonstration de la proposition la plus remarquable relative à l'*Arbelon*, connue sous le nom de *Proposition Antique*, dont nous traduisons l'énoncé : « Si l'on inscrit une série de cercles dans l'Arbelon, le premier tangent aux trois demi-cercles, le second tangent au premier et à deux demi-cercles et ainsi de suite, les hauteurs de ces cercles au-dessus du diamètre du demi-cercle principal de l'Arbelon seront respectivement égales au diamètre du premier cercle, au double diamètre du second, au triple diamètre du troisième et, ainsi de suite, à n fois le diamètre du cercle de rang n. » (Voir PAPPUS, édition précitée de la traduction latine de Commandin, p. 71.)

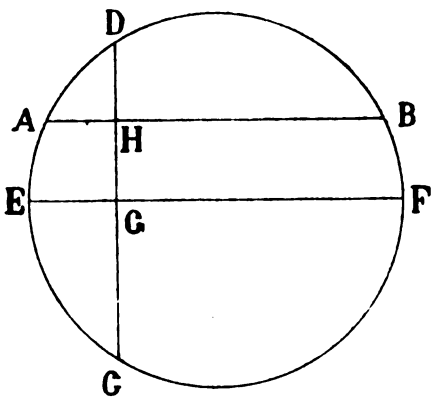
1. C'est-à-dire la diagonale du carré.

Digitized by Google

droites de jonction BD, DG. Puisque les deux angles DEG, DGE sont égaux, l'angle GDC sera double de l'angle DEG. Et puisque l'angle BDC est égal à l'angle BCD, et que l'angle CEG est égal à l'angle ACE, l'angle GDC sera double de l'angle CDB et l'angle total BDG sera triple de l'angle BDC. Donc, l'arc BG, égal à l'arc AE, est triple de l'arc BF; ce que nous avons voulu démontrer (1).



PROPOSITION IX.



Si, dans un cercle, deux droites AB, CD se coupent à angle droit, mais non au centre, les deux arcs AD,CB valent les deux arcs AC,DB.

Menons, parallèlement à la droite AB, le diamètre EF coupant la droite CD en deux parties égales au point G ; la droite EC sera égale à la droite ED. Et puisque l'arc EDF est un demi-cercle, de même que l'arc ECF, et que l'arc ED vaut

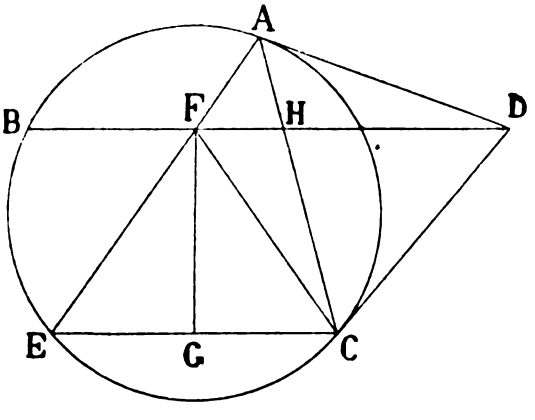
1. Borelli a donné une variante succincte de cette démonstration : Menons BE. On a : angle BDC = 2 angles DEB, d'où : angle AEB = 3 angles DEB, d'où : arc AE = 3 arcs FB. La proposition qui précède subordonne donc la trisection de l'angle au problème de la sécante issue d'un point déterminé, et dont le segment, intercepté par une droite et une circonférence, ait une longueur donnée. On a vu que, dans les propositions préliminaires de son traité *Des Spirales*, Archimède invoque, sans indication des moyens, la possibilité de mener des sécantes en direction interceptées sur une longueur donnée par deux lignes quelconques. Nous renvoyons aux notes que nous avons consacrées à ces propositions. L'impossibilité de résoudre le problème de la trisection de l'angle par la règle et le compas a été démontrée pour la première fois, d'une manière entièrement rigoureuse, par P. L. Wantzel, Ingénieur des Ponts et Chaussées de France, dans un mémoire intitulé : *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas.* » (Cfr. *Journal de Mathématiques*, Paris, 1837, tome II, p. 366-372.)

Digitized by Google

l'arc EA augmenté de l'arc AD, l'arc CF, augmenté des deux arcs EA, AD, vaudra un demi-cercle. Or, l'arc EA est égal à l'arc BF ; par conséquent, l'arc CB, augmenté de l'arc AD, vaut un demi-cercle. Restent les deux arcs EC, EA, c'est-à-dire l'arc AC qui, avec l'arc DB, vaut le demi-cercle ; ce que nous avons voulu démontrer.

PROPOSITION X.

Soient le cercle ABC, une tangente DA, une sécante DB et une autre tangente DC. Menons la droite CE parallèle à la droite DB, et la droite de jonction EA coupant la droite DB au point F. Du point F, abaissons la perpendiculaire FG sur la droite CE. Cette perpendiculaire coupera cette dernière droite en deux parties égales au point G.



Menons la droite de jonction AC. Puisque DA est une tangente, et que AC est une sécante du cercle, l'angle DAC sera égal à l'angle inscrit dans l'alterne du segment AC, c'est-à-dire égal à l'angle AEC (1). Or, ce dernier angle est égal à l'angle AFD, parce que les droites CE, BD sont parallèles ; par conséquent, les angles DAC, AFD sont égaux. Or, dans les deux triangles DAF, AHD, les deux angles AFD, HAD sont égaux, et l'angle D est commun ; par conséquent, le rectangle FD sur DH équivaut au carré de DA, c'est-à-dire au carré de DC (2). Et puisque le rapport de FD à DC est le même que le rapport de CD à DH, et que l'angle en D est commun, les triangles DFC, DCH seront semblables, et l'angle DFC sera égal à l'angle DCH, égal lui-même à l'angle DAH. Or, ce dernier angle est égal à l'angle AFD ;

1. EUCLIDE, livre III, proposition 32 : « La corde forme avec la tangente à l'extrémité de l'arc un angle égal à ceux qui sont formés dans le segment alterne. » En d'autres termes, les angles DAC, AEC qui sont mesurés par le même arc sont égaux.

