ARCHIMEDIS

OPERA NON NVLLA

A FEDERICO COMMANDINO

VRBINATE

NVPER IN LATINVM CONVERSA,

ET COMMENTARIIS

ILLVSTRATA.

Quorum nomina in sequenti pagina leguntur.

AL DVS

CVM PRIVILEGIO IN ANNOS X.

VENETIIS,

apud Paulum Manutium, Aldi F.

M D L V I I I.

ARCHIMEDIS OPERA,

QVAE HOC LIBRO CONTINENTVR.

RAINVTIO FARNESIO,

CARDINALI AMPLISSIMO,

ET OPTIMO.

QVANQVAM ſcientiæ omnes AMPLISSIME CARDINALIS, quibus intercedentibus ad Deos immortales quamproxime accedimus, ueritatem propoſitam habent, quam, ut ſubiectam materiam tractant, & in cuius inquiſitione, atque inueſtigatione uerſantur: tamen mathematicæ diſciplinæ, meo quidem iudicio, id munus præclare tueri uidentur; quæ non ſolum per ſeipſas, id, quod ſpectant, aſſequuntur; uerum etiam reliquis ſcientiis clariſsimam lucem afferentes, ut earum multo faciliorem cognitionem capiamus, efficiunt. Si enim in naturæ obſcuritatem (ut ab ea potiſsimum ordiamur) intuebimur: ne minimam quidem partem reperiemus, non ſexcentis obſtructam difficultatibus; in qua quid ueriſimillimum ſit, inuenire, non mediocris ingenii, & ſummæ felicitatis eſſe iudicandũ eſt. Mundus ipſe utrum nunquam non fuerit, an aliquando genitus ſit, inter non minorum gentium philoſophos, ſed philoſophiæ ipſius parentes Platonem, & Ariſtotelem ſumma fuit diſſenſio. De principiis autem rerum, è quibus omnia oriuntur, quando tres, aut ad ſummum quatuor philoſophi, qui eadem ſentirent, inuenti ſunt? Nam de motu, de inani, de tempore, de elementis ipſis, & eorum natura, uariæ, atque inter ſe diſsidentes philoſophorum ſententiæ facile oſtẽdunt, phyſiologiam quibuſdam potius coniecturis, quamfirmiſsimis argumentationibus niti; optimeq́; nobiſcum agi, ſi, quid in ea maxime probabile ſit, intelligamus. quamobrem diuinus Plato non immerito eiuſmodi ſcientiam εἰκοτολογίαν appellandã eſſe cenſuit. Quid dicam de prima philoſophia? quæ Deum quidem optimum maximum, diuinasq́; illas mentes ſibi examinandas, explicandasq́; proponit: uerum neque id, quod pollicetur, præſtare poteſt: & ex iis, quæ ſub oculos noſtros cadunt, nos ad diuinæ bonitatis, ac potentiæ contemplationem perducit. exactas autem, & exquiſitas illas rationes, quibus mathematici iure gloriari poſſunt, tantum abeſt, ut attingat, ut cum Socrate aperte fateatur, ueram ipſius Dei notionem, per inficiationem tantum haberi poſſe, animorumq́; noſtrorum quaſi luminibus tantarum rerum altitudinem officere. Vt enim ueſpertiliones lumẽ ſolis ferre non poſſunt, ita diuinarum rationum ſplendor, ac dignitas ingenii nostri aciem perstringit. Cum igitur è tribus scientiis, quæ uere scientiæ appellantur, & physiologia, & prima philosophia in probabilitate uersentur, restant mathematicæ disciplinæ, quæ non tam subiecta materia, quàm certarum argumẽtationum, quas in mediũ afferunt, dignitate, reliquis scientiis iure optimo antecellunt. nã si quid mathematici, uel in geometria, uel in astrologia, uel arithmeticis ratione confirmant, id ex oraculo Pythii Apollinis nobis editũ existimari potest. Quàm uero late pateant hæ disciplinæ; quantas utilitates, & domesticis, & forensibus rebus importent, ex earum diuisione apertissime cognoscemus. Siquidem primum uel circa ea uersantur, quæ quamuis à materia re ipsa separari non possunt: tamen cogitatione, atque intellectione, ut separabilia comprehenduntur: quod genus sunt geometria, & Arithmetice. uel in eorum, quæ sensibus percipiuntur, contemplatione occupantur: quo in numero mechanice, astrologia, optice, metiendi ratio, musica, ratiocinatrix à ueteribus reponuntur. Deinde harum unaquæque partium in uaria tanquam membra dispertitur. quæ omnia tantum habent momentum, cum ad rerum priuatarum, & publicarum administrationem, tum ad animi nostri perfectionem, ut uere dicere possimus, ex omnibus scientiis, & artibus, quæ à clarissimis uiris inuentæ sunt, & auctæ, nihil mathematicis disciplinis honestius, nihil utilius, nihil humano generi magis necessarium excogitari potuisse. Omitto, quòd Pythagorei numeris mundum, & omnia, quæ in eo essent, accepta referebant; quòd Plato ab Academia sua rudes in geometria reiiciendos esse iudicabat. Quid Aristoteles? quem nostræ memoriæ philosophi nunquam nõ in manibus habent. num quæ uir ille summus, uel in disserendi ratione, uel in naturæ obscuritate scripsit, hospes in mathematicis disciplinis attingere audebit? quare mea sententia nemo uere philosophari poterit, nisi idem prius in his nobilissimis artibus plurimum studii, plurimumq; operæ posuerit. nec aliter sensisse uideo Galenum medicorum principem in eo libello, qui Philosophus inscribitur. Venio nunc ad id uitæ genus, quod, omisso ueritatis indagandæ studio, totum se ad actionem conuertit. huic si recte consideremus, maximo usui esse mathematicas disciplinas inueniemus. Nam siue priuatis, & domesticis negociis distringimur, & uel rei rusticæ, uel mercaturis faciendis operam damus; nunquam sine astrologia, & metiendi, ratiocinandiq; ratione recte munus nostrum exequemur: siue ad gubernacula rerum publicarum sedentes, pro earum dignitate, atque incolumitate uigilamus, cum de Solonis sententia

tentia

tentia præmium, & pœna sint, ea fundamenta, quibus res omnes publicæ nituntur: non uideo qua ratione fieri possit, ut studiosis ciuibus, qui de patria beni meriti sint, præmia pro dignitate decernamus; seditiosis autem, & improbis hominibus debitas pœnas infligamus, nisi ex geometria, & arithmeticis utrasque proportiones optime didicerimus; quemadmodum à principe philosophorum Aristotele in quinto de uita, & moribus non tam eleganter, quàm copiose disputatum est. Quòd si bellum mari, aut terra gerere oporteat, & uel hostes à mœnibus nostris repellendi, uel nos iniuriis affecti ad eorum urbes oppugnandas cum exercitu proficisci necesse habeamus: incredibile est, quàm magnum nobis adiumentum afferat, non solum geometria, & arithmetice, uerum etiam ea pars mathematicarum disciplinarũ, quàm μηχανικὴν græci uocant; & eius administra ὀργανοποιητικὴ ab iisdem appellata. immo, si uerum fateri uolumus, sine his artibus res militaris manca quodam modo, & imperfecta est habenda. Nam præter alia multa, quæ in summo imperatore inesse oportet, quis nescit illa tria non in postremis habenda esse? rectam castrametandi rationem, qua in re Pyrrhum Epirotarum regem suæ, ac superioris memoriæ imperatoribus præstitisse accepimus: instruendi acierum prudentiam, quam quidem in Alexandro Magno, & post eũ in Romanis imperatoribus eximiam fuisse, omnes ferè historici & græci, & latini literarum monumentis prodiderunt: solertiam in excogitandis machinis, ac tormentis militaribus, quæ uel ad propugnationem, uel oppugnationem urbium attinent: cuius artificii gloriam Romani ceteris nationibus facile præripuerunt. Num hæc omnia sine his disciplinis, quas paulo superius commemoraui, rei militari tantopere necessariis, ulla ratione administrari possunt? Hanc esse caussam existimo, cur OCTAVIVS frater tuus, Parmensium, & Placentinorũ Dux, multos abhinc annos in mathematicas disciplinas sibi toto animo incumbendum putauit. cum enim se ad gloriam, & amplitudinem natum esse intelligeret; nihil prætermittere uoluit, quod eum omnis memoriæ ducibus parem, atque adeo superiorem efficere posset. Vides igitur, AMPLISSIME CARDINALIS, homines, qui uere homines sunt, non aqua, non igni (ut in prouerbio est) pluribus locis uti, quàm mathematicis disciplinis. In his complures quidem summi, & admirabiles uiri extiterunt. sed Archimedes Syracusanus omnes omnium temporum mathematicos longe, multumq; superauit. nam & in astrologia quamplurima, quæ superiores ignorauerant, adinuenit. quod facilius intelligeremus, si sphæram illam uitream

tream ab eo admirabili quodam artificio constructam haberemus, in qua septem errantium stellarum cursus, multum inter se, aut altitudine, aut humilitate distantes oculis cerneremus. & in arithmeticis quantum excelluerit, illo aureo libello, quem de arenæ numero conscripsit, apertissime ostendit. In musicis autem, quamuis nihil ab eo memoriæ, ac literis proditum in manus nostras peruenerit: tamen credibile est, egregium illum uirum huius etiam disciplinæ uim, & materiam scientia, & cognitione cōprehendisse: potiusq; aliquid, ac potius multa addidisse, & attulisse de suo, quàm non omnia, quæ uoluerit, consecutum esse. Nam quòd ad geometriam attinet, Deum aliquem in ea fuisse Archimedem nemo sanæ mētis inficiari poterit. siquidem is nō solum in geometricis rationibus se ipsum exercuit, ut faciliorem sibi aditum ad rerum cælestium contemplationem præpararet: uerum etiam, ut eas ad communes hominum utilitates, tum in bello, tum in pace transferret, magnopere elaborauit. quod licet ante eum Architas, & Eudoxus contra diuini Platonis sententiam factitauerint: tamen si cum Archimede comparentur, uix quintæ classis (ut ita dicam) mathematici uidebuntur. machinationes enim illas, quæ in gratiam Hieronis regis ab Archimede excogitatæ sunt, nullæ unquam literæ conticuerunt. Nauis illa oneraria, quam unius machinæ adiumento, solus nullo negocio deduxit, adhuc sermone omnium celebratur. huius artificii uim Marcellus imperator in Syracusanæ urbis oppugnatione sensit, cum non sine multarum nauium iactura, & quamplurimorum militum cæde urbem expugnasset. quamobrem cum in ipsa militum, qui superfuerant, in urbem irruptione, quantum in ipso fuit, Archimedis saluti, & incolumitati consuluisset: magnopere doluit, posteaquam eum contra suum imperium à gregario milite interfectum esse intellexit: eumq; honorem mortuo habuit, qui præstantissimis uiris post obitum haberi solet. cuius sepulchrum M. Cicero à se, cum in Sicilia quæstorem ageret, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Multa alia prætereo, quæ cum uerissima sint, tamen apud posteros plus admirationis, quā fidei habuerunt. Archimedis pauca quidem extant scripta, sed obscurissima, & quæ maximo negocio uix intelligi possint. quorum cum nonnulla iam ab Eutocio Ascalonita doctissime, planissimeq; explicata essent, superioribus temporibus Ioannes Regiomontanus, quem honoris caussa nomino, reliqua interpretāda suscepit. uerum, nescio quo fato, lucubrationes illæ à studiosis adhuc desiderantur. Nostra uero memoria Franciscus Maurolicus Messanensis in hoc genere

nere literarum à primis temporibus ætatis suæ uersatus, ad eandem interpretationem aggressus est. qua in re (ut mea fert opinio) & officio suo, & expectationi hominum cumulate satisfecisset, nisi postremo, scientiis mathematicis multa salute dicta, sacrarum literarũ in studia sese penitus abdidisset. Ego uero, cum ut eorum, qui hisce disciplinis delectantur, studia incitarem, tum ut mihi ipsi satisfacerem, eandem interpretandi Archimedis prouinciam suscepi. quam iis, qui nondum in his studiis magnos progressus fecerunt, arbitror fore non inutilem. non enim me Persio, uel Scipioni, aut Rutilio scripsisse profiteor, quorum iudicium à Lucilio reformidabatur, sed iis, qui mathematicas disciplinas primoribus labris attigerunt. fortasse posthac alii, quibus ego in hoc scientiæ genere facile concedo, meo exemplo admoniti, multo & meliora, & uberiora conscribent, atque Archimedis sensa latinis literis tum doctius, tum elegantius illustrabunt. Hos autem meos labores, qualescunque sint, cur tibi præcipue dicarem, multæ quidem me caussæ impulerunt. sed illa una, ut id præcipue facerem, hortata est, quòd ex amplissimis patribus, quibus ecclesiæ sanctæ procuratio commissa est, neminem habemus, qui tanto studio harum disciplinarum teneatur; quas tibi tanquam gradus quosdam fecisti ad diuinam sapientiam, quæ uere sapientia est, assequendam. Nam de mea erga te perpetua obseruantia, tuaq; singulari erga me humanitate in præsentia mihi tacendum esse iudico, ne, quod cogitatione uix possum, uidear oratione uoluisse complecti. unum illud dicam, si hos meos commentariolos tibi nõ ingratos esse cognouero, nihil mihi gratius, nihil optatius accidere potuisse. tuum enim in omnibus scientiis acerrimum iudicium, ea, qua polles, auctoritate coniunctum, me clientem tuum ab omnibus maleuolorum obtrectationibus facile uindicabit.

Federicus Commandinus.

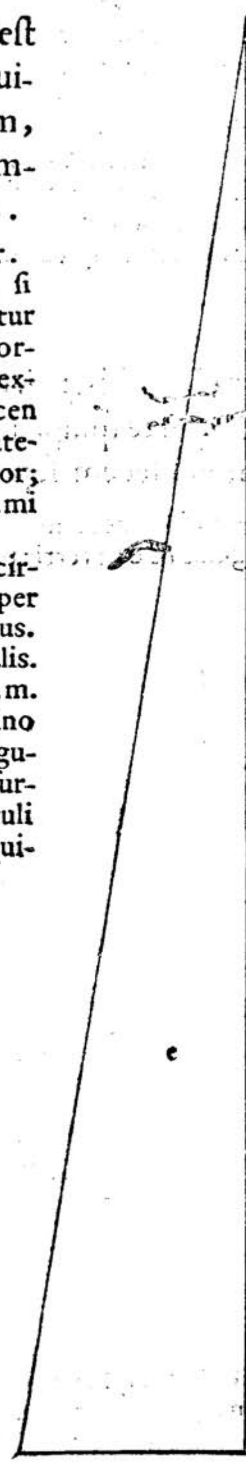
ARCHIMEDIS CIRCVLI DIMENSIO.

PROPOSITIO I.

QVILIBET circulus æqualis est triangulo rectangulo: cuius quidem semidiameter uni laterum, quæ circa rectũ angulũ sunt, ambitus uero basi eius est æqualis.

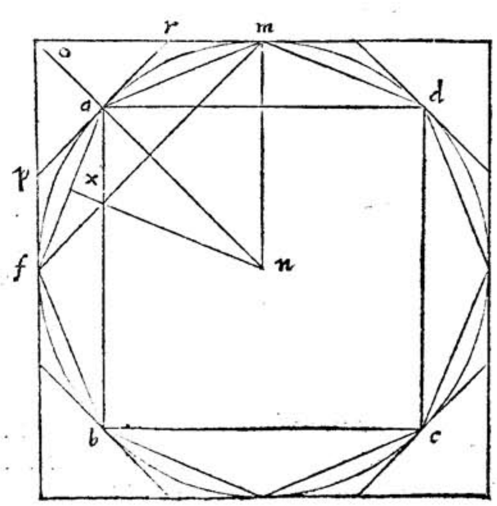
Sit a b c d circulus, ut ponitur. Dico eum æqualem esse triangulo e. si enim fieri potest, sit primum maior circulus: & ipsi inscribatur quadratum a c: secenturq; circunferentiæ bifariam: & sint portiones iam minores excessu, quo circulus ipsum triangulum excedit. erit figura rectilinea adhuc triangulo maior. Sumatur centrum n; & perpendicularis n x. minor est igitur n x trianguli latere. est autem & ambitus rectilineæ figuræ reliquo latere minor; quoniam & minor est circuli ambitu. quare figura rectilinea minor est triangulo e: quod est absurdum.

Sit deinde, si fieri potest, circulus minor triangulo e: & circumscribatur quadratum: circũferentiisq; bifariam sectis, per ea puncta contingentes lineæ ducãtur. erit angulus o a r rectus. & idcirco linea o r maior, quàm r m; quòd r m ipsi r a sit æqualis. triangulum igitur r o p maius est, quàm dimidium figuræ o f a m. itaque sumantur portiones, ipsi p f a similes; quæ quidem minores sint eo, quo triangulum e excedit circulum a b c d. erit figura circumscripta adhuc triangulo e minor: quod item est absurdum, cum sit maior: nam ipsa quidem n a æqualis est trianguli catheto: ambitus uero maior est basi eiusdem. ex quibus sequitur circulum triangulo e æqualem esse.

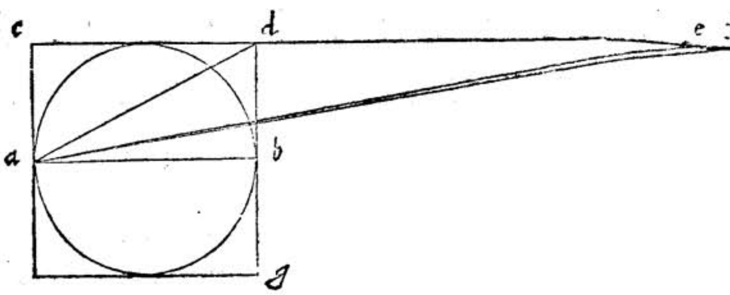


PROPOSITIO II.

Circulus ad quadratũ diametri eam proportionẽ habet, quam XI ad XIIII.



Sit circulus, cuius diameter a b: & circumscribatur quadratũ c g: & ipsius c d dupla sit d e: sit aũtem e f, septima eiusdẽ c d. Quo-

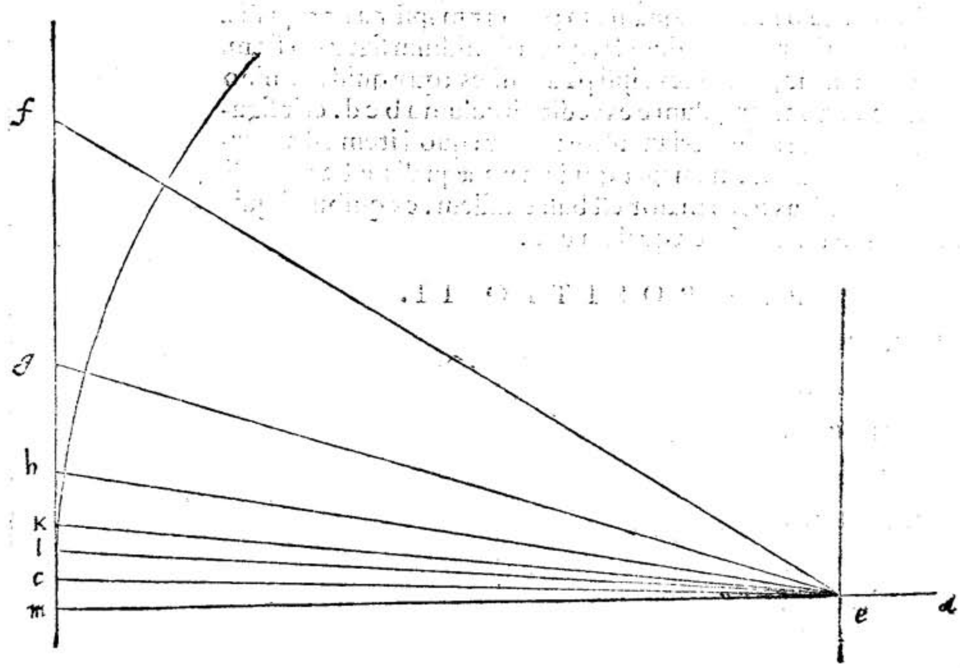


niam igitur a c e triangulū ad triangulum a c d eam proportionē habet, quam 21 ad 7: triangulum autem a c d ad triangulum a e f habet eam, quam 7 ad 1: erit a c f triangulum ad triangulum a c d, ut 22 ad 7. sed ipsius a c d trianguli quadruplum est c g quadratum: & triangulum a c f circulo a b est æquale, quoniam cathetus a c æqualis est semidiametro, basis autem diametri tripla, & propè septima parte excedens, ut monstrabitur. Circulus igitur ad quadratum c g eandem proportionem habet, quam 11 ad 14.

PROPOSITIO III.

CViuslibet circuli ambitus diametri est triplus, & adhuc superat parte quapiam, quæ quidem minor est septima diametri, maior autem decem septuagesimis primis.

a. b Sit circulus, cuius diameter a c, centrum e: & c f linea circulum contingat: & angulus f e c sit tertia pars recti. ergo linea e f ad f c eam proportionem habet, quam



c 306 ad 153. ipsa uero e c ad c f [proportionem habet eam, quam] 265 ad 153. secetur angulus f e c bifariam ducta e g linea. ut igitur f e ad e c, ita est f g ad g c: &
d permutando, componendoq́;, ut utraque f e, e c ad f c, ita e c ad c g. maiorem ergo

[maiorem proportionem habet, quam]

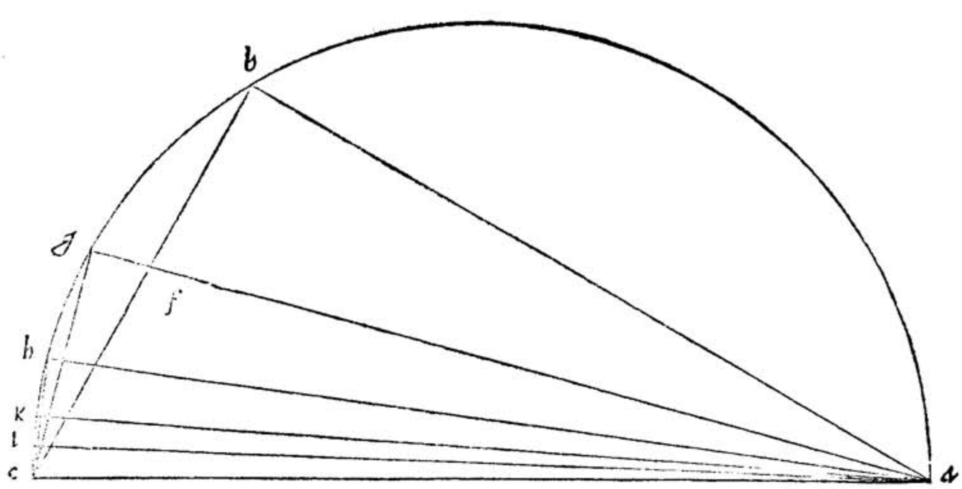
ergo proportionem habet c e ad c g, quàm 571 ad 153. [quare e g ad g c eam poteſtate proportionem habet, quam 349450 ad 23409; longitudine uero eam, quam 591 $\frac{1}{8}$ ad 153.] Rurſus angulus g e c bifariam ſecetur ipſa e h linea. eadem ratione e c ad c h maiorem proportionem habet, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153. quare h e ad h c maiorem habet, quàm 1172 $\frac{1}{8}$ ad 153. Secetur item h e c angulus bifariam ducta e k. habet e c ad c k proportionem maiorem, quàm 2334 $\frac{1}{4}$ ad 153. ergo e k ad c k maiorem habet, quàm 2339 $\frac{1}{4}$ ad 153. Secetur demum angulus k e c bifariam ipſa l e. habet igitur e c ad l c maiorem proportionem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153. Itaque quoniam angulus f e c, cum ſit tertia pars recti, quater bifariam ſectus eſt: ipſe l e c angulus erit recti pars quadrageſima octaua. ponatur iam angulo l e c æqualis angulus ad e, qui ſit c e m. erit l e m angulus recti pars uigeſima quarta. quare l m recta linea latus erit polygoni circulo circumſcripti, quod ſex & nonaginta lateribus continetur. Quoniam igitur oſtenſa eſt e c ad c l maiorem habere proportionẽ, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153: ipſius autem e c dupla eſt a c: & ipſius c l dupla l m: habebit a c ad ambitum polygoni ſex & nonaginta laterum, proportionem maiorem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 14688. & eſt tripla, exceditq; 667 $\frac{1}{2}$, quæ quidem minora ſunt, quàm ſeptima pars 4673 $\frac{1}{2}$. quare ambitus polygoni circulo circũſcripti ipſius diametri eſt triplus, & inſuper minor, quàm ſeſquiſeptimus. circuli igitur ambitus multo minor eſt, quàm triplus ſeſquiſeptimus ſuæ diametri.

[quare e g ad g c poteſtate maiorem habet proportionem, quàm 349450 ad 23409; longitudine uero maiorẽ, quàm 591 $\frac{1}{8}$ ad 153]

e f g h i K

Sit circulus, cuius diameter a c: & angulus b a c tertia pars recti. habet ergo a b ad b c minorem proportionem, quàm 1351 ad 780. ſed a c ad c b habet eam, quam 1560 ad 780. ſecetur bifariam angulus b a c ducta linea a g. Itaque quoniam æqualis eſt angulus b a g angulo g c b; ſed & ipſi g a c: erit & g c b angulus ipſi g a c æqualis. et angulus communis a g c eſt rectus. ergo & tertius angulus g f c, tertio a g c æqualis erit: & triangulum a g c triangulo c g f æquiangulum. quare ut a g ad g c, ita c g ad g f, & a c ad c f. ſed ut a c ad c f, ita & utraque c a, a b ad b c. ut igitur utraque b a, a c ad b c, ita a g ad g c: & propterea a g ad g c minorem habet proportionem,

l m n o



quàm 2911 ad 780, ipſa uero a c ad c g minorem habet, quàm 3013 $\frac{3}{4}$ ad 780. Rurſus ſecetur bifariam angulus c a g ducta a h. habet eadem ratione a h ad h c minorem proportionem, quàm 5924 $\frac{3}{4}$ ad 780, uel quàm 1823 ad 240. utraque enim utriuſque eſt $\frac{4}{13}$, quare a c ad c h minorem proportionem habet, quàm 1838 $\frac{9}{11}$ ad 240. ſecetur item bifariam angulus h a c ducta k a. ergo & ipſa k a ad k c minorem habet

p q r

proportionem, quam 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240, uel quàm 1007 ad 66: nam utraque utriusque est $\frac{1}{4}\frac{1}{6}$. quare a c ad k c minorem habet, quàm 1009 $\frac{1}{6}$ ad 66. ſecetur poſtremo k a c angulus bifariam ipſa l a. habet l a ad a c minorem proportionē, quàm 2016 $\frac{1}{6}$ ad 66. ipſa uero a c ad c l minorē habet, quàm 2017 $\frac{1}{4}$ ad 66. è contrario igitur polygoni ambitus ad diametrū maiorē proportionem habet, quàm 6336 ad 2017 $\frac{1}{4}$; quæ quidem 6336 ipſorum 2017 $\frac{1}{4}$ maiora ſunt, quàm tripla ſuper decies partientia ſeptuageſimas primas. quare & ambitus polygoni ſex & nonaginta laterum circulo inſcripti, ipſius diametri maior eſt, quàm triplus ſuperdecies partiens ſeptuageſimas primas. circuli igitur ambitus multo maior eſt, quàm triplus ſuperdecies partiens ſeptuageſimas primas. Ex quibus conſtat circuli ambitum ſuæ diametri triplum eſſe, & adhuc minorem, quàm ſeſquiſeptimum; maiorem uero, quàm ſuperdecies partientem ſeptuageſimas primas.

ARCHIMEDIS

LIBER DE LINEIS SPIRALIBVS

ARCHIMEDES DOSITHEO S. D.

DEMONSTRATIONES theorematum, quæ ad Cononem miſſa ſunt; quas ut conſcriberem, aſſidue efflagitabas; plurimas in iis quidem libris, quos Heraclides attulit, explicatas habes: non nullas uero hoc etiam uolumine cõplexus ad te mitto. Verum ne mireris, ſi longi temporis interuallo has demonſtrationes edimus: hoc enim ea de cauſſa factum eſt, quòd prius cum iis cõmunicare ſtatueramus, qui in artium ſtudiis, & diſciplinis uerſati ſunt: & in his inueſtigandis omnem ſuam operam poſuerunt. Quædam enim in geometria theoremata principio uidentur uia, ac ratione tradi facile non poſſe; quæ deinde procedente tempore illuſtrantur, & tanquam excoluntur. At uero Conon, cum illi non ſatis diuturnum ad hæc indaganda tempus datum eſſet, re nondum abſoluta uitam cum morte commutauit, eaq; obſcura reddidit; cum tamen, his omnibus inuentis, & aliis quamplurimis illuſtratis, geometriæ ſcientiam magnopere ornaſſet, & auxiſſet. in eo enim non uulgarem harum diſciplinarum cognitionem, ſingularem præterea induſtriam fuiſſe, non ignoramus. Multorum uero annorum ſpatio poſt Cononis mortem, neminem uidemus ex his problematibus ullum attigiſſe. Placet igitur, eorum unumquodque ſigillatim in medium proferre: ſiquidem duo quædam continentur in eo libro ſeparata, quæ minime abſoluta ſunt. Ex quo fit, ut, qui omnia ſe inueniſſe prædicant, nec tamen demonſtrationem afferunt, eos facile res ipſa redarguat: quippe qui profiteantur ſe ea inueniſſe, quæ fieri nullo modo poſſunt. Quæ ſint igitur ea problemata, & quorum præterea demonſtrationes habes, quæ ue ſint, quæ in hoc libro continentur; tibi iam explicandum cenſeo. Primum problema erat, ſphæra data ſpatium planum inuenire, quod ſuperficiei ſphæræ eſſet æquale. quod quidem primum à nobis explicatum eſt in libro, quem de ſphæra edidimus. cum enim demonſtratum ſit, uniuſcuiuſque ſphæ

ræ ſuperficiem quadruplam eſſe maximi circuli, eorum, qui in ipſa deſcribuntur: conſtat fieri poſſe, ut ſpatium planum inueniatur
b ſphæræ ſuperficiei æquale. Secundum problema erat, Dato cono, uel cylindro ſphæram inuenire ipſi cono, uel cylindro æqualem.
c Tertium, Datam ſphæram plano ita ſecare, ut portiones eius inter
d ſe datam habeant proportionem. Quartum, Datam ſphæram plano ita ſecare, ut portiones ſuperficiei eius datam habeant proportio
e nem. Quintum, Datam ſphæræ portionem, portioni ſphæræ datæ
f ſimilem facere. Sextum, Datis duabus ſiue eiuſdem, ſiue non eiuſdem ſphæræ portionibus, inuenire portionem ſphæræ, quæ alteri quidem earum ſit ſimilis, ſuperficiem uero alterius ſuperficiei æqua
g lem habeat. Septimum, A data ſphæra portionem plano ita abſcindere, ut portio ad conum, cuius baſis ſit eadem portioni, & altitudo æqualis, datam proportionem habeat; quæ quidem maior ſit ea, quam habent tria ad duo.

Horum igitur quæ dicta ſunt, omnium, Heraclides demonſtrationes attulit. Quod autem poſt hæc erat ſeparatum, falſum eſt. Si ſphæra uidelicet plano ſecetur in partes inæquales; maior portio ad minorem duplam proportionem habet eius, quam ſuperficies maior habet ad minorem. Hoc uero falſum eſſe apparet ex iis, quæ prius ad te miſſa ſunt, Erat enim & illud in ipſis ſeparatum, ſi ſphæra ſecetur in partes inæquales plano ad rectos angulos ducto ſuper aliquã diametrum earum, quæ ſunt in ſphæra: maior portio ad minorem eandem habebit proportionem, quam portio diametri maior ad mi-
h norem. ſphæræ nanque maior portio ad minorem, minorem quidem proportionem habet, quàm ſit dupla illius, quæ eſt maioris ſuperficiei ad minorem, maiorem uero, quàm ſit eiuſdem ſeſquialtera. Erat præterea & extremum problema ſeparatũ, falſum. ſi ſphæræ alicuius diameter ſecetur ita, ut quadratum maioris partis, quadrati minoris ſit triplum, & per punctum ſectionis planũ ad rectos angulos ſuper diametrũ ducatur, quod ipſam ſphæram ſecet: erit talis figura, qualis eſt maior ſphæræ portio, aliarum portionũ maxima, quæ ſuperficiem habeant æqualem. Id autem falſum eſſe conſtat ex theorema
i tibus, quæ ad te miſſa ſunt. demonſtratum enim eſt, dimidiam ſphæram maximam eſſe omnium ſphæræ portionum, quæ æquali ſuperficie contineantur. Deinde de cono hæc propoſita erant. Si rectanguli coni ſectio manente diametro circumferatur: ita ut ipſa diameter
K ſit axis: figura à ſectione coni rectanguli deſcripta conoides uocetur. Et ſi conoides planum contingat: ipſi autem contingenti plano æquidiſtans

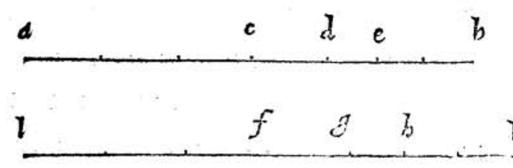
distans alterum planum ducatur, quod abscindat portionem conoidis: abscissæ portionis basis uocetur planum abscindens; uertex autem punctum, in quo alterum planum conoides contingit. Quòd si dicta figura secetur plano ad rectos angulos super axem ducto: sectionem eius circulum esse, manifestum est. portionem uero abscissam sesquialteram esse coni basim habentis portioni eandem, & æqualem altitudinem, hoc demonstrare oportet. Et si conoidis duæ portiones abscindantur planis quomodocunque ductis: sectiones quidem esse conorum acuti angulorum sectiones, perspicuum est, dummodo ne plana abscindentia sint ad rectos angulos super axem ducta. sed portiones habere inter se proportionem eandem, quam habent potestate lineæ ab earum uerticibus usque ad abscindentia plana æquidistantes axi ductæ, illud quoque demonstrare oportet. Horum autem demonstrationes nondum ad te mittuntur. Postremo de linea spirali hæc proposita erãt. est enim hoc tanquam aliud problematum genus, nihil cum prædictis commune habens; de quibus in hoc libro tibi demonstrationes conscripsimus. Si recta linea in plano, manente altero termino æqueuelociter circunducta, rursus restituatur in eum locum; à quo primum cœpit moueri: & unà cum linea circunducta punctum feratur æqueuelociter ipsum sibi ipsi in eadem linea, incipiens à termino manente: eiusmodi punctum spiralem lineam in plano describet. Dico iam spatium contentum linea spirali, & recta p
in pristinum locum restituta, tertiam partem esse circuli descripti, centro quidem puncto manente, interuallo autem, ea lineæ rectæ parte, quæ à puncto fuerit in una circulatione permeata. Si lineam q
spiralem recta linea contigerit in ultimo ipsius spiralis termino; alia autem recta à puncto manente ducatur perpendicularis super lineam circunductam, restitutamq; in priorem locum: ita ut cum contingente coeat: Dico hanc lineam circumferentiæ circuli esse æqualem. Si r
linea circunducta, punctumq; in ea latum pluribus circulationibus circumferantur; & rursus in locum, à quo moueri cœperant, restituantur: Dico spatii linea spirali in secunda circulatione contenti, duplum quidem esse, quod in tertia circulatione continetur; quod uero in quarta triplum, quod in quinta quadruplum, & ita semper spatia in posterioribus contenta circulationibus, secundum numeros consequentes, multiplicia erunt spatii contenti in secũda circulatione. et quod in prima circulatione continetur spatiũ, sexta pars erit spatii in secunda circulatione contenti. Si in linea spirali in una circu ſ
latione descripta duo puncta sumantur; & ab eis ducantur rectæ lineæ

neæ ad manentem lineæ circunductæ terminum: deſcribāturq; duo circuli, centro quidem puncto manente, interuallis uero rectis lineis ad manentem lineæ terminum ductis: & earum linearum minor producatur. Dico ſpatium contentum circumferentia illa maioris circuli, quæ in eadem parte eſt, in qua linea ſpiralis, mediaq; inter lineas habetur; & contentum linea ſpirali, & recta producta; ad ſpatiū contentum circumferentia minoris circuli, eademq; linea ſpirali, & recta terminos earum iungente, eandem proportionem habere, quam habet ſemidiameter minoris circuli cum duabus tertiis exceſſus, quo ſemidiameter maioris circuli excedit ſemidiametrum minoris; ad ſemidiametrum minoris unà cum tertia dicti exceſſus parte. Horum igitur, & aliorum circa ſpiralem lineam demonſtrationes à me in hoc libro ſunt conſcriptæ. præmittuntur uero, ſicut in aliis geometricis, quædam ad eorum demonſtrationem neceſſaria. & ſumo in his quoque ea, quæ in aliis libris ſumpta ſunt, Videlicet linearum inæqualium, & ſpatiorum inæqualium, id, quo maius excedit minus ſibi ipſi coaceruatum, fieri poſſe, ut quamlibet propoſitam quantitatem excedat earum, quæ ad ſeſe indicem referuntur.

PROPOSITIO I.

SI in quapiam linea punctum feratur æqueuelociter ipſum ſibi ipſi: & in ea ſumantur duæ lineæ: habebunt illæ eandem inter ſe proportionem, quam habent tempora, in quibus punctū lineas pertranſiuit.

FERATVR enim aliquod punctum in linea a b æqueuelociter: & in ipſa ſumantur duæ lineæ c d, d e: ſitq; tempus f g, in quo punctum lineam c d pertranſiuit; in quo autem pertranſiuit d e, ſit g h. Oſtendendum eſt, lineam c d ad d e eandem habere proportionem, quam tempus f g ad ipſum g h. componantur enim ex lineis c d, d e ipſæ a d, d b lineæ ſecundum quamlibet compoſitionem: ita ut a d ipſam d b excedat. & quoties quidem ſumitur linea c d in a d, toties ſumatur tēpus f g in tempore l g. quoties autem ſumitur d e in d b, toties tempus g h ſumatur in g k tempore. Quoniam ergo ponitur punctum in linea a b æqueuelociter ferri: conſtat in quanto tempore lineam c d pertranſiuit, in tanto & quamlibet pertranſiſſe earum, quæ ſunt æquales ipſi c d. Quare & compoſitam lineam a d in tanto tempore pertranſiuit, quantum eſt l g tempus: cum toties ſumatur c d linea in ipſa a d, quoties f g tempus in tempore l g. Eadem quoque ratione & lineam d b pertranſiuit in tanto tempore, quantum eſt g k tempus. Et quoniam maior eſt a d linea ipſa b d: manifeſtū eſt in maiori tempore punctum lineam a d pertranſire, quàm ipſam b d. quare tempus l g maius eſt tempore g k. ſimiliter autem oſtendetur, et ſi ex tēporibus f g, g h, com



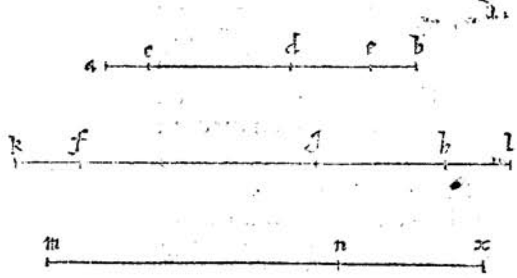
ponantur

ponantur tempora secundum quamlibet compositionem, ut alterum excedat alterum, & compositis ex c d, d e lineis secundum eandem compositionem, alteram excedere alteram, eodem ordine sumptas ipsis temporibus. patet igitur eandem habere proportionem c d ad ipsam d e, quam tempus f g ad tempus, g h.

PROPOSITIO II.

SI duo puncta in duabus lineis ferantur, unumquodque sibi ipsi æqueuelociter: sumantur autẽ in utraque ipsarum duæ lineæ primæ, quæ scilicet in temporibus æqualibus à punctis fuerunt permeatæ: & item secundæ: habebunt sumptæ lineæ eandem inter se proportionem.

FERATVR in linea a b aliquod punctum æqueuelociter ipsum sibi ipsi; & alterũ feratur in linea k l. sumantur autem in ipsa a b duæ lineæ c d, d e: & in linea k l itẽ duæ f g, g h: & in tanto tempore punctum in linea a b latũ pertranseat ipsam c d, in quanto alterum latum in k l pertransit lineam f g, similiter & lineam d e in tanto tempore punctum pertranseat, in quanto alterum ipsam g h. ostendendum est, eandem habere proportionem c d ad d e, quam f g, ad g h. Sit enim tempus m n, in quo punctum lineam c d pertransiuit. in hoc autem & alterum punctum pertransit ipsam f g. rursus in quo lineam d e punctum pertransiuit, sit tempus n x, in eodemq; alterum punctum pertransit g h. Eandem ergo proportionem habebit linea c d ad lineam d e, quam tempus m n ad tempus n x. et linea f g ad lineam g h habebit eandem, quam tempus m n ad ipsum n x. manifestum est igitur eãdem habere proportionem c d ad d e, quam habet f g ad g h. A



PROPOSITIO III.

CIrculis quotcunque datis fieri potest, ut recta linea sumatur, quæ circulorum circumferentiis maior existat.

CIRCVMSCRIPTA enim circa unumquenque circulorum figura multiangula, perspicuum est, lineam ex omnibus earum lateribus compositam, omnibus circulorum circumferentiis maiorem esse. A

PROPOSITIO IIII.

DVabus datis lineis inæqualibus, recta uidelicet, & circuli circumferentia, sumi potest recta linea, maiore quidem datarum linearum minor, minore uero maior.

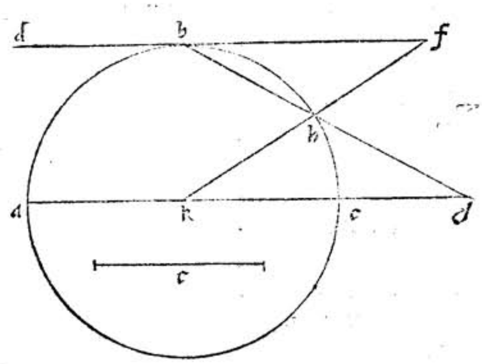
DIVISA etenim recta linea in tot partes æquales, quoties excessus, quo maior superat minorem, sibi ipsi coaceruatus excedat eandem rectum; erit pars una A ipſius exceſſu minor: ſi autem circumferentia ſit maior recta linea; una parte ipſi rectæ adiecta, manifeſtum eſt, eam minore datarum linearum maiorem eſſe, maior e uero minorem; nam quæ adiicitur pars, minor eſt ipſo exceſſu.

PROPOSITIO V.

Circulo dato, & linea recta circulum contingente, poteſt à centro circuli duci recta linea ad contingentem: ita ut eius pars, quæ media interiicitur inter contingentem, & circuli circumferentiam, ad ſemidiametrum minorem habeat proportionem, quàm circumferentia circuli inter tactum, & lineam ductam interiecta ad datam quamlibet circuli circumferentiam.

Sit circulus a b c datus, cuius centrum k: & d f linea tangat circulum in b puncto: ſit data etiam quælibet circuli circumferentia. Itaque ſumi poteſt recta linea

A maior data circumferentia, quæ ſit e. ducatur autem per centrum linea a g, æquidiſtans lineæ d f: ponaturq; ipſi e æqualis g h, tendens ad b; & à centro k ducta ad h, producatur uſque ad f.

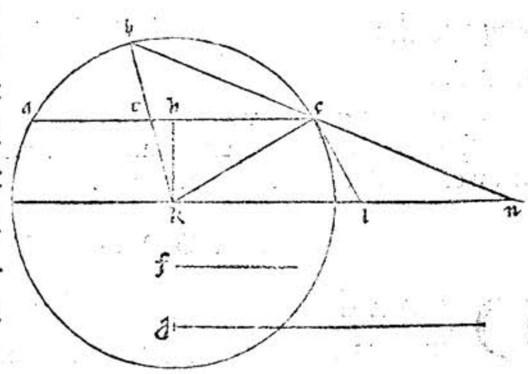


B Eandem ergo proportionem habet h f ad h k, quam b h ad h g. quare f h ad

C h k minorem habet, quam b h circumferentia ad datam circumferentiam; quoniam b h recta minor eſt circumferentia b h: ipſa autem g h maior eſt data circumferentia. minorem igitur proportionem habet & f h ad ſemidiametrum, quàm b h circumferentia ad datam circumferentiam.

PROPOSITIO VI.

Circulo dato, & in eo data linea, quæ ſit minor diametro, poteſt à centro circuli ad circumferentiam ipſius recta linea duci. ſecans lineam in circulo datam: ita ut eius pars inter circumferentiam, & datam lineam interiecta, ad lineam, quæ iungit lineæ ductæ terminum ad circumferentiam, & terminum lineæ in circulo datæ, habeat quamlibet propoſitam proportionem; ſi modo proportio illa minor ſit proportione, quam habet dimidia lineæ in circuló datæ ad lineam, quæ à centro ad ipſam perpendiculariter ſit educta.

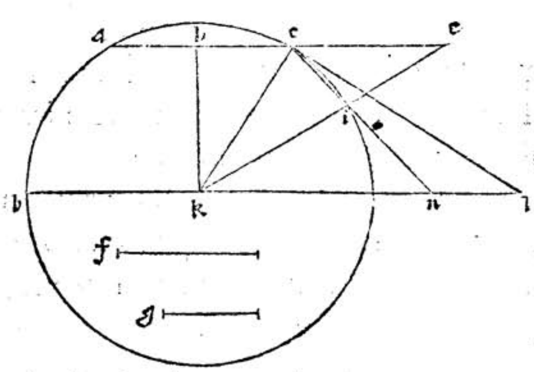


Sit circulus a b c datus, cuius centrum k: & in ipſo data recta linea c a minor diametro: & proportio, quam habet f, ad g minor ſit ea, quam c h habet ad k h, perpendiculari exiſtente ipſa k h. ducatur autem

autem à centro linea kn æquidistans lineæ a c : & ad angulos rectos ipsi k c ducatur c
l. erunt triangula c h k, c k l similia: & idcirco ut c h ad h k, ita k c ad c l. minorem A
igitur proportionem habet f ad g, quàm k ad c l. quam uero proportionem habet B
f ad g, habeat k c ad maiorem ipsa c l, hoc est ad b n: & ponatur b n inter circumfe C
rentiam, & rectam lineam, ut transeat per c: ita enim secari poterit, & cadet extra,
cum ipsa sit maior, quàm c l. Quoniam igitur k b ad b n eandem habet proportio D
nem, quam f ad g: & ipsa e b ad b c habebit eandem, quam f ad g.

PROPOSITIO VII.

Iisdem, quæ supra datis, & producta recta linea in circulo data, potest à circuli centro ad productam linea duci: ita ut pars eius, quæ inter circumferentiam, & productam interiicitur, ad lineam iungentem terminos interiectæ, & productæ lineæ, habeat quamlibet datam proportionem; dummodo data proportio sit maior ea, quam habet dimidia lineæ in circulo datæ ad lineam, quæ à centro ad ipsam sit perpendiculariter educta.



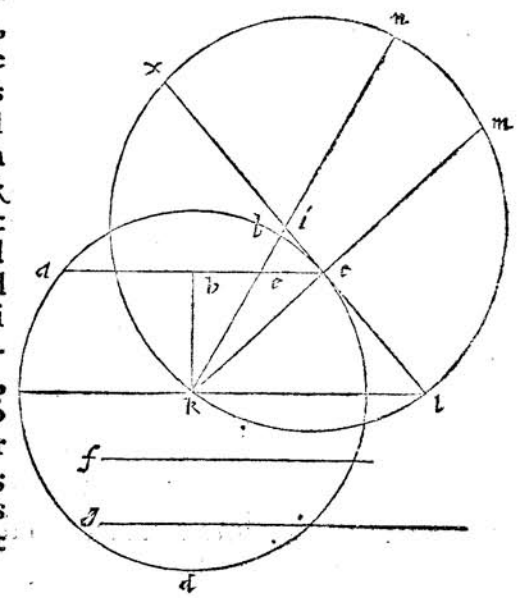
Sint data eadem, quæ superius: & recta linea, quæ in circulo data est, producatur. data autem proportio sit, quam habet f ad g, maior proportione c h ad h k. maior igitur erit & A
ea, quam habet k c ad c l. quam uero B
proportionem habet f ad g, eam habebit k c ad minorem ipsa c l. habeat C
ad i n, quæ tendat ad c: potest enim D
ita secari, & cadet intra lineam c l, quòd minor sit, quàm ipsa c l. Quoniam igitur eandem habet proportionem k c ad i n, quam f ad g, habebit & ipsa e i ad i c eandem, quam f ad g.

PROPOSITIO VIII.

Circulo dato, & in circulo linea, quæ sit diametro minor, data itē altera linea circulum contingente in termino lineæ datæ, potest à circuli centro linea duci ad rectam lineam: ita ut pars ipsius, quæ est inter circumferentiam, & lineam in circulo datam, ad partem illam lineæ contingentis, quæ linea ipsa à centro ducta, & puncto contactus continetur, habeat quamlibet datam proportionem; si modo data proportio minor sit ea, quam habet dimidia lineæ in circulo datæ ad lineam, quæ à centro ad ipsam sit perpendiculariter educta.

Sit datus circulus, a b c d: & in circulo data linea c a diametro minor: tangatq; x l circulum in c: & proportio f ad g sit minor ea, quam habet c h ad h k. erit & minor ea, quam habet c k ad c l, si k l ducta sit æquidistans ipsi h c. Itaque habeat k c ad c x eandem proportionem, quam f ad g. maior ergo est linea x c ipsa c l. describatur circuli circumferentia per puncta k l x. Et quoniam maior est x c ipsa, c l: & li-

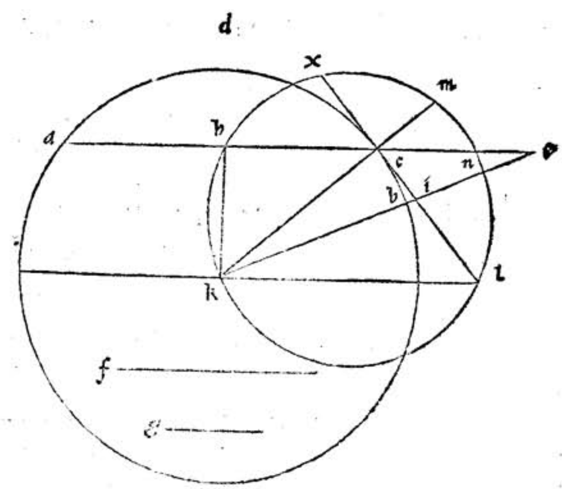
neæ kc, xl, secant sese ad angulos rectos: fieri potest, ut ducatur linea in, æqualis ipsi mc, quæ tendat ad k. Rectangulum igitur contentum lineis
D xi, il ad id, quod continetur ke, il eandem habet proportionem, quam xi ad ke; & quod continetur lineis ki, in ad contentum ipsis ki, cl habet eandem, quam in ad cl. quare & in ad cl est, ut xi ad ke: & propterea cm ad cl, & xc ad kc, & ad kb est, ut xi ad ke: & reliqua ic ad be eandem habet proportionem, quam xc ad kc, & quam g ad f. incidit igitur kn, in contingentem; & eius pars, quæ est inter circunferentiam, & lineam rectam; uidelicet be ad partem contingentis inter Kn, & contactum, eam habet proportionem, quam f ad g.



PROPOSITIO IX.

Isdem datis, & producta linea in circulo data, potest à circuli centro ad productam linea duci: ita ut pars eius inter circumferentiam, & productam lineam interiecta, ad partem contingentis inter contactum, & lineam ductam à centro, habeat quamlibet datam proportionem, si data proportio maior sit ea, quam habet dimidia lineæ in circulo datæ ad lineam, quæ à centro ad ipsam sit perpendiculariter educta.

SIT datus circulus. abcd: & in circulo data recta linea ca, minor diametro producatur: linea autem xc tangat circulum in c: & proportio, quam habet f ad g maior sit ea, quam habet ch ad hk. erit ergo & ea maior, quam habet kc ad cl. Itaque habeat kc ad cx eandem proportionem, quam f ad g. minor erit cx ipsa cl. Rursus describatur circulus per puncta xkl. Quoniam igitur xc minor est cl: & ipsæ km, xc secant sese ad angulos rectos: poterit duci linea in æqualis lineæ cm; quæ tendat ad k. Et quoniam rectangulum, quod lineis xi, il continetur, ad rectangulum contentum ipsis li, ke est, ut xi ad ke: contento autem lineis xi, il æquale est contentum ki, in: & contento li, ke æquale contentum ki, cl; propterea quòd est, ut ke ad lc, ita ki ad li: erit & ut xi, ad ke, ita rectangulum lineis ki, in contentum, ad contentum ipsis ki, cl: hoc est, ut ni ad

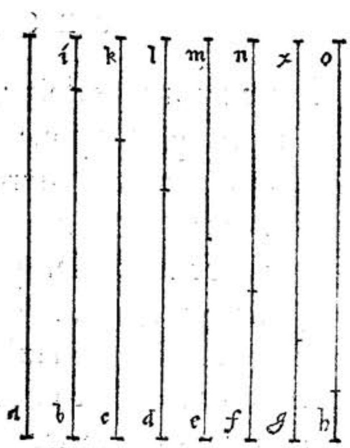


cl: hoc est c m ad c l. est autem & ut c m ad c l, ita x c ad c k, hoc est ad k b. Vt ergo x i ad k e, ita x c ad k b; & reliqua i c ad reliquam b e, est ut x c ad c k. Quam uero proportionem habet x c ad c k, eam habet g ad f. incidítq; k e in productam lineam, & b e inter ipsam, & circumferentiam interiecta ad partem contingentis c i, inter contactum, & ipsam k e, eandem habet proportionem, quam f ad g.

PROPOSITIO X.

SI lineæ quotlibet, quæ se se æqualiter excedant, deinceps ponantur: sitq; excessus minimæ earum æqualis: & aliæ item ponantur lineæ, numero quidem æquales prædictis, magnitudine uero unaquæque æqualis maximæ: quadrata illarum omnium, quæ maximæ æquales sunt unà cum quadrato maximæ, & rectangulo minima linea, & linea æquali omnibus se se æqualiter excedentibus contento, tripla erunt quadratorum linearum se se æqualiter excedētium.

SINT lineæ quotlibet deinceps positæ, quæ se se æqualiter excedant, a b c d e f g h: & sit h æqualis excessui. adiiciatur uero ad b linea i æqualis ipsi h: & ad c adiiciatur k æqualis g: & ad d ipsa l æqualis f: & ad e, m æqualis e: & ad f, n æqualis d: & ad g, x æqualis c: & denique ad h adiiciatur o æqualis ipsi b. erunt sic factæ magnitudines, inter se æquales; & item æquales maximæ. ostendendum est igitur, quadrata, omnium, uidelicet ipsius a, & factarum linearum unà cum quadrato a, & rectangulo contento linea h, & linea æquali his omnibus a b c d e f g h tripla esse quadratorum omnium a b c d e f g h. est enim quadratum b i æquale quadratis i, b; & duobus quæ b, i continentur rectangulis. quadratum uero k c est æquale quadratis k, c; & duobus iis, quæ k, c continētur. Similiter & quadrata aliarum, quæ sunt æquales ipsi a, æqualia erunt quadratis suarum partium, & duobus rectangulis, quæ eisdem partibus continentur. Quadrata igitur a b c d e f g h, & quadrata i k l m n x o, unà cum quadrato a, dupla sunt quadratorum a b c d e f g h. Quod autem reliquum est, ostendemus, uidelicet dupla eorum, quæ partibus uniuscuiusque lineæ æqualis ipsi a continentur, unà cum eo, quod continetur h linea, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, æqualia esse quadratis a b c d e f g h. Quoniam enim duo, quæ lineis b, i continentur, æqualia sunt duobus contentis b, h: & duo, quæ continentur k, c æqualia sunt contento h, & quadrupla ipsius c, quòd k dupla est ipsius h: duo autem contenta d, l sunt æqualia contento h, & sexcupla d, quòd l eiusdem h est tripla: similiter et alia dupla eorum, quæ partibus continentur, æqualia sunt contento h, & multiplici semper secundum numeros deinceps pares sequentis lineæ: erunt omnia rectangula unà cum eo, quod continetur linea h, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, æqualia contento linea h, & linea æquali his omnibus, uidelicet ipsi a, & triplæ b, & quintuplæ c, & semper impari secundum numeros deinceps impares, multiplices lineæ sequentis. Sunt autem & quadrata ipsarum a b c d e f g h æqualia contento iisdem lineis: nam quadratum a est æquale contento h linea, & linea æquali his omnibus, uidelicet ipsi a & reliquis, quarum unaquæque est æqualis ipsi a; æqualiter enim h metitur



A B C D E F G

titur

titur ipsam a, atque a metitur omnes sibi æquales. quare quadratum a est æquale cõtento linea h, et linea æquali ipsi a, et duplæ linearum b c d e f g h: quoniam quæ sunt æquales ipsi a omnes excepta a duplæ sunt linearum b c d e f g h. similiter et quadratum b æquale est contento linea h, et linea æquali ipsi b, et duplæ linearum c d e f g h. et rursus quadratum c est æquale contento linea h et æquali ipsi c, et duplæ ipsarum d e f g h. Eadem ratione et aliarum quadrata omnium æqualia sunt contentis linea h, et linea ipsi æquali, et duplæ reliquarum. manifestum est igitur, quadrata omnium æqualia esse ei, quod continetur linea h, et linea æquali his omnibus, uidelicet ipsi a, et triplæ b, et quintuplæ c, et secundum numeros deinceps impares, multiplici sequentis lineæ.

H Ex quibus colligitur, quadrata omnia linearum æqualium maximæ, quadratorum quidem linearum se se æqualiter excedentium, minora esse, quàm tripla; quoniam assumptis quibusdã tripla sunt:
I reliquorum autem, dempto maximæ quadrato maiora, quàm tripla; quoniam assumpta minora sunt, quàm tripla quadrati maximæ.
K Et propterea si similes figuræ describantur ab omnibus; & ab iis, quæ se se æqualiter excedunt; & ab iis, quæ sunt æquales maximæ: quæ ab iis describuntur, quæ sunt æquales maximæ, earum quidem, quæ ab iis, quæ se se æqualiter excedunt, minores erunt, quàm triplæ; reliquarum uero, dempta ea, quæ à maxima describitur, maiores, quàm triplæ: similes nanque figuræ eandem inter se se, quam quadrata proportionem habent.

PROPOSITIO XI.

SI lineæ quotlibet deinceps ponantur, quæ se se æqualiter excedant: itemq; aliæ ponantur lineæ, numero quidem prædictis una minores, magnitudine uero unaquæque æqualis maximæ: quadrata omnia linearum maximæ æqualium ad quadrata earum, quæ se se æqualiter excedunt, dempta minima, minorem habent proporrionem, quàm quadratum maximæ ad id, quod utrisque his est æquale; rectangulo scilicet maxima, minimaq; linea contento, & tertiæ parti quadrati eius lineæ, qua maxima minimam excedit; ad quadrata uero linearum se se æqualiter excedentium dempto eo, quod à maxima fit, maiorem proportionem habent, quam sit eadem illa proportio.

SINT enim lineæ quotlibet deinceps positæ, quæ se se æqualiter excedant. a b quidem excedens c d: c d uero excedens e f: et e f, g h: et g h, i k: et i k, l m: et l m, n x. adiiciatur quoque ad ipsam c d, linea c o, æqualis uni excessui: et ad ipsam e f adiiciatur e p duobus excessibus æqualis: et ad g h æqualis tribus g r: & ad alias eodem modo. erunt igitur lineæ, quæ fiunt, inter se se æquales, & item æquales maximæ. Itaque, ostendendum est, quadrata omnia factarum linearum, ad quadrata earum, quæ se se æqualiter excedunt, dempto quadrato n x, minorem habere proportionem, quàm quadratum a b ad i d, quod est æquale utrisque; et rectangulo contento to lineis a b, n x; & tertiæ parti quadrati ipsius n y; ad quadrata uero earundem linearum, dempto quadrato a b, maiorem proportionem habere, quàm sit dicta proportio. dematur ex unaquaque earum, quæ se se æqualiter excedunt, linea excessui æqualis. Ergo quam proportionem habet quadratum a b ad hæc utraque; ad rectangulum contentum lineis a b, u b; & ad tertiam partem quadrati a u, eandem habet o d quadratum ad contentum ipsis o d, d q; & tertiam partem quadrati q o: & quadrata p f ad contentum p f, z f; & tertiam partem quadrati z p: & quadrata aliarum ad spatia similiter sumpta. Quare & omnia quadrata linearum o d, p f, r h, s k, t m, y x, ad omnia contenta linea n x, & æquali omnibus dictis lineis; & ad tertias partes quadratorum o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n, eandem habebunt proportionem, quam a b quadratum ad utraque; ad contentum lineis a b, u b; & ad tertiam partem quadrati u a. Si igitur ostendatur, contentum linea n x, & æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x, & tertias partes quadratorum o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n; quadratis quidem a b, c d, e f, g h, i k, l m, minora esse; quadratis uero c d, e f, g h, i k, l m, n x, maiora: quod proponebatur, iam ostensum erit. Itaque contentum linea n x, & æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x, et tertiæ partes quadratorum o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n; hæc (inquam) omnia, æqualia sunt quadratis q d, z f, ϑ h, λ k, μ m, n x; contentoq; linea n x, et æquali omnibus o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n; et tertiæ parti quadratorum o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n. quadrata uero, a b, c d, e f, g h, i k, l m, æqualia sunt quadratis b u, q d, z f, ϑ h, λ k, μ m; & quadratis a u, c q, e z, g ϑ, i λ, l μ; et contento linea b u, et dupla ipsarum a u, c q, e z, g ϑ, i λ, l μ. communia igitur utrisque sunt quadrata linearum æqualium ipsi n x. contentum autem linea n x, et æquali omnibus o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n, minus est contento b u, et dupla linearum a u, c q, e z, g ϑ, i λ, l μ: propterea quòd lineæ proximæ dictæ æquales sunt ipsis c o, e p, r g, i μ, l t, y n: reliquis uero maiores. et quadrata a u, c q, e z, g ϑ, i λ, l μ, maiora sunt tertia parte quadratorum ϑ q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n: hoc enim in superioribus fuit ostensum. minora igitur sunt prædicta spatia quadratis a b, c d, e f, g h, i k, l m. Quod autem reliquum est, ostendemus: maiora scilicet esse quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x. Rursus quadrata c d, e f, g h, i k, l m, n x, æqualia sunt quadratis c q, e z, g ϑ, i λ, l μ; & quadratis q d, z f, ϑ h, λ k, μ m, n x; et contento n x, & dupla linearum omnium c q, e z, g ϑ, i λ, l μ, suntq; communia quadrata q d, z f, ϑ h, λ k, m μ, n x: & cōtentum linea n x, & æquali his omnibus o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n, maius est contento n x, et dupla ipsarum c q, e z, g ϑ, i λ, μ l. sunt autem et quadrata q o, z p, ϑ r, λ s, μ t, y n, quadratorum c q, e z, g ϑ, i λ, l μ, maiora, quàm tripla, ut ostensum est. maiora igitur sunt dicta spatia quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x: quod fuerat ostendendum.

A B C D E F

Et si similes figuræ describantur ab omnibus, & ab iis, quæ se se æqualiter excedunt, & ab iis, quæ sunt æquales maximæ: figuræ omnes, quæ ab iis, quæ maximæ sunt æquales ad figuras, quæ à se se æqualiter excedentibus describuntur, dempta ea, quæ à minima, proportionem habebunt minorem, quàm quadratum maximæ ad id, quod utrisque est æquale; rectangulo maxima, minimaq; contento; & tertiæ parti quadrati excessus, quo maxima minimam excedit; ad figuras

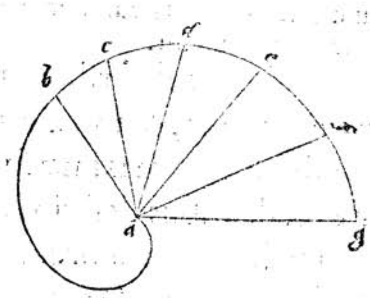
figuras uero eaſdem, dempta ea, quæ à maxima, proportionem habebunt dicta proportione maiorem: ſimiles enim figuræ eandem, quam quadrata, proportionem habent.

Si recta linea in plano ducta, manente altero eius termino æqueueloc iter circumferatur, quouſque rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moueri cœperat: eodemq; tempore aliquod punctum feratur in dicta linea, æqueuelociter ipſum ſibi ipſi, incipiens à termino manente, punctum hoc in plano ſpiralem lineam deſcribet. Voceturq; terminus lineæ manens, principium lineæ ſpiralis. Poſitio lineæ, à qua cœpit circumferri, principium circulationis dicatur. Recta linea, quam in prima circulatione punctum pertranſiuit, uocetur prima: & quam dictum punctum pertranſiuit in ſecunda circulatione, ſecunda: atque aliæ ſimiliter eodem nomine uocentur, quo & ipſæ circulationes. Spatium contentum ſpirali linea in prima circulatione deſcripta, & linea recta, quæ prima eſt, primum dicatur. contentum uero linea ſpirali in ſecunda circulatione, & ſecunda linea, ſecundum: & alia eodem modo. Si à puncto, quod eſt principium lineæ ſpiralis, ducatur aliqua linea recta: huius ipſius lineæ, quæ ſunt ad partes, in quibus circulatio fit, præcedentia dicantur: quæ uero ad alteras, ſequentia. Circulus deſcriptus, centro quidem puncto, quod eſt principium lineæ ſpiralis; interuallo autem recta linea prima, primus uocetur: & deſcriptus eodem centro, & linea dupla primæ, ſecundus: & álii deinceps eodem modo.

PROPOSITIO XII.

SI ad ſpiralem lineam in una circulatione deſcriptam, à principio ipſius quotlibet rectæ lineæ ducantur, quæ æquales angulos ad inuicem efficiant: ipſæ ſeſe æqualiter excedunt.

SIT ſpiralis linea, in qua a b, a c, a d, a e, a f, lineæ rectæ, quæ æquales angulos efficiant ad inuicem: Oſtendendum eſt, lineam a c æqualiter excedere a b: atque a d ipſam a c: & aliæ ſimiliter. In quo nanque tẽpore linea circũlata ex a b peruenit ad a c; in hoc punctum in linea recta latum, exceſſum pertranſit, quo linea c a excedit a b. & in quo tempore ex a c ad a d; in eodem pertranſit exceſſum, quo a d excedit a c. In æquali autem tempore linea circũlata ex a b peruenit ad a c: & ex a c ad a d: propterea, quòd anguli ſunt æquales. ergo in æquali tempore punctum in linea recta latum pertranſit exceſſum,

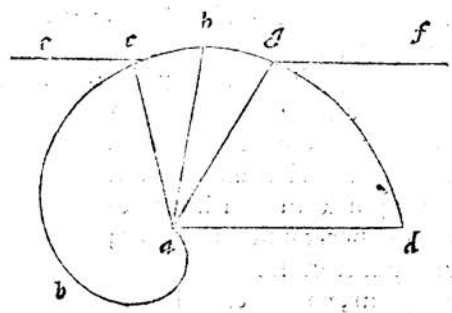


quo linea a c ipſam a b excedit; & exceſſum, quo a d excedit a c. Quare æqualiter a c excedit ipſam a b, atque a d ipſam a c: & ſimiliter reliquæ.

PROPOSITIO XIII.

SI lineam ſpiralem contingat recta linea: in uno tantum puncto contingit.

SIT linea ſpiralis, in qua a b c d: ſitq; eius principium punctum a: principium circulationis recta linea a d: & contingat lineam ſpiralem ipſa f e. Dico in uno tantum puncto eam contingere. Si enim fieri poſsit, contingat in duobus punctis c g: iunganturq; a c, a g: & angulus lineis a g, a c cōtentus bifariam diuidatur: in quo autem puncto linea bifariam diuidens angulum, occurrit ſpirali lineæ, ſit h. Aequaliter igitur a g excedit a h, atque a h ipſam a c: quoniam æquales inter ſeſe angulos continent: & idcirco a g, a c ſunt ipſius a h duplæ. Sed eius lineæ, quæ in triangulo bifariam diuidit angulum c a g, ipſæ a g, a c maiores ſunt, quàm duplæ. conſtat ergo punctum, in quo recta linea a h occurrit lineæ c g, cadere inter puncta a h. Quare ipſa e f ſecat lineam ſpiralem; cum aliquod punctum eorum, quæ ſunt in linea c g intra ſpiralem contineatur. poſitum autem fuerat eam contingere. In uno igitur tantum puncto ipſa e f ſpiralem lineam contingit.

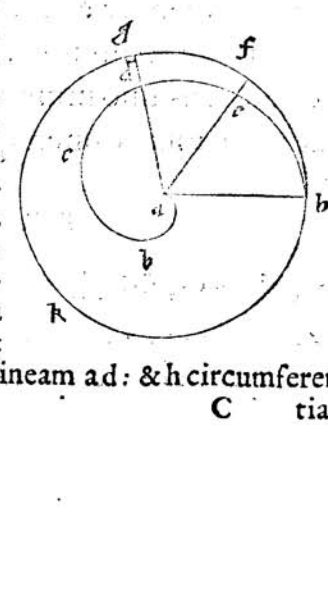


A
B

PROPOSITIO XIIII.

SI in lineam ſpiralem in prima circulatione deſcriptam, incidant duæ rectæ lineæ à puncto, quod eſt ipſius principium ductæ: & producantur ad primi circuli circumferentiam: eandem inter ſe proportionem habebunt lineæ in ſpiralem lineam incidentes, quam circumferentiæ circuli inter terminum lineæ ſpiralis, & terminos linearum ad circumferentiam productarum, interiectæ: circumferentias à termino lineæ ſpiralis uerſus præcedentia ſumendo.

SIT linea ſpiralis a b c d e h in prima circulatione deſcripta, cuius principium ſit punctum a: principium circulationis linea recta a h: & h k g ſit circulus primus. Incidant autem ab a puncto ad lineam ſpiralem rectæ lineæ a e, a d: & producantur ad f g puncta circumferentiæ circuli. oſtendendum eſt eandem habere proportionem lineam a e ad ipſam a d, quam circumferentia h k f ad h k g circumferentiam. circumducta enim linea a h, conſtat punctum quidem h æquali uelocitate pertranſiſſe circumferentiam circuli h k g; punctum autem a in linea recta latum pertranſiſſe ipſam a h. itemq; punctum h pertranſiſſe h k f circumferentiã: & punctum a rectam lineam a e, & rursus punctum a lineam a d: & h circumferentiam

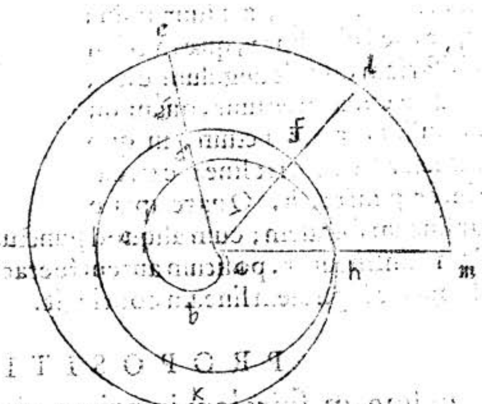


tiam hkg, utrunque æqueuelociter ipsum sibi ipsi latum. Quare eundem habebit proportionem a e ad a d, quam circumferentia h k f ad h k g circumferentiam: hoc enim in superioribus est demonstratum. similiter quoque demonstrabitur idem contingere, et si alia incidentium linearum in terminum lineæ spiralis inciderit.

PROPOSITIO XV.

Si in lineam spiralem in secunda circulatione descriptam, incidant rectæ lineæ à principio ipsius spiralis ductæ: eandem inter se se habebunt rectæ lineæ proportionem, quam dictæ circumferentiæ unà cum tota circuli circumferentia.

Sit linea spiralis a b c d h l m: & sit a b c d h quidem in prima circulatione descripta; ipsa uero h e l m in secunda: & incidant in eam rectæ lineæ a e, a l. ostendendum est eandem habere proportionem a l ad a e, quam circumferentia h k f unà cũ tota circuli circumferentia ad ipsam h k g unà cum tota circuli circumferentia. In quanto enim tempore punctum a in linea recta latum, perttansit lineam a l; in tanto punctum h in circumferentia latum, totam circuli circumferentiam pertransit, & insuper circumferentiam h k l. & rursus a punctum pertransit lineam a e; & h totam circuli circumferentiam unà cum circumferentia h k g, utrunque æqueuelociter ipsum sibi ipsi latum. Quare constat eandem habere proportionem a l ad a e, quam circumferentia h k f unà cum tota circuli circumferentia, ad circumferentiam h k g unà cum tota circuli circumferentia.



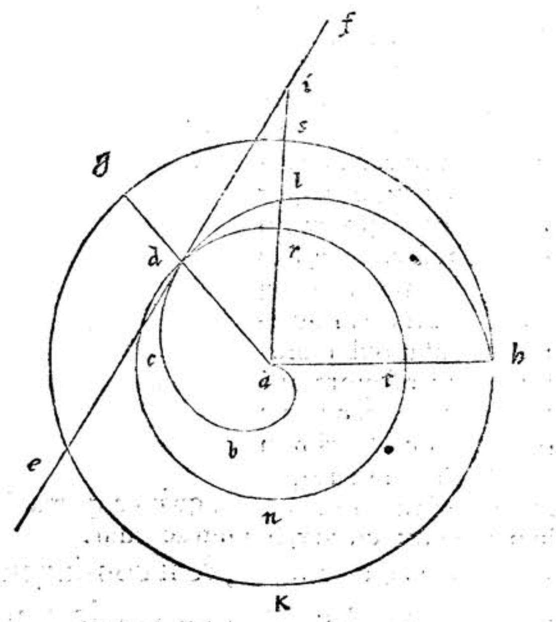
Eodem modo ostendetur, & si in lineam spiralem in tertia circulatione descriptam, rectæ lineæ inciderint, eandem habere proportionem inter se se, quam dictæ circumferentiæ unà cum tota circuli circumferentia bis sumpta. Similiter autem & in alias spirales incidentes lineæ ostendentur eandem proportionem habere, quam dictæ circumferentiæ unà cum tota circuli circumferentia toties sumpta, quantus est numerus uno minor, quàm sint ipsæ circulationes; etiam si utraque in terminos lineæ spiralis inciderit.

PROPOSITIO XVI.

Si lineam spiralem in prima circulatione descriptam recta linea contingat: & à contactu iungatur recta ad punctum, quod est principium lineæ spiralis: anguli, quos facit linea contingens, cum ea, ea, quæ iuncta eſt, inæquales erunt; & is quidem qui ad præcedentia conſtituitur, eſt obtuſus; qui uero ad ſequentia, acutus.

SIT linea ſpiralis a b c d h in prima circulatione deſcripta: & punctum a ſit ipſius principium: recta linea a h principium circulationis: & h k g circulus primus: contingat uero linea recta e d f ſpiralem lineam in d: & ab ipſo d iungatur d a. Oſtendendum eſt, d f cum d a obtuſum facere angulum. Deſcribatur enim circulus d t n, centro quidem a, interuallo autem a d. neceſſarium igitur eſt, circuli huius circumferentiam, quæ ad præcedentia habetur, intra lineam ſpiralem cadere: quæ uero ad ſequentia, extra: quoniam rectarum linearum ab a puncto ad ſpiralem lineam ductarum, quæ ad præcedentia fuerint, maiores ſunt ipſa d a; & quæ ad ſequentia, minores. Angulum uero a d f non eſſe acutum conſtat: quia maior eſt angulo ſemicirculi. Sed non eſſe rectum, ſic monſtrabitur. Sit enim, ſi fieri poteſt, rectus. ergo e d f linea circulum d t n contingit. quare ab a puncto ad contingentem poteſt recta linea duci, ita, ut eius pars, quæ inter contingentem, & circuli circumferentiam interiicitur, ad ſemidiametrum circuli minorem habeat proportionẽ, quàm circumferentia inter contactum, & lineam ductam interiecta ad datam circumferentiam. Itaque ducatur a i ſecans lineã quidem ſpiralem in l, circumferentiam autem circuli d n t in r: & recta linea r i ad ipſam a r minorem habeat proportionem, quàm circumferentia d r ad d n t circumferentiam. et tota igitur i a ad a r minorem proportionem habet, quàm circumferentia r d n t, ad d n t circumferentiam, hoc eſt, quàm ſ g k h circumferentia ad circũferentiam g k h. Quam uero proportionem habet ſ g k h circumferentia ad circumferentiam g k h, eandem habet recta linea a l ad rectam a d, ut oſtenſum eſt. minorem igitur proportionem habet recta linea a i ad a r, quàm l a ad a d: quod fieri minime poteſt, cum ſit r a æqualis a d, & i a maior, quàm a l. quare angulus a d f non eſt rectus. ſed neque acutus, ut oſtenſum eſt. ſequitur ergo obtuſum eſſe, & reliquum acutum. Similiter quoque oſtendetur idem euenire, & ſi contingens ſpiralem lineam, in termino ipſius contingat.

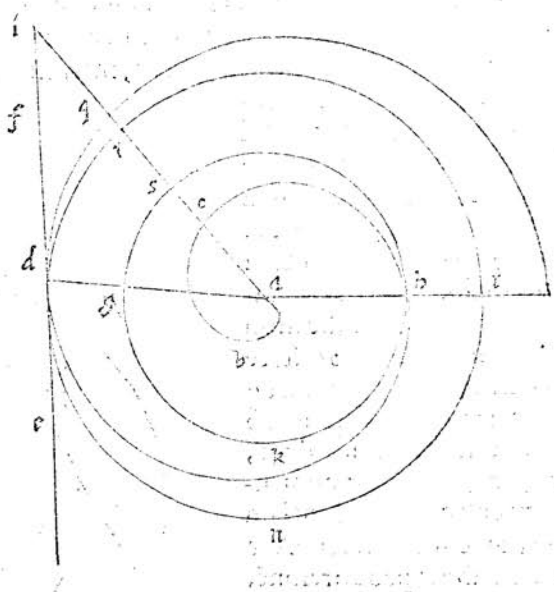
A B C D E F G



PROPOSITIO XVII.

Si lineam ſpiralem in ſecunda circulatione deſcriptam contingat recta linea: illud idem eueniet.