2. Les triangles ADH, ADF sont semblables; donc : $\frac{DA}{FD} = \frac{DH}{DA}$, d'où, comme le texte : $FD \times DH = \overline{DA}^2 = \overline{DC}^2$.

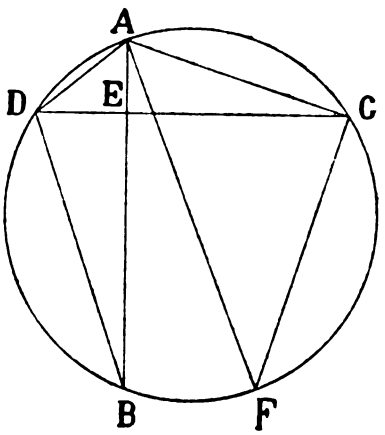
Digitized by Google

par conséquent, les deux angles AFD, CFD sont égaux (1). Or, l'angle DFC est égal à l'angle FCE, et l'angle DFA égal à l'angle AEC (2); par conséquent, dans le triangle FEC, les deux angles en C et E sont égaux, les deux angles en G sont droits, et le côté GF est commun. Dès lors, la droite CG sera égale à la droite GE, et la droite CE est donc coupée en deux parties égales au point G ; ce que nous avons voulu démontrer.

PROPOSITION XI.

Si, dans un cercle, deux droites AB, CD se coupent à angles droits en un point E non situé au centre, l'ensemble des carrés des droites AE, BE, EC, ED équivaut au carré du diamètre.

Menons le diamètre AF et les droites de jonction AC, AD, CF, DB. Puisque l'angle AED est droit, il sera égal à l'angle ACF (3). Or l'angle ADC est égal à l'angle AFC, parce que ces angles s'appuient sur l'arc AC (4) ; par conséquent, il reste deux angles CAF, DAE égaux dans les deux triangles ADE, AFC. Les deux arcs CF, DB seront égaux aussi (5), et, par conséquent, leurs deux cordes seront égales (6). Or, les deux carrés de DE, EB valent le carré de BD, c'est-à-dire le carré de CF ; les deux carrés de AE, EC valent le carré de CA, et les deux carrés de CF, CA valent le carré de FA, c'est-à-dire le carré du diamètre ; par conséquent, l'ensemble des carrés de AE, EB, CE, ED équivaut au carré du diamètre ; ce que nous avons voulu démontrer (7).



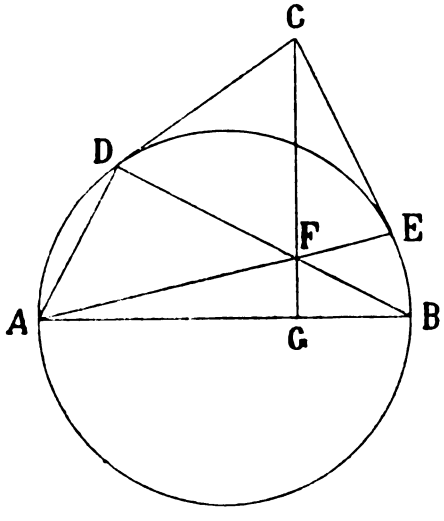
1. La relation $FD \times DH = \overline{DC}^2$ donne : $\frac{FD}{DC} = \frac{DC}{DH}$, d'où similitude des triangles DFC, DCH ayant l'angle en D commun. Dès lors, $\widehat{DFC} = \widehat{DCH} = \widehat{DAH}$. Or, $\widehat{DFC} = \widehat{DAH}$ et $\widehat{DAH} = \widehat{AFD}$, d'où : $\widehat{AFD} = \widehat{DFC}$.
2. Car EC a été mené parallèlement à BD.
3. Euclide, livre III, proposition 31.
4. Euclide, livre III, proposition 27.
5. Euclide, livre III, proposition 26.
6. Euclide, livre III, proposition 29.
7. Borelli (Cf. *loc. cit.*, p. 403) nous donne une démonstration plus simple, due

Digitized by Google

PROPOSITION XII.

Soit un demi-cercle décrit sur le diamètre AB. Menons du point C deux droites tangentes à ce demi-cercle aux points D, E. Menons les droites de jonction EA, DB se coupant au point F, et la droite de jonction que nous prolongeons jusqu'en G. La droite CG sera perpendiculaire sur AB.

Menons les droites de jonction DA, EB. Puisque l'angle BDA est droit, les deux angles qui restent dans le triangle DAB vaudront un angle droit, et, comme l'angle AEB est droit, ils vaudront ce dernier angle. Considérons l'angle commun FBE ; les deux angles DAB,ABE valent les deux angles FBE, FEB, c'est-à-dire l'angle DFE externe au triangle FBE (1). Et puisque CD est une tangente au cercle, et que DB est une sécante de ce cercle, l'angle CDB est égal à l'angle DAB, et, de même, l'angle CEF est égal à l'angle EBA (2). En conséquence, l'ensemble des deux angles CEF, CDF est égal à l'angle DFE (3). Mais, il résulte déjà de notre traité *Des Figures quadrilatères* (4) que, si entre deux droites égales qui se rencontrent en un certain point, comme les deux droites



au commentateur arabe Almochtasso. Nous la traduisons librement comme suit : Menons les droites de jonction AD, CB, BD. Puisque l'angle BED est droit, on a : angle EBD + angle EDB = 1 angle droit; donc : arc AD + arc BC = demi-cercle; donc : $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2$ = carré du diamètre. Or, $\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2$ et $\overline{BC}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{EB}^2$; donc : $\overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{EB}^2$ = carré du diamètre.

1. On a : $\widehat{DAB} + \widehat{DBA} = 1$ angle droit $= \widehat{AEB}$, d'où : $\widehat{DAB} + \widehat{DBA} + \widehat{FBE} = \widehat{AEB} + \widehat{FBE}$ ou, comme le texte : $\widehat{DAB} + \widehat{ABE} = \widehat{DFE}$.

2. EUCLIDE, livre III, proposition 32. Ou, autrement : les deux angles CEF, EBA embrassent le même arc.

3. On a : $\widehat{DAB} + \widehat{EBA} = \widehat{BFE}$. Or, $\widehat{CDB} = \widehat{DAB}$ et $\widehat{CEA} = \widehat{EBA}$, d'où : $\widehat{CDB} + \widehat{CEA} = \widehat{DAB} + \widehat{EBA} = \widehat{DFE}$.

4. Il n'est pas certain que le compilateur grec des *Lemmes* ou que le traducteur

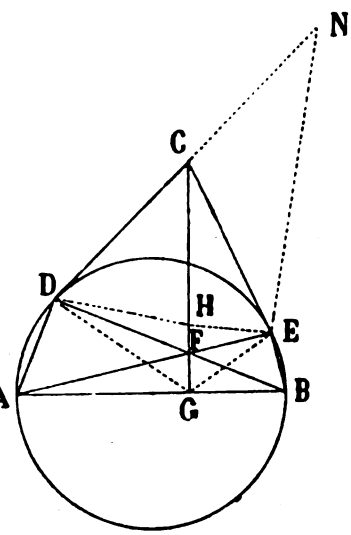
Digitized by Google

CD, CE, on mène deux droites qui se coupent, comme le font les deux droites DF, EF, et si l'angle compris par ces dernières droites, tel que l'angle F, est égal à l'ensemble des deux angles déterminés par l'intersection des deux droites, tel que l'ensemble des deux angles E, D, la droite qui va du point de rencontre au point de coupure, comme la droite CF, est égale à l'une et à l'autre des droites qui se rencontrent, telles que les droites CD ou CE (1). En conséquence, la droite CF sera égale à la droite CD, et l'angle CFD est donc égal à l'angle CDF, c'est-à-dire à l'angle DAG (2). Or, l'angle CFD, augmenté de l'angle DFG, vaut deux angles droits ; par conséquent, l'angle DAG, augmenté de l'angle DFG, vaut deux angles droits, et les deux angles ADF, AGF, qui restent dans le quadrilatère ADFG, valent deux angles droits. Or, l'angle ADB est droit ; par conséquent, l'angle AGC est droit (3), et la droite CG est perpendiculaire sur AB ; ce que nous avons voulu démontrer.

---

arabe fasse ici allusion à un traité composé par Archimède, car on n'en trouve mention nulle part ailleurs.

1. Le commentateur arabe des *Lemmes*, Almochtasso-Abul-Hassan, a donné de cette proposition une démonstration par l'absurde que nous résumons comme suit : Supposons CF > CD. Posons CH = CD, et joignons HD, HE. On aura : $\widehat{CDH} = \widehat{DHC} > \widehat{DFC}$, et $\widehat{CEH} = \widehat{CHE} > \widehat{CFE}$, d'où : $\widehat{DHE} = \widehat{CDH} + \widehat{CEH} > \widehat{CDF} + \widehat{CEF}$, d'où la partie serait plus grande que le tout. Supposons ensuite CF < DC, posons CG = DC, et joignons GD, GE. On aura de même : $\widehat{DGE} = \widehat{CDG} + \widehat{CEG} < \widehat{CDF} + \widehat{CEF}$, d'où le tout serait plus petit que la partie. Dès lors, CF = CD. (Voir éd. Borelli, p. 404.)



D'autre part, Borelli donne la démonstration suivante : Soit CN = CE. Joignons NE. Les angles du quadrilatère NDFE valent 4 angles droits. $\widehat{EFD} = \widehat{CDF} + \widehat{CEF}$ et $\widehat{CNE} = \widehat{CEN}$, d'où : $\widehat{EFD} + \widehat{CNE} = \widehat{CDF} + \widehat{FEN}$ = 2 angles droits. On peut donc circonscrire au quadrilatère NDFE un cercle de centre C ; car CN = CE = CD. Donc : CF = CD. (Voir éd. Borelli, p. 405.)

On pourrait d'ailleurs écrire aussi : somme des 4 angles du quadrilatère DCEF = 4 angles droits ; $\widehat{DFE} = \widehat{CDF} + \widehat{CEF}$, et $\widehat{CNE} = \widehat{CEN}$, d'où : $2\widehat{DFE} + \widehat{DCE}$ = 4 droits. Or, $\widehat{DCE} = 2\widehat{CNE}$, d'où : $\widehat{DFE} + \widehat{CNE}$ = 2 droits. Donc, le quadrilatère DNEF est inscriptible dans le cercle de centre C ; car CD = CE = CN, d'où : CF = CD.