CONTINGAT enim e f recta ſpiralem lineam in ſecunda circulatione deſcriptam in d puncto: & alia eadem ſuperioribus fiant. Simili ratione circumferentiæ circuli r n d partes, quæ ſunt ad præcedentia intra ſpiralem lineam cadent; quæ autem ad ſequentia, extra. quare angulus a d f non eſt rectus, ſed obtuſus. Sit enim, ſi fieri poteſt, rectus. continget ergo linea e f circulum r n d in d puncto. ducatur rurſus linea a i ad contingentem, quæ ſecet ſpiralem lineam in q, & circumferentiam circuli r n d in r. habeat autem r i ad r a proportionem minorem, quàm d r circumferentia ad totam circumferentiam circuli d r n, & ad ipſam d n t circumferentiam: hoc enim fieri poſſe iam oſtenſum eſt. et tota igitur i a ad a r minorem proportionem habet, quàm circumferentia r d n t unà cum tota circuli circumferentia ad circumferentiam d n t unà cum tota circuli circũferentia. Sed quam proportionem habet circũferentia r n d t cum tota d n t r circuli circumferentia ad circumferentiam d n t cum tota circuli d n t r circumferentia, eam habet circumferentia ſ g k h cum tota circumferentia circuli h ſ g k ad circumferentiam g k h cum tota h ſ g k circuli circumferentia. Quam uero proportionem habet poſtremo dictæ circũferentiæ, eandem habet recta linea q a ad rectam a d: hoc enim oſtenſum eſt. minorem ergo proportionẽ habet i a ad a r, quàm a q ad a d: quod fieri non poteſt. eſt enim r a æqualis a d: ipſa uero i a maior, quàm a q. manifeſtum eſt igitur obtuſum eſſe angulum a d f: & idcirco reliquum acutum.

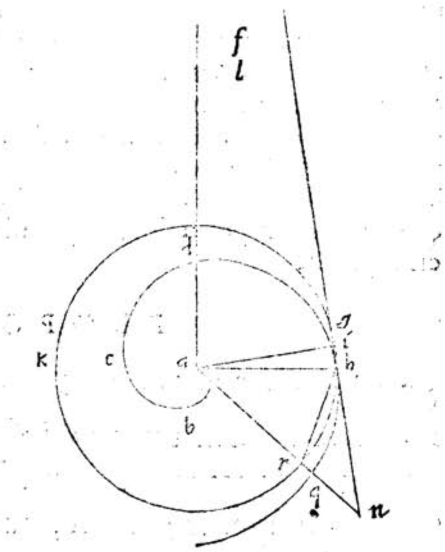


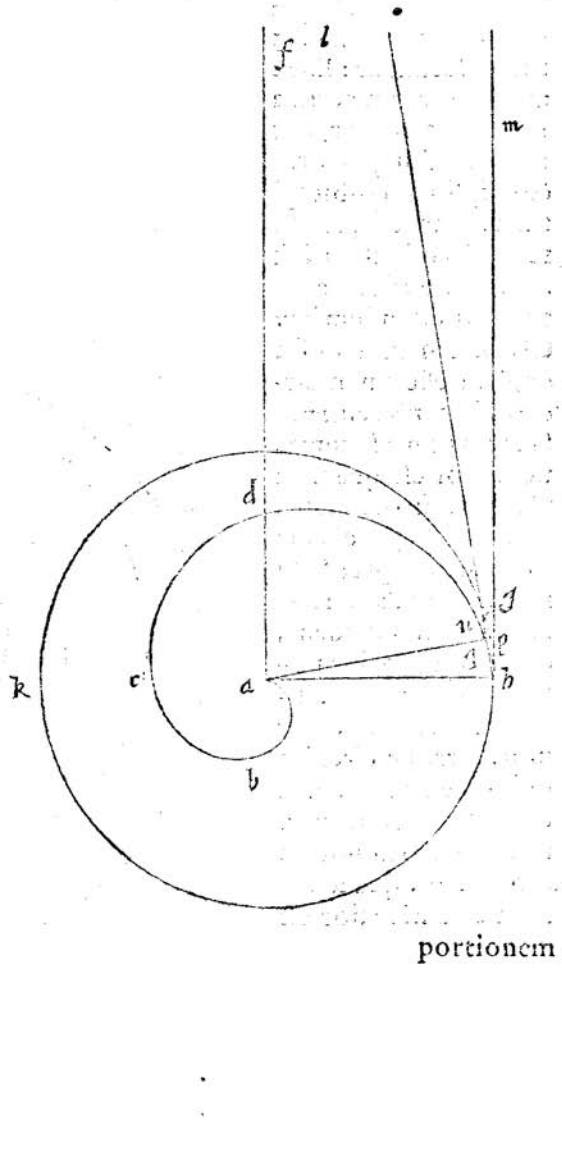
Eadem hæc euenient, & ſi contingens linea in termino lineæ ſpiralis contigerit. Similiter autem demonſtrabitur, & ſi lineam ſpiralem in qualibet circulatione deſcriptam contingat recta linea, etiam in termino ipſius, inæquales facere angulos, cum ea, quæ à contactu ad principium lineæ ſpiralis iuncta eſt; atque illum quidem, qui ad præcedentia fit, eſſe obtuſum; qui uero ad ſequentia acutum.

PROPOSITIO XVIII.

Si lineam ſpiralem in prima circulatione deſcriptam recta linea contingat in termino ipſius: à puncto autem, quod eſt principium lineæ ſpiralis, ducatur linea ad rectos angulos ei, quæ eſt principium circulationis: ducta coibit cum contingente: & pars eius, quæ eſt inter contingentem, & principium lineæ ſpiralis, æqualis erit primi circuli circumferentiæ.

Sit linea ſpiralis a b c d, cuius principium punctum a: principium circulationis recta linea h a: & h g k circulus primus: contingat autem h f lineam ſpiralem in h: & ab a puncto ducatur ad rectos angulos ipſi h a linea a f. coibit ergo ipſa cum h f: quoniam lineæ f h, h a continent angulum acutum. coeat in f. Demonſtrandum eſt, lineam f a circuli h k g circumferentiæ æqualem eſſe. ſi enim non eſt
A æqualis, uel maior erit, uel minor. Sit primum maior, ſi eſſe poteſt: et ſumatur recta linea l a minor quidem, quàm f a, maior uero, quàm circumferentia circuli h k g.

h k g. Itaque circulus quidam est h g k: et in circulo linea h g diametro minor: proportioq;, quem habet h a ad a l maior est ea, quam habet dimidia g h ad lineā B
ab a puncto ad ipsam g h perpendiculariter ductam: quoniā & maior est ea, quam habet h a ad a f. potest igitur à puncto a C
duci ad productā linea a n: ita ut n r, quæ interiicitur inter circumferentiam, & lineam h n productam, eam proportionem habeat ad rectam h r, quam habet h a ad a l. quare n r ad r a eam habebit proportionem, quam h r recta ad ipsam a l. sed D
h r ad a l minorem proportionem habet, quàm h r circumferentia ad h g k circuli circumferentiam: recta enim linea h r minor est h r circumferentia: & a l maior circumferentia circuli h g k. minorem igitur proportionē habebit n r ad r a, quàm h r circumferentia ad h g k circuli circūferentiam. et idcirco tota n a ad a r minorem habebit, quàm h r circumferentia E
unà cum tota circuli circūferentia ad circumferentiam circuli h g k. Quam uero F


proportionem habet circumferentia h r, unà cum tota circuli h g k circumferentia ad circumferentiam circuli h g k, eandem habet q a ad a h: hoc enim ostensum est. minorem ergo proportionem habet n a ad a r, quàm q a ad a h: quod fieri non potest, cum n a maior sit a q, & a r æqualis ipsi h a. nō igitur f a maior est h g k circuli circumferentia. Sed sit, si fieri potest, f a minor circumferentia circuli h g k: et rursus sumatur linea recta a l maior quidem, quàm a f; minor uero, quàm h g k circuli circumferentia: et à puncto h ducatur linea h m æquidistans ipsi a f. Rursus h g k circulus est: & in circulo linea h g diametro minor: itemq; alia circulum tangens in h: & proportio, quam habet a h ad a l minor est ea, quam G
dimidia g h habet ad lineam ab a puncto ad ipsam g h perpendiculariter ductam: quoniā & minor est ea, quam habet h a ad a f. potest H
igitur ab a puncto duci linea a p ad contingentem: ita ut r n, quæ inter rectam lineam in circulo datam, & circumferentiam interiicitur, ad lineam h p, partem scilicet contingentis inter ductam, & contactum, eandem proportionem habeat, quā h a ad a l. secet autem a p circulum in puncto r, & lineam spiralem in q. habebit & permutando eandē pro-


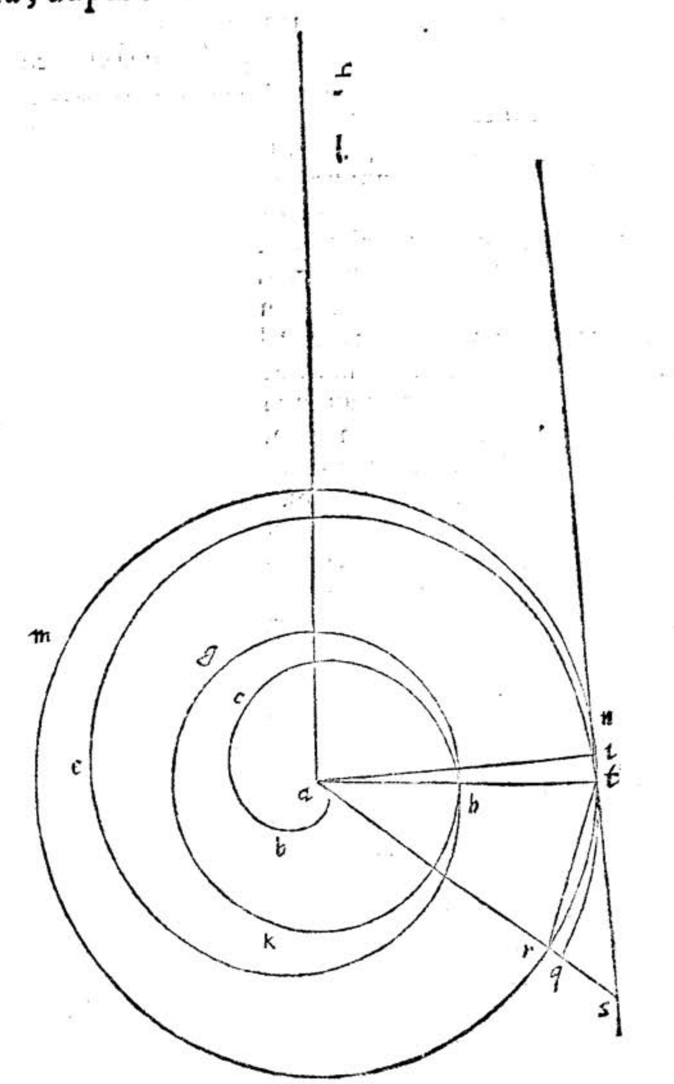
portionem

portionem nr ad ra, quam hp ad al. sed hp ad al maiorem proportionem ha-
bet, quàm hr circumferentia ad hgk circuli circumferentiam, cum sit hp recta
I maior circumferentia hr, ipsa autem al minor hgk circuli circumferentia. ma-
iorem igitur proportionem habet nr ad ar, quàm hr circumferentia ad circum-
K ferentiam circuli hgk. quare & ra ad an maiorem habet proportionem, quàm
circumferentia circuli hgk ad hkr circumferentiam. Quam uero proportio-
nem habet circumferentia circuli hgk ad circumferentiam hkr, eandem habet
recta ha ad ipsam aq: hoc enim iam ostensum est. ex quibus sequitur maiorem ha-
bere proportionem ra ad an, quàm ha ad aq: quod quidem fieri non potest. nō
est igitur fa neque maior, neque minor circuli hgk circumferentia. quare eidem
est æqualis.

PROPOSITIO XIX.

Si lineam spiralem in secunda circulatione descriptam contingat recta linea in termino ipsius: & à principio spiralis ducatur linea ad angulos rectos ei, quæ est principium circulationis: coibit ipsa cum contingente; & erit, quæ inter contingentem, & principium spiralis interiicitur linea, dupla circumferentiæ secundi circuli.

Sit enim linea spiralis abch in prima circulatione descripta, & het in secunda: sitq; hgk circulus primus, & tmn secundus: linea autem quædam contingens spiralem in t, sit tf: & fa ad angulos rectos ipsi ta. coibit igitur fa cum tf; propterea quòd ostensum sit k angulum atf esse acutum. Ostēdendum iam est, lineam rectam fa duplam esse tmn circuli circumferentiæ. Si enim non est dupla, uel maior est, quàm dupla, uel minor. Sit primum, si esse potest, maior, quàm dupla; & sumatur quædam recta la minor quidem, quàm fa, maior uero, quàm dupla circumferentiæ circuli tmn. Itaque circulus quidam est tmn: & in circulo descripta linea
A tn diametro minor: & proportio, quam habet ta ad al maior est



ea, quam dimidia tn habet ad lineam ab a puncto ad ipsam tn perpendiculariter ductam. potest igitur ab a duci linea af ad tn productam: ita, ut rs, quæ inter circumferentiam, & productam interiicitur, ad tr, eandem habeat proportionem, quam ta ad al; secet enim as circulum quidem in r, spiralem uero lineam in q: & permutando eandem proportionem habebit rs ad ta, quam tr ad al. sed tr ad al minorem habet, quàm circumferentia tr ad duplum tmn circuli circumferentiæ; quoniam recta tr minor est tr circumferentia, ipsa autem al maior, quàm dupla circumferentiæ circuli tmn. minorem ergo proportionem habet rs ad ar, quàm tr circumferentia ad duplam circumferentiæ circuli tmn. quare tota sa ad ar minorem habet, quàm circumferentia tr unà cum circuli tmn circumferentia bis sumpta, ad circuli tmn circumferentiam bis sumptam. Quam uero proportionem habent dictæ circumferentiæ, eandem qa habet ad at, ut ostensum est. minorem igitur proportionem habet as ad ar, quàm qa ad ta; quod fieri non potest. non ergo fa maior est, quàm dupla tmn circuli circumferentiæ. Similiter autem ostendetur neque minor esse, quàm dupla. ex quibus constat duplam esse. B

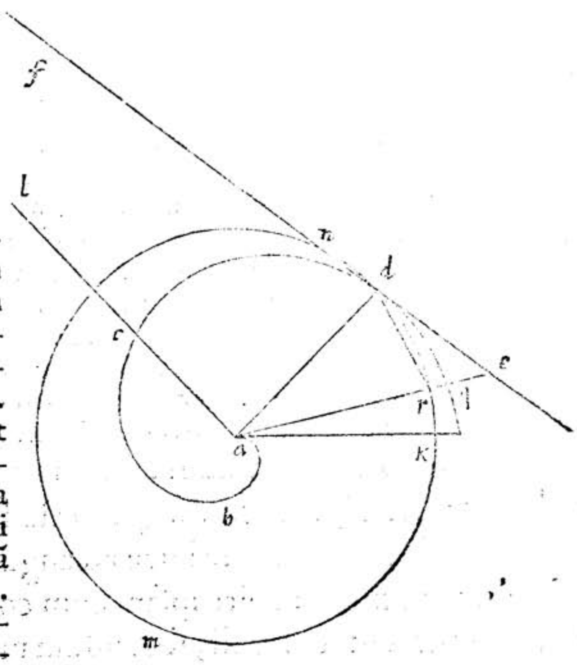
Eodem modo ostendendum est, Si lineam spiralem in qualibet circulatione descriptam contingat recta linea in termino ipsius: & à principio spiralis ducatur linea ad angulos rectos ei, quæ est principium circulationis: coire ipsam cum contingente, & multiplicem esse circumferentiæ circuli, secundum numerum circulationis nominati eodem met numero. C

PROPOSITIO XX.

Si lineam spiralem in prima circulatione descriptam recta linea contingat, non in termino ipsius: & à contactu ad principium spiralis linea iungatur: & centro quidem principio spiralis, interuallo autem linea iuncta, circulus describatur: itemq; à principio spiralis ducatur linea ad rectos angulos ei, quæ à contactu ad principium spiralis iuncta est: ipsa cum contingente coibit; atque erit linea inter contingentem, & principium spiralis interiecta, æqualis circumferentiæ descripti circuli, quæ est inter contactum, & sectionis punctum, in quo puncto circulus descriptus principium circulationis secat. circumferentiam sumendo uersus præcedentia ab eo puncto, quod est in principio circulationis.

Sit linea spiralis abcd in prima circulatione descripta: & cõtingat ipsam quædam recta linea edf in d puncto: & à d ad principium spiralis iungatur ad: & centro quidem a, interuallo autem ad, circulus describatur dmn, qui secet principium circulationis in k: & ducatur fa, ad ipsam ad perpendicularis. perspicuum quidẽ est, ipsam fa coire cum contingente. sed æqualem esse circumferentiæ kmnd, illud uero demonstrare oportet. Nam si æqualis non est, uel maior erit, uel minor. Sit primũ si esse potest, maior: & sumatur quædam recta la minor, quàm fa, & maior, quàm circumferentia kmnd. Rursus circulus est kmn: & in circulo linea minor diametro dn: proportioq;, quam habet da ad al maior est ea, quam dimidia dn habet ad lineam ab a puncto ad ipsam dn perpendiculariter ductam. potest igitur ab a duci linea ae ad nd productam: ita ut er ad dr eandem habeat proportionem,

nem, quam d a ad a l. quod ostensum est fieri posse. quare e r ad a r eandem habebit proportionem, quam d r ad a l. Sed d r ad a l minorem habet, quàm d r circumferentia ad circumferentiam k m d: quoniam recta d r minor est d r circumferentia, & a l maior circumferentia k m d. minorem igitur proportionem habet e r ad a r, quàm d r circumferentia ad circumferentiam k m d. quare & a e ad a r minorem habet, quam circumferentia k m r ad k m d circumferentiã. Quam uero proportionem habet circumferentia k m r ad k m d circumferentiam, eandem habet q a ad a d. unde sequitur, e a ad a r minorem proportionem habere, quã a q ad d a: quod fieri non potest. non ergo recta f a maior est circumferentia k m d. Similiter au-



A tem superioribus ostendetur, neque minor esse. æqualis igitur erit.

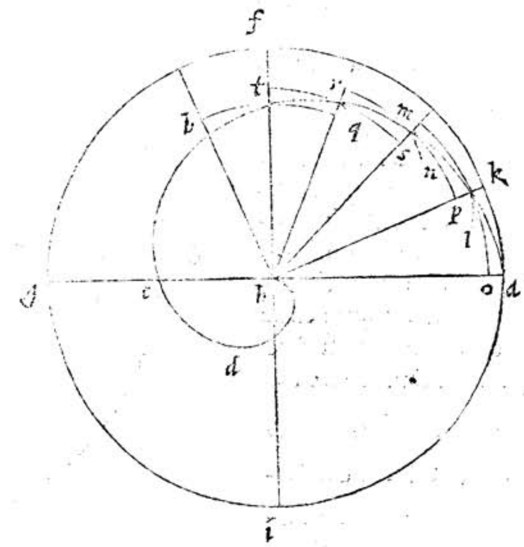
B Eodem quoque modo ostendetur, & si lineam spiralem in secunda circulatione descriptam contingat recta linea, non in termino ipsius: & alia eadem construantur: lineam rectam, quæ inter contingentem, & principium spiralis interiicitur, æqualem esse toti circumferentiæ circuli descripti, & insuper circumferentiæ, quæ inter dicta puncta interiicitur, cricumferentia ipsa similiter sumpta: Et si linea recta spiralem in qualibet circulatione descriptam contingat, non in termino ipsius: & alia eadem construantur: rectam lineam inter dicta puncta interiectam, multiplicem esse circumferentiæ circuli descripti, secundum numerum uno minorem, quàm sit numerus circulationum, & insuper æqualem circumferentiæ inter dicta puncta interiectæ, & similiter sumptæ.

PROPOSITIO XXI.

Svmpto spatio linea spirali in prima circulatione descripta, & recta linea prima in principio circulationis contento, potest figura quædam plana crcumscribi, & altera inscribi ex similibus sectoribus constans: ita ut circumscripta inscriptam excedat spatio minori quocunque proposito spatio.

Sit linea spiralis a b c d in prima circulatione descripta, cuius principium sit punctum h: principium circulationis linea h a: circulus primus f g i a: & lineæ a g, f i diametri ipsius, quæ secent se se ad angulos rectos. diuiso igitur semper angulo recto bifariam, & sectore angulum rectum continente, erit tandem, quod relinquetur

tur ex ſectore minus ſpatio propoſito. & ſit ſector factus a h k minor dicto ſpatio. Diuidantur præterea anguli quatuor recti in angulos æquales illi, qui continetur a h, h k: & lineæ rectæ facientes angulos ad ſpiralem lineam ducantur: ſitq; punctum l, in quo recta h k ſpiralem lineam ſecat: et centro quidem h, interuallo autem h l circulus deſcribatur. cadet igitur circumferentia ipſius, quæ in præcedentia fertur intra lineam ſpiralem; quæ uero in ſequentia, extra. itaque deſcribatur circumferentia o m, ita ut incidat in h a, in puncto o: & in eam, quæ poſt h k ad ſpiralem lineam ducta eſt, in m. Rurſus & in quo puncto h m ſecat ſpiralem, ſit n: et centro h, interualloq; h n circulus deſcribatur, ut incidat in h k, & in eam, quæ poſt h m ducta eſt ad ſpiralem lineam: & ſimiliter per alia puncta, in quibus lineæ æquales angulus facientes ſecãt ſpiralem lineam, circuli deſcribantur ex h centro, ita ut uniuſcuiuſque circumferentia, & in præcedentem, & in ſequentem lineam incidat. erit iam circa ſumptum ſpatium B circumſcripta figura ex ſimilibus ſectoribus cõſtans, & alia eidem inſcripta. Circumſcriptam uero excedere inſcriptam ſpatio minori, quocunque propoſito, oſtendetur ad hunc modum. eſt enim h l o ſector æqualis ſectori h m l: & h n p ſector æqualis ipſi h n r: & h q s ipſi h q t: & aliorum ſectorum unuſquiſque, qui in figura inſcripta continentur, æqualis eſt ſectori in figura circumſcripta contento, qui commune latus habuerit. Ex quibus ſequitur omnes ſectores omnibus ſectoribus æquales eſſe. figura igitur ſpatio inſcripta æqualis eſt figuræ circum C ſcriptæ, dempto h a k ſectore: ſolus enim hic ex omnibus, qui in figura circumſcripta continentur, relictus eſt. Vnde ſequitur, circumſcriptam figuram excedere inſcriptam ſectore a k h; qui quidem minor eſt propoſito ſpatio.



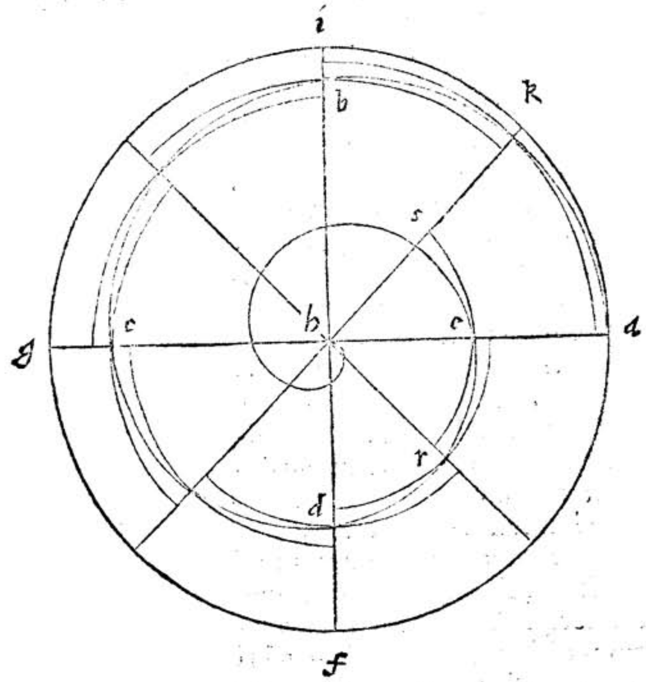
Ex his conſtat eſt circa dictum ſpatium poſſe circumſcribi figuram, qualis dicta eſt, & rurſus alteram eidem inſcribi: ita ut circumſcripta dictum ſpatium excedat ſpatio minori quocunque propoſito, & ipſum ſpatium figuram inſcriptam excedat ſimiliter minori quocunque propoſito ſpatio.

PROPOSITIO XXII.

SVmpto ſpatio linea ſpirali in ſecunda circulatione deſcripta, & recta linea ſecunda in principio circulationis, contento, poteſt figura plana circumſcribi, & altera inſcribi ex ſimilibus ſectoribus conſtans: ita ut circumſcripta inſcriptam excedat ſpatio minori quocunque propoſito.

SIT linea ſpiralis a b c d e in ſecunda circulatione deſcripta, cuius principium punctum h: principium circulationis recta linea a n: & ipſa ea ſecunda in principio circulationis. ſecundus autem circulus ſit a f g i: & lineæ a g, f i diametri ipſius ſecantes ſe ſe ad angulos rectos. Rurſus diuiſo ſemper angulo recto bifariam, & ſectore angulum rectum continente, erit tandem reſiduũ minus ſpatio propoſito: & ſit ſector factus h k a minor dicto

A ſpatio. Itaque diuiſis ſemper rectis angulis in angulos æquales ei, qui continetur k h a: & aliis diſpoſitis, ut ſupra, excedet circumſcripta figura inſcriptam minori ſpatio, quàm ſit ſector h k a. nanque excedet eo, quo h k a ſector ſuperat ſectorem h e r.



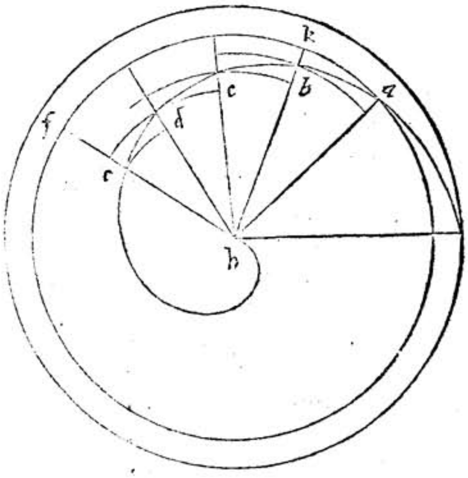
B Conſtat igitur fieri poſſe, ut circumſcripta figura excedat ſumptum ſpatium ſpatio minori quocunque propoſito, & rurſus ſpatium excedat figuram ſibi ipſi inſcriptam minori quocunque propoſito ſpatio. Eodem autem modo conſtat, ſumpto ſpatio linea ſpirali in quacunque circulatione deſcripta, & recta linea in principio circulationis ſecundum ipſius numerum nominata, contento, poſſe circumſcribi figuram planam; qualis dicta eſt, & rurſus alteram inſcribi: ita ut circumſcripta ſumptum ſpatium excedat ſpatio minori quocunque propoſito, & dictum ſpatium figuram inſcriptam excedat minori quocunque propoſito ſpatio.

PROPOSITIO XXIII.

SVmpto ſpatio contento linea ſpirali, quæ minor ſit ea, quæ in una circulatione deſcribitur, quæq; non habeat terminum principium lineæ ſpiralis, & contento rectis lineis à principio ſpiralis ductis, poteſt figura plana circumſcribi, ex ſimilibus ſectoribus conſtans, & altera inſcribi: ita ut circumſcripta inſcriptam excedat ſpatio minori, quàm ſit quodlibet propoſitum ſpatium.

Sit linea ſpiralis a b c d e, cuius termini a e puncta, principium punctum h. & iunctis a h, h e, centro quidem h, interuallo autem h a circulus deſcribatur, qui occurrat lineæ h e in f. Itaque angulo, qui ad h, & ſectore a h f, ſemper bifariam diuiſo, erit quod relinquetur, minus ſpatio propoſito. Sit ſector a h k minor dicto ſpatio. ſimiliter autem iis, quæ ſuperius tradita ſunt, deſcribantur circuli per puncta,

cta, in quibus lineæ rectæ æquales angulos facientes ad h secant spiralem lineam: ita ut uniuscuiusque circumferentia, & in præcedentem, & in sequentem lineam incidat. erit iam circa spatium linea spirali a b c d e, & rectis lineis a h, h e, contentum, circumscripta quædam figura plana ex sectoribus similibus constans, & altera eidem inscripta. Circumscripta autem inscriptam excedet spatio minori proposito spatio. est enim sector h a k dicto spatio minor.

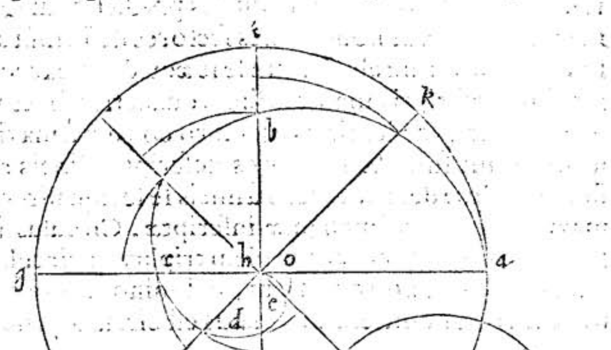


Ex hoc manifestum est fieri posse, ut circa dictum spatium figura plana, qualis dicta est, circumscribatur: & rursus altera eidem inscribatur: ita ut circumscripta spatium excedat minori quolibet proposito spatio, & spatium item figuram sibi ipsi inscriptam excedat spatio minori quolibet proposito.

PROPOSITIO XXIIII.

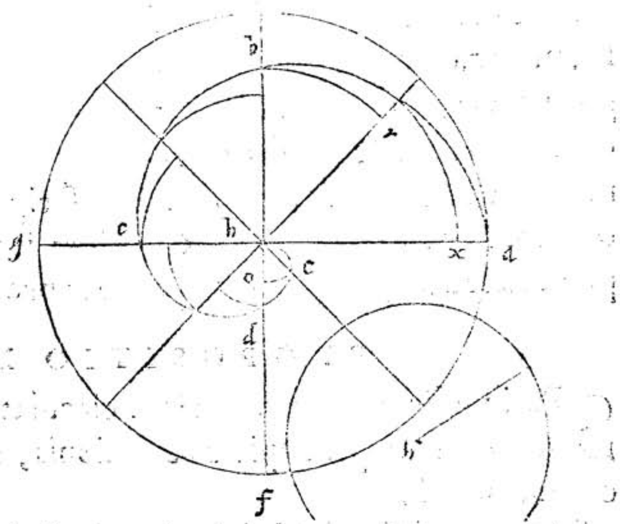
SPatium linea spirali in prima circulatione descripta, & recta linea prima in principio circulationis, contentum, tertia pars est circuli primi.

SIT linea spiralis a b c d e h in prima circulatione descripta, cuius principium punctum h: recta linea h a prima in principia circulationis: & a f g i circulus primus, cuius tertia pars sit circulus in quo γ. Ostendendum est, dictum spatium æquale esse circulo γ. Si enim non est æquale, uel eo maius erit, uel minus. Sit primum minus, si fieri potest. circa spatium autem linea spirali a b c d e h, & recta a h contentum, circumscribi potest figura plana ex similibus sectoribus constans: ita ut excedat spatium minori excessu, quàm quo circulus γ dictum spatium excedit. Itaque circumscribatur: & sit sectorum, ex quibus ipsa constat, maximus h a k, & h e o minimus. patet igitur circumscriptam figuram circulo γ minorem esse. producantur rectæ lineæ facientes ad h angulos



æquales quousque incidant in circuli circumferentiam. Sunt igitur quædam lineæ ab h puncto ad lineam spiralem ductæ, quæ se se æqualiter excedunt; quarum maxima quidem h a, minima uero h e, & minima excessui est æqualis: sunt præterea aliæ A

lineæ ab eodem puncto h ductæ ad circuli circumferentiam, numero quidem prædictis æquales, magnitudine uero unaquæque æqualis maximæ. et ab omnibus similes sectores describuntur, & ab iis, quæ se se æqualiter excedunt, & ab iis, quæ inter se, & maximæ illarum sunt æquales. sectores igitur descripti ab iis, quæ sunt æquales maximæ, minores sunt, quàm tripli sectorum, qui describuntur ab iis, quæ se se
B æqualiter excedunt, ut ostensum est. sunt autem sectores ab iis, quæ sunt æquales maximæ descripti, circulo a f g i æquales: et qui ab iis, quæ se se æqualiter excedunt, æquales sunt figuræ circumscriptæ. Quare circulus a f g i figuræ circumscriptæ minor est, quàm triplus: & est triplus circuli ų. minor est igitur ų circulus figura circumscripta. non est autem minor, sed maior. non ergo spatium contentum linea spirali a b c d e h, & a h recta linea minus est ų circulo. Sed neque maius. Sit enim maius, si fieri potest. Rursus in spatio linea spirali a b c d e h, & recta a h contento inscribi potest figura: ita ut spatium figuram circumscriptam excedat minori excessu, quàm quo excedit ų circulum. Inscribatur ergo: & sit sectorum, ex quibus inscripta figura constat, h r x maximus, & minimus o h e. manifestum est inscriptam figuram ų circulo maiorem esse. Itaque producantnr rectæ lineæ facientes ad h angulos æquales usque ad circuli circumferentiã.



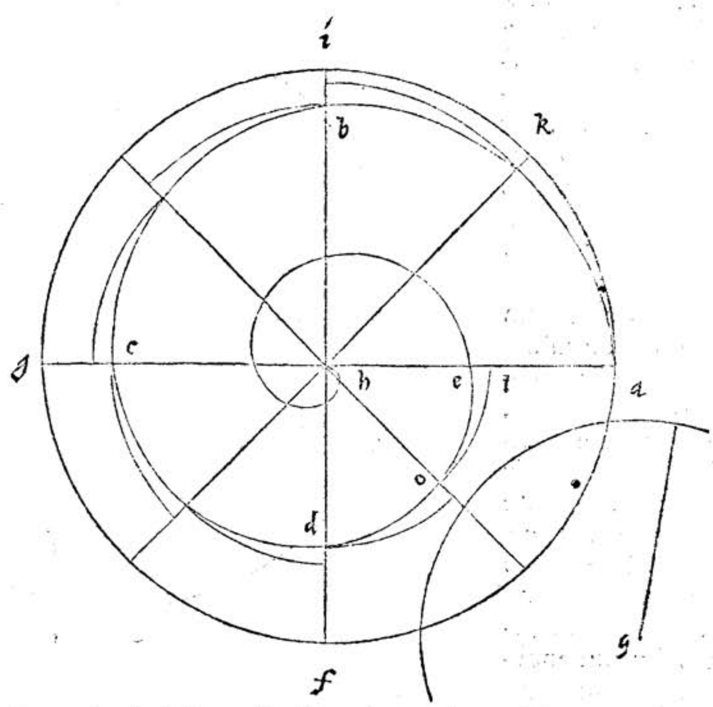
C Rursus sunt quædam rectæ lineæ se se æqualiter excedentes à puncto h ad lineam spiralem ductæ; quarum maxima est h a, & h e minima, & minima excessui est æqualis. Sunt autem & aliæ lineæ ab h ductæ ad a f g i circuli circumferentiam, numero quidem æquales prædictis, magnitudine uero unaquæque æqualis maximæ. & ab omnibus similes sectores describũtur, tũ ab iis, quæ inter se, & maximæ sunt æquales, tum ab iis, quæ se se æqualiter excedunt. sectores igitur ab æqualibus maximæ descripti, maiores sunt, quàm tripli sectorum, qui describuntur à lineis se
D se æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima describitur: hoc enim demonstratum iam fuit. Sed sectores descripti à lineis æqualibus maximæ, circulo a f g i sunt æquales: descripti uero à lineis se se æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima, æquales sunt figuræ inscriptæ. Circulus igitur a f g i maior est, quàm triplus inscriptæ figuræ. atque idem triplus est circuli ų. Quare circulus ų inscripta figura maior est. non est autem, sed minor. non ergo spatium linea spirali a b c d e h, & a h recta contentum, maius est circulo ų. necesse est igitur eidem æquale esse.

PROPOSITIO XXV.

Spatium linea spirali in secunda circulatione descripta, & recta linea secunda in principio circulationis, contentum, eam proportionem habet ad circulum secundum, quam septem ad duodecim;
A quæ eadem est ei, quam habent hæc utraque: rectangulum contentum semidiametro circuli secundi, & semidiametro primi; & tertia pars quadrati eius lineæ, qua semidiameter secundi circuli excedit

cedit ſemidiametrum primi, ad quadratum ſemidiametri ſecundi circuli.

Sit linea ſpiralis a b c d e in ſecunda circulatione deſcripta, cuius principium punctum h: recta linea h e in principio circulationis prima: & ipſa a e ſecunda: circulus autem a f g i ſit ſecundus: & lineæ a g, i f diametri eius inter ſe ſe ad angulos rectos conſtitutæ. Oſtendendum eſt, ſpatium contentum a b c d e linea ſpirali, & recta a e, ad circulum a f g i eam habere proportionem, quam ſeptem ad duodecim. B



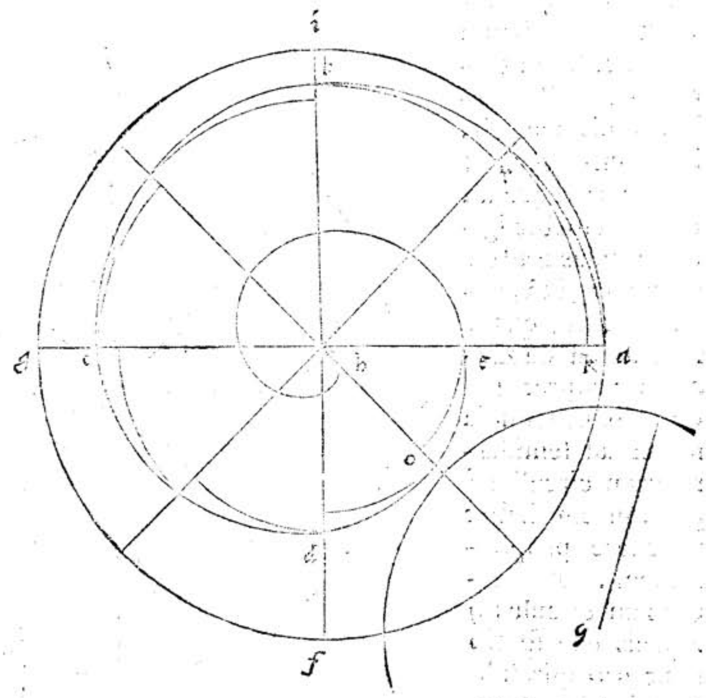
Sit circulus quidam y, cuius ſemidiameter poteſtate ſit æqualis ei rectangulo, quod lineis a h, h e continetur, & tertiæ parti quadrati a e. habebit igitur circulus y ad circulum a f g i eã proportionem, quam ſeptem ad duodecim: propterea quòd ipſius ſemidiameter ad ſemidiametrum circuli a f g i eandem habet poteſtate proportionem. Oſtendetur iam circulus y æqualis eſſe ſpatio contento ſpirali linea a b c d e, & recta a e. Nam ſi non ſit æqualis, uel maior erit, uel minor. Sit primum maior, ſi eſſe poteſt. circa ſpatium igitur poteſt figura plana circumſcribi ex ſimilibus ſectoribus conſtans: ita ut figura circumſcripta ſpatium excedat minori exceſſu, quàm quo circulus y excedit dictum ſpatium. Circumſcribatur: & ſit h a k ſector maximus eorum, ex quibus cõſtat circumſcripta figura, & minimus h o l. manifeſtum ergo eſt circumſcriptam figuram circulo y minorem eſſe. producantur lineæ rectæ facientes ad h angulos æquales uſque ad circumferentiam circuli ſecundi. Itaque ſunt quædam lineæ ſe ſe æqualiter excedentes, quæ uidelicet à puncto h ductæ in ſpiralem lineam incidunt; quarum h a maxima eſt, minima h e. ſunt autem & aliæ lineæ à puncto h ad circuli a f g i circumferentiam ductæ, numero quidem illis una minores, magnitudine uero inter ſe ſe, & maximæ illarum æquales. & deſcripti ſunt ſectores ſimiles à lineis maximæ æqualibus, & ab iis, quæ ſe ſe æqualiter excedunt, præterquam ab ea, quæ minima eſt. ſectores igitur à lineis æqualibus maximæ deſcripti ad ſectores deſcriptos à lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à minima, minorem habent proportionem, quàm quadratum h a maximæ ad utraque hæc, ad rectangulum lineis a h, h e contentum, & ad tertiam partem quadrati a e: hoc enim oſtenſum eſt. Sed circulus a f g i æqualis eſt ſectoribus, qui fiunt à lineis inter ſe, & maximæ illarum æqualibus: ſectoribus autem, qui à lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à minima fit, æqualis eſt figura circumſcripta. minorem igitur proportionem habet a f g i circulus ad circumſcriptam figuram, quam quadratum lineæ a h ad hæc utraque: ad rectangulum a h e, & ad tertiam partem quadrati a e. Quam uero proportionem

C

D

E

portionem habet quadratum a h ad rectangulum a h e; & ad tertiam partem quadrati a e, eandem habet circulus a f g i ad y circulum. minorem ergo proportionem habet circulus a f g i ad circumſcriptam figuram, quàm ad y circulum. ex quibus ſequitur circulum y minorem eſſe figura circumſcripta. non eſt autem minor, ſed maior. non igitur circulus y maior eſt ſpatio linea ſpirali a b c d e, & a e recta linea contento. Sed neque minor. ſit nanque minor, ſi eſſe poteſt. rurſus in ſpatio linea ſpirali; & recta a e contento, inſcribi poteſt figura plana ex ſectoribus ſimilibus: ita ut ſpatium contentum a b c d linea ſpirali, & recta a e, excedat figuram inſcriptam minori exceſſu, quàm quo y circulum excedit. Sit iam inſcripta: & ſectorum, ex quibus ipſa conſtat, ſit maximus h k r, & h e o minimus. manifeſtũ eſt igitur inſcriptam figuram y circulo maiorem eſſe. producãtur rectæ lineæ, quæ ad h faciunt angulos æquales ad circuli uſque circumferentiam. Rurſus ſunt quædam lineæ ſe ſe æqualiter excedentes, quæ ab h in ſpiralem lineam incidunt, quarum maxima h a, & h e minima, Sunt etiam aliæ lineæ ab h in circumferentiam circuli incidentes, numero quidem una minores, magnitudine uero, & inter ſe, & maximæ æquales: deſcripti quoque ſunt ſectores ſimiles à lineis æqualiter ſeſe excedentibus, &



F à lineis æqualibus maximæ. ſectores igitur ab æqualibus maximæ deſcripti ad ſectores à lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima, maiorem proportionem habent, quàm quadratum h a ad utraque hæc, ad rectangulum a h e, & ad tertiam partem quadrati e a. eſt autem figura in ſpatio inſcripta æqualis ſectoribus, qui à lineis ſe ſe æqualiter excedentibus fiunt, dempto, eo qui à maxima: & cæteris ſectoribus æqualis eſt circulus. maiorem igitur proportionem habet a f g i circulus ad inſcriptam figuram, quàm quadratum h a ad rectangulum a h e, & ad tertiam partem quadrati a e. hoc eſt circulus a f g i ad y circulum. quare maior eſt y circulus figura inſcripta: quod fieri non poteſt: erat enim minor. non ergo neque minor eſt y circulus ſpatio linea ſpirali a b c d e, & a e recta contento. æqualis eſt igitur, ut proponebatur.

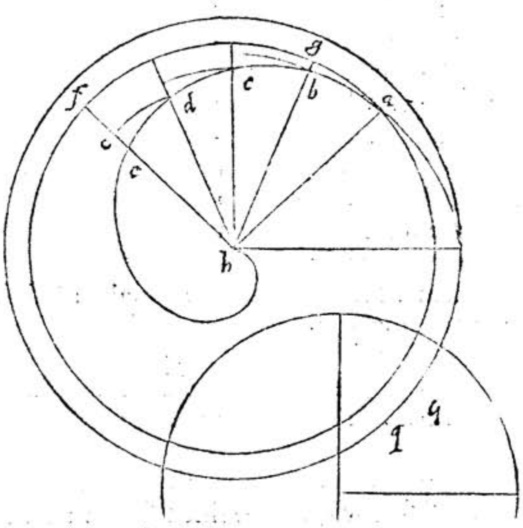
Eodem modo oſtendetur, & ſpatium contentum linea ſpirali in qualibet circulatione deſcripta, & recta linea, quæ ſecundum numerum circulationis dicatur, ad circulum eodem numero denominatum, eam proportionem habere, quàm utraque hæc: rectangulum contentum ſemidiametro circuli à numero circulationis dicti,

cti, & ſemidiametro circuli dicti à numero, qui ſit uno minor nume ro circulationis: & tertia pars quadrati eius lineæ, qua ſemidiame- G
ter circuli maioris excedit ſemidiametrum minoris; ad quadratum ſemidiametri maioris circuli.

PROPOSITIO XXVI.

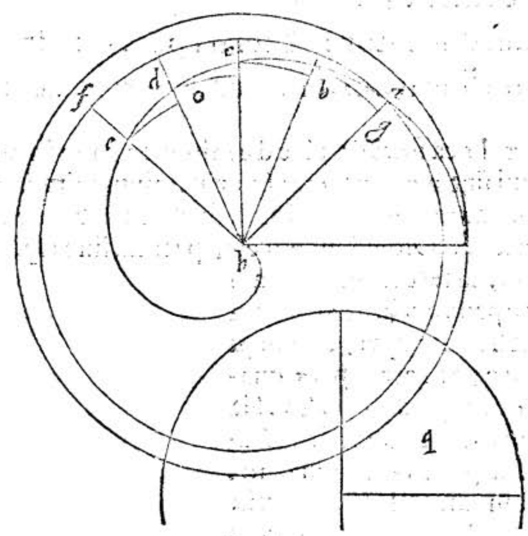
SPatium contentum linea ſpirali, quæ ſit minor ea, quæ in una circulatione deſcribitur; quæq; non habeat terminum, principium lineæ ſpiralis, & contentum rectis lineis à terminis eius ad ſpiralis principium ductis, ad ſectorem habentem ſemidiametrum æqualem maiori earum, quæ à terminis ad ſpiralis principium ductæ ſunt, circumferentiam uero inter dictas lineas interiectam ad partes lineæ ſpiralis, eam proportionem habet, quam utraque hæc: rectangulum contentum rectis lineis, quæ à terminis ipſius ad ſpirâlis principium ducantur: & tertia pars quadrati eius lineæ, qua maior dictarum linearum minorem excedit, ad quadratum maioris earundē.

SIT linea ſpiralis a b c d e minor ea, quæ in una circulatione deſcribitur; cuius termini ſint a e puncta: & ſit principium ſpiralis punctum h: & centro quidem h, interuallo autem h a circulus deſcribatur: & linea h e occurrat eius circumferentiæ in puncto f. Oſtendendum eſt, ſpatium linea ſpirali a b c d e, & rectis a h, h e contentum, ad ſectorem a h f eam habere proportionem, quam habent hæc utraque; rectangulum a h e, & tertia pars quadrati e f ad quadratum h a. Sit circulus q y habens ſemidiametrum poteſtate æqualem, & rectangulo a h e, & tertiæ parti quadrati e f. ad centrum autem ipſius ſit angulus æqualis angulo ad h, conſtituto. ſector igitur q y ad h a f ſectorem eandem proportionem habet, quam rectangulum a h e, & tertia pars quadrati e f habent ad quadratum h a: horum enim ſemidiametri inter ſe ſe eandem habent poteſtate proportionem. Oſtendetur iam q y ſector æqualis ſpatio linea ſpirali a b c d e, & rectis lineis a h, h e contento. Nam ſi non eſt æqualis: uel maior erit, uel minor. A



Sit primum, ſi eſſe poteſt, maior. circa ſpatium igitur poteſt figura plana circumſcribi ex ſectoribus ſimilibus conſtans: ita ut excedat ipſum minori exceſſu, quàm quo q y ſector dictum ſpatium excedit. Sit iam circumſcripta; & ſectorum, ex quibus ipſa conſtat, maior quidem ſit h a g; minor uero h o d. manifeſtum eſt, circumſcriptam figuram ſectore q y minorem eſſe. producantur rectæ lineæ, quæ faciunt ad h angulos æquales, uſque ad circumferentiam ſectoris h a f. Itaque lineæ quædam ſunt æqualiter

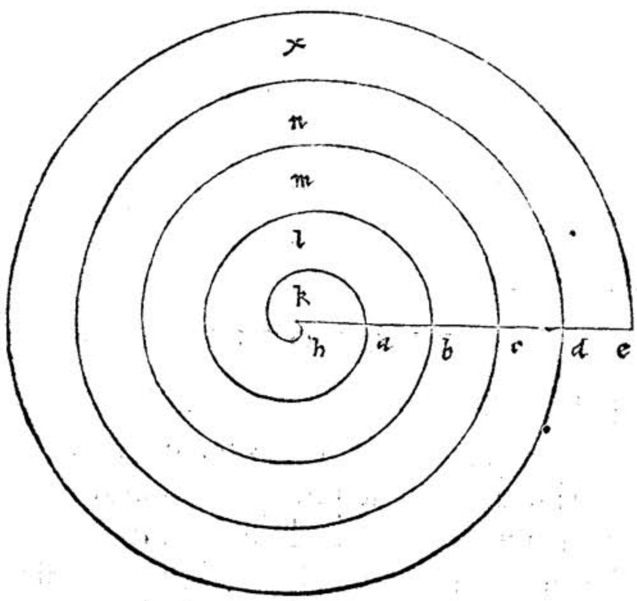
æqualiter ſe ſe excedentes, à puncto h ad ſpiralem lineam ductæ, quarum maxima h a, & h e minima. ſunt autem & aliæ lineæ numero quidem una minores illis, magnitudine uero inter ſe, & maximæ æquales; quæ ab h ductæ in ſectoris a h f circumferentiam incidunt, dempta linea h f. deſcriptiq; ſunt ſimiles ſectores ab omnibus, & ab iis, quæ inter ſe, & maximæ illarum ſunt æquales, & ab iis, quæ ſe ſe æqualiter excedunt: ab ipſa uero h e nihil eſt deſcriptum. ſectores igitur à lineis inter ſe, & maximæ æqualibus deſcripti ad ſectores à lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à minima, minorem proportionem habent, quàm quadratum h a ad utraque hæc: ad rectangulum a h e; & tertiam partem quadrati e f. Sed ſectoribus quidem, qui à lineis inter ſe, & maximæ æqualibus deſcribuntur, æqualis eſt h a f ſector: illis uero, qui à lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, circumſcripta figura eſt æqualis. minorem ergo proportionem habet h a f ſector ad circumſcriptam figuram, quàm quadratum h a ad hæc utraque: ad rectangulum a h e; & ad tertiam partem quadrati e f. Quam uero proportionem habet quadratum h a ad dicta ſpatia, eandem ſector h a f habet ad ſectorem q y. quare ſector q y minor eſt figura circumſcripta. atqui minor non eſt, ſed maior. non igitur ſector q y maior erit ſpatio linea ſpirali, a b c d e, & h a, h e rectis lineis contento, Sed neque erit minor, Sit enim minor, ſi eſſe poteſt, & alia eadem fiant. Rurſus in ſpatio poteſt figura plana inſcribi ex ſimilibus ſectoribus: ita ut dictum ſpatium figuram inſcriptam excedat minori exceſſu, quàm quo q ſectorem excedit. Inſcribatur: & ſit ſectorem, ex quibus ipſa conſtat, maior quidem h b g; minor uero o h e. manifeſtum eſt igitur inſcriptam figuram maiorem eſſe q ſectore. Rurſus ſunt quædam lineæ ſe ſe æqualiter excedentes, à puncto h ad lineam ſpiralem ductæ, quarum maxima eſt h a, & h e minima: ſunt item aliæ lineæ ab h puncto ductæ ad circumferentiam uſque ſectoris h a f, dempta ipſa h a; quæ numero quidem ſunt illis una minores: magnitudine autem inter ſe, & maximæ æquales: & deſcripti ſunt ab unaquaque ſimiles ſectores: à maxima uero earum quæ ſeſe æqualiter excedunt, nihil eſt deſcriptum. ſectores igitur à lineis inter ſe, & maximæ æqualibus, ad ſectores à lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima, maiorem proportionem habent, quàm quadratum h a ad contentum a h, h e; & tertiam partem quadrati e f. quare & h a f ſector ad inſcriptam figuram maiorem proportionem habet, quàm ad q ſectorem, ergo ſector q inſcripta figura maior eſt. non eſt autem maior, ſed minor. neque igitur minor eſt ſector q ſpatio linea ſpirali a b c d e, & a h, h e rectis lineis contento. quare eidem eſt æqualis.



PROPOSITIO XXVII.

SPaciorum lineis ſpiralibus, & rectis, quæ in circulationibus ſunt, contentorum, tertium quidem ſecundi duplum eſt; quartum triplum; quintum quadruplum; & ſemper ſequens ſecundum numerus, numeros, qui deinceps sunt, secundi est multiplex. primum uero spatium sexta pars est secundi.

Sit proposita linea spiralis, & in prima circulatione descripta, & in secunda, & in cæteris quotlibet: Sitq; eius principium punctum h: & h e recta linea, principium circulationis: spatiorum autem primum sit k; secundum l; tertium m; quartum n; & quintum x. Ostendendum est, spatium k sextam partem esse eius, qui sequitur: & m spatium duplum esse ipsius l: & n triplum eiusdem: & eorum, qui deinceps sunt, semper id, quod sequitur, multiplex esse spatii l secundum numeros sequentes. At uero k sextam partem esse ipsius l sic ostendetur. Quoniam spatium kl ad secundum circulum, ostensum est eam habere proportionem, quam septem ad duodecim: secũdus autem A circulus ad primum est, sicut duodecim ad tria; quod manifeste patet: & circulus primus ad spatium k, sicut tria ad unũ: erit spatiũ k sexta pars ipsius l. Rursus spatium klm ad tertium circulũ eam habere proportionẽ ostensum est,



quam utraque hæc: rectangulum c h b; & tertia pars quadrati c b, habent ad quadratum c h: tertius autem circulus ad secundum eam habet, quam quadratum c h ad h b quadratum: & secundus circulus ad spatium kl eam, quam quadratum b h ad hæc utraque: rectangulum b h a; & tertiam partem quadrati a b. spatium ergo klm ad ipsum kl eam habet proportionem, quam hæc utraque: rectangulum c h b; & tertia pars quadrati c b, ad utraque illa: ad rectangulum scilicet b h a; & tertiam partem quadrati a b. Hæc autem eam habent inter se proportionem, quam decem & nouem ad septem. quare & spatium klm ad kl habet eam, quam decem & nouem B ad septem. ergo m ad kl eam, quam duodecim ad septem: & kl ad l, quam septem ad sex. unde sequitur m spatium ipsius l duplum esse. Ea autem quæ sequuntur habere proportionem numerorum, qui deinceps sunt, ostendetur hoc pacto. Spatium enim klmnx ad circulum, cuius semidiameter est h e, eam habet proportionem, quam utraque hæc: rectangulum e h d; & tertia pars quadrati d e, ad h e quadratum. circulus autem, cuius semidiameter est h e, ad circulum, cuius semidiameter h d habet eam, quam quadratum h e ad quadratum h d: & circulus, cuius semidiameter h d ad spatium klmn eam, quam quadratum h d ad utraque: ad rectangulum d h c; & tertiam partem quadrati d c. & spatium igitur klmnx ad spatium klmn eam habet proportionem, quam rectangulum e h d; & tertia pars quadrati d e, ad rectangulum d h c; & tertiam partem quadrati d c; & diuidendo x spatium ad klmn eam habet, quam excessus, quo rectangulum e h d unà cum tertia parte quadrati d e, excedit rectangulum d h c unà cum tertia parte quadrati d c, ad rectangu-

C lum dhc; & tertiam partem quadrati dc. Sed utraque illa excedunt hæc utraque eo, quo & rectangulum ehd excedit rectangulum dhc: hoc est eo, quod dh, ce lineis continetur. spatium igitur x ad klmn spatium eam habet proportionem, quam rectangulum contentum hd, ce, ad rectangulum dhc; & tertiam partem quadrati cd. Per hæc eadem ostendetur, & n spatium ad klm eam proportionem habere, quam rectangulum ex hc, bd, ad utraque: ad rectangulum chb; & tertiã D partem quadrati cb. quare spatium n ad klmn eam habet, quam rectangulum ex hc, bd, ad rectangulum chb, & ad tertiam partem quadrati cb unà cum rectan-E gulo ex hc,bd. & conuertendo. Hæc autem æqualia sunt rectangulo dhc; & tertiæ parti quadrati cd. Quoniam igitur x spatium ad spatium klmn eam proportionem habet, quam rectangulum ex hd, ce ad utraque hæc; ad rectangulum dhc; & ad tertiam partem quadrati cd: & spatium klmn ad n spatium habet eam, quam utraque: rectangulum dhc, & tertia pars quadrati cd ad rectangulum ex hc, bd: sequitur spatium x ad n eandem habere, quam rectangulum ex hd, ce ad rectangu-F lum ex hc, bd. rectangulum uero ex hd, ce ad rectangulum ex hc, db eam habet, quam hd ad hc: quoniam lineæ ce, bd sunt æquales. manifestum est igitur x spatium ad spatium n eam habere proportionem, quam hd ad hc. similiter ostẽdetur & spatium n ad m habere eam, quam hc ad hb: & m ad l, quam bh ad ah. lineæ autem rectæ eh, dh, ch, bh, ah numerorum deinceps sumptorum proportionem habent.

PROPOSITIO XXVIII.

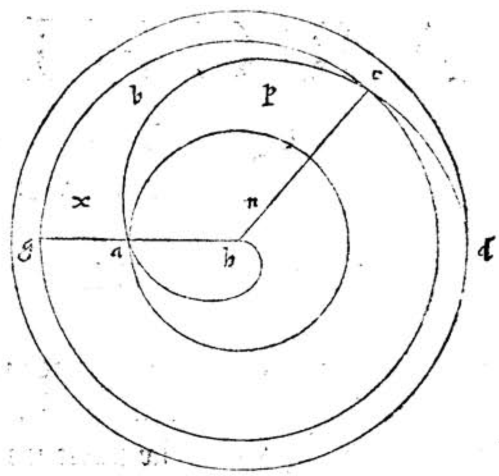
SI in linea spirali in qualibet circulatione descripta duo puncta sumantur; quæ non sint ipsius termini: ab his autem punctis iungantur rectæ lineæ ad principium lineæ spiralis: & centro quidem lineæ spiralis principio, interuallo autem dictis lineis circuli describantur: spatium contentum circumferentia maioris circuli, quæ inter rectas lineas interiicitur; & linea spirali interiecta inter easdem; & recta linea producta, eam habebit proportionem ad spatium contentum minoris circuli circumferentia, & eadem linea spirali, & recta terminos ipsarum iungente, quam semidiameter minoris circuli unà cum duabus tertiis excessus, quo semidiameter circuli maioris excedit semidiametrum minoris, habet ad semidiametrum minoris unà cum tertia eiusdem excessus.

SIT linea spiralis abcd in una circulatione descripta: & in ipsa sumantur duo puncta ac: sitq; h principium spiralis: & à punctis ac iungantur rectæ lineæ ad h: & centro quidem h, interuallis autem ah, hc circuli describantur. Ostendendum est, x spatium ad spatium p eandem habere proportionem, quam utraque linea: ha, & duæ tertiæ ga ad utranque lineam: ha & tertiam ipsius ga. spatium enim n p ad sectorem gch ostensum est eam proportionem habere, quam habet rectangu-A lum gha, & tertia quadrati ag, ad quadratum gh. Quare x spatium ad np eam habet, quam rectangulum hag cum duabus tertiis quadrati ga ad utraque hæc: & ad rectangulum ahg; & ad tertiam partem quadrati ga. et quoniam spatium np ad npx sectorem eam proportionem habet, quam utraque hæc: rectangulum ahg; & tertia quadrati ga, ad quadratum hg: sector autem npx ad sectorem n eam habet, quam hg quadratum ad quadratum ha: habebit & spatium np ad sectorem n eandem, quam utraque; rectangulum ahg; & tertia quadrati ga ad quadratum ha.

spatium

B

ſpatium igitur n p ad ipſum p eam habet proportionem, quam utraque: & rectangulum g h a, & tertia quadrati g a ad utraque: ad rectangulum g a h, & tertiam quadrati g a. Itaque quoniam x ſpatium ad ſpatium n p eam proportionem habet, quam utraque: rectangulum h a g, & duæ tertiæ quadrati g a ad utraque: ad rectangulum g h a, et tertiam quadrati g a. ipſum autem n p ad p habet eam, quam utraque: rectangulum g h a; et tertia quadrati g a ad utraque: ad rectangulum g a h, et tertiam quadrati g a. habebit et x ſpatium ad p eandem, quam utraque: rectangulum h a g; et



duæ tertiæ quadrati g a, ad utraque: rectangulum h a g; et tertiam quadrati g a. Vtraque uero hæc: rectangulum h a g; et duæ tertiæ quadrati g a ad utraque: ad rectangulum h a g; et tertiam quadrati g a, eam proportionem habet, quam utraque linea: h a; et duæ tertiæ g a ad utranque lineam: h a; et tertiam ipſius g a. manifeſtum eſt igitur, x ſpatium ad ſpatium p eam habere proportionem, quam utraque linea: h a; et duæ tertiæ g a ad utranque, h a, et tertiam ipſius g a.

ARCHIMEDIS
QVADRATVRA
PARABOLES.

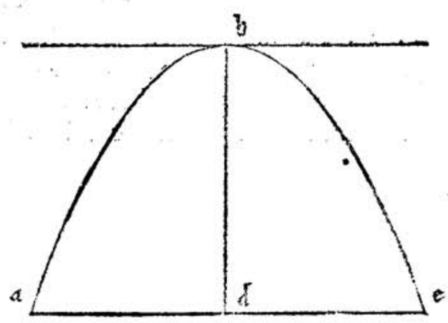
ARCHIMEDES DOSITHEO S. D.

CVM Cononem, qui ſolus ex amicis mihi ſupererat, interiiſſe, teq; eo familiariter uſum, & geometriæ peritum eſſe audiſſem: mortem quidem Cononis grauiter, moleſteq; tuli, ut & hominis amici; & artium, ac diſciplinarum cognitione plane admirabilis. ad te uero, ut ad Cononem antea conſtitueram, unum ex geometricis theorematibus mittere decreui. quod cum nemo ante hac attigerit, nunc à nobis pertractatum eſt: mechanicis illud quidem primum rationibus inuentum, poſtea uero geometricis etiam demonſtratum. Nonnulli quidem ante nos in geometria uerſati tentarunt oſtendere, quomodo ſpatium rectilineum inueniri poſſet, quod aut dato circulo, aut circuli portioni datæ eſſet æquale. Deinde & ſpatium totius coni ſectione, & recta linea contentum quadrare conati ſunt: ſumentes ad hæc lemmata, quæ non facile concedantur. Quæ quidem tanquam à compluribus non inuenta, plane refutata, ac reiecta ſunt. Portionem uero rectanguli coni ſectione, & recta linea contentam, nemo ex antiquis, quòd ſciam, quadrare aggreſſus eſt; quod nunc à nobis eſt inuentum. ſiquidem demonſtrauimus, omnem portionem, quæ recta linea, & rectanguli coni ſectione continetur, ſeſquitertiam eſſe trianguli baſim habentis portioni eandem, & æqualem altitudinem; ſumpto ad demonſtrationem huiuſmodi lemmate, Inæqualium ſpatiorum exceſſus, quo maius ſuperat minus; fieri poſſe, ut ſibi ipſi coaceruatus quodlibet propoſitum, definitumq; ſpatium excedat. Hoc ipſo autem lemmate & priores geometræ uſi ſunt, cum ſcilicet demonſtrarunt, circulos inter ſe ſe proportionem habere duplam eius, quæ eſt ſuarum diametrorum: itemq; ſphæras habere triplam eius, quæ eſt axium proportionem: omnem præterea pyramidem tertiam partem eſſe priſmatis, quod eandem baſim habeat pyramidi, & æqualem altitudinem: & omnem inſuper conum tertiam partem eſſe cylindri eandem ipſi baſim habentis, & altitudinem

æqualem,

æqualem, ſimiliter propoſito lemmate uſi oſtenderunt. contingitq́; ut prædictorum theorematum, quæ demonſtrantur, unicuique non minor, quàm ipſi lemmati fides habeatur. Nuper autem in ſimilem huius fidem adduximus ea, quæ à nobis edita ſunt. Cum igitur huius theorematis demonſtrationes conſcripſerim, eas ad te mitto: ac primum quidem, quomodo mechanicis rationibus inueſtigatum fuerit: poſtea uero quomodo etiam geometricis demonſtretur. Sed & præmittuntur conica quidem elementa, quæ ad demonſtationem hanc maxima neceſſaria ſunt. Vale.

PROPOSITIO I.



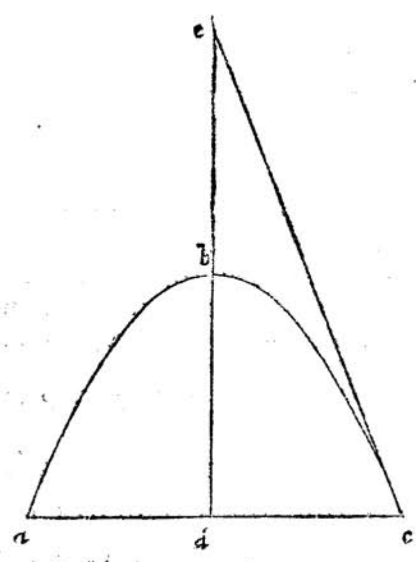
SI ſit rectanguli coni ſectio a b c: & linea b d ſit æquidiſtans diametro, uel ipſa diameter: linea autem a d c æquidiſtans lineæ coni ſectionem tangenti in puncto b: erunt ipſæ lineæ a d, d c inter ſe æquales. Quòd ſi a d, d c ſint æquales: linea a d c æquidiſtans erit lineæ in b puncto coni ſectionem tangenti.

A

B

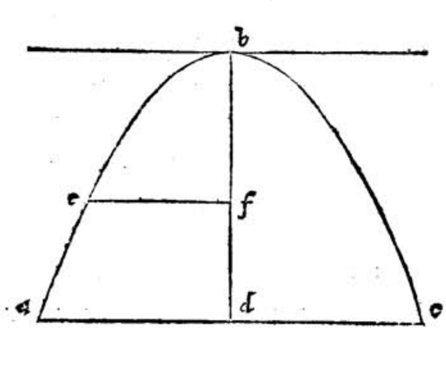
C

PROPOSITIO II.



SI ſit rectanguli coni ſectio a b c: ſit autem linea b d æquidiſtans diametro, uel ipſa diameter: & a d c æquidiſtans lineæ in puncto b coni ſectionem tangenti: tangat quoque c e linea coni ſectionem in puncto c: erunt lineæ d b, b e inter ſe æquales.

PROPOSITIO III.



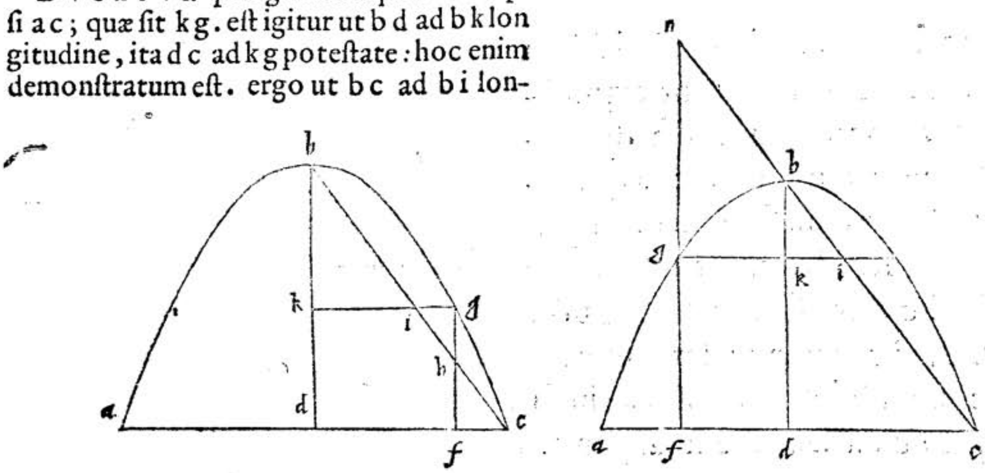
SI ſit rectanguli coni ſectio a b c: ſitq́; b d, uel æquidiſtans diametro, uel ipſa diameter: & ducantur quæpiam lineæ a d, e f æquidistantes lineæ tangenti coni sectionem in puncto b: erit ut b d ad b f longitudine, ita a d ad e f potestate.

DEMONSTRATA autem sunt hæc in elementis conicis.

PROPOSITIO IIII.

SIT portio contenta linea recta, & rectanguli coni sectione a b c: ipsa autem b d à medio lineæ a c educatur diametro æquidistans,
A aut ipsa diameter: & b c iuncta producatur. Itaque si alia quæpiam linea f h ducatur æquidistans ipsi b d, & secans utrasque a c, c b: habebit f h ad h g eandem proportionem, quam d a ad d f.

B DVCATVR per g linea æquidistans ipsi a c; quæ sit k g. est igitur ut b d ad b k longitudine, ita d c ad k g potestate: hoc enim
C demonstratum est. ergo ut b c ad b i longitudine, ita d c ad d f potentia: æquales nanque sunt d f, k g. et idcirco sicut b c ad b i longitudine, sic b c ad b h potentia. proportionales igitur sunt lineæ b c, b h, b i. quare eandem proportionem habet b c ad b h, quam c h ad h i. est igitur sicut c d ad d f, sic h f ad h g. ipsi autem d c æqualis est d a, constat ergo d a ad d f eandem habere proportionem, quam f h ad h g.



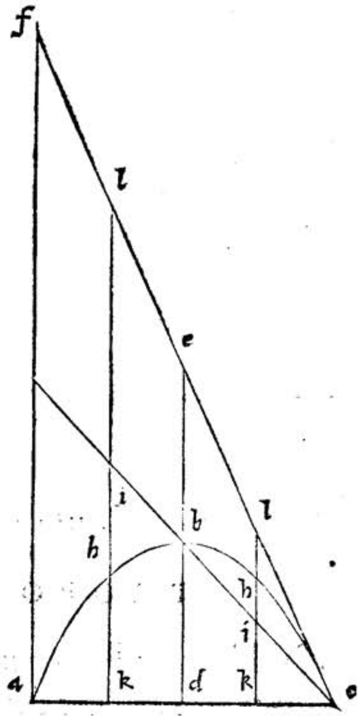
PROPOSITIO V.

SIT portio contenta recta linea, & rectanguli coni sectione a b c: & ducatur à puncto a linea a f æquidistans diametro; & à c puncto ducatur tangens coni sectionem in c, quæ sit c f. si igitur in triangulo f a c ducatur quædam linea æquidistans ipsi a f: secundum eandem proportionem secabitur linea ducta à coni rectanguli sectione, & linea a c ab ipsa ducta; pars uero lineæ a c, quæ est ad a, parti lineæ ductæ, quæ item est ad a proportione respondebit.

A DVCATVR enim linea d e æquidistans ipsi a f: et secet primum lineam a c bifariam. Quoniam igitur rectanguli coni sectio est a b c: et ducta est b d æquidistans diametro: lineæ autem a d, d c sunt æquales inter se se: erit linea, quæ in b puncto tangit rectanguli coni sectionem ipsi a c æquidistans. Rursus quoniam d e

æquidistans

æquidiſtans eſt diametro: & à puncto c ducta eſt c e tangens ſectionem coni in c: ipſa autem d c æquidiſtat lineæ tangenti in b: æqualis erit e b ipſi b d. quare eandem habet proportionē a d ad d c, quam d b ad b e. Si quidem igitur bifariam ſecat ducta linea ipſam a c: oſtenſum eſt propoſitum. ſin minus, ducatur alia quædam linea k l æquidiſtans ipſi a f. oſtendendum eſt eandem habere proportionem a k ad k c, quam k h ad h l. Quoniam C
enim æqualis eſt b e ipſi b d: æqualis eſt & i l ipſi k i: eandem igitur proportionem habet i l ad k i, quam d c ad d a: habet autem & k i ad h k D
eandem, quam d a ad a k: hoc enim in antecedente eſt demonſtratum. quare eandem habet proportionem E
k h ad h l, quam a k ad k c: quod demonſtrandum proponebatur.



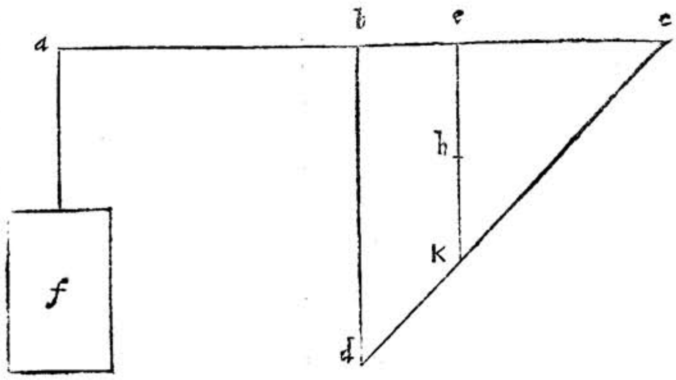
PROPOSITIO VI.

INtelligatur autem hoc, quod in ſpeculatione propoſitum eſt: & ſit conſpectum in plano ſuper horizontem erecto, & in linea a b: A
deinde ea, quæ ſunt ad eaſdem partes ipſi d, deorſum intelligantur; & quæ ad contrarias, ſurſum. triangulum autem b d c ſit rectangulum, rectum habens angulum ad b, & latus b c æquale dimidio libræ; linea ſcilicet a b æquali exiſtente ipſi b c. ſuſpendaturq; triangulum ex punctis b c: & aliud ſpatium f ſuſpendatur ex altera parte libræ in puncto a: ita ut f in a ſuſpenſum æquiponderet ipſi b d c triangulo, ut nunc conſtituto. Dico ſpatium f tertiam partem eſſe trianguli b d c.

QVONIAM enim poſitum eſt, libram æquiponderare: erit a c linea ipſi horizonti æquidiſtans. lineæ autem ad rectos angulos ductæ ipſi a c, in plano erecto ſuper horizontem, & ipſæ ad horizontem perpendiculares erunt. Secetur linea b c in puncto e: ita ut c e ipſius e b ſit dupla: ducaturq; k e æquidiſtans d b, & bifariam ſecetur in h. erit trianguli b d c centrum grauitatis ipſum h punctum: nam demonſtratum eſt hoc in mechanicis. Si igitur b d c trianguli ſuſpenſio, quæ eſt ad b c ſoluatur, & ſuſpendatur ad e: manebit triangulum, ut nunc habet: Vnumquodque enim ſuſpenſorum ex quo puncto conſtitutum eſt, manet; cum in linea perpendiculari ſit punctum ſuſpenſionis, & centrum grauitatis ſuſpenſi: quod etiam eſt demonſtratum. Itaque quoniam triangulum b c d eandem habet conſtitutionem ad librā: æquiponderabit ſimiliter f ſpatium. & quoniam æquiponderant, ſpatium quidem f ſuſpenſum ad a; triangulum autem b d c ad e: conſtat ea ex altera parte reſpon-

dere

dere ipſis longitudinibus, atque eſſe, ut a b ad b e, ita b d c triangulum ad ſpatium f. eſt autem a b linea tripla ipſius b e. & triangulum igitur b d c triplum eſt ipſius f ſpatii.

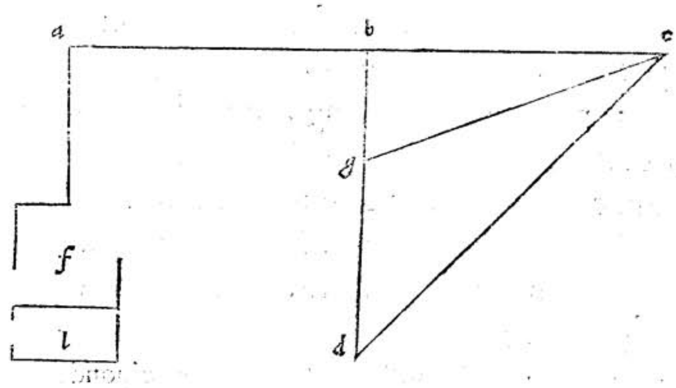


Manifeſtũ præterea eſt, ſi triplũ. ſit b d c triã gulum ipſius f ſpatii: ea ſimiliter conſtituta æquiponderare.

PROPOSITIO VII.

SIT rurſus libra a c linea, cuius medium b: & ſuſpendatur triangulum c d g in b: ſitq; c d g triangulum obtuſiangulum, baſim habens lineam d g, & altitudinem æqualem dimidiæ libræ: & ſuſpendatur triangulum d c g ex punctis libræ b c: ſpatium autem f ſuſpenſum ex a, æquiponderet ipſi triangulo c d g: ita ut nunc, poſito. Similiter oſtendetur ſpatium f tertiam partem eſſe c d g trianguli.

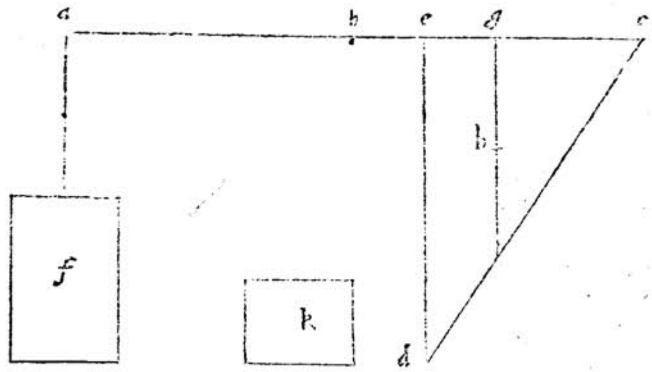
SVSPENDATVR enim & aliud ſpatium l ex a, quod quidem ſit tertia pars trianguli b c g. æquiponderabit igitur b d c triangulum ſpatio f l. Et quoniam triangulum b c g æquiponderat ſpatio l: triangulum autem b c d ipſi f l: & tertia pars eſt f l trianguli b c d: conſtat & triangulum c d g ſpatii f triplum eſſe.