2. Car les angles CDF, DAG sont mesurés par le même arc.

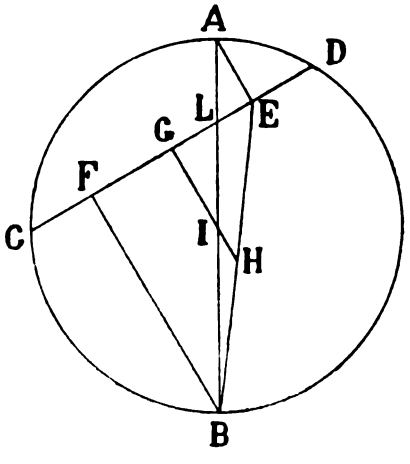
3. Puisque CF = CD, on a : $\widehat{CFD} = \widehat{CDF} = \widehat{DAG}$. Or, $\widehat{CFD} + \widehat{DFG}$ = 2 droits, ou

Digitized by Google

PROPOSITION XIII.

Si deux droites AB, CD se coupent dans un cercle ; si AB est un diamètre, tandis que CD ne l'est pas, et si des deux points A et B on abaisse sur CD les deux perpendiculaires AE, BF, celles-ci détermineront sur CD des segments égaux CF, DE.

Menons la droite de jonction EB, et, du centre I, abaissons sur CD la perpendiculaire IG, et prolongeons-la jusqu'au point H sur EB.



Puisque IG est une perpendiculaire abaissée du centre sur CD, elle divisera cette dernière droite en deux parties égales au point G. Et puisque IG, AE sont deux perpendiculaires sur cette même droite, elles seront parallèles. De plus, puisque la droite BI est égale à la droite IA, BH sera égale à HE (1). Vu l'égalité de ces dernières droites, et puisque BF est parallèle à HG, la droite FG sera égale à la droite GE, et, ces dernières droites étant retranchées des droites égales GC, GD, il restera les droites égales FC, ED ; ce que nous avons voulu démontrer (2).

PROPOSITION XIV.

Soit le demi-cercle AB ; retranchons de son diamètre AB deux droites égales AC, BD ; décrivons des demi-cercles sur les droites AC, CD, DB ; soit le point E le centre des deux demi-cercles AB, CD, et soit EF une perpendiculaire abaissée sur AB et prolongée jusqu'au

---

$\widehat{DAG} + \widehat{DFG} = 2$ droits, d'où : $\widehat{ADB} + \widehat{AGF} = 2$ droits. Or, $\widehat{ADB} = 1$ droit, d'où : $\widehat{AGF} = 1$ droit.

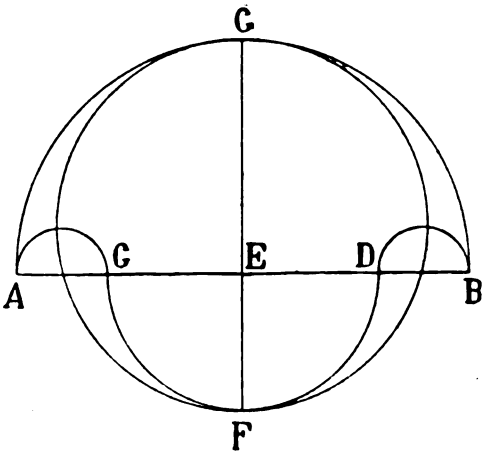
1. Par similitude des triangles ABE, IBH.

2. Pappus a démontré la même proposition en considérant le cas d'une sécante au lieu de celui d'une corde. (Voir PAPPUS, édition précitée, VII, p. 788.)

Digitized by Google

point G. Le cercle de diamètre FG équivaut à l'aire comprise entre le plus grand demi-cercle, les deux demi-cercles qui lui sont intérieurs et le demi-cercle du milieu qui lui est intérieur. Cette figure est celle qu'Archimède appelle *Salinon* (1).

Puisque la droite DC est divisée en deux parties égales au point E, et que la droite CA lui est ajoutée, les deux carrés de DA, AC vaudront le double des deux carrés de DE, EA (2). Or, la droite FG est égale à la droite DA (3) ; par conséquent, les deux carrés de FG, AC valent le double des deux carrés de DE, EA. Et puisque AB est double de AE, et que CD est double de ED, les deux carrés de AB, DC vaudront le quadruple des deux carrés de DE, EA, c'est-à-dire le double des deux carrés de GF, AC (4). Pareillement aussi, les deux cercles de diamètre AB, DC valent le double des cercles de diamè-



1. Les commentateurs se sont arrêtés sur la signification à accorder au mot Σάλινον qui, dans l'état de remaniement, ou plutôt de traduction libre, dans lequel *Les Lemmes* nous sont parvenus, pourrait être attribué aussi bien à un auteur postérieur qu'à Archimède lui-même. Barrow fait dériver le mot de σελήνιον, lunule ou amulette en forme de lune (*loc. cit.*, p. 275). Cantor le rattache au mot σάλος, agitation ou déferlement du flot, bien que ce mot s'éloigne fort du premier au point de vue de la terminaison *(Gesch. d. Mathematik)*. Heath y voit une corruption du latin *salinum*, salière, qui aurait été grécisé dans le dialecte usité en Sicile, et il appuie son opinion sur des considérations archéologiques, rapprochant la figure en question d'un petit ustensile domestique des anciens (*loc. cit.*, chap. II, p. 33). Enfin Heiberg rattache le mot avec plus de vraisemblance à σέλινον, feuille d'ache. (*Loc. cit.*, vol. II, p. 523.)

2. Voir EUCLIDE, livre II, proposition 10, dont la longue démonstration classique a fait l'objet de variantes déjà anciennes de la part de certains commentateurs, tels que Commandin, le Père Le Clerc, Le Mardelé et autres dont les ouvrages sont restés excellents.

La relation du texte $\overline{DA}^2 + \overline{CA}^2 = 2(\overline{DE}^2 + \overline{EA}^2)$ s'établit d'ailleurs comme suit: $DA = 2EC + CA$, d'où : $\overline{DA}^2 = 4\overline{EC}^2 + 4EC \times CA + \overline{CA}^2$. Dès lors : $\overline{DA}^2 + \overline{CA}^2 = 4\overline{EC}^2 + 4EC \times CA + 2\overline{CA}^2 = 2\overline{EC}^2 + 2[\overline{EC}^2 + 2EC \times CA + \overline{CA}^2] = 2[\overline{EC}^2 + (EC + CA)^2] = 2[\overline{DE}^2 + \overline{EA}^2]$.

3. En effet, $GE = EA$ et $EF = ED$, d'où : $GE + EF = FG = EA + ED = DA$.

4. On a : $AB = 2AE$ et $CD = 2ED$, d'où : $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4(\overline{AE}^2 + \overline{ED}^2)$. Or, on a vu dans les deux notes précédentes : $DA = GF$ et $\overline{DA}^2 + \overline{CA}^2 = 2(\overline{DE}^2 + \overline{EA}^2)$, d'où:

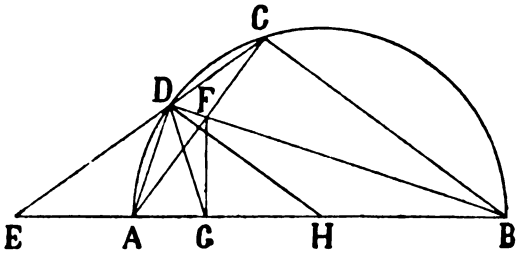
Digitized by Google

tres GF, AC, et les moitiés des cercles de diamètres AB, DC valent les deux cercles de diamètres GF, AC. Or, le cercle de diamètre AC vaut les deux demi-cercles AC, BD ; par conséquent, si des cercles précédents nous retranchons les deux demi-cercles qui sont communs, il reste une figure délimitée par les quatre demi-cercles AB, CD, DB, AC, appelée *Salinon* par Archimède, équivalant au cercle de diamètre FG (1) ; ce que nous avons voulu démontrer.

PROPOSITION XV.

Soient un demi-cercle AB, la corde AC du pentagone (2), et l'arc AD moitié de l'arc AC. Menons la droite de jonction CD prolongée jusqu'à sa rencontre au point E ; menons la droite de jonction DB coupant CA au point F, et, du point F, abaissons la perpendiculaire FG sur AB. La droite EG sera égale au demi-diamètre du cercle.

En effet, menons la droite de jonction CB ; soit H le centre, et menons les droites de jonction HD, DG, AD. Puisque l'angle ABC, dont la base est le côté du pentagone, vaut les deux cinquièmes de l'angle droit (3), chacun des deux angles CBD, DBA vaut la cinquième partie de l'angle droit. Or, l'angle DHA est double de l'angle DBH (4) ; par conséquent, DHA vaut les deux cinquièmes de l'angle droit. Et puisque, dans les



$\overline{GF}^2 + \overline{CA}^2 = 2(\overline{DE}^2 + \overline{EA}^2)$, d'où : $\overline{DE}^2 + \overline{EA}^2 = \frac{1}{2}(\overline{GF}^2 + \overline{CA}^2)$, d'où, comme le texte: $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 2(\overline{GF}^2 + \overline{CA}^2)$.

1. La relation de la note précédente devient, par substitution des aires de demi-cercles proportionnelles aux carrés des diamètres : $\frac{1}{2}$ cercle AB + $\frac{1}{2}$ cercle CD = cercle GF + cercle CA. Retranchons de part et d'autre le cercle CA, en observant que cercle CA = $\frac{1}{2}$ cercle CA + $\frac{1}{2}$ cercle DB, il vient : $\frac{1}{2}$ cercle AB + $\frac{1}{2}$ cercle CD — $\frac{1}{2}$ cercle CA — $\frac{1}{2}$ cercle DB = figure Salinon = cercle GF.

2. « Chorda pentagoni », c'est-à-dire la corde constituée par le côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle.

3. EUCLIDE, livre III, proposition 20. L'angle ABC, qui a pour mesure la moitié de l'arc AC, vaut la moitié de l'angle au centre AHC. Or, ce dernier angle, qui embrasse le côté du pentagone régulier, vaut $\frac{4}{5}$ de l'angle droit, d'où : angle ABC = $\frac{2}{5}$ angle droit.

4. Angle au centre double de l'angle inscrit embrassant le même arc.

Digitized by Google

deux triangles CBF, GBF, les deux angles en B sont égaux, les angles en G et C droits, et que le côté FB est commun, la droite BC sera égale à la droite BG. Et puisque, dans les deux triangles CBD, GBD, les deux côtés CB, BG sont égaux, les deux angles en B égaux, et que le côté BD est commun, les deux angles BCD, BGD seront égaux. Or, chacun de ces derniers angles vaut les six cinquièmes de l'angle droit (1), et est égal à l'angle externe du quadrilatère BADC inscrit dans le cercle (2) ; par conséquent, il reste l'angle DAB égal à l'angle DGA, et la droite DA sera égale à la droite DG (3). Et puisque l'angle DHG vaut les deux cinquièmes de l'angle droit, et que l'angle DGH vaut les six cinquièmes de l'angle droit, il reste l'angle HDG, valant les deux cinquièmes de l'angle droit, et la droite DG sera égale à la droite GH (4). Et puisque l'angle ADE externe au quadrilatère ADCB inscrit dans le cercle est égal à l'angle CBA (5), il vaut les deux cinquièmes de l'angle droit et est égal à l'angle GDH. Et puisque, dans les deux triangles EDA, HDG, les angles EDA, HDC sont égaux, de même que les deux angles DGH, DAE, et que les deux côtés DA, DG sont égaux, la droite EA sera égale à la droite HG. Ajoutons de part et d'autre la droite AG ; la droite EG sera égale à la droite AH ; ce que nous avons voulu démontrer.