A

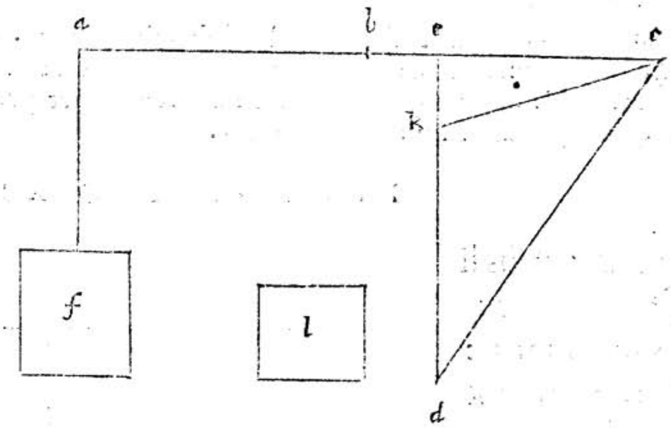
PROPOSITIO VIII.

SIT libra a c, cuius medium b: & ſuſpendatur in b triangulum rectangulum c d e, rectum angulum habens ad e, & ſuſpendatur ex c e punctis libræ: ſpatium autem f ſuſpendatur ex a, & æquiponderet triangulo c d e: ita ut nunc, conſtituto: & quam proportionem habet a b ad b e, habeat triangulum c d e ad ſpatium K. Dico co f ſpatium triangulo quidem c d e minus eſſe, ſpatio autẽ K maius.



SVMATVR enim trianguli d e c centrũ grauitatis, quod ſit h: & ducatur h g æquidiſtans ipſi d e. Quoniam igitur æquiponderat c d e triangulum ſpatio f: eandem habet proportionem c d e ad f, quam linea a b ad ipſam b g. quare minus eſt f ſpatiũ triangulo c d e. & quoniam c d e triangulum ad f quidem eam habet proportionem, quam b a ad b g; ad ipſum autem k habet eam, quam b a ad b e: conſtat maiorem proportionem habere c d e triangulum ad k, quam ad f. quare maius eſt f ipſo k.

PROPOSITIO X



SIT rurſus libra a c, cuius medium b: & triangulum c d K obtuſiangulum, baſim habens d K, & altitudinem e c: & ſuſpendatur ex punctis libræ e c: ſpatium uero f ſuſpenſum ex a æquiponderet triangulo d c K ita habenti, ut nunc habet: & quam proportionem habet a b ad b e, eam triangulum c d K habeat ad ſpatium l. Dico f ſpatium ipſo quidem l maius eſſe, triangulo autem d c K minus.

DEMONSTRABITVR hoc ſimiliter antecedenti.

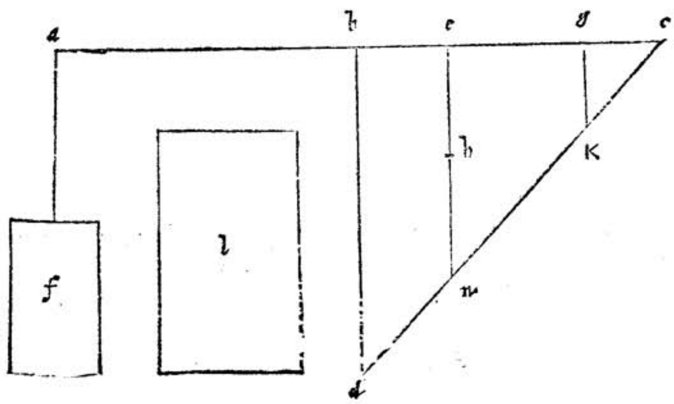
PROPOSITIO XI.

SIT rurſus a b c libra, cuius medium b; & trapezium b d K g, quod ad puncta quidem b g angulos rectos habeat, latus uero d c in ipſum c tendens: & quam proportionem habet b a ad b g, eam habeat trapezium b d K g ad ſpatium l: ſuſpendaturq; trapezium ex libra in punctis b g: & f ſpatium ſuſpendatur in a, quod æquiponderet ipsi trapezio b d K g ita habenti, ut nunc ponitur. Dico f spatium minus esse ipso l.

SECETVR enim a c in e: ita ut quam proportionem habet dupla ipsius d b, & ipsa k g ad duplam ipsius k g, & ad b d, eam habeat e g ad b e: & per e ducta e n æquidistans ipsi b d secetur bifariam in h. trapezii igitur b d k g centrum grauitatis

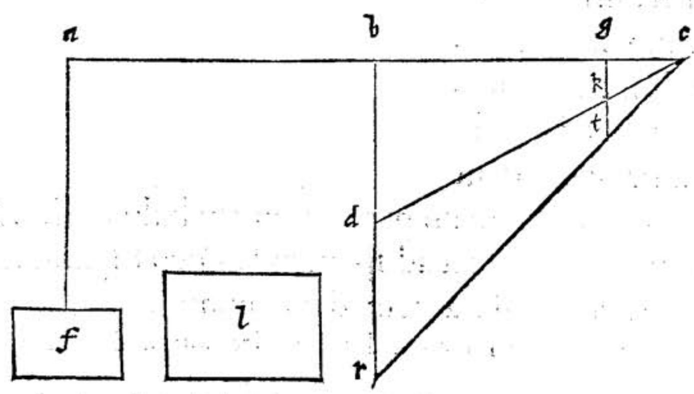
A est punctum h, ut ostensum est in mechanicis. Itaque si b d k g trapezium in e suspendatur, & soluatur à b g punctis: manet eandem habens cõstitutionem; ex iis, quæ superius demonstrata sunt: & æquiponderabit spatio f. Quoniam igitur æquiponderat b d k g trapezium suspensum ad e, spatio f ad a suspenso: erit ut b a ad be, ita trapezium b d k g ad f spatium. maiorem ergo proportionem habet b d k g trapezium ad spatium f, quàm ad l: quoniam & a b ad b e maiorem habet proportionem, quàm ad b

9. quinti g. quare spatium f minus erit l spatio.



PROPOSITIO XI.

SIT rursus libra a c, cuius medium b: & trapezium K d t r latera quidem K d, t r habens in c tendẽtia, ipsa autem d r K t perpendicularia ad b c: cadatq; d r in b, & K t in g: Quam uero proportionem habet a b ad b g, habeat trapezium d K t r ad spatium l: & suspendatur trapezium ex libra in punctis b g, & f spatium in a: & æquiponderet spatium f trapezio d K t r, sic habenti, ut nunc habet. similiter iis, quæ dicta sunt, ostendetur spatium f minus esse spatio l.

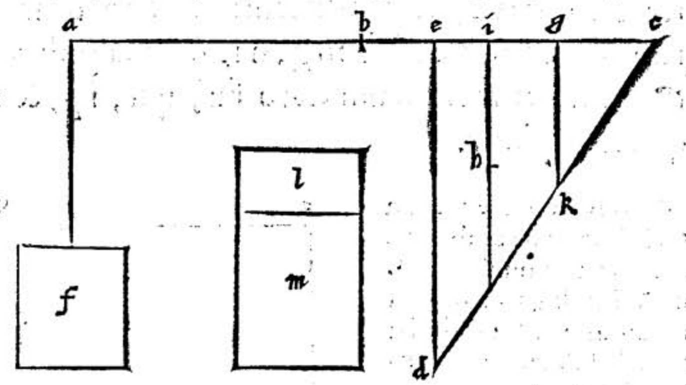


PROPOSITIO

PROPOSITIO XII.

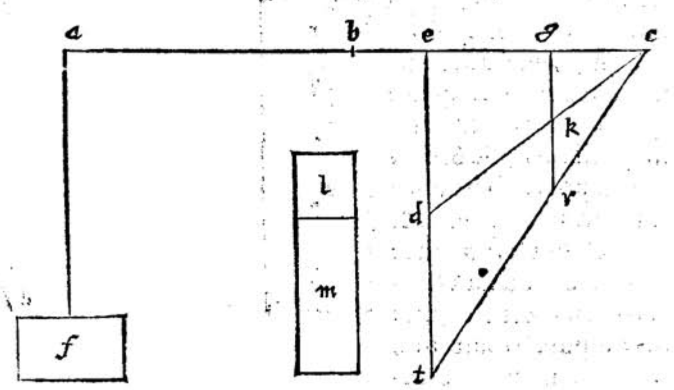
SIT rursus libra a c, cuius medium b: & d e K g trapezium, angulos quidem ad puncta e g rectos habens, latera autem K d, e g tendentia ad c; & quam proportionem habet a b ad b g, eam habeat trapezium d K e g ad spatium m: quamq; habet a b ad b e, habeat trapezium d K e g ad l. suspendatur autem d K e g trapezium ex libra in punctis e g: & f spatium suspendatur in a æquiponderans ipsi trapezio ita habenti, ut nunc ponitur. Dico f spatium spatio quidem l maius esse, ipso autem m minus.

SVMATVR enim trapezii d k e g centrum grauitatis, quod sit h. (sumetur autem sicuti prius): & ducatur h i ipsi d e æquidistans. Si igitur trapezium suspendatur ex libra ad i punctum: & ab ipsis e g punctis soluatur: manet eandem habens constitutionem, & æquiponderabit f spatio: ex iis quæ superius dicta sunt. Itaque quoniam trapezium suspensum ad i æquiponderat spatio f ad a suspenso: eandem habebit proportionem trapezium ad f, quam a b ad b i. manifestum ergo est trapezium d k e g ad l maiorem habere proportionem, quàm ad f; & ad ipsum m minorem, quàm ad f. quare spatium f ipso quidem l maius est, ipso autem m minus.



PROPOSITIO XIII.

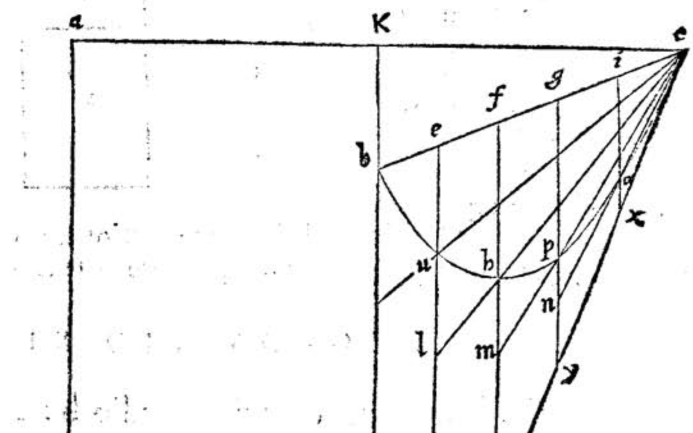
SIT rursus libra a c, in cuius medio b: & trapezium K d t r, quod latera quidem K d, t r ad punctum c tendentia habeat, ipsa autem d t, K r perpendicularia ad b c: suspendaturq; trapezium ex libra in punctis e g: & f spatium in a suspendatur, æquiponderans ipsi d K t r trapezio ita habenti, ut nunc ponitur: & quam proportionem habet a b ad



b e, eam trapezium d K t r habeat ad l ſpatium. quam uero habet a b ad b g, eandem habeat idem trapezium ad ſpatium m. ſimiliter antedictis, oſtendetur f ſpatium, ſpatio l maius, & ipſo m minus.

PROPOSITIO XIIII.

SIT portio b h c contenta recta linea, & rectanguli coni ſectione: ſit autem prius linea b c ad angulos rectos ipſi diametro: & ducatur à puncto quidem b linea b d diametro æquidiſtans; à puncto autem c ipſa c d, tangens coni ſectionem in c. erit igitur triangulum b c d rectangulum. ſecetur etiam b c in partes quotcunque b e, e f, f g, g i, i c: & à ſectione ducantur diametro æquidiſtantes e s, f t, g y, i x; a punctis autem, in quibus hæ ſecant coni ſectionem ducantur ad c lineæ, & producantur. Dico triangulum b d c trapeziorum quidem K e, l f, m g, n i, & trianguli x i c minus eſſe, quàm triplum; trapeziorum uero f u, g h, i p, & i o c trianguli maius, quàm triplum.

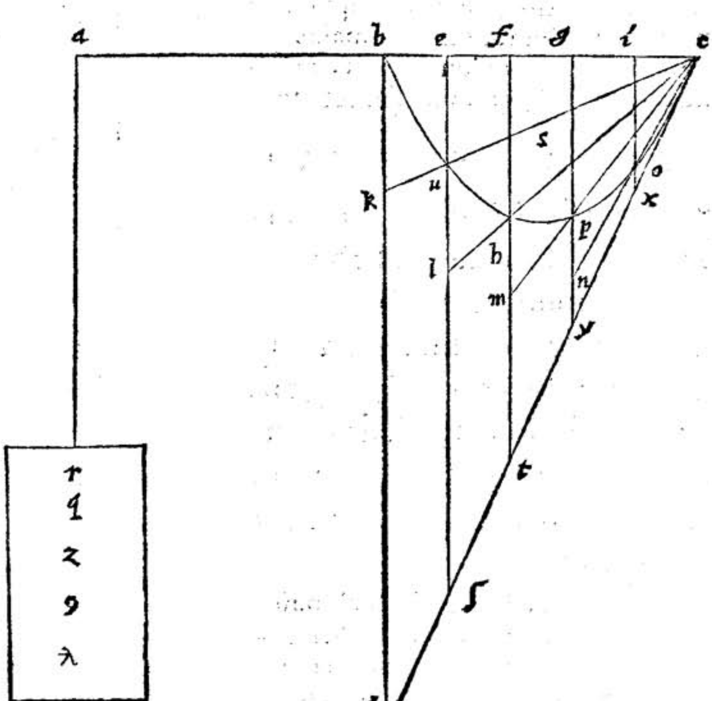


PRODVCATVR enim recta linea c b: & ab ea reſecetur a b æqualis ipſi b c: & intelligatur libra a c, cuius medium ſit b; & ex b ſuſpendatur: ſuſpendatur quoque b d c triangulum ex libra ad puncta b c: & ex altera parte ad a ſuſpendantur ſpatia r q z 9 λ: & æquiponderet r ſpatium trapezio d e, ita habenti: & ſpatium q æquiponderet trapezio f s: & z trapezio t g: & 9 ipſi y i: ſpatium uero λ triangulo x i c. æquiponderabit igitur & totum toti. quare triplum erit b d c triangulum ſpatii r q z 9 λ: & quoniam eſt portio b h c, quæ continetur recta linea, & coni rectanguli ſectione: & à b puncto ducta eſt linea b d diametro æquidiſtans: à puncto autem c ipſa c d tangens in c rectanguli coni ſectionem: ducta eſt præterea, & alia

quædam linea s e æquidistans diametro: eandem habet proportionem b c ad b e, B
quam s e ad e u. quare & b a ad b e habet eandem, quam d e trapezium ad ipsum C
k e. similiter ostendetur b a ad b f eandem habere proportionem, quam trapezium
s f ad l f; & ad b g eandem, quam t g ad m g; ad b i uero eandem quam y i ad n i.
Quoniam igitur trapezium d e angulos quidem ad puncta b e, rectos habet; latera
autem ad c punctum tendentia: & æquiponderat spatium r suspensum ex libra in pũ
cto a ipsi trapezio ita habenti, ut nunc ponitur: estq; ut b a ad b e, ita d e trape-
zium ad k e: maius erit k e spatium spatio r; hoc enim ostensum est. Rursus & tra- D
pezium f s ad puncta f e angulos rectos habet, & latus s t tendens ad c: ipsi autem
ita habenti, ut nunc habet, æquiponderat q spatium ex libra suspensum in a: & est E
ut b a ad b e, ita f s trapezium ad trapezium f u; & ut a b ad b f, ita f s trapezium
ad ipsum l f. spatium igitur q trapezio quidem l f minus est, trapezio autem f u ma- F
ius; nanque & hoc est ostensum. Eadem ratione & z spatium minus est trapezio m
g, & trapezio h g maius: & spatium 9 trapezio y i minus, & maius ipso p i: simili- G
ter etiam λ spatium triangulo x i c minus est, & triangulo c i o maius. Itaque quo
niam trapezium k e maius est r spatio: & l f trapezium maius spatio q: & m g spatio
z: et n i ipso 9: triangulum autem x i c spatio λ: manifestum est et omnia dicta spatia
spatio r q z 9 λ esse maiora. sed spatium r q z 9 λ tertia pars est b c d trianguli. trian 6.huius
gulum igitur b c d minus est, quàm triplum trapeziorum k e, l f, m g, n i, et trian-
guli x i c. Rursus quoniam f u trapezium spatio q minus est: et h g spatio z: et p i
ipso 9: triangulum uero i o c spatio λ: constat et omnia spatia minora esse λ 9 z q
spatio. Quare triangulum b d c maius est, quàm triplum trapeziorum u f, h g, i p,
et i c o trianguli: minus autem, quàm triplum antedictorum.

PROPOSITIO XV.

SIT rursus portio b h c contenta recta linea, & coni rectanguli sectione: & non sit linea b c ad angulos rectos ipsi diametro. necessarium est, uel lineam à puncto b æquidistantem diametro ductã ad easdem partes sectioni, uel ductam à puncto c, obtusum angulum continere cũ ipsa b c. Sit autem ad b, quæ obtusum angulum continet: & à b puncto ducatur

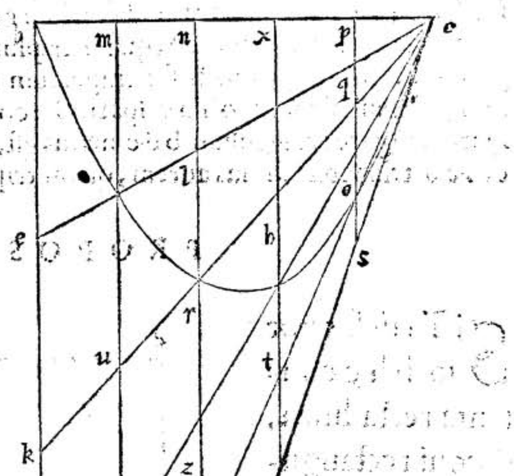


linea

linea b d diametro æquidiſtans: & ab ipſa c ducatur c d tangens coni ſectionem in c: ſeceturq; b c in partes æquales quotcunque, b e, e f, f g, g i, i c: & à punctis e f g i ducantur æquidiſtantes diametro e ſ, f t, g y, i x, à punctis uero, in quibus ſecant coni ſectionem, ducantur ad c lineæ, & producantur. Dico & nunc quoque triangulum b d c trapeziorum quidem b u, l f, m g, n i, & trianguli c i x minus eſſe, quàm triplum; ipſorum autem f u, g h, i p, & c o i trianguli maius, quàm triplum.

PRODVCATVR d b in alteram partem: atque ad ipſam à puncto c ducatur perpendicularis c k: & ſumatur lineæ c k æqualis a k. Intelligatur autem rurſus libra a c, cuius medium ſit k: & ſuſpendatur ex k: ſuſpendaturq; triangulum c k d ex dimidia libra in c k punctis: ita ut nunc ponitur: & ex altera parte ſuſpendantur in a puncto ſpatia r q z 9 λ: & æquiponderet ſpatium r trapezio d e, ſic habenti, ut nunc poſitum eſt: & q æquiponderet f s trapezio: & z trapezio t g: & 9 ipſi y i: & λ, c i x, triangulo; æquiponderabit autem & totum toti. quare d b c triangulum triplum erit ſpatii r q z 9 λ. ſimiliter, ut prius, oſtendetur b u trapezium ſpatio r maius: & trapezium h e maius ſpatio q: trapezium autem f u minus eodem: & trapezium m g maius ſpatio z, & ipſum g h minus: & inſuper trapezium n i ſpatio 9 maius, & ipſum p i minus: triangulum autem x i c maius ſpatio λ; & c i o triangulum minus. manifeſtum igitur eſt, quod proponebatur.

A (margin, beside "autem & totum toti")
B (margin, beside "gulum triplum")
C (margin, beside "zium ſpatio r maius")

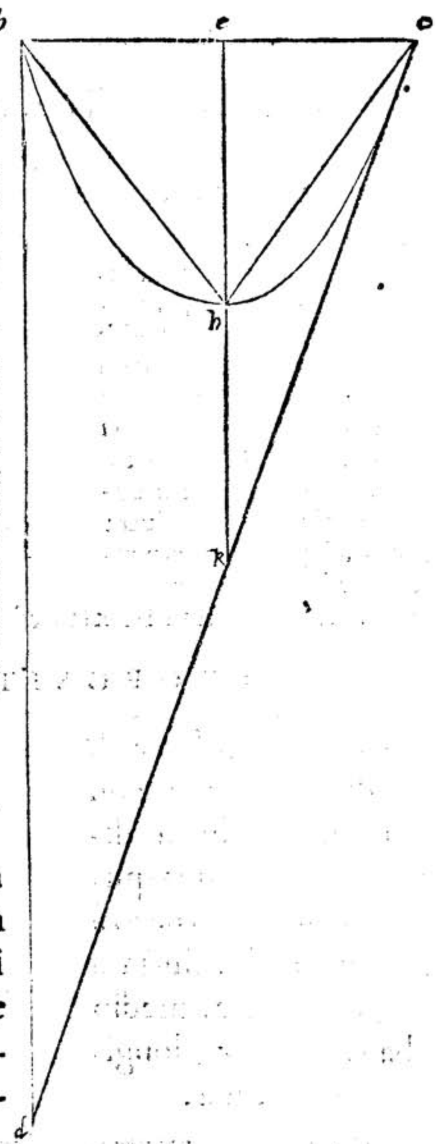


PROPOSITIO XVI.

SIT rurſus b h c portio contenta recta linea, & rectanguli coni ſectione: & per b ducatur b d æquidiſtans diametro: ab ipſo autem c ducatur c d tangens in c coni ſectionem: & ſit trianguli b d c tertia pars f ſpatium. Dico portionem b h c æqualem eſſe ſpatio f.

SI enim non eſt æqualis; uel maior eſt, uel minor. ſit primum, ſi fieri poteſt, maior. Iam exceſſus, quo b h c portio excedit ſpatium f, ſibi ipſi coacervatus, maior erit b c d triangulo. poteſt autem ſumi aliquod ſpatium minus exceſſu; quod ſit pars trianguli b d c. ſitq; b c e triangulum, & minus dicto

excessu, & pars trianguli b d c. erit & b e pars eadem ipsius b d. Itaque diuidatur B
b d in totidem partes, & diuisionum puncta sint g i k: & ab ipsis g i k ad c lineæ iun
gantur. secabunt hæ coni sectionem, cum c d ipsam tangat in c. per puncta autem
sectionum ducantur lineæ æquidistantes diametro m u, n r, x h, quæ & æquidistantes
erunt ipsi b d. Quoniam igitur triangulum b c e minus est excessu, quo b h c por-
tio excedit f spatium: patet utraque hæc, spatium f, & triangulum b c e minora es
se ipsa portione. triangulo autem b c e æqualia sunt trapezia, per quæ coni sectio
permeat, uidelicet m e, u l, h r, h o, & triangulum c o s: nam trapezium m e com
mune est: & trapezium m l æquale trapezio u l: & trapezium l x æquale trapezio h
r: & q x ipsi o h: & triangulum c q p triangulo c o s. spatium ergo f minus est tra C
peziis m l, x r, p h, & triangulo p o c. Sed triangulum b d c triplum est spatii f. qua
re b d c triangulum minus est, quàm triplum trapeziorum m l, x r, p h, & p o c trian
guli: quod fieri minime potest: ostensum est enim maius, quàm triplum. non igitur D
portio b h c maior est f spatio. Dico etiam neque esse minorem. nam si fieri potest,
sit minor. Rursus excessus, quo spatium f excedit b h c portionem, ipse sibi ipsi
coaceruatus maior est triangulo b d c. Itaque potest sumi spatium minus dicto ex-
cessu, quod sit pars b d c trianguli: sitq; triangulum b c e minus excessu; & pars trianguli b c d: & alia eadem construantur. Quoniam igitur b c e triangulum minus est excessu, quo spatium f excedit b h c portionem: triangulum b e c, & portio b h c, utraque minora sunt spatio f. est autem spatium f minus quadrilateris e m, u n, z x, p t, & triangulo c p s: nam triangulum b d c ipsius f triplum est; & dictorum spatiorum minus, E quàm triplum, ut proxime ostendimus. triangulum ergo b c e, & portio b h c minora sunt quadrilateris e m, u n, z x, p t, & c p s triangulo. quare ablato communi, uidelicet portione ipsa, minus erit triangulum c b e residuis spatiis: quod quidem fieri non potest. ostensum enim est b e c triangulum æquale trapeziis e m, u l, h r, h o, & triangulo c o s, quæ sunt maiora dictis spatiis. non igitur portio b h c minor est f spatio, neque maior, ut ostensum est. quare relinquitur eidem esse æqualem.



PROPOSITIO XVII.

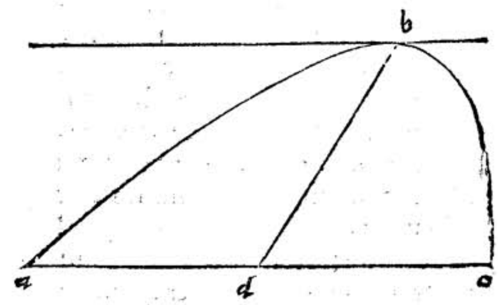
HOC ostenso manifestum est, omnem portionem contentam recta linea, & rectanguli coni sectione, sesquitertiam esse trianguli, qui basim habeat portioni eandem, & æqualem altitudinem.

Sit enim portio contenta recta linea & rectanguli coni sectione, cuius uertex h punctum: & in ipsa inscribatur triangulum b h c eandem basim habens portioni,
A & altitudinem æqualem. Quoniam igitur punctum h uertex est portionis: recta linea ab h ducta æquidistans diametro bifariam secat ipsam b c; & b c æquidistans est lineæ sectionem tangenti in h. ducatur autem e h linea æquidistans diametro: & à puncto b ducatur b d eidem æquidistans: & à c ipsa c d tangens coni sectionem in c. Itaque quoniam k h æquidistat diametro: ipsa autem c d tangit sectionem in c: &
B e c æquidistat lineæ sectionem tangenti in h: triangulum b d c quadruplum est trianguli b h c. & quoniam triangulum b d c ipsius b h c portionis est triplum: patet b h c portionem sesquitertiam esse trianguli b h c.

C Portionum quæ recta, & curua linea continentur, basim uoco ipsam rectam; altitudinem uero, maximam perpendicularem à curua linea ad basim usque portionis ductam; & uerticem, punctum, à quo maxima perpendicularis ducitur.

PROPOSITIO XVIII.

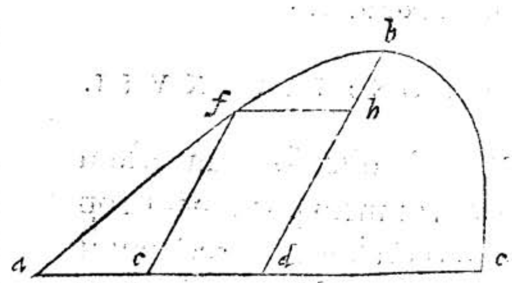
SI in portione, quæ recta linea, & rectanguli coni section e continetur, à media basi ducatur linea diametro æquidistans: uertex portionis erit punctum, in quo linea diametro æquidistans ducta coni sectionem secat.



Sit enim portio a b c contenta recta linea, & rectanguli coni sectione: & à media a c ducatur d b diametro æquidistans. Quoniam igitur in rectanguli coni sectione ducta est d b diametro æquidistans: & æqua
A les sunt a d, d c: constat lineam a c æquidistantem esse ei, quæ in b coni sectionem contingit. quare ductarum a sectione ad ipsam a c perpendicularium, maxima erit, quæ à b puncto ducitur. ergo punctum b uertex est portionis.

PROPOSITIO XIX.

SI in portione recta linea, & rectanguli coni sectione contenta ducantur duæ lineæ dimetro æquidistantes; una quidem à media basi; altera uero à medio dimidiæ basis: ducta à media basi, eius, quæ à medio dimidiæ basis ducitur, longitudine erit sesquitertia.



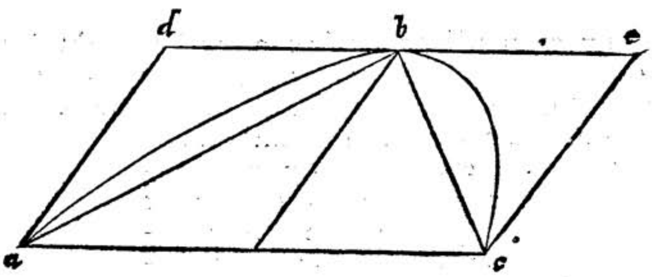
Sit enim a b c portio contenta recta linea, & coni rectanguli sectione:& ducantur

tur æquidistantes diametro, linea quidem b d à media a c, ipsa autem e f à media a d: ducatur quoque f h æquidistans ipsi a c. Quoniam igitur in coni rectanguli sectione linea b d diametro æquidistans ducta est: ipsæ autem a d, f h æquidistantes sunt lineæ contingenti in b: manifestum est eandem habere proportionem b d ad b A
h longitudine, quam a d ad f h potestate. quadrupla igitur est & b d ipsius b h longitudine. ex quo patet, sexquitertiam esse longitudine b d ipsius e f.

PROPOSITIO XX.

SI in portione recta linea, et coni rectanguli sectione contenta triangulum describatur, eandem portioni basim habens, & altitudinem eandem: maius erit descriptũ triangulũ dimidio portionis.

Sit enim portio a b c, qualis dicta est: & in ipsa describatur triangulum a b c eandem, quam tota portio basim habens, & æqualem altitudinem. quoniam igitur triangulum basim habet eandem portioni, & altitudinem eandem: necesse est b pun- A
ctum uerticem esse portionis. æquidistans est igitur linea a c lineæ in b puncto sectionem tangenti. Ducatur d e per b, æquidistans ipsi a c: & à punctis a c æquidistantes diametro ducantur a d, c e. cadent igitur ipsæ extra sectionem. & quoniam a b c triangulum dimidium B

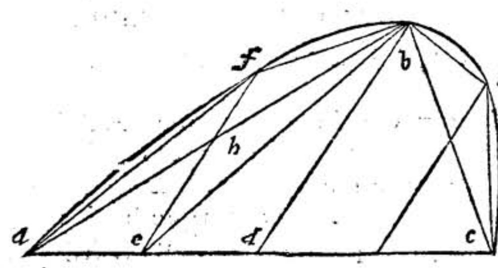


est parallelogrammi a d e c: patet maius esse, quàm dimidium dictæ portionis. qua- C
re fieri potest, ut in hac portione multiangula figura describatur: ita ut reliquæ portiones quolibet proposito spatio sint minores. auferentes enim semper spatium maius dimidio: & propterea minuentes semper reliquas portiones, tandem eas quolibet spatio proposito minores reddemus.

PROPOSITIO XXI.

SI in portione recta linea, & coni rectanguli sectione contentã triangulum describatur, eandem habens basim portioni, & altitudinem eandem: describantur autem & alia triangula in reliquis portionibus, quæ basim eandem ipsis habeant, & eandem altitudinem: alterutrius triangulorum, quæ in reliquis portionibus describuntur, octuplum erit triangulum in tota portione descriptum.

Sit a b c portio, qualis dicta est: & secetur a c bifariam in d: ducatur autem b d æquidistans diametro. ergo punctum b uertex est portionis: & A
propterea a b c triangulum eandem habet portioni basim, & altitudinem eandem. Rursus secetur bifariam a d in puncto e: & ducatur e f diametro æquidistans: secetur præterea a b in h. pun- B
ctum igitur f uertex est portionis a f

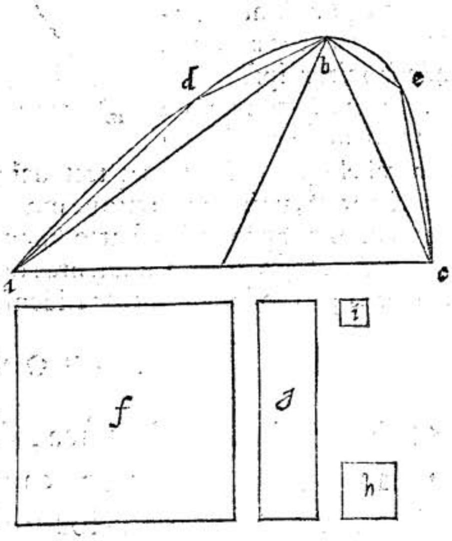


b. & triangulum afb eandem basim habet afb portioni, & eandem altitudinem.
C Ostendendum est, triangulum abc octuplum esse trianguli afb. est enim bd ipsius quidem ef sesquitertia: ipsius autem eh dupla. dupla est igitur eh ipsius hf. quare & aeb triangulum duplum est trianguli fba, nam triangulum aeh trianguli ahf est duplum: & hbe item duplum ipsius fhb. triangulum ergo abc trianguli afb octuplum est. Similiter quoque ostendetur octuplum esse trianguli in portione bgc descripti.

PROPOSITIO XXII.

SI sit portio contenta recta linea, & coni rectanguli sectione: spatia autem quotlibet in quadrupla proportione deinceps ponantur: & sit maximum eorum æquale triangulo, quod basim habeat portioni eandem, & eandem altitudinem: omnia dicta spatia minora erunt ipsa portione.

SIT enim adbec portio contenta linea recta, & coni rectanguli sectione: spatia autem quotlibet deinceps posita fghi: sitq; f ipsius g quadruplum, & æquale triangulo, quod basim habeat eandem portioni, & altitudinem eandem. Dico portionem spatiis fghi maiorem esse. Sit totius quidem portionis uertex punctum b: reliquarum autem portionum uertices ipsa de. Quoniam igitur abc triangulum octuplum est alterutrius triangulorum adb, bec: constat quadruplum esse utrorumque. & quoniam abc triangulum æquale est spatio f: erunt & triangula adb, bec spatio g æqualia. Similiter autem ostendetur, & triangula in reliquis portionibus descripta, eandemq; basim habentia ipsis, & altitudinem eandem, spatio h æqualia esse: & demum triangula descripta in posterioribus portionibus æqualia esse spatio i. Omnia igitur proposita spatia æqualia erunt figuræ cuipiam multiangulæ in portione descriptæ. quare manifestum est ea esse minora ipsa portione.

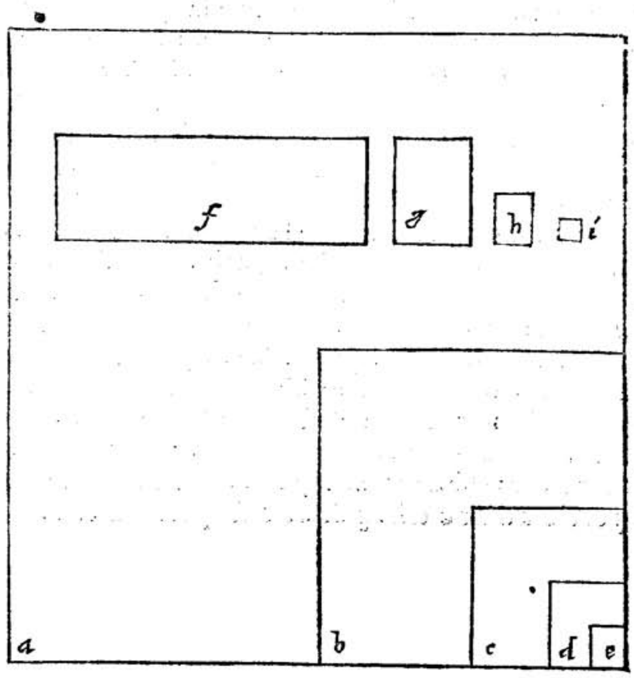


PROPOSITIO XXIII.

SI quotlibet magnitudines ponantur deinceps in quadrupla proportione: omnes unà cum tertia parte minimæ illarum inter se iunctæ, sesquitertiæ erunt maximæ magnitudinis.

SINT quotlibet magnitudines deinceps positæ abcde, quarum unaquæque quadrupla sit consequentis: & maxima sit a: sit autem f tertia pars ipsius b: & g tertia c: & h ipsius d tertia: & i ipsius e. Quoniam igitur f ipsius b tertia est: b autem ipsius a quarta: utræque b, f, tertia pars sunt ipsius a. Eadem quoque ratione & g, c, ipsius b tertia sunt: & hd ipsius c: & ie ipsius d. Quare omnes magnitudines

gnitudines b c d e f g h i tertia pars sunt magnitudinum omnium a b c d. sunt autem & f g h tertia ipsarum b c d. & reliquæ: igitur b c d e i magnitudinis reliquæ uidelicet ipsius a tertia sunt. ex quo patet, omnes magnitudines a b c d e & i, hoc est tertiam ipsius e, sesquitertias esse ipsius a magnitudinis.

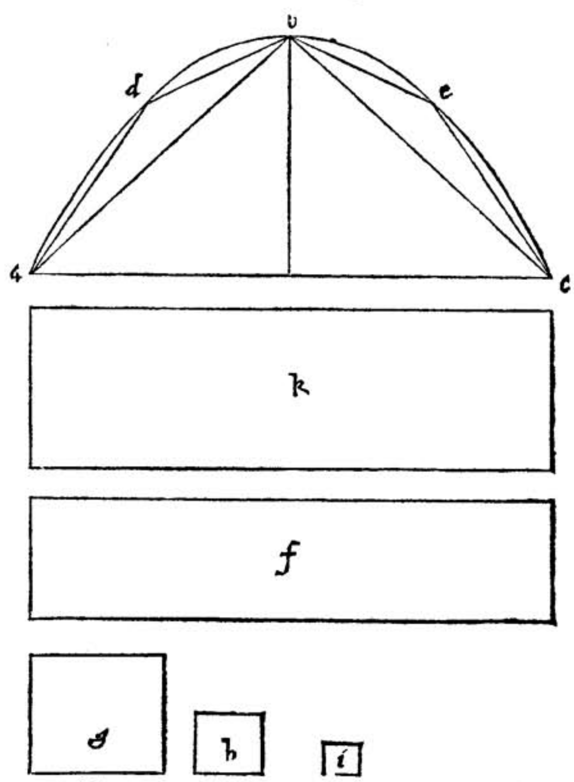


19. quinti

PROPOSITIO XXIIII.

Qvælibet portio recta linea, & rectanguli coni sectione contenta sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim habentis, & altitudinem æqualem.

Sit enim portio a d b e c contenta recta linea, & rectanguli coni sectione: Sitq; triangulum a b c, quod habeat eandem basim portioni, & æqualem altitudinem: ipsius autem trianguli a b c sesquitertium sit k spatium. Ostendendum est k æquale esse portioni a d b e c. si enim non est æquale, uel maius est, uel minus. Sit primum, si esse potest a d b e c portio maior spatio k: describantur autem a d b, b e c triangula, ut dictum est: & rursus in reliquis portionibus alia triangula describantur, eandem ipsis basim habentia, & altitudinem eandem: & semper in iis, quæ postremo fiunt, portionibns describantur duo triangula basim habentia eandem ipsis, & eandem altitudinem: erunt tandem portiones reliquæ minores excessu, quo portio a d b e c excedit k spatium. Quare descripta multiangula figura maior erit k spatio; quod esse non potest. sunt enim posita deinceps spatia in quadrupla proportione: & primum quidem a b c triangulum quadruplum est trian-



 gulorum

gulorum a d b, b e c: deinde eadem ipſa quadrupla eorum, quæ in ſequentibus ſunt deſcripta: & ita in aliis. ex quibus ſequitur, omnia ſpatia minora eſſe, quàm ſeſqui-
A tertia maximi ſpatii. ſpatium autem k eiuſdem maximi ſpatii eſt ſeſquitertium. non igitur a d b e c portio maior eſt ſpatio k. Verum ſi fieri poteſt, ſit minor: & ponatur a b c triangulum æquale ſpatio f: Sitq; g ipſius f pars quarta: & ſimiliter h quarta ipſius g: & ita ſemper ponatur deinceps, quouſque quod ultimo loco ponitur, minus ſit exceſſu, quo ſpatium k portionem excedit. et ſit minus ſpatium i. ſunt autem f g h i ſpatia unà cum tertia parte ipſius i, ſpatii f ſeſquitertia: & k
B ſpatium ſeſquitertium eiuſdem ſpatii f. æquale igitur eſt k ſpatium ipſis f g h i,
C & tertiæ parti ipſius i. et quoniam ſpatium k excedit f g h i ſpatia minori exceſſu, quàm ſit i: excedit autem portionem maiori, quàm i: manifeſtum eſt ſpatia f g h i maiora eſſe portione: quod eſſe non poteſt. oſtenſum nanque eſt, Si in quadrupla proportione ſpatia quotlibet deinceps ponantur, quorum maximum ſit æquale triangulo in portione deſcripto: ſpatia omnia minora eſſe ipſa portione. non igitur a d b e c portio minor eſt ſpatio k, neque maior, ut oſtenſum eſt. quare ſequitur eidem eſſe æqualem. ſpatium autem k ſeſquitertium eſt trianguli a b c. ergo & portio a d b e c trianguli a b c ſeſquitertia erit.

ARCHIMEDIS

LIBER DE CONOIDIBVS, *ET SPHAEROIDIBVS.*

ARCHIMEDES DOSITHEO S. D.

MITTO ad te conſcriptas in hoc libro reliquorum theorematum demonſtrationes, quas nõ habebas in iis, quæ prius ad te miſi; & aliorum, quæ poſterius inuenta ſunt. quorum cum antea quidem ſæpe aggreſſus eſſem contemplationem, uiderenturq; omnino eorum inuẽtiones difficultatem habere, diu ſuſpenſo animo fui: & idcirco cum aliis edita non fuerunt hæc ipſa propoſita. Verum poſtea maiori adhibita diligentia, ea, de quibus antea dubitaueram, tandem inueni. Quæ autem ex prioribus theorematibus reſtabant, de rectangulo conoide propoſita erant. at quæ nunc inuenta ſunt, ad conoides obtuſiangulum, & ſphæroidas figuras attinent: quarum aliquas quidẽ oblongas, aliquas uero latas appellamus. Itaque de rectangulo conoide hæc poſita fuerant.

SI rectanguli coni ſectio manente diametro circunducatur, quo- A
uſque rurſus redeat in eum locum, à quo cœpit circumduci: fi-
guram comprehenſam rectanguli coni ſectione, conoides rectangu- B
lum appellari: & axem quidem ipſius, manentem diametrum; uer
ticem uero punctum, in quo axis conoidis ſuperficiem contingit.
Si rectangulum conoides planum contingat: ipſi autem contingenti
plano alterum planum æquidiſtans abſcindat aliquam conoidis por-
tionem: baſim quidem portionis abſciſſæ uocari planum, quod ipſa
conoidis ſectione in abſcindente plano comprehenditur: uerticem, C
punctum, in quo alterum planum conoides contingit: axem uero re
ctam lineam intra portionem receptam, ex ea, quæ per uerticem
portionis ducta ſit axi conoidis æquidiſtans. Hæc autem conſideran
da proponebantur. Cur ſi conoidis rectanguli portio abſcindatur pla 23. huius
no erecto ſuper axem: abſciſſa portio ſeſquialtera ſit coni, qui baſim
habeat portioni eandem, & axem eundem. Et cur ſi à conoide re- 26. huius
ctangulo duæ portiones abſcindantur planis quomodocunque du-
ctis: abſciſſæ portiones inter ſe duplam eius, quæ eſt axium, pro-

portionem

D portionem habeant. At de obtusiangulo conoide hæc ponimus. Si in eodem plano sint obtusi anguli coni sectio, eiusq; diameter, & lineæ, quæ sunt proximæ coni obtusianguli sectioni: manente autem diametro circumducatur planum, in quo sunt dictæ lineæ quousque rursus in eundem locum, à quo cœpit moueri, restituatur: rectas lineas, quæ coni obtusianguli sectioni proximæ sunt, manifeste conum comprehendere æquicrurem; cuius uertex erit punctum, in quo lineæ proximæ conueniunt, & axis diameter manens. figuram uero obtusianguli coni sectione comprehensam, conoides obtusiangulum uocari; cuius axis erit diameter manens, & uertex punctum illud, in quo axis conoidis superficiem contingit. At conum comprehensum lineis sectioni coni obtusianguli proximis, continentem conoides appellari. lineam autem rectam, quæ interiicitur inter conoidis uerticem, & uerticem coni continentis conoides, ad axem adiectam

E dici. Et si obtusiangulum conoides planum contingat: ipsi autem contingenti plano alterum planum æquidistanter ductum abscindat conoidis portionem: basim quidem abscissæ portionis uocari planum, quod ipsa conoidis sectione in abscindente plano comprehenditur: & uerticem, punctum illud, in quo planum conoides contingit: axem uero lineam intra portionem receptam, ex ea, quæ ducta sit per uerticem portionis, & uerticem coni continentis conoides: & quæ inter dictos uertices interiicitur rectam lineam ad axem adie-

F ctam appellari. Omnia conoidea rectangula sunt similia. obtusiangulorum uero conoideon similia dicuntur ea, quorum & coni conti-

27. huius nentes similes sunt. Proponuntur autem hæc consideranda. Cur si conoidis obtusianguli portio abscindatur plano erecto super axem: abscissa portio ad conum basim eandem habentem ipsi, & axem eundem, eam habeat proportionem, quam utraque linea: & quæ æqualis est axi portionis; & quæ tripla lineæ ad axem adiectæ, habet ad lineam utrisque æqualem: & axi portionis, & ei, quæ dupla est li-

28. huius neæ ad axem adiectæ. Et cur si conoidis obtusianguli portio abscindatur plano non erecto super axem: abscissa portio ad figuram basim eandem habentem ipsi, & eundem axem (quæ quidem figura sit coni portio) eam proportionem habeat, quam utraque linea: & quæ æqualis est axi portionis, & quæ tripla lineæ ad axem adiectæ, ad lineam utrisque æqualem: & axi portionis, & duplæ lineæ ad axem adiectæ. De sphæroidibus uero figuris hæc ponimus. Si acuti anguli coni sectio manente eius maiore diametro circumducta, restituatur rursus in eum locum, à quo moueri cœpit: figuram de-

scriptam

ſcriptam à ſectione coni acuti anguli, ſphæroides oblongum appella ri. Quòd ſi minore diametro manente, circumducta coni acuti anguli ſectio rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moueri cœpit: figuram deſcriptam à coni acutianguli ſectione, ſphæroides latum uocari. Vtriuſque autem ſphæroidis axem quidem dici, manentem diametrum: uerticem, punctum, in quo axis ſphæroidis ſuperficiem contingit: centrum, axis medium: diametrum uero, lineam, quæ per centrum ducitur ad rectos angulos ipſi axi. Et ſi ſphæroi- G
dum figurarum quamlibet plana æquidiſtantia contingāt, quæ ipſas non ſecent: aliud autem planum contingentibns planis æquidiſtans ducatur, ſecansq; ipſum ſphæroides: portionum factarum baſim quidem uocari planum, quod ipſa ſphæroidis ſectione in ſecante plano comprehenditur: uertices, puncta in quibus plana æquidiſtantia ſphæroides contingunt: axes uero, rectas lineas in portionibus receptas ex ea, quæ uertices ipſarum coniungit. Verum enimuero 17.huius
plana ſphæroides contingentia in uno tantum puncto ipſius ſuperfi- 18.huius
ciem contingere; & rectam lineam contactus cōiungentem per centrum ſphæroidis tranſire; inferius demonſtrabitur. Sphæroidum figurarum ſimiles illas dici, quarum axes ad diametros eandem proportionem habent. Portiones autem ſphæroidum, & conoidum figurarum ſimiles, quæ à ſimilibus figuris abſciſſæ, baſes ſimiles habent; quarumq; axes ſiue erecti ſuper baſium ſuperficies, ſiue cum diametris baſium conſimilibus æquales angulos continentes, ad conſimiles diametros, eandem habent proportionem. At uero de ſphæ roidibus figuris hæc proponuntur conſideranda. Cur ſi aliqua ſphæ 29.huius
roidum figurarum ſecetur plano per centrum ducto, & erecto ſuper axem: earum, quæ fiunt, portionum, utraque dupla ſit coni 33.huius
baſim habentis eandem ipſi, & axem eundem. Si autem ſecetur plano ſuper axem erecto, ſed non ducto per centrum: portionum factarum, maior quidem ad conum baſim habentem eandem ipſi, & axem eundem, eam habeat proportionem, quam linea his utriſque æqualis: & dimidiæ axis ſphæroidis, & axi minoris portionis ad axē minoris portionis; minor uero portio ad conum eandem ipſi baſim 31.huius
habentem, & eundem axem, eam proportionem habeat, quam linea utriſque æqualis; & dimidiæ axis ſphæroidis, & axi maioris portionis ad axem maioris portionis. Et cur ſi ſphæroidum figurarum 30.huius
aliqua ſecetur plano per centrum ducto, & non erecto ſuper axem: portionum, quæ fiunt, utraque dupla ſit figuræ baſim habentis eandem portioni, & axem eundem, ſit autem figura, coni portio. Quòd 34.huius
ſi

ſi ſphæroides ſecetur plano neque per centrum ducto, neque erecto ſuper axem: portionum factarum maior quidem ad figuram baſim habentem eandem portioni, & axem eundem, eam habeat proportionem, quam linea utriſque æqualis: & dimidiæ eius, quæ uertices portionum coniungit, & axi minoris portionis ad axem minoris
32. huius portionis, minor autem portio ad figuram eandem baſim habentem ipſi, & axem eundem, eam proportionem habeat, quam linea utriſque æqualis: & dimidiæ eius, quæ uertices coniungit portionum, & axi maioris portionis ad axem maioris portionis. fit autem & in his
H figura, coni portio. Itaque demonſtratis dictis theorematibus, per ea ipſa inueniuntur theoremata multa, & problemata, quale eſt hoc. Sphæroidea ſimilia inter ſe, & portiones ſphæroideon ſimiles, & item conoideon, triplam eius, quæ eſt axium proportionem habent. Sphæroideon æqualium quadrata diametrorum ex contraria parte reſpondent ipſis axibus: & quorum quadrata diametrorum ex contraria parte reſpondent ipſis axibus: ſphæroidea æqualia ſunt. Problema autem eiuſmodi. A dato ſphæroide, uel conoide portionem abſcindere plano, quod ſit alteri dato plano æquidiſtans: ita ut portio abſciſſa æqualis ſit dato cono, aut cylindro, aut ſphæræ datæ. Præmittentes igitur & theoremata, & problemata, quæ ad illorum demonſtrationes ſunt neceſſaria, poſtea tibi ea, quæ propoſita ſunt, conſcribemus. Vale.

I SI conus plano ſecetur cum omnibus eius lateribus coeunti: ſectio uel erit circulus, uel coni acuti anguli ſectio. & ſi quidem ſectio circulus ſit: manifeſtum eſt, portionem à cono abſciſſam ad partes uerticis, conum eſſe. ſi autem ſit coni acutianguli ſectio: abſciſſa ab eo figura ad partes uerticis, portio coni uocetur. cuius portionis baſis quidem dicatur planum coni acutianguli ſectione comprehenſum; uertex, punctum, quod & coni uertex eſt; axis uero linea recta à uertice coni ad centrum ſectionis coni acutianguli perducta.
K Et ſi cylindrus duobus planis æquidiſtantibus ſecetur, quæ cum omnibus ipſius lateribus coeant: ſectiones uel erunt circuli, uel conorum acutiangulorum ſectiones æquales, & ſimiles inter ſe ſe. Quòd ſi ſectiones circuli ſint: conſtat abſciſſam à cylindro figuram inter plana æquidiſtantia interiectam, cylindrum eſſe. ſi uero ſint conorum acutiangulorum ſectiones: figura ab eo abſciſſa inter plana æquidiſtantia, portio cylindri uocetur. cuius portionis baſis quidem dicantur plana conorum acuti angulorum ſectionibus comprehenſa;

axis

axis autem recta linea, quæ sectionum conorum acutiangulorum centra cõiungit; atque erit hæc in eadem recta linea ipsi axi cylindri.

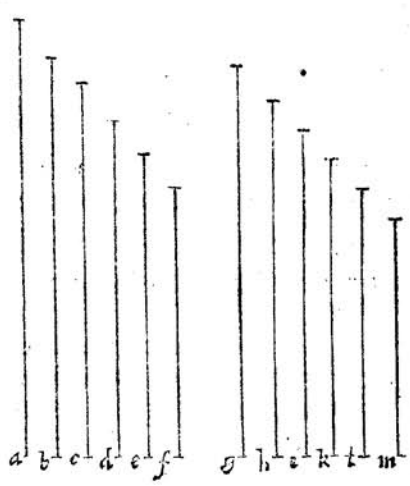
PROPOSITIO I.

SI sint magnitudines quotcunque sese æqualiter excedentes, quarum excessus sit æqualis minimæ: sint autem & aliæ totidem magnitudines maximæ illarum æquales: Erunt magnitudines omnes maximæ illarum æquales, magnitudinum omnium se se æqualiter excedentium minores, quàm duplæ, reliquarum autem dempta maxima, maiores, quàm duplæ.

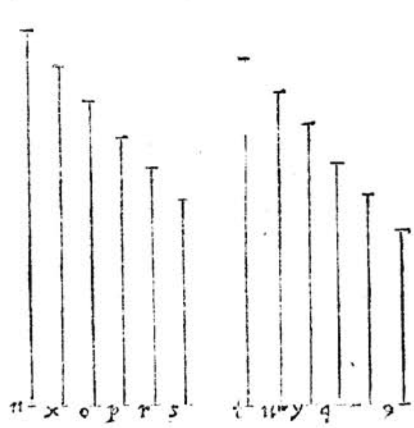
Hvivs uero demonstratio manifesta est. A

PROPOSITIO II.

SI magnitudines quotcunque, totidem aliis magnitudinibus secundum quasque duas eandem habeant proportionem, similiter ordinatæ: referantur autem primæ magnitudines ad quasdam alias, quibuscunque proportionibus, uel omnes, uel earum aliquæ: posteriores quoque magnitudines referantur ad totidem alias sibi ipsis respondentes iisdem proportionibus: habebunt omnes primæ magnitudines ad eas omnes, ad quas referuntur, eandem proportionem, quam omnes posteriores magnitudines habent ad illas, ad quas itidem referuntur.



Sint quædam magnitudines a b c d e f, quæ totidem aliis magnitudinibus g h i k l m secundum quasque duas eandem habeãt proportionem: & habeat ipsa quidem a ad b eandem proportionem, quam g ad h: ipsa uero b ad c eandem, quam h ad i: & aliæ eodem modo. referantur autem a b c d e f ad alias magnitudines n x o p r s quibuscunque proportionibus: & ipsæ g h i k l m ad alias t u y q z 9 sibi respondentes iisdem proportionibus referantur: ita ut quã proportionem habet a ad n, eam habeat g ad t, & quam b ad x, habeat h ad u: & similiter in aliis. Ostendendum est, magnitudi-



nes omnes a b c d e f ad omnes n x o p r s eandem habere proportionem, quam omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z 9. Quoniam enim n ad a eandem habet proportionem, quam t ad g: ipsa uero a ad b eandem habet, quam g ad h: & b ad
22. v. x, quam h ad u: habebit n ad x eandem proportionem, quam t ad u: & simili ratione x ad o eandem, quam u ad y: & alia similiter.

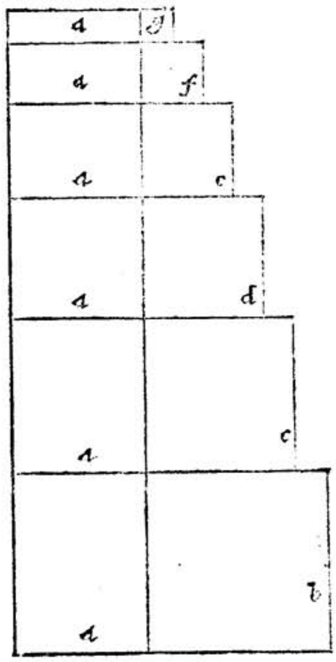
A Habent autem omnes a b c d e f ad a, eandem proportionem, quam omnes g h
B i k l m ad g: & a ad n, quam g ad t. Verum n ad omnes n x o p n s habet ean-
22. v. dem, quam t ad omnes t u y q z 9. Omnes igitur a b c d e f ad omnes n x o p r s ean
C dem proportionem habent, quam omnes g h i k l m ad omnes t u y q z 9. Manifestum præterea est, & si magnitudinum a b c d e f ipsæ a b c d e referantur ad n x o p r: ipsa uero f ad nullam referatur: & magnitudinum g h i k l m ipsæ g h i k l referantur ad t u y q z sibi respondentes, m uero ad nullam referatur. similiter omnes a b c d e f, ad omnes n x o p r eandem habere proportionem, quam omnes g h i k l m ad omnes t u y q z.

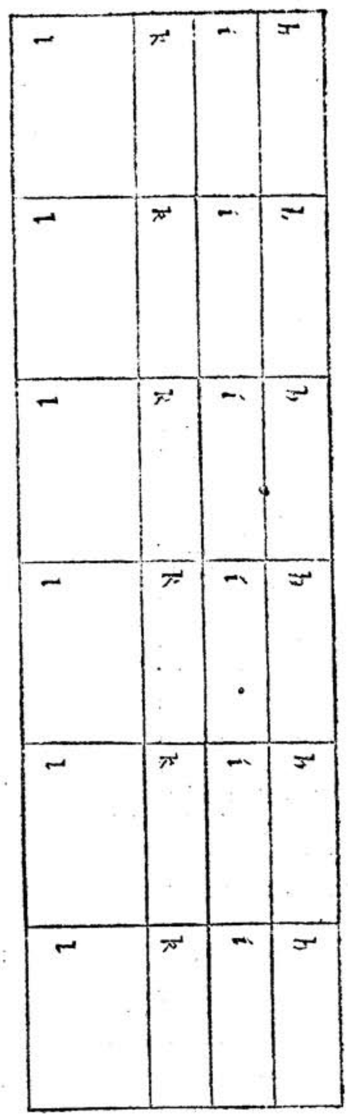
PROPOSITIO III.

SI lineæ quotcunque inter se se sint æquales: & ad unamquanque ipsarum accedat spatium excedens specie, quadrato: sint autem & excessuum latera se se æqualiter excedentia; & excessus æqualis minimo: sint item alia spatia, numero quidem prædictis æqualia, magnitudine uero unumquodque æquale maximo: habebunt hæc omnia spatia ad illa quidem omnia minorem proportionem, quàm linea æqualis utrisque: & ei, quæ est latus maximi excessus, & uni linearum æqualium: habet ad lineam utrisque æqualem; & tertiæ parti lateris maximi excessus, & dimidiæ unius linearum æqualium: ad reliqua autem spatia dempto maximo, maiorem habebunt proportionem, quàm sit eadem illa proportio.

SINT enim lineæ æquales quotcunque, in quibus a: & accedat ad unamquanque ipsarum spatium excedens specie, quadrato: sint autem excessuum latera b c d e f g se se æqualiter excedentia: & excessus sit æqualis minimo: & maximum quidem sit b, minimum uero g: sint etiam alia spatia, in quibus h i k l, numero quidem prædictis æqualia, magnitudine uero unumquodque æquale maximo, quod adiacet ad lineam a b: & sit h i æqualis lineæ a: & k l æqualis lineæ b: sitq; h i dupla ipsius i: & k l tripla ipsius k. Ostendendum est, spatia omnia in quibus h i k l ad omnia quidem alia spatia a b, a c, a d, a e, a f, a g, minorem habere proportionem, quàm recta linea h i k l ad rectam i k: ad reliqua autem spatia dempto maximo a b, maio-
A rem habere, quàm sit eadem illa proportio. Sunt enim aliqua spatia, in quibus a se se æqualiter excedentia: & excessus minimo est æqualis; quoniam & accessiones, & latitudines se se æqualiter excedunt. Sunt item alia spatia, in quibus h i, numero
2. huius quidem dictis æqualia, magnitudine uero unumquodque æquale maximo. Omnia igitur spatia, in quibus h i, spatiorum omnium, in quibus a, minora sunt, quã dupla: reli
B quorum autẽ dempto maximo, maiora quã dupla. & idcirco spatia omnia, in quibus i, omnibus, in quibus a minora erũt: reliquis aũt dẽpto maximo, maiora. Rursus sunt lineæ quædã b c d e f g se se æqualiter excedentes: & excessus est æqualis minimæ: & aliæ itẽ lineæ, in quibus k l, numero quidẽ dictis æquales, magnitudine uero unaquæ-
C que æqualis maximæ. Quadrata igitur linearum omniũ æqualiũ maximæ quadratorũ omnium linearũ se se æqualiter excedentium, minora sunt, quàm tripla: reliquorum autem dempto maximo, maiora, quàm tripla: hoc enim ostensum est in iis, quæ de lineis spiralibus edita sunt. & idcirco spatia, in quibus k, spatiis omnibus, in quibus

bus b c d e f g, ſunt minora: ſpatiis uero, in quibus c d e f g maiora. Quare & omnia ſpatia, in quibus i k ſpatiis omnibus, in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g, minora ſunt; ſpatii s uero, in quibus a c, a d, a e, a f, a g, maiora. Manifeſtum eſt D igitur, ſpatia omnia, in quibus h i k l, ad ſpatia quidem, in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g, minorem proportionem habere, quã lineah l ad lineam i k; ad reliqua autẽ dempto eo, in quo a b, maiorem habere, quàm ſit eadem illa proportio.





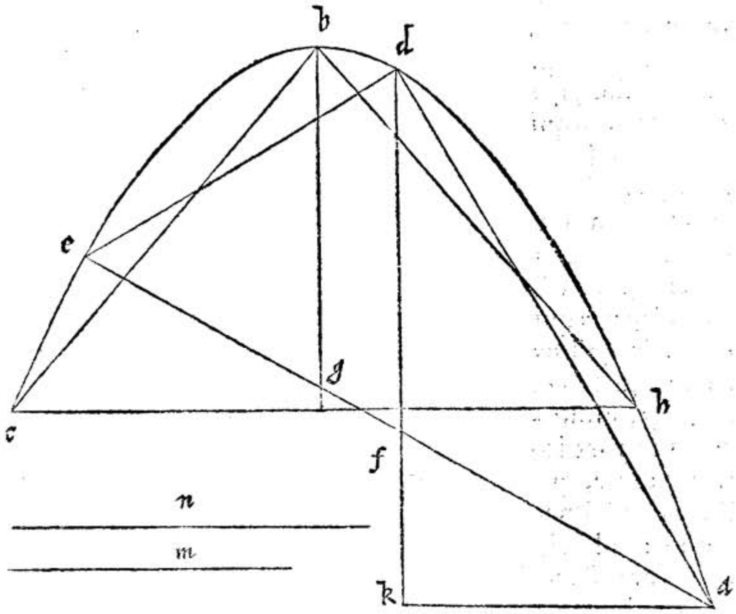
S i quamlibet coni ſectionem rectæ lineæ contingant ab eodem puncto ductæ: ſint autem, & aliæ lineæ in coni ſectione, quæ lineis contingentibus æquidiſtent; & ſe ſe inuicem ſecent: rectangula dictarum linearum partibus contenta, ad quadrata contingentium eandem habent proportionem: rectangulum autem, quod alterius lineæ partibus continetur, reſpondebit quadrato contingentis illius, quæ dictæ lineæ æquidiſtet. E

H o c autem oſtenſum eſt in conicis.

PROPOSITIO IIII.

Si ab eadem rectanguli coni ſectione duæ portiones quomodocunque abſcindantur, quæ diametros æquales habeant: & ipſæ portiones æquales erunt; & triangula in ipſis deſcripta, baſim eandem habentia portionibus, & altitudinem eandem. Diametrum autem uoco cuiuscunque portionis rectam lineam, quæ lineas omnes basi ipsius æquidistantes bifariam secat.

Sit rectanguli coni sectio a b c, à qua abscindantur duæ portiones a d e, h b c: sitq; a d e portionis diameter d f: portionis autem h b c, ipsa b g: & sint d f, b g æquales inter se.



Ostendendum est, & portiones a d e, b h c æquales esse: & triangula eo, quo dictum est, modo in ipsis descripta, æqualia. Sit primum, quæ abscindit alteram portionem h c ad rectos angulos ipsi diametro coni rectãguli se-

A ctionis: & sumatur ea, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur; dupla illius, quæ est usque ad axem: sitq; in qua m: & à puncto a ducatur a k perpendicularis ad d f. Quoniam igi-

B tur d f diameter est portionis: & a e bifariam secatur in f; & d f æquidistans est diametro sectionis coni rectanguli: sic enim bifariam secat omnes ipsi a e æquidistantes. Itaque quam proportionem habet quadratum a f ad quadratum a k, eam habeat n ad m, ergo quæ à sectione ducuntur ad d f æquidistantes ipsi a e, possunt spatia adiacentia quidem ad lineam æqualem ipsi n, latitudinem uero habentia lineas illas, quas ipsæ a linea d f ad terminum d abscin-

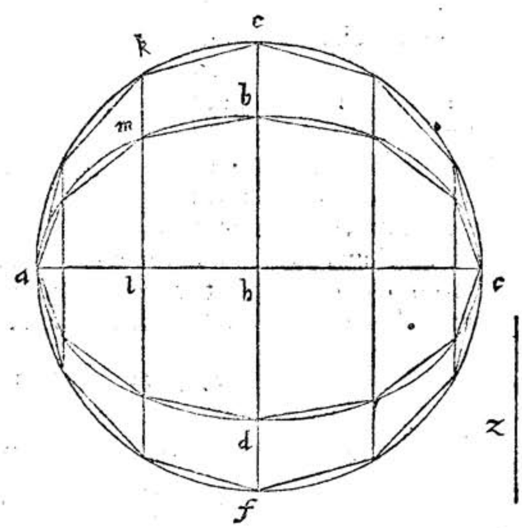
C dunt: ostensum nanque est hoc in conicis. potest igitur linea a f spatium æquale ei,
D quod continetur linea n & ipsa d f: & potest h g æquale ei, quod continetur li-
E neam & b g; quoniam h g perpendicularis est ad diametrum. quare & quadratum a f ad quadratum h g eandem habet proportionem, quam n ad m; quod d f, b g positæ sint æquales. habet autem quadratum a f ad quadratum a k eandem propor-
F tionem, quam n ad m. æquales igitur erunt h g, a k. sed & æquales sunt b g, d f.
G quare quod continetur lineis h g, b g æquale est contento ipsis a k, d f. ergo trian-
H gulum h b g triangulo d a f est æquale; & eorum dupla æqualia. trianguli autem a d e sesquitertia est portio a d e: & trianguli h b c sesquitertia ipsa h b c portio. ex quibus sequitur, portiones æquales esse: & item triangula in ipsis descripta, æqualia. Si uero neutra earum, quæ portiones abscindunt, fuerit ad angulos rectos ipsi diametro rectanguli coni sectionis: assumpta ex diametro sectionis coni rectanguli linea, quæ sit æqualis diametro unius portionis. & ab eius extremo ducta ad angulos rectos ipsi diametro altera linea: portio abscissa utrique prædictarum æqualis
I erit. patet igitur, quod fuerat propositum.

PROPOSITIO V.

Quodlibet spatium acutianguli coni sectione contentum ad circulum, qui habeat diametrum æqualem maiori diametro acutianguli

tianguli coni ſectionis, eandem habet proportionem, quam minor ipſius diameter ad maiorem; hoc eſt ad circuli diametrum.

Sit enim acutianguli coni ſectio, in qua a b c d: diameter autem ipſius maior, A
in qua a c, minor, in qua b d: & ſit circulus circa diametrum a c. Oſtendendum eſt, ſpatium acutianguli coni ſectione contentum ad circulum eandem habere proportionem, quam b d ad c a, hoc eſt ad e f. Itaque quam proportionem habet b d ad e f, eandem habeat circulus, in quo z ad a e c f circulum. Dico circulum z ſectioni coni acutianguli eſſe æqualem. Si enim non eſt æqualis circulus z ſpatio coni acutianguli ſectione contento: ſit primum, ſi fieri poteſt, maior. poteſt autem B
in z circulo deſcribi figura multorum angulorum, & numero parium, quæ maior ſit ſpatio a b c d. Intelligatur iam deſcripta: ſitq; in circulo, a e c f figura rectilinea ſimilis ei, quæ in circulo z deſcripta eſt: & ab angulis ipſius perpendiculares ducantur ad a c diametrum: ea uero puncta, in quibus perpendiculares ſecant coni acutianguli ſectionem, rectis lineis iungantur. erit igitur figura quædam rectilinea in coni acutianguli ſectione deſcripta: & habebit ad figuram deſcriptam in circulo a e c f proportionem eandem, quam habet b d ad e f. Quoniam enim perpendiculares e h, k l in eandem proportionem ſecantur ad C
puncta m b: conſtat trapezium l e ad ipſum h m eandem habere D
proportionem, quam h e ad b h: & ſimiliter unumquodque trapeziorum, quæ ſunt in circulo ad unumquodque eorum, quæ ſunt in coni acutianguli ſectione, eandem habebit, quam e h ad b h. habent autem & triangula ad puncta a c, quæ ſunt in circulo ad ea triangula, quæ ſunt in coni acutianguli ſectione, hanc eandem proportionem. Quare & tota figura rectilinea in a e c f circulo deſcripta ad totam figuram deſcriptam in coni acutianguli ſectione, habebit eandem proportionem, quam e f ad b d. ſed & eadem figura rectilinea ad figuram, quæ in z circulo eſt deſcripta eandem habet propor 1.& 2.xII
tionem, quoniam & circuli eandem inter ſe habebant. figura igitur rectilinea in z circulo deſcripta æqualis eſt figuræ deſcriptæ in coni acutianguli ſectione: quod fieri non poteſt; maior enim erat toto ſpatio ſectione coni acutiangnli contento. Sed ſit, ſi fieri poteſt, minor. Rurſus in coni acutianguli ſectione poteſt deſcribi figura F
multorum angulorum, & numero parium, quæ maior ſit circulo z. deſcribatur ergo: & ab angulis ipſius ad a c perpendiculares ductæ producantur ad circuli uſque circumferentiam. Rurſus erit figura quædam rectilinea in a e c f circulo deſcripta, quæ habebit ad figuram deſcriptam in coni acutianguli ſectione proportionem eandem, quam e f ad b d. Itaque deſcripta & in z circulo ſimili figura, oſtendetur, eam ipſam æqualem eſſe figuræ in coni acutianguli ſectione deſcriptæ; quod quidem fieri non poteſt. non eſt igitur neque minor z circulus ſpatio coni acutianguli ſectione contento. Quare conſtat dictum ſpatium ad a e c f circulum eandem habere proportionem, quam habet b d ad e f.

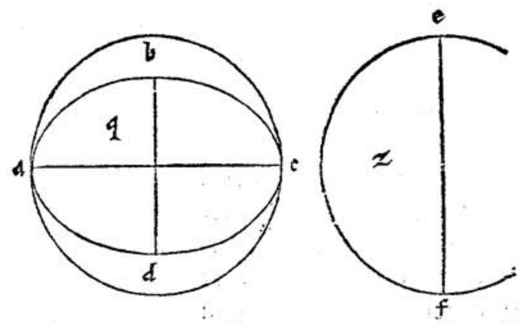


PROPOSITIO

PROPOSITIO VI.

Spatium quodlibet acutianguli coni ſectione contentum, ad quemlibet circulum eam habet proportionem, quam rectangulum ex diametris ſectionis coni acutianguli factum, ad quadratum diametri circuli.

SIT enim ſpatium acutianguli coni ſectione contentum, in quo q: & ipſius ſectionis diametri ſint a c, b d; quarum maior a c: circulus autem ſit, in quo z: & eius diameter e f. Oſtendendum eſt, ſpatium q ad z circulum eam proportionem habere, quam rectangulum, quod ſit ex lineis a c, b d habet ad quadratum e f.

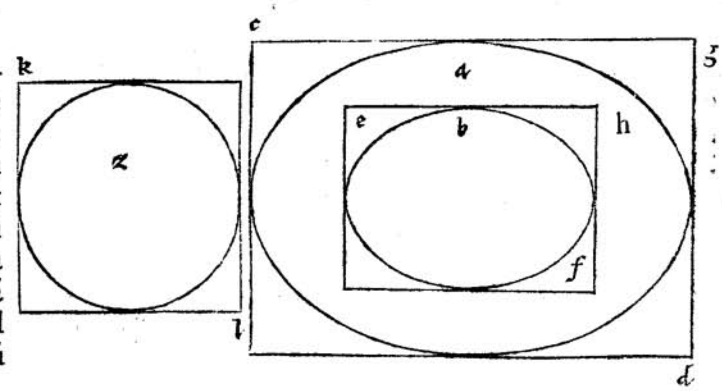


A Circūſcribatur circulus circa diametrum a c. ſpatium ergo q ad circulum, cuius diameter a c eam habet proportionem, quam rectangulum ex lineis a c, b d ad quadratum
.XII. a c. Oſtenſum eſt enim habere eam, quam b d ad a c. habet autem & circulus, cuius diameter a c ad circulum, cuius diameter e f, eam proportionem, quam a c quadratum
B ad quadratum e f. conſtat igitur ſpatium q ad z circulum habere eam, quam rectangulum ex lineis a c, b d ad quadratum e f.

PROPOSITIO VII.

Spatia acutianguli coni ſectione contenta eam inter ſe ſe proportionem habent, quam quæ fiunt ex coni acutianguli ſectionum diametris rectangula.

SINT ſpatia acutianguli coni ſectione contenta, in quibus a b: ſit autem & c d rectangulum ex diametris ſectionis coni acutianguli, quæ continet ſpatium a: & e f rectangulum ex diametris alterius ſectionis. Oſtendendum eſt, ſpatium a ad b eam habere proportionem, quam c d ad e f. Sumatur circulus quidam, in quo z. & diametri eius quadratū ſit k l. Habet autem ſpatium a ad z circulum eā proportionē quā c d ad
12.V. k l: & z circulus ad ſpatiū b eam, quam k l ad e f. Quare manifeſtum eſt, ſpatium a ad b eam habere proportionem, quam c d ad e f.



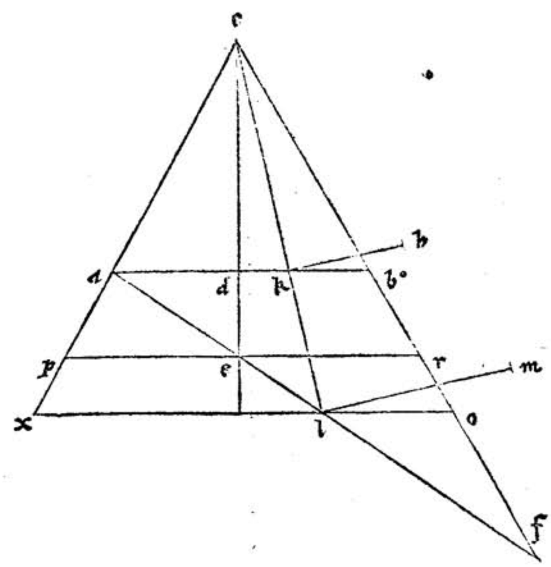
A Ex hoc apparet, ſpatia ſimilibus acutianguli coni ſectionibus contenta, eam inter ſe proportionem habere, quam ſectionum diametri, quæ eiuſdem ſint rationis, potentia inter ſe habent.

PROPOSITIO VIII.

Acutianguli coni ſectione data, & recta linea ab eius centro erecta ſuper planum, in quo eſt ipſa ſectio, fieri poteſt, ut conus inueniatur uerticem habens erectæ lineæ terminum, in cuius ſuperficie ſit data acutianguli coni ſectio.

Detvr aliqua acutianguli coni ſectio: & à centro eius recta linea erigatur ſuper planum, in quo ſectio eſt: per lineam uero erectam, & per minorem diametrum planum educatur: ſitq; in ipſo minor diameter a b: centrum ſectionis acutianguli coni d: linea à centro erecta c d, cuius terminus c: & intelligatur acutianguli coni ſectio circa diametrum a b deſcripta, in plano erecto ſuper c d. Oportet iam conum inuenire uerticem habentem punctum c, in cuius ſuperficie ſit acutiãguli coni ſectio. Ducantur à puncto c ad a b puncta rectæ lineæ; & producantur: & ab a ducatur a f: ita ut rectangulum a e f ad quadratum e c eam habeat proportionem, quam quadratum dimidiæ maioris diametri habet ad d c quadratum: quod quidem fieri poteſt, quoniam proportio maior eſt ea, quam habet rectangulum a d b ad quadratum d c. Ab ipſa autem a f planum attollatur perpendiculariter ſuper planum, in quo ſunt lineæ c a, a f: & in hoc item plano circulus deſcribatur circa diametrum a f: à quo circulo conus ſit uerticem habens punctum c. Itaque in coni huius ſuperficie demonſtrabitur eſſe acutianguli coni ſectio. Si enim non ſit in ſuperficie coni, neceſſario ſequitur eſſe aliquod punctum in acutianguli coni ſectione, quod non ſit in ſuperficie coni. Intelligatur autem punctum h in ſectione acutianguli coni ſumptum, quod non ſit in ſuperficie coni: & ab h ducatur h k perpendicularis ad ipſam a b. erit ergo hæc erecta ſuper planum, in quo ſunt lineæ c a, a f. à puncto autem c ad k ducta linea producatur, quæ cum a f coeat in l: & ab l ducatur l m ad angulos rectos ipſi f a, in circulo circa a f deſcripto: intelligatur quoque punctum m ſublime in circumferentia ipſius: & ducatur per l quidem punctum, lineæ a b æquidiſtans ipſa x o: per punctum uero e ipſa p r. Quoniam igitur rectangulum a e f ad quadratum e c eam habet proportionem, quam quadratum dimidiæ maioris diametri ad d c quadratum: & quadratum e c ad rectangulum p e r eam habet, quam quadratum d c ad rectangulum a d b: habebit rectangulum a e f ad rectangulum p e r eandem proportionem, quam quadratum dimidiæ maioris diametri ad rectangulum a d b. eſt autem ut rectangulum a e f ad rectangulum p e r, ita rectangulum a l f ad ipſum x l o: & ut quadratũ dimidiæ maioris diametri ad rectangulum a d b, ita quadratum h k ad rectangulum a k b. Eandem igitur proportionem habet rectangulum a l f ad rectangulum x l o, quam quadratum h k ad rectangulum a k b. ſed rectangulum x l o ad quadratum c l habet eam, quam rectangulum

A



B

22.v.