D'après ce qui précède, il est évident que la droite DE est égale au demi-diamètre du cercle ; car l'angle en A étant égal à l'angle DGH, la droite DH sera égale à la droite DE (6). D'ailleurs, je dis que la droite EC est divisée au point D en rapport moyen et extrême, et que DE est son plus grand segment (7). En effet, la droite ED est

1. L'angle inscrit DCA vaut la moitié de l'angle au centre DHA embrassant le même arc. Or, angle DHA = $\frac{2}{5}$ angle droit ; donc : angle DCF = $\frac{1}{5}$ angle droit, d'où : angle BCD = angle BCF + angle DCF = 1 droit + $\frac{1}{5}$ droit = $\frac{6}{5}$ angle droit.

2. Le quadrilatère BADC étant inscrit dans le cercle, l'angle BCD est supplémentaire de l'angle DAB et, par conséquent, égal à l'angle DAE supplémentaire de l'angle DAB.

3. Angle DGB = angle BCD = angle DAE ; donc les angles égaux DGB, DAE ont les angles complémentaires DGA, DAG égaux. Le triangle ADG est donc isocèle ; d'où, comme le texte : DA = DG.

4. Puisque DA = DG, on a : DG = DC, d'où égalité des triangles DCB, DGB. Or, angle DCB = $\frac{4}{5}$ angle droit, d'où : angle DGH = $\frac{4}{5}$ angle droit. Dès lors, angle GDH = 2 droits — $\frac{8}{5}$ droit — $\frac{2}{5}$ dr. = $\frac{2}{5}$ angle droit. Donc : angle DGH = angle DHG. Le triangle DGH est donc isocèle, et DG = GH.

5. L'angle CBA, supplémentaire de l'angle ADC, est donc égal à l'angle ADE, supplémentaire de ce dernier.

6. Car, on a vu que EA = HG ; DA = DG et angle EAD = angle DGH, d'où : DE = DH = AH.

7. Expression conforme à la définition 3 du livre VI d'Euclide, dont voici la

Digitized by Google

une corde de l'hexagone, tandis que DC est la corde du décagone (1) ; ce qui a déjà été démontré au livre *Des Eléments* (2). Or, c'est ce que nous avons voulu démontrer (3).

---

vieille traduction de Le Mardelé (*loc. cit.*, p. 429) : « Une ligne droicte est dite estre coupée selon la moyenne et extrême raison lors que la toute est au plus grand segment, comme le plus grand segment est au moindre. » Ce que nous exprimons actuellement en disant que le grand segment est moyenne proportionnelle entre la droite entière et le petit segment.

1. C'est-à-dire : côté de l'hexagone régulier inscrit, et côté du décagone régulier inscrit.

On a vu que la droite ED est égale au rayon AH ; donc, la droite ED est égale au côté de l'hexagone régulier inscrit. D'autre part, on a posé la droite AC égale au côté du pentagone régulier inscrit ; donc, DC, qui sous-tend la moitié de l'arc AC, est égale au côté du décagone régulier inscrit.

2. La relation $\overline{ED}^2 = EC \times DC$ entre le côté de l'hexagone régulier et le côté du décagone régulier inscrits dans un même cercle est démontrée à la proposition 9 du livre XIII d'EUCLIDE, et en voici l'énoncé dans la traduction de Le Mardelé (*loc. cit.*, p. 1099) : « Si le costé de l'hexagone et le costé du décagone, inscrits en un mesme cercle, sont composez, la ligne droicte totale est couppée en la moyenne et extrême raison, et le plus grand segment d'icelle est le costé de l'hexagone. »

3. Pappus démontre une proposition analogue à la précédente dans les lemmes préliminaires à ses propositions relatives aux cinq polyèdres réguliers (Cfr. édition Hultsch, p. 418). Il considère un demi-côté du pentagone régulier inscrit perpendiculaire à un diamètre, c'est-à-dire la droite qui, dans la figure précédente, serait abaissée du point D perpendiculairement sur AB. Dès lors, si le point G est pris tel que AG soit double de la distance du point A au pied de la perpendiculaire abaissée du point D, on aura : $\overline{HG}^2 = AH \times AG$. Le cours de la démonstration amène Pappus à établir au préalable la relation $DA = DG = GH$.

La version arabe des *Lemmes* se termine ici par la phrase suivante : Fin du livre *Les Lemmes* d'Archimède. Louanges à Dieu seul, et ses bénédictions sur notre Maître Mahomet et sur ses disciples. (Cf. éd. Borelli, p. 408.)

Digitized by Google

LE PROBLÈME DES BŒUFS

Digitized by Google

Digitized by Google

LE PROBLÈME DES BŒUFS.

Problème qu'Archimède trouva, et qu'il destina, sous forme d'épigramme, dans une lettre adressée à Eratosthène de Cyrène, à ceux qui, dans Alexandrie, s'occupaient de ces matières.

Ami, si tu as la sagesse en partage, apporte grand soin à calculer à combien s'élevait la multitude des bœufs du Soleil qui, jadis, dans les plaines de l'île de la Sicile Thrinacienne, paissaient, répartis en quatre troupeaux de couleurs différentes, l'un blanc de lait, l'autre d'un noir luisant, le troisième brun et le quatrième tavelé. Il y avait dans chaque troupeau un nombre considérable de taureaux répartis dans les proportions suivantes : imagine, mon ami, que les blancs étaient en nombre égal à la moitié augmentée du tiers des taureaux noirs, et augmentée de tous les bruns, tandis que les noirs étaient en nombre égal aux quatrième et cinquième parties des tavelés, accrues de tous les bruns. Considère, d'autre part, que les tavelés, restants, étaient en nombre égal aux sixième et septième parties des blancs, accrues de tous les bruns. Les vaches étaient réparties de la manière suivante : Les blanches étaient en nombre précisément égal aux troisième et quatrième parties de tout le troupeau noir, tandis que les noires étaient de nouveau en nombre égal aux quatrième et cinquième parties des tavelées qui étaient toutes venues paître en compagnie des taureaux(1). Les tavelées étaient, d'autre part, en nombre égal aux cinquième et sixième parties de tout le troupeau brun, tandis que les brunes étaient

1. C'est-à-dire en compagnie des taureaux tavelés; donc le nombre des vaches noires est égal aux quatrième et cinquième parties de l'ensemble des vaches et des taureaux tavelés.