C

D

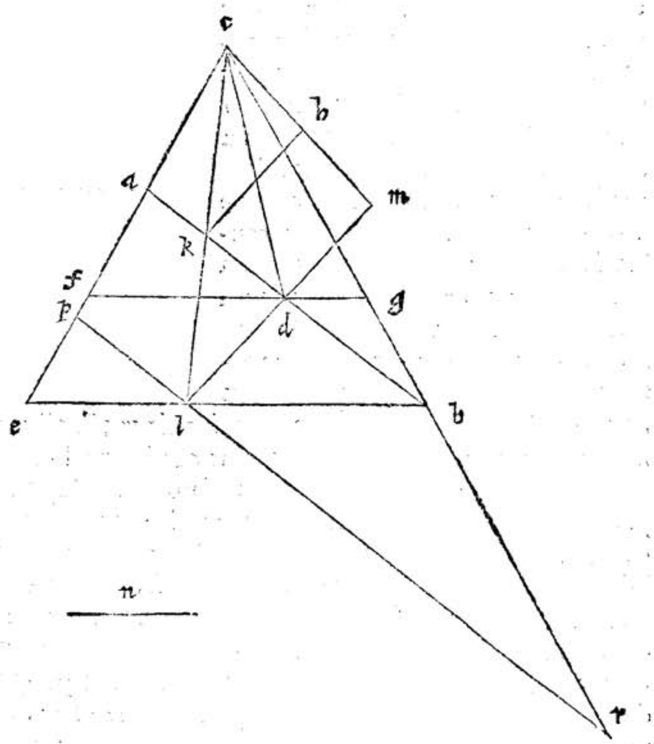
E

21.v. gulum a k b ad quadratum c k. Quare a l f rectangulum ad quadratum c l eandem habet proportionem, quam h k quadratum ad quadratum k c. rectangulo autem a l f æquale eſt quadratum l m: quoniam in ſemicirculo circa a f perpendicularis ducta eſt l m. Quadratum ergo l m ad quadratum l c eandem proportionem habet, quam h k quadratum, ad quadratum k c: & idcirco in recta linea ſunt puncta c h m.
F ſed linea c m eſt in ſuperficie coni. conſtat igitur & h punctum in coni eſſe ſuperficie: poſitum autem fuerat non eſſe. nullum igitur punctum eſt in ſectione coni acutianguli, quod non ſit in dicti coni ſuperficie. Quare tota acutianguli coni ſectio eſt in ſuperficie eiuſdem coni.

PROPOSITIO IX.

ACutianguli coni ſectione data, & linea ab eius centro eleuata, non perpendiculari in plano ex diametro altera erecto ſuper planum, in quo eſt ſectio coni acutianguli, fieri poteſt, ut conus inueniatur uerticem habens eleuatæ lineæ terminum, in cuius ſuperficie ſit data acutianguli coni ſectio.

SIT diameter acutianguli coni ſectionis b a; centrum d: & d c linea à centro eleuata, ut dictum eſt: Intelligatur autem acutianguli coni ſectio circa diametrum a b deſcripta, in plano erecto ſuper planum, in quo ſunt lineæ a b, c d. Oportet iam conum inuenire uerticem habentem punctum c; in cuius ſuperficie ſit data acutianguli coni ſectio. Itaque lineæ a c, c b nõ ſunt æquales: quoniam c d non eſt perpendicularis ſuper planum, in quo eſt acutianguli coni ſectio. Sit igitur e c æqualis c b: & recta linea n æqualis ſit dimidiæ alterius diametri, quæ eſt coniuncta ipſi a b: & per d ducatur f g æquidiſtans lineæ e b: ab ipſa autem e b planum attollatur perpendiculariter ſuper planum, in quo ſunt lineæ a c, c b: & in hoc eodem plano circa diametrum e b deſcribatur circulus, uel ellipſis. Si enim quadratum n æquale eſt rectangulo f d g: deſcribatur circulus. ſin minus, acutianguli coni ſectio eiuſmodi, ut quadratũ alterius diametri ad e b quadratum eam proportionem habeat, quam quadratum n ad rectangulum f d g. ſumatur conus uerticem habens c punctum; in cuius ſuperficie ſit circulus, uel acutianguli coni ſectio circa diametrum e b: id uero fieri poteſt, quoniam à puncto c ad mediam

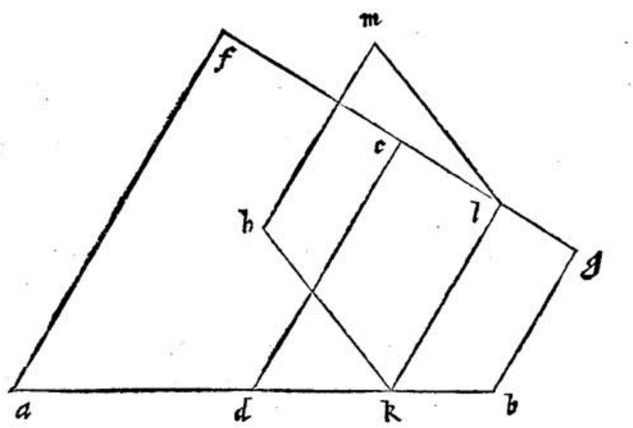


diam e b ducta perpendicularis est super planum, quod est secundum ipsam e b. in hac ergo superficie est & acutianguli coni sectio circa diametrum a b. Si enim non est, sumetur aliquod punctũ in acutianguli coni sectione, quod non erit in superficie coni. Intelligatur punctum h sumptum, quod non sit in superficie coni: & ab h ducatur h k perpendicularis ad a b: ductaq; c k producatur, ut coeat cum e b in puncto l: & per l ducatur quædam linea l m in plano secundum e b erecto; quæ sit perpendicularis ad ipsam e b: punctum uero m intelligatur sublime in superficie coni: & per l item ducatur linea p r æquidistans a b. est igitur ut quadratum n ad rectan- C
gulum f d g, ita quadratum l m ad rectangulum e l b. ut autem rectangulum f d g D
ad rectangulum a d b, ita rectangulum e l b ad ipsum p l r. Quare erit ut quadratum 22. v.
n ad rectangulum a d b, ita quadratum l m ad rectangulum p l r. Sed ut quadratum E
n ad rectangulum a d b, ita quadratum h k ad rectangulum a k b: quoniam in eadem acutianguli coni sectione perpendiculares ductæ sunt ad diametrum a b. Eandem igitur proportionem habet quadratum l m ad rectangulum p l r, quam h k quadratum ad rectangulum a k b. habet autem & rectangulum p l r ad quadratum c l ean- F
dem proportionem, quam rectangulum a k b ad quadratum k c. ergo l m quadratum ad quadratum l c eandem habet, quam quadratum h k ad ipsum k c. quare in recta linea sunt puncta c h m. sed linea c m est in superficie coni. ergo & h punctum in coni superficie erit. positum autem fuerat non esse. manifestum est igitur, quod demonstrare oportebat.

PROPOSITIO X.

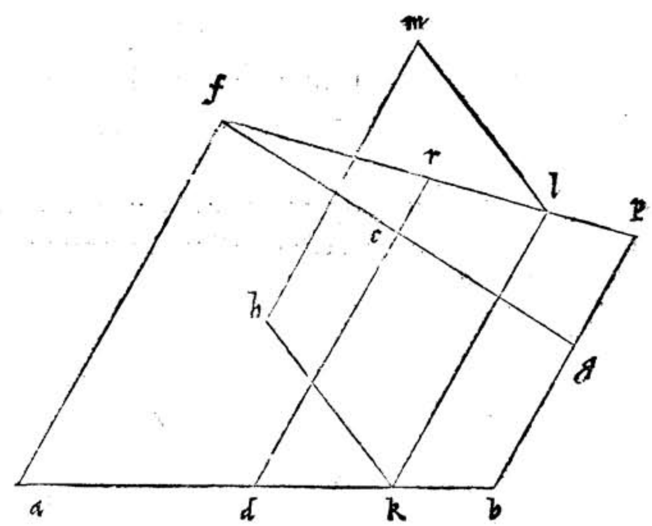
Acutianguli coni sectione data, & linea ab eius centro eleuata non perpendiculari in plano ex altera diametro erecto super planum, in quo est sectio coni acutianguli, fieri potest, ut cylindrus inueniatur axem habens in eadem recta linea ipsi eleuatæ; in cuius superficie sit data acutianguli coni sectio.

Sit datæ acutianguli coni sectionis altera diameter b a; centrum d: & linea c d eleuata sit à centro, ut dictum est: Intelligatur autem acutianguli coni sectio circa diametrum a b in plano erecto super planum, in quo sunt lineæ a b, c d. Oportet cylindrum inuenire axem habentem in recta linea c d; in cuius superficie sit data acutianguli coni sectio. Ducantur à punctis a b lineæ a f, b g æquidistantes ipsi c d: erit altera diameter sectionis coni acutianguli, uel æqualis ipsi interuallo inter a f, b g lineas interiecto, uel maior, uel minor. Sit primum æqualis lineæ f g: & sit



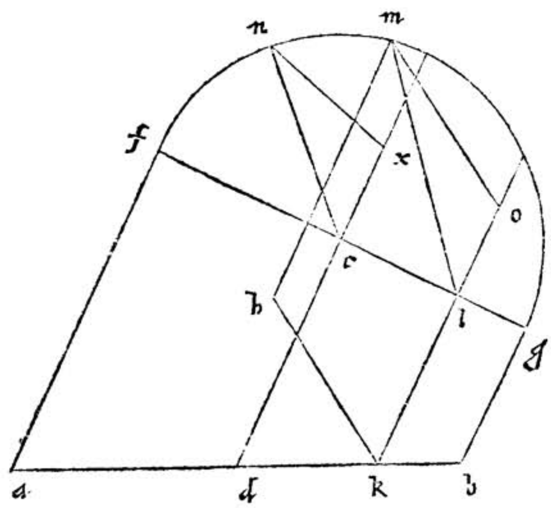
fg ad rectos angulos ipsi c d: à linea uero f g eleuetur planum perpendiculariter ad c d. in quo quidē plano circulus sit circa diametrum f g: & ab hoc circulo cylindrus axem habens ipsam c d. Itaque in superficie huius cylindri est acutianguli coni sectio. nisi enim ita sit, erit aliquod punctum in acutianguli coni sectione, quod nō erit in superficie cylindri: sitq; illud h: & ab h perpendicularis ducatur h k ad ipsam b a. erit igitur ea super planum erecta, in quo sunt lineæ a b, c d. à puncto autem k ducatur k l æquidistans lineæ c d: & ab l eleuetur l m ad rectos angulos ipsi f g, in circulo circa f g descripto. Intelligatur quoque m sublime in circumferentia semicirculi circa diametrum f g. eandem ergo proportionem habet quadratum li-
A neæ perpendicularis h k ad rectangulum a k b: & quadratum f c ad rectangulum a d
B b: quoniam æqualis est fg alteri diametro. habet autem & rectangulum f l g ad rectangulum a k b proportionem eam, quam f c quadratum ad quadratum a d elli-
C psis. quare rectangulum f l g æquale est quadrato h k. sed & ipsi quadrato l m est æ-
17. vi. quale. æquales igitur sunt perpendiculares h k, m l: & idcirco lineæ l k, m h æqui-
33. primi distantes. unde & ipsæ d e, m h æquidistantes erunt. ex quibus sequitur h m esse in
9. xi. superficie cylindri: quoniam à puncto m, quod est in superficie cylindri, ducta est m h axi æquidistans. manifestum ergo est & h punctum esse in superficie ipsius. positum autem fuerat non esse. Quare constat, quod oportebat demonstrare.

Perspicuum est igitur, cylindrum ellipsim comprehendentem rectum esse, si altera diameter æqualis sit interuallo linearum ductarum ab extremitatibus alterius diametri, ipsi lineæ ex centro eleuatæ æquidistantium.



Sit rursus altera diameter, maior ipsa f g: & æqualis sit p f alteri diametro: ab ipsa uero p f planum attollatur erectum super planum, in quo sunt lineæ a b, c d: & in hoc plano circulus sit circa diametrum p f: & ab eo circulo cylindrus axem habens d e. Itaque in superficie huius cylindri ex iis, quæ dicta sunt, acutianguli coni sectio esse demonstrabitur.

Sed sit altera diameter, minor f g: & quo plus potest f c, quàm dimidium alterius diametri, sit quadratum c x: & à puncto x attollatur linea x n æqualis dimidiæ alterius diametri, & perpendicularis super planum, in quo sunt lineæ a b,
D c d: intelligaturq; punctum n sublime. est igitur linea c n æqualis ipsi c f. in plano autem, in quo sunt lineæ f g, c n circa diametrum f g circulus describatur; qui transibit per n: & ab hoc circulo cylindrus sit axem habens c d. in superficie ergo cylindri huius est acutianguli coni sectio. Quòd si non ita sit, sumetur aliquod punctum in ipsa, quod non erit in superficie cylindri. sumatur: & sit h: ducaturq; h k perpēdicularis



laris ad a b: & à puncto k æqui
diſtans ducatur ipſi c d, quæ ſit
k l: & ab l attollatur l m per-
pendicularis ad f g, in ſemi-
circulo circa f g diametrum de
ſcripto. Intelligatur autem
punctum m in circumferen-
tia ipſius; à quo perpendicula
ris ducatur m o ad lineam k l
productam. erit hæc erecta ſu
per planum, in quo ſunt a b, c
d: quoniam k l perpendicula-
ris eſt ad f g. ergo ut quadra- E
tum m o ad quadratum m l,
ita eſt quadratum x n ad qua- F
dratum n c. ut autem quadra-
tum m l ad rectangulum a k b,
ita c n quadratum ad ipſum a
d: nam quadratum quidem m
l æquale eſt rectangulo f l g: quadratum uero c n eſt æquale ipſi c f. Quare ut qua
dratum m o ad rectangulum a k b, ita quadratum n x ad quadratum a d. atque eſt 21. primi
k h quadratum ad rectangulum a k b, ut quadratum x n ad ipſum a d: quòd x n li- Con.Ap.
nea æqualis ſit dimidiæ alterius diametri. perſpicuum eſt igitur, perpendiculares m G
o, h k æquales eſſe: ideoq; æquales ſunt k o, h m. Quoniam autem m h axi cylin-
dri æquidiſtat: & m punctum eſt in ſuperficie ipſius: neceſſe eſt & m h in cylindri eſ
ſe ſuperficie. quare & punctum h in eadem ſuperficie erit. non erat autem. ſequi-
tur ergo acutianguli coni ſectionem neceſſario eſſe in ſuperficie cylindri.

PROPOSITIO XI.

OMnis coni ad conum proportionem compoſitam eſſe ex pro- A
portione baſium, & proportione altitudinum, demonſtratum
eſt ab iis, qui ante nos fuerunt. eadem autem eſt demonſtratio, &
cur omnis portio coni ad coni portionem compoſitam proportio-
nem habeat ex proportione baſium, & proportione altitudinum.
omnem præterea cylindri portionem triplam eſſe portionis coni, B
quæ baſim habeat ipſi eandem, & æqualem altitudinem, eodem
modo demonſtrabitur, quo demonſtratum eſt, & cylindrum tri-
plum eſſe coni, qui baſim eandem, & altitudinem habeat cylin-
dro æqualem.

PROPOSITIO XII.

SI rectangulum conoides plano ſecetur per axem, uel axi æqui-
diſtanti: ſectio erit rectanguli coni ſectio, eadem illi, quæ fi-
guram deſcribit; cuius diameter erit communis ſectio planorum,
& eius, quod ſecat figuram, & eius, quod per axem ducitur ere-
ctum ſuper planum ſecans. Si autem ſecetur plano ſuper axem ere-

cto: ſectio circulus erit centrum habens in axe.

Si obtuſiangulum conoides plano ſecetur per axem, uel axi æquidiſtanti, uel per uerticem coni continentis conoides: ſectio erit obtuſianguli coni ſectio. ſiquidem per axem: eadem illi, quæ figuram deſcribit. ſi axi æquidiſtanti: erit prædictæ ſimilis. ſi autem & per uerticem coni continentis conoides: ſimilis non erit. ſectionis uero diameter erit communis ſectio planorum, ſecantis ſcilicet figuram, & eius quod per axem ducitur erectum ſuper planum ſecans. Quòd ſi ſecetur plano ſuper axem erecto: ſectio circulus erit centrum habens in axe.

Si ſphæroidum figurarum quælibet plano ſecetur per axem, uel axi æquidiſtanti: ſectio erit acutianguli coni ſectio. ſi quidem per axem: erit ea, quæ figuram deſcribit. ſi uero axi æquidiſtanti: erit illi ſimilis; cuius diameter erit communis ſectio planorum, ſecantis ſcilicet figuram, & eius, quod per axem ducitur, erectum ſuper planum ſecans. At uero ſi ſecetur plano ſuper axem erecto: ſectio circulus erit centrum habens in axe.

Si dictarum figurarum quælibet plano ſecetur per axem: lineæ ductæ à punctis, quæ ſunt in ſuperficie figuræ, non in ſectione ipſa, perpendiculares ad planum ſecans, intra figuræ ſectionem cadent.

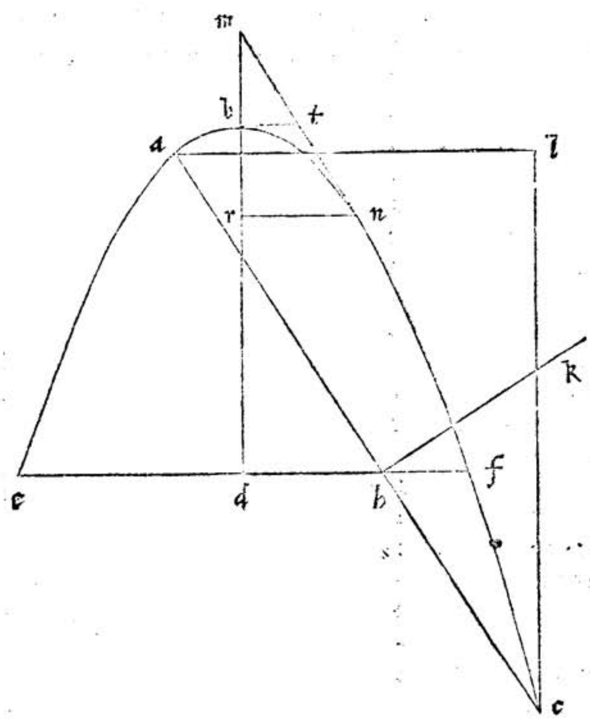
A Horum autem omnium manifeſtæ ſunt demonſtrationes.

PROPOSITIO XIII.

Si rectangulum conoides plano ſecetur, neque per axem, neque axi æquidiſtanti, neque ſuper axem erecto: ſectio erit acutianguli coni ſectio, cuius quidem maior diameter erit linea in conoide recepta à ſectione facta planorum; eius ſcilicet, quod figuram ſecat, & eius, quod per axem ducitur, erectum ſuper planum ſecans: minor uero diameter æqualis erit interuallo linearum, quæ ab extremitatibus maioris diametri ductæ fuerint axi æquidiſtantes.

SECETVR enim rectangulum conoides plano, uti dictum eſt: ſectoq; ipſo altero plano per axem, erecto ſuper planum ſecans, ſit conoidis ſectio a b c: plani ſecantis figuram ſit c a recta linea; axis uero conoidis, & diameter ſectionis b d. oſtendendum eſt, ſectionem conoidis, quæ fit à plano ſecundum a c eſſe acutianguli coni ſectionem; & maiorem eius diametrum lineam a c, minorem uero æqualem eſſe ipſi l a: cum ſit c l æquidiſtans lineæ b d, & a l perpendicularis ad c l. Intelligatur aliquod punctum in ſectione ſumptum *k*: & ab ipſo *k* ad c a perpendicularis ducatur *k* h. erit *k* h perpendicularis ad planum in quo eſt a c b rectanguli coni ſectio: quoniam & planum ſecans erectum eſt ſuper idem planum. per h autem ducatur e f ad rectos angulos ipſi b d: & per lineas e f, k h planum ducatur. erit igitur hoc erectum ſuper b d: & ſecabitur conoides plano ſuper axem erecto. quare ſectio circulus erit, cuius centrum d. ergo *k* h poterit æquale ei, quod fit ex e h,

h f:



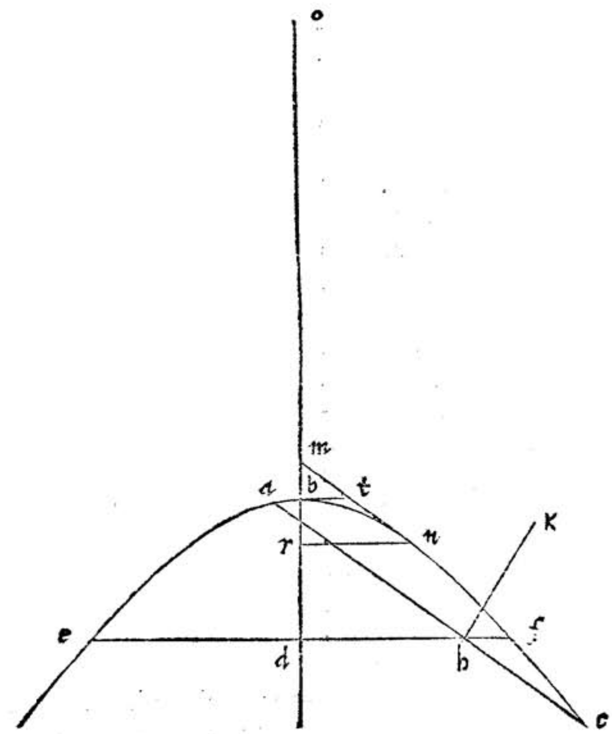
h f: ſemicirculus enim eſt ſuper e f: & k h perpendicularis exiſtens, media ſit proportionalis. & poteſt æquale ei, quod fit ex e h, h f. Ducatur item contingens coni ſectionem linea m n, æquidiſtans ipſi a c, quæ contingat in n puncto: & ducatur b t æquidiſtans ipſi e f. Itaque rectangulum a h c ad rectangulum e h f eandem habet proportionem, quam n t quadratum ad quadratum b t; id enim demonſtratum eſt. ipſi uero n t æqualis eſt linea t m: quoniam & b r ipſi b m. habet igitur & rectangulum a h c ad quadratum k h proportionem eandem, quam quadratum t m ad quadratum t b. quare & perpendicularis h k quadratum ad rectangulum a h c eandem habet proportionem, quam b t quadratum ad quadratum t m. Quoniam igitur ſimilia ſunt c a l, t m b triangula: quadratum perpendicularis h k ad rectangulum a h c eandem habet proportionem, quam quadratum a l ad quadratum a c. Similiter oſtendentur & quadrata aliarum perpendicularium, quæ à ſectione ad ipſam a c ducuntur, ad rectangula partibus a c contenta, eandem habere proportionem, quam quadratum a l ad quadratum a c. patet igitur ſectionem eſſe acutianguli coni ſectionem: & eius maiorem diametrum eſſe a c, minorem uero æqualem ipſi a l.

A B C D E F

PROPOSITIO XIIII.

SI conoides obtuſiangulum ſecetur plano coeunti cum omnibus lateribus coni continentis conoides, non autem erecto ſuper axem: ſectio erit acutiangnli coni ſectio, cuius maior diameter erit linea in conoide recepta à facta ſectione planorum, eius ſcilicet, quod ſecat figuram, & eius, quod per axem ducitur erectum ſuper planum ſecans.

Secetvr enim obtuſiangulum conoides plano, uti dictum eſt: ſectoq; ipſo altero plano per axem, erecto ſuper planum ſecans, ſit conoidis quidem ſectio a b c, obtuſianguli coni ſectio: plani figuram ſecantis ſit a c recta linea: axis autem conoidis, & diameter ſectionis b d: intelligatur quoque in ſectione punctum aliquod k: & ab ipſo k ad a c perpendicularis ducatur k h. erit ipſa erecta ſuper planum, in quo eſt a b c coni ſectio. ducatur autem per h linea e f ad rectos angulos ipſi b d: & per e f, k h rectas lineas planum ducatur ſecans conoides. ſecabitur igitur plano erecto ſuper axem; & ſectio circulus erit, cuius centrum d. quare perpendipendicularis k h poterit æquale ei, quod lineis e h, h f continetur. Ducatur rursus ipsa quidem m n æquidistans lineæ a c; quæ contingat coni sectionem in puncto n: ipsa uero b t ducatur æquidistans e f. Itaque rectangulum e h f ad rectangulum a h c eandem habet proportionem, quã quadratum b t ad quadratum t n. quare perpendicularis k h quadratum ad rectangulum a h c eandem habet, quam b t quadratum ad quadratum t n. Similiter ostendentur & quadrata aliarũ perpendicularium ab ipsa sectione ad a c ductarum, ad rectangula ex partibus a c quas perpendiculares faciunt, eandem habere proportionem, quam b t quadratum ad quadratum t n. est autem linea b t minor ipsa t n: propterea, quòd & m t minor est ipsa t n; cum m b minor sit b r: hoc enim in acutianguli coni sectionibus contingit. perspicuum est igitur, sectionem esse acutianguli coni sectionem; & maiorem eius diametrum esse a c. similiter perpendiculari existente n r in obtusianguli coni sectione, diameter ipsius maior erit c l.



A

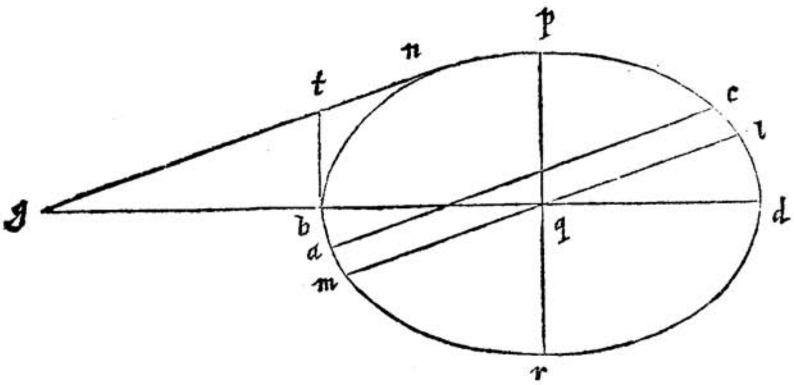
B

PROPOSITIO XV.

SI oblongum sphæroides plano secetur non erecto super axem: sectio erit acutianguli coni sectio: diameter autem ipsius maior, erit linea in sphæroide recepta à facta sectione planorum, eius uidelicet, quod secat figuram, & eius, quod per axem ducitur erectum super planum secans.

Si quidem igitur secetur plano per axem, aut axi æquidistanti: constat propositum. secetur autem alio plano: & secto ipso per axem, plano erecto super planum secans, sit sphæroidis sectio a b c d acutianguli coni sectio: secantis plani recta linea sit a c: axis sphæroidis, & diameter sectionis coni acutianguli b d: centrum q: & minor diameter sit p r. Ducatur autem linea b t ad rectos angulos lineæ b d: & g n æquidistans ipsi a c, contingensq; acutianguli coni sectionem in puncto n: deinde
A ducatur m l per q æquidistans ipsi a c. similiter iis, quæ ante tradita sunt, ostendentur quadrata perpendicularium ab ipsa sectione ad a c ductarum ad rectangula, quæ fiunt ex partibus a c, eandem habere proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n. Itaque sectionem esse coni acutianguli sectionem, & diametrum ipsius

ipſius eſſe a c, conſtat. Sed maiorem eſſe diametrum, oſtendemus. rectangulum enim p q r ad rectangulum m q l eam habet proportionem, quã b t quadratũ ad quadratũ t n: quoniam lineæ p r, m l contingentibus æquidiſtantes ſunt. & rectangulum p q r minus eſt rectangulo m q l: quoniam & q p ipſa g l minor. minus eſt igitur b t quadratum quadrato t n. quare & quadrata perpendicularium à ſectione ad a c ductarum minora ſunt rectangulis, quæ ſunt ex partibus a c. perſpicuum ergo eſt, ipſam a c minorem eſſe diametrum.



Si ſphæroides latum plano ſecetur: alia quidem eadem erunt: ex diametris uero minor erit ea, quæ in ſphæroide recipitur. B

Ex his apparet in omnibus figuris ſectiones ſimiles eſſe, ſi planis æquidiſtantibus ſecentur. quadrata enim perpendicularium ad rectangula partibus contenta eandem proportionem habebunt.

PROPOSITIO XVI.

IN rectangulo conoide ſi à quouis puncto eorum, quæ in ſuperficie ſunt, ducantur lineæ axi æquidiſtantes; quæ quidem ad eas partes ducuntur, in quibus conoidis ſunt conuexa, extra conoides cadunt; quæ uero ad partes contrarias, intra.

DVCTO nanque plano & per axem, & per punctum, à quo axi æquidiſtans ducta eſt, ſectio erit rectanguli coni ſectio; cuius diameter erit axis conoidis. At in rectan- A guli coni ſectione à quouis puncto eorum, quæ in ſectione ſunt, ductis lineis diametro æquidiſtantibus, quæ quidem ad eas partes, in quibus ſunt ipſius conuexa, ducuntur, extra ſectionem cadunt, quæ uero ad partes alteras, intra. patet igitur, quod fuerat propoſitum.

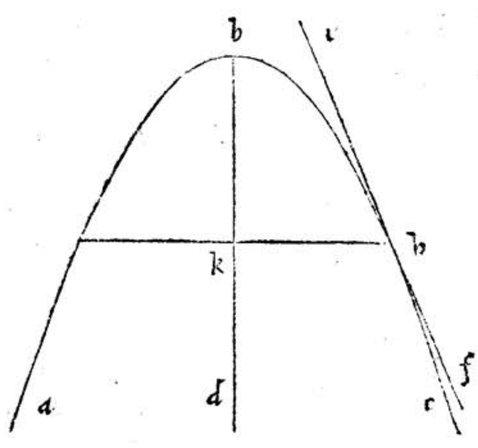
In obtuſiangulo conoide à quolibet puncto eorum, quæ in ſuperficie ſunt, ductis lineis æquidiſtantibus cuidam lineæ, quæ in conoide ducta eſt per uerticem coni continentis conoides; quæ quidem ad eas partes ducuntur, in quibus ſunt ipſius conuexa, extra conoides cadunt; quæ uero ad contrarias, intra.

DVCTO enim plano, & per lineam, quæ in conoide ducta eſt per uerticem coni continentis conoides, & per punctum, à quo æquidiſtans ducitur, ſectio erit obtu- B ſianguli coni ſectio: eius autem diameter erit linea, quæ à uertice coni in conoide ducta eſt. Sed in ſectione coni obtuſianguli, ſi à quouis puncto in ſectione ſumpto C ducantur

ducantur lineæ æquidiſtantes cuidam lineæ ductæ, ut dictum eſt: quæ ad eas partes uergunt, in quibus ſunt ipſius conuexa, extra ſectionem cadunt; quæ uero ad contrarias, intra.

Si conoidas figuras planum contingat, ipſas non ſecans: in uno tantum puncto continget: & planum ductum per axem, & per contactum, erectum erit ſuper contingens planum.

CONTINGAT enim, ſi fieri poteſt, in pluribus punctis: ſumantur autem puncta duo, in quibus planum conoides contingit: & ducantur ab utriſque lineæ æquidiſtantes axi: & ab his planum axi æquidiſtans ducatur: uel enim per axem, uel axi
D æquidiſtans ductum erit. quare ſectionem faciet, coni ſectionem: & puncta in ipſa coni ſectione erunt. Quoniam enim in ſuperficie ſunt: & in ipſo erunt plano. recta igitur linea, quæ inter puncta interiicitur, erit intra coni ſectionem. & idcirco intra conoidis ſuperficiem. eſt autem recta linea in plano contingente: quoniam & pũcta in eo ſunt. ergo contingentis plani aliqua pars erit intra conoides: quod fieri nõ poteſt; poſitum enim fuerat non ſecare. In uno igitur tantum puncto continget. Ipſum autem planum per contactum, & per axem ductum, erectum eſſe ſuper planũ contingens; ſiquidem in uertice contingat conoides, manifeſtum eſt. ductis enim per conoidis axem duobus planis, ſectiones erunt conorum ſectiones, diametrum habentes ipſum axem: contingentis uero plani lineæ, quæ ſectiones conorum contingunt in diametri extremitate, angulos rectos faciunt cum diametro. quare in contingenti plano erunt duæ rectæ lineæ ad rectos angulos ipſi axi: & ob id planum ſuper axem erectum erit. ergo & ſuper planum per axem ductum. Quòd ſi planum non contingat conoides in uertice: per contactum, & axem planum ducatur: ſitq; ſectio conoidis a b c coni ſectio: & axis, & diameter ſectionis b d: contingentis autem plani ſectio ſit recta linea e h f, quæ coni ſectionem contingat in h: & ab h perpendicularis ducatur h k ad ipſam b d: & planum attollatur ſuper axem erectum. faciet hoc ſectionem circulum, cuius centrum k: ſectio autem huius plani, & plani contingentis erit linea contingens circu
18. III. lum. quare faciet angulos rectos cum h k: & propterea erecta erit ſuper planum, in quo ſunt lineæ k h, b d. perſpicuum ergo eſt & planum cõ
18. XI. tingens erectum eſſe ſuper idem planum. quoniam & rectæ lineæ, quæ in ipſo ſunt.



PROPOSITIO XVII.

SI ſphæroidum figurarum quamlibet planum contingat, non ſecans figuram: in uno tantum puncto continget; & planum, quod per contactum, & axem ducitur, erectum erit ſuper contingens planum.

CONTINGAT enim in pluribus punctis: & ſumantur puncta duo, in quibus planum ſphæroides contingit: ab utroque autem ipſorum ducantur rectæ lineæ axi æquidiſtantes; & ducto per illas plano, ſectio erit acutianguli coni ſectio; & puncta

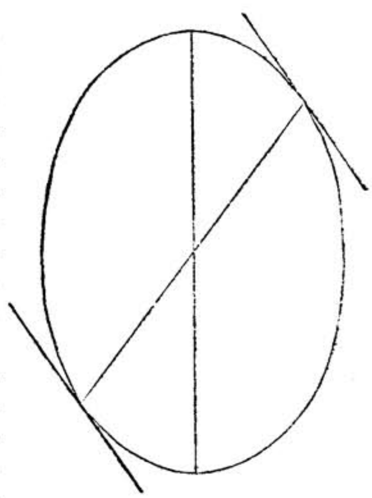
cta in ipſa coni ſectione. Quæ igitur inter puncta interiicitur recta linea, intra coni ſectionem cadet. quare & intra ſphæroides ſuperficiem. eſt autem recta linea in contingente plano: quoniam & puncta in eo ſunt. ergo contingentis plani aliqua pars erit intra ſphæroides: quod quidem fieri non poteſt: poſitum enim fuerat non ſecare. perſpicuum eſt igitur in uno tantum puncto contingere. Ipſum uero planum per contactum, & per axem ductum, erectum eſſe ſuper planum contingens, ſimiliter atque in conoidibus figuris demonſtrabimus.

Si ſphæroidum figurarum quælibet plano ſecetur per axem: ſectionemq; factam contingat quædam recta linea: & per contingentem planum ducatur erectum ſuper planum ſecans: continget id figuram in eodemmet puncto, in quo & recta linea coni ſectionem contingit.

Non enim in alio puncto continget ipſius ſuperficiem; alioquin ab eo puncto ducta perpendicularis ſuper planum ſecans cadet extra coni ſectionem: nam ſuper contingentem cadet, cum plana ad inuicem ſint erecta: quod quidem fieri non poteſt, oſtenſum eſt enim intra cadere. A B

PROPOSITIO XVIII.

Si ſphæroidum figurarum aliquam duo plana æquidiſtantia contingant: quæ contactus iungit recta linea per centrum ſphæroidis tranſibit.



Si igitur plana fuerint ad rectos angulos ipſi axi: manifeſtum eſt, quod proponitur. Sin minus, planum ductum per axem, & alterum contactum, erectum erit ſuper contingens planum. quare & ſuper planum ei æquidiſtans. neceſſe eſt igitur idem eſſe planum ductum per axem, & per utrunque contactum; alioquin erunt duo plana erecta ſuper idem planum, per eandem lineam ducta, quæ non ſit erecta ſuper planum: poſitum enim eſt, axem non eſſe erectum ſuper plana æquidiſtantia. In eodem igitur plano erunt & axis, & contactus ipſi: & ſectum erit ſphæroides per axẽ. quare ſectio erit acutianguli coni ſectio: planorum autem contingentium ſectiones æquidiſtantes erunt, quæ contingent acutianguli coni ſectionem in contactibus planorum. At ſi duæ rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes acutianguli coni ſectionem contingant: & centrum ſectionis coni acutianguli, & contactus ipſi in eadem recta linea erunt. A B

PROPOSITIO XIX.

Si ſphæroidum figurarum quamlibet duo plana æquidiſtantia contingant: ducatur autem per centrum ſphæroidis aliquod planum contingentibus planis æquidiſtans: rectæ lineæ, quæ per factam ſectionem ducuntur, æquidiſtantes lineæ contactus iungenti, extra ſphæroides cadent.

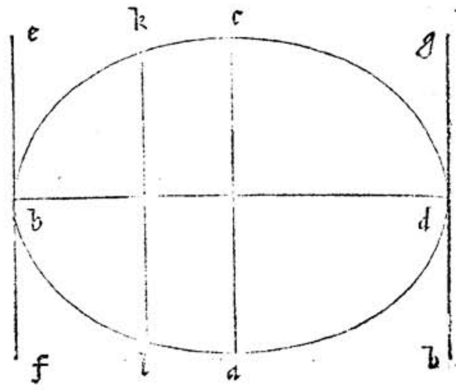
PONANTVR enim, quæ dicta ſunt: & ſumatur aliquod punctum in facta ſectione: & per ipſum, & rectam lineam contactus iungentem planum ducatur, ſecabit hoc ſphæroides, & plana æquidiſtantia. Sit enim ſectio ſphæroidis a b c d acutianguli coni ſectio: planorum contingentium ſectiones ſint e f, g h: ſumptum punctum a: & recta linea b d iungens contactus. tranſibit igitur ea per centrum. plani uero contingentibus planis æquidiſtantis ſectio ſit c a, quæ & ipſa per centrum ducta erit, quoniam & planum. Itaque quoniam a b c d uel circulus eſt, uel acutianguli coni ſectio: & ipſam contingunt duæ rectæ lineæ e f, g h: per centrum autem ducta eſt a c ipſis æquidiſtans: conſtat lineas ductas à punctis a c æquidiſtantes ipſi b d contingere ſectionem; & extra ſphæroides cadere. Quòd ſi planum æquidiſtans contingentibus planis non ducatur per centrum, ut k l: perſpicuum eſt, ductis à ſectione lineis, quæ quidem ad eas partes uergunt, in quibus eſt minor portio, extra ſphæroides cadere; quæ uero ad partes contrarias, intra.

A

B

C

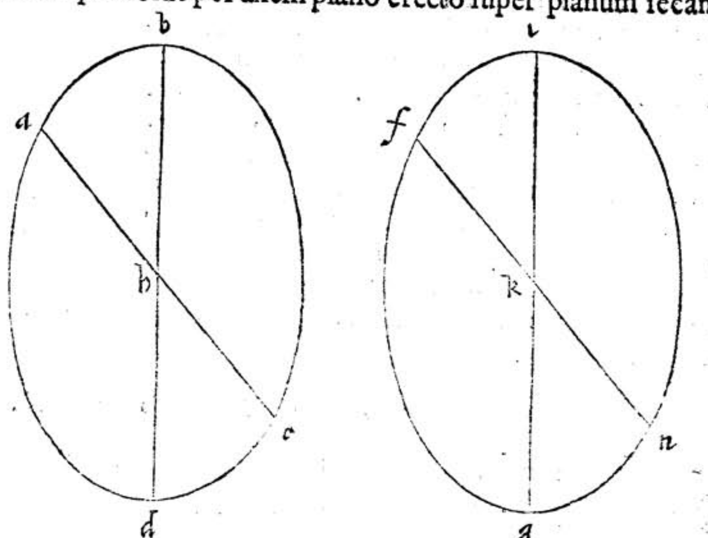
D



PROPOSITIO XX.

QVælibet figura ſphæroidis plano per centrum ducto, bifariam ſecatur, tum ipſa, tum ipſius ſuperficies.

SECETVR enim ſphæroides plano per centrum ducto. Itaque uel per axem, uel plano ſuper axem erecto, uel non erecto ſecabitur. Si quidem igitur ſecetur per axem, uel plano ſuper axem erecto: conſtat & ipſum, & ipſius ſuperficiem bifariam ſecari. manifeſtum enim eſt alteram eius partem alteri congruere, & alterius partis ſuperficiem ſuperficiei alterius. At ſi neque per axem ducto plano, neque ſuper axem erecto ſecetur: ſecto autem ſphæroide per axem plano erecto ſuper planum ſecans, ſit figuræ quidem ſectio a b c d acutianguli coni ſectio; cuius diameter, & axis ſphæroidis b d, centrum h: plani uero ſecantis ſphæroides per centrum ſectio ſit recta linea a c: ſumatur præterea alterum ſphæroides huic æquale, & ſimile: ſectoq; ipſo per axem, ſit ſectio e f g n acutianguli coni ſectio; cuius diameter, & axis ſphæroidis e g, & centrum k: ducatur per k linea f n angulum ad k faciens æqualem angulo ad h: & ab ipſa f n planum attollatur erectum ſuper planum, in quo eſt ſectio e f g n. erunt acutiangulorum conorum ſectiones ipſæ a b c d, e f g n æquales, & ſimiles inter ſeſe.



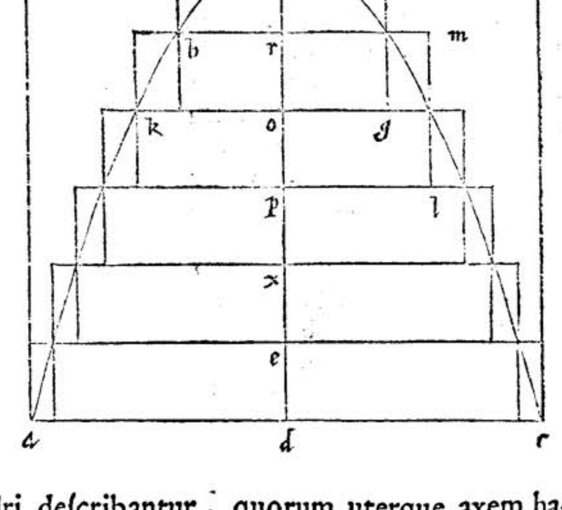
quare

quare congruit altera alteri, posita e g super b d & f n super a c. Sed & planum secundum n f congruit plano secundum a c: quoniam ab eadem recta linea super idem planũ eorum utrunque constituitur. congruit ergo & portio abscissa à sphæroide plano secundũ n f, quæ est in parte, in qua e, portioni abscissæ ab altero sphæroide plano secundum a c in parte, in qua b: & reliqua portio reliquæ, & superficies item portionum superficiebus congruunt. Rursus posita e g super b d: ita ut e sit super d; & g super b: linea uero, quæ interiicitur inter puncta n f, posita super lineam inter a c interiectam, perspicuum est, acutiangulorum conorum sectiones congruere inter sese: & f cadere super c: & n super a. similiter & planum secundum n f plano secundum a c congruit: & portionum abscissarum plano secundum n f, ea quidẽ, quæ est ad partes g congruit portioni altero plano secundum a c abscissæ ad partes b; ea uero, quæ est ad partes e congruit portioni, quæ est ad d. Quoniam igitur eadem portio utrique portionum congruit: sequitur portiones æquales esse: & idcirco earum quoque superficies æquales.

PROPOSITIO XXI.

DAta cuiuslibet conoidis portione abscissa plano super axem erecto, uel data portione cuiuslibet sphærioidis, quæ maior non sit dimidio sphæroide similiter abscissa, fieri potest, ut portio solida inscribatur, et altera circumscribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus constans: ita ut circumscripta figura excedat inscriptam magnitudine, quæ minor sit quacunque solida magnitudine proposita.

DETVR enim portio, qualis est a b c: & secta ipsa plano per axem, sit sectio portionis a b c coni sectio: plani autem secantis portionem sit a c recta linea: & portionis axis, & diameter sectionis b d. Quoniam igitur positum est, planum secans erectum esse super axem: sectio circulus erit, cuius diameter a c. ab hoc autem circulo cylindrus sit axem habens b d. cadet eius superficies extra portionem, quia uel conoides est, uel sphæroides non maius dimidio sphæroide. Itaque hoc cylindro cõtinenter secto bifariam plano super axem erecto, erit tandem residuum minus proposita solida magnitudine. sit residuum ab ipso, cylindrus basim habens circulum circa diametrum a c, axem uero e d, minor proposita magnitudine: diuidaturq; b d in partes æquales ipsi e d, in punctis r o p x: & à diuisionibus ducantur rectæ lineæ æquidistantes ipsi a c ad coni usque sectionem: & ab his plana attollantur erecta super b d. erunt igitur sectiones circuli centra habentes in linea b d. ab unoquoque autem circulorum duo cylindri describantur, quorum uterque axem habeat ipsi e d æqualem; unus quidem ad eas cylindri partes, in quibus est d; alter uero ad eas, in quibus b. erit iam in portione figura quædam solida inscripta, ex cylindris constans ad eas partes descriptis, in quibus d: & altera circum-

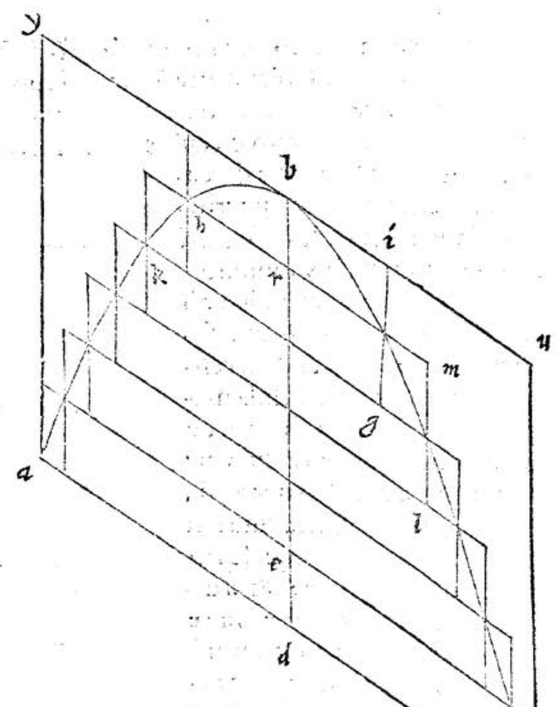


ſcripta ex cylindris ad partes b. Reliquum eſt, ut oſtendamus circumſcriptam excedere inſcriptam magnitudine, quæ minor ſit ſolida magnitudine propoſita: unuſquiſque enim cylindrorum, qui ſunt in figura inſcripta æqualis eſt cylindro, qui ab eodē circulo deſcribitur ad partes b, ut cylindrus h g ipſi h i: & k l ipſi k m: & alii ſimiliter: & omnes cylindri omnibus æquales ſunt. conſtat ergo circumſcriptam figuram excedere inſcriptam cylindro, qui baſim habet circulum circa diametrum a c, & axem e d. hic autem eſt minor propoſita ſolida magnitudine.

PROPOSITIO XXII.

DAta cuiuslibet conoidis portione, abſciſſa plano non erecto ſuper axem; uel data portione cuiuslibet ſphæroidis ſimiliter abſciſſa, quæ dimidio ſphæroide maior non ſit; fieri poteſt, ut portio ſolida inſcribatur, & altera circumſcribatur ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus conſtans: ita ut circumſcripta figura excedat inſcriptam magnitudine, quæ minor ſit quacunque ſolida magnitudine propoſita.

DETVR portio qualis dicta eſt: ſecta autem figura alio plano per axem, erecto ſuper planum, quod datam portionem abſcidit, figuræ quidem ſectio ſit a b c coni ſe-
A ctio: plani uero portionem abſcindentis recta linea c a. Et quoniam poſitum eſt planum abſcindens portionem non eſſe erectum ſuper axem, ſectio erit acutianguli coni ſectio, cuius diameter a c.
Sit autem u y contingens coni ſectionem in b puncto: & ab ipſa u y attollatur planum æquidiſtans plano ſecundum a c. cō-
B
C tinget hoc figurā in b. et ſi quidem portio ſit rectāguli conoidis: ab ipſo b ducatur b d æqui-
D diſtans axi. ſi uero ſit conoidis obtuſianguli: à uertice coni cōtinētis conoides recta linea ad b ducta producatur, quæ ſit b d.
E Quòd ſi ſphæroidis ſit portio: linea à centro ducta ad b, intra portionem recipiatur b d. manifeſtum eſt b d bifariam ſecare ipſam a c: ergo punctum b uertex eſt portionis: & axis b d recta linea. Itaque acutianguli coni ſectio quædam eſt circa diametrum a c: & linea b d à centro eleuata, non perpendicularis in plano erecto ſuper planū, in quo eſt acutianguli coni ſectio, per alteram ſcilicet diame-
F trum conſtituto plano: fieri igitur poteſt, ut cylindrus inueniatur axem habens b d, in cuius



ſuperficie ſit acutianguli coni ſectio circa diametrum a c. cadet autem ſuperficies ipſius extra portionem: quoniam uel eſt conoidis, uel ſphæroidis portio, & non maior

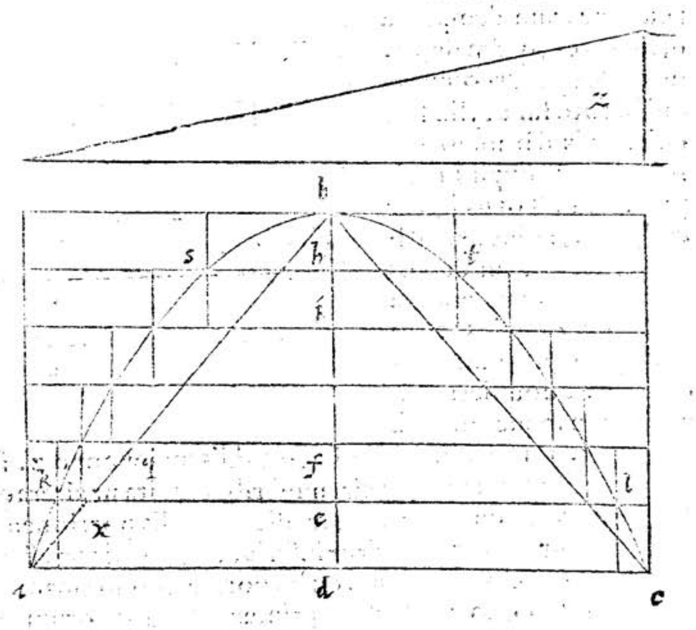
ior dimidio ſphæroide: atque erit portio quædam cylindri baſim habēs acutianguli coni ſectionē circa diametrū a c, & axem b d. ea uero portione bifariam ſecta planis æquidiſtantibus plano ſecundū a c, erit quod relinquitur minus propoſita ſolida magnitudine. Sit portio baſim habens acutianguli coni ſectionē circa diametrū a c, & axē e d, quæ minor ſit propoſita ſolida magnitudine: diuidaturq; d b in partes æquales ipſi e d: & à diuiſionibus ducātur lineæ ipſi a c æquidiſtantes uſque ad coni ſectionē; G
à quibus plana attollantur æquidiſtantia plano ſecundū a c ducto. ſecabunt hæc portionis ſuperficiem: & erunt acutiangulorū conorū ſectiones ſimiles ei, quæ eſt circa H
diametrum a c: quoniam plana æquidiſtātia ſunt. In unaquaque uero acutianguli coni ſectione deſcribantur cylindri portiones duæ; una quidem ad partes, in quibus eſt d; altera uero ad partes b, quæ axem habeant ipſi d e æqualem. erunt igitur quædam figuræ ſolidæ; altera quidem inſcripta in portione; altera uero circumſcripta ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus conſtantes. Reliquum eſt, ut oſtendamus circumſcriptam figuram excedere inſcriptam magnitudine, quæ minor ſit ſolida magnitudine propoſita. oſtendetur autem ſimiliter antecedenti, circumſcriptam figuram excedere inſcriptam portione, quæ baſim habet acutianguli coni ſectionem circa diametrum a c, & axem e d: hæc uero minor eſt propoſita ſolida magnitudine.

Itaque his præmiſſis demonſtrabimus ea, quæ de figuris propoſita ſunt.

PROPOSITIO XXIII.

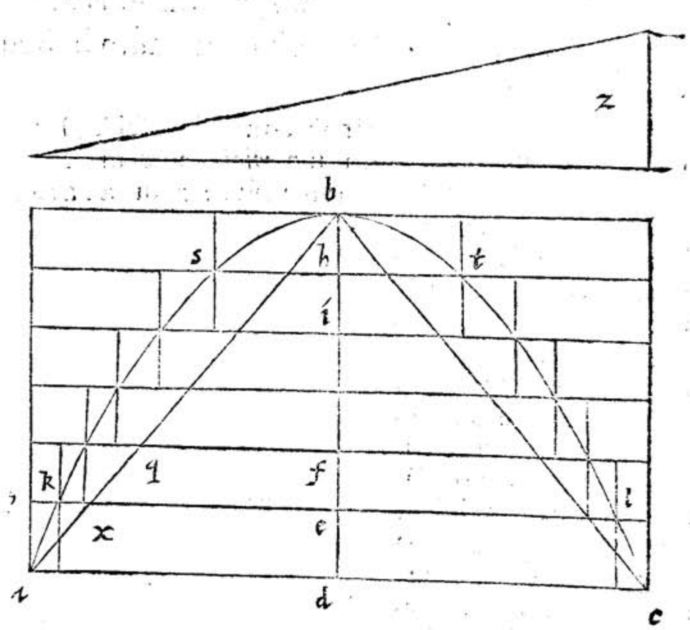
Qvælibet portio rectanguli conoidis abſciſſa plano ſuper axem erecto, ſeſquialtera eſt coni baſim habentis eandem portioni, & eundem axem.

Sit enim portio rectanguli conoidis abſciſſa plano erecto ſuper axem. & ſecta ipſa altero plano per axem, ſit ſuperficiei quidem ſectio a b c rectanguli coni ſectio: plani uero abſcindentis portionem ſit recta linea c a: & axis portionis b d: ſit item conus eandem baſim habens portioni, & axem eundem, cuius uertex b. Oſtendendum eſt conoidis portionem ſeſquialteram eſſe huius coni. ponatur enim conus z ſeſquialter coni, cuius baſis eſt circulus circa diametrum a c, & axis b d. Sit autem & cylindrus baſim habens circulum circa diametrum a c, & axem b d. erit igitur conus z dimidium totius cylindri: quoniam eiuſdem coni eſt ſeſquialter. Dico portionem conoidis æqualem eſſe z cono. Si enim non eſt æqualis, uel maior erit, uel minor. Sit primum maior, ſi fieri poteſt. & inſcribatur figura ſolida in portione: & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus conſtans: ita ut circumſcripta figura excedat A



inſcriptam

inſcriptam magnitudine minori ea, qua portio conoidis excedit conum z: & cylin
drorum, quibus conſtat figura circumſcripta maximus quidem ſit, qui baſim habet
circulum circa diametrum a c, & axem e d; minimus uero, qui baſim habet circu-
lum circa diametrum s t, & axem b h: cylindrorum autem, quibus figura inſcri-
pta conſtat, maximus ſit baſim habens circulum circa diametrum k l, & axem d e;
& minimus, qui baſim habet circulum circa diametrum s t, & axem h i. Itaque pro
ducantur plana cylindrorum omnium ad ſuperficiem cylindri baſim habentis circu-
lum circa diametrum a c, & axem b d. erit totus cylindrus diuiſus in cylindros nu-
mero quidem æquales iis, qui ſunt in circumſcripta figura, magnitudine uero maxi
B mo ipſorum æquales. Et quoniam circumſcripta figura minus excedit inſcriptam,
C quàm portio conum: perſpicuum eſt figuram inſcriptam cono z maiorem eſſe. pri-
mus autem cylindrus eorum, qui in toto ſunt cylindro, axem habens d e ad primũ
cylindrum eorum, qui ſunt in figura inſcripta, cuius axis d e, eandem habet pro-
D portionem, quam d a ad k e poteſtate. hæc autem eadem eſt ei, quam b d ha-
E bet ad b e, & ei, quam d a ad e x. ſimiliter oſtendetur & ſecundus cylindrus eorum,
F qui ſunt in toto cylindro axem habens e f ad ſecundum cylindrum eorum, qui in fi-
gura inſcripta, eandem habere proportionem, quam p e, hoc eſt d a ad q f. & alio
rum cylindrorum unuſquiſque, qui in toto ſunt cylindro ad cylindrum in figura in-
ſcripta, cuius idem ſit axis, eam proportionem habebit, quam dimidia diametri ba
G ſis habet ad eam ipſius partem, quæ inter a b, b d rectas lineas interiicitur. & om-
nes cylindri, qui in eo cylindro continentur, cuius baſis eſt circulus circa diame-
trum a c, & axis d b ad omnes cylindros in figura inſcripta contentos eandem ha-
bebunt proportionem,
quam omnes ſemidiame
tri circulorum, qui ſunt
in baſibus dictorum cy-
lindrorum ad omnes re-
ctas lineas inter a b & b d
interiectas. Dictæ uero
ſemidiametri ſunt dicta-
rum linearum dempta a
d, maiores, quàm duplæ.
H quare & cylindri omnes,
qui in toto ſunt cylindro,
cuius axis d b maiores
ſunt, quàm dupli inſcri-
I ptæ figuræ. Totus igitur
cylindrus, cuius axis d b
maior eſt, quàm duplus
inſcriptæ figuræ. erat au
tem coni z duplus. ergo
inſcripta figura minor eſt
cono z: quod fieri non
poteſt; nanque oſtenſa

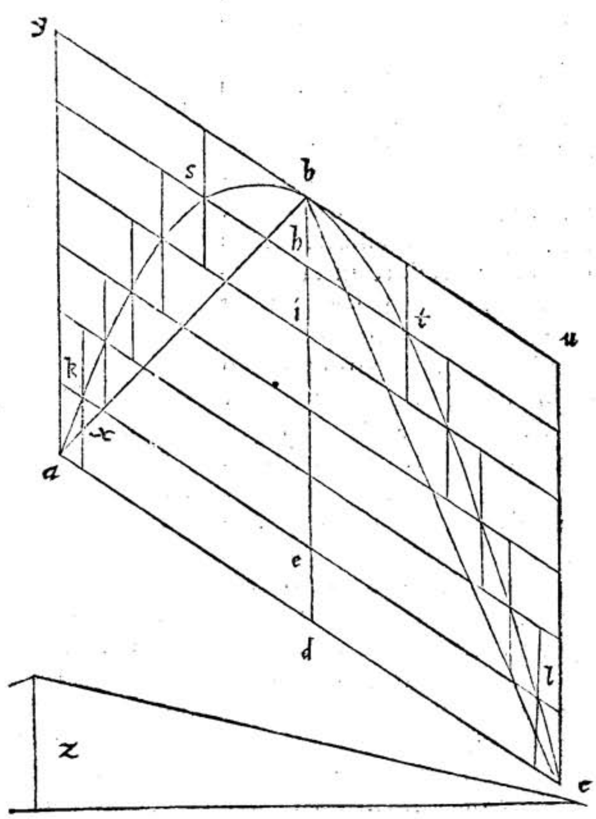


eſt maior. non eſt igitur portio conoidis maior cono z. ſed neque minor. Rurſus
enim inſcribatur figura, & circumſcribatur: ita ut altera alteram excedat magnitu-
dine minori ea, qua conus z excedit conoidis portionem: & alia eadem prioribus
K conſtruantur. Quoniam igitur inſcripta figura minor eſt portione: & inſcripta à cir
cumſcripta minus exceditur, quàm portio à cono: manifeſtum eſt circumſcriptam
minorem eſſe cono z. Rurſum primus cylindrus eorum, qui ſunt in toto cylindro,
axem habens d e ad primum cylindrum, qui eſt in figura circumſcripta, cuius idem
axis d e, eam habet proportionem, quam quadratum a d ad ſemetipſum. ſecundus
autem cylindrus eorum, qui ſunt in toto cylindro axem habens e f ad ſecundum cy
lindrum in figura circumſcripta, axem habentem eandem e f, eam habet proportio
nem

nem, quam d a ad k e poteſtate. hæc autem eadem eſt ei, quam habet b d ad b e; & quam d a ad e x. & aliorum cylindrorum unuſquiſque, qui in toto ſunt cylindro axem habentium æqualem ipſi d e ad unumquemque cylindrum eorum, qui ſunt in figura circumſcripta, quorum idem axis eſt, eam habebunt proportionem, quam dimidia baſis, ad eam ipſius partem, quæ inter a b, b d rectas lineas interiicitur. er- I.
go & omnes cylindri, qui in toto cylindro ſunt, cuius axis d b ad omnes cylindros in figura circumſcripta contentos eandem habebunt proportionem, quam omnes rectæ lineæ ad omnes rectas lineas. omnes autem rectæ lineæ ex centris circulorum, qui ſunt cylindrorum baſes, linearum omnium, quæ ab ipſis abſcinduntur unà cum a d, minores ſunt, quàm duplæ. conſtat igitur & cylindros omnes, qui ſunt in toto cylindro, minores eſſe, quàm duplos cylindrorum, qui in circumſcripta figura continentur. Quare cylindrus baſim habens circulum circa diametrum a c, & axim b d minor eſt, quàm duplus circumſcriptæ figuræ. non eſt autem minor, ſed maior, quàm duplus: eſt enim duplus coni z: & figura circumſcripta minor oſtenſa eſt cono z. non eſt igitur conoidis portio cono z minor. ſed neque maior, ut oſtenſum eſt. ſequitur ergo, ut ſeſquialtera ſit coni, qui baſim habet eandem portioni, & axem eundem.

PROPOSITIO XXIIII.

SI à rectangulo conoide portio abſcindatur plano non erecto ſuper axem: ſimiliter ſeſquialtera erit portionis coni, baſim habentis ipſi eandem, & eundem axem.



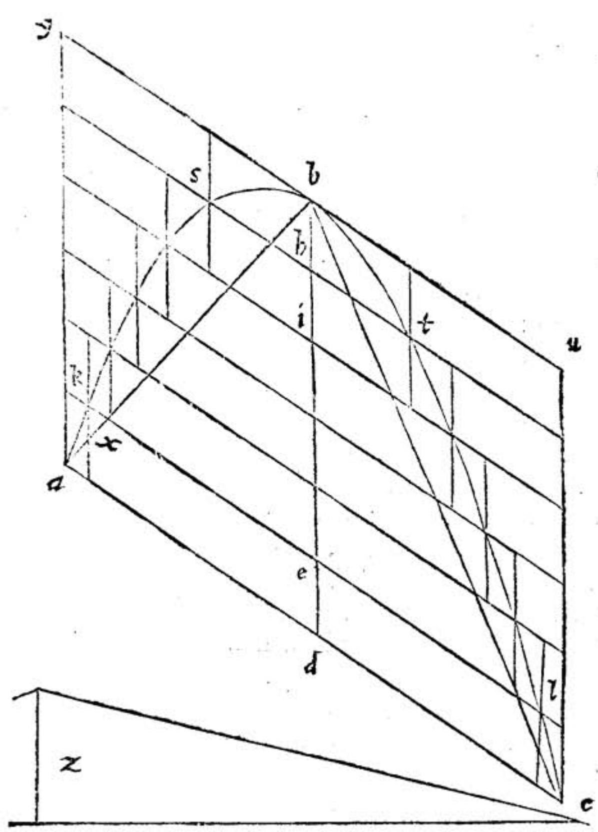
A

B

C

Sit portio rectanguli conoidis abſciſſa, ut dictum eſt: & ipſo ſecto plano per axem, erecto ſuper planum abſcindēs portionem, figuræ quidem ſectio ſit a b c rectanguli coni ſectio: plani autem portionem abſcindentis ſit a c recta linea: & ducatur y u æquidiſtans ipſi a c, contingensq; rectāguli coni ſectionem in b: ducatur item b d axi æquidiſtans, quæ lineam a c bifariam ſecabit: planum autem ab y u attollatur æquidiſtans plano ſecundum a c. continget hoc conoides in b: & erit portionis uertex b punctum, & axis b d. Quoniam igitur planum ſecundum a c non erectum ſuper axem ſecuit conoides: ſectio eſt acutianguli coni ſectio, cuius maior diameter a c. Et cum acutianguli coni ſectio ſit circa diametrum a c: & recta linea b d à centro ſectionis coni acutianguli eleuata, nō perpendicularis in plano ex diametro erecto ſuper planum, in quo acutianguli coni ſectio exiſtit: fieri poteſt, ut cylindrus inuenia tur axem habens in recta linea b

d; in cuius superficie sit acutianguli coni sectio. fieri itidem potest, ut & conus inueniatur uerticem habens b punctum, in cuius superficie sit ipsa acutianguli coni sectio. eritq; portio cylindri quædam basim habens sectionem coni acutianguli circa diametrum a c, axem autem b d: & coni item portio basim habens eandem ipsis, & eundem axem. Ostendendum est conoidis portionem sesquialteram esse portionis huius coni. Sit enim z conus sesquialter dictæ portionis. erit iam cylindri portio basim habens eandem portioni conoidis, & axem eundem, dupla coni z. nanque hic sesquialter est portionis coni, quæ basim habet eandem portioni conoidis, & eũ
11.huius dem axem: portio autem coni dicta tertia pars est portionis cylindri basim habentis eandem portioni, & axem eundem. Itaque necessarium est, conoidis portionem æqualem esse cono z. Si enim non est æqualis, uel maior est, uel minor. Sit primum si fieri potest, maior: inscribaturq; portioni quædam solida figura, & altera circumscribatur ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus; ita ut circumscripta figura inscriptam excedat minori excessu, quã quo portio conoidis excedit conũ
E z. & plana portionum pertingent ad superficiem portionis, basim habentis eandem portioni conoidis, & axem eundem. Rursus prima portio earũ, quæ sunt in tota portione axem habens d e ad portionem primam in figura inscripta, cuius axis d e eãdem proportionem habet, quam quadratum a d ad quadra
F tum k e. nam portiones æqualem habentes altitudinem ad in
G uicem sunt, sicuti bases: bases autem, quoniam similes acutiangulorũ conorum sectiones sunt, eandem proportiouem, quam ipsarum diametri eiusdẽ rationis potestate inter se habent. At ipsæ a d, k e dimidiæ sunt diametrorum eiusdem rationis: & quam proportionem
H a d habet ad k e potestate, eandem habet b d ad b e longitudine: quoniam b d æquidistat diametro, & a d, k e æquidistant ei, quæ in ipso b puncto sectionem contingit. Quam uero proportionem habet b d ad b e eandem a d habet ad e x. ergo prima portio earum, quæ sunt in tota portione, ad portionem primam, quæ in figura inscripta, eandem proportionem habebit, quã a d ad e x. & unaquæque aliarum portionum, quæ sunt in tota portione, axem habentium æqualem ipsi d e ad unamquanque portionnm, quæ sunt in figura inscripta, quarum idem axis, eandem proportionem habet, quam dimidia diametri basium ad eam ipsius partem, quæ inter a b, b d rectas lineas interiicitur. Ostendetur autem similiter antecedentibus, inscriptã figuram cono z maiorem esse: & cylindri portionem, quæ basim habet eandem portioni conoidis, & axem eundem, maiorem esse, quàm duplam figuræ inscriptæ. quare & maior erit, quàm dupla coni z: quod fieri non potest: erat enim dupla ipsius. non ergo conoidis portio maior est cono z. Eadem



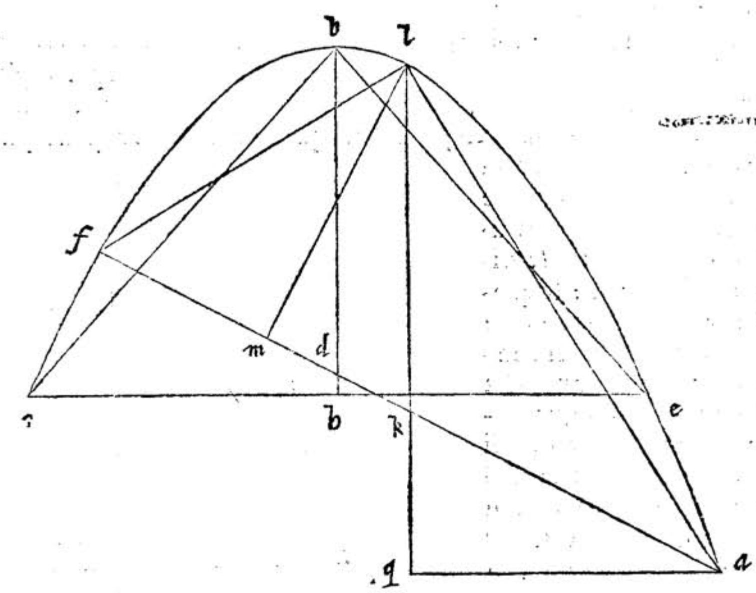
dem

dem ratione neque minor ostendetur. ex quibus æqualem esse constat. conoidis igitur portio sesquialtera est portionis coni basim habẽtis eadem ipsi, & axem eundẽ.

PROPOSITIO XXV.

SI rectanguli conoidis duæ portiones abscindantur; altera quidem plano super axem erecto, altera autem non erecto: et sint portionum axes æquales: ipsæ quoque portiones æquales erunt.

ABSCINDANTUR enim rectanguli conoidis duæ portiones, ut dictum est: sectoq; conoide plano per axem, et altero plano super axem erecto, sit conoidis sectio a b c rectanguli coni sectio, cuius diameter, b d: sectiones autem planorum sint a f, e c rectæ lineæ; plani quidem super axem erecti ipsa e c; non erecti uero a f: axes portionum sint b h, k l, æquales inter sese: et uertices puncta b l. Ostendendum est, portionem conoidis, cuius uertex b portioni eiusdem, cuius uertex l æqualem esse. Quoniã enim ab eadem rectanguli coni sectione duæ portiones abscinduntur, uidelicet a l f, e b c: et sunt ipsarum diametri k l, h b æquales: triangulum a l k æquale erit triangulo e h b: ostensum enim est a l f triangulum triangulo e b c æquale esse. ducatur a q perpendicularis ad ipsam k l productam. et quoniam sunt æquales b h, k l: et ipsæ e h, a q æquales erunt. Itaque in portione, cuius uertex b, descriptus sit conus, basim habens eandem portioni, & axem eundem: in portione autem, cuius uertex l sit descripta coni portio, quæ eandem ipsi basim habeat, et eundem axem: et ducatur ab l perpendicularis l m ad d f. erit ipsa l m altitudo portionis coni, cuius uertex l. Sed coni portio, cuius uertex l: et conus, cuius uertex b habent inter se proportionem compositam ex proportione basium, et proportione altitudinum. proportionem igitur habent compositam ex ea, quam spatium acutianguli coni sectione contentum circa diametrum a f habet ad circulum circa diametrum e c: et ex ea, quam habet l m ad b h. spatium autem acutianguli coni sectione contentum ad eundem circulum eam proportionem habet, quam rectangulum ex diametris sectionis ad quadratum e c. quare portio coni, cuius uertex l ad conum, cuius uertex b compositam habet proportionem ex ea, quam habet k a ad e h; et ex ea, quam l m ad b h. etenim k a dimidia est diametri basis portionis coni, cuius uertex l: & e h dimidia diametri basis coni: & ipsæ l m, b h sunt earum altitudines. habet autem l m ad b h eandem proportionem, quam & ad k l; quoniam b h ipsi k l est æqualis: habetq; l m ad k l eam, quam q a ad a k. & portio coni ad conum compositam habet proportionem ex ea, quam habet a k ad a q; æqualis enim est a q ipsi e h: & ex ea, quam l m ad b h. Earum autem proportionum, quæ est a k ad a q eadem



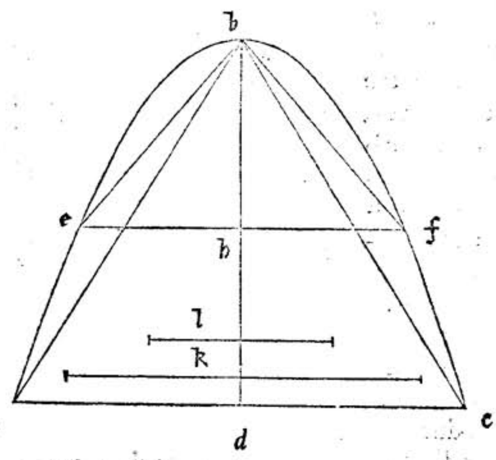
4.huius
A
B
6.huius
C
D
E

dem est ei, quæ l k ad l m. Quare portio coni ad conum proportionem habet eam, quam l k ad l m, & quam l m ad b h. & est æqualis b h ipsi k l. perspicuum est igitur portionem coni, cuius uertex l æqualem esse cono, cuius uertex b. unde apparet portiones quoque esse æquales: quoniam altera quidem earum coni sesquialtera est; altera uero sesquialtera portionis coni, illis inter sese æqualibus existentibus.

PROPOSITIO XXVI.

Si rectanguli conoidis duæ portiones abscindãtur planis quomodocunque ductis: portiones eandem inter sese proportionem habebunt, quam ipsarum axium quadrata.

ABSCINDANTUR enim rectanguli conoidis duæ portiones, utcunque contigerit: sitq; k linea æqualis axi unius portionis: & l axi alterius æqualis. Ostendendum est, portiones eandem inter se proportionem habere, quam habent k l quadrata. Itaque secto conoide plano per axem, sit portionis sectio a b c rectanguli coni sectio, cuius axis b d: sumaturq; b d æqualis ipsi k: & per d planum ducatur super axem erectum. portio autem conoidis basim habens circulum circa diametrum a c, & axem b d æqualis est portioni, quæ axem habet æqualẽ ipsi k. Si quidem igitur & k æqualis est ipsi l: constat portiones quoque esse æquales inter se: utraque enim uni, & eidem est æqualis; & quadrata k l æqualia. quare portiones eandem inter se proportionem habebunt, quam quadrata axium. Si uero l ipsi k non est æqualis: sit l æqualis ipsi b h: & per h ducatur planum super axem erectum. portio autem basim habens circulum circa diametrum e f, & axem b h æqualis est portioni, quæ axem habet æqualem ipsi l. Describantur duo coni, quorum bases quidem sint circuli circa diametros a c, e f, uertex autem punctum b. Itaque conus, cuius axis b d ad conum, cuius axis b h proportionem habet compositam ex ea, quam habet a d ad h e potestate: & ex ea, quam b d ha-



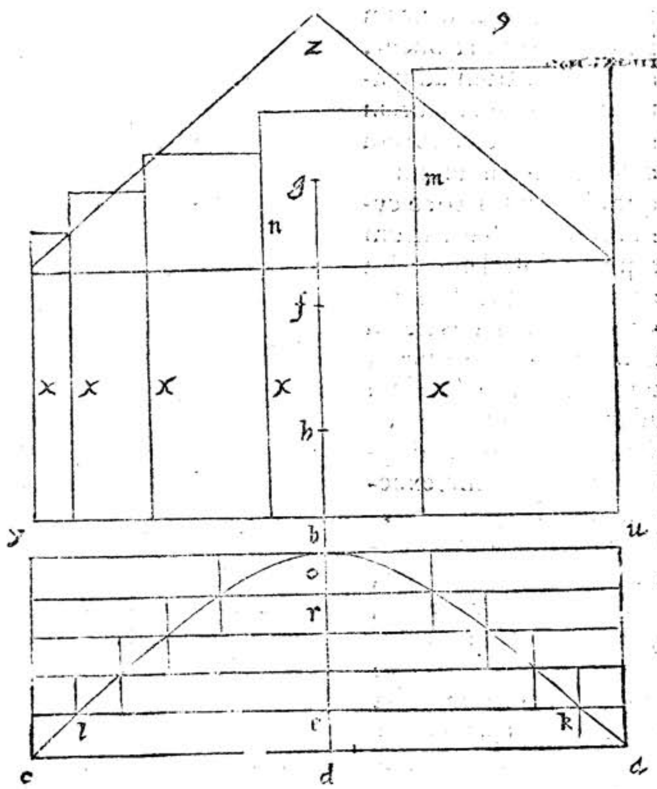
B bet ad b h longitudine. Quam uero proportionem habet a d ad h e potestate, eandem habet longitudine b d ad b h. Conus igitur, cuius axis b d ad conum, cuius axis b h compositam habet proportionem ex ea, quam habet d b ad h b: & ex ea,

C quam d b ad h b: hæc autem eadem est ei, quam d b quadratum habet ad quadratum h b. At quam proportionem habet conus, cuius axis b d ad conum, cuius axis h b, eandem habet portio conoidis axem habens d b ad portionem habentem axem h b; utraque enim sesquialtera est. & portioni quidem axem habenti b d æqualis est portio conoidis axem habens æqualem ipsi k: portioni uero axem habenti h b æqualis est conoidis portio, quæ axem habet æqualem ipsi l: & ipsi quidem b d æqualis est k: ipsi uero h b æqualis l. perspicuum est igitur portionem conoidis, quæ axem habet æqualem ipsi k eandem proportionem habere ad portionem conoidis, quæ axem habet æqualem ipsi l, quam quadratum k ad quadratum l.

PROPOSITIO XXVII.

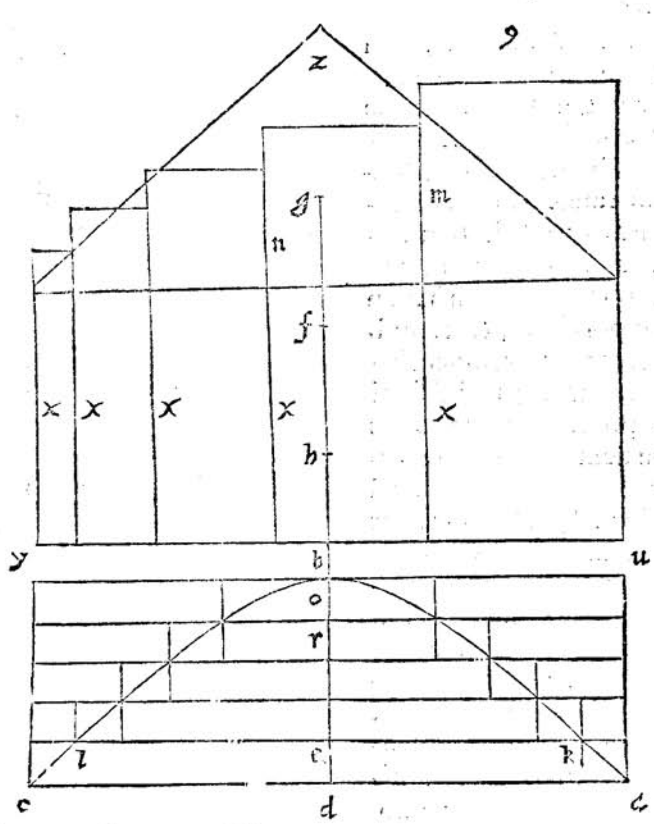
QVælibet portio obtuſianguli conoidis abſciſſa plano ſuper axem erecto ad conum baſim eandem habentem ipſi, & axem eundem, eam proportionem habet, quam utraque linea: & quæ eſt æqualis axi portionis, & quæ tripla lineæ ad axem adiectæ, habet A
ad lineam utriſque æqualem: & axi portionis, & ei, quæ dupla eſt lineæ ad axem adiectæ.

SIT portio obtuſianguli conoidis abſciſſa plano ſuper axem erecto: & ſecto ipſo conoide altero plano per axem, ſit conoidis quidem ſectio a b c obtuſianguli coni ſectio: plani uero abſcindentis portionem, ſit c a recta linea: axis portionis b d: linea ad axem adiecta b h: & ipſi b h æqualis ſit f h, & f g. Oſtendendum eſt, portionem ad conum, qui baſim eandem habet portioni, & eundem axem, eam proportionem habere, quam g d ad f d. Itaque ſit cylindrus eandem baſim habens portioni, & axem eundem, cuius latera u a, c y: & ſit item conus aliquis z, qui ad conum baſim eandem habentem portioni, & axem b d, eam proportionem habeat, quam g d ad d f. dico portionem conoidis æqualem eſſe z cono. Si enim non eſt æqualis, uel maior eſt, uel minor. Sit primum, ſi fieri poteſt, maior: Inſcribaturq; in portione figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus conſtans; ita ut circumſcripta figura inſcriptam excedat minori exceſſu, quàm quo portio conoidis excedit z conum. Educantur plana omnium cylindrorum ad ſuperficiem cylindri eius, qui baſim habet circulum circa diametrum a c, & axem b d. erit iam totus cylindrus diuiſus in cylindros numero quidem æquales iis, qui ſunt in figura circumſcripta, magnitudine autem maximo illorum æquales. Et quoniam B
circumſcripta figura inſcriptam minus excedit, quàm portio conum z: & circumſcripta figura maior eſt ipſa portione: ſequitur & figuram inſcriptam cono z maiorem eſſe. Sit igitur b r tertia pars ipſius b d. erit g d ipſius h r tripla. Et quoniam C. D
cylindrus baſim habens circulum circa diametrum a c, & axem b d, ad conum baſim habentem eandem, & eundem axem, eam proportionem habet, quam g d ad h r: habet autem & dictus conus ad conum z eam, quam f d ad g d: proportioni- E
bus non ſimiliter ordinatis, habebit dictus cylindrus ad z conum proportionem



 eandem,

eandem, quam f d ad h r. sint lineæ positæ, in quibus x, numero quidem æquales partibus, quæ sunt in linea b d, magnitudine uero unaquæque ipsi f b æqualis: & ad unamquanque ipsarum accedat spatium excedens specie, quadrato; quorum maximum sit rectangulo f d b æquale, minimum æquale ipsi f o b: latera autem excessuum æqualiter se se excedunt: nam quæ sunt ipsis æquales in linea b d se se æqualiter excedunt: & sit excessus maximi latus, in quo m æquale b d, minimi uero æquale b o. Sint & alia spatia, in quibus 9, numero quidem ipsis æqualia, magnitudine uero unumquodque æquale maximo, quod lineis f d, d b continetur. Itaque cylindrus basim habens circulum circa diametrum a c, & axem d e ad cylindrum habentem basim circulum circa diametrum k l, & axem d e, eam habet proportionem, quam d a ad k e potestate. hæc autem eadem est ei, quam habet rectangulum f d b ad
F rectangulum f e b. quod in omni obtusianguli coni sectione contingit; nam dupla eius, quæ ad axem adiecta est, hoc est eius, quæ ex centro, transuersum est figuræ latus. & est rectangulo f d b æquale spatium x m: & rectangulo f e b æquale x n; quòd linea x æqualis sit lineæ f b: linea uero n ipsi b e, & m ipsi b d. Cylindrus igitur basim habens circulum circa diametrum a c, & axem d e ad cylindrum, cuius basis circulus circa diametrum k l, & axis d e, eam habebit proportionem, quam 9 spatium ad spatium x n. similiter autem ostendetur, & aliorum cylindrorum unusquisque, qui sunt in toto cylindro, axem habentium æqualem ipsi d e ad cylindrum in figura inscripta, cuius idem sit axis, eam habere proportionem, quam habet 9 spatium ad spatium sibi respondens eorum, quæ ad ipsam x accesserunt, excedens specie quadrato. itaq; magnitudines quædam sunt, cylindri ipsi, qui in toto sũt cylindro; quorum unusquisque axem habet æqualem d e: & aliæ magnitudines, spatia, in quibus 9, numero ipsis æqualia, & secundum quæque duo proportionem eandem habentia; quoniam & cylindri æquales sunt inter se se; & spatia item 9 inter se se æqualia. referunturq; horum cylindrorum aliqui ad alios cylindros, qui sunt in figura inscripta: extremus autem ad nullum refertur. & spatiorum, in quibus 9 aliqua referuntur ad alia spatia, quæ ad x accesserunt, excedentia specie, quadrato, & proportionibus respondentia: extremum uero ad nullum refertur. manifestum ergo est, &



G omnes cylindros, qui in toto cylindro sunt ad cylindros omnes in figura inscripta cõtentos, eandem habere proportionem, quam omnia spatia 9 ad omnia accedentia
H ad x, dempto maximo. ostensum est autem, omnia spatia 9 ad illa omnia, dempto
I maximo, maiorem habere proportionem, quàm linea m x ad lineam utrisque æqualem.

lem. & dimidiæ ipsius x; & tertiæ parti m. Quare & totus cylindrus ad inscriptam figuram maiorem proportionem habet, quàm f d ad h r. quam quidem proportionem cylindrus totus habet ad conum z, ut ostensum est. maiorem ergo proportionem habet cylindrus totus ad figuram inscriptam, quàm ad conum z: & propterea maior est conus z figura inscripta: quod fieri non potest. ostensum est enim figuram inscriptam z cono maiorem esse. non est igitur conoidis portio maior cono z, sed neque minor. Sit enim minor, si fieri potest. Rursus inscribatur in portione solida figura, & altera circumscribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus; ita ut circumscripta inscriptam excedat minori excessu, quàm quo conus portionem excedit: & alia eadem construantur. Quoniam igitur inscripta figura minor est portione: & circumscripta minus excedit inscriptam, quàm conus z portionē; constat & circumscriptam figuram minorem esse cono z. Rursus cylindrus primus eorum, qui sunt in toto cylindro, axem habens d e, ad primum cylindrum in circumscripta figura contentum, cuius axis d e, eam proportionem habet, quam spatium 9 ad ipsum m x: utrunque enim est æquale, & aliorum cylindrorum unusquisque, qui sunt in toto cylindro, axem habentium æqualem d e, ad cylindrum, qui est in circumscripta figura secundum ipsum, & axem habet eundem, eam habebit proportionem, quam spatium 9 ad spatium sibi respondens eorum, quæ ad x accesserunt unà cum excessu: quoniam unumquodque circumscriptorum dempto maximo, æquale est unicuique inscriptorum unà cum maximo. habebit igitur & totus cylindrus ad circumscriptam figuram eam proportionem, quam omnia spatia 9 ad spatia, quæ ad x accesserunt unà cum excessibus. Ostensum est autem rursus omnia spatia 9 ad alia omnia minorem proportionem habere, quàm x m ad lineam æqualem utrisque: & dimidiæ x, & tertiæ parti m. quare & totus cylindrus ad circumscriptam figuram minorem habebit, quàm f d ad h r. sed ut f d ad h r, ita totus cylindrus ad z conum. minorem igitur proportionem habet idem cylindrus ad circumscriptam figuram, quàm ad z conum; & idcirco circumscripta figura maior erit z cono: quod esse non potest, cum ostensum sit circumscriptam figuram z cono maiorem esse. non igitur minor est conoidis portio cono z. Quoniam autem neque maior est, neque minor: ostensum iam erit, quod proponebatur.

K

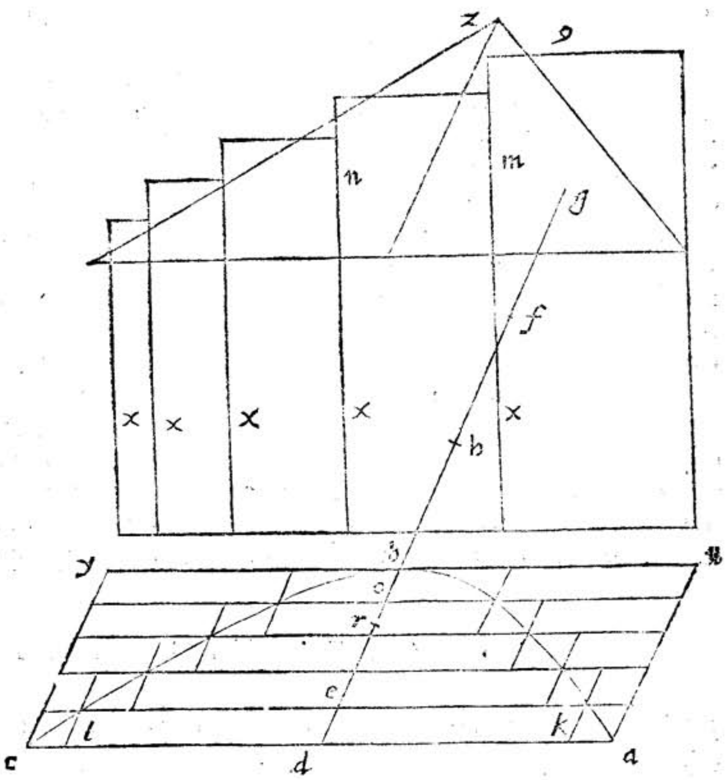
L

PROPOSITIO XXVIII.

SI obtusianguli conoidis portio abscindatur plano super axem non erecto: habebit ad portionem coni, quæ basim habet ipsi eandem, & axem eundem, eam proportionem, quam linea utrisque æqualis: & axi portionis, & triplæ eius, quæ adiecta est ad axem, ad lineam æqualem utrisque; & axi portionis, & ei, quæ dupla est lineæ ad axem adiectæ.

Sit enim portio obtusianguli conoidis abscissa plano, ut dictum est: & secta figura altero plano per axem, erecto super planum portionem abscindens, sit figuræ quidem sectio a b c obtusianguli coni sectio: plani uero abscindentis portionem recta linea c a: & uertex coni continentis conoides sit h punctum. ducaturq; per b linea u y æquidistans lineæ a c: & contingens coni sectionem in b: & ab h ad b linea ducta producatur. secabit eadem ratione bifariam ipsam a c: & erit b punctum A
portionis uertex: axis b d: & b h linea ad axem adiecta. ipsi autem b h æqualis sit & h f & f g: & ab ipsa u y planum attollatur æquidistans plano secundum a c; quod co- B
noides in b puncto continget. Et quoniā planū secundum a c, non erectum super axē secuit conoides: sectio erit acutiāguli coni sectio, cuius diameter maior c a. Itaq; cū C
acutianguli coni sectio sit circa diametrū a c: & linea b d à cētro sit eleuata nō perpēdicularis

dicularis in plano, quod est à diametro ipsa erectum super planum, in quo acutianguli coni sectio consistit: cylindrum inuenire poterimus habentem axem in recta linea b d; in cuius superficie sit acutianguli coni sectio circa diametrum a c. hoc igitur inuento, erit aliqua portio cylindri basim habens eandem portioni conoidis, &
E eundem exem; cuius altera basis erit planum secundum u y. Rursus & conum inuenire poterimus uerticem habentem punctum b; in cuius superficie sit acutianguli co
F ni sectio, circa diametrum a c. hoc inuento erit portio coni basim habens eandem dictis portionibus, & axem eundem. Ostendendum est, conoidis portionem ad portionem coni dictam, eandem proportionem habere, quam g d ad d f. Quam ue
G ro proportionem habet g d ad d f, habeat conus z ad portionem coni. Dico portionem conoidis cono z esse æqualem: si enim nõ est æqualis, sit maior si fieri potest. inscribatur autem in conoidis portione figura solida, & altera circumscribatur, ex cylindrorum portionibus eandem altitudinem habentibus: ita ut circumscripta figura excedat inscriptam minori excessu, quàm quo portio conoidis excedit conum z. Quoniam igitur circumscripta figura, quæ portione maior est, minus excedit inscriptam, quàm portio conum z: sequitur inscriptam figuram cono z maiorem esse. educantur plana portionum omnium in figura inscriptarum. pertingent ea, ad superficiem portionis cylindri basim habentis eandem portioni conoidis, & axem eundem. & sit b r pars tertia ipsius b d: & alia eadem superioribus fiant. Rursus prima portio earum, quæ sunt in tota cylindri portione, habens axem d e ad primam portionem in figura inscripta, axem habentem d e, eam habet proportionem, quam a d quadratum ad quadratum k e. portiones enim, quarum altitudo est æqualis, eam inter se propor
H tionem habent, quam ipsarum bases. bases autem cum similes acutiangulorum conorum sectioues sint, habent eam, quam eiusdem rationis diametri potestate inter
I se habent. Quam uero proportionem quadratum a d habet ad quadratum k e, ean
K dem habet rectangulum f d b ad rectangulum f e b; quoniam f d ducta est per h, in quo lineæ, quæ sunt sectioni proximæ conueniunt: & ipsæ a d, k e æquidistantes sunt ei, quæ in puncto b contingit. est autem rectangulum f d b æquale spacio 9: & rectangulum f e b æquale ipsi x n. quare prima portio earum, quæ sunt in tota portione, axem habens d e ad primam portionem in figura inscripta habentem axem d e,



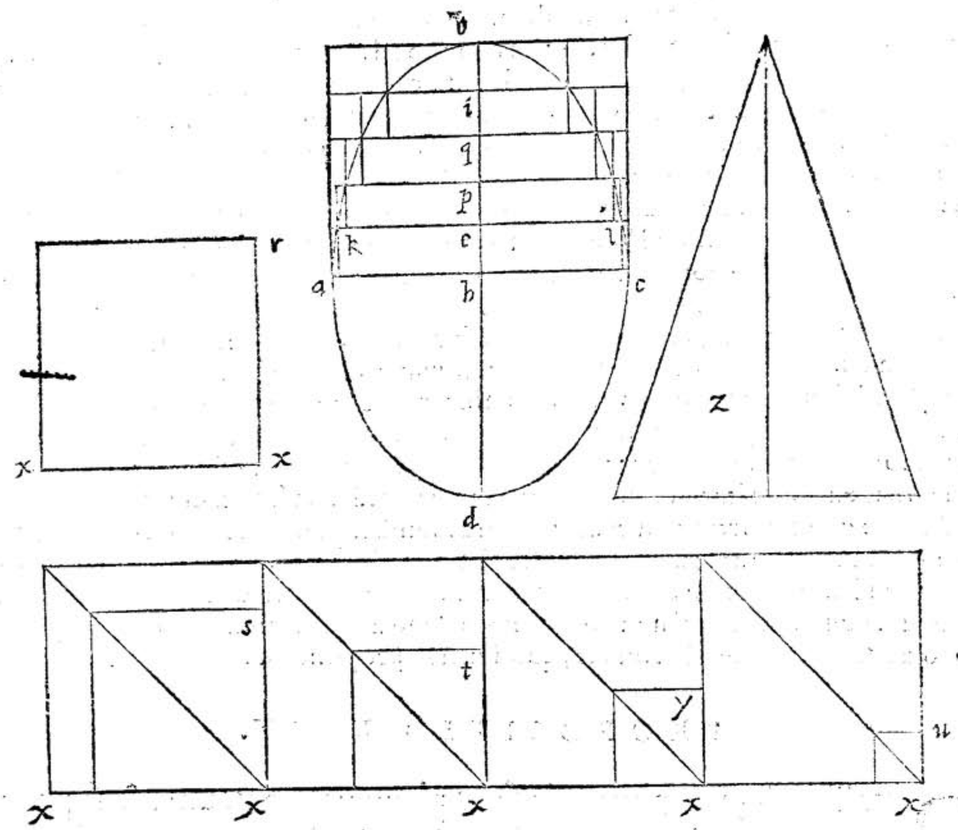
d e, eandem habet proportionem, quam ſpatium 9 ad x n ſpatium: & unaquæque aliarum portionum, quæ ſunt in tota portione, axem habentium æqualem ipſi d e ad portionem in figura inſcripta, quæ eſt ſecundum ipſam, & axem habet ipſi d e æqualem, eam proportionem habet, quam ſpatium 9 ad ſpatium ſibi reſpondens eorum, quæ ad x acceſſerunt, excedunt'q; ſpecie, quadrato. Rurſus ſunt quædam magnitudines, portiones ſcilicet in tota portione contentæ: & aliæ item magnitudines, ſpatia in quibus 9, numero quidem æquales portionibus, & ſecundum quaſque duas eandem ipſis proportionem habent: referunturq; portiones ad portiones alias, quæ ſunt in figura inſcripta: ſed extrema portio ad nullam refertur. ſpatia uero 9 ad alia ſpatia referuntur, quæ ad x acceſſerunt, excedentia ſpecie quadratis, & portionibus reſpondentia; extremum autem ad nullum refertur. Perſpicuũ eſt igitur & omnes portiones ad alias omnes eandem habere proportionem, quam ſpatia omnia 9 ad omnia, quæ ad x acceſſerunt, dempto maximo. At uero ſpatia 9 omnia ad omnia, quæ ad x acceſſerunt, dempto maximo, maiorem habent proportionem, quàm linea m x ad lineam æqualem utriſque; & dimidiæ x & tertiæ parti ipſius m. Quare tota portio ad inſcriptam figuram maiorem proportionem habet, quàm linea x m ad eam, quæ utriſque eſt æqualis; & dimidiæ x; & tertiæ parti m: & propterea maiorem, quam f d ad h r. maiorem igitur proportionem habet tota portio ad inſcriptam figuram, quàm ad z conum: quod fieri non poteſt. oſtenſum nanque eſt figuram inſcriptam cono z maiorem eſſe. non ergo maior eſt conoidis portio cono z: Quòd ſi conoidis portio cono z minor ponatur, inſcripta in portione ſolida figura, & altera circumſcripta ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus: ita ut circumſcripta figura excedat inſcriptam minori exceſſu, quàm quo conus portionem excedit: rurſus ſimiliter oſtendetur, circumſcriptam minorem eſſe cono z; & cylindri portionem, quæ baſim habet portioni eandem, & axem eundem ad figuram circumſcriptam minorem proportionem habere, quam ad z conum; quod item fieri non poteſt. non eſt igitur neque minor conoidis portio cono z. Quare manifeſte conſtat, quod fuerat propoſitum.

PROPOSITIO XXIX.

Qualibet figura ſphæroide ſecta plano per centrum, & ſuper axem erecto, dimidium ſphæroidis duplum eſt coni baſim habentis portioni eandem, & axem eundem.

Sit enim ſphæroidis figura ſecta plano per centrum, & ſuper axem erecto: & ipſa ſecta altero plano per axem, ſit figuræ quidem ſectio a b c d acutianguli coni ſectio, cuius diameter, & axis ſphæroidis b d, centrum h. (nihil enim refert, utrum b d ſit maior diameter ſectionis coni acutianguli, an minor) plani uero ſecantis figuram, ſit ſectio recta linea c a. tranſibit ipſa per h: & rectos faciet angulos cum linea b d: quoniam planum ponitur per centrum duci, & erectum eſſe ſuper axem. Oſtendendum eſt dimidiam ſphæroidis portionem, quæ baſim habet circulum circa diametrum a c & uerticem b, duplam eſſe coni baſim habentis portioni eandem, & axem eundem. Sit enim conus aliquis, in quo z, duplus coni, qui baſim habet eandem portioni, & eundem axem, uidelicet h b. Dico dimidium ſphæroidis æquale eſſe cono z. ſi enim non eſt æquale. Sit primum maius, ſi fieri poteſt, & inſcribatur in dimidia portione ſphæroidis, ſolida figura, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus; ita, ut circumſcripta figura inſcriptam excedat minori exceſſu, quàm quo dimidium ſphæroidis excedit conum z. Quoniam igitur circũſcripta figura maior eſt dimidio ſphæroide: & minus excedit figuram inſcriptam, quàm dimidiũ ſphæroidis conum z: conſtat & inſcriptam in dimidia ſphæroidis portione figuram cono z maiorem eſſe. itaque ſit cylindrus baſim habens circulum circa diametrũ a c, axem uero b d, et quoniã hic cylindrus triplus eſt coni baſim habentis

tis portioni eandem, & axem eundem: & conus z duplus est eiusdem coni: sequitur cylindrum coni z esse sesquialterum. Educantur iam plana cylindrorum omnium, ex quibus constat inscripta figura. pertingent hæc ad cylindri superficiem, qui basim habet eandem portioni, & axem eundem: atque erit totus cylindrus diuisus in cylindros, numero quidem æquales iis, qui sunt in circumscripta figura, magnitudine uero æquales maximo illorum. Sint præterea lineæ positæ in quibus x x, numero



æquales partibus rectæ lineæ b h: & magnitudine ipsi b h æquales. Ab unaquaque autem illarum quadratum describatur. & ab extremo quadrato auferatur gnomon, latitudinem habens æqualem b i. erit hic æqualis rectangulo b i d. At uero à quadrato illi proximo gnomon auferatur, qui latitudinem habeat ipsius b i. duplam: atque erit hic rectangulo d q b æqualis: semperq; à quadrato sequente gnomon auferatur latitudinem habẽs una parte maiorem, quã sit latitudo gnomonis proxime ablati. erit ipsorum unusquisque æqualis rectangulo partibus b d contento; quarum altera pars gnomonis latitudini est æqualis; & à quadrato secundo reliquum erit quadratum latus habens æquale ipsi h e. Cylindrus autem primus eorum, qui sunt in toto cylindro axem habens b e ad primum cylindrum in figura inscripta, cuius idem est axis, eam habet proportionem, quam quadratum a h ad quadratum k e. quare & quam rectangulum b h d ad rectangulum b e d. ergo cylindrus ad cylindrum eam habet, quam primum quadratum ad gnomonem à secundo quadrato ablatum. Similiter & aliorum cylindrorum unusquisque axem habentium æqualem ipsi h e ad cylindrum in figura inscripta, cuius idem est axis, eam habet proportionem, quam quadratum ipsi respondens ad gnomonem à quadrato proxime sequenti ablatum. Sunt igitur magnitudines quædam, cylindri ipsi, qui in toto sunt cylindro; & aliæ magnitudines, quadrata, quæ fiunt à lineis x x, numero æquales cylindris; & quæque duæ eandem habent proportionem. referuntur autem cylindri ad alias magnitudines, ad cylindros scilicet, qui sunt in figura inscripta; at extremus ad nullũ refertur: & quadrata

drata itẽ referuntur ad alias magnitudines, ad gnomones à quadratis ablatos, respon dentia iisdem proportionibus; extremum autem quadratum ad nullum refertur. Quare omnes cylindri, qui in toto sunt cylindro, ad alios cylindros omnes eandem habebunt proportionem, quam omnia quadrata ad gnomones omnes ab ipsis abla tos. ergo cylindrus basim habens eandem portioni, & axem eundem, ad inscriptam figuram eam proportionem habet, quam quadrata omnia ad omnes gnomones ab ipsis ablatos. Quadrata autem, gnomonum omnium ablatorum ab ipsis maiora sunt, quàm sesquialtera. nam sunt quædam lineæ positæ x r, x s, x t, x y, x u sese æqualiter excedentes, & minima excessui est æqualis; sunt etiam aliæ lineæ, in quibus x x, numero quidem æquales illis, magnitudine uero unaquæque maximæ illarum æqualis. Quadrata igitur linearum omnium, quæ sunt æquales maximæ, quadratorum omnium linearum, quæ se se æqualiter excedunt, minora sunt, quàm tripla: reliquorum autem, dempto maximæ quadrato, maiora, quàm tripla. hoc enim in iis, C quæ de spiralibus lineis edidimus, demonstratum est. Quoniam autem quadrata om nia minora sunt, quàm tripla aliorum quadratorum, quæ ab ipsis ablata fuerunt: perspicuum est reliquorum spatiorum maiora esse, quàm sesquialtera. gnomonum igitur omnium maiora sunt, quam sesquialtera. quare & cylindrus basim habens eãdem portioni, & axem eundem, maior est, quàm sesquialter inscriptæ figuræ; quod fieri nullo modo potest. est enim coni z sesquialter: & inscripta figura maior ostensa est cono z. non ergo dimidium sphæroidis cono z maius erit. sed neque minus. Sit enim minus, si fieri potest. Rursus inscribatur in dimidio sphæroidis figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris, qui æqualem altitudinem habeant: ita ut circumscripta figura inscriptam minus excedat, quàm conus z dimidium sphæroidis. & alia eadem prioribus construantur. Quoniam igitur inscripta figura minor est portione: constat & circumscriptam cono z minorem esse. Rursum primus cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro, axem habens h e, ad primum cylindrum in figura circumscripta, cuius axis h e, eam habet proportionem, quam primũ qua dratum ad semetipsum. secundus autem cylindrus, eorum, qui in toto cylindro, ha bens axem e p ad secundum cylindrum in circumscripta figura, cuius axis e p, ean dem habet, quam quadratum secundum ad gnomonem ab ipso ablatum. & aliorum cylindrorum unusquisque, qui in toto cylindro sunt, axem habentium æqualem ipsi h e ad cylindrum in figura inscripta, qui est secundum ipsum, eandem proportionem habet, quam quadratum ei respondens ad gnomonem ab ipso ablatum. & omnes igitur cylindri, qui sunt in toto cylindro ad cylindros omnes, qui in figura circumscripta, eandem habebunt proportionem, quam quadrata omnia ad id, quod est æquale primo quadrato, & gnomonibus iis, qui a reliquis quadratis auferuntur. Quadrata autem omnia minora sunt, quàm sesquialtera eius, quod est æqua le primo quadrato, & gnomonibus, qui à reliquis sunt ablati; propterea, quòd qua dratorum, quæ fiunt à lineis se se æqualiter excedentibus, dempto eo, quòd à maxima, maiora sunt, quàm tripla. Cylindrus igitur basim habens eandem portioni, & eundem axem, minor est, quàm sesquialter circumscriptæ figuræ; quod fieri non potest: est enim coni z sesquialter; & circumscripta figura minor ostensa est z cono. non ergo dimidium sphæroidis cono z minus erit. & quoniam neque maius est, neque minus: necessario erit æquale.

PROPOSITIO XXX.

SI sphæroides figura secetur plano per centrum ducto, & non erecto super axem: similiter dimidium sphæroidis duplum erit portionis coni, quæ basim habeat portioni eandem, & eundem axem.

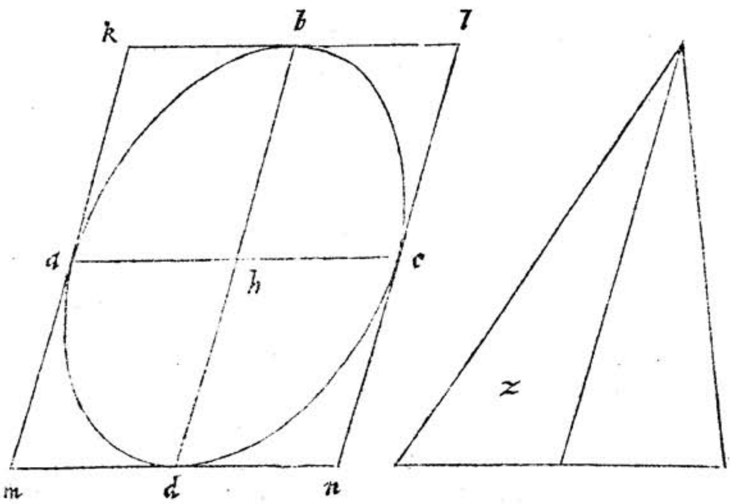
SECETUR enim figura sphæroides, ut dictum est: & ipsa secta altero plano per

M axem,

axem, erecto super planum secans, sit figuræ quidem sectio a b c d acutianguli con sectio, cuius centrum h: plani uero secantis figuram sit a c recta linea. transibit igitur ipsa per h; quoniam planum ponitur per centrum transire: atque erit acutianguli coni sectio quædam circa diametrum a c; cum positum sit planum secans non esse erectum super axem. Ducantur quædam lineæ k l, m n æquidistantes ipsi a c, contingentesq; acutianguli coni sectionem in punctis b d: & ab ipsis k l, m n plana attollantur æquidistantia plano secundum a c. continget hæc sphæroides in b d punctis: quæque ipsa b d iungit recta linea per h

A transibit: & erunt portionum uertices b d: axes uero b h, h d. Itaque possumus cylindrum inuenire, axem habentem b h; in cuius superficie sit acutianguli coni sectio circa diametrum a c. Hoc autem inuento, erit quædam portio cylindri, quæ eandem basim habeat dimidio sphæroidi, & axem eundem. Rursus & conum inuenire possumus, uerticem habentem punctum b, in cuius superficie acutianguli coni sectio consistat, circa diametrum a c: atque eo inuento, erit portio coni, quæ eandem portioni basim, & axem habeat eundem. Dico iam sphæroidis dimidium duplum esse huius coni portionis. Sit conus z duplus portionis coni. & si quidem dimidium sphæroidis non est æquale cono z: sit primum maius, si fieri potest: inscribaturq; in dimidio sphæroidis figura solida, & altera circumscribatur ex cylindri portionibus æqualem habentibus altitudinem; ita ut circumscripta figura inscriptam excedat minori excessu, quàm quo dimidium sphæroidis excedit conum

B z. Similiter iis, quæ prius dicta sunt, ostendetur inscripta figura maior cono z: & portio cylindri basim habens eandem portioni, & axem eundem, ipsius quidem z coni sesquialtera; figuræ uero in dimidio sphæroidis inscriptæ, maior, quàm sesquialtera: quod fieri non potest. non est igitur dimidium sphæroidis cono z maius. Quod si minus ponatur esse: inscribatur in dimidio sphæroide figura solida, & altera circumscribatur ex cylindri portionibus altitudinem æqualem habentibus; ita ut circumscripta excedat inscriptam minori excessu, quàm quo z conus dimidium sphæroidis excedit. Rursus similiter ostendetur circumscripta figura cono z minor: & portio cylindri, quæ basim habeat portioni eandem, & axem eundem, ipsius quidem coni z sesquialtera; circumscriptæ uero figuræ minor, quàm sesquialtera: quod item fieri non potest. non erit igitur neque minus dimidium sphæroidis cono z. Quoniam autem neque maius est, neque minus: sequitur, ut sit æquale. Vnde constat, quod oportebat demonstrare.

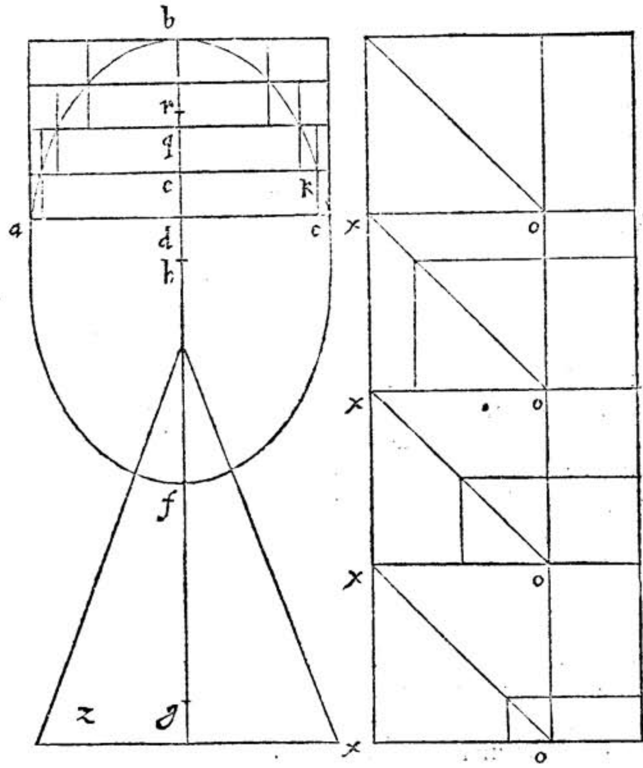


PROPOSITIO XXXI.

Qualibet figura sphæroide secta plano non per centrum ducto, sed erecto super axem, minor portio ad conum basim habentem

tem eandem portioni, & axem eundem, eam proportionem habet, quam utraque linea; & dimidia axis sphæroidis, & axis maioris portionis ad maioris portionis axem.

SIT enim portio quædam sphæroidis figuræ, abscissa plano, super axem erecto, non autem per centrum ducto; & ipsa figura secta altero plano secundum axem; sit figuræ quidem sectio a b c acutianguli coni sectio: diameter sectionis, & axis sphæroidis b f; centrum h: planiuero abscindentis portionem sectio sit a c recta linea, quæ rectos angulos faciet cum ipsa b f; quoniam planum super axem erectum esse posuimus. Sitq; portio abscissa cuius uertex b, minor dimidio sphæroidis figuræ: & ipsi b h æqualis sit f g. demonstrandum est, portionem, cuius uertex b ad conum, qui basim habet eandem portioni, & eundem axem, eam proportionem habere, quam d g ad d f. Sit autem cylindrus eandem basim habẽs minori portioni, & eundem axem: & sit conus z, qui ad conum basim eandem habentem, eam proportionem habeat, quam d g ad d f. Dico conum z æqualem esse portioni, quæ uerticem habet b pũctum. Si enim non est æqualis: sit primum minor, si fieri potest: inscribaturq; in portione figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus; ita ut circumscripta inscriptam excedat minori excessu, quàm quo portio sphæroidis excedit conum z. Quoniam igitur circumscripta figura, quæ portione maior est, minus excedit inscriptam, quàm portio conum: constat figuram inscriptam maiorem esse cono z. Sit autem b r tertia pars ipsius b d. & quoniam b g tripla est ipsius b h: & b d item tripla ipsius b r: erit & d g ipsius h r tripla. Itaque cylindrus basim habens eandem portioni & axem b d, ad conum habentem basim eandem, & eundem axem, eam proportionem habet, quam d g ad h r. conus autem dictus ad z conum habet eam, quam d f ad d g. Quare proportionibus non similiter ordinatis, cylindrus, cuius basis eadem portioni, & idem axis, ad conum z eam proportionem habebit, quam d f ad h r. Sint præterea lineæ positæ, in quibus x n, numero quidem æquales partibus lineæ b d, magnitudine uero unaquæque ipsi f d æqualis: & sit ipsarum x o unaquæque æqualis b d. erit ergo unaquæque n o dupla ipsius h d. Accedat ad unamquanque ipsarum, spatium quoddam, cuius latitudo sit æqualis b d: ita ut in unoquoque quadratum sit diametrum habens. auferatur autem à primo spatio gnomon, qui latitudinem habeat æqualem b e: & à secundo item auferatur gnomon, cuius latitudo æqualis b q: & similiter ab unoquoque subsequente spatio,

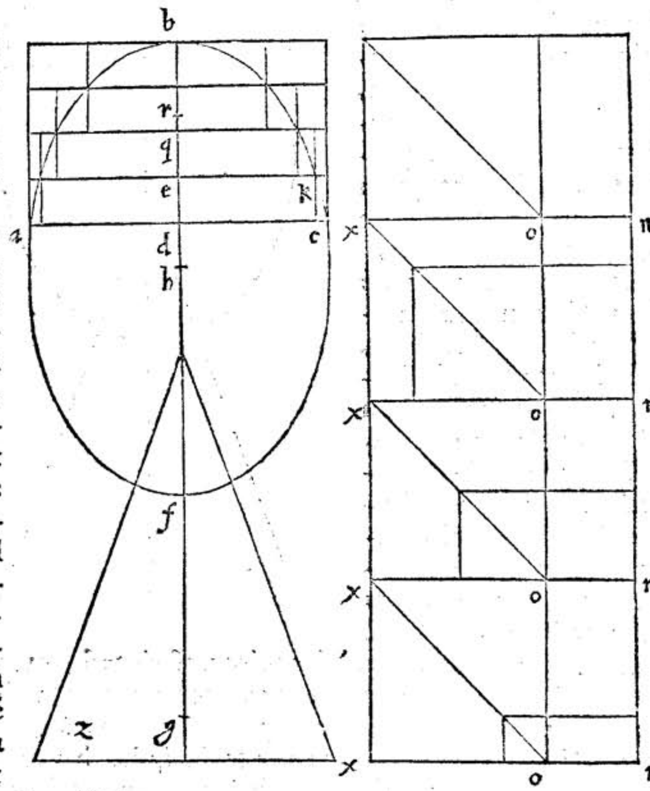


A

B

C

gnomon auferatur latitudinem habens una parte minorem, quàm ſit latitudo gnomonis proxime ablati. erit igitur gnomon à primo ſpatio ablatus æqualis rectangulo b e f: & reliquum ſpatium accedens ad n o, excedens ſpecie quadrato, quod latus exceſſus habet æquale ipſi d e. à ſecundo autem ſpatio gnomon ablatus æqualis erit b q f rectangulo: & reliquum ſpatium accedens ad n o, excedens ſpecie quadrato, & reliqua eodem modo. His ita habentibus, plana cylindrorum omnium quibus conſtat inſcripta in portione figura, pertingent ad cylindri ſuperficiem baſim habentis eandem portioni, & axem eundem: eritq; totus cylindrus diuiſus in cylindros numero quidem æquales iis, qui ſunt in circumſcripta figura, magnitudine uero maximo eorum æquales. Itaque primus cylindrus eorum, qui in toto cylindro ſunt habens axem d e ad primũ cylindrum in figura inſcripta, cuius axis d e, eam propotionem habet, quam d c quadratum ad quadratum k e. hæc autem eadem eſt illi quam habet rectangulum b d f ad rectangulum b e f. habet ergo cylindrus ad cylindrũ proportionem eam, quam primũ ſpatiũ ad gnomonem ab eo ablatũ: & ſimiliter aliorum cylindrorum unuſquiſque, qui ſunt in toto cylindro, axẽ habẽs æqualem d e ad cylindrũ, qui eſt ſecundum ipſum in figura inſcripta, eundẽ habentem axem eam proportionẽ habet, quam ſpatium ſimiliter ei reſpõdens ad gnomonem ab eo ablatũ. ſunt igitur magnitudines quædam, cylindri ipſi, qui ſunt in toto cylindro; & aliæ magnitudines, ſpatia ad x n accedẽtia, quæ latitudinem habent æqualẽ b d, numero cylindris æqualia, & ſecũdum quæque duo eãdem habentia proportionem: referũturq; cylindri ad alios cylindros, qui ſunt in figura inſcripta: extremus autẽ ad nullum refertur. Et ſpatia itẽ referuntur ad alia ſpatia, ad gnomones ſcilicet, ab eis ablatos, reſpõdentia iiſdem proportionibus: at extremũ ſpatium ad nullũ refertur. Quare conſtat cylindros omnes ad omnes alios eã habere proportionem, quam ſpatia omnia ad omnes gnomones. Cylindrus ergo baſim habens eãdem portioni, & axem eundem, ad figuram portioni inſcriptam, eam proportionẽ haebit, quam ſpatia omnia ad omnes gnomones. Et



quoniã ſunt quædã lineæ æquales poſitæ, in quibus n o: & ad unãquãque accedit ſpatiũ excedẽs ſpecie quadrato: latera autẽ exceſſuum ſe ſe æqualiter excedunt: & exceſſus minimæ illarum eſt æqualis: ſunt præterea alia ſpatia accedentia ad n x, quæ latitudinẽ habent æqualem ipſi b d, numero quidem ſpatiis dictis æqualia, magnitudine uero
D unumquodque æquale maximo: manifeſtum eſt omnia ſpatia, quorum unumquodque maximo eſt æquale, ad alia omnia minorem habere proportionem, quàm c n
E ad lineam æqualem utriſque; & dimidiæ n o, & tertiæ parti x o. Quare conſtat ſpatia eadem ad omnes gnomones maiorem proportionem habere, quàm x n ad lineã utriſque æqualem; & dimidiæ n o, & duabus tertiis x o. cylindrus igitur baſim habẽs eandem portioni, & axem eundem ad figuram in portione inſcriptam maiorem proportionem habet, quàm x n ad eam, quæ utriſque eſt æqualis; & dimidiæ n o, & duabus

bus tertiis x o. est autem d f ipsi x n æqualis: dimidiæq; n o æqualis d h: & duabus tertiis x o ipsa d r. Quare totus cylindrus ad figuram inscriptam in portione, maiorem proportionem habet, quàm d f ad h r. sed quam proportionem habet d f ad h r, eã demonstratum est habere eundem cylindrum ad conum z. maiorem igitur proportionem habebit cylindrus ad inscriptam figuram, quam ad conum z: quod fieri non potest; nam demonstratum est, figurã inscriptam in cono z maiorem esse. non ergo sphæroidis portio maior est cono z. Sed si fieri potest, sit minor: Inscribaturq; rursus in portione figura solida; & altera circumscribatur, ex cylindris æqualem altitudinem habentibus: ita ut circumscripta inscriptam excedat minori excessu, quàm quo conus z portionem excedit: & alia eadem prioribus fiant. Quoniam igitur inscripta figura portione minor est: & circumscripta inscriptam minus excedit, quàm z conus portionem: patet circumscriptam figuram minorem esse z cono. Rursus primus cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro, axem habens d e, ad primum cylindrum in circumscripta figura, cuius idem est axis, eam proportionem habet, quam extremum spatiũ eorum, quæ ad x n accedunt, latitudinem habentium æqualem b d ad semetipsum; utraque enim sunt æqualia. secundus autem cylindrus eorum, qui in toto cylindro, axem habens æqualem d e ad cylindrum, qui secundum ipsum est in circumscripta figura, eãdem habet proportionem, quam secundum spatium eorum, quæ accedunt ad n x, latitudinem habentium æqualem b d, ad gnomonem ab ipso ablatum. & aliorum cylindrorũ unusquisque, qui sunt in toto cylindro, axem habentium ipsi d e æqualem, ad cylindrum, qui secundum ipsum est, in circũscripta figura, eam proportionem habet, quam spatium ipsi respõdens eorum, quæ ad x n accedunt, ad gnomonem ab ipso ablatum ante extremum dictum. & omnes igitur cylindri, qui in toto cylindro sunt, ad cylindros omnes in circũscripta figura eandem habebunt proportionem, quam omnia spatia accedentia ad x n, ad id, quod est æquale extremo spatio, & gnomonibus ab aliis ablatis, propter eadem, quæ superius dicta sunt. Et quoniã ostensum est, spatia omnia accedentia ad n o, ad omnia spatia, quæ excedunt specie, quadrato, dempto maximo eorum, maiorem habere proportionem, quàm x n ad lineã utrisque æqualem; & dimidiæ n o; & tertiæ parti x o: perspicuum est, spatia eadem ad reliqua, quæ æqualia sunt extremo spatio posito, & gnomonibus à reliquis ablatis, minorem proportionem habere, quàm x n ad lineam utrisque æqualem; dimidiæ scilicet n o, & duabus tertiis x o. unde constat cylindrum basim habentem eandem portioni, & axem eundem, ad figuram circũscriptam, minorem proportionem habere, quàm f d ad h r. Quam uero proportionem habet f d ad h r, eandem habet dictus cylindrus ad conum z. minorem ergo proportionem habet idem cylindrus ad circumscriptam figuram, quàm ad conum z: quod fieri non potest; ostensum est enim circumscriptam figuram cono z minorem esse. non igitur portio sphæroidis minor est cono z. Quoniam autem neque maior est, neque minor: relinquitur eidem esse æqualem.

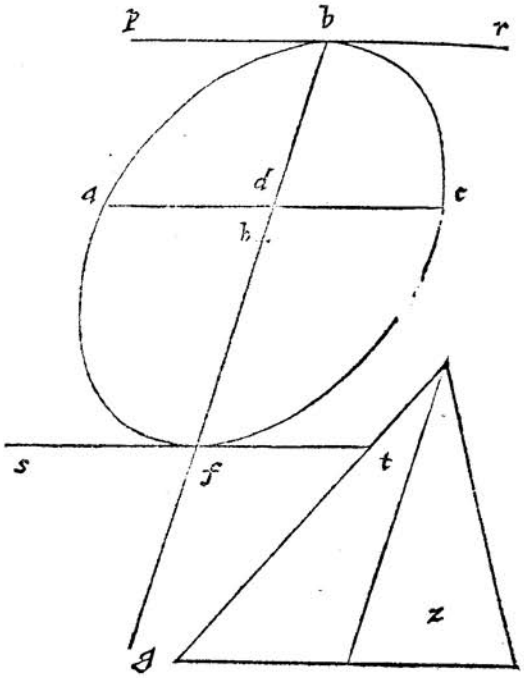
PROPOSITIO XXXII.

SI sphæroides secetur plano neque erecto super axem, neque per centrum ducto: minor eius portio ad portionem coni basim habẽtis ipsi eandem, & eundem axem, eam proportionem habebit, quam linea æqualis utrisque; & dimidiæ eius, quæ uertices portionum facta rum coniungit, & axi maioris portionis, ad maioris portionis axem.

SECETVR enim sphæroidis figura quæpiam, ut dictum est: sectaq; ipsa altero plano per axem, erecto super planum secans, sit figuræ quidem sectio a b c d acutianguli coni sectio: plani autem figuram secantis recta linea c a: & ducantur lineæ p r, s t, ipsi a c æquidistantes, quæ contingant coni sectionem in punctis b f: & ab ipsis plana attollantur æquidistantia plano secundum a c. contingent hæc

sphæroides

A ſphæroides in b f punctis: & erunt uertices portionum coniuncti ducta linea b f, quæ per centrum tranſibit. Sit autem centrum ſphæroidis, & acutianguli coni ſectionis punctum h. Quoniam igitur poſitum eſt, ſecari figuram plano non erecto ſuper axem: ſectio eſt acutianguli coni ſectio, cuius diameter c a. Itaque ſumatur & cylindrus axem habens in recta linea b d, in cuius ſuperficie acutianguli coni ſectio ſit circa diametrum a c: & conus uerticem habens punctum b, in cuius ſuperficie ſit acutianguli coni ſectio, circa diametrum a c. erit iam portio quædam cylindri baſim habens portioni eã dem, & axem eundem: & portio coni, quæ eandem portioni baſim, & axem eundem habeat: Oſtendendum eſt, ſphæroidis portioné, cuius uertex b, ad portionem coni, quæ baſim habet ipſi eandem, & eũdem axem, eam proportionem habere, quam d g ad d f. ſit autem f g æqualis h f: & ſumatur aliquis conus z, qui ad coni portionem baſim habentem eandem portioni, & axem eundem, eam proportionem habeat, quam d g ad d f. Si igitur non eſt æqualis portio ſphæroidis z cono: ſit primum maior, ſi fieri poſsit: Inſcribaturq; in portione ſphæroidis figura ſolida; & altera circumſcribatur ex cylindri portionibus altitudinem æqualem habentibus: ita ut circumſcripta inſcriptam excedat minori exceſſu, quàm quo portio ſphæroidis excedit z conum. ſimiliter antecedenti oſtendetur, inſcriptam figuram cono z maiorem eſſe: & portionem cylindri, quæ baſim habeat portioni eandem, & eundem axem, ad inſcriptam figuram maiorem proportionem habere, quàm ad z conum: quod fieri non poteſt, non erit igitur ſphæroidis portio cono z maior. Sed ſit minor, ſi fieri poteſt. Rurſus in portione inſcripta ſit ſolida figura: & altera circumſcripta ex cylindri portionibus æqualem altitudiné habentibus: ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minori exceſſu, quàm quo z conus portionem excedit. oſtendetur eadem ratione circumſcriptam figuram minorem eſſe z cono: & portionem cylindri, quæ baſim habet portioni eandem, & axem eundem, ad circumſcriptam figuram minorem proportionem habere, quàm ad conum z: quod fieri non poteſt. non erit igitur ſphæroidis portio neque cono z minor, quare conſtat, quod oportebat demonſtrare.

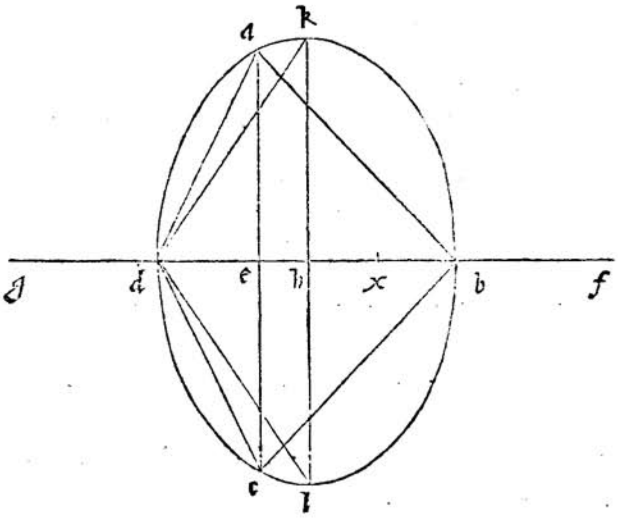


PROPOSITIO XXXIII.

CVIuslibet figuræ ſphæroidis ſectæ plano erecto ſuper axem, nõ autem per centrum ducto, maior portio ad conum baſim habentem eandem portioni, & eundem axem, eam proportionem habet, quam linea utriſque æqualis; & dimidiæ axis ſphæroidis; & minoris portionis axi, ad axem minoris portiouis.

SECETVR aliquod ſphæroides, ut dictum eſt: ſectoq; ipſo altero plano per axẽ, erecto

erecto super planum secans, figuræ quidem sectio sit a b c acutianguli coni sectio, cuius diameter, & axis figuræ b d: plani autem secantis recta linea c a. erit igitur c a ad rectos angulos ipsi b d. Sit maior portio, cuius uertex b: & centrum sphæroidis h: apponaturq; d g æqualis d h: & b f eidem æqualis. ostendendum est portionem sphæroidis, cuius uertex b ad conum basim habentem eandem portioni, & eundem axem, eam proportionem habere, quam e g ad e d. Itaque secetur sphæroides per centrum plano super axem erecto: & à facto circulo conus sit uerticem habens punctum d. est igitur totum sphæroides duplum portionis, quæ basim habet circulum circa diametrum k l, & uerticem d. dicta autem portio dupla est coni basim habentis ipsi eandem & axem eundem; hæc enim iam demonstrata sunt. Quare totum sphæroides dicti coni quadruplum erit. At uero hic conus ad conum habentem pro basi circulum circa diametrum a c, & uerticem d, compositam proportionem habet ex ea, quam h d ad e d; & ex ea, quam quadratum k h ad quadratum e a. proportio autem, quam habet quadratum k h ad quadratum e a, eadem est illi, A B C



quam rectangulum b h d habet ad rectangulum b e d: & quam proportionem habet h d ad e d, eandem habet x d ad h d. habebit igitur rectangulum contentum x d, b h ad rectangulum b h d eam proportionem, quam d h ad d e. composita autem proportio ex ea, quam habet rectangulum contentum x d, h b ad rectangulum b h d; & ex ea, quam rectangulum b h d habet ad rectangulum b e d, eadem est ei, quam habet rectangulum contentum x d, h b ad rectangulum b e d. Conus ergo basim habens circulum circa diametrum k l, & uerticem punctum d ad conum basim habentem circulum circa diametrum a c, & uerticem d, eandem proportionem habet, quam rectangulũ cõtentũ x d, h b ad rectangulum b e d. At conus basim habens circulum circa diametrum a c, & uerticem d ad portionem sphæroidis habentem basim eandem ipsi, & eundem axem, eam habet proportionem, quam rectangulum b e d ad rectangulum f e d. hoc est, quam b e ad e f. minus enim, quàm dimidium sphæroidis ad conum basim habentem eãdem portioni, & axem eundem, ostensum est eam habere proportionem, quam linea utrisque æqualis, & dimidiæ axis sphæroidis, & axi maioris portionis ad axem maioris portionis. Ea autem est quam habet f e, ad b e. Conus igitur, qui est in dimidio sphæroide ad portionẽ sphæroidis dimidio minorem, eam proportionem habet, quam rectangulum contentũ x d, b h ad rectangulum f e d. Et quoniam totũ sphæroides ad conum, qui est in dimidio sphæroide, eam habet proportionem, quam rectangulum f g, x d ad rectangulũ b h, x d. Vtrunque enim quadruplum est, conus autem, qui in dimidio sphæroide ad portionem dimidio minorem, eam habet, quam rectangulum x d, b h ad rectangulum f e d. habebit & totum sphæroides ad portionem eius minorem, eandem proportionem, quam rectangulum f g, x d ad ipsum f e d. Quare & maior portio sphæroidis ad minorem, eam habet, quam excessus, quo rectangulum f g, x d excedit rectangulum f e d ad ipsum f e d. rectangulum autem f g, x d ipsum f e d excedit rectangulo x d, e g, & rectangulo f e x. Habet ergo maior sphæroidis portio ad minorem, proportionem eam, quam id, quod est æquale utrisque, & rectangulo x d, e g, D E F G H I

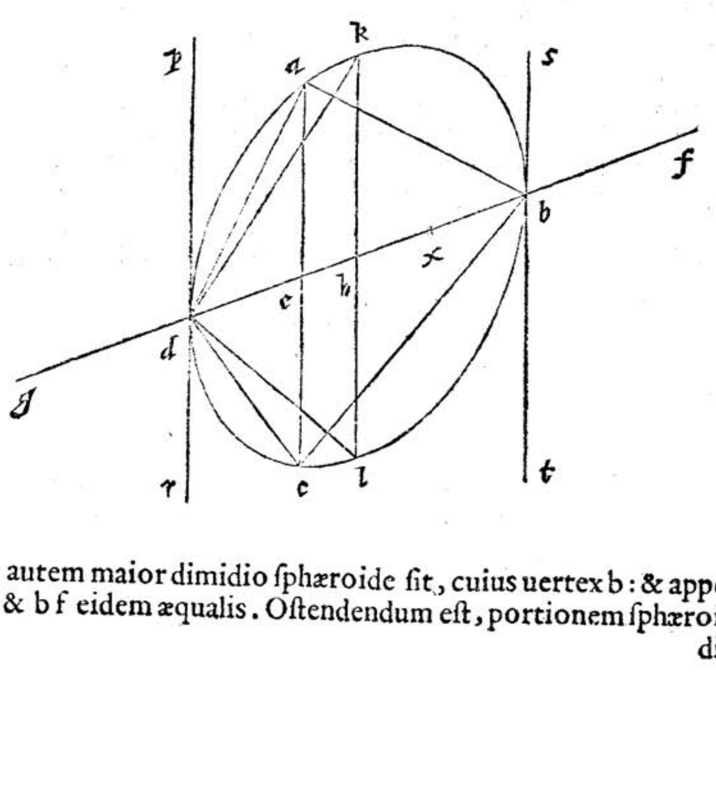
&

& rectangulo f e x ad ipsum f e d rectangulum, minor autem portio sphæroidis ad conum basim habentem eandem ipsi, & eundem axem, proportionem habet eam,
K quam rectangulum f e d ad rectangulum b e d. habet enim eam, quam f e ad b e:
L & conus, qui est in minori portione ad conum, qui in maiori eam habet, quam rectangulum b e d ad quadratum b e; nam coni altitudinum proportionem habent, cum in eadem sint basi. Quare maior portio sphæroidis ad conum in ipsa descriptũ, eam habet proportionem, quam, quod est æquale utrisque; & rectangulo x d, e g; & rectangulo f e x, ad quadratum b e. hæc autem eadem est illi, quam habet e g ad
M e d; quoniam rectangulum x d, e g ad rectangulum x d e eam habet, quam e g ad e
N d. & rectangulum f e x ad rectangulum f e h eam, quam e g ad e d; habet enim x e ad h e proportionem eandem, quam e g ad e d; propterea quòd proportionales sunt x d, h d, d e: & h d æqualis est ipsi g d. Quod igitur est æquale utrisque; rectangulo scilicet x d, e g & rectangulo f e x ad id, quod utrisque æquale; rectangulo x d e: & rectangulo f e h, eandem habet proportionem, quam e g ad e d. At quadra-
O tum b e æquale est utrisque; & rectangulo x d e, & rectangulo f e h; quoniam qua-
P dratum b h est æquale rectangulo x d e: & excessus, quo quadratum b e excedit quadratum b h est æqualis rectangulo f e h; quòd b h, b f sunt æquales. Manifestum est igitur maiorem sphæroidis portionem ad conum, qui basim habet portioni eandem, & eundem axem, eam proportionem habere, quam e g ad e d.

PROPOSITIO XXXIIII.

SI sphæroides secetur plano neque erecto super axem, neque per centrum ducto: maior portio ipsius ad coni portionem basim habentem eandem ipsi, & eundem axem, eam proportionem habebit, quam utraque linea; & æqualis dimidiæ eius, quæ portionum factarum uertices coniungit; & axi minoris portionis ad axem minoris portionis.

SECETUR sphæroides plano, ut dictum est: secto autem ipso altero plano per axem, erecto super planum secans, figuræ quidem sectio sit a b c d acutianguli coni sectio: plani uero secantis figuram sit c a recta linea. Ducantur p r, s t æquidistantes ipsi a c, quæ contingant acutianguli coni sectionem in b d punctis: & attollantur ab ipsis plana æquidistantia plano secundum a c. continent hæc sphæroides in b d: atque erunt b d uertices portionũ. Itaque ducatur recta linea uertices portionum factarum coniungens b d, quæ per centrum transibit: &



sit h centrum: portio autem maior dimidio sphæroide sit, cuius uertex b: & apponatur d g æqualis d h: & b f eidem æqualis. Ostendendum est, portionem sphæroidis

dis maiorem ad coni portionem basim habentis eandem ipsi, & eundem axem, eam proportionem habere, quam e g ad e d. secetur enim sphæroides plano per centrū, æquidistanti plano secundum a c: & describatur in dimidio sphæroidis coni portio, uerticem habens punctum d: & quam proportionem habet d h ad e d, eandem habeat x d ad h d. similiter iis, quæ superius tradita sunt, ostendetur, & portionem coni descriptam in dimidio sphæroidis ad coni portionem in minori sphæroidis portione descriptam, eandem proportionem habere, quam rectangulum x d, b h ad rectangulum b e d; & portionem coni descriptam in minori sphæroidis portione ad portionem, in qua est descripta, eandem habere, quam rectangulum b e d ad rectangulum f e d. Habebit igitur coni portio in dimidio sphæroide descripta ad minorem portionem sphæroidis, eam proportiouem, quam rectangulum x d, b h ad ipsum f e d. Quare totum sphæroides ad portionem coni in dimidio sphæroide descritam, eam proportionem habebit, quam rectangulum f g, x d ad rectangulum b h, x d; utrunque enim utriusque quadruplum est. dicta autem coni portio ad portionem sphæroidis minorem, eandem proportionem habet, quam rectangulum, x d, b h ad rectangulum f e d, ergo totum sphæroides ad minorem ipsius portionem, eandem habebit, quam rectangulum f g, x d ad ipsum f e d rectangulum. Sed maior portio ad minorem habet eandem, quam excessus, quo rectangulum f g, x d excedit rectangulum f e d, ad rectangulum f e d: & portio minor ad coni portionem in ipsa descriptam, eandem habet, quam rectangulum f e d ad b e d rectangulum; demonstratum est enim habere eandem, quam f e ad b e. portio autem coni in minori portione descripta ad coni portionem descriptam in maiore, eandem proportionem habet, quam rectangulum b e d ad quadratum b e; portiones enim conorum dictæ, quoniam in eadem sunt basi, eam, quæ est altitudinum, proportionem habent. at uero altitudines habent eam, quam d e ad e b. Quare & maior portio sphæroidis ad coni portionem in ipsam descriptam, eandem proportionem habet, quam excessus, quo rectangulum g f, x d excedit rectangulum f e d, ad quadratum b e. hæc autem similiter demonstrabitur eadem illi, quam habet e g ad e d.

ARCHIMEDIS
LIBER DE ARENÆ NVMERO.

ARBITRANTVR nonnulli rex Gelon, arenæ numerum infinitum eſſe. dico autem non ſolum eius, quæ eſt circa Syracuſas, & reliquam Siciliam, ſed etiam quæ in omni regione habitabili, pariter atque inhabitabili continetur. Sunt præterea alii, qui non illum quidem infinitum putent; ſed nullum dari denominatum numerum poſſe credant, qui illius multitudinem exuperet. Itaque eos, qui ita opinantur, ſi eiuſmodi arenæ aceruum animo comprehenderẽt, cuiuſmodi eſſet, ſi uniuerſa terra repleto in ea mari, & cauitatibus omnibus, altiſsimorum montium uertices exæquaret; atque huius ipſius rurſus alterum multiplicem excogitarent, minime dubium eſt, exiſtimaturos illius multitudinem numeros longe omnes, multumq; ſuperare. Ego uero id oſtendere conabor demonſtrationibus geometricis, quas tu ipſe aſſequeris; eorum uidelicet numerorum, qui à nobis expreſsi, traditiq; ſunt in iis, quæ ad Zeuxippum ſcripſimus, nonnullos non ſolum arenæ multitudinem ſuperare, quæ terræ undique repletæ, ut diximus, æqualis eſſet: ſed etiam quæ ipſi mundo parem haberet magnitudinem. non enim ignoras mundum à compluribus Aſtrologis appellari ſphæram, cuius centrum quidem eſt terræ centrum, ſemidiameter autem eſt æqualis lineæ inter centrum ſolis, & terræ centrum interiectæ. Hæc igitur in iis, quæ ab Aſtrologis ſcripta ſunt, redarguens Ariſtarchus Samius poſitiones quaſdam edidit, ex quibus ſequitur, Mundum proxime dicti mundi multiplicem eſſe. ponit enim ſtellas inerrantes, atque ſolem immobiles permanere: terram ipſam circumferri circa ſolem, ſecundum circumferentiam circuli, qui eſt in medio curſu conſtitutus: ſphæram autem inerrantium ſtellarum circa idem cẽtrum cum ſole ſitam, tanta eſſe magnitudine, ut circulus, ſecundum quem ponit terram circumferri, eam habeat proportionem ad diſtantiam ſtellarum inerrantium, quam centrum ſphæræ habet ad eius ſuperficiem. Id uero manifeſto conſtat fieri non poſſe. Quoniam enim ſphæræ centrum nullam habet magnitudinem: neque

profecto

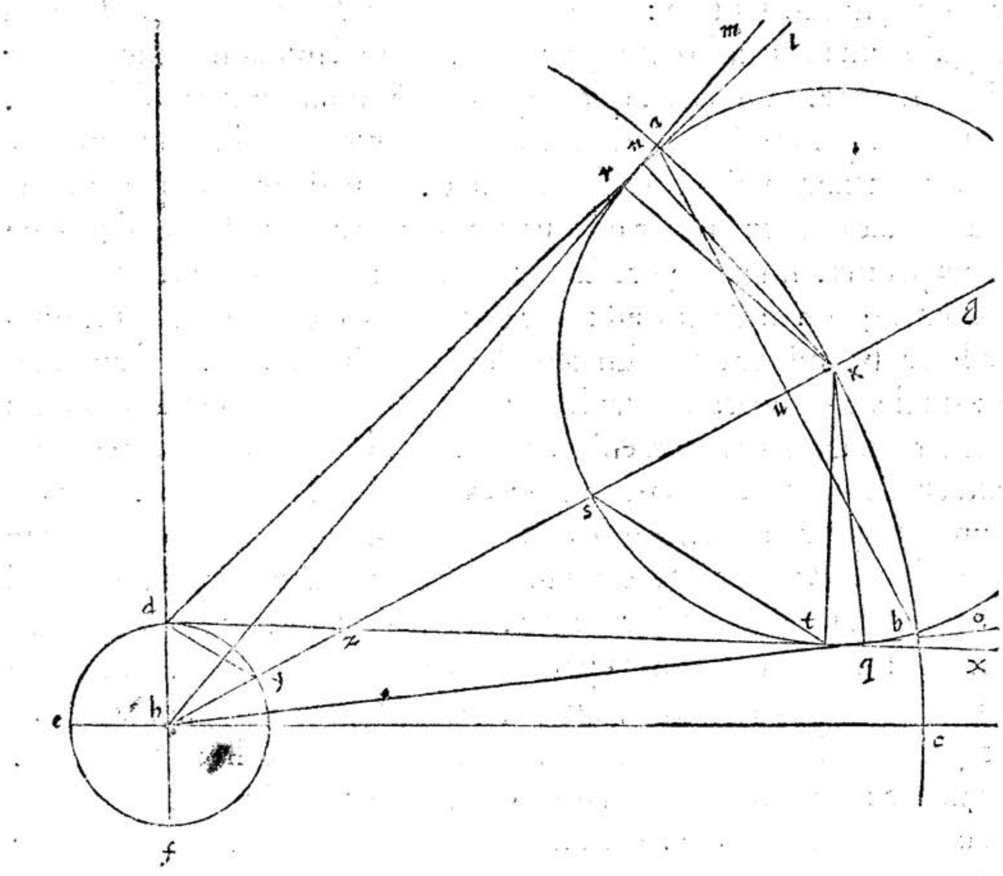
profecto ullam habere proportionem ad sphæræ superficiem existimandum est. Quare credibile est Aristarchum ita intellexisse. Quoniam terram ueluti circa mundi centrum positam opinamur: quam proportionem habet terra ad mundum à nobis dictum, eandem habere sphæram, in qua circulus est, secundum quem terram ponit circumferri, ad sphæram stellarum inerrantium. nam demon strationes eorum, quæ apparent, tanquam si hoc ita esset positum, accommodat: & maxime uidetur magnitudinem sphæræ, in qua ter ram moueri facit, ponere ei, qui à nobis dicitur, mundo æqualem. Itaque dicimus, si ex arena fiat sphæra tanta magnitudine, quantam ponit Aristarchus esse stellarum inerrantium: & eo pacto ex iis, quæ in principio ostenduntur, numerorum denominationibus, quasdam inueniri, quæ arenæ illius multitudinem exuperent; his uidelicet po sitis. Primum quidem terræ ambitum esse ueluti tercentum myriadum stadiorum, & non maiorem. nam cum secundum eos, qui hoc demonstrare aggresi sunt; quibus tu ipse assenties, sit ueluti triginta myriadum stadiorum: ego exuperans pono terræ magnitudinem ueluti decuplam eius, quam superiores opinati sunt: & ambitum eius esse trecentum myriadum stadiorum, & non maiorem. Deinde diametrum terræ maiorem esse diametro lunæ: & diametrum solis maiorem diametro terræ, similiter eadem sumens, quæ complures superiorum astrologorum. Postremo solis diametrum trigintuplam esse diametri lunæ, & non maiorem. cum enim ex superioribus astro logis Eudoxus quidem ueluti nonuplam affirmarit; Phidias Acupa tris ueluti duodecuplam; Aristarchus autem conatus sit ostendere diametrum solis maiorem esse, quàm duodeuigintuplam diametri lunæ, & minorem, quàm uigintuplam eiusdem: ego superans & hunc, ut propositum sine controuersia sit demonstratum, pono diametrum solis, ut diximus, trigintuplam diametri lunæ, & non maio rem. Præterea diametrum solis maiorem esse latere figuræ mille angulorum, in maximo mundi circulo descriptæ. hoc autem pono, cũ dicat Aristarchus solem ueluti septingentesimam, ac uigesimam partem circuli signorum apparere. Itaque hoc pacto considerans cona tus sum per instrumenta sumere angulum, cui sol accommodatur, uerticem habentem in uisu. similem enim perfecte sumere haud faci le est; quòd neque uisus, neque manus, neque instrumenta, per quæ sumitur, satis idonea sunt ad id, quod perfectum, absolutumq; est ostendendum. sed de his uerba facere in præsentia opportunum non est; præsertim cum ea sæpius per se se manifeste pateant. Ego sa tis habeo ad propositi demonstrationem angulum sumere, qui minor sit angulo, cui sol accommodatur, uerticem habente in uisu: & rursus alterum sumere, qui non sit minor eodem angulo, uerticem similiter habente in uisu. Posita igitur longa regula super planum erectum in loco, unde sol exoriens conspiciatur, & cylindro paruo, tornatoq; super regulam erecto, statim post solis ortum, deinde ipso ad horizontem accedente, ita ut uideri possit, conuertatur regula ad solem: & uisus in extremo regulæ constituatur: cylindrus autem inter solem, & uisum intermedius solem abscondat: mox separato cylindro à uisu, ubi primum incipiat ex utraque eius parte solis minimum quippiam apparere, statuatur illic cylindrus. siquidem igitur similiter contingeret, uisum ab uno puncto inspicere, rectis lineis ductis ab extremo regulæ, in quo uisus fuerat constitutus, quæ cylindrum tangerent, angulus dictis lineis contentus minor esset angulo, cui sol accommodatur, uerticem habente in uisu: propterea quòd solis quippiam ex utraque cylindri parte conspiciatur.

A Quoniam autem uisus non ab uno puncto uidet, sed à magnitudine quadam: sumatur magnitudo rotunda non minor uisu: atque ea in extremo regulæ posita, ubi uisus constitutus fuerat, ductisq; lineis rectis magnitudinem contingentibus, & cylindrum, angulus dictis lineis comprehensus minor erit angulo, cui sol accommodatur uerticem habente ad uisum. Magnitudo autem non minor uisu hoc pa-

B cto inuenietur. sumantur duo cylindruli tenues, æquali inter se magnitudine; unus albus, alter non albus. & apponantur ad uisum, ita ut albus remotior sit, non albus quàm proximus uisui, ut faciem attingat. Cum igitur sumpti cylindruli uisu subtiliores sint; siquidem multo subtiliores, qui proximus est uisui præteritur, & conspicitur albus totus: sin minus, partes quædam albi uidentur ex utraque parte eius, qui ad uisum admotus fuerit. itaque sumptis huiusmodi cylindris, & ita dispositis, ut alter sua crassitudine alterum uisui abscondat, & non ampliori loco, tanta magnitudo, quanta est crassitudo cylindrorum hoc facientium, plane quodammodo non est minor uisu. Angulus autem non minor eo, cui sol accommodatur, uerticem habente ad uisum, hoc modo sumitur. remoto in regula cylindro à uisu, adeo ut abscondat totum solem, & ductis lineis rectis ab extremo regulæ, in quo uisus constituitur, cylindrum ipsum tangentibus, angulus dictis lineis contentus non minor erit angulo, cui sol accommodatur uerticem habente ad uisum. His igitur angulis ad hunc modum sumptis, dimenso angulo recto; eorum maior quidem

minor

minor érit, quàm una pars anguli recti in centum quatuor & ſexaginta partes diuiſi; minor uero maior, quàm una pars anguli recti diuiſi in partes ducentas. Quare angulus, cui ſol accommodatur uerticem habens ad uiſum minor erit, quàm una pars anguli recti diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes; & maior, quàm una pars eiuſdem anguli diuiſi in partes ducentas. Ex quibus ſequitur, diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ mille angulorum, quæ in maximo mundi circulo ſit deſcripta. Intelligatur enim planum



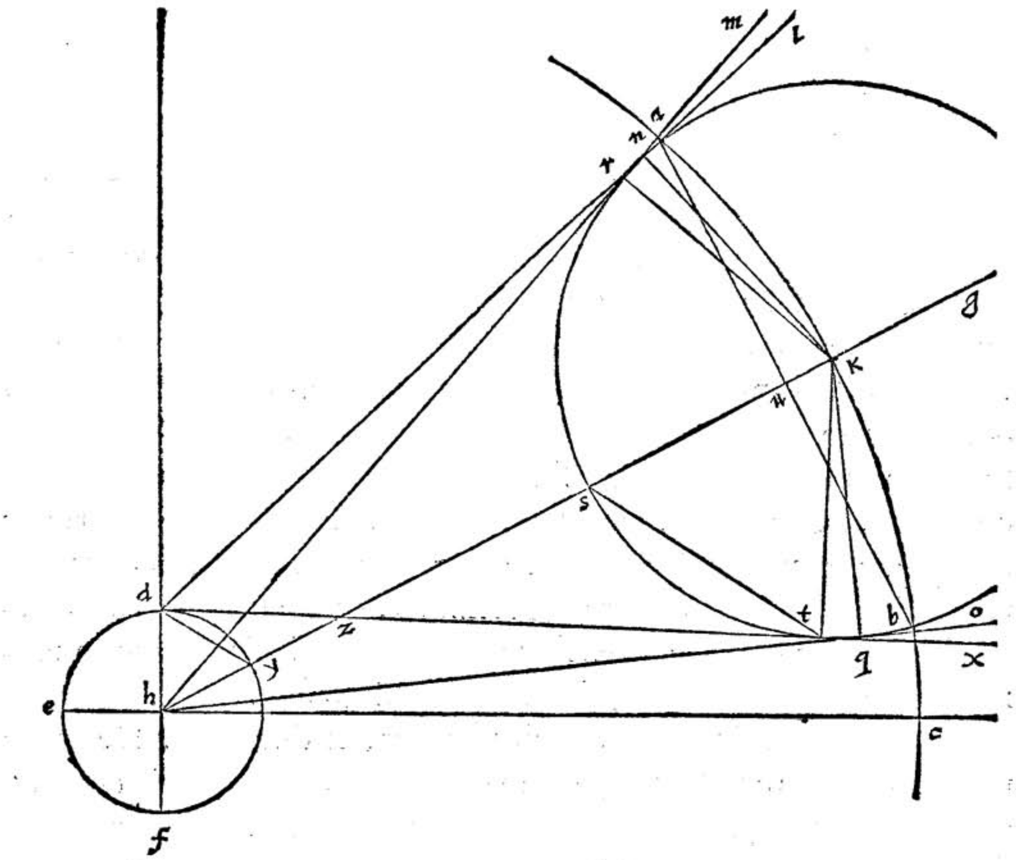
ductum per terræ centrum, & per uiſum, cum paulo ſupra horizontem ſol fuerit conſtitutus, quod ſecet mundum quidem ſecundum circulum a b c; terram uero ſecundum d e f; & ſolem ſecundum ſ g circulum: ſitq́, terræ centrum h: centrum ſolis K: & uiſus d: & ducantur rectæ lineæ, quæ tangant circulum ſ g; à puncto quidem d ipſæ d l, d x, tangentes in n t; à puncto autem h ipſæ h m, h o tangentes in q r: & circulum a b c ſecent lineæ h m, h o in a b. linea C
igitur h K maior eſt, quàm d K; quoniam ſol ponitur ſupra horizontem eſſe: & idcirco angulus l d x maior eſt angulo m h o. Sed an- D
gulus l d x maior eſt, quàm ducenteſima pars anguli recti; minor

uero

uero, quàm una pars eiusdem anguli in centum quatuor & sexaginta partes diuisi; quòd is angulus æqualis sit angulo, cui sol accommodatur uerticem habenti ad uisum: quare angulus m h o minor est, quàm una pars anguli recti diuisi in centum quatuor & sexaginta par
E tes. linea uero ab recta minor est ea, quæ subtenditur uni portioni circumferentiæ circuli a b c, in sexcentas sex & quinquaginta partes diuisæ: & ambitus dictæ figuræ multorum angulorum ad semidiametrum circuli a b c minorem proportionem habet, quàm quatuor & quadraginta ad septem: quoniam uniuscuiusque figuræ multorum angulorum in circulo descriptæ, ambitus ad semidiametrum proportionem habet minorem, quàm quatuor & quadraginta ad septem.
F non enim ignoras iam demonstratum à nobis, cuiuslibet circuli circumferentiam maiorem esse, quàm triplam diametri, parte quapiam, quæ quidem minor est septima, maior autem decem septuage
G simis primis. linea ergo recta b a ad h K minorem habet propor-
H tionem, quàm undecim ad mille centum octo & quadraginta. qua-
I re linea b a minor est quàm centesima pars lineæ h K. ipsi autem b a æqualis est diameter circuli s g: propterea quòd eius dimidia u a ipsi K r est æqualis. cum enim æquales sint lineæ h K, h a ab earum extremis iunguntur perpendiculares ad eundem angulum. manifestum est igitur diametrum circuli s g minorem esse centesima parte
K lineæ h K. At diameter e h y minor est diametro circuli e g; quòd d e f circulus minor sit circulo s g. utræque ergo lineæ h y, K s mi-
L nores sunt, quàm centesima pars ipsius h K. quare h K ad y s minorem proportionem habet, quàm centum ad nouem & nonaginta.
M Et quoniam linea h r minor est, quàm ipsa h K: & linea s y minor,
N quàm d t: minorem proportionem habet h r ad d t, quàm centum ad nouem & nonaginta. præterea quoniam triangula h K r, d K t rectangula sunt: & latera quidem K r, K t æqualia habent; ipsa autem h r, d t inæqualia: & maior angulus t d K ad angulum r h K maiorem proportionem habet, quàm h K ad d K; minorem uero quàm
O h r ad d t. si enim duo triangula rectangula altera duorum laterum, quæ sunt circa angulum rectum æqualia habeant, altera autem inæqualia: maior angulus eorum, qui lateribus inæqualibus continetur, ad minorem, maiorem quidem proportionem habet, quàm maior linea angulo recto subtensa ad minorem; minorem uero, quàm maior earum, quæ ad angulum rectum consistunt, habeat ad mino-
P rem. Quare angulus l d x ad angulum m h o minorem proportionem habet, quàm h r ad d t: quæ quidem minorem habet, quam

centum

centum ad nouem & nonaginta. angulus igitur l d x ad m h o angulum minorem proportionem habet, quàm centum ad nouem & nonaginta. & quoniam angulus l d x maior eſt, quàm ducenteſima Q
pars anguli recti: erit angulus m h o maior, quàm nouem & nona-



ginta partes anguli recti in uiginti millia partium diuiſi. quare maior, R
quàm una pars anguli recti diuiſi in ducentas & tres partes. linea ergo S
b a maior eſt, quàm quæ ſubtenditur uni parti circumferentiæ circuli a b c, diuiſæ in partes octingentas & duodecim. ſed ipſi b a ſolis diameter eſt æqualis. manifeſtum eſt igitur diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ, quæ mille angulis conſtet. Itaque his poſitis, oſtenduntur & illa: uidelicet diametrum mundi continere minus, quàm decies millies diametrum terræ: & inſuper diametrum mundi minorem eſſe, quàm centum myriadum myriadum ſtadiorum. Quoniam enim poſitum eſt, diametrum ſolis non maiorem eſſe, quàm trigintuplam diametri lunæ: diametrum uero terræ diametro lunæ maiorem: conſtat diametrum ſolis minorem eſſe, quàm trigintuplam diametri terræ. Rurſus quoniam oſtenſum eſt diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ mille angulorum, quæ in maximo mundi

mundi circulo sit descripta: patet ambitum dictæ figuræ minus, quàm millies diametrum solis continere. diameter autem solis minor est, quàm trigintupla diametri terræ. Quare ambitus dictæ figuræ mille angulorum minus, quàm tricies millies diametrum terræ continet. Cum ergo ambitus figuræ mille angulorũ contineat diametrum terræ minus, quàm tricies millies: sitq; idem diametri mundi maior, quàm triplus: & mundi diameter minus, quàm decies millies terræ

T diametrum continebit. et enim ostensum est cuiuslibet circuli diametrum minorem esse tertia parte ambitus uniuscuiusque figuræ multorum angulorum in circulo descriptæ, quæ pluribus, quàm sex lateribus contineatur: quoniam hexagono in circulo descripto diameter circuli tertia pars est ambitus ipsius hexagoni. At uero diametrum mundi minorem esse, quàm centum myriadum myriadum stadiorum, ex his apparet. Quoniam enim ponimus terræ ambitum nõ esse maiorem, quàm tercentum myriadum stadiorum: & terræ ambitus maior est, quàm triplus suæ diametri; propterea quòd uniuscuiusque circuli circumferentia diametri maior est, quàm tripla: erit ipsius terræ diameter minor, quàm centum myriadum stadiorum. Et quoniam diameter mundi minus, quàm decies millies terræ diametrum continet: perspicuum est mundi diametrum minorem esse, quàm centum myriadum myriadum stadiorum.