Digitized by Google

en nombre égal à la moitié de la troisième partie accrue de la septième partie du troupeau blanc (1).

Ami, si tu me dis exactement combien il y avait de bœufs du Soleil, quel était en particulier le nombre des taureaux gras et en particulier le nombre des vaches pour chacune des couleurs, on ne te qualifiera ni d'ignorant ni de malhabile en matière de nombres ; mais tu ne pourras cependant pas encore compter parmi les savants. Dès lors, observe encore les diverses manières dont les bœufs du Soleil étaient disposés: lorsque les taureaux blancs joignaient leur multitude aux noirs, ils se maintenaient en un groupe compact ayant la même mesure en profondeur qu'en largeur, et ce carré remplissait entièrement les immenses plaines de la Thrinacie. D'autre part, les bruns et les tavelés réunis, sans que les taureaux d'autres couleurs fussent présents ou sans qu'ils manquassent, étaient groupés de telle sorte que, le premier rang étant constitué par un seul, ils formaient graduellement une figure triangulaire (2).

Ami, si tu trouves toutes ces choses de pair, et si, en un mot, concentrant tes esprits, tu exprimes toutes les mesures de ces multitudes,

---

1. La première partie de l'énoncé du problème engage donc huit inconnues dans sept équations. Si nous désignons respectivement les taureaux blancs, noirs, bruns et tavelés par les lettres B, N, B′, T, et les vaches blanches, noires, brunes et tavelées par les lettres b, n, b', t, on aura :
$B=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})N+B'$; $N=(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})T+B'$; $T=(\frac{1}{6}+\frac{1}{7})B+B'$; $b=(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\ (N+n)$; $n=(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})\ (T+t)$; $t=(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})\ (B'+b')$, et $b'=(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{7})\ (B+b)$.

2. La seconde partie de l'énoncé impose les conditions auxquelles doivent satisfaire les quatre premières inconnues : $B+N=$nombre carré$=p^2$, et $B'+T=$nombre triangulaire$=\frac{q(q+1)}{2}$. Toutefois, si l'on considère qu'une pièce de bétail est plus longue que large, le nombre des taureaux blancs et noirs réunis dans la figure quadrangulaire peut ne pas être un nombre carré, mais un produit de deux nombres différents. De là, une interprétation de nature à simplifier le problème dans une certaine mesure, d'après laquelle les deux relations précédentes deviennent : $B+N=$ produit de deux nombres entiers, et $B'+T=$nombre triangulaire. Archimède ne nous a pas laissé d'indications sur la marche qu'il aurait suivie pour résoudre ce problème difficile, proposé en défi aux savants de l'Ecole d'Alexandrie. Le problème a cependant fait l'objet d'études intéressantes de la part de plusieurs mathématiciens modernes. Ainsi Wurm a résolu le problème dans le cas le plus simple que nous avons mentionné, et il arrive à un chiffre de plus de six mille milliards de têtes de bétail. Amthor a traité le problème dans le cas plus compliqué du nombre carré; il arrive à des expressions dont l'établissement seul peut intéresser au point de vue de l'algèbre supérieure, mais dont le développement complet aboutirait à des chiffres qui dépassent l'entendement, car il estime que la totalité des bœufs s'exprimerait par un nombre dont les chiffres rempliraient un volume de plus de 660 pages d'une impression analogue à celle d'une table de logarithmes.

Digitized by Google

va, te glorifiant d'avoir remporté la victoire, et persuadé que l'on te juge complètement consommé dans cette science (1).

1. On pourra consulter au sujet du *Problème des Bœufs* d'Archimède :
G. HERMANN. *De Archimedis problemate bovino*, Lipsiae, 1828 (thèse académique de 12 pages).
G. H. F. NESSELMANN. *Algebra der Griechen*. Berlin, 1842, p. 481.
B. KRUMBIEGEL. *Zeitschrift für Math. u. Physik*, XXV (1880), p. 121.
TERQUEM. *Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématique*, I, p. 121.
A. I. H. VINCENT. *Bulletin Terquem*, I, p. 165.
AMTHOR. *Zeitschrift für Math. u. Physik*. XXV, p. 156. Cette étude comporte la solution donnée par Wurm.
P. TANNERY. *Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux*, 1880, III, p. 369, et *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1881, V, p. 25.
J. L. HEIBERG. *Quaestiones Archimedeae*. Copenhague, 1879, p. 66-69.
M. CANTOR. *Zeitschrift für Math. u. Physik*. XXIV, p. 169.
T. L. HEATH. *Diophantus of Alexandria*, p. 142.
T. L. HEATH. *The Works of Archimedes*. Cambridge, 1897, p. 320.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

Pages

Préface . . . . . v | Introduction VII

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE

LIVRE I.