Hæc igitur ponimus de magnitudinibus, & distantiis. De arena uero illa ponantur. Si magnitudo quædam ex arena fuerit composita, non maior papauere: numerum ipsius maiorem non esse, quàm denum millium: & diametrum papaueris non esse maiorem quadragesima parte digiti. hoc autem pono, scrutatus in hunc modum. in regula plana posita fuerunt papauera in eadem recta linea, quæ se se inuicem tangerent: & occuparunt triginta quinque papauera ampliorem locum, quàm sit digiti longitudo. ego uero diametrum papaueris minorem pono, ut sit quadragesima pars digiti; & non minor, uolens etiam ex hoc apertissime, & planissime propositum demonstra-

V re. Quæ igitur ponimus hæc sunt. sed iam utile esse arbitror de numerorum denominationibus dicere, ut ne decipiantur illi; qui in librum à me ad Zeuxippum scriptũ non inciderunt; propterea quòd de iis ipsis nihil in hoc libro habetur. Contingit autem numeris imposita esse nomina ab ipsis myriadibus, in quibus eos optime nouimus, numerum myriadum ad myriadas ipsas referentes. Itaque qui proxime dicti sunt numeri in decies mille myriadas, primi uocentur: primorum autem numerorum decies mille myriades, unitas

dicatur

dicatur eorum, qui ſecundi ſunt: & ſecundorum numerorum unitates, & ex unitatibus denarii, & centenarii, & millenarii, & myriades, erunt denum millium myriadum. Rurſus & decies mille myriades ſecundorum numerorum unitas uocetur tertiorum numerorum: & tertiorum numerorum unitates, & ex unitatibus denarii, centenarii, millenarii, & myriades, denum millium myriadum, denum millium myriadum. Eodem modo & tertiorum numerorum decies mille myriades unitas dicatur quartorum numerorum: & quartorum item numerorum decies mille myriades unitas dicatur quintorum: & ſemper ita procedentes numeri nomina ſortiantur: eritq; unitas quintorum numerorum, denum millium myriadum, denum millium myriadum, denum millium myriadum, decies mille myriades. Ex iis igitur qui dicti ſunt, numeri ſatis erunt noti. licet autem & amplius producere. Sint enim, qui modo dicti ſunt numeri, primæ periodi uocati: extremus autem numerus periodi unitas uocetur ſecundæ periodi ſecundorum numerorum. Rurſus & decies mille myriades ſecundæ periodi ſecundorum numerorum, hoc eſt huius ſecundæ periodi extremus numerus unitas uocetur tertii periodi tertiorum numerorum: & ſemper ſic procedentes numeri à periodis nomina ſortiantur: eruntq; denum milliũ myriadum decies mille myriades. Rurſus & extremus numerus tertiæ periodi unitas uocetur quartæ periodi quartorum numerorum: & ita ſemper procedentibus, erunt denum millium myriadum, denum millium myriadum, decies mille myriades. His igitur hoc mo x
do denominatis, ſi ſint numeri ab unitate proportionales conſtituti: qui autem iuxta unitatem denarius ſit: octo primi una cum unitate, eorum, qui primi dicuntur, numerorum erunt: alii octo ſequentes eorum, qui ſecundi dicuntur: & reliqui eodem modo denominabuntur ſecundum diſtantiam à prima numerorum octade. primæ igitur octadis octauus numerus eſt mille myriades: ſecundæ octadis primus, quoniam decuplus eſt eius, qui antecedit, decies mille myriades: hic autem eſt unitas ſecundorum numerorum: octauus ſecundæ octadis numerus eſt mille myriades ſecundorum numerorũ. Rurſus & tertiæ octadis primus, quoniam eius, qui antecedit decuplus eſt, decies mille myriades erit ſecundorum numerorum: & eſt unitas tertiorum numerorum. conſtat igitur plures eſſe octades, ut dictum eſt. ſed & illud noſſe oportet. Si numeris ab unitate proportionalibus exiſtentibus, aliqui ex eadem proportionalitate ſe ſe inuicem multiplicauerint: factus inde numerus ex eadẽ erit proportio-

nalitate, tantum distans à maiore multiplicantium, quantum minor ab unitate distat, secundum proportionalitatis ordinem: ab unitate uero distabit uno minus, quàm sit numerus ex utrisque compositus, secundum quos multiplicantes se se ab unitate distiterint. Sint numeri quotlibet proportionales ab unitate a b c d e f g h i K l: & sit a unitas: & d multiplicans ipsum h producat q: sumatur autem ex eadem proportionalitate l tantum distans ab h, quantum d ab unitate distat. ostendendum est, q æqualem esse ipsi l. Quoniam enim proportionalibus existentibus numeris, d tantum distat ab a, quantum l ab h: eandem proportionem habet d ad a, quàm l ad h. est autem d secundum se ipsum multiplex ipsius a. & l igitur multiplex est ipsius h secundum d. quare æqualis est l ipsi q. patet igitur factum numerum ex eadem proportionalitate esse: atque à maiore multiplicantium tantum distare, quantum minor ab unitate distat. patet etiam, eundem ipsum distare ab unitate uno minus, quàm sit numerus ex utrisque compositus, quibus multiplicantes se se ab unitate distant. nam a b c d e f g h tot sunt, quot h distat ab unitate. sed i K l uno sunt minores, quàm quibus d ab eadem distat: etenim una cum h totidem erunt.

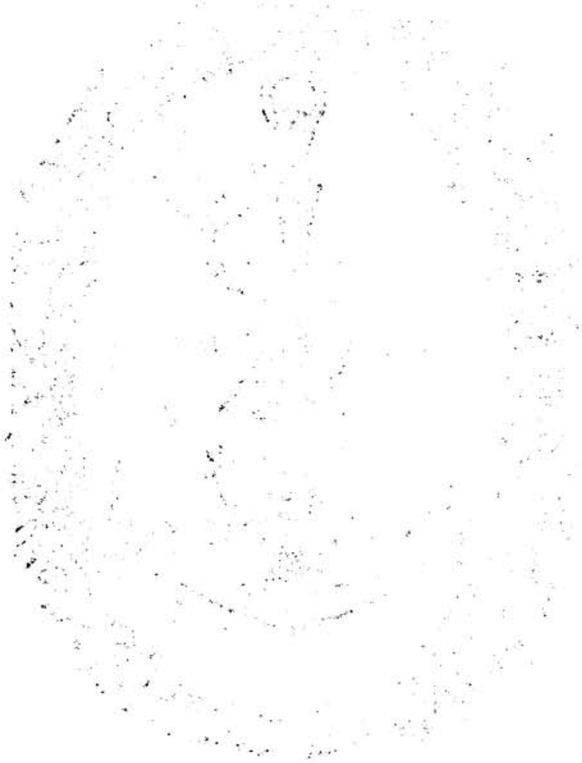
His igitur partim quidem positis, partim uero demonstratis, quod iam propositum est, ostendemus. Quoniam enim ponitur diameter papaueris non minor quadragesima parte digiti: perspicuum est, sphæram, quæ diametrum digito æqualem habeat, non maiorem esse, quàm ut contineat papauerum myriadas sex & quatuor millia. nam sphæræ, quæ diametrum habet quadragesimam partem digiti;
z multiplex est secundum dictum numerum; cum ostensum sit sphæras ad inuicem proportionem habere triplam eius, quæ est suorum diametrorum. Et quoniam positum est, numerum arenæ ad magnitudinem papaueris non esse maiorem decem millibus: constat, si sphæra, quæ diametrum habeat digito æqualem, arena impleatur, non maiorem futurum arenæ numerum, quàm myriades sex, & quatuor millia myriadum; qui numerus est unitates sex secundorum numerorum, & primorum quater mille myriades. minor igitur est, quàm unitates decem secundorum numerorum. Sphæra autem diametrum habens digitorum centum, sphæræ, quæ diametrum digito æqualem habeat multiplex est centum myriadibus; propterea quòd sphæræ inter se triplam eius, quæ est diametrorũ, proportionem habent. Si igitur ex arena fiat sphæra tanta magnitudine, quanta est, quæ diametrum habet centum digitorum: numerus arenæ minor

minor erit, quàm qui producitur, decem unitatibus ſecundorum numerorum in centum myriades ductis. ſed decem unitates ſecundorũ numerorũ decimus eſt proportionalis numerus ab unitate in decuplis terminis proportionalibus: & centum myriades ab unitate ſeptimus eſt ex eadem proportionalitate. quare qui producitur numerus erit ab unitate ſextus decimus. oſtenſum eſt enim eum uno minus diſtare ab unitate, quàm ſit numerus compoſitus ex utriſque iis, quibus multiplicantes ſe ſe ab unitate diſtant. Ipſorum autem ſexdecim, octo primi una cum unitate primorum numerorum ſunt: alii octo ſequentes ſecundorum: & eorum ultimus eſt mille myriades ſecundorum numerorum. conſtat igitur arenæ numerum, quæ magnitudinem habeat æqualem ſphæræ centum digitorum diametrum habenti minorem eſſe mille myriadibus ſecundorum numerorum. Rurſus & ſphæra decies mille digitorum diametrum habens, ſphæræ habentis diametrum digitorum centum multiplex eſt centum myriadibus. ergo ſi ex arena fiat ſphæra diametrum habens decies mille digitorum: erit eius numerus minor, quàm qui fit mille myriadibus ſecundorum numerorum in centum myriades ductis. Et quoniam mille myriades ſecundorum numerorum ſextus decimus eſt proportionalis ab unitate: & centum myriades ab unitate ſeptimus eſt ex eadem proportionalitate: factus numerus erit eiuſdem ordinis uigeſimus ſecundus. Horum autem duo & uiginti numerorum, primi octo una cum unitate primorum numerorum ſunt: octo ſequentis ſecundorum: reliqui tertiorum, quorum extremus eſt decem myriades tertiorum numerorum. ex quo manifeſtum eſt, numerum arenæ, quæ æqualis ſit ſphæræ decies mille digitorum diametrum habenti minorem eſſe, quàm tertiorum numerorum myriades decem. Et quoniam ſphæra, quæ diametrum habet ſtadio æqualem minor eſt ſphæra habente diametrum decies mille digitorum: patet arenæ numerum, cuius magnitudo ſit æqualis ſphæræ diametrum ſtudio æqualem habente, minorem eſſe decem myriadibus tertiorum numerorum. Rurſus ſphæra centum ſtadiorum diametrũ habens ſphæræ habentis diametrum ſtadii unius, multiplex eſt myriadibus centum. Si igitur ex arena fiat ſphæra æqualis ei, quæ diametrum habet centum ſtadiorum: minor erit arenæ numerus, quã qui fit decem myriadibus tertiorum numerorum in centum myriades multiplicatis. quia uero tertiorum numerorum decem myriades uigeſimus ſecundus eſt ab unitate proportionalis: & centum myriades ab unitate ſeptimus eſt ex eodem proportionis ordine: qui fit numerus similiter erit ex eodem uigesimus octauus ab unitate. sed horum octo & uiginti, primi quidem octo cum unitate sunt primorum numerorum: octo, qui sequuntur secundorum: alii octo tertiorum: reliqui quatuor quartorum: estque eorum ultimus quartorum numerorum milleunitates. manifestum est igitur numerum arenæ, quæ magnitudinem obtinet æqualem sphæræ centum stadiorum diametrum habenti, minorem esse mille unitatibus quartorum numerorum. Rursus sphæra diametrum habens denum millium stadiorum, sphæræ habentis diametrum centum stadiorum, multiplex est centum myriadibus. Quòd si fiat ex arena sphæra tanta magnitudine, quanta est, quæ diametrum habet denum millium stadiorum: minor erit eius arenæ numerus, quàm qui producitur multiplicatis mille unitatibus quartorum numerorum in centum myriades: & cum mille unitates quartorum numerorum, uigesimus octauus sit numerus ab unitate proportionalis: centum uero myriades eius proportionalitatis septimus: erit is, qui producitur ex eodem ordine trigesimus quartus. Itaque horum quatuor & triginta, octo quidem primi cum unitate primorum numerorum sunt: octo qui sequuntur secundorum: alii octo tertiorum: deinde alii octo quartorum: reliqui uero duo quintorum: & eorum extremus est decem unitates quintorum numerorum. constat igitur numerum arenæ, cuius magnitudo sit æqualis sphæræ denum millium stadiorum diametrum habenti, minorem esse, quàm quintorum numerorum decem unitates. Rursus sphæra diametrum habens centum myriadum stadiorum, sphæræ habentis diametrum stadiorum denum millium, multiplex est centum myriadibus. & idcirco si ex arena fiat sphæra magnitudinem habens æqualem sphæræ centum myriadum stadiorum diametrum habenti: numerus eius minor erit, quàm qui fit decem unitatibus quintorum numerorum in centum myriades multiplicatis. Et cum decem unitates quintorum numerorum ab unitate trigesimus quartus sit proportionalis: & centum myriades sit eiusdem ordinis septimus: factus numerus erit quadragesimus ab unitate. Horum uero quadraginta, primi octo cum unitate sunt primorum numerorum: qui hos sequuntur octo secundorum: alii octo tertiorum: deinde octo alii quartorum: postremo reliqui octo quintorum, quorum ultimus est mille myriades quintorum numerorum. ergo manifestum est arenæ numerum, quæ magnitudinem habeat æqualem sphæræ centum myriadum stadiorum diametrum habenti, minorem esse mille myriadibus

bus quintorum numerorum. ſphæra autem diametrum habens decies mille myriadum ſtadiorum, ſphæræ diametrum centum myriadum ſtadiorum habentis multiplex eſt centum myriadibus. Si igitur ex arena fiat ſphæra, cuius magnitudo ſit æqualis ſphæræ habenti diametrum ſtadiorum decies mille myriadum: minor erit arenæ numerus, quàm qui producitur ex multiplicatione mille myriadum quintorum numerorum in centum myriades. Et quia quintorum numerorum mille myriades, quadrageſimus numerus eſt ab unitate proportionalis: centum uero myriades ſeptimus eſt ex eadem proportionalitate: qui producitur numerus erit ab unitate quadrageſimus ſextus. Horum autem ſex & quadraginta primi quidem octo cum unitate primorum numerorum ſunt: ſecundi octo ſecundorum: tertii tertiorum: quarti quartorum: quinti quintorum: reliqui ſex ſextorum, quorum ultimus eſt decem myriades ſextorum numerorum. perſpicuum ergo eſt numerum arenæ magnitudinem habentis ſphæræ æqualem, cuius diameter eſt decies mille myriadum ſtadiorum, minorem eſſe, quàm ſextorum numerorum myriades decem. Rurſus ſphæra diametrum habens centum myriadum myriadum ſtadiorum, ſphæræ habentis diametrum decies mille myriadum ſtadiorum multiplex eſt centum myriadibus. quare ſi fiat ex arena ſphæra æqualis ſphæræ, quæ habeat diametrum centum myriadum myriadum ſtadiorum: eius arenæ numerus minor erit, quàm qui fit ex multiplicatione decem myriadum ſextorum numerorum in myriades centum. Et quoniam ſextorum numerorum decem myriades, numerus proportionalis eſt ab unitate quadrageſimus ſextus: & centum myriades ſeptimus eſt ex eodem proportionis ordine: qui producitur numerus erit ab unitate quinquageſimus ſecundus. Ex his uero quinquaginta duobus, octo & quadraginta una cum unitate ſunt eorum, qui primi, ſecundi, tertii, quarti, quinti, & ſexti dicuntur: reliqui quatuor eorum, qui ſeptimi: & extremus eſt mille unitates ſeptimorum numerorum. unde conſtat numerum arenæ, quæ magnitudinem habeat æqualem ſphæræ centum myriadum myriadum ſtadiorum diametrum habenti, minorem eſſe mille unitatibus ſeptimorum numerorum. Itaque quoniam oſtenſa eſt mundi diameter minor eſſe, quàm centum myriadum myriadum ſtadiorum: erit numerus arenæ magnitudinem habentis mundo æqualem minor mille unitatibus ſeptimorum numerorum: oſtenſum eſt igitur nume

rum

rum arenæ, quæ magnitudine ſit æqualis mundo à quamplurimis aſtrologis appellato, minorem eſſe, quàm ſeptimorum numerorũ mille unitates. At uero arenæ numerum magnitudinem habentis æqualem ſphæræ tantæ, quantam Ariſtarchus ponit ſtellarum inerrantium, minorem eſſe, quàm mille myriades octauorum numerorum, oſtendetur hoc modo. Nam cum poſitum ſit, terram ad mundum à nobis dictum eam habere proportionem, quàm habet dictus mundus ad ſphæram ſtellarum inerrantium ab Ariſtarcho poſitam: & diametri ſphærarum eandem inter ſe proportionem habent. mundi autem diameter, ut mõſtratum eſt, minus quàm decies millies continet terræ diametrũ: & diameter ſtellarum inerrantium minus, quàm decies millies mundi diametrum continet. Et cum ſphæræ ad inuicem proportionem habeant triplam eius, quæ eſt diametrorum: ſtellarum inerrantium ſphæra, quam ponit Ariſtarchus, minus quàm decies millies decies mille myriades mundorum continebit. oſtenſum autem eſt numerum arenæ, quæ magnitudinem habeat æqualem mundo, minorem eſſe mille unitatibus ſeptimorum numerorum. Si igitur ex arena fiat ſphæra tanta magnitudine, quantam Ariſtarchus ponit eſſe ſtellarum inerrantiũ: eius numerus minor erit, quàm qui fit mille unitatibus ſeptimorum numerorum in decies millies decies mille myriades ductis. Et quoniam ſeptimorum numerorum mille unitates quinquageſimus ſecundus eſt proportionalis ab unitate: & decies millies decies mille myriades ab unitate tertius decimus eſt ex eodem ordine: patet factum numerum eſſe ab unitate ſexageſimum quartum. hic autem eſt octauorum octauus; hoc eſt octauorum numerorum mille myriades. manifeſtum eſt igitur arenæ numerum, quæ magnitudinem obtineat æqualem ſphæræ ſtellarum inerrantium ab Ariſtarcho poſitæ, minorem eſſe mille myriadibus octauorum numerorum. Hæc autem rex Gelon quamplurimis quidem, qui mathematicis inſtructi non ſunt, non admodum credibilia fore arbitror: illis uero, qui ea didicerunt: & circa diſtantias, & magnitudines terræ, ſolis, lunæ, & mundi totius elaborarunt, credibilia prorſus eſſe propter demonſtrationem. Quapropter & de his ipſis ſpeculari aliquos non abſurdum eſſe exiſtimaui.



AL DVS

COMMENTARII

IN OPERA NON NVLLA ARCHIMEDIS.

VENETIIS,
apud Paulum Manutium, Aldi F.
M D L V I I I.

EVTOCII ASCALONITAE

Commentarius
in librum de circuli dimensione
à Federico Commandino nuper in latinam
linguam conuersus.

Eiusdem Federici Commandini commentarii
in librum
de Circuli dimensione.
Lineis spiralibus.
Quadratura paraboles.
Conoidibus, & sphæroidibus.
Arenæ numero.

OCTAVIO FARNESIO, PARMENSIVM, ET *PLACENTINORVM* DVCI.

CVM me sæpenumero, DVX PRAESTANTISSIME, hortatus sis, ut in lucem proferrem commentarios quosdam meos in Archimedem, quos mihi ipsi conscripseram: tua impulsus auctoritate, nullum amplius locum hortationibus tuis relinquere decreui; præsertim cum tu mathematicas disciplinas optime calleas. nam, ut peritissimus es regendorum exercituum dux, ita nihil omittis eorum, quæ ad militares artes comprehendendas attinent. Hiero Syracusanorum rex Archimedem maximo in honore semper habuit: eiq; auctor fuit, ut geometriam à reliqua philosophia seiungeret, & cum re militari coniungeret. Marcellus in Romanis imperatoribus princeps, cum uiuentem Archimedem pro dignitate ornare non potuisset, ea officia mortuo præstitit, quæ tanti uiri merita postulabant. Ad te uero, Hieroni regi nobilitate generis, & Christianæ uitæ innocentia facile antecellentem, Marcello autem nulla ratione inferiorem, spectat, hos meos in Archimedem commentarios, qui hortatu tuo æditi sunt, in tuam etiam clientelam recipere, Commandinumq; tuum, Archimedis studiosissimum, in eorum, qui te unice colunt, numero reponere.

Federicus Commandinus.

EVTOCII ASCALONITAE IN ARCHIMEDIS CIRCVLI *DIMENSIONEM* COMMENTARIVS.

CVM in Archimedis scriptis explicandis elaborauerim, quæ & faciliora essent, & minori consideratione indigerent: consequens uidetur esse, & instituto meo consentaneum, ut quæ ex illis maiorem diligentiam, atque operam desiderant, quantum in nobis erit, adiungamus ad ea, quæ prius in libros de sphæra, & cylindro elucubrauimus. Si quidem in ijs, quæ difficiliora sunt, & maiori studio indigent, operam in primis ponere debemus. Sit ergo deinceps propositus nobis libellus, qui inscriptus est, Circuli dimensio, in quo auctoris propositum ex ipsa inscriptione intueri possumus: uult enim ostendere, cui spatio rectilineo circulus sit æqualis; quæstionem scilicet à clarissimis ante ipsum philosophis pertractatam. nam constat hoc esse quæsitum illud, quod Hippocrates chius, & Anthiphon, cum diligenter inuestigassent, eos nobis paralogismos inuenerunt, quos probè nosse illos arbitror, qui geometricam Eudemi historiam, & Aristotelis libros propriam huiusce generis doctrinam complectentes euoluerint. Verumtamen liber hic, ut inquit Heraclides in Archimedis uita, multas affert ad usum uitæ commoditates: ostendit enim circuli circumferentiam diametri triplam, & insuper minorem, quàm sesquiseptimam, maiorem uero, quàm superdecies partientem septuagesimas primas. Hoc igitur, ut dicit, proximè est demonstratum: nam per quasdam spirales lineas inuenta est ab ipso recta linea datæ circuli circumferentiæ æqualis.

IN PROPOSITIONEM I.

PRIMVM Theorema etiam ijs, qui aliquantulum in Mathematicis sunt exercitati, nihil habere quæstionis uidetur; cum Archimedis uerba manifeste exponantur, & conclusionem ipsam nulla re omissa ad propositionem referant. sed tamen uidetur Archimedes ad demonstrationem perperam usus re quapiam, quæ nondum sit demonstrata: exponens enim triangulum rectangulum, habeat, inquit, unum eorum laterum, quæ circa rectum angulum sunt, æquale semidiametro, alterum uero cicumferentiæ æquale. At qui circumferentiæ circuli quomodo æqualem rectam lineam sumamus, neque ab ipso, neque ab alio quopiam demonstratum est. Verum illud scire oportet, nihil quod non conueniat ab Archimede scribi: nam circuli circumferentiam magnitudinem esse omnibus perspicuum est. atque, ut arbitror, ex earum numero, quæ ad unum duntaxat diuisibiles sunt. est autem & recta linea illius eiusdem speciei. & quanquam nondum appareat fieri posse, ut circumferentiæ circuli æqualem rectam lineam inueniamus: esse tamen natura rectam quandam ipsi æqualem à nullo unquam est dubitatum. Illud ergo, quod ab Archimede proponitur tale est, triangulum rectangulum habens latera, ut dictum est, æquale esse circulo. Quare propositum exponens minime accusandus uidetur; quin potius admirabilis illis ipsis existimari debet, quòd ad magnitudinem quæsitorum manifestam, & facilem inuentionem adiunxerit. Vt autem dictum est, primum theorema nihil habet quæstionis. nam triangulum p o r maius esse, quàm dimidium figuræ a f o m: & simpliciter dato circulo posse figuram rectilineam circumscribi: ita ut portiones, quæ inter circuli circumferentias, & latera circumscriptæ figuræ interijciuntur, minores sint dato spatio; manifeste dictum est è nobis in ijs, quæ in primum librum de sphæra, & cylindro conscripsimus.

IN PROPOSITIONEM III.

IN hoc theoremato continenter iubemur, numeri dati latus quadratum inuenire, sed hoc in numero non quadrato perfecte inueniri non potest. nam numerus in seipsum multiplicatus producit quendam numerum quadratum: numerus autem, & partes si in sese multiplicentur, non faciunt *numerum integrum, sed & partes. Verum quemadmodum oporteat latus proximè producens datum numerum inuenire, dictum est ab Herone in metricis, dictum est & à Pappo, Theone, & compluribus alijs, qui magnam Claudij Ptolemæi compositionem explicarunt. Quare non est, quamobrem in hoc laboremus, cum liceat ijs, qui eiusmodi studio tenentur, ex illis sumere.*

A Et angulus f e c sit tertia pars recti.] *si enim hexagoni circumferentiam bifariam secantes, & eius dimidium sumentes linea à centro ducta, iunxerimus ipsam e f: erit c e f angulus tertia pars recti: nam circumferentia ad e sumpta, cum sit dimidia circumferentiæ hexagoni, erit circuli pars duodecima. Vnde & angulus c e f ad centrum duodecima pars erit quatuor rectorum, & ob id, tertia unius recti.*

B Ergo linea e f ad f c eam proportionem habet, quam 306 ad 153.] *nam dupla est e f ipsius f c; quod ex hoc patet. si enim ipsam f c lineam ad m producentes, æqualemq; ipsi sumentes, iunxerimus à puncto e: constituetur ad m angulus; qui erit duæ tertiæ unius recti. est autem & angulus ad e duæ tertiæ recti: & pariter angulus ad f. æquilateri igitur trianguli dimidium est ipsum c e f. Quòd cum basis trianguli æquilateri, quæ est æqualis ipsi e f, bifariam secetur ad c: dupla erit e f ipsius c f.*

C Ipsa uero e c ad c f proportionem habet, quam 265 ad 153.] *Quoniam enim e f ponitur esse 306: si ipsa in seipsam multiplicetur: fient 93636. est autem c f 153. quadratum igitur ipsius erit 23409. et quoniam quadratum e f æquale est duobus quadratis e c, c f: si ab ipso e f quadrato, quod est 93636 auferamus quadratum c f, hoc est 23409: relinquetur quadratum e c 70227, cuius latus 265, et adhuc pars minima, et insensibilis. deficit enim quadratum 265 ab exquisito quadrato unitatibus duabus. multiplicationes autem subijciuntur.*

e f 306	*f c* 153	*e c* 265
306	153	265
1836	459	1325
918	765	1590
93636	153	530
23409	23409	70225
70227 *cuius latus* 265 *proximè*		
70225		
2		

D Secetur angulus f e c bifariam ducta linea e g. ut igitur f e ad e c, ita est f g ad g c.] *per tertium Theorema sexti libri elementorum Euclidis, & componenti, ut utraque f e, e c ad e c, ita f c ad c g: et permutanti ut utraque f e, e c ad f c, ita e c ad c g. utraque autem f e, e c maior est, quàm 571. nanque f e ponitur 306, & e c 265, & adhuc pars quædam. quare maior est, quàm 571. ipsa uero f c est 153. utraque igitur f e, e c ad f c maiorem proportionem habet, quàm 571 ad 153. & idcirco e c ad c g maiorem habet, quàm 571 ad 153.*

E Quare e g ad c g eam potestate proportionem habet, quam 349450 ad 23409.] *hoc autem ita colligetur. quoniam enim ostensum est e c ad c g maiorem habere proportionem, quàm 571 ad 153: si quis ponat ipsam quidem e c esse 571, ipsam uero c g 153: erit quadratum e c 326041, & quadratum c g 23409. Quòd cum utraque sint æqualia quadrato e g: erit ipsum e g quadratum 349450, cuius latus 591 $\frac{1}{8}$ proximè: deficit enim quadratum 591 $\frac{1}{8}$ ab exquisito quadrato unitatibus 21 $\frac{15}{64}$. ergo e g ad g c potestate proportionem habet, quam 349450 ad 23409, longitudine uero, quam 591 $\frac{1}{8}$ proximè ad 153. multiplicationes autem subijciuntur.*

e c 571	*g c* 153	*e g* 591 $\frac{1}{8}$
571	153	591 $\frac{1}{8}$
571	459	349428 $\frac{49}{64}$
3997	765	
2855	153	
326041	23409	
23409		
349450 *cuius latus* 591 $\frac{1}{8}$ *proximè*		
349428 $\frac{49}{64}$		
21 $\frac{15}{64}$		

Rursus angulus g e c bifariam secetur ipsa e h linea. eadem ratione e c ad c h maiorem proportionom habet, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153.] *Fit enim propter bipartitionem anguli, ut g e ad e c, ita g h ad h c. & componenti, ut utraque g e, e c ad e c, ita g c ad c h. & permutanti, ut utraque g e, e c ad g c, ita e c ad c h. & est ipsa quidem e c 571, & adhuc pars quædam; ipsa autem e g 591 $\frac{1}{8}$. & pars quædam. quare maiora sunt, quàm 1162 $\frac{1}{8}$. & est g c 153. utraque igitur g e, e c ad g c maiorem habet proportionem, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153.*

Quare h e, ad h c maiorem habet, quàm 1172 $\frac{1}{8}$ ad 153.] *Quoniam enim ostensa est e c ad c h maiorem proportionem habere, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153: si quis ponat ipsas sic habere: erit quadratum e c 1350534 $\frac{33}{64}$; quadratum autem c h 23409. ergo quadratum e h, cum sit æquale quadratis e c, c h, erit 1373943 $\frac{33}{64}$; cuius latus 1172 $\frac{1}{8}$ proximè: deficit enim ab exquisito quadrato ipsius, unitatibus 66 $\frac{1}{2}$. multiplicationes autem subijciuntur.* G

e c 1162 $\frac{1}{8}$	*h c* 153	*e h* 1172 $\frac{1}{8}$
1162 $\frac{1}{8}$	153	1172 $\frac{1}{8}$
1350534 $\frac{33}{64}$	23409	1373877 $\frac{1}{64}$
23409		66 $\frac{1}{2}$
1373943 $\frac{33}{64}$	*cuius latus* 1172 $\frac{1}{8}$ *proximè*	1373943 $\frac{33}{64}$

Secetur item h e c angulus bifariam ducta e k. habet e c ad c k proportionem maiorem, quàm 2334 $\frac{1}{4}$ ad 153.] *Rursus enim propter bipartitionem anguli h e c, est ut h e ad e c, ita h k ad c k: & componenti ut utraque h e, e c ad e c, ita h c ad c k: & permutanti ut utraque h e, e c ad h c, ita e c ad c k. Quoniam ergo ostensa est h e 1172 $\frac{1}{8}$, & adhuc pars quædam: utraque h e, e c maior est, quàm 2334 $\frac{1}{4}$. ponitur autem h c 153. utraque igitur h e, e c ad h c maiorem proportionem habet, quàm 2334 $\frac{1}{4}$ ad 153.* H

Ergo e k ad c k maiorem habet, quàm 2339 $\frac{1}{4}$ ad 153.] *Rursus quoniam ponitur e c 2334 $\frac{1}{4}$, ipsa autem c k 153: erit quadratum e c 5448723 $\frac{1}{16}$, & quadratum c k 23409; quibus quadratis æquale est quadratum k e. erit igitur k e quadratum 5472132 $\frac{1}{16}$; cuius latus 2339 $\frac{1}{4}$ proximè. deficit enim ab exquisito, unitatibus 41 $\frac{1}{2}$ multiplicationes autem subijciuntur.* I

e c 2334 $\frac{1}{4}$	*c k* 153	*k e* 2339 $\frac{1}{4}$
2334 $\frac{1}{4}$	153	2339 $\frac{1}{4}$
5448723 $\frac{1}{16}$	23409	5472090 $\frac{9}{16}$
23409		41 $\frac{1}{2}$
5472132 $\frac{1}{16}$	*cuius latus* 2339 $\frac{1}{4}$ *proximè*	5472132 $\frac{1}{16}$

Secetur demum angulus k e c bifariam ipsa l e. habet igitur e c ad c l maiorem proportionem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153.] *Rursus enim propter bipartitionem anguli, est ut k e ad e c, ita k l ad l c: et cõponenti, ut utraque k e, e c ad e c, ita k c ad c l: et permutanti, ut utraque k e, e c ad k c, ita e c ad c l. atque est ipsa quidem k e 2339 $\frac{1}{4}$, & pars quædam; ipsa uero e c 2334 $\frac{1}{4}$, & item pars quædam. utraque igitur k e, e c maior est, quàm 4673 $\frac{1}{2}$. & est k c 153. quare utraque k e, e c ad k c maiorem proportionem habet, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153. Vt autẽ utraque k e, e c ad k c, sic e c ad c l. ergo & e c ad c l maiorem proportionem habet, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153. Itaque quoniam f e c angulus, cum sit tertia pars recti, duodecima pars est quatuor rectorum: eius autem dimidium, angulus scilicet g e c eorundem est pars uigesima quarta: & eius dimidium h e c quadragesima octaua: et rursus eius dimidium k e c nonagesima sexta; cuius item dimidium l e c pars centesima nonagesima secunda. Ponatur, inquit, ipsi æqualis angulus c e m: & producatur f c ad m. angulus ergo l e m duplus scilicet anguli l e c, nonagesima sexta pars est quatuor rectorum. quare & l m latus est polygoni circulo circumscripti, quod sex & nonaginta lateribus continetur. Quoniam igitur e c ad c l ostensum est maiorem habere proportionem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153: estq́; ipsius e c dupla a c, & ipsius l c dupla l m; habet a c ad l m maiorem proportionem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153; & è contrario l m ad a c minorem habet, quàm 153 ad 4673 $\frac{1}{2}$. & quia l m latus est polygoni sex & nonaginta laterum, eius ambitus est 14688: nam 96 in 153 multipli-* K *plicata dictum numerum producunt. ambitus ergo polygonì ad diametrum a c minorem proportionem habet, quàm 14688 ad 4673 $\frac{1}{2}$. quare triplus est diametri circuli, & adhuc excedit 667 $\frac{1}{2}$. hæc autem minora sunt, quàm septima pars diametri, unitatis parte septima; etenim ipsorum 667 $\frac{1}{2}$ septupla, quæ sunt 4672 $\frac{1}{2}$, minora sunt, quàm diameter, unitate ipsa. Quoniam igitur ambitus polygoni minor est, quàm triplus sesquiseptimus; circuli uero ambitus minor est ambitu polygoni: multo igitur circuli ambitus minor est, quàm triplus sesquiseptimus ipsius diametri.*

L Sit circulus circa diametrum a c] *deinceps uero reliquam partem theorematis construens, Sit, inquit, circulus circa diametrum a c: et angulus b a c sit tertia pars recti. id autem fiet, si à puncto c sumentes lineam c b æqualem lateri hexagoni: iungamus ipsam a b: angulus enim in circumferentia hexagoni consistens, ad centrum quidem est duæ tertiæ recti, ad circumferentiam uero tertia recti. & quoniam rectus est angulus a b c; & ipsæ b a c tertia pars recti: erit a c b recti duæ tertiæ. si igitur producentes c b ad punctum b: & æqualem ipsi sumentes iunxerimus ex a puncto; æquilaterum triangulum erit. & cum a b cathetus basim bifariam secet: dupla est a c ipsius c b. Quòd si rursus sumamus a c 1560: erit c b 780: & quadratum a c 2433600: quadratum uero c b 608400. & si auferatur c b quadratum à quadrato a c: reliquum erit quadratum a b 1825200; cuius latus 1351 proximè: excedit enim exquisitum eius quadratum sola unitate. Quam ob caussam dixit, a b ad b c minorem habere proportionem, quàm 1351 ad 780. multiplicationes autem subijciuntur.*

a c 1560	c b 780	a b 1351
1560	780	1351
2433600	608400	1825201
608400		1825200
1825200 *cuius latus proximè* 1351		1

M Secetur bifariam angulus b a c ducta linea a g. itaque quoniam æqualis est angulus b a g, angulo g c b.] *In eadem enim circumferentia consistunt.*

N Sed & ipsi g a c. erit & g c b angulus ipsi g a c æqualis, & angulus communis a g c est rectus. ergo & tertius angulus g f c tertio a g c æqualis erit; & triangulum a g c triangulo c g f æquiangulum. quare ut a g ad g c, ita c g ad g f, & a c ad c f.] *Aequiangulorum enim triangulorum proportionalia sunt latera, & quæ eiusdem sunt rationis æqualibus angulis subtenduntur.*

O Sed ut a c ad c f, ita & utraque c a, a b ad b c. ut igitur utraque b a, a c ad b c, ita a g ad g c.] *Quoniam enim b a c angulus bifariam secatur ducta a f linea, est ut b a ad a c, ita b f ad f c: & componenti ut utraque b a, a c ad a c, ita b c ad c f: & permutanti ut utraque b a, a c ad b c, ita a c ad c f. & est ipsa quidem a b minor, quàm 1351: ipsa autem a c 1560; & b c 780. utraque igitur b a, a c ad b c minorem proportionem habet, quàm 2911 ad 780. quare & a c ad c f minorem habet, quàm 2911 ad 780. ut autem a c ad c f, ita a g ad g c. ergo & a g ad g c minorem habet proportionem, quàm 2911 ad 780: & propterea quadratum a g erit 8473921, & quadratum g c 608400. atque his ipsis æquale est quadratum a c; quod erit 9082321: & eius latus 3013 $\frac{3}{4}$ proximè; excedit enim exquisitum quadratum unitatibus 368 $\frac{1}{16}$. Quare dixit, a c ad c g minorem proportionem habere, quàm 3013 $\frac{3}{4}$ ad 780. multiplicationes autem subijciuntur.*

a g 2911	g c 780	a c 3013 $\frac{3}{4}$
2911	780	3013 $\frac{3}{4}$
8473921	608400	9082689 $\frac{1}{16}$
608400		368 $\frac{1}{16}$
9082321 *cuius latus* 3013 $\frac{3}{4}$ *proximè*		9082321

Q Rursus secetur bifariam angulus c a g ducta a h.] *Nam propter bipartitionem anguli similitudinem triangulorum, laterum proportionalitatem, compositamq;, & permutatam rationem, erit ut utraque g a, a c ad c g, ita a h ad h c. & posita est a g minor, quàm 2911;*

& a c

& a c minor, quàm $3013\frac{3}{4}$. *utraque igitur g a, a c minor est, quàm* $5924\frac{3}{4}$. *ipsa uero g c est 780. Quare utraque g a, a c ad c g minorem habet proportionem, quàm* $5924\frac{3}{4}$ *ad 780: & idcirco a h ad h c minorem habet, quàm* $5924\frac{3}{4}$ *ad 780. ergo a h ad h c habet minorem proportionem, quàm* $455\frac{3}{4}$ *ad 60: utraque enim utriusque est pars tertia decima; & horum quadrupla a h ad h c minorem habet, quàm 1823 ad 240. Quamobrem dixit, utranque utriusque esse* $\frac{4}{13}$. *& quoniam a h est 1823: erit quadratum ipsius 3323329. & est h c 240, cuius quadratum 57600. est autem duobus quadratis a h, h c æquale quadratum a c. quadratum igitur a c erit 3380929: & eius latus* $1838\frac{9}{11}$: *nam quadratum* $1838\frac{9}{11}$ *superat exquisitum quadratum unitatibus [321] proxime. quare a c ad c h minorem proportionem habet, quàm* $1838\frac{9}{11}$ *ad 240. multiplicationes autem subijciuntur.* $323\frac{37}{121}$

a h 1823	*h c* 240	*a c* $1838\frac{9}{11}$
1823	240	$183\frac{9}{11}$
3323329	57600	$3381252\frac{37}{121}$
57600		3380929
3380929, *cuius latus* $1838\frac{9}{11}$ *proximè*		$323\frac{37}{121}$

Secetur item bifariam angulus h a c ducta k a.] *Rursus propter bipartitionem anguli, triangulorum similitudinem, laterum proportionalitatem, & compositam, permutatamq; rationem, est ut utraque h a, a c ad c h, ita a k ad k c. sed utraque h a, a c minor est, quàm* $3661\frac{9}{11}$: *quoniam h a posita est 1823, & a c* $1838\frac{9}{11}$. *est autem & h c 240. utraque igitur h a, a c ad c h minorem proportionem habet, quàm* $3661\frac{9}{11}$ *ad 240. quare & a k ad k c minorem habet, quàm* $3661\frac{9}{11}$ *ad 240. At ipsorum* $3661\frac{9}{11}$ *undecim quadragesimæ sunt 1007: ipsorum autem 240 totidem quadragesimæ 66. ergo a k ad k c minorem habet proportionem, quã 1007 ad 66. atque est quadratum a k 1014049: & quadratum k c 4356. quibus cum sit æquale a c quadratum; erit ipsum 1018405, & ipsius latus* $1009\frac{1}{6}$ *proximè: excedit enim exquisitum quadratum unitatibus* $12\frac{13}{36}$. *quare a c ad c k minorem habet proportionem, quàm* $1009\frac{1}{6}$ *ad 66. multiplicationes uero subijciuntur.* R

a k 1007	*k c* 66	*a c* $1009\frac{1}{6}$
1007	66	$1009\frac{1}{6}$
1014049	4356	$1018417\frac{13}{36}$
4356		1018405
1018405, *cuius latus* $1009\frac{1}{6}$ *proximè*		$12\frac{13}{36}$

Secetur postremo k a c angulus l a.] *Propter eadem, quæ sæpius diximus, est ut utraque k a, a c ad k c. ita a l ad l c, atque est ipsa quidem a k minor, quàm 1007: ipsa uero a c minor, quàm* $1009\frac{1}{6}$: *& k c 66. utraque igitur k a, a c ad k c minorem habet proportionem, quàm* $2016\frac{1}{6}$ *ad 66. ergo & a l ad l c minorem habet, quàm* $2016\frac{1}{6}$ *ad 66. & quoniam a l posita est* $2016\frac{1}{6}$: *erit quadratum ipsius* $4064928\frac{1}{36}$. *& est l c 66, cuius quadratum 4356; æquale autem ipsis est quadratum a c, erit igitur quadratũ a c* $4069284\frac{1}{36}$, *& eius latus* $2017\frac{1}{4}$ *proximè, excedit enim exquisitum quadratum unitatibus* [$13\frac{6}{25}$] *quare a c ad c l minorem proportionem habet, quàm* $2017\frac{1}{4}$ *ad 66. multiplicationes autem subijciuntur.* S $13\frac{77}{144}$

a l $2016\frac{1}{6}$	*l c* 66	*a c* $2017\frac{1}{4}$
$2016\frac{1}{6}$	66	$2017\frac{1}{4}$
$4064928\frac{1}{36}$	4356	$4069297\frac{9}{16}$
4356		$4069284\frac{1}{36}$
$4069284\frac{1}{36}$ *cuius latus* $2017\frac{1}{4}$		$13\frac{77}{144}$

Quoniam igitur a c ad c l minorem proportionem habet, quàm $2017\frac{1}{4}$ *ad 66: è contrario l c ad c a maiorem habet proportionem, quàm 66 ad* $2017\frac{1}{4}$. *& quoniam c b circumferentia sexta pars*

pars est ipsius circuli: erit circumferentia g c pars duodecima: h c uigesima quarta: k c quadragesima octaua: & l c nonagsima sexta. quare recta linea l c latus est polygoni, quod sex et nonaginta lateribus continetur. atque est l c 66. polygoni igitur ambitus ad diametrum circuli maiorem propositionem habet, quàm 6336 ad 2017 $\frac{1}{4}$. hæc autem sunt tripla, & adhuc superant
$28\,\frac{117}{264}$ *284 $\frac{1}{4}$; quæ quidem maiora sunt, quàm decem septuagesimæ primæ: nanque earum una est [27 $\frac{2}{3}$]*
$284\,\frac{17}{142}$ *proximè: & harum decupla [277]. multo igitur maior est circuli circumferentia, quàm tripla super decies partiens septuagesimas primas. Numeri igitur ab eo positi, ut fieri potuit, mediocriter explicati sunt. Sciẽdum autem Apollonium Pergæum ἐν τῷ ὠκυτοβόῳ idem per alios numeros demonstrasse, adduxisseq; ad maiorem propinquitatem. Quod quidem exquisitius factum uidetur. sed tamen ad Archimedis propositũ nihil confert: diximus enim ipsum in hoc libello proposuisse id, quod propinquum est, inuenire, propter necessarios uitæ usus. Quare neque Porus Nicænus opportune accusauit Archimedem, quòd non exacte inuenerit, cui rectæ lineæ circuli circumferentia sit æqualis. ex quibus ipse in libris super ea re conscriptis dixit, præceptorem suum, Philonem intelligens Gadareum, ad exactiores numeros rem adduxisse, quàm sint ij, qui ab Archimede sunt expositi, uidelicet 7 & 22: omnes enim deinceps uidentur propositum eius ignorasse. utuntur autem multiplicationibus myriadum, & diuisionibus, quas non facile assequetur, nisi qui in Magni rationibus fuerit uersatus. Quòd siquis omnino uoluerit ad minima redigere, utatur ijs, quæ in mathematica compositione à Claudio Ptolemæo tradita sunt, per partes, & minutiis, & per rectas lineas in circulo aptatas. atque ego id iam fecissem, nisi, quod sæpius dixi, intellexissem, fieri non posse, ut per ea, quæ hic posita sunt, exquisite inueniatur recta linea circuli circumferentiæ æqualis: quanquam ei, quod proximum est, & ferè idem attentatur. itaque sufficiunt ea, quæ ab Archimede hoc loco dicta sunt.*

FEDERICI COMMANDINI
IN EANDEM CIRCVLI DIMENSIONEM
COMMENTARIVS.

IN PROPOSITIONEM I.

SECENTVR'QVE circumferentiæ bifariam, & ſint portio- *A*
nes iam minores exceſſu, quo circulus ipſum triangulum excedit.] *Vel hoc loco non nulla deſiderantur, uel ita breui ſermone uſus eſt Archimedes, quoniam ex duodecimo elementorum libro, propoſitione ſecunda, manifeſte patet, quo modo per figuram in circulo deſcriptam tandem relinquantur quædam portiones, quæ minores ſint qualibet propoſita magnitudine.*

Sumatur centrum n & perpendicularis n x.] *Sumatur centrum circuli, quod ſit n: & ab ipſo ducatur n x perpendicularis ad latus figuræ inſcriptæ. erit n x minor circuli ſemidiametro, hoc eſt trianguli rectanguli latere.* *B*

Quare figura rectilinea minor eſt e triangulo.] *Si enim linea n x æqualis eſſet trianguli lateri: haberent omnia triangula, ex quibus figura rectilinea conſtat, ad triangulum e eandem proportionem, quam baſes omnes ad ipſius trianguli baſim: & idcirco figura eo minor eſſet. Nunc uero cum etiam linea n x minor ſit latere trianguli: figuram ipſam triangulo e multo minorem eſſe neceſſe eſt.* *C* prima VI.

Triangulum igitur r o p maius eſt, quàm dimidium figuræ o f a m.] *Nam triangulum r a o maius eſt, quàm ipſum m a r. quare multo maius, quàm figura contenta rectis lineis a r, r m, & circuli circumferentia a m: quæ quidem pars eſt trianguli m a r: & eadem ratione triangulum a o p maius eſt, quàm figura contenta rectis lineis a p, p f, & circumferentia circuli a f. ex quibus ſequitur totum triangulum r o p maius eſſe, quàm ſint utræque figuræ a r m, a p f: & idcirco maius, quàm dimidium figuræ o f a m.* *D* prima VI.

Itaque ſumantur portiones ipſi p f a ſimiles; quæ quidem minores ſint eo, quo triangulum e excedit a b c d circulum.] *Circumſcripto quadrato ipſi circulo, ſuperficies, quæ continentur lateribus quadrati, & circuli circumferentia, uel erunt minores exceſſu, quo triangulum excedit ipſum circulum, uel maiores, uel æquales. Sint primum minores. ergo quadratum adhuc minus eſt triangulo: quod eſt abſurdum, cum ſit eo maius: eſt enim n m æqualis catheto trianguli, & ambitus quadrati maior baſi eiuſdem. ſi uero ſint æquales; ſequitur quadratum æquale eſſe triangulo: quod item eſt abſurdum. At ſi ponantur eſſe maiores: arcus bifariam ſecentur: & per ſectionum puncta ducantur lineæ contingentes, ut dictum eſt. Cum igitur triangulum r o p ſit maius, quàm dimidium figuræ o f a m: ſublatis quatuor huiuſmodi triangulis, erit ſublatum plus, quàm dimidium dictarum ſuperficierum. Quare ſi hoc rurſus fiat, & eius, quod fuit reliquũ, ſublatum erit plus, quàm dimidium; & ſi idem continenter fiat: relinquentur ad extremum portiones, quæ minores erunt dicto exceſſu; & idem abſurdum ſequetur. oſtenſum nanque eſt in decimo libro elementorum, propoſitione prima, Duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à maiori auferatur plus, quàm dimidium: & ab eo, quod reliquum eſt, auferatur rurſus plus, quàm dimidium: hocq; ſemper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor ſit minore magnitudine expoſita.* *E*

IN PROPOSITIONEM II.

Quoniam igitur a c e triangulum ad triangulum a c d eam proportionem habet, quam 21 ad 7, triangulum autem a c d ad triangulum a e f habet eam, quam 7 ad 1: erit a c f triangulum ad triangulum a c d, ut 22 ad 7.] *Cum enim linea d e dupla ſit ipſius c d: erit tota c e ipſius c d tripla. quare & triangulum a c e ad triangulum a c d triplam habet proportionem: hoc eſt eam, quam 21 ad 7: & cum triangulum a c d ad ipſum a e f eandem habeat, quam 7 ad 1: habebit ex æquali a c e triangulum ad ipſum a e f eam, quam 21 ad 1: & componendo utraque triangula a c e, a e f: hoc eſt triangulum a c f ad a e f, quam 22 ad 1.* *A* prima VI. 22. V. 18. V.

eſt autem

est autem triangulum a e f ad a c d, ut 1 ad 7. quare rursus ex æquali triangulum a c f ad ipsum a c d erit, ut 22 ad 7.

IN PROPOSITIONEM III.

IN hoc tertio theoremate sæpissime necesse habemus, Dato latere, superficiem eius quadratam inuenire. Et contra data superficie quadrata, inuenire eius latus, siue uerum, siue uero propinquũ. nam cum superficies à quadrato numero denominatur, uerum eius latus inuenire licet; cum autem à numero non quadrato, non item; sed uero propinquum uenamur. Et insuper ex datis inter se quantitatibus compositum quod nam sit; Et si data quantitas ab altera item data auferatur, quod reliquũ sit, comperire. Et datarum quantitatum proportionem ad integras partes redigere. Quorum omnium cum operationes omnibus sint in promptu: nos demonstrationes adiungere conabimur, quas nullus hactenus, quod sciam, uniuersè complexus est. Theon quidem in magnam Claudij Ptolemæi compositionem scribens demostrauit, quomodo data superficie quadrata propinquum eius latus inueniatur, per partes, & sexagenarias primas, secundas & quæ deinceps sunt: qui modus astrologis fuit peculiaris. posteriores uero per partes, & earum, ut aiunt, fractiones idem illud efficere conati sunt: idq; duplici uia: uel enim latus, quod uero latere minus, uel quod maius esset, sumpserunt. Quæ quidem nos inferius tractabimus, postquam alia non nulla præmiserimus.

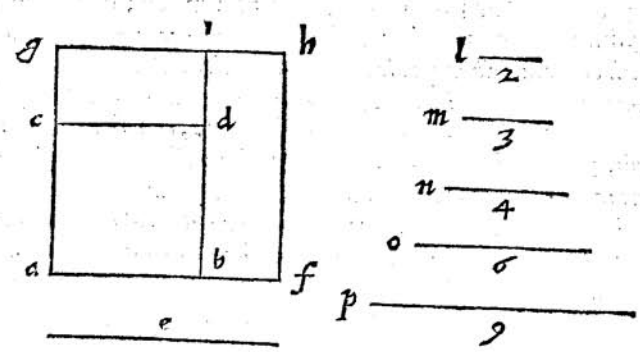
Notam, seu datam quantitatem hoc loco intelligi uolumus non solum eam, quam mensura uulgata, aut quomodocunque ad arbitrium sumpta secundum datum numerum metitur: sed etiam, quæ ad eam mensuram proportionem habet in numeris datam.

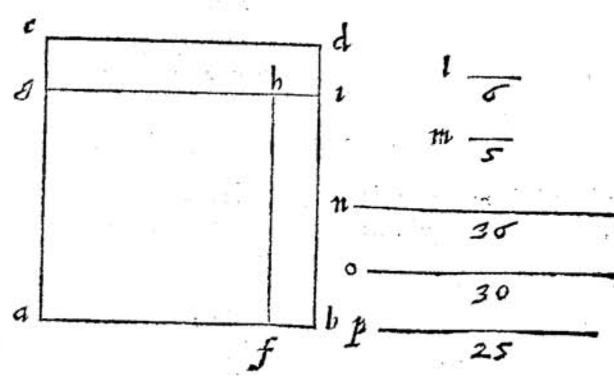
Quantitates inter se datas dicimus, quas una communis mensura metitur, uel quæ ad communem mensuram proportionem habent in numeris datam.

PROPOSITIO I.

Cuiuslibet datæ lineæ & quadratum datum erit.

SI quidem datam lineam metitur uulgata mẽsura: quadratum eius dabitur ex ijs, quæ monstrauit Ioannes Regiomontanus libro primo de triangulis, propositione prima. si uero ea ad uulgatam mẽsuram proportionem habet in numeris datam; uel erit minor uulgata mensura, uel maior. Sit primum minor; & sit ab; cuius quadratum a b c d est id, quod quærimus. linea uero e ponatur uulgata mensura. Itaque a b & a c lineas eousque producemus, quosque æquales sint ipsi e; quæ sint a f, a g: deinde completo quadrato a h, ipsam quoque b d lineam producemus ad g h in pũctum i. Quoniam igitur a b data est; quæ ad uulgatam mensuram proportionẽ ha





bet in numeris datam: sint dati numeri eius proportionis minimi l m; quorum l ad m eam proportionem habeat, quam a b ad ipsam e mensuram: ducaturq; l numerus in seipsum, & productum sit n: postea ducatur in m, & producat o: ipso autem m in se se ducto fiat p. erunt tres numeri n o p proportionales, minimi in ea proportione, quæ est l ad m. Dico iam quadratum a d eandem haberc proportionem ad quadratum a h uulgatæ mensuræ, quam habet numerus n ad ipsum p. est enim sicut a c ad a g: hoc est, sicut a b data linea ad e mensuram, ita a d quadratum ad rectangulum a i. sicut autem a b ad e, ita l numerus ad numerum m; hoc est n ad o. quare quadratum a d ad rectangulum a i eandem proportionem habet, quam n ad o. Rursus sicut a b ad e; hoc est ad a f ei æqualem, ita rectanglum a i ad quadratum a h. ergo rectangulum a i ad quadratum a h est, sicut l ad m: hoc est sicut o ad p. sed erat a d quadratum ad rectangulum a i, sicut n ad o. Quare ex æquali quadratum a d ad quadratum a h eam proportionem habet, quam n ad p. Quòd si a b data linea maior sit uulgata mensura, descripto quadrato a b c d ex linea a b abscindatur æqualis ipsi e; quæ sit a f: ex linea item a c abscindatur æqualis eidem: sitq; a g: & perficiatur quadratum a h. Similiter demonstrabitur quadratum a d ad quadratum a h eandem habere proportionem, quam habet n numerus ad numerum p. atque hoc est, quod demonstrare oportebat. Cum ergo quadratum a h uulgatæ mensuræ datum sit: & ipsum a d quadratum dabitur ex data proportione in numeris n & p.

2. VIII. — prima VI. — prima VI. — 22. V.

OPERATIO.

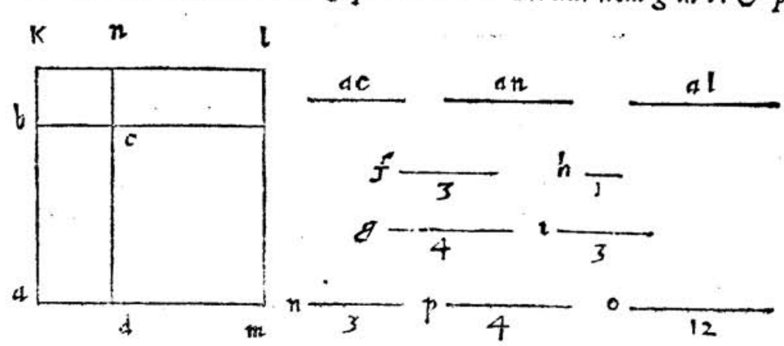
Numerorum datæ proportionis uterque in semetipsum multiplicetur; & quam proportionem habuerit quadratum primi numeri ad quadratum secundi, eandem habebit & quadratum datæ lineæ, quod quærimus, ad quadratum uulgatæ mensuræ.

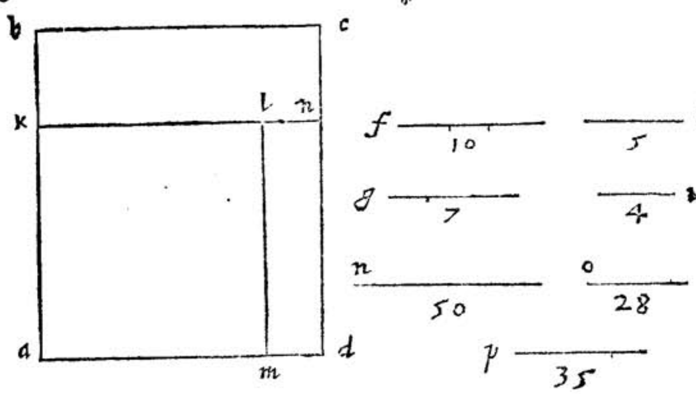
$$\frac{2-2}{3-3}\ \frac{4}{9} \qquad\qquad \frac{6-6}{5-5}\ \frac{36}{25}$$

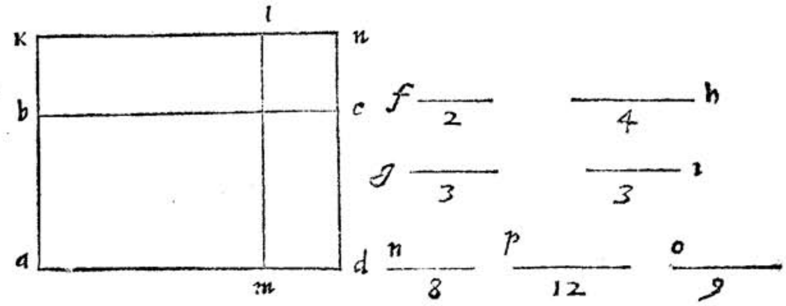
PROPOSITIO II.

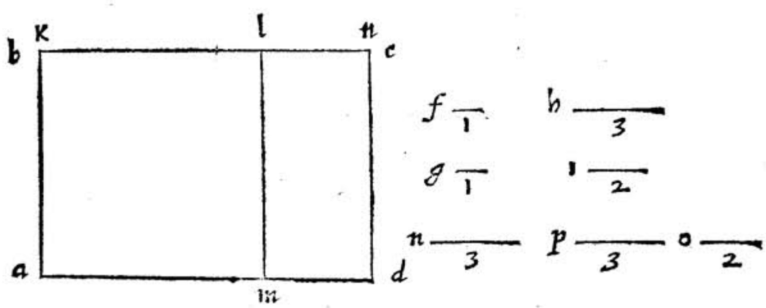
Quod duabus inter se datis lineis continetur rectangulum, & ipsum datum erit.

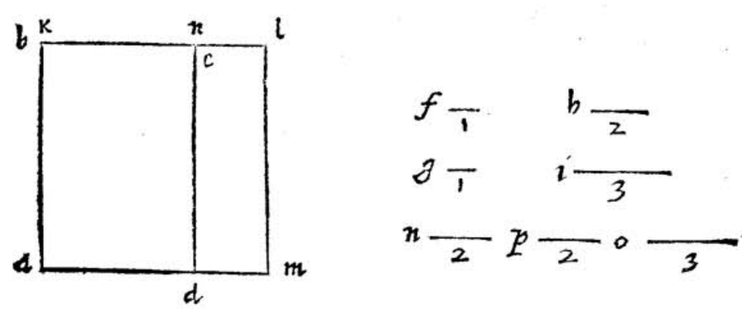
SIT rectangulum a c duabus inter se datis lineis contentum a b, a d. et siquidem datæ lineæ sint, quas metiatur communis quæpiam mensura: illud ipsum datũ erit, ex demonstratis à Ioanne Regiom. libro primo de triangulis, propositione sextadecima. si uero ipsæ ad communem mensuram proportionem habeant in numeris datam: sit communis illa mensura e, ad quam linea a b ita sit, ut f numerus ad numerum g: linea uero a d ad eandem sit, ut numerus h ad i numerũ. Vel igitur utræque datæ lineæ ipsa e maiores erunt; uel utræque minores; uel una maior, altera minor; uel altera æqualis, altera maior, aut minor. Sint primo utræque minores: & producantur ad æqualitatem communis mensuræ e: & compleatur quadratum a k l m: ipsa quoque d c producatur ad lineam k l in punctum n. Et cum linea a b ad ipsam e; hoc est ad a k ita sit, ut f numerus ad numerum g: erit rectangulum a c ad rectangulum a n, ut numerus f ad ipsum g. Rursus cum linea a d ad eandem e; hoc est ad a m ita sit, ut numerus h ad ipsum i: erit & rectangulum a n ad quadratum a l, ut h ad i: Ducatur f numerus in numerum h: & producatur n: ducatur item g in i: & productum sit o: deinde ex ipso g in h ducto fiat p. Dico rectãgulum a c ad quadratum a l eam proportionem habere, quam habet n ad o. prima VI.











Quoniam enim numerus h duos numeros multiplicat f & g:
17. VII. *facti numeri n & p eandem habent proportionem. quare a c rectãgulum ad ipsum a n erit ut n ad p. & rursus quoniam g duos numeros multiplicat h et i: producti p & o in eadem proportione erunt: & id circo erit a n rectãgulum ad quadratum a l, ut p ad o.*
22. V. *ergo ex æquali a c rectãgulum ad quadratum a l, ut n ad o. Si uero utræque datæ lineæ sint communi mensura e maiores: abscindantur ab his a k, a m lineæ ipsi æquales: & perficiatur quadratum a k l m: postea k l producatur ad c d in n. Quòd si altera maior sit, altera minor: sit a b minor: & producatur ad æqualitatem ipsius e; quæ sit a k; & ab ipsa a d abscindatur æqualis eidem uidelicet a m: compleaturq; quadratum a k l m: ipsæ demum k l, & d c producantur; ita ut conueniant in puncto n. Non aliter procedemus in describenda figura, si altera sit æqualis communi mensuræ, altera uero, aut maior, aut minor; minorem nanque producemus, & maiorem resecabimus ad ipsius æqualitatem. His ita constitutis similiter demonstrabimus a c rectangulum ad quadratum a l eandem habere proportionem, quam habet n numerus ad numerum o; quod ipsum demonstrare uolebamus. Cum igitur a c rectangulum ad datum quadratum a l (est enim communis mensuræ) proportionem habeat in numeris datam: & ipsum necessario dabitur.*

OPERA-

OPERATIO.

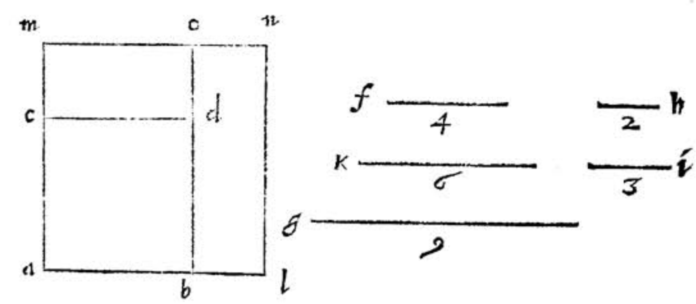
Numeros datarum proportionum multiplicabimus; antecedentem in antecedentem; & consequentem in consequentem; & quam proportionem habuerit productum ex antecedentibus ad productum ex consequentibus, eandem habebit quæsitum rectangulum ad quadratum communis mensuræ.

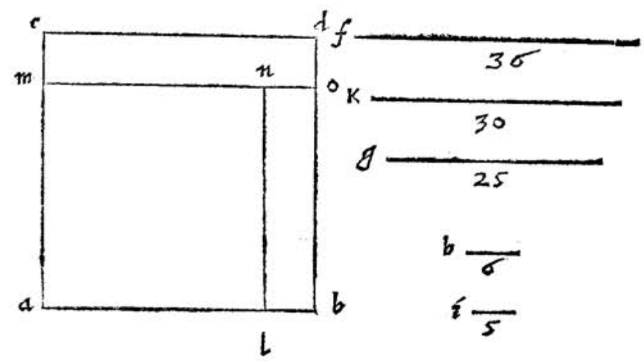
3—1		3	10—5		50	2—4		8
4—3		12	7—4		28	3—3		9

PROPOSITIO III.

Quadrato noto, latus eius ignotum esse non poterit.

De eo quadrato hic sermo est, quod latus habet longitudine rationale: nam de eo, quod potentia tantum rationale habet, inferius dicetur. Sit quadratum eiusmodi notum a b c d. & siquidem mensuratur à quadrato e, uulgatæ mensuræ: latus eius notum fiet ex 2. primi de triangulis. Si uero ad quadratum dictum proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; uel erit eo maius, uel minus. Sit primum minus; & sint numeri datæ proportionis f & g: inueniantur q; eorum latera: & ipsius quidem f latus sit h; ipsius uero g sit i. Dico quadrati a b c d latus, uidelicet a b, notum iam esse. habebit enim ad ipsam e proportionem eadem, quam habet numerus h ad i numerum: nanque ex undecima octaui elementorum constat, inter f & g cadere numerum quendam proportionalem, qui sit k: & proportionem f ad g duplam esse eius, quæ est h ad i. Quare sicut f ad k, & sicut k ad g, ita erit h ad i. Et quoniam





quadratum a b c d est minus quadrato e: producantur eius latera a b, a c; adeo ut fiant æqualia ipsi e: & compleatur quadratum a l m n: producatur item latus b d usque ad m n in o. erit ut a c ad a m, hoc est, ut a b ad e, ita quadratum a d ad rectangulum a o: & ut a b ad a l, hoc est ad e, ita rectangulum a o ad quadratum a n. Quare erunt tres superficies proportionales in eadem proportione, in qua est linea a b ad e. Rursus quoniam positum est quadratum a d ad quadratum e esse sicut f ad g. erunt tres numeri f k g proportionales in eadem illa proportione, in qua sunt tres dictæ superficies a d, a o, a n: & propterea linea a b ad e eandem proportionem habebit, quam habet numerus h ad numerum i. Si uero quadratum a b c d sit maius quadrato e: abscindantur ab ipsis a b, a c, lineæ ipsi e æquales, quæ sint a l, a m: & compleatur quadratum a l m n: ipsa autem m n producatur usque ad d b in o. Eadem ratione monstrabitur lineam a b ad e, eam habere proportionem, quam habet h ad i: quod monstrare oportebat. prima vi.

OPERATIO.

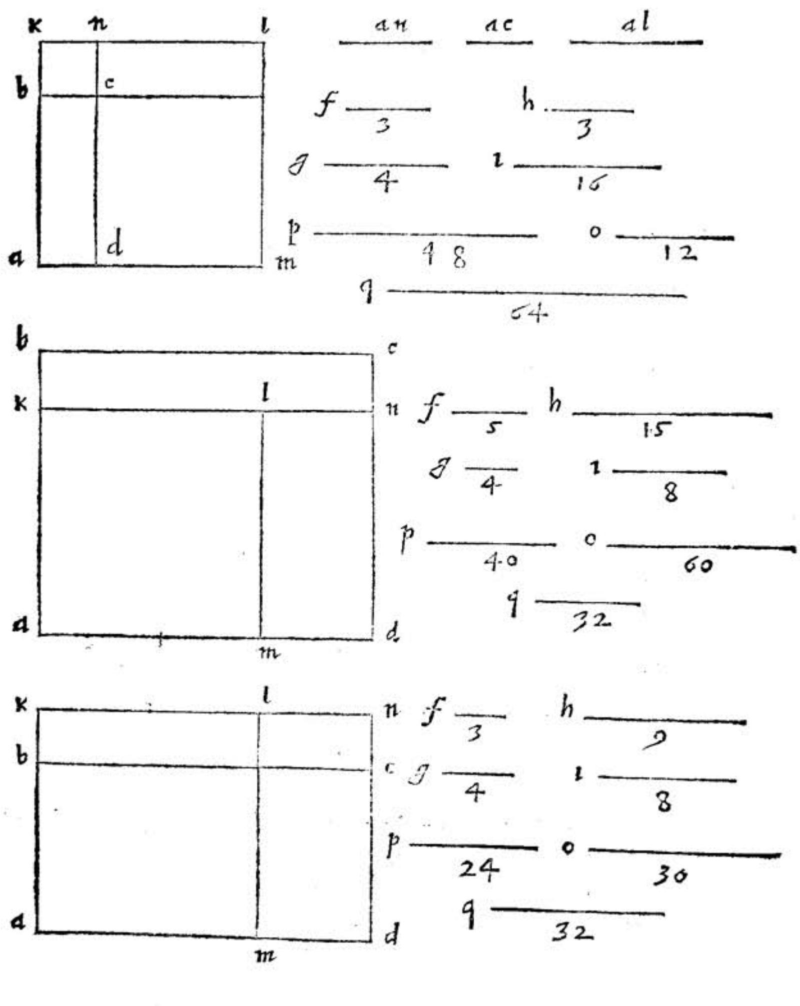
Inueniatur latus quadratum numerorum datæ proportionis, & quam proportionem habuerit latus primi ad latus ſecundi, eandem habebit latus quæſitum ad uulgatam menſuram.

$$\frac{4}{9}\quad\frac{2}{3}\qquad\qquad\frac{36}{25}\quad\frac{6}{5}$$

PROPOSITIO IIII.

Dato latere quolibet rectanguli cogniti, alterum quoque latus dabitur.

SIT rectangulum cognitum a b c d, cuius latus a b datum ſit. erit alterum quoque a d datum. nã ſi datũ latus, et rectangulum menſurentur à communi quapiam menſura, uidelicet latus à menſura li

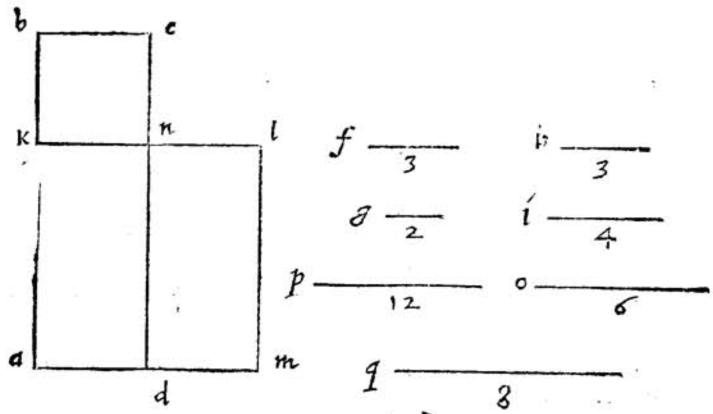


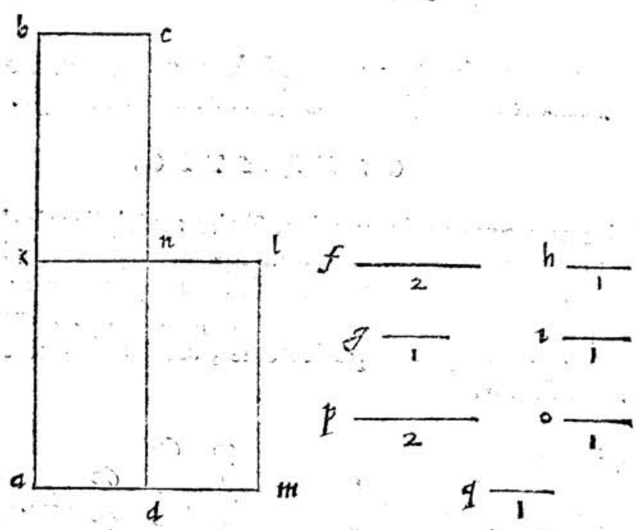
neari, & rectangulum ab eadem quadrata: quod quærimus fiet manifeſtũ, ex ſeptima decima primi libri de triangulis. Si uero ipſa ad communem menſuram proportionem habuerint in numeris datam: ſit communis menſura e, ad quam a b eam proportionem habeat, quam numerus f ad numerum g: & rectangulum a c ad quadratum ipſius e, quam h numerus ad numerum i. Sint autem

primum

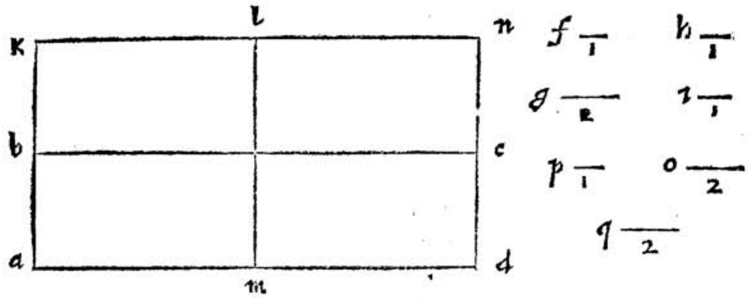
primum utraque communi mensura minora: & producantur latera a b, a d; ita ut sint æqualia ipsi e: compleaturq; quadratum a k l m: & item d c producatur usque ad k l in n. Cum ergo latus a b sit ad e, hoc est ad a k, sicut f numerus ad numerum g: erit & rectangulum a c ad re- 1. VI.
ctangulum a n, ut f ad g. Rursus cum rectangulum a c sit ad quadratum e, sicut h ad i: erit & rectangulum a c ad quadratum a l sicut h ad i. Ducatur h in g: & productum sit o. ducatur item f in i; & producatur p: ex ipso autem g in i ducto fiat q. Dico latus a d quæsitum ad e proportionem eam habere, quam numerus o ad numerum p. Cum enim g duos numeros multiplicet h & i: facti numeri o & q eandem habebunt proportionem. quare ut h ad i, hoc 17. VII.
est ut rectangulum a c ad quadratum a l, ita erit o ad q. Rursus cum i duos numeros multiplicet f & g: producti p q eandem proportionem habebunt. ergo ut f ad g, hoc est, ut rectangulum a c ad rectangulum a n, ita p ad q: & è contrario, ut rectangulum a n ad rectangulum a c, ita q ad p. ex æquali igitur rectangulum a n ad rectangulum a l erit, sicut o ad p. sed sicut rectan- 23. VI.
gulum a n ad rectangulum a l, sic linea a d ad a m. quare a d ad a m, hoc est ad e eam propor 1. VI.
tionem habet, quam o ad p.

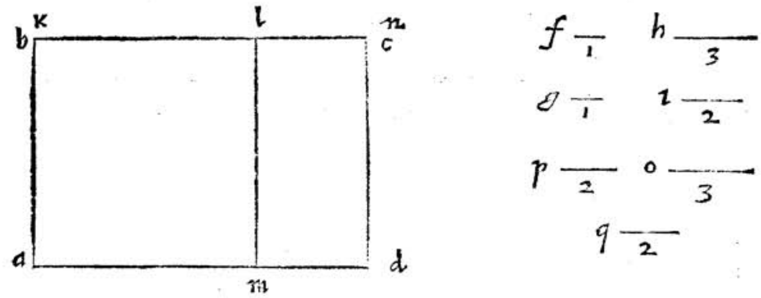
Si latus a b, & a c rectangulum: utraque maiora sint communi mensura: abscindantur à lineis ipsis a b, a d lineæ a k, a m, quæ sint æquales ipsi e: compleaturq; quadratum a k l m: & k l producatur usque ad c d in n. Si uero latus a b sit minus e mensura; & rectangulum a c maius quadrato eiusdem: producemus a b, ut fiat æquale ipsi e, quod sit a k: & ab ipso a d abscindemus eidem æqualem a m: & perficiemus quadratum a k l m: itemq; k l & d c producemus; adeo ut conueniant in puncto n. Quòd si latus a b sit maius ipsa e; & rectangulum quadrato e minus: ab ipso a b abscindemus a k: & a d producemus ad æqualitatem mensuræ e: complebimusq; quadratum a k l m: in quo uero puncto linea k l secat ipsam c d, sit n.

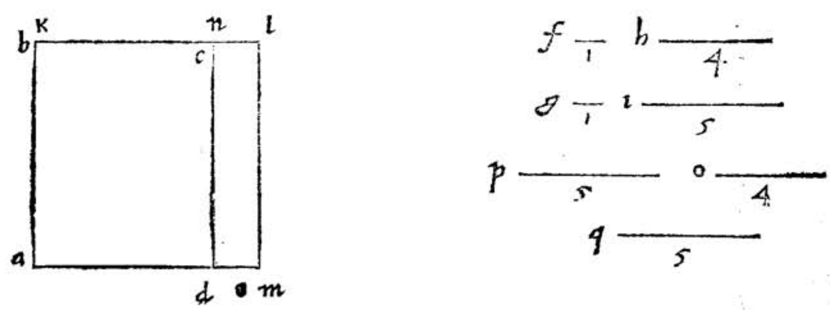




Si denique latus a b æquale sit ipsi e; & rectangulum a b c d maius, aut minus quadrato eiusdem, uel contra rectangulum dicto quadrato æquale; & latus a b ipsa e, aut maius, aut minus: figuras describemus sicuti superius factum est; quæ maiora sunt communi mensura resecando; quæ uero minora producendo ad eius æqualitatem. similiterq; in omnibus demonstrabimus







mus a d ad mensuram e eandem proportionem habere, quam numerus o ad numerum p; quod demonstrare uolebamus. ex quibus sequitur & ipsum a d latus datum esse.