Pages

Préambule 3
Définitions 4
Postulats 5
Proposition I 6
» II 7
» III 8
» IV 10
» V 11
» VI 12
» VII 14
» VIII 15
» IX 17
» X 19
» XI 22
» XII 25
» XIII 28
» XIV 32
» XV 35
» XVI 36
Lemmes 38
Proposition XVII 39
» XVIII 40
» XIX 42
» XX 43
» XXI 45

Pages

Proposition XXII 46
» XXIII 47
» XXIV 49
» XXV 51
» XXVI 52
» XXVII 54
» XXVIII 55
» XXIX 57
» XXX 57
» XXXI 59
Corollaire 59
Proposition XXXII 60
» XXXIII 63
» XXXIV 65
Corollaire 68
Proposition XXXV 69
» XXXVI 71
» XXXVII 72
» XXXVIII 73
Corollaire 75
Proposition XXXIX 75
Corollaire 77
Proposition XL 77
Corollaire I 78
Corollaire II 79
Proposition XLI 79

Digitized by Google

		Pages
Proposition	XLII	82
»	XLIII	84
»	XLIV	85

LIVRE II.

		Pages
Préambule		89
Proposition	I	90
»	II	93
Corollaire		97
Proposition	III	99
»	IV	101
»	V	105
»	VI	109
»	VII	112
»	VIII	114
»	VIII, autre démonstration	118
»	IX	121

LA MESURE DU CERCLE

		Pages
Proposition	I	127
»	II	128
Proposition	III	130

DES CONOIDES ET DES SPHÉROIDES

		Pages
Préambule		137
Définitions		142
Proposition	I	143
»	II	145
»	III	149
»	IV	152
»	V	155
»	VI	156
Corollaire		157
Proposition	VII	157
»	VIII	160
»	IX	163
»	X	168
»	XI	168
»	XII	170
»	XIII	173
»	XIV	175
»	XV	177
Proposition	XVI	180
»	XVII	181
»	XVIII	182
»	XIX	184
»	XX	186
»	XXI	188
»	XXII	193
»	XXIII	196
»	XXIV	199
»	XXV	201
»	XXVI	207
»	XXVII	211
»	XXVIII	217
»	XXIX	219
»	XXX	226
»	XXXI	228
»	XXXII	233

DES SPIRALES

		Pages
Préambule		239
Proposition	I	243
»	II	244
»	III	245
»	IV	245
»	V	246
Proposition	VI	247
»	VII	249
»	VIII	250
»	IX	251
»	X	253
Corollaire		256

Digitized by Google

	Pages
Proposition XI	257
Corollaire	260
Définitions	261
Proposition XII	262
» XIII	262
» XIV	263
» XV	264
» XVI	266
» XVII	268
» XVIII	269
» XIX	273
» XX	275
Proposition XXI	277
Corollaire	279
Proposition XXII	279
Corollaire	280
Proposition XXIII	280
Corollaire	281
Proposition XXIV	282
» XXV	285
Corollaire	289
Proposition XXVI	289
» XXVII	293
» XXVIII	297

DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS
ou
DES CENTRES DE GRAVITÉ DES PLANS

	Pages
LIVRE I.	
Postulats	303
Proposition I	304
» II	304
» III	304
» IV	305
» V	306
Corollaire I	306
Corollaire II	307
Proposition VI	307
» VII	309
» VIII	310
» IX	311
» X	312
» X, autre démonstration	313
» XI	314
Proposition XII	315
» XIII	316
» XIII, autre démonstration	318
» XIV	320
» XV	321
LIVRE II.	
Proposition I	323
» II	325
» III	327
» IV	328
» V	330
» VI	333
» VII	335
» VIII	336
» IX	339
» X	344

L'ARÉNAIRE 353

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

	Pages
Préambule	377
Proposition I	378
Proposition II	379
» III	379

Digitized by Google

	Pages
Proposition IV	379
» V	380
» VI	382
» VII	383
» VIII	384
» IX	384
» X	385
» XI	386
» XII	387
» XIII	388
» XIV	388
Proposition XV	391
» XVI	392
» XVII	395
» XVIII	396
» XIX	397
» XX	397
Corollaire	398
Proposition XXI	398
» XXII	400
» XXIII	401
» XXIV	402

LES CORPS FLOTTANTS

LIVRE I.	Pages
Postulat	407
Proposition I	407
» II	408
» III	409
» IV	411
» V	412
» VI	413
» VII	414
Postulat	416
Proposition VIII	417
» IX	419
LIVRE II.	Pages
Proposition I	421
» II	422
» III	425
» IV	426
» V	429
» VI	431
» VII	434
» VIII	436
» IX	442
» X	446

LE STOMACHION 467

LA MÉTHODE RELATIVE AUX THÉORÈMES MÉCANIQUES

	Pages
Préambule	477
Lemmes	480
Proposition I	481
» II	484
» III	488
» IV	492
» V	494
» VI	497
» VII	500
Proposition VIII	502
» IX	502
» X	507
» XI	507
» XII	508
» XIII	511
» XIV	513
» XV	516

Digitized by Google

LE LIVRE DES LEMMES

	Pages		Pages
Proposition I	523	Proposition IX	533
» II	524	» X	534
» III	525	» XI	535
» IV	526	» XII	536
» V	528	» XIII	538
» VI	530	» XIV	538
» VII	532	» XV	540
» VIII	532		

LE PROBLÈME DES BŒUFS 545

ERRATA :

Page LIV, ligne 22, au lieu de : Commendini, lisez : Commandini.

» 8, note 2, au lieu de : $\frac{EZ}{HZ} > \frac{AB}{\Gamma B}$, lisez : $\frac{EZ}{HZ} < \frac{AB}{\Gamma B}$.

» 10, ligne 16, au lieu de Θ, lisez H.

» 100, figure, au lieu de Λ, lisez : A.

» 260, note 4, au lieu de lgnes, lisez : lignes.

» 451, ligne 1, au lieu de Bſ, lisez : B′.

Imprimé par Desclée, De Brouwer & Cie. Bruges.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google