OPERATIO.

Numeris datarum proportionum decussatim multiplicatis; hoc est multiplicato antecedente prioris proportionis in consequentem posterioris, & contra consequente prioris in antecedentem posterioris, quam proportionem habuerit productum ex consequente prioris, & antecedente posterioris ad productum ex antecedente prioris, & consequente posterioris, eandem habebit latus quæsitum ad communem mensuram.

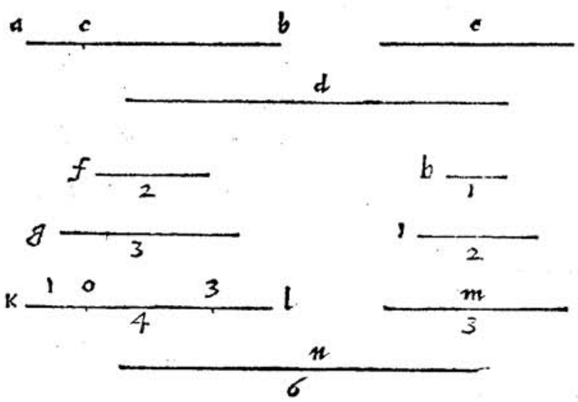
$$\overset{48\quad 12}{\frac{3}{4}\times\frac{3}{16}}\quad \frac{12}{48}\ \textit{hoc est}\ \frac{1}{4}\qquad\qquad \overset{40\quad 60}{\frac{5}{4}\times\frac{15}{8}}\quad \frac{60}{40}\ \textit{hoc est}\ \frac{3}{2}\ \textit{hoc est}\ 1\ \frac{1}{2}$$

PROPOSITIO V.

Datarum inter se quantitatum inæqualium, & differentia data erit.

SINT quantitates inter se datæ, a b quidem maior, c uero minor; quarum differentia sit a e. dico hanc quoque datam esse. si enim à communi mensura mensurentur datæ quantitates: nota fiet earum

earum differentia ex quarta primi de triangulis. Sin autem hæ ad communem mensuram proportionem habeant in numeris datam: sit illa mensura d; ad quam a b proportionem habeat, quam f numerus ad numerum g: & ad eandem d ipsa c proportionem habeat, quam numerus h ad i numerũ. ducatur i in f & g; & qui producuntur numeri, sint kl, & n: ducatur item g in h, & productam sit m: postea uero m ab ipso kl dempto, reliquum si ko. habebit differentia a e, quam quærimus, ad communem mensuram d, eam proportionem, quam habet ko ad n. Quoniam enim i duos numeros multiplicat f & g: erunt producti kl & n in eademmet proportione. quare & a b ad d, erit, ut kl ad n. Rursus quoniam g duos numeros multiplicat h & i: producti m & n proportionem eandem habebunt; atque erit c ad d, ut m ad n: & è contrario d ad c, ut n ad m. ergo ex æquali a b ad c, ut kl ad m. est autem e b ipsi c æqualis, cum ad sit excessus, quo a b ipsum c excedit;



& eadem ratione o l est æqualis ipsi m. quare a b ad e b proportionem habet eam, quàm kl ad o l: & diuidendo a e ad e b, quam ko ad o l. sed e b æqualis ipsi c ad d est, sicut o l æqualis ipsi m ad n. ex æquali igitur erit a e excessus ad communem mensuram, sicut ko ad n: quod monstrare uolebamus. proportio autem ko ad n nota cum sit, & ipsam a c quantitatem notam efficiet; quæ ad communem mensuram proportionem habet in numeris datam.

OPERATIO.

Numeris datarum proportionum multiplicatis, antecedente scilicet prioris proportionis in consequentem posterioris, & antecedente posterioris inconsequentem prioris, & consequente unius in consequentem alterius, productoq; ex consequente prioris, & antecedente posterioris subtracto ab eo, quod factum est ex antecedente prioris, & consequente posterioris, quam proportionem habuerit id, quod post subtractionem remanserit ad id, quod productum est ex duobus consequentibus, eandem habebit differentia quæsita ad communem mensuram.

$$\begin{array}{cccccc} 4 & & 3 & & 4 & \\ \frac{2}{3} & \times & \frac{1}{2} & 6 & \frac{3}{1} & \frac{1}{6} \end{array}$$

PROPOSITIO VI.

Ex datis inter se quantitatibus compositum datum erit.

SI datæ quantitates à communi mensurentur mensura: ex eis compositum datum erit, per tertiam primi de triangulis. sin minus, sint, ut in figura superius descripta a b & c, quæ ad communem mensuram d proportionem habeant secundum eos numeros datam. Dico compositum ex ipsis datum esse. nam numeris itidem multiplicatis, atque ijs, qui ab eis producuntur dispositis, compositum ipsum ad communem mensuram, eandem habebit proportionem, quam compositum ex kl & m ad n. Quoniam enim a b ad c est sicut kl ad m: erit coniungendo compositum ex a b & c ad c, sicut compositum ex kl & m ad m. est autem & c ad d, sicut m ad n. quare ex æquali compositum ex a b & c ad d erit sicut compositum ex kl & m ad ipsum n: & propterea datum erit, cum ad communem mensuram proportionem habeat in numeris datam.

OPERATIO.

OPERATIO.

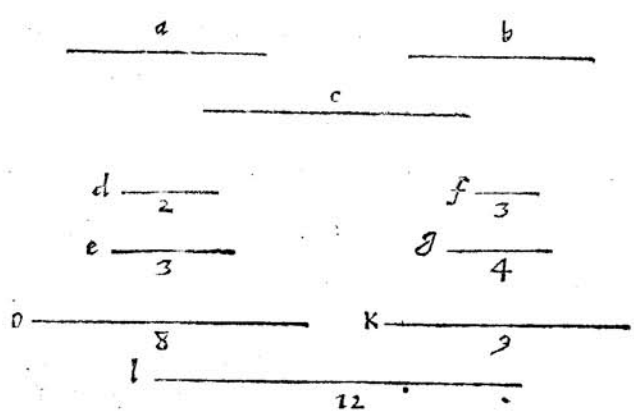
Numeris datarum proportionum modo ſuperius dicto multiplicatis, & productis ex antecedentibus unius, & conſequentibus alterius ſimul iunctis, quam proportionem habuerit compoſitum ipſum ad id, quod factum eſt ex ductu conſequentium inter ſeſe, eam habere dicemus compoſitum ex a b & c, quod quærimus, ad d communem menſuram.

$$\begin{matrix} 4 & 3 \\ \frac{2}{3} & \times\ \frac{1}{2} \end{matrix} \qquad \frac{7}{6} \qquad \begin{matrix} 4 \\ \frac{3}{7} \end{matrix}$$

PROPOSITIO VII.

Datarum inter ſe quantitatem proportio quoque data erit.

SI datæ quantitates menſurētur à communi quadam menſura: earum proportio iam data erit; habebunt enim inter ſeſe proportionem eandem, quam numeri, ſecundum quos menſuranur. Quòd ſi ad communem menſuram proportionem habeant in numeris datam: dabitur tunc quoque earum proportio. Sint enim quantitates ſic datæ a b: & ſit c communis menſura: habeat autem a ad c proportionem eam, quam numerus d ad numerum e: & b ad eandem c habeat eam, quam numerus f ad ipſum g. Ducatur d in g: & productum ſit h. ducatur deinde e in f: & producatur k. poſtremo e ipſo in g ducto, fiat l. Et quoniam g duos numeros multiplicat d & e producti h & l eandem habebunt proportionem. quare a ad c erit, ut h ad l. Rurſus quoniam e duos numeros multiplicat f et g: erunt facti inde numeri k et l in eadē proportione: atque erit b ad c, ut k ad l: & è contrrio c ad b, ut l ad k. ſed erat a ad c, ut h ad l. ergo ex æquali a ad b erit, ut h ad k. proportio autem h ad k data eſt, quòd terminos habeat notos. data igitur erit & proportio a ad b, ut oportebat.



OPERATIO.

Numeris datarum proportionum decuſſatim multiplicatis, quam proportionum habuerit productum ex antecedente prioris, & conſequente poſterioris, ad productum ex conſequente prioris, & antecedente poſterioris, eandem habere inuenietur quantitas a ad quantitatem b.

$$\begin{matrix} 8 & 9 \\ \frac{2}{3} & \times\ \frac{3}{4} \end{matrix} \qquad \frac{8}{9}$$

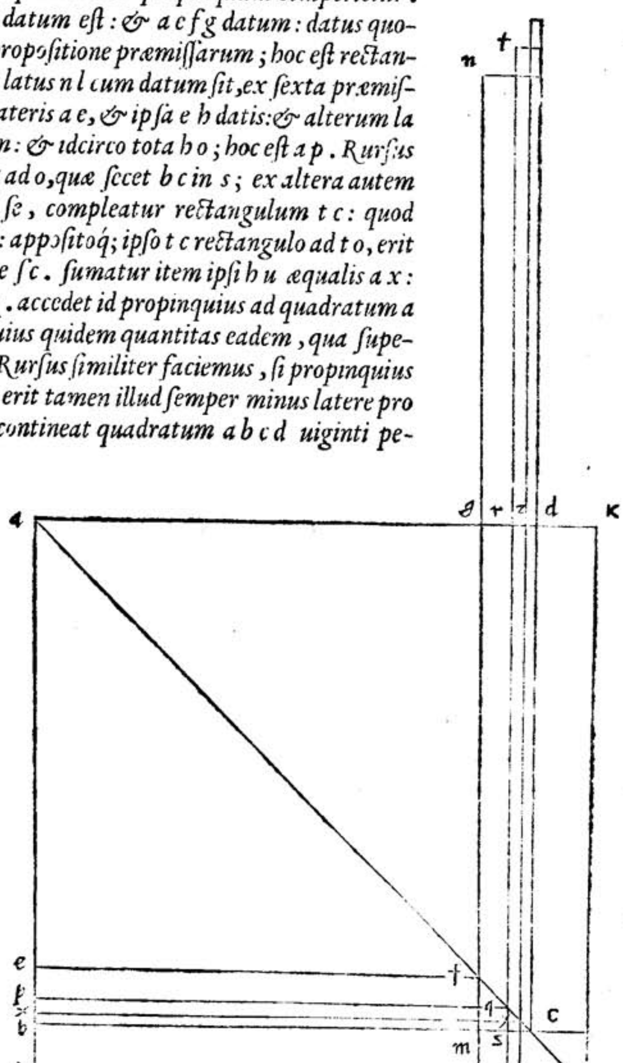
PROPOSITIO VIII.

Quadrati noti latus potentia tantum rationale habētis propinquū latus inuenire.

SIT

SIT quadratum eiusmodi a b c d; cuius oporteat latus propinquum inuenire. sumatur primo quadratum proxime minus, habens latus rationale longitudine, quod sit a e f g: & item sumatur quadratum proximè maius a h i k: producaturq; f g; ex parte quidem f usque ad lineam h i in l, secans b c in m; ex parte uero g usque ad n; ita ut sit g n æqualis ipsi g f: & compleatur rectangulum n c. erit ipsum n d rectangulum æquale rectangulo d f, hoc est ipsi f b. quare totum n c æquale erit gnomoni b f d. Si igitur rectangulo n c ad lineam n l apposito, sit latus alterum l o: erit illud minus ipso m c. nam quia n c rectangulum æquale est rectangulo n o: habebit latus n m ad n l eam proportionem, quá l o ad m c. sed m n minus est ipso n l. et l o igitur ipso m c minus erit. Deinde sumpta a p æquali ipsi h o, describatur quadratum a p q r. quod cum satis propinquum sit quadrato a b c d: & eius latus a p lateri a b propinquum comperietur. Quoniam enim quadratum a b c d datum est: & a e f g datum: datus quoque erit gnomon b f d, ex quinta propositione præmissarum; hoc est rectangulum n c; hoc est ipsum n o. cuius latus n l cum datum sit, ex sexta præmissarum; constat nanque ex duplo lateris a e, & ipsa e h datis: & alterum latus l o dabitur, ex quarta earundem: & idcirco tota h o; hoc est a p. Rursus producta r q; ex parte quidem q ad o, quæ secet b c in s; ex altera autem ad t ut sint q r, r t æquales inter se, compleatur rectangulum t c: quod similiter erit æquale gnomoni b q d: appositoq; ipso t c rectangulo ad t o, erit & latus alterum o u, minus latere s c. sumatur item ipsi h u æqualis a x: & describatur quadratum a x y z. accedet id propinquius ad quadratum a b c d: & latus a x ad latus a b; cuius quidem quantitas eadem, qua superius usi sumus ratione, nota fiet. Rursus similiter faciemus, si propinquius adhuc latus inuenire uoluerimus. erit tamen illud semper minus latere propositi quadrati. Exempli gratia, contineat quadratum a b c d uiginti pedes. continebit proxime minus quadratum a e f g pedes sexdecim: & proxime maius uiginti quinque, hoc est a h i k: eritq; latus a e pedum quatuor: & a h quinque. itaque demptis sexdecim ex uiginti, reliquentur quatuor: & totidem pedum erit gnomon b f d, hoc est rectangulum n c. quod quidem si apponatur ad n l, quæ est pedum nouem: prodibit l o quatuor partium ex nouem unius pedis. quare tota h o, hoc est a p habebit pedes quatuor, & quatuor nonas. Quadratum ergo a p q r continebit pedes 19 $\frac{61}{81}$: & gnomon b q d, hoc est rectangulum t c $\frac{20}{81}$. quod si rursus appositum fuerit ad lineam t o, quæ habet pedes 9 $\frac{4}{9}$: erit o u $\frac{4}{153}$: & h u tota, hoc est a x 4 $\frac{8}{17}$.

1.sexti
43 primi.
14. sexti.



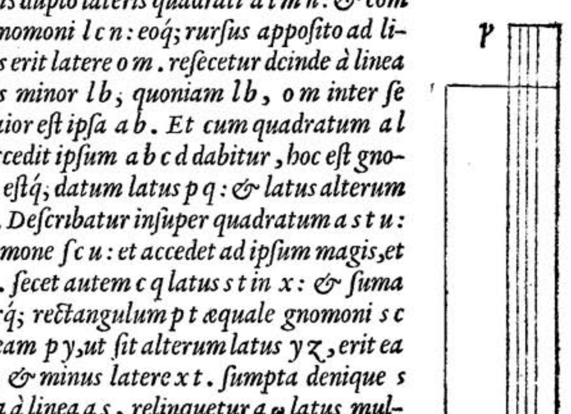
OPERATIO.

Ad latus quadrati proxime minoris addemus, quod producitur ex diuisione excessus, quo propositum quadratum, quadratum proxime minus excedit, per duplum ipsius lateris unà cum eo, quo latus proxime maioris quadrati dictum latus excedit: habebimusq; satis propinquum latus propositi quadrati. Quòd si ad hoc rur

d sum

ſum addemus , quod fit ex diuiſione eius, quo propoſitum quadratum excedit quadratum illius propinqui lateris, per duplum eiuſdem, unà cum eo, quo proxime maioris quadrati latus idem ipſum excedit; erit latus illud multo magis propinquum; & ita ſi placuerit, ulterius procedendum erit, cuius exemplum patet ex ante dictis.

ALITER. Sumatur ſimiliter quadratum proxime minus, ut in ſuperiori figura a e f g: & producatur f g; ex parte quidem f ad lineam b c in h; ex parte autem g ad i: ita ut g i ſit æqualis ipſi g f: & compleatur rectangulum i c. erit i c æquale gnomoni b f d. Quare ſi illud ipſum appoſuerimus ad lineam i f, ut ſit rectangulum i k: erit alterum latus f k, maius latere h c, ut ſuperius eſt demonſtratum: & idcirco e k maior ipſa b c: hoc eſt ipſa a b. ſumatur a l, ipſi e k æqualis: & deſcribatur quadratum a l m n. quod quanquam ſuperat quadratum a b c d, gnomone l c n: eſt tamen ei ſatis propinquum: & latus a l propinquum lateri a b notum fiet. Nam
5. præmiſſarum. *cum data ſint utraque quadrata a b c d, a e f g: & eorum differentia dabitur, hoc eſt gnomon b f d, hoc eſt rectangulum i c. quo quidem appoſito ad lineam datam i f, duplam ſcilicet ipſius a e, &*
quarta. *alterum latus f k datum erit. quare & tota e k hoc eſt a l: atque ipſius quadratum a l m n. Rurſus*
ſexta. *producatur d c; ex parte c ad q, quæ ſecet lineam l m in o: ita ut ſit o q*
prima. *æqualis ipſi c o; ex parte uero d producatur ad p; uſque adeo ut d p æqualis fiat ipſi d c. erit ergo p q æqualis duplo lateris quadrati a l m n: & completum rectangulum p m æquale gnomoni l c n: eoq; rurſus appoſito ad lineam p q, alterum latus q r minus erit latere o m. reſecetur deinde à linea a l ipſa l s æqualis lineæ q r: erit l s minor l b; quoniam l b, o m inter ſe ſunt æquales. reliqua igitur a s maior eſt ipſa a b. Et cum quadratum a l m n datum ſit: & exceſſus, quo excedit ipſum a b c d dabitur, hoc eſt gnomon l c n, hoc eſt rectangulum p m. eſtq; datum latus p q: & latus alterum datur q r, hoc eſt l s. quare & a s. Deſcribatur inſuper quadratum a s t u: quod ſuperabit quadratũ a b c d gnomone ſ c u: et accedet ad ipſum magis, et latus a s magis accedet ad latus a b. ſecet autem c q latus s t in x: & ſumatur x y æqualis ipſi c x: compleaturq; rectangulum p t æquale gnomoni s c u. quo poſt modum appoſito ad lineam p y, ut ſit alterum latus y z, erit eadem ratione & ipſum y z notum; & minus latere x t. ſumpta denique s ω æquali ipſi y z, atque ea ſublata à linea a s, relinquetur a ω latus multo magis propinquum lateri a b. & eodem modo procedemus quoad libuerit. ex quibus apparet latus hoc pacto inuentum ſemper maius eſſe latere propoſiti quadrati. Et ut in eodem exemplo perſiſtamus, Cum quadratum a b c d contineat pedes uiginti, & quadratum a e f g ſexdecim: continebit gnomon b f d, hoc eſt rectangulum i c quatuor pedes. quod quidem ſi appoſuerimus ad lineam i f, duplam ſcilicet lateris a e; erit alterum latus f k pedis dimidium, & a l quatuor pedes & ſemis; cuius quadratum a l m n pedes uiginti & quarta unius pedis. gnomon igitur l c n, hoc eſt rectangulum p m erit pedis quarta: atque eo appoſito ad lineam p q, quæ continet pedes nouem, erit alterum latus q r $\frac{1}{36}$, & a s $4\frac{17}{36}$. quare quadratum a s t u $20\frac{1}{1296}$: & gnomon*



ſcu,

s c u, hoc est rectangulum p t $\frac{1}{1296}$. *quòd si rursus apponatur ad p x, duplum ipsius a s, hoc est ad* 8$\frac{17}{18}$: *erit y z* $\frac{1}{11592}$: *&* *a ω*. 4$\frac{32838}{69552}$.

OPERATIO.

Ad latus quadrati proxime minoris addemus id, quod prouenit ex diuisione excessus, quo dictum quadratum à qnadrato proposito exceditur, per duplum eiusdem lateris: eritq; latus illud propinquum primo inuentum. A quo si abstulerimus, quod prouenit ex diuisione eius, quo nuper inuenti lateris quadratum, quadratum propositum excedit, per duplum eius lateris: relinquetur latus magis propinquum. Quòd si ab eo rursus abstulerimus, quod prouenit ex diuisione excessus, quo quadratum lateris postremo inuenti, excedit propositum quadratum, per duplum lateris ipsius: relinquetur latus adhuc magis propinquum: & ita deinceps in cæteris, exemplum colligitur ex iis, quæ proxime dicta sunt.

Ipsa uero e c ad c f proportionem habet eam, quam 265 ad 153.] Ipsa uero e c ad c f maiorem proportionẽ habet, quàm 265 ad 153. *Ita legendum est, & corrigendus græcus codex hoc modo.* ἡ δὲ ε γ πρὸς γ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν σ ξ ε πρὸς ρ ν γ. *nam cum quadratum e c sit 70227: erit ipsa e c maior, quàm 265. quare a d c f proportionem maiorem habebit, quàm 265 ad 153. Adde quòd non sequeretur conclusio ea, quæ inferius ponitur. Videlicet e c ad c g maiorem habere proportionem, quàm 571 ad 153.* C

Quare e g ad g c eam potestate proportionem habet, quam 349450 ad 23409: longitudine uero eam, quam 591$\frac{1}{8}$ ad 153.] *Et hoc loco, ut opinor, corrigendus est græcus codex, & ita uertendum.* E

Quare e g ad g c potestate maiorem habet proportionem, quàm 349450 ad 23409; longitudine uero maiorem, quàm 591$\frac{1}{8}$ ad 153. *Cum enim e c ad c g maiorem proportionem habeat, quàm 571 ad 153; quod iam demonstratum est: sitq; ipsa c g 153: erit e c maior, quàm 571: & idcirco quadratum eius maius, quàm 326041. quadratum autem c g est 23409. quare c g quadratum, quod est æquale duobus quadratis e c, c g maius erit, quàm 349450: & ipsius latus maius, quàm 591$\frac{1}{8}$. Ex quibus sequitur e g ad g c potestate maiorem habere proportionem, quàm 349450 ad 23409, longitudine uero maiorem, quàm 591$\frac{1}{8}$ ad 153.* penul. 1.

Quare h e ad h c maiorem habet, quàm 1172$\frac{1}{8}$ ad 153.] *Est enim e c maior, quàm 1162$\frac{1}{8}$, ut monstratum est. quare quadratum ipsius maius, quàm 1350534$\frac{33}{64}$. & cum quadratum h c sit 23409: erit h e quadratum, quod est æquale duobus illis quadratis, maius, quàm 1373943$\frac{33}{64}$: & eius latus h e maius, quàm 1172$\frac{1}{8}$. habet ergo h e ad h c proportiouem maiorem, quàm 1172$\frac{1}{8}$ ad 153.* G

Secetur item h e c angulus bifariam ducta e k. Habet e c ad c k proportionem maiorem, quàm 2334$\frac{1}{4}$ 153.] *Quoniam ut utraque h e, e c ad h c, ita e c ad c k: est autem h e maior, quàm 1172$\frac{1}{8}$: & e c maior, quàm 1162$\frac{1}{8}$, ut ostensum est: habebit e c ad c k proportionem maiorem, quàm 2334$\frac{1}{4}$ ad 153.* H

Ipsa uero a c ad c g minorem habet, quàm 3013$\frac{3}{4}$ ad 780.] *Cum a g ad g c minorem proportionem habeat, quàm 2911 ad 780, posita g c 780: erit a g minor, quàm 2911. quare quadratum eius minus, quàm 8473921. est autem quadratum g c 608400. quadratum igitur a c, quod est æquale duobus quadratis a g, g c minus erit, quàm 9082321: & ipsa a c minor, quàm 3013$\frac{3}{4}$. ex quibus constat a c ad c g minorem habere proportionem, quàm 3013$\frac{3}{4}$ ad 780.* P

Rursus secetur bifariam angulus c a g ducta a h. habet eadem ratione a h ad h c minorem proportionem, quàm 5924$\frac{3}{4}$ ad 780, uel quàm 1823 ad 240.] *Nam ex septima præmissarum* 5924$\frac{3}{4}$ *ad 780 eandem proportionem habent, quam 23699 ad 3120, hoc est eandem, quam 1823 ad 240; utraque enim utriusque est pars tertia decima. Quòd si h c ponatur 240: erit a h minor, quàm 1823; & quadratum eius minus, quàm 3323329. est autem h c quadratum 57600. utraque igitur quadrata a h, h c minora sunt, quàm 3380929: & propterea quadratum a c, quod illis ipsis est æquale, minus quàm 3380929. sed huius latus minus est, quàm 1838$\frac{9}{11}$. ergo & ipsa a c, multo minor erit, quàm 1838$\frac{9}{11}$: & ad c h minorem* Q *rem habebit proportionem, quàm* 1838 $\frac{9}{11}$ *ad* 240.

R Secetur item bifariam angulus h a c, ducta k a. ergo & ipsa k a ad k c minorem habet proportionem, quàm 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240, uel quàm 1007 ad 66.] *Quam enim proportionem* 3661 $\frac{9}{11}$ *habent ad* 240, *eandem habent, ex septima iam dicta,* 40280 *ad* 2640; *hoc est* 1007 *ad* 66: *utraque enim utriusque est pars quadragesima. posita igitur k c* 66, *erit ipsa k a minor, quàm* 1007: *& eius quadratum minus, quàm* 1014049, *est autem k c quadratum* 4356. *quare quadratum a c, quod est æquale duobus quadratis a k, k c minus est, quàm* 1018405. *At uero latus quadrati* 1018405 *minus est, quàm* 1009 $\frac{1}{6}$. *Ipsa igitur a c multo minor est, quàm* 1009 $\frac{1}{6}$: *& idcirco ad c k minorem proportionem habet, quàm* 1009 $\frac{1}{6}$ *ad* 66.

FEDERICI COMMANDINI
IN LIBRVM DE LINEIS SPIRALIBVS.
COMMENTARIVS.

PRIMVM problema erat. Sphæra data spatium planum inuenire, quod superficiei sphæræ esset æquale. quod quidem primum à nobis explicatum est in libro, quem de sphæra edidimus, cum enim demonstratum sit, unius cuiusque sphæræ superficiem quadruplam esse maximi circuli &c.] *Demonstratum est hoc in lib. primo de sphæra, et cylindro, propositione trigesima prima.*

B Dato cono, uel cylindro sphæram inuenire ipsi cono, uel cylindro æqualem.] *Resoluitur, componiturq; huiusmodi problema libro secundo de sphæra & cylindro, propositione prima.*

C Datam sphæram plano ita secare, ut portiones eius inter se datam habeant proportionem.] *Libro secundo, propositione quarta.*

D Datam sphæram plano ita secare, ut portiones superficiei eius datam habeant proportionem.] *Propositione tertia eiusdem secundi libri.*

E Datam sphæræ portionem, portioni sphæræ datæ similem facere.] *Propositione quinta eiusdem.*

F Datis duabus siue eiusdem, siue non eiusdem sphæræ portionibus, inuenire portionem sphæræ &c.] *Propositione sexta.*

G A data sphæra portionem plano ita abscindere, ut portio ad conum, cuius basis sit eadem portioni, & altitudo æqualis, datam proportionem habeat, quæ quidem maior sit ea, quam habent tria ad duo.] *Propositione septima. ubi autem in græco codice habetur* μὴ μείζονα, *expungendum est illud* μὴ.

H Sphæræ nanque maior portio ad minorem, minorem quidem proportionem habet, quàm sit dupla illius &c.] *Propositione octaua.*

I Demonstratum enim est, dimidiam sphæram, maximam esse omnium sphæræ portionum, quæ æquali superficie contineantur.] *Propositione nona, & ultima.*

K Figura à sectione coni rectanguli descripta conoides uocetur.] *In libro de conoidibus, & sphæroidibus figuram descriptam à coni rectanguli sectione, conoides rectangulum appellat Archimedes: conoides uero obtusiangulum eam, quæ describitur à sectione conoidis obtusianguli. hoc tamen loco quia de rectanguli coni sectione tantum sermo est: conoides simpliciter appellauit.*

L Quòd si dicta figura secetur plano ad rectos angulos super axem ducto: sectionem eius circulum esse manifestum est.] *Hoc nos uniuerse demonstrabimus contingere in omni conoide, & sphæroide, ex ijs, quæ scribemus in duodecimam libri de conoidibus, & sphæroidibus.*

M Portionem uero abscissam sesquialteram esse coni basim habentis eandem portioni, & æqualem altitudinem, hoc demonstrare oportet.] *Demonstrauit in libro de conoidibus, & sphæroidibus, propositione uigesimatertia.*

N Et si conoidis duæ portiones abscindantur planis quomodocunque ductis, sectiones quidem esse conorum acutiangulorum sectiones perspicuum est.] *Colligitur id ex* *id ex decima tertia libri de conoidibus, & sphæroidibus.*

Sed portiones habere inter se proportionem eandem, quam habent potestate lineæ ab earum uerticibus usque ad abscindentia plana æquidistantes axi ductæ &c.] *Demonstrauit autem uigesima sexta propositione eiusdem.* O

Dico iam spatium contentum linea spirali, & recta in pristinum locum restituta, &c. *Huius demonstratio habetur uigesima quarta propositione huius.* P

Si lineam spiralem recta linea contigerit in ultimo ipsius spiralis termino.] *In decimaoctaua huius.* Q

Si linea circunducta, punctumq; in ea latum pluribus circulationibus circumferantur, &c.] *In uigesima septima.* R

Si in linea spirali in una circulatione descripta duo puncta sumantur, &c.] *In uigesima octaua, & ultima.* S

Et sumo in his quoque ea, quæ in aliis libris sumpta fuere, &c.] *In libris scilicet de sphæra, & cylindro, & in libro de quadratura paraboles.* T

IN PROPOSITIONEM I.

Patet igitur eandem habere proportionem c d ad ipsam d e, quam tempus f g ad tempus g h.] *Ex diffinitione sexta quinti libri elementorum.* A

IN PROPOSITIONEM II.

Manifestum est igitur eandem habere proportionem c d ad d e, quam habet f g ad g h.] *Ex undecima propositione quinti elementorum.* A

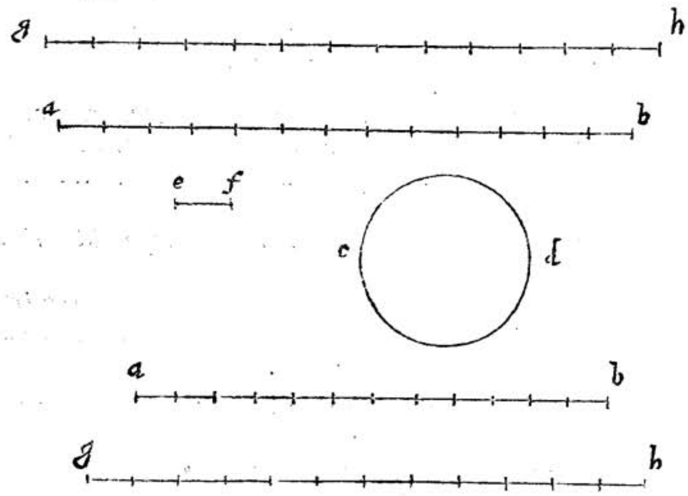
IN PROPOSITIONEM III.

Circumscripta enim circa unumquemque circulorum figura multiangula, perspicuum est lineam ex omnibus earum lateribus compositam, &c.] *Ex ijs, quæ in principio libri de sphæra & cylindro traduntur.* A

IN PROPOSITIONEM IIII.

A

Diuisa etenim recta linea in tot partes &c.] *Sit recta linea a b, quæ excedat circumferentiam c d: & sit excessus linea e f. coaceruetur autem e f ipsa sibi ipsi eousque, quousque fiat linea excedens ipsam a b, quæ sit g h: diuidatur itē*



a b in totidem partes æquales, quot sunt in linea g h, æquales ipsi excessui: manifestum est, ut a b ad g h, ita esse partem lineæ a b ad partem ipsius g h. quare pars lineæ a b minor est parte g h; cum a b sit posita minor ipsa g h. sublata autem una ipsius parte à linea a b, relinquetur linea minor quidem, quàm a b, maior uero, quàm circumferentia c d; quoniam sublata linea minor est excessu e f. Quòd si circumferentia c d excedat lineam rectam a b, excessu e f: rursus eadem omnia fiant, si- 15. v.

cuti

cuti prius: erunt partes lineæ a b, partibus g h minores. quare si adiecerimus lineæ a b unam ipsius partem: fiet linea maior quidem, quàm a b; minor uero, quàm circumferentia c d; cum id, quod adiectum est minus sit, quàm excessus e f.

IN PROPOSITIONEM V.

A Itaque sumi potest recta linea maior data circumferentia] *Si enim circa datam circumferentiam multorũ angulorum figura circumscribatur: erit eius ambitus circumferentia maior: quod etiam constat ex ijs, quæ in principio libri de sphæra, & cylindro habentur.*

B Eandem ergo proportionem habet h f ad h k, quam b h ad h g.] *Nam triangula b h f,*
15. primi. *k h g similia sunt; cum anguli ad h uerticem sint æquales: angulus autem ad f æqualis angulo ad k,*
29. primi. *& qui ad b e i, qui ad g. quare f h ad h b eandem habet proportionem, quam k h ad h g: & permu-*
4. sexti. 16. quinti. *tando f h ad h k eandem, quam b h ad h g.*

C Quare f h ad h k minorem habet, quàm b h circumferentia ad datam circumferen-
8. quinti. tiam.] *Nam recta linea b h, cum sit minor, quàm b h circumferentia, habet ad h g minorem proportionem, quàm circumferentia b h ad datam circumferentiam, quæ posita est etiam minor ipsa h g. erat autem f h ad h k, hoc est ad semidiametrum, ut b h ad h g. quare sequitur per secundam partem duodecimæ quinti ex traditione Campani, f h semidiametrum minorem habere proportionem, quàm circumferentia b h ad datam circumferentiam.*

IN PROPOSITIONEM VI.

A Erunt triangula c h k, c k l, similia.] *Angulus enim c h k unius est æqualis angulo k c l alte-*
18. tertii. *rius, utrisq; rectis existentibus: angulus uero h c k angulo c k l est æqualis. reliquus igitur angulus*
29. primi. *reliquo angulo est æqualis: & triangulum triangulo simile. Quam ergo proportionem habet c h ad*
4. sexti. *h k, eam habet k c ad c l. sed ex positione f ad g minorem proportionem habet, quàm c h ad h k: quare per duodecimam quinti ex traditione Campani, f ad g minorem habet proportionem, quàm k c ad c l.*

B Quam uero proportionem habet f ad g, habeat k c ad maiorem ipsa c l.] *Cum f ad g minorem habeat proportionem, quàm k c ad c l: si fiat ut f ad g, ita k c ad aliam lineam, quæ sit b n:*
8. quinti. *erit b n maior ipsa c l.*

C Et ponatur b n inter circumferentiam, & rectam lineam, ut trãseat per c: ita enim secari poterit, & cadet extra, cum ipsa sit maior, quàm c l.] *Poterit enim linea b n quantulocumque maior fuerit ipsa c l, ita aptari, ut per c transiens circũferentiam secet in b puncto. cadet autem extra necessario. nam si intra caderet; aut in ipsam c l: altera eius extremitas circulum non secaret: quod est contra positionem.*

D Quoniam igitur b k ad b n eandem habet proportionem quam f ad g.] *Est enim ob similitudinem triangulorum k b n, e b c, ut b k ad b n, sic b e ad b c, quare cũ posuerimus k c, uel ei æqua-*
11. quinti *lem k b ad b n eam habere proportionem, quam habet f ad g: habebit et e b ad b c eãdem, quam f ad g.*

IN PROPOSITIONEM VII.

A Maior igitur erit ea, quam habet k c ad c l.] *Ob similitudinem triangulorum c h k, k c l, ut superius dictum est, eandem habet proportionem k c ad c l, quam c h ad h k. quare f ad g minorem habet, quàm k c ad c l, ex duodecima quinti.*

B Quam uero proportionem habet f ad g, eam habebit k c ad minorem ipsa c l. habeat ad i n &c.] *Ex octaua quinti.*

C Potest enim ita secari, & cadet intra lineam c l.] *Rursus poterit linea i n quantulocunque minor ipsa c l ita constitui, ut tendat ad punctum c: sitq; totius lineæ c n pars c i intra circulum, pars uero i n extra. cadet autem intra lineam c l: alioqui circulum ipsum non secaret, ut ponitur,*

D Quoniam igitur eandem habet proportionem k c ad i n, quam f ad g.] *Concluditur hoc ex quarti sexti, & undecima quinti, ut superius apparuit, similibus hoc loco existentibus triangulis k i n, c i e.*

IN PROPOSITIONEM VIII.

Maior ergo est linea x c ipsa c l. *Ex octaua quinti.* A

Describatur circuli circumferentia circa puncta k l x. *Docet id quinta quarti.* B

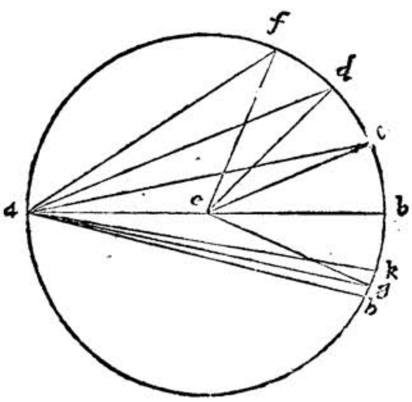
Et quoniam maior est x c ipsa c l: & lineæ k c, x l secant se se ad angulos rectos fieri potest, ut ducatur linea i n, æqualis ipsi m c, quæ tendat ad k.] *Hoc ideo dixit Archimedes, quoniam si linea k m secaret x l in partes æquales, non posset id præstari, quod uolumus: cum alioqui possit, linea x l in partes inæquales dissecta, ut mox ostendemus. sed prius nonnulla præmittere necessarium est.* C

Si in circumferentia circuli aliquod sumatur punctum: ab eoq; in circulum ducantur rectæ lineæ; quæ per centrum transit omnium erit maxima: aliarum uero, quæ transeunti per centrum propinquiores sunt, remotioribus erunt maiores: duæ autem tantum æquales sunt ad utrasque partes maximæ.

Hæc omnia satis patere possent ex ijs, quæ afferuntur ad demonstrationem septimæ, & octauæ tertij elementorum, sed tamen nequid desideretur, nos breuiter monstrare curabimus.

SIT circulus a b c d, cuius centrum e: & in circumferentia ipsius sumpto aliquo puncto a, ab eo in circulum ducantur rectæ lineæ a b, a c, a d, a f: sitq; a b per centrum ducta. dico ipsam esse omnium maximam: a c uero maiorem esse, quàm a d: & a d maiorem, quàm a f. connectantur e c, e d, e f. erunt trianguli a e c duo latera a e, e c maiora reliquo a c: sed dicta duo latera inter se iuncta, sunt æqualia lineæ a b. ergo linea a b est maior linea a c. & eadem ratione maior quibuslibet alijs in circulum ductis. Rursus trianguli a e c duo latera a e, e c sunt æqualia duobus lateribus a e, e d trianguli a e d: & angulus a e c maior est angulo a e d. basis igitur a c basi a d maior erit. Non alia ratione monstrabimus lineam a d esse maiorem ipsa a f: & a f ipsa subsequente: & ita deinceps in ceteris. Dico præterea cuilibet ipsarum a c, a d, a f unam tantum dari æqualem ex altera parte ipsius a b. Itaque ad datam lineam a b, datumq; in ea punctum a, constituatur angulus b a g æqualis angulo b a c: & ducta linea e g, quæ est æqualis ipsi e a: erit angulus e g a æqualis angulo e a g: & pariter in triangulo a e c angulus e c a æqualis angulo e a c. angulus autem e a g factus est æqualis angulo e a c. quare & angulus ad g angulo ad c erit æqualis: & reliquus reliquo. basis igitur a g basi a c æqualis erit. Solam autem a g æqualem esse ipsi a c, sic patet. Si enim possit dari alia æqualis, uel ea erit ultra a g, uel citra. sit primum ultra, & sit a h. ergo cum duæ lineæ a g, a h sint eidem æquales: erunt quoque inter se æquales: quod fieri non potest; superius nanque monstratum est, propinquiores ipsi a b maiores esse. Quòd si sit citra a g, ut a k: sequetur a g æqualem esse ipsi a k, maiorem minori: quod item fieri non potest. non ergo datur alia æqualis ipsi a c, præter unam a g. Eodem quoque modo monstrabimus, & ipsis a d, a f unam tantum dari æqualem. His ita demonstratis, dico si linea k m ad angulos rectos occurrens lineæ x l, ipsam secet in partes æquales, fieri non posse, ut a puncto k ad circumferentiam x m l alia linea ducatur, cuius pars interiecta inter circumferentiam, & lineam x l sit æqualis ipsi c m. si enim fieri possit, constituantur omnia, sicut dictum est: sitq; ea linea k o secans x l in p. erit igitur p o æqualis ipsi c m. & quoniam in triangulo k c p angulus ad c est rectus: linea k p maior erit linea k c. ergo per communem conceptionem, & linea k p o maior erit linea k c m: quod est absurdum. nam linea k c m, quæ per centrum transit, monstrata est omnium esse maxima. non igitur eo pacto duci poterit linea alia, quæ sit æqualis ipsi c m. Rursus dico, si k m secet lineam x l in partes inæquales: idem illud, quod proponebatur, recte præstari posse. Fiant omnia, ut dictum est, iam monstrabimus à puncto k ad circumferentiam ductis lineis, constitui posse minorem ip a c m: & item maiorem. quare & ei æqualem constituere, nihil erit, quod prohibeat.

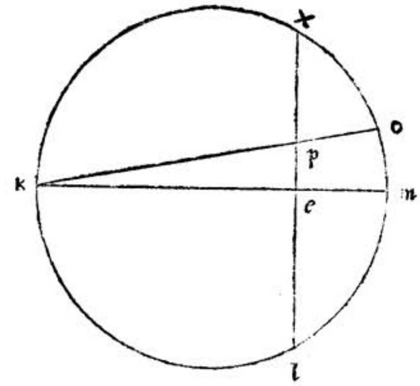
20. primi.

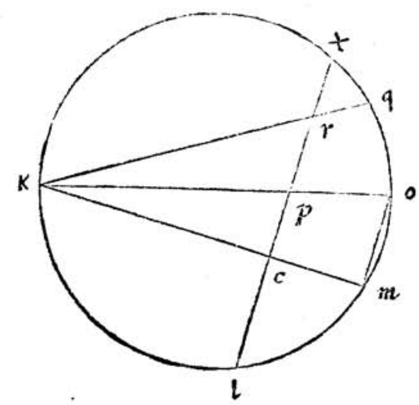


24. primi. 23. primi. 5. primi. 19. primi. 1. tertii.

constat

constat autem ipsam nunc km per centrum non transire: alioqui cum secet x l ad angulos rectos;
3. tertii. *secaret quoque & in partes æquales, quod non possumus. Itaque ab eodem puncto k per centrum alia linea ducatur ko occurrens x l in p: & ad datam lineam ko, datumq; in ea punctum k fiat angulus æqualis angulo m k o; qui sit o k q: secet autem linea k q linea m x l in puncto r: erit iam linea r q minor ipsa c m: & p o maior eadem: patet enim ex proxime demonstratis, lineam k q æqualem esse lineæ k m. sed cum in triangulo k c r, angulus ad c sit rectus: erit linea k r maior ipsa k c. quare relinquitur r q esse minorem ipsa c m. Eadem ratione monstrabimus si à puncto k ducantur aliæ lineæ ad circumferentiam x q: earum partes inter circumferentiam, atque lineam x l comprehensas multo minores esse ipsa c m. Iungantur*
31. tertii. *deinde m o. erit angulus k m o in semicirculo rectus.*
28. primi. *quòd cum etiam rectus sit k c p: linea m o æqui-*
2. sexti. *distans erit lineæ c p. quare ut k p ad p o, sic k c ad c m. est autem k p maior, quàm k c; cum an-*
14. quinti. *gulus ad c sit rectus. ergo & p o maior erit, quàm c m: quod monstrare oportebat. similiter quoque monstrabimus, si à puncto k ad circumferentiam o m aliæ ducantur lineæ, dictas partes esse maiores ipsa c m. Constat igitur fieri posse, ut à puncto k ducatur linea ad circumferentiam x m l cuius pars inter ipsam, & lineam x l interiecta sit æqualis lineæ c m, atque ipsam quidem cadere in aliquod punctum circumferentiæ o q.*





D Et quod continetur lineis k i, i n ad contentum ipsis k i c l eandem habet, quam i n ad c l.] *Addenda hæc sunt in græco codice*, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ιν πρὸς γλ.

E Quare & i n ad c l est, ut x i ad k e.] *Quoniam enim rectangulum contentū lineis x i, i l ad*
1. sexti. *contentum k e, i l eam habet proportionem, quam linea x i ad lineam k e: & contentum lineis*
35. tertii. *k i, i n ad contentum k i, c l habet eam, quam linea i n ad lineam c l: contentum autem x i, i l æquale est contento k i, i n; & contentum k e, i l æquale contento k i, c l, ut monstrabitur: erit linea i n, uel c m, ipsi æqualis ad c l, ut x i ad k e. Sunt enim triangula k i l, e i c æquiangula, ut patet; nam angulus ad i communis utrisque est, linea autem k l æquidistat lineæ e c.*
19. quinti. *quare ut k i ad i l, sic e i ad i c, & reliqua k e ad reliquam c l erit, ut k i ad i l. rectangu-*
16. sexti. *gulum igitur contentum lineis k e, i l æquale erit contento lineis k i, c l.*

F Et propterea c m ad c l, & x c ad k c, & ad k b est, ut x i ad k e: & reliqua i c ad b e, & c.] *Contentum enim lineis m c, c k rectangulum æquale est contento ipsis l c, c x:*
16. sexti. *& propterea c m ad c l est, ut x c ad k c, uel ad k b æqualem ipsi k c. erat autem c m ad c l,*
11. quinti. *ut x i ad k e. ergo x c ad k b erit, ut x i ad k e: & reliqua i c ad b e reliquam, ut x c ad k*
19. quinti. *b, uel ad k c. sed x c ad c k eandem habet proportionem, quam g ad f, ut posuimus. & i c ad b e eandem habebit, quam g ad f: & conuertendo b e ad i c eandem, quam f ad g.*

IN PROPOSITIONEM IX.

A Quoniam igitur x c minor est c l: & ipsæ k m, x c secant sese ad angulos rectos: poterit duci linea i n æqualis lineæ c m, quæ tendat ad k.] *Hoc patet fieri posse ex ijs, quæ superius demonstrata sunt.*

B Et contento l i, k e æquale contentum k i, c l. propterea quòd est, ut k e ad l c, ita c, ita k i ad l i.] *Hæc ita legenda sunt, & græcus codex corrigendus. Nam cum triangula k i l, e i c sint æquiangula: erit k i ad i l, ut e i ad i c: & permutando k i ad i e, ut l i ad i c: & componendo k e ad i e, ut l c ad i c; & rursus permutando k e ad l c, ut i e ad i c. quare & reliqua k i ad reliquam l i, ut k e ad l c. rectangulum igitur contentum lineis k i, l c æquale est ei, quod continetur lineis l i k e.* 19.quinti. 16. sexti.

Erit & ut x i ad k e, ita rectangulum lineis k i, i n contentum, ad contentum ipsis k i, c l. &c.] *Cum enim (ut iam dictum est) rectangulum contentum lineis x i, i l ad contentum ipsis l i, k e eam habeat proportionem, quam linea x i ad k e: contentum autem k i, i n ad conteutum k i, c l eandem habeat, quam contentum x i, i l ad contentum l i, k e: nanque est primum rectangulum æquale tertio, & secundum quarto, ut monstrauimus: sequitur, ut quam proportionem habet linea x i ad k e, eam habeat contentum k i, i n ad contentum k i, c l. contentum autem k i, i n ad contentum k i, c l eam habet, quam linea n i ad c l. quare ut x i ad k e, ita n i, uel ei æqualis c m ad c l. sed ut c m ad c l, ita x c ad k c, uel ad k b ipsi k c æqualem: quoniam rectangulum k c m, est æquale rectangulo l c x. ut igitur x i ad k e, ita x c ad k b: & reliqua i c ad reliquam b e, ut x i ad k e, & ut x c ad c b, uel ad k c, ei æqualem. Erat autem g ad f, ut x c ad k c. quare i c ad b e eandem habet proportionem, quam g ad f: & conuertendo b e ad i c eandem, quam f ad g.* C 11.quinti. 16. sexti. 35. tertii. 19.quinti.

IN PROPOSITIONEM X.

Est enim quadratum b i æquale quadratis i, b, & duobus, quæ b i continentur, rectangulis.] *Hoc manifestum est ex quarta secundi elementorũ, et alia eiusmodi, quæ sequuntur.* A

Quadrata igitur a b c d e f g h: & quadrata i k l m n o unà cum quadrato a dupla sunt quadratorum a b c d e f g h.] *Nam in antecedentibus bis sumuntur quadrata singularum linearum. sumitur enim bis quadratum a. & quadratum b bis; quòd quadratum o sit æquale ipsi b: & eodem modo quadratum c; quòd x sit æquale ipsi c: & ita in reliquis. sunt enim quadrata n & d æqualia; & item m & e: l & f: k & g: i & h, cum lineæ ipsæ positæ sint æquales.* B

Quod autem reliquum est, ostendemus uidelicet dupla eorum, quæ partibus uniuscuiusque lineæ æqualis ipsi a continentur, unà cum eo, quod continetur h linea, & linea æquali omnibus a b c d e f g h æqualia esse quadratis a b c d e f g h. &c.] *Ostensum antea est quadrata linearum b i, c k, d l, e m, f n, g x, h o esse æqualia his omnibus, uidelicet quadratis partium uniuscuiusque lineæ, & duplis rectangulorum, quæ illis partibus continentur. Et præterea ostensum est, quadrata a b c d e f g h; & quadrata i k l m n x o, unà cum quadrato a esse dupla quadratorum a b c d e f g h. Quare si deinceps ostenderimus reliqua, hoc est dupla rectangulorum, quæ continentur partibus uniuscuiusque lineæ æqualis ipsi a, unà cum rectangulo contento linea h, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, esse æqualia iisdem quadratis a b c d e f g h: quod uolumus, erit plenissime demonstratum. nanque omnia antecedentia, quæ quidem sunt æqualia quadratis linearum omnium, hoc est ipsius a, & reliquarum ei æqualium, unà cum quadrato a, & eo, quod continetur h, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, consequentium, hoc est quadratorum a b c d e f g h tripla erunt.* C

Quoniam enim duo, quæ lineis b i continentur, æqualia sunt duobus contentis b h.] *Hoc est rectangulo contento h, & dupla ipsius b, ex prima sexti.* D

Et duo, quæ continentur k c æqualia sunt contento h, & quadrupla ipsius c, quia k est dupla ipsius h] *Cum k sit dupla ipsius h: sumatur alia linea ipsius c dupla, quæ sit p. habebit h ad k eandem proportionem, quam c ad p. quare rectangulum contentum h p æquale erit contento k c: & duplum rectanguli h p æquale duplo rectanguli k c. sed duplum rectanguli h p est æquale ei, quod continetur h, & dupla ipsius p, hoc est quadrupla ipsius c. duplum igitur rectanguli k c est æquale contento h, & quadrupla ipsius c. Et eadem ratione duplum rectanguli l d æquale monstrabitur contento h, & sexcupla ipsius d; quòd l tripla sit ipsius h: et ita in reliquis.* E 16. sexti. 1. sexti.

Omnia rectangula unà cum eo, quod continetur linea h, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, æqualia erunt contento linea h, & linea æquali his omnibus uidelicet ipsi a, & triplæ b, &c.] *Omnia scilicet rectangula consequentia, de quibus ultimo loco dictum est, hoc est rectangulum contentum linea h, & dupla ipsius b: contentum h, & quadrupla c: contentum h & sexcupla d: contentum h, & octupla e: contentum h & decupla f: contentum h, &* F

e duodecupla

duodecupla g: contentum h, & quaterdecupla eiusdem: & contentum h & linea æquali omnibus 1. sexti. *a b c d e f g h. Hæc (inquam) omnia sunt æqualia rectangulo contento linea h, & linea æquali his omnibus; lineæ scilicet a, triplæ b, quincuplæ c, septuplæ d, nonuplæ e, undecuplæ f, tredecuplæ g, & quindecuplæ h; nam altitudinem habent eandem lineam h, bases uero omnes uni basi æquales. Quare omnia antecedentia, hoc est dupla rectangulorum partibus uniuscuiusque lineæ æqualis ipsi a contentorum, unà cum rectangulo contento h & linea æquali omnibus a b c d e f g h, sunt uni rectangulo iam dicto æqualia. sed eidem æqualia sunt quadrata a b c d e f g h, ut mox ostendetur. antecedentia igitur omnia æqualia sunt quadratis a b c d e f g h.*

G Nam quadratum a est æquale contento h linea, & linea æquali his omnibus uidelicet ipsi a, & reliquis, quarum unaquæque est æqualis ipsi a.] *Tres nanque lineæ h, a,* 17. sexti. *& composita ex a & ceteris ei æqualibus, sunt proportionales. quare quadratum a est æquale rectangulo contento linea h, & linea composita iam dicta. hoc autem rectangulum æquale est ei, quod continetur linea h, & linea composita ex his omnibus; uidelicet linea a, & dupla linearum b c d e f g h: quòd lineæ æquales a, dempta ipsa a, duplæ sunt linearum b c d e f g h. est enim o posita æqualis ipsi b: & x ipsi c: & n, d: & m, e: & l, f: & k, g: & i, h. Quadratum igitur a æquale est rectangulo contento linea h, & linea composita ex a, & dupla linearum b c d e f g h. Rursus quoniam proportionales sunt tres lineæ h, b, & composita ex b & reliquis ipsi b æqualibus; hoc est composita ex b, & dupla reliquarum c d e f g h: erit quadratum b æquale contento linea h, & composita ex b, & dupla ipsarum c d e f g h: & eodem modo in ceteris ratiocinati, tandem colligemus rectangula omnia, quæ sunt æqualia quadratis a b c d e f g h esse quoque æqualia uni rectangulo contento linea h, & æquali his omnibus; ipsi a, triplæ b, quincuplæ c, septuplæ d, nonuplæ e, undecuplæ f, tredecuplæ g, & quindecuplæ h. Quare quadrata a b c d e f g h eidem illi rectangulo æqualia esse, nemo sane dubitare poterit: quod unum restabat ostendendum.*

H Ex quibus colligitur, quadrata omnia linearum æqualium maximæ &c.] *Hoc est quadrata linearum a, b i, c k, d l, e m, f n, g x, & h o minora sunt, quàm tripla quadratorum a b c d e f g h. demptis enim ex illis, quæ horum tripla sunt; quadrato scilicet a, & rectangulo contento linea h, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, reliqua minora erunt, quàm tripla eorundem quadratorum.*

I Reliquorum autem dempto maximæ quadrato, maiora, quàm tripla.] *Quadratum enim a, & rectangulum contentum linea h & æquali ipsis a b c d e f g h, quæ quidem ex antecedentibus demuntur; minora sunt, quàm tripla quadrati a, quod ex consequentibus demptum est, quippe cum rectangulum dictum minus sit quadrato ipsius a, ut superius est demonstratum.*

K Et propterea si similes figuræ describantur ab omnibus &c.] *Constat hoc ex corollario uigesimæ sexti, græcus autem codex ita corrigendus.* τὰ εἴδεα ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα, τῶν μὲν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσω ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν εἰδέων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται, ἢ τριπλάσια.

IN PROPOSITIONEM XI.

A Quare & omnia quadrata linearum o d, p f, r h, s k, t m, y x ad omnia contenta linea n x &c.] *Ex duodecima quinti.*

B Itaque contentum linea n x, & æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x.] *Concluditur hoc ex prima sexti. nam tertiæ partes quadratorum o q, p z, r 9, s λ, t ч, y n, communes utrisque sunt, rectangulum uero contentum n x, & linea æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x cum altitudinem habeat lineam n x, basim uero æqualem his omnibus, æquale erit quadratis linearum q d, z f, 9 h, λ k, ч m, n x; & rectangulo, cuius altitudo n x, basis uero linea æqualis omnibus o q, p z, r 9, s λ, t ч, y n: altitudo enim utrobique eadē est, bases uero omnes uni basi æquales.*

C Quadrata uero a b, c d, e f, g h, i k, l m æqualia sunt quadratis b u, q d, z f, 9 h,
4. secundi λ k, ч m, &c.] *Nam quadratum a b æquale est quadratis b u, a u, & duplo eius, quod conti-* 1. sexti. *netur b u, a u, hoc est ei, quod continetur b u & dupla a u: & eodem modo quadratum c d æquale est quadratis q d, c q; & contento, q d & dupla c q: & ita in reliquis. quare omnia antecedentia omnibus consequentibus æqualia sunt, ut proponitur.*

D Communia igitur utrisque sunt quadrata linearum æqualium ipsi n x: contentū autē linea n x, & æquali omnibus o q, p z, 9 r, λ s, ч t, y n minus est contento b u &c.] *Monstrauit primum Archimedes spatia hæc omnia, uidelicet rectangulum contentum linea n x, &*

æquali

æquali ipsis o d, p f, r h, s k, t m, y x; & tertiam partem quadratorum o q, p ʒ, r 9, s ƛ, t ч, A
y n esse æqualia his omnibus, uidelicet quadratis q d, ʒ f, 9 h, ƛ k, ч m, n x; & rectangulo con- B
tento n x & linea æquali o q, p ʒ, r 9, s ƛ, t ч, y n & tertiæ parti quadratorum o q, p ʒ, r 9,
s ƛ, t ч, y n. Deinde monstrauit quadrata a b, c d, e f, g h, i k, l m omnia æqualia esse his qua- C
dratis, uidelicet b u, d q, f ʒ, h 9, k ƛ, m ч; & quadratis a u, c q, e ʒ, g 9, i ƛ, l ч; & rectan D
gulo contento b u, & linea composita ex dupla a u, c q, e ʒ, g 9, i ƛ, l ч. Vocentur autem prima
omnia, ut breuitati consulamus, spatia A, secnuda B, tertia C, quarta D. erunt ergo spatia A
spatijs B æqualia: spatia uero C æqualia spatijs D. Aggreditur nunc monstrare spatia B mino
ra esse spatijs D, ut ex hoc postea inferat spatia quoque A spatijs C esse minora. Illud uero sic
monstrabitur. Nam quadrata q d, ʒ f, 9 h, ƛ k, ч m, n x sunt æqualia quadratis b u, q d, ʒ f,
9 h, ƛ k, ч m; cum totidem utrobique sint quadrata ex ijsdem, uel æqualibus lineis orta: rectan-
gulum uero contentum linea n x, & æquali omnibus o q, p ʒ, r 9, ƛ s, t ч, y n minus est rectan-
gulo contento linea b u, & linea æquali duplo harum omnium a u, c q, e ʒ, g 9, i ƛ, l ч; quòd du
plum harum linearum excedat lineas o q, p ʒ, r 9, s ƛ, t ч, y n, excessu lineæ a u. est enim du-
plum linearum c q, e ʒ, g 9, i ƛ, l ч æquale lineis o q, p ʒ, r 9, s ƛ, t ч; & linea a u æ-
qualis lineæ y n. quare rectangulum consequens cum assumat in basi duplum ipsius lineæ a u: excedit
antecedens spatio contento lineis a u, b u. Præterea tertia pars quadratorum o q, p ʒ, r 9, s ƛ,
t ч, y n est etiam minor quadratis a u, c q, e ʒ, g 9, i ƛ, l ч; ex eo, quod in superiori propositio-
ne ab Archimede monstratum est, nempe quadrata linearum æqualium maximæ minora esse, quàm
tripla quadratorum linearum se se æqualiter excedentium. constat igitur spatia B minora esse spa-
tijs D: & idcirco spatia A spatijs C minora erunt. græcus autem codex ita restituendus est.
καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, ƛ ч μείζονά ἐστι τοῦ τρίτου μέρους τῶν τετραγώ-
νων, τῶν ἀπὸ τᾶν ο χ, π ψ, ρ ω, σ ƛ, τ ч, υ ν *&c. & paulo post.* πάλιν δὴ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν
γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ, ἴσα ἐντὶ τοῖς τε ἀπὸ τᾶν γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, ƛ ч, καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν χ δ,
ψ ζ, ω ϑ, ƛ κ, ч μ, ν ξ.

Quod autem reliquum est, ostendemus; maiora scilicet esse quadratis c d, e f, E
g h, i k, l m, n x, &c.] *Rursus uult ostendere Archimedes spatia A; hoc est rectangulum con-*
tentum linea n x, & æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x; & tertiam partem quadratorum
o q, p ʒ, r 9, s ƛ, t ч, y n, maiora esse quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x. ad quod assumit qua E
drata c d, e f, g h, i k, l m, n x esse æqualia quadratis c q, e ʒ, g 9, i ƛ, l ч; & quadratis q d, ʒ F
f, 9 h, ƛ k, ч m, n x; & rectangulo contento linea n x, & æquali duplæ linearum c q, e ʒ, g 9,
i ƛ, l ч. id, quod apparet manifestissime ex quarta secundi. Sed dicantur causa breuitatis spatia
illa E, hæc autem spatia F.

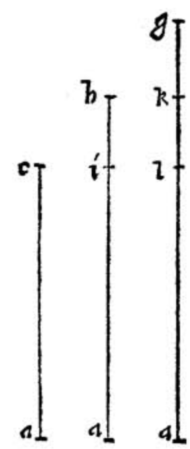
Suntq; communia quadrata q d, z f, 9 h, ƛ k, ч m, n x; & contentum linea n x &c.] F
Cum antea ostensum fuerit spatia A esse æqualia spatijs B: spatia autem E spatijs F æqualia:
si nunc ostenderimus, spatia B esse maiora spatijs F: erunt quoque spatia A ipsis E maiora. Qua-
drata enim q d, ʒ f, 9 h, ƛ k, ч m, n x sunt utrisque communia; & rectangulum, quod contine-
tur linea n x, & æquali omnibus o q, p ʒ, r 9, s ƛ, t ч, y n maius est rectangulo contento n x,
& æquali duplæ linearum c q, e ʒ, g 9, i ƛ, l ч; nanque earum dupla est æqualis lineis o q, p ʒ, r
9, s ƛ, t ч. quare basis antecedentis rectanguli excedit basim consequentis, linea y n: & rectangu-
lum excedit rectangulum, spatio y n x. Quadrata uero o q, p ʒ, r 9, s ƛ, t ч, y n maiora sunt,
quàm tripla quadratorum c q, e ʒ, g 9, i ƛ, l ч: & idcirco tertia illorum pars, his quadratis ma
ior est; quòd paulo ante fuerit ostensum, quadrata linearum æqualium maximæ, quadratorum ex
lineis se se æqualiter excedentibus, dempto maximæ quadrato, maiora esse, quàm tripla. relinquitur
ergo rectangulum contentum linea n x, & æquali omnibus omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x unà
cum tertia parte quadratorum o q, p ʒ, r 9, s ƛ, t ч, y n, maius esse quadratis c d, e f, g h, i k,
l m, n x. In hunc usque locum processit Archimedes nullum eorum, quæ proposuit, manifeste
concludens, nisi fortasse aliqua desiderentur. At nos illud ipsum facile assequemur ex ijs, quæ an
te monstrata sunt. monstratum nanque est, quadrata linearum o d, p f, r h, s k, t m, y x, quæ sunt
quadrata linearum æqualium maximæ ad spatia A eam habere proportionem, quam quadratum
a b lineæ maximæ ad rectangulum a b u; & tertiam partem quadrati a u. simul & illud monstra
tum est, spatia A esse minora spatijs C. quare ex 8. & 13. quinti concluditur primum, uidelicet
quadrata linearum æqualium maximæ ad spatia C, hoc est ad quadrata a b, c d, e f, g h, i k, l m
linearum se se æqualiter excedentium, dempta minima, minorem habere proportionem, quàm qua-

 dratum

dratum a b lineæ maximæ ad rectangulum a b u; & tertiam partem quadrati a u, hoc est ad id, quod est æquale utrisque; rectangulo contento linea maxima, & minima; & tertiæ parti quadrati excessus, quo maxima minimam excedit. Rursus quoniam monstrata sunt spatia A maiora spatijs E: ex eisdem colligitur secundum, quadrata linearum æqualium maximæ ad spatia E, hoc est ad quadrata linearum se se æqualiter excedentium dempta maxima, maiorem habere proportionem, quàm quadratum lineæ maximæ ad rectangulum maxima, minimaq; linea contentum; & ad tertiam partem quadrati eius lineæ, qua maxima excedit minimam: quæ omnia ostendisse oportebat. Corollarium patet ex iam dictis, & corollario uigesimæ sexti elementorum.

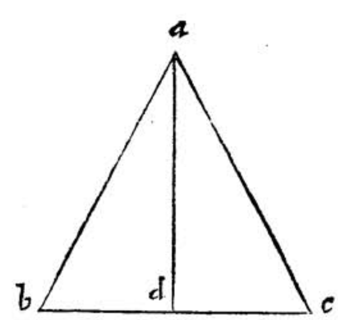
IN PROPOSITIONEM XIII.

A Etidcirco a g, a c sunt ipsius a h duplæ. *Hoc manifeste apparere potest, cum id, quo linea a g excedit lineam a c, sit duplum eius, quo linea a h excedit eandem a c. sed ut res manifestior fiat, ponantur tres lineæ a c, a h, a g, se se æqualiter excedentes, & excessus, quo linea a h excedit a c, sit i h; quo autem linea a g excedit a h, sit k g: & abscindatur ab ipsa k a, linea æqualis, k g, quæ sit k l. perspicuum est lineam l g duplam esse ipsius i h: & lineas a c, a i, a l inter se se æquales; proptereaq; duas lineas a c, a l duplas ipsius a i. Duæ igitur a c, a l ipsius a*
1. quinti. *i æque multiplices sunt, atque l g ipsius i h; nempe duplæ. quare & lineæ a c, a l, l g, linearum a i, i h; hoc est, a c, a g, ipsius a h duplæ sunt; quod monstrare oportebat.*



B Sed eius lineæ, quæ in triangulo bifariam diuidit angulum c a g, ipsæ a g, a c maiores sunt, quàm duplæ.] *Si enim trianguli angulus bifariam diuidatur: diuidens autem linea producatur usque ad basim: duo trianguli latera maiora erunt, quàm dupla ipsius diuidentis; quod nos ita monstrabimus.*

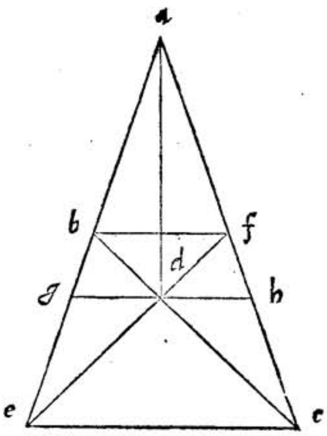
SIT triangulum a b c: & sit a d linea diuidens angulum b a c bifariam. Dico latera a b, a c maiora esse, quàm dupla ipsius a d. Itaque triangulum, uel duo latera habebit æqualia, uel inæqualia. habeat primo æqualia. erunt iam duo
4. primi. *triangula a b d, a c d æqualia, & similia inter se: nanque angulus a b c æqualis est angulo a c d: & b a d æqualis ipsi*
32. primi. *c a d. quare & reliquus angulus a d b reliquo a d c æqua-*
13. *lis: & uterque rectus. ergo linea a b maior est ipsa a d;*
18. *cum maiori angulo subtendatur. eadem quoque ratione & linea a c maior ipsa a d. duæ igitur lineæ a b, a c maiores sunt, quàm duplæ ipsius a d. Si uero triangulum latera habeat inæqualia sit, ut in alia figura, latus a c maius latere a b: & producatur a b usque ad e; ita ut fiat æquale lateri a c: iungantur quoque e c: & per punctum b ducatur linea b f æquidistans ipsi e c: itemq; per d alia ducatur eidem æquidistans, quæ sit g d h: & iungantur e f. perspicuum est igitur, propter similitudinem triangulorum a e c, a g h, lineas a g, a h æquales esse. quare trianguli æquicruris a g h duo latera a g, a h maiora erunt, quàm dupla ipsius a d, ex ijs, quæ proxime monstrata sunt. Quòd si monstrauerimus, lineas a b, a c trianguli a b c maiores esse lineis a g, a h: manifeste patebit, quod proponebatur. In hac enim dispositione multa fieri triangula, æqualia inter se, & similia, neminem latere potest, qui elementorum libros recte perceperit. è quorum numero triangulum b d e æquale est, & simile triangulo f d c: & triangulum b d g triangulo f d h: & denique g d e ipsi h d c. constat præterea lineam g h duos angulos,*



15. primi. *qui sunt ad d uidelicet b d e, f d c bifariam secare; cum angulus g d c sit æqualis angulo f d h: &*
3. sexti. *propterea angulo b d g: & similiter angulus h d c sit æqualis angulo b d g, hoc est ipsi f d h. Sed & illud constat. cum linea a d secet angulum b a c bifariam, basis portiones eandem proportionem habere, quàm reliqua ipsius trianguli latera; hoc est c d ad d b esse, ut a c ad a b. quòd cum*

linea

linea a c poſita ſit maior ipſa a b: erit & c d maior ipſa d b. eadem quoque ratione in triangulo f d c, cuius angulus ad d bifariam ſecatur ipſa d h, erit c h ad h f, ut c d ad d f; hoc eſt ad b d, erit igitur c h maior ipſa h f. quare linea compoſita ex dupla ipſius a b, & ipſis f h, h c, maior erit compoſita ex dupla eiuſdem a b, & dupla f h. At uero lineæ primæ compoſitæ æquales ſunt duæ lineæ a b, a c; cum a f ſit æqualis ipſi a b: ſecundæ autem ſunt æquales duæ lineæ a g, a h; quòd b g ipſi f h ſit æqualis. ergo duæ lineæ a b, a c duabus lineis a g, a h ſunt maiores. ex quibus ſequitur, lineas a b, a c multo maiores eſſe, quàm duplas ipſius a d: quod monſtrare uolebamus.



IN PROPOSITIONEM XVI.

Neceſſarium igitur eſt circuli huius circumferentiam, quæ ad præcedentia habetur intra lineam ſpiralem cadere; quæ uero ad ſequentia, extra.] *Hoc eſt circumferentiam eam, quæ à d puncto uerſus præcedentia habetur, quæ eſt d r t intra ſpiralem lineam cadere; quæ uero habetur ab eodem puncto uerſus conſequentia, hoc eſt d n t, extra.* A

Angulum uero a d f non eſſe acutum conſtat, quia maior eſt angulo ſemicirculi.] *Oſtenſum eſt in decima ſexta tertij elementorum, ſemicirculi angulum omni angulo acuto rectilineo eſſe maiorem, hoc eſt eum, qui diametro, & circuli circumferentia continetur. Quare ſi angulus a d r omni acuto rectilineo maior eſt: neceſſario ſequitur, angulum a d f rectilineum, cum eo maior ſit, quòd linea d f extra circulum cadat, nullo pacto eſſe acutum.* B

Quare ab a puncto ad contingentem poteſt recta linea duci, ita ut eius pars, &c.] *Hoc quomodo fieri poſſit, docet ipſe in quinta huius.* C

Et tota igitur i a ad a r minorem proportionem habet, quàm circumferentia r d n t ad d n t circumferentiam.] *Per compoſitam ſcilicet rationem, ex uigeſima octaua quinti apud Campanum.* D

Hoc eſt quam s g k h circumferentia ad circumferentiam g k h.] *Eſt enim ut angulus r a d ad ipſum d a t, ita circumferentia r d ad circumferentiam d n t: & ita circumferentia s g ad circumferentiam g k h. quare ut circumferentia r d ad circumferentiam d n t, ita circumferentia s g ad ipſam g k h: & componendo, ut circum ferentia r d n t ad circumferentiam d n t, ita circumferentia s g k h ad circumferentiam g k h.* E ult. ſexti. 11.quinti.

Vt oſtenſum eſt.] *Videlicet in decima quarta huius.* F

Quod fieri minime poteſt, cum ſit r a æqualis a d.] *Vide ne codex græcus mendoſus ſit, cui hæc uerba deſint, μείζων δὲ ἁ ι α τᾶς α λ, hoc eſt, maior autem i a ipſa a l. ſequitur abſurdum ex octaua quinti; nanque a i cum ſit maior ipſa a l: maiorem habet proportionem ad a r, quàm a l ad eandem, ſiue ad ei æqualem a d; cuius oppoſitum ſequebatur ex ante dictis.* G

IN PROPOSITIONEM XVIII.

Et ſumatur linea quædam recta l a, minor quidem, quàm f a, maior uero, quàm circumferentia circuli h k g.] *Id, quo pacto fiat, docetur quarta huius.* A

Proportioq́; quàm habet h a ad a l minor eſt ea, quam habet dimidia g h ad lineam ab a puncto ad ipſam g h perpendiculariter ductam; quoniam & maior eſt ea, quam habet h a ad a f.] *Proportio enim, quam habet h a ad a l maior eſt ea, quam habet h a ad a f. at dimidium lineæ h g ad lineam ab a puncto ad ipſam h g perpendiculariter ductam, habet eam proportionem, quam h a ad a f, ut monſtrabitur. ergo & proportio, quam habet h a ad a l, maior eſt proportione, quam habet dimidium h g ad lineam ab a puncto ad ipſam g h perpendiculariter ductam. Illud autem monſtrabitur ad hunc modum. ducatur ab a ad ipſam h g perpendicularis a i. conſtat lineam a i diuidere ipſam h g in partes æquales: & triangu-* B 8.quinti. 13.quinti. 3. tertii.

lum

32. primi. *lum a i h triangulo f a h, esse æquiangulum: cum angulus ad h sit communis; angulus uero f a h*
4. sexti. *æqualis angulo a i h; quorum uterque est rectus. habet igitur linea i h ad i a; hoc est dimidium lineæ h g ad lineam à puncto a ad h g perpendiculariter ductam proportionem eandem, quam linea h a ad a f.*

C Potest igitur à puncto a duci ad productam linea a n: ita ut n r quæ interiicitur inter circumferentiam &c.] *Ex septima huius.*

D Quare n r ad r a eam habebit proportionem, quam h r recta ad ipsam a l.] *Cum enim posuerimus lineam n r ad h r habere proportionem eam, quam linea h a ad a l: & permutando linea n r ad h a, siue ad r a, ipsi æqualem, eam habebit, quam h r ad a l.*

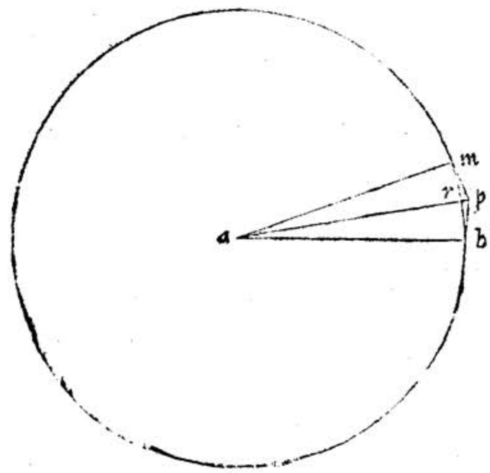
E Et idcirco tota n a ad a r minorem habebit, quam h r circumferentia unà cum tota circuli circumferentia ad circumferentiam circuli h g k.] *Per compositam uide licet rationem ex uigesima octaua quinti.*

F Quam uero proportionem habet circumferentia h r una cum tota circuli h g k circumferentia &c.] *Patet hoc ex decima quinta huius.*

G Et proportio, quam habet a h ad a l minor est ea, quam dimidia g h habet ad lineam a b a puncto &c.] *Ex ijs, quæ nos proxime ostendimus; nam linea h a ad a f eandem habet proportionem, quam dimidium lineæ h g ad perpendicularem ab a puncto ad ipsam h g ductam.*

H Potest igitur ab a puncto duci linea a p ad contingentem &c.] *Ex octaua huius.*

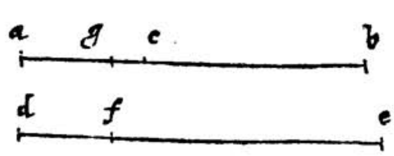
I Cum sit h p recta maior circumferentia h r.] *Fiat ad lineam a p, & ad punctum in ea datum a, angulus æqualis angulo h a p, qui sit p a m: & ducta p m, erunt duæ lineæ h p, p m maiores circumferentia h r m, ex ijs, quæ posita sunt ab Archimede*
23. primi.
15. quinti. *in principio lib. de sphæra, & cylindro. sicut autem lineæ h p, p m ad circumferentiam h r m, ita dimidium harum linearum ad dimidium circumferentiæ, hoc est linea h p ad circumferentiam h r. est enim linea h p æqualis lineæ p m; quòd triangulus p a h æqualis*
4. primi.
ult. sexti. *sit triangulo p a m: & circumferentia h r æqualis est circumferentiæ r m; cum æqualibus angulis subijciantur. quare sequitur lineam h p maiorem esse circumferentia h r.*
14. quinti.



K Quare & r a ad a n maiorem habet proportionem, quam circumferentia circuli h g k ad h k r circumferentiam.] *Quam obrem illud sequatur, nos uniuersè demonstrabimus proposito eiusmodi theoremate.*

Si pars ad totum maiorem proportionem habeat, quam alterius totius pars ad suum totum: habebit & totum ad reliquum, maiorem proportionem, quàm alterum totum ad reliquum.

Sit totius a b, pars a c; quæ ad a b maiorem habeat proportionem, quàm totius d e pars d f ad ipsam d e. Dico a b ad c b maiorem proportionem habere, quàm d e ad f e. fiat ut d f ad d e, sic alia quæpiam linea, quæ sit a g
13. quinti. *ad a b. habebit ergo a c ad a b maiorem proportionem, quam a g ad*
10. eiusdē. *eandem. quare a c maior erit ipsa a g: & ob id g b maior ipsa c b. Et quoniam a g ad a b est, ut d f ad d e: erit è contrario a b ad*
19. quinti *a g, ut d e ad d f: & per conuersionem rationis a b ad g b, ut d e*
8. quinti. *ad f e. sed a b ab c b maiorem habet proportionem, quam ad g b; cum maior sit g b, ipsa c b, ut dictum*

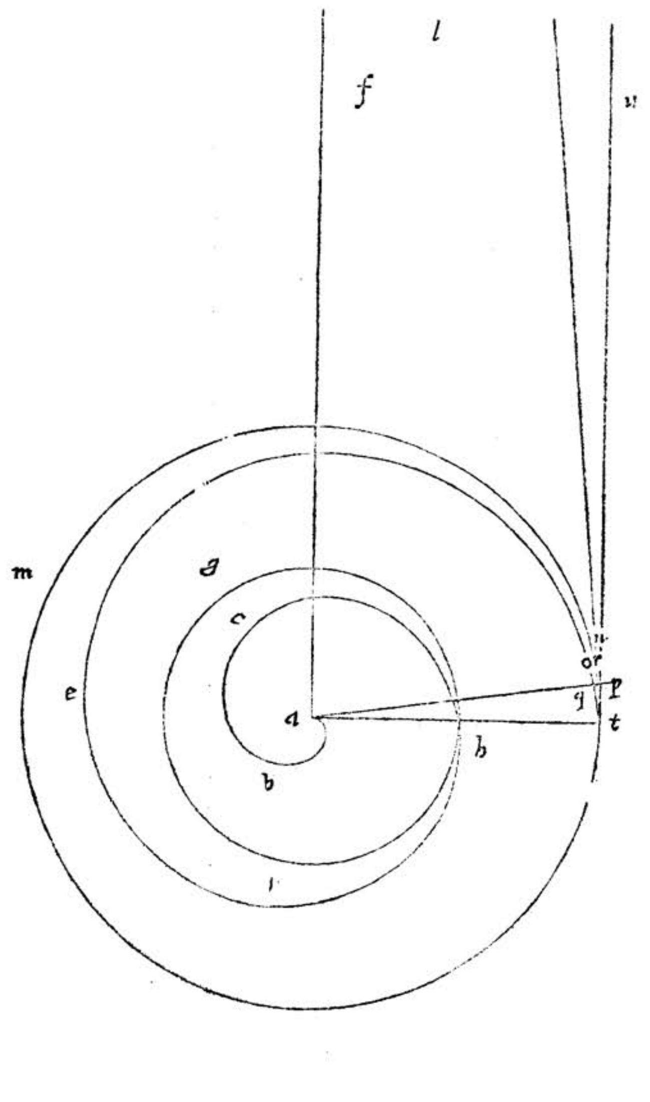


dictum est. ergo & a b ad c b maiorem habet, quam d e ad f e: quod monstrare uolebamus.

IN PROPOSITIONEM XIX.

Et proportio, quam habet t a ad a l, maior est ea, quam dimidia t n habet ad lineam ab a puncto ad ipsam t n perpendiculariter ductam.] *Ducatur, ut dictum est superius, à puncto a ad lineam t n perpendicularis a i. erit eadem ratione t a ad a f, ut t i ad i a; hoc est ut dimidium lineæ t n ad perpendicularem ab a ad ipsam t n ductam. Quòd cum linea a l posita sit minor linea a f: habebit t a ad a l maiorem proportionem, quam ad a f; hoc est, quàm dimidium t n ad perpendicularem ab a ad ipsam ductam.* A 8.quinti.

Similiter autem ostendetur, neque minor esse, quàm dupla.] *Nam si fieri possit, sit linea f a minor, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n: assumaturq; linea a i, maior quidem, quá linea a f, minor uero, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n: & ducatur à puncto t linea t u æquidistans ipsi a f. Rursus in circulo est linea t n, minor diametro: & alia tangit circulum in puncto t. proportioq;, quam habet t a ad a l minor est ea, quam dimidium lineæ t n habet ad perpendicularem ab a puncto ad ipsam t n ductam. ducemus ergo ab a lineam a p ad contingentem; ita ut r o, quæ media interijcitur inter lineam rectam in circulo datam, & circuli circumferentiam, ad lineam t p eam habeat pruportiouem, quàm t a ad a l: id uero fieri posse ex octaua huius manifestum est; secet enim linea a p circulum quidem in puncto r, lineam uero spiralem in puncto q, & lineam t n in o. Quoniam igitur linea r o ad t p eam habet proportioné, quam t a, siue r a ei æqualis ad a l, ut posuimus; & permutando r o ad r a habet eam, quam t p ad a l. sed t p ad a l maiorem habet proportionem, quàm circumferentia t r ad circuli circumferentiam t m n bis sumptam; nam t p maior est, quàm circumferentia t r: & a l minor, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. quare r o ad r a habet maiorem proportionem, quàm circumferentia t r ad circuli t m n circumferentiam bis sumptam: & ex ijs, quæ nos monstrauimus in antecedente, r a ad a o maiorem habet proportionem, quàm circumferentia circuli t m n bis sumpta ad circumferentiam t m r unà* B



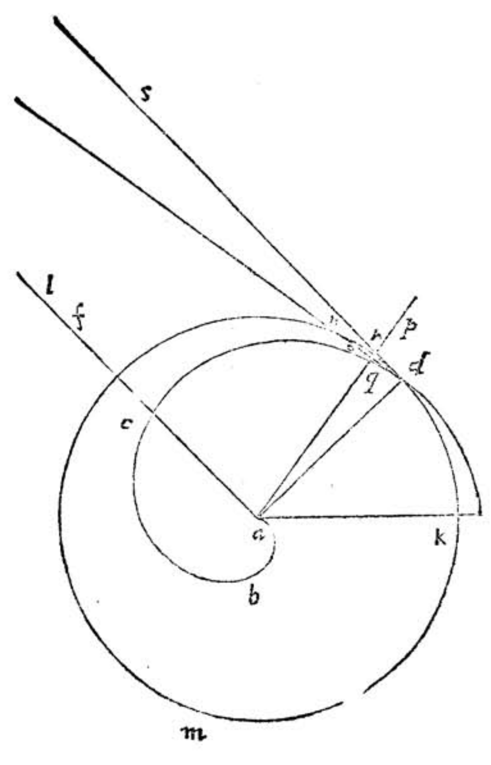
cum

cum tota circuli circumferentia. quam uero proportionem habent dictæ circumferentiæ, eandem habet t a ad q a, ex decima quinta huius. ergo r a ad a o maiorem habet, quàm t a ad a q: quod fieri non potest; quoniam lineæ r a, t a inter se sunt æquales; & a o maior, quàm a q. non est igitur f a minor, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n.

C Et multiplicem esse circumferentiæ circuli, secundum numerum circulationis nominati eodemmet numero.] *Vt si linea spiralis in tertia circulatione fuerit descripta; erit ea tripla tertij circuli: & si in quarta circulatione; quadrupla quarti circuli: & ita in reliquis.*

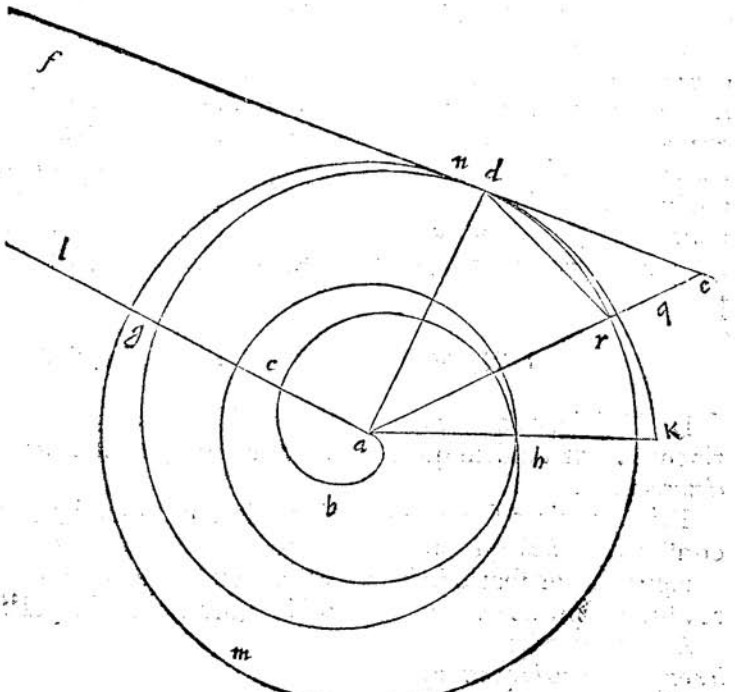
IN PROPOSITIONEM XX.

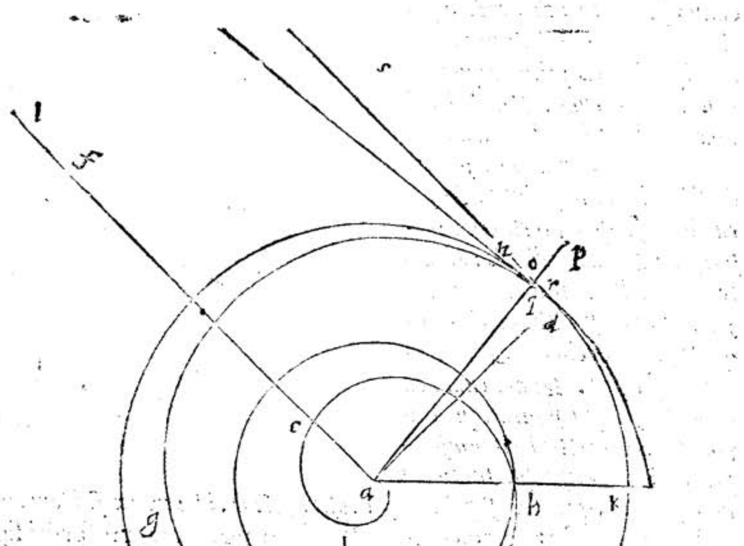
A Similiter autem superioribus ostendetur, neque minor esse.] *Nam si fieri potest, sit a f minor circumferentia k m d: & sumatur linea a l maior quidem, quàm a f; minor uero, quàm circumferentia dicta k m d: atque à puncto d ducatur linea d s æquidistans ipsi a f. Quoniam igitur linea d n in circulo minor est, quã diameter: & alia tangit circulum in puncto d: proportioq́; quam a d habet ad a l minor est ea, quam habet dimidium lineæ d n ad perpendicularem ab*
8. huius. *à puncto ad ipsam d n ductam: poterimus ab ipso a ad contingentem lineam ducere a p, ut portio r o, quæ est inter lineam d n, & circumferentiam circuli ad ipsam d p, eam proportionem habeat, quam d a ad a l; secet enim linea a p circulum in puncto r; & lineam d n in o; spiralem uero lineam in q. Rursus cum r o ad d p eam habeat proportionem, quam d a, siue r a ad a l: habebit permutando r o ad r a eandem, quã d p ad a l. sed d p ad a l maiorem habet proportionem, quam circumferentia d r ad circumferentiam k m d; quoniam d p maior est, quàm d r circumferentia: & a l posita est minor, quàm circumferentia k m d, ergo r o ad r a maiorem proportionem habet, quàm cirrumferentia d r ad circumferentiam k m d: & propterea r a ad a o maiorem habet, quam k m d circumferentia ad*
15. huius. *circumferentiam k m r, ut superius monstratum est. Sed quam proportionem habent dictæ circumferentiæ, eandem habet linea d a, ad q a. quare r a ad a o maiorem*
8. quinti. *habebit, quàm d a ad q a; quod fieri non potest; cum r a, d a sint æquales, & a o maior, quàm a q.*



H Eodem quoque modo ostendetur, & si lineam spiralem in secunda circulatione descriptam.] *Sit enim a b c h linea spiralis in prima circulatione descripta, & h g d in secunda: & contingat eam aliqua recta e d f in puncto d: ab ipso autem d ad principium lineæ spiralis ducatur d a: & centro quidem a, interuallo autem a d describatur circulus d m n; qui secet principium circulationis in puncto k: & ad ipsam d a erigatur perpendicularis a f. coibit ipsa cum linea e d f, ex ante dictis. coeat in f. Dico a f æqualem esse toti circumferentiæ circuli d m n, & præterea circumferentiæ k m d. Si enim non est æqualis, uel maior erit, uel minor. Sit primum, si fieri potest, maior: & sumatur aliqua recta a l minor quidem, quàm a f, maior uero, quàm tota circuli d m n circumferentia, & circumferentia k m d. Rursus circulus est k m n: atque in ipso recta linea d n, minor diametro: & proportio, quam habet d a ad a l maior est ea, quam ha-*
7. huius. *bet dimidium lineæ d n, ad perpendicularem ab a puncto ad ipsam d n ductam. Quare fieri poterit*

terit, ut ab ipso a ad d n protractam ducatur linea a e, secans circulum quidem in r; lineam uero spiralem in q; ita ut e r ad d r eam proportionem habeat, quam d a ad a l. habebit igitur permutando e r ad d a, uel ad a r proportionem eam, quã d r ad a l. At uero d r ad a l minorem habet proportionem, quam circumferentia d r ad totam circuli k m n circumferentiam unà cũ circumferentia k m d; quòd recta linea d r minor sit circumferentia d r: & a l minor dictis circumferentijs. minorem ergo proportionẽ habebit e r ad a r, quàm circumferentia d r ad totam circuli k m n circumferẽtiam unà cum circumferentia k m d. quare & componendo a e ad a r minorem habebit, quàm tota circumferentia circuli k m n unà cum circumferentia k m d r, ad totã circumferẽtiam unà cum circumferentia k m d. Hæ autem circumferentiæ inter se se eãdem habent proportionem, quã q a ad d a. sequitur ergo minorem habere proportionem a e ad a r, 15. huius. quàm q a ad d a: quod esse non potest; cum q a minor sit, quàm a e; & ipsæ a r, d a sint æquales. non igitur a f maior est tota circuli k m n circumferentia, unà cum circumferentia k m d.





Similiter autem ante dictis monstrabimus, neque minorem esse; sumpta linea a l maiore ipsa a f, et minore dictis circũferentijs, atque per punctũ d ducta d s æquidistanti ipsi a f. A puncto enim a ad contingentẽ ducere licebit lineam a p, quæ secet circulum quidem in puncto r, & lineam in circu 8. huius.

lo existentẽ, uidelicet ipsam d n in o, spiralem uero in q, eo pacto, ut r o ad d p ita, sit ut d a ad a l. erit & permutando r o ad d a, siue ad a r, ut d p ad a l. sed d p ad a l maiorem proportionem habet, quàm circumferentia d r ad totam circuli k m n circumferentiam unà cum circumferentia k m d; quoniam recta linea d p maior est circumferentia d r: & a l minor dictis circumferentijs. maiorem ergo proportionem habebit r o ad r a, quàm d r circumferentia ad circumferentiam circuli k m n unà cum circumferentia k m d. & ob eandem, quæ superius dicta est, rationem, r a ad a o maiorem, quàm circuli k m n circumferentia unà cum circumferentia k m d, a d circuli k m n circumferentiam unà cum circumferentia k m r. sed cum dictæ circumferentiæ habeant eandem proportionem inter se, quam d a ad q a: habebit r a ad a o maiorem, quàm d a ad q a: quod item esse non potest. quare neque minor est a f dictis circumferentijs. æqualis igitur: quod fuerat demonstrandum.

IN PROPOSITIONEM XXI.

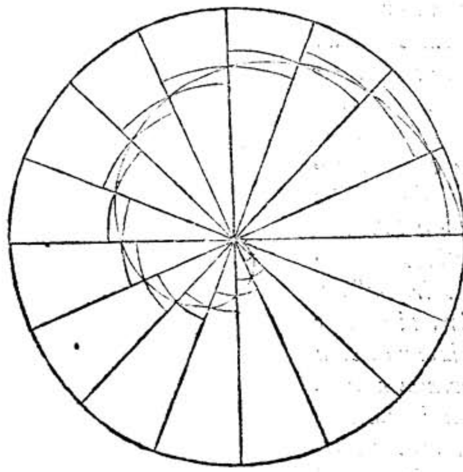
A Diuiso igitur semper angulo recto bifariam, & sectore angulum rectum continente. erit tandem quod &c.] *Hoc manifeste ostenditur fieri posse ex prima decimi elementorum.*

B Erit iam circa sumptum spatium circumscripta figura ex similibus sectoribus constans.] *Similes sectores dicuntur, quorum anguli ad centrum sunt æquales.*

Sectores similes.

C Figura igitur spatio inscripta æqualis est figuræ circumscriptæ dempto h a k sectore, solus enim hic ex omnibus, qui in figura circumscripta habentur, relictus est.]

Si enim exempli gratia, angulus quisque rectus in quatuor partes diuisus fuerit: erunt anguli omnes sexdecim: & totidem sectores figuræ circumscriptæ. at inscriptæ figuræ sectores quindecim tantum erunt. Quòd si primus inscriptæ sector, ut à maximo ordiamur, æqualis sit secundo sectori circumscriptæ: & secundus inscriptæ, tertio circumscriptæ: & ita in reliquis: ad extremum erit quintus decimus inscriptæ, hoc est ultimus eius, æquale sexto decimo, & ultimo circumscriptæ. Quare cum non habeat inscripta figura, quod opponat primo sectori circumscriptæ, erit circumscripta tanto maior inscripta, quantus est primus sui ipsius sector. id uero ex subsequenti figura fiet manifestum.



D Ex his constat, circa dictum spatium posse circumscribi figuram, qualis dicta est, & rursus alteram eidem inscribi; ita ut.] *Quoniam enim circumscripta figura, ut demonstratum est, excedit inscriptam, spatio minore proposito spatio: excedit quoque spatium illud, circa quod est circumscripta, spatio multo minore; quippe quod maius sit inscripta figura. Et simili ratione idem spatium, cum minus sit circumscripta figura, inscriptam sibi ipsi figuram excedit, spatio multo minore, quàm sit propositum spatium.*

IN PROPOSITIONEM XXII.

A Itaque diuisis semper angulis rectis in angulos æquales ei, qui continetur k h a: & aliis dispositis ut supra.] *In secunda lineæ spiralis circulatione aliter contingit, quàm in prima: ná tot sectores sunt in utraque figura, quot anguli: & propterea circumscripta inscriptam non excedit*

dit toto illo sectore h k a. par enim est ex eo demi sectorem æqualem ultimo sectori inscriptæ figuræ, scilicet h c r; qui sit h e s. unde relinquitur harum figurarum excessum esse spatium e s k a; hoc est id, quo sector h k a excedit sectorem h e r: quod quidem, cum minus sit sectore h k a, ut pote eius pars, multo minus erit dato spatio, & propositum multo magis concludetur.

Constat igitur fieri posse, ut circumscripta figura excedat sumptum spatium spa- B
tio minori, quocunque proposito &c.] *Corollarium hoc, & quæ sequuntur, perspicua sunt ex ijs, quæ proxime scripsimus in uigesimam primam.*

IN PROPOSITIONEM XXIIII.

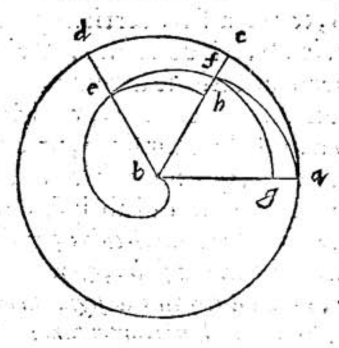
Sunt igitur quædam lineæ ab h puncto ad lineam spiralem ductæ, quæ sese æqua li- A
ter excedunt.] *Ex duodecima huius.*

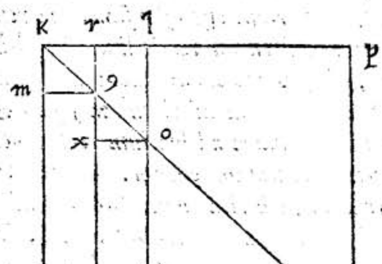
Vt ostensum est.] *In corollario decimæ huius.* B

Rursus sunt quædam rectæ lineæ sese æqualiter excedentes ab h ad lineam spiralem C
ductæ, quarum maxima est h a. &c.] *In codice græco impresso multa desiderantur, ut ita scribi oporteat.* πάλιν οὖν ἐντὶ τινὲς γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν ἐστὶ μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε, καὶ ἐστὶν ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ α ζ η ι κύκλου περιφέριαν ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ.

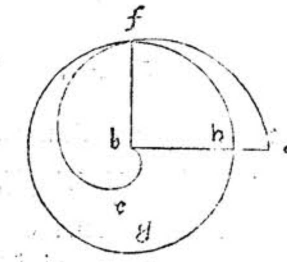
Hoc enim demonstratum iam fuit.] *In eodem corollario decimæ huius. Pappus in colle-* D
ctionibus mathematicis hoc idem aliter demonstrat, paucis admodum positis: & quoniam non nulla etiam addidit ad lineam spiralem pertinentia, quæ animaduersione digna sunt; eius uerba hoc loco subscribenda censui in latinum sermonem conuersa. Theorema, inquit, de helica, seu linea spirali in plano describenda, proposuit quidem Conon Samius geometra, Archimedes uero admirabili quadam aggressione demonstrauit. Itaque dicta linea eiusmodi generationem habet.

Sit circulus, cuius centrum b, & semidiameter b a: moueaturque b a ita, ut b punctum maneat, & ipsum a æqueuelociter feratur in circuli circumferentia: simul uero aliquod punctum à b incipiens feratur in recta linea b a æqueuelociter usque ad a: & in æquali tempore b pertranseat lineam b a: & a ipsam circuli circumferentiam. punctum igitur hoc in linea b a motum secundum circulationem describet lineam: qualis, est ipsa b e f a: et eius quidem principium erit punctum b: principium circulationis recta b a: ipsa uero linea helix, seu linea spiralis appellatur. Cuius principale accidens eiusmodi est. Ducta qualibet linea ad ipsam, ut f b, & producta, erit ut tota circuli circumferentia ad circumferentiam a d c, ita recta a b ad rectam b f. Hoc autem intelligere facile est ex generatione ipsa. In quo enim tempore a punctum totam circuli circumferentiam pertransit, in hoc & b pertransit rectam b a: in quo autem a pertransit circumferentiam a d c, in hoc & b ipsam b f rectam: & sunt motus ipsi sibi ipsis æquales. quare & inter se proportionales erunt. Manifestum autem & illud, rectas lineas omnes, quæcunque à puncto b ad ipsam spiralem ductæ angulos æquales continent, æqualiter sese inuicem excedere. Quibus positis ostenditur, figuram contentam linea spirali, & recta, quæ est in principio circulationis, tertiam partem esse comprehendentis ipsam circuli.





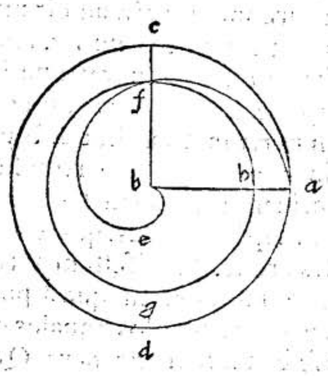
SIT enim, & circulus, & prædicta linea; & exponatur parallelogrammum rectangulum k n *lp: sumaturq; a c circumferentia pars quædam circumferentiæ circuli. & sumatur hr recta, ipsius kp eadem pars. Iungantur præterea c b, b a: & lineæ quidem k n æquidistans ducatur r t, lineæ uero k r, ipsa m 9: & circa b centrum describatur circumferentia f g. Quoniam igitur est ut a b recta linea ad a g, hoc est, ut b c ad c f, sic tota circuli circũferentia ad circumferentiam c a: hoc enim est lineæ spiralis principale accidens. Vt autem circuli circumferentia ad ipsam c a, sic p k ad k r: & ut p k ad k r, sic l k ad k 9, hoc est r t ad r 9. & ut igitur b c ad c f, ita t r ad r 9: & per conuersionem rationis. Quare ut quadratum b c ad quadratum b f, ita quadratum r t ad quadratum t 9. Vt autem quadratum b c ad quadratum b f, ita a b c sector ad sectorem f b g: & ut quadratum r t ad quadratum t 9, ita cylindrus factus à parallelogrammo k t circa axẽ n t ad cylindrum à parallelogrãmo m t circa eundem axem. Vt ergo sector a b c ad f b g sectorem, ita cylindrus à parallelogrammo k t circa axem n t ad cylindrum a b ipsõ m t circa eundem axem: similiter quoque si a c circumferentiæ ponamus æqualem c d: ipsi autem k r rectæ lineæ æqualem ponamus r q: & eadem construamus: erit ut d b c sector ad sectorem e b h, sic cylindrus à parallelogrammo r u circa axem t u ad cylindrum à parallelogrammo u x circa eundem axem. Eadem ratione procedentes demonstrabimus, ut totus circulus ad omnes figuras ex sectoribus inscriptas lineæ spirali, sic esse cylindrum à parallelogrammo n p, circa axem n l ad omnes figuras ex cylindris ipsi cono, qui fit à triangulo k n l circa axem l n, inscriptas: et rursus, ut circulus ad omnes figuras ex sectoribus circumscriptas lineæ spirali, sic cylindrum ad omnes figuras ex cylindris eidem cono circumscriptas. ex quo manifestum est, circulum ad eam figuram, quæ inter lineam spiralem, & rectam a b interijcitur, ita esse, ut cylindrus ad conum. triplus est igitur circulus prædictæ figuræ; quod fuerat demonstrandum.*



Eodem modo demonstrabimus, si ducatur quæpiam linea ad spiralem, ut b f: & per f circa centrum b describatur circulus: figuram contentam linea spirali f e b, & recta f b, tertiam partem esse figuræ circumferentia circuli f g h, & rectis lineis f b, b h contentæ. Deinceps autem conscribemus theorema circa eandem lineam notatione dignum.

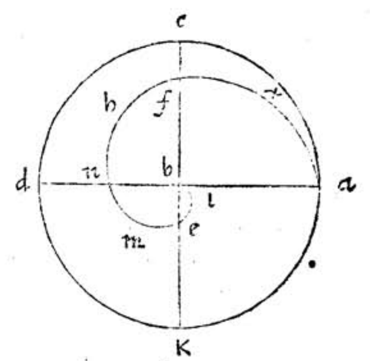
Sit enim & circulus prædictus in generatione, & linea spiralis eadem a f e b. Dico iam, si ducatur linea, ut b f, esse figuram contentam tota linea spirali, & recta a b ad eam, quæ linea spirali f e b, & b f recta continetur, ut cubus, qui fit à linea a b ad cubum, qui ab ipsa f b.

Describatur enim circulus per f circa centrum b, qui sit f g h. Itaque quoniam est, ut figura, quæ linea spirali a f e b, & recta a b continetur, ad figuram contentam spirali f e b, & f b recta, sic a c d circulus ad figuram circumferentia f g h, & f b, b h, rectis lineis contentam: utrunque enim utriusque tertiam partem esse ostensum est: circulus autem a c d ad spatium contentum rectis lineis f b, b h, & circumferentia f g h proportionem habet compositam ex ea, quam habet a c d circulus ad circulum f g h, & ex ea, quam circulus f g h habet ad spatium rectis lineis f b, b h, & f g h circumferentia contentum. At uero, ut a c d circulus ad circulum f g h, ita quadratum a b ad quadratum b f: & ut circulus f g h ad dictum spatium, sic tota ipsius circumferentia ad circumferentiam f g h, hoc est a c d circuli circumferentia ad ipsam c d a, hoc est propter accidens spiralis lineæ, a b recta ad rectam b f. figura igitur, quæ linea spirali, & recta a b continetur ad contentam spirali, & b f proportionem habet compositam ex ea, quam a b quadratum habet ad quadratum f b, & ex ea, quam habet linea recta a b ad ipsam b f. hæc autem proportio eadem est ei, quam habet cubus a b ad cubum b f.



Ex

Ex hoc constat, si posita eadem linea spirali, & circulo circa ipsam, producatur a b ad d: & ad rectos angulos ipsi ducatur linea c f b e k, qualium partium una est, spacium contentum linea spirali b l e, & recta b e, talium illud quidem, quod continetur spirali n m e, & rectis n b, b e esse septem: & quod continetur f h n, & rectis f b, b n undeuiginti: quod uero a x f, & a b, b f continetur, triginta septem perspicua enim hæc sunt ex præostenso theoremate. Et qualium a b recta est quatuor, talium ipsam quidem f b esse trium; n b, duarum; & b e unius: quod etiam perspicuum est, ex accidenti lineæ spiralis, & ex eo, quod circumferentiæ a c, c d, d k, k a inter se sunt æquales.



IN PROPOSITIONEM XXV.

Quæ eadem est ei, quam habent hæc utraque; rectangulum contentum semidia- A
metro circuli secundi, & semidiametro primi; & tertia pars quadrati eius lineæ, qua semidiameter secundi circuli excedit semidiametrum primi ad quadratum semidiametri secundi circuli.] *Quoniam semidiameter primi circuli ad semidiametrum secundi subduplam habet proportionem: nam ex decima quinta huius h e, ad h a eam habere proportionem compertum est, quam habet circumferentia circuli a f g i ad eandem circumferentiam bis assumptam: si posuerimus semidiametrum primi circuli, uidelicet h e esse trium partium; erit h a semidiameter secundi earundem partium sex: & rectangulum his semidiametris contentum 18: quadratum autem excessus earum 9. quare compositum ex illo rectangulo, & tertia parte huius quadrati erit 21. sed quam proportionem habet 21 ad 36, hoc est ad quadratum lineæ h a, eam ha* 15.quinti
bet 7 ad 12. compositum igitur iam dictum ad quadratum semidiametri secundi circuli habet eandem proportionem, quàm 7 ad 12.

Sit linea spiralis a b c d e.] *Addenda sunt hæc in græco codice.* ἔςω ἕλιξ, ἐφ' ἆς ἁ α β γ δ ε B
ἐν τᾷ δευτέρα περιφορᾷ γεγραμμένη.

Habebit igitur circulus y ad circulum a f g i eam proportionem, quam septem ad C
duodecim; propterea quòd ipsius semidiameter ad semidiametrũ circuli a f g i eandem habet potestate proportionem.] *Circuli enim ad inuicem sunt, sicuti diametrorum* 2.duod.
quadrata. sed semidiametrorum quadrata non aliam habent proportionem, quàm diametrorum. 15.quinti.
circuli ergo ad inuicem erunt, sicuti semidiametrorum quadrata. Quòd cum positum sit dictarum semidiametrorum quadrata eam habere proportionem, quam septem ad duodecim: et ipsi circuli necessario eandem habebunt.

Sectores igitur à lineis æqualibus maximæ descripti &c.] *Post ea uerba.* χωρὶς τῶ ἀπὸ D
τᾶς ἐλαχίςας. *& hæc addenda sunt.* οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίςα ποτὶ τὼς τομέας τὼς ἀπὸ τᾶν τῶ ἴσω ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τῶ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίςας.

Hoc enim ostensum est.] *In undecima huius.* E

Sectores igitur ab æqualibus maximæ descripti ad sectores à lineis se se æqualiter F
excedentibus, dempto eo, qui à maxima, maiorem proportionem habent, quàm quadratum h a &c.] *Ex undecima huius.*

Et tertia pars quadrati eius lineæ, qua semidiameter circuli maioris excedit semi G
diametrum minoris.] *Græcus codex ita restituendus.* καὶ τὸ τρίτον μέρος τῶ τετραγώνου τῶ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τῶ κέντρου τῶ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων, τᾶς ἐκ τῶ κέντρου τῶ ἐλάττονος ποτὶ τὸ τετράγονον.

IN PROPOSITIONEM XXVI.

Sector igitur y q ad h a f sectorem eandem proportionem habet, quam rectangu A
lum a h e, & tertia pars quadrati e f habeat ad quadratum h a. horum enim semi-

diametri

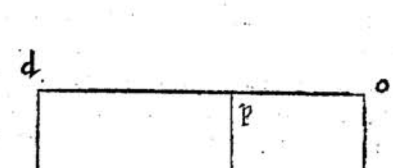
ult. sexti. diametri inter se se eandem habent potestate proportionem.] *Erit enim sector y q ad reliquum sectorem totius sui circuli, sicut eius sectoris angulus ad reliquum ex quatuor rectis: & conuertendo, componendoq; totus circulus ad sectorem y q erit, sicut quatuor recti ad angulum sectoris y q. & eadem ratione accidet in circulo maiore, ut totus circulus sit ad sectorem h a f, sicut item quatuor recti ad angulum sectoris h a f. sed cum anguli sectorum y q, & h a f sumpti sint*
11.quinti. *æquales: erit minor circulus ad sectorem y q, sicut maior ad sectorem h a f: & permutando, circulus ad circulum, sicut sector ad sectorem. sed quam proportionem habent circuli inter se se, hanc habent semidiametrorum quadrata, ut superius est monstratum. sector igitur y q ad sectorem h a f eandem habet proportionem, quam quadratum semidiametri unius, ad quadratum semidiametri alterius.*

IN PROPOSITIONEM XXVII.

A Secundus autem circulus ad primum est, sicut duodecim ad tria: quod manifeste patet.] *Constat nanque ex decima quinta huius semidiametrum secundi circuli duplum esse semi*
20.sexti. *diametri primi. quare erit circulus secundus ad circulum primum, sicut quatuor ad unum (hanc*
15.quinti. *enim habent proportionem semidiametrorum quadrata). sicut autem quatuor ad unum, sic duodecim ad tria. circulus igitur secundus ad primum est sicut duodecim ad tria. ratio autem, qua hoc*
25. huius. *loco utitur Archimedes, & inferius sæpissime ex uigesima secunda quinti uecessaria est. nam si spatium k l ad secundum circulum est, sicut septem ad duodecim: secundus autem circulus ad pri-*
24. huius. *mum, sicut duodecim ad tria: & primus circulus ad spatium k, sicut tria ad unum: erit ex æquali spatium k l ad k, sicut septem ad unum: & diuidendo l spatium ad k, sicut sex ad unum. quare k spatium sexta pars est eius spatij, in quo l.*

B Hæc autem eam habent inter se proportionem, quam decem & nouem ad septē.] *Videntur ante hæc uerba non nulla desiderari in græco codice, ut ita legendum sit.* καὶ τὸ κλμ ἄρα ποτὶ τὸ κλ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν γϑ, θβ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τῦ ἀπὸ τᾶς γβ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν βϑ, ϑα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τῦ ἀπὸ τᾶς αβ. ταῦτα δὲ ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ιϑ ποτὶ τὰ ζ. *Vt autem hoc ita esse facile intelligatur. ponamus semidiametrum primi circuli h a esse trium partium: erit h b semidiameter secundi circuli earundem partium sex, ex decima quinta huius: & h c tertij circuli semidiameter nouem. quare rectangulum c h b, & tertia pars quadrati c b erunt 57: & re-*
15.quinti. *ctangulum b h a, & tertia pars quadrati b a 21. Hæc autem inter se sunt sicut 19 ad 7. spatium ergo k l m ad spatium k l est, ut 19 ad 7: & diuidendo spatium m ad k l, ut 12 ad 7. at ipsum k l ad l est, ut 7 ad 6: quod superius est demonstratum. est igitur m ad l, ut 12 ad 6. quare spatium m duplum est ipsius l spatij.*

C Sed utraque illa excedunt hæc utraque eo, quo & rectangulum e h d excedit rectangulum d h c; hoc est eo, quod d h, c e continetur.] *Nam cum lineæ c d, d e sint æquales; erunt earum quadrata æqualia; & item tertia ipsorum pars æqualis. Quare ea utrinque æquali existente, excessus tantum erit id, quo rectangulum e h d excedit rectangulum d h c; hoc est rectangulum contentum lineis d h, c e; quod sic monstratur. Sit linea h e æqualis ipsi h e in spirali linea descriptæ: & ad punctum h erigatur perpendicularis h d, quæ sit etiam ipsi h d æqualis: & compleatur rectangulum d h e o: ab ipsa uero h e abscindatur æqualis ipsi h c: & per c ducatur æquidistans ipsis h d, e o, quæ sit c p. manifestum est his ita constitutis, rectangulum d e æquale esse rectangulo contento e h, h d; & rectangulum d c æquale ei, quod continetur d h, h c. relinquitur ergo eorum excessum esse rectangulum c o; quod quidem est id, quod continetur linea p c, hoc est d h, & ipsa c e, ut monstrare uolebamus.*



D Quare spatium n ad k l m n eandem habet &c.] *Codex græcus ita restituendus est.*

τὸ

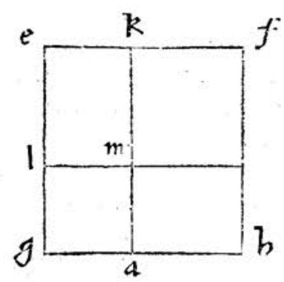
τὸ γ ἄρα ποτὶ κλμν χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ϑγ βδ ποτὶ τὸ ὑπὸ ϑγ ϑβ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γβ, καὶ τὸ ὑπὸ θγ, βδ.

Hæc autem æqualia ſunt rectangulo d h c, & tertiæ parti quadrati c d.] *Eſt enim linea d h æqualis duabus lineis h b, b d. quare rectangulum baſim habens d h, altitudinem uero h c, æquale eſt duobus rectangulis baſes habentibus h b, b d, & altitudinem eandem h c. tertia uero pars quadrati c d æqualis eſt tertiæ parti quadrati c b; quòd quadrata ſint æqualia, ex æqualibus lineis orta.* E 1. ſexti.

Rectangulum uero h d, c e ad rectangulum h c, d b eam habet, quam h d ad h c; quoniam lineæ c e, b d ſunt æquales.] *Ex prima ſexti.* F

IN PROPOSITIONEM XXVIII.

Quare x ſpatium ad n p, eam habet, quam rectangulum h a g cum duabus tertiis quadrati g a ad utraque hæc; & ad rectangulum a h g, & ad tertiam partem quadrati g a.] *Quoniam enim ut ex uigeſima ſexta huius apparet; ſpatium n p ad ſectorem c h g, eam habet proportionem, quam rectangulum g h a, & tertia pars quadrati a g ad quadratum g h; & conuertendo ſector c h g ad ſpatium n p habet eam, quam quadratum g h ad rectangulum g h a, & tertiam partem quadrati a g. quare diuidendo ſpatium x ad ipſum n p habet eam, quam exceſſus, quo quadratum g h excedit hæc utraque; rectangulum g h a, & tertiam partem quadrati a g, hoc eſt (ut mox oſtendemus) rectangulum h a g, & duæ tertiæ quadrati g a ad rectangulum g h a, & tertiam partem quadrati a g. rectangulum autem h a g, & duas tertias quadrati g a eſſe id, quo quadratum g h excedit rectangulum g h a, & tertiam partem quadrati a g, hoc pacto oſtendetur. fiat ex linea g a h quadratnm e g h f: & per a ducatur a k æquidiſtans ipſi g e, h f: fiat quoque ex ipſa g a quadratum l g a m. manifeſtum iam eſt, rectangulum k h æquale eſſe ei, quod continetur g h, h a; & rectangulum k l æquale contento h a, a g; quòd linea e l æqualis ſit ipſi h a. quare ſi à quadrato lineæ g h, auferemus rectangulum k h, quod continetur g h, h a; & tertiam partem quadrati a g: relinquentur utraque hæc; rectangulum k l, hoc eſt contentum h a, a g; & duæ tertiæ quadrati a g.* A

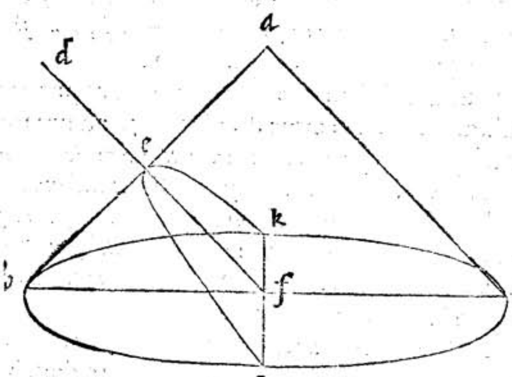


Spacium igitur n p ad ipſum p eam proportionem habet, quam utraque; rectangulum g h a, & tertia quadrati g a ad utraque; ad rectangulum g a h, & tertiam quadrati g a &c.] *Quoniam n p ſpatium ad ſectorem n eandem habet proportionem, quam rectangulum g h a, & tertia pars quadrati g a, ad quadratum h a. per conuerſionem rationis ſpatium n p ad p ſpatium habet eandem, quam rectangulum g h a, & tertia quadrati g a ad exceſſum, quo rectangulum g h a unà cum tertia quadrati g n excedit quadratum h a. exceſſus autem is eſt rectangulum g a h, & tertia quadrati g a, ut poſtea monſtrabitur. ſpatium igitur n p ad p habet eam proportionem, quam rectangulum g h a, & tertia quadrati g a ad rectangulum g a h, & tertiam quadrati g a. Rurſus enim eadem diſpoſitione manente, quæ prius, producatur linea l m uſque ad ipſam h f. Iam conſtat præter ea, quæ ſuperius dicta ſunt, m f, quadratum eſſe, & æquale quadrato lineæ h a. quare exceſſus, quo utraque hæc, rectangulum a f, hoc eſt contentum g h, h a, & tertia pars quadrati g a, excedunt quadratum h a, erit rectangulum m h, quod quidem æquale eſt contento h a, a g, & tertia pars quadrati ipſius a g: quod monſtrare uolebamus. Reliqua quæ ſequuntur ex uigeſima ſecunda quinti, & prima ſexti, tum manifeſtam, tum firmam habent demonſtrationem, ut uerbum amplius addere ſuperuacaneum uideatur.* B

EIVSDEM COMMENTARIVS IN QVADRATVRAM PARABOLES.

IN PROPOSITIONEM I.

A SIT rectanguli coni sectio a b c.] *Quam rectanguli coni sectionem appellat Archimedes, posteriores ut Apollonius Pergæus, & alij parabolen dixerunt. quamobrem autem id factum sit, tradit Eutocius Ascalonita in commentarijs in primum conicorum Apollonij his uerbis, quæ à nobis latine reddita sunt. Prisci inquit, conum definientes; rectanguli trianguli circumuolutionem, manente uno eorum, quæ circa rectum angulum sunt, latere: & conos omnes rectos, & unam in singulis sectionem fieri arbitrati sunt: in rectangulo quidem cono uocatam parabolen; in obtusiangulo hyperbolen; in acutiangulo autem ellipsim: atque ita nominatas apud ipsos sectiones passim inuenias. Quemadmodum igitur priscis illis in unaquaque triangulorum specie speculantibus duos rectos: primum in æquilatero; deinde in æquicruri; post in scaleno: ætate posteriores uniuersale theorema demonstrarunt, eiusmodi. Omnis trianguli interiores tres anguli duobus rectis sunt æqules: ita & in coni sectionibus: rectanguli quidem coni sectionem dictam, in rectangulo tantum cono speculati sunt; secto scilicet plano ad unum coni latus perpendiculariter erecto: obtusianguli autem coni sectionem, in cono obtusiangulo factam demonstrarunt, & acutiangli coni sectionem in cono acutiangulo; similiter in omnibus conis ducentes plana ad unum eorum latus perpendiculariter erecta; quod & prisca sectionum nomina indicant. Verum postea Apollonius Pergæus uniuerse inspexit in omni cono, tam recto, quàm scaleno omnes sectiones inesse, iuxta plani ad conum differentem inclinationem. quamobrem illius temporis homines admirati mirificam conicorum theorematum demonstrationem, magnum geometram ipsum appellarunt. Hæc quidem Geminus scripta reliquit in sexto mathematicarum præceptionum libro. Quod autem dicit, manifestum faciemus in subiectis figuris. sit per axem coni triangulum a b c: & à quo uis puncto e ducatur ipsi a b ad angulos rectos linea d e f: & per d e f immissum planum perpendiculariter erectum ad ipsam a b secet conum. rectus est igitur uterque angulus a e d, a e f: rectanguloq; existente cono, & angulo b a c recto, ut in prima figura apparet, duobus rectis æquales erunt anguli b a c, a e f. quare æquidistans erit linea d e f ipsi a c: & fiet in superficie coni sectio parabole, sic dicta ἀπὸ τοῦ παράλληλον εἶναι; hoc est ab eo, quòd parallela sit linea d e f, quæ communis sectio est plani secantis, & trianguli per axem, ipsi a c lateri trianguli.*



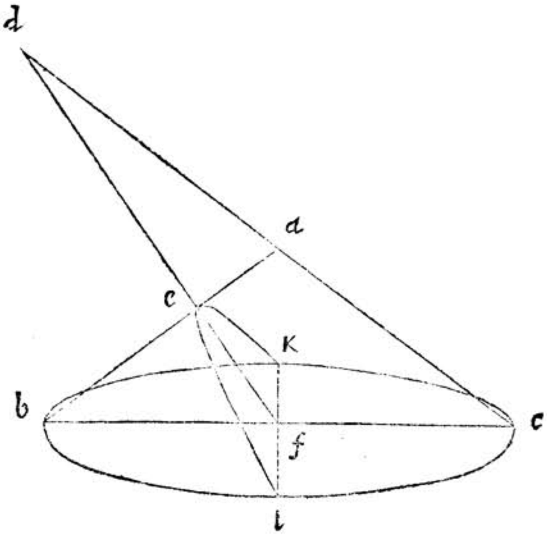
Parabole unde dicatur.

Sed si obtusiangulus sit conus, ut in secunda figura, obtuso uidelicet existente angulo b a c, & angulo a e f recto: duobus rectis maiores erunt anguli b a c, a e f: & non coibit d e f cum ipso a c latere ad partes, in quibus f, sed ad eas, in quibus sunt a, & e; producta nimirum c a in d. faciet igitur secans planum in superficie coni sectionem hyperbolen; dictam ἀπὸ τοῦ ὑπερβάλλειν: hoc est ab eo, quòd anguli b a c, a e f excedant duos ractos: uel quòd d e f excedat uerticem coni, & coeat cum ipso c a extra. Quòd si acutiangulus sit conus; hoc est acuto existente angulo b a c: erunt anguli b a c, a e f minores duobus rectis: & lineæ e f, a c productæ coibunt tandem in aliqua parte; augere nanque, & in longius ducere conum possumus. Erit igitur in superficie sectio, quæ appellatur ellipsis διὰ τὸ ἐλλείπειν; hoc est ob id, quòd dicti anguli à duobus rectis deficiant; uel quòd ellipsis diminutus quidam circulus sit. Ad hunc quidem modum antiqui

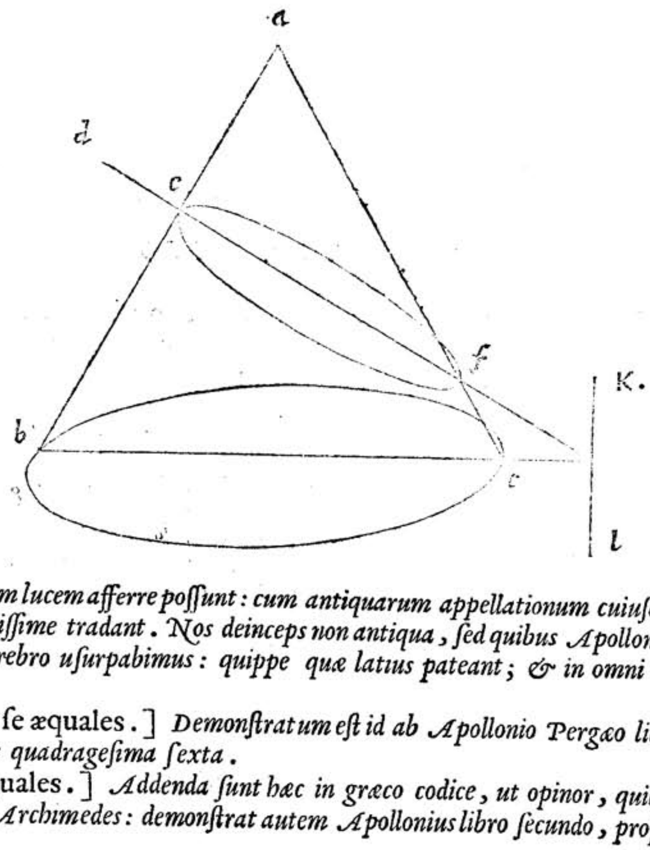
Hyperbole unde.

Ellipsis unde.

ponentes secans planum per d e f ad rectos angulos ipsi a b lateri trianguli per axem coni; & insuper differentes conos; & propriam in unoquoque sectionem. At Apollonius ponens conum, & rectum, & scalenum; differenti ipsius plani occursu, differentes efficit sectiones. Sit enim, ut in iisdem figuris, secans planum k e l: communis autem sectio ipsius plani, & coni basis, linea k l: communis rursus sectio eiusdem, & trianguli a b c sit ipsa e f; quæ & diameter uocatur sectionis. Itaque in omnibus sectionibus ponit lineam k l ad rectos angulos esse basi trianguli a b c. Verum siquidem e f æquidistans sit ipsi a c; parabolen fieri k e l sectionem in coni superficie. Si uero coeat cum latere a c extra uerticem coni, ut in d; fieri ipsam k e l sectionem, hyperbolen: Quòd si coeat intra; fieri sectionem ellipsim; quam & θυρεὸν uocant. Generaliter igitur paraboles diameter æquidistans est uni lateri trianguli: hyperboles autem, & ellipsis diameter cum eo coit; hyperboles quidem ad partes uerticis coni; ellipsis uero ad partes basis. Scire præterea illud oportet, parabolen, & hyperbolen ex eorum numero esse, quæ in infinitum augentur: at ellipsim non item; tota enim in seipsam uergit, uelut circulus. Hæc Eutocius,



Parabole quō fiat.



Hyperbole. Ellipsis

Parabole, & Hyperbole in infinitū augentur.

quæ Archimedis uerbis magnam lucem afferre possunt: cum antiquarum appellationum cuiusque coni sectionis rationem exquisitissime tradant. Nos deinceps non antiqua, sed quibus Apollonius usus est, sectionum nomina crebro usurpabimus: quippe quæ latius pateant; & in omni cono reperiantur.

Erunt ipsæ a d, d c inter se æquales.] *Demonstratum est id ab Apollonio Pergæo libro primo conicorum, propositione quadragesima sexta.*

Quod si a d, d c sint æquales.] *Addenda sunt hæc in græco codice, ut opinor, quibus tanquam demonstratis utitur Archimedes: demonstrat autem Apollonius libro secundo, propositione quinta.*

IN PROPOSITIONEM II.

Erunt lineæ d b, b e inter se æquales.] *Demonstrauit Apollonius libro primo, propositione trigesima quinta.*

IN PROPOSITIONEM III.

Erit ut b d ad b f longitudine, ita a d ad a f poteſtate.] *Apollonius eodem libro propoſitione uigeſima.*

IN PROPOSITIONEM IIII.

A Itaque ſi alia quæpiam linea f h ducatur æquidiſtans ipſi b d, & ſecans utraſque a c, c b.] *Hoc eſt lineam a c ſecet in f; & c b in h: ipſam autem ſectionem coni rectanguli in g.*

B Ducatur enim per g linea æquidiſtans ipſi a c, quæ ſit k g.] *Secet autem ipſa k g lineam b d in k; & c b in i.*

C Ergo ut b c ad b i, longitudine, ita d c ad d f poteſtate.] *Ita reſtituendus eſt codex; nam multa deſunt, quod tum ex ipſa demonſtratione: tum ex ueteri translatione apparet. Totius autem demonſtrationis ſeries manifeſtior fiet ad hunc modum. Quoniam enim ſicut b d ad b*
33. primi element. *k longitudine, ita d c ad k g poteſtate; hoc eſt ad d f, quæ eſt æqualis ipſi k g: ut autem b d ad b*
k, ita b c ad b i: & ut d c ad f d, ita c b ad b h. quare ſicut b c ad b i longitudine, ita d c ad d
2. ſexti. *f; hoc eſt b c ad b h poteſtate. lineæ igitur b c, b h, b i proportionales ſunt. & ſi quidē linea f h ſecet*
11. quinti. *c b intra ſectionem: erit ſicut b c ad b h, ita b h ad b i; hoc eſt ſicut totum ad totum, ita pars ad*
20. ſexti. 19. quinti. *partem. ergo c h ad h i, ut b c ad b h: hoc eſt reliquum ad reliquum, ut totum ad totum. ſi uero ſecet extra, quoniam b h ad b c eſt, ſicut b i ad b h: erit componendo b h & b c; hoc eſt c h ad b c, ſicut b i, & b h, hoc eſt ſicut h i ad b h: & permutando c h ad h i, ſicut b c ad b h. Itaque*
11. quinti. *cum ſit ſicut d c ad d f, ita b c ad b h, ut dictum eſt: & ſicut b c ad b h, ita c h ad h i: erit ſicut d c ad d f, ita c h ad h i. ſed h f ad h g eſt, ſicut c h ad h i: quoniam duo triangula c h f, i h g. cū*
4. ſexti. *æquiangula ſint, latera habent proportionalia. Eandem igitur proportionem habet d c ad d f; hoc eſt d a ad d f, quam f h ad h g: quod demonſtrare oportebat.*

IN PROPOSITIONEM V.

A Quoniam igitur eſt rectanguli coni ſectio a b c: & ducta eſt b d æquidiſtans diametro: lineæ autem a d, d c ſunt æquales inter ſe ſe: erit linea, quæ in b puncto tangit rectanguli coni ſectionem, ipſi a c æquidiſtans.] *Linea b d, uel æquidiſtans eſt diametro, uel ipſa diameter. ſequitur autem id ex ſecunda parte primæ huius.*

B Rurſus quoniam d e æquidiſtans eſt diametro: & à puncto c ducta eſt c e tangens ſectionem coni in c, &c.] *ex ſecunda huius.*

C Quoniam enim æqualis eſt b e ipſi b d: æqualis eſt & i l ipſi k i.] *Ducta enim b c linea, & producta, fient triangula c b e, c i l æquiangula: & item æquiangula c d b, c k i: & ipſa*
4. ſexti. *c d e, c k l. quare ſicut b e ad i l, ita c e ad c l: & ſicut c e ad c l, ita c d ad c k. ſicut autem c*
11. quinti. *d ad c k, ita d b ad k i. ergo ſicut b e ad i l, ita d b ad k i: & permutando, ſicut b e ad d b, ita*
14. quinti. *i l ad k i. ſed b e æqualis eſt ipſi d b: & i l igitur ipſi k i eſt æqualis.*

D Habet autem & k i ad h k eandem, quam d a ad a k.] *Eſt enim ex antecedente k i*
19. quinti. *ad h i, ut d a ad d k: & permutando k i ad d a, ut h i ad d k. quare h k ad a k, ut k i ad d a: & rurſus permutando, conuertendoq́; k i ad h k, ut d a ad a k.*

E Quare eandem habet proportionem k h ad h l, quam a k ad k c.] *Hoc loco, ut opinor, multa deſunt, ad demonſtrationem neceſſaria, ſeu uitio temporis intercepta, ſeu ab ipſomet auctore omiſſa, quæ nos ita ſupplebimus. Quoniam enim l i ad i k eſt, ut c d ad d a: erit componendo k l ad k i, ut a c ad d a: & permutando k l ad a c, ut k i, ad d a. & rurſus quoniam k i ad h k eſt,*
11. quinti. *ut d a ad a k. permutando erit k i ad d a, ut h k ad a k. quare ſicut k l ad a c, ſic erit h k ad a*
19. quinti. *k & ſic h l ad k c. & rurſus permutando k h ad h l, ut a k ad k c: quod fuerat oſtendendum.*

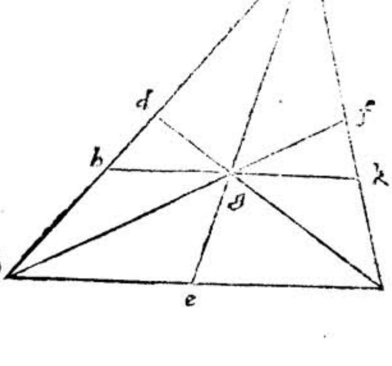
IN PROPOSITIONEM VI.

A Et ſit conſpectum in plano ſuper horizontem erecto.] *Quòd græci, ὀρθὸν latine, ut*
ὀρθὸν *opinor, dicemus directum, uel erectum ad perpendiculum, nos tamen breuitatis cauſſa, quoniam*
illud

illud sæpissime occurrit, præsertim in libro de conoidibus, & sphæroidibus: uno duntaxat uerbo expressimus, erectum ubique uertentes.

Erit trianguli b c d centrum grauitatis ipsum h punctum; nam monstratum est hoc in mechanicis.] *Sit triangulum a b c, & ducatur ab angulis ad bipartitiones laterum rectæ lineæ a e, b f, c d. perspicuum est centrum grauitatis trianguli a b c esse ipsum g; in quo uidelicet lineæ illæ coeunt, ex duodecima primi libri de æquiponderantibus: & triangula a g b, b g c, c g a esse æqualia inter se se. sunt enim duo triangula a e b, a e c æqualia; quòd bases æquales habeant, & ab eodem sint uertice: & duo item triangula g e b, g e c æqualia. quare si à triangulo a e b auferatur triangulum g e b: & à triágulo a e c auferatur ipsum g e c: erunt residua æqualia, uidelicet triangula a g b, a g c. Et eadem ratione, si à duobus triangulis æqualibus b f c, b f a auferantur æqualia g f c, g f a; erit reliquum triangulum b g c reliquo b g a æquale. & per communem conceptionem triangulum b g c æquale triangulo a g c: & omnia triangula a g b, b g c, c g a inter se se æqualia. triangulum ergo b a g duplum est trianguli b g e; & propterea basis a g dupla ipsius g e. non aliter monstrabimus lineam b g duplam lineæ g f: & lineam c g ipsius g d duplam. Itaque si per g ducatur linea æquidistans ipsi b c, quæ sit h k: erit & a h dupla lineæ h b, & a k dupla k c. Quare generaliter, si quodlibet latus trianguli secetur ita, ut portio ad uerticem dupla sit portionis ad basim: & per punctum sectionis ducatur linea æquidistans basi; centrum grauitatis ipsius trianguli erit in linea ducta, atque in eius puncto medio: quod monstrare oportebat.*

1. sexti



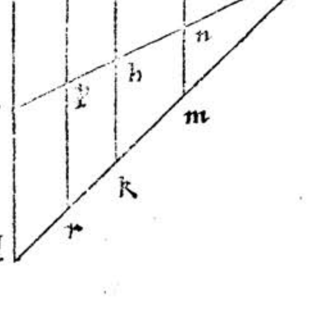
2. sexti.

COROLLARIVM.

Ex his sequitur uniuscuiusque trianguli centrum grauitatis esse in linea ab angulo ad dimidiam basim ducta; & in eo lineæ puncto, quo ipsa sic diuiditur, ut portio ad uerticem dupla sit portionis ad basim.

Si igitur b d c trianguli suspensio, quæ est ad b c, soluatur; & suspendatur ad e: manebit triangulum, ut nunc habet. unumquodque enim suspensorum, ex quo puncto constitutum est, manet; cum in linea perpendiculari sit punctum suspensionis, & centrum grauitatis suspensi; quod etiam est demonstratum.] *Secetur rursus linea e c in l ita, ut c l dupla sit ipsius l e: ducaturq; l m æquidistans b d: & secetur bifariam in puncto n. erit eadem ratione trianguli e c k centrum grauitatis ipsum n: & ducta linea à puncto c ad dimidium lateris b d, in quo sit o, transibit per utraque puncta n h; est enim utriusque triangulorum b c d, e c k centrum grauitatis in linea c o, ex undecima primi de æquiponderantibus. Quòd si fiat, ut b l ad l c, ita n h ad h p: erit ipsum p centrum grauitatis trapezij b e k d. nam quoniam c e posita est ipsius e b dupla: & c l etiam dupla ipsius l c: habebit b c ad c e eandem proportionem, quam c e ad c l. quare triangulum b c d ad triangulum e c k sibi simile habebit eam, quam linea b c ad lineam c l: & diuidendo; conuertendo ue, triangulum e c k ad trapezium b e k d, eam habebit, quam linea c l ad lineam l b; hoc est, quam linea p h ad h n. & quoniam à triangulo b c d abscinditur triangulum e c k, quod non habet idem centrum grauitatis: erit centrum residui,*

C

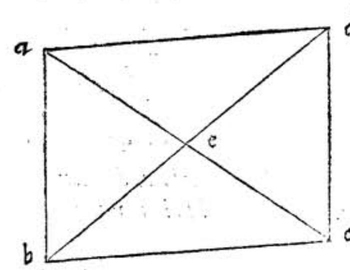


19. sexti.

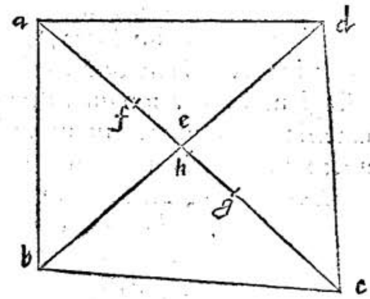
 hoc

hoc est trapezij b e k d in linea n h; atque in puncto p: cum sit p h ad h n, ut triangulum e c k ad trapezium b e k d, ex sexta eiusdem de æquiponderantibus. Dico igitur triangulum b c d, si suspendatur ad e punctum existens in eadem perpendiculari, in qua est centrum grauitatis h, mansu-
4. sexti. *rum, ut nunc manet, ducta nanque per p linea q p r, æquidistanti ipsi b d, erit ob triangulorum*
19. quinti. *similitudinem, ut q c ad c p, ita e c ad c h: & ita reliqua q e ad reliquam p h. Rursus ut e c ad c h, ita l c ad c n: & reliqua e l ad h n. quare q e ad p h erit, ut e l ad h n: & permutando, q e ad e l, ut p h ad h n, hoc est ut triangulum e c k ad trapezium b e k d. si igitur in libra q e l, cuius centrum suspensionis sit e, intelligatur ad ipsum quidem q suspensum esse trapezium b e k d; ad l uero suspensum triangulum e c k: æquiponderabit alterum alteri; quod magnitudines ex altera parte respondeant ipsis longitudinibus ex demonstratis ab Archimede in quarta, & quinta primi de æquiponderantibus, & à Iordano in octaua libri de ponderibus. manebit ergo libra horizonti æquidistans: & idcirco latus trapezij b e, & trianguli e c manebit. quare si totum triangulum b c d suspendatur ad e; erit b e c latus eius instar libræ: & manebit, ut manet; quod demonstrare uolebamus. Poterant hæc sufficere ad figuram propositam. uerum quoniam Archimedes uniuerse pronunciauit illud contingere, & nos uniuersalem afferemus demonstrationem in omnibus figuris recti lineis. prius tamen, ut id commodius fiat, uisum est docere, quo pacto in omni figura rectilinea centrum grauitatis inueniatur. nam Archimedes in libro de æquiponderantibus elementa tantum tradidit.*

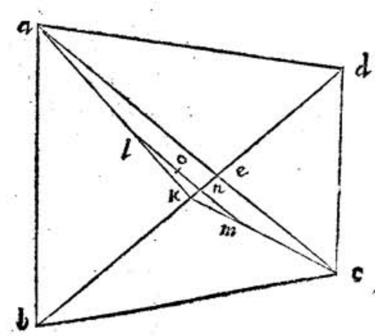
Cuiuslibet figuræ rectilineæ centrum grauitatis iuuenire.



IN triangulo, qua ratione illud inueniatur satis constat ex duodecima primi de æquiponderantibus, & ex ijs, quæ nos supra scripsimus: Sed sit quadrilaterum a b c d, cuius oporteat centrum grauitatis inuenire; & & ducantur diametri a c, b d secantes sese in e. Et si quidem quadrilaterum parallelogrammum sit, centrũ grauitatis eius erit in puncto e; quod ostendit Archimedes in octaua eiusdem libri. Si uero non sit parallelogrammum; & tamen punctum e secet ipsam b d diametrum in partes æquales: diuidatur linea a e in f, ita ut a f sit dupla f e: & similiter linea c e diuidatur in g, ut c g ipsius g e sit dupla: diuidatur quoque g f in h, ut g h æqualis sit ipsi f e. Dico iam punctum h centrum esse grauitatis quadrilateri a b c d. est enim f centrum grauitatis trianguli a b d: & g item grauitatis

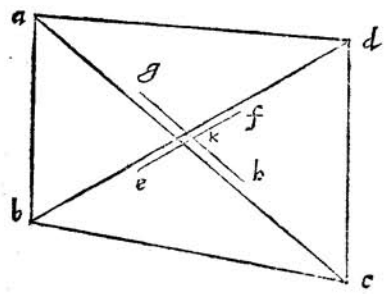


15. quinti. *centrum trianguli c b d, ut supra ostendimus. habet autem f e ad e g eam proportionem, quam a e ad e c; cum sit f e tertia pars ipsius a e, & e g tertia ipsius e*
1. sexti. *c; & triangulum a e d ad triangulum e d c eam habet proportionem, quam linea a e ad lineam e c: & eandem*
12. quinti. *dem habet triangulum a e b ad triangulum e b c. totum ergo triangulum a b d ad totum c b d habebit eandem, quam f e ad e g; hoc est quam g h ad h f: est enim h f ipsi e g æqualis; cum sit g h posita æqualis ipsi f e. quare centrum magnitudinis ex his triangulis cõpositæ, uidelicet quadrilateri a b c d erit in linea f g, & in puncto h, ex quarta, & quinta primi de æquiponderantibus. Quòd si punctum e secet diametrum b d in partes inæquales: secetur ea bifariam in k: & ducantur lineæ a k, c k: diuidanturq; in l m punctis; ita ut sit a l dupla ipsius l k; & c m item dupla m k: & iungantur l m linea, quæ secet b d in n; & fiat m o æqualis ipsi l n. Dico punctum o esse centrum*
2. sexti. *grauitatis ipsius quadrilateri. Quoniam enim posui-*

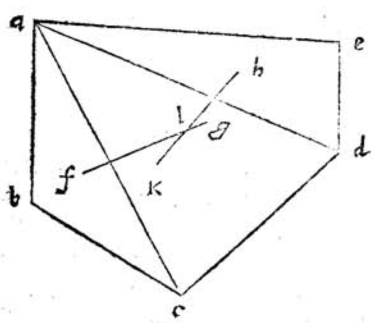


mus k l ad l a eam habere proportionem, quam k m ad m c: æquidistabit linea l m lineæ a c; & erit triangulum k n l simile triangulo k e a; & triangulum k n m simile ipsi k e c. est igitur l n ad n k, ut a e ad e k: & n k ad n m, ut e k ad e c. quare ex æquali l n ad n m, ut a e ad e c. ut autem l n ad n m, ita m o ad o l: & ut a e ad e c, ita triangulum a b d ad triangulũ c b d. ut ergo triangulum a b d ad triangulum c b d, ita m o ad o l. Itaque cum sit l centrum grauitatis trianguli a b d: & m centrum trianguli c b d; eadem ratione totius quadrilateri centrum grauitatis erit in linea l m, & in o puncto.

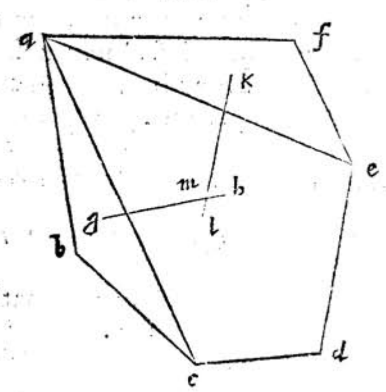
ALITER. Sit quadrilaterum a b c d; ducanturq; a c, b d: & sit trianguli a b c centrum grauitatis e: trianguli autem a d c centrum sit ipsum f. erit centrum magnitudinis ex his compositæ in linea ducta ab e ad f. rursus sit g centrum grauitatis trianguli a d b; & h centrum trianguli d b c; & ducatur g h secans lineam e f in k. erit & eiusdem magnitudinis, hoc est quadrilateri a b c d centrum grauitatis in linea g h. quare in puncto k; in quo uidelicet ipsæ lineæ conueniunt.



Sit pentagonum a b c d e; & ducantur a c, a d: trianguli autem a b c centrum grauitatis sit f: & quadrilateri a c d e sit centrum g: & iungantur f g. rursus trianguli a d e centrum sit h; & quadrilateri a b c d centrum k: & ducatur h k secans lineam f g in l. Dico l centrum esse grauitatis ipsius pentagoni: erit enim totius magnitudinis compositæ centrum in linea f g, & in linea h k. ergo in puncto l; in quo scilicet ipsæ conueniunt.



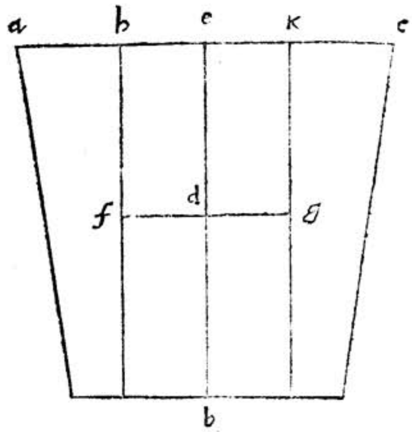
Sit Hexagonum a b c d e f: & ducantur a c, a e: sitq; trianguli a b c centrum grauitatis g: & pentagoni a c d e f centrum sumatur, quod sit h: & ducatur g h. rursus centrum trianguli a e f sit k; & pentagoni a b c d e sit l: & ducatur k l, quæ secet ipsam g h in m. erit eadem ratione punctum m centrum grauitatis totius hexagoni. Non aliter in heptagono, octagono, & in alijs, quæ deinceps sunt, centrum grauitatis inuenietur: quod facere oportebat.

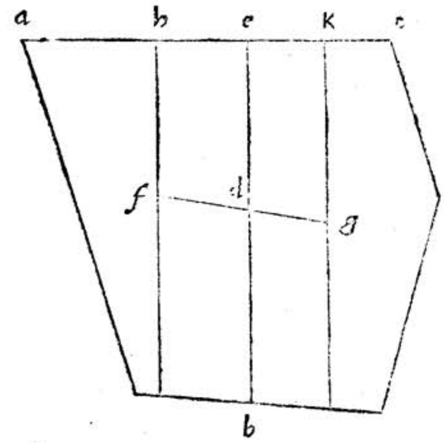


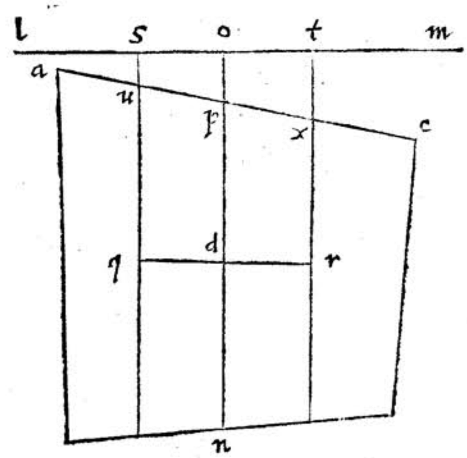
His positis, sit rectilineum a b c supra horizontem erectum: ita ut latus a c sursum statuatur: & sit primum horizonti æquidistans. Inueniatur autem ex ijs, quæ diximus, centrum grauitatis eius, quod sit d: & per d ducatur b d e perpendicularis ad lineam a c, quæ & perpendicularis erit ad horizontem ipsum. Dico rectilineum a b c suspensum in e, ita permansurum, ut nunc manet. rectilinei nanque a b e centrum grauitatis sumatur, quod sit f: & sumatur item g centrum rectilinei e b c: & iungantur f g: à punctis uero f g ad lineam a c ducantur f h, g k æquidistantes ipsi b e. transibit igitur linea f g per d: & habebit f d ad d g proportionem eam, quam rectilineum e b c ad rectilineum a b e, ex sexta primi de æquiponderantibus. & rursus quam proportionem habet f d ad d g, eam habebit h e ad e k. si enim æquidistent lineæ f g, a c: erit h e æqualis ipsi f d; & e k ipsi d g. si uero non æquidistent: coibunt inter sese, uel ad partes a, uel ad partes e. quocunque autem modo id fiat: secabuntur ipsæ secundum eandem proportionem à lineis æquidistantibus h f, e d, k g, ut supra ostendimus: & idcirco erit h e ad e k, ut f d ad d g; hoc est, ut rectilineum e b c ad ipsum a b e. si ergo in libra h e k rectilineum

quidem

quidem a b c suspendatur ad punctum h: rectilineum uero e b c ad k; æquiponderabunt inter sese, ex iam dictis: & manebit libra, ut manet. Quare si totum rectilineum a b c ex his constans suspendatur ad e: & ipsum quoque permanebit in eodem situ, in quo positum fuerat. Quòd si latus a c non æquidistet horizonti: intelligatur ipsa linea l m horizonti æquidistans; & rursus per d centrum grauitatis ducatur linea n d o perpendicularis ad lineam l m, quæ secet a c in p. Dico idem rectilineum suspensum ad p in eodem situ permansurum, in quo nunc manet. sumatur enim q centrum rectilinei a n p, & r centrum rectilinei p n c: iungaturq́; q r linea; quæ & ipsa transibit per d: & à punctis q r ducantur ad l m lineæ q s, r t, æquidistantes ipsi n d o, & secantes lineam l m in punctis u x. erit s o ad o t, ut q d ad d r; & q d ad d r, ut rectilineum p n c ad rectilineum a n p. quare s o ad o t erit, ut rectilineum p n c ad ipsum a n p. ex quibus sequitur in libra s o t, rectilineum a n p suspensum ad u ex puncto s æquiponderare rectilineo p n c ad x ex ipso t suspenso; & propterea totum rectilineum suspensum ad p ita permansurum, ut nunc manet. unumquodque igitur suspensorum ex quo puncto constitutum est, manet, si in eadem linea perpendiculari sit punctum suspensionis, & centrum grauitatis suspensi: quod fuerat ostendendum.







D Et quoniam æquiponderant spatium quidem f suspensum ad a; triangulum autem b d c ad e; constat ea ex altera parte respondere ipsis longitudinibus, atque esse ut a b ad b e, ita b d c triangulum ad f spatium.] *Ex quarta, & quinta primi de æquiponderantibus, & octaua Iordani de ponderibus, ut sæpius est dictum.*

IN PROPOSITIONEM VII.

A Constat & triangulum c d g spatii f triplum esse.] *Colligitur hoc ex decimanona quinti. cum enim totum totius sit triplum; & ablatum ablati item triplum; & reliquum reliqui triplum erit.*

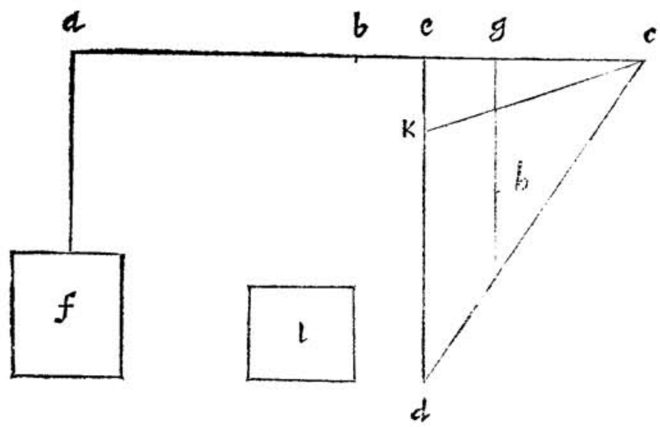
IN PROPOSITIONEM IX.

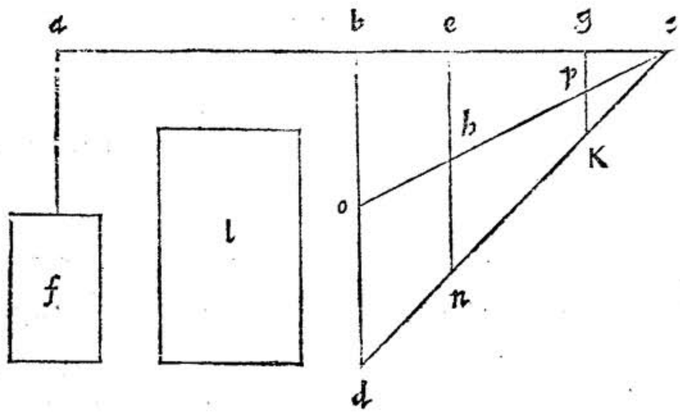
A Demonstrabitur hoc similiter antecedenti.] *Sumpto enim centro grauitatis trianguli c d k, quod sit h, & ducta h g æquidistanti ipsi d e, si suspensio fiat ad g: manebit triangulum, ut nunc manet, ex iam demonstratis; & habebit ad spatium f eandem proportionem, quam habet linea a b ad b g. quare triangulum c d k maius erit ipso f; quòd linea a b maior sit linea b g. & cum b g sit maior ipsa b e: erit & f spatium maius spatio l.*

IN PROPOSITIONEM X.

A

Trapezii igitur b d k g, centrum grauitatis est punctum h.] *Elicitur hoc ex ultima primi de æquiponderantibus. trapezij enim b d k g centrum grauitatis est in linea recta, quæ laterum æquidistantium bipartitiones iungit; atque in eo lineæ puncto, quo ita diuiditur, ut pars terminum habens minus laterum æquidistantium ad reliquam partem, eam proportionem habeat, quam utraque linea; æqualis duplæ maioris unà cum minori ad duplam minoris, unà cum maiori, secetur igitur latus b d bifariam in o: & ducatur o c secans g k in p. erit ut linea b o ad o c, ita g p ad p c, propter triangulorum similitudinem; & ut o c ad o d, ita p c ad p k. quare ex æquali*





4. sexti.

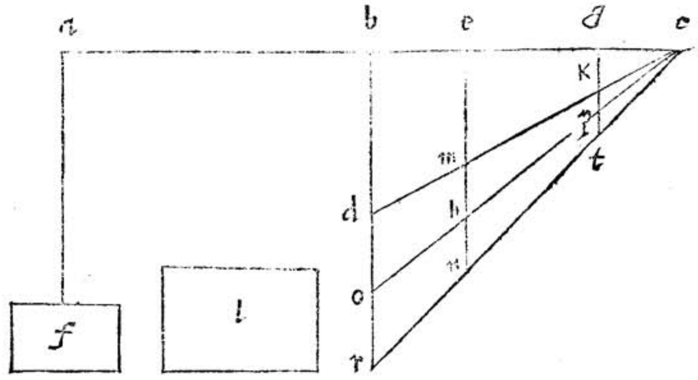
ut b o ad o d, ita g p ad p k. sunt autem b o, o d æquales. & ipsæ ergo g p, p k æquales erunt. Eadem ratione ostendemus & lineam e n bifariam secari ab ipsa o c, uidelicet in puncto h. & cum p h ad h o eam proportionem habeat, quam g e ad e b, ut supra ostendimus, hoc est, quam dupla d b unà cum ipsa k g ad duplam k g unà cum d b: erit ipsum h centrum grauitatis trapezij b d k g.

IN PROPOSITIONEM XI.

Similiter iis, quæ dicta sunt, ostendetur spatium f minus esse spatio l.] *Secetur enim b c in e, ita ut g e ad e b eam habeat proportionem, quam dupla d r unà cum k t, habet ad duplam k t unà cum d r: & per e ducatur æquidistans ipsi b d r, quæ sit e m n: & diuidatur e m n bifariam in puncto h. erit trapezij d k t r centrum grauitatis ipsum h. nam ducta o p linea, quæ laterum æquidistantium bipartitiones iungat, transibit per h, ut proxime ostendimus: & p h ad h o eam proportionem habebit, quam g e ad e b. trapezium igitur d k t r si à punctis b g soluatur; & suspendatur ad e: manebit in eodem situ; & æquiponderabit spatio*

f. quare

f. quare ut b a ad b e, ita erit trapezium d k t r ad f spatium. Quòd cum b a ad b e maiorem proportionem habeat, quàm ad b g: & trapezium d k t r ad spatium f maiorem habebit, 9.quinti. *quàm ad l. spatium ergo f minus erit l spatio.*



IN PROPOSITIONEM XIIII.

A Quare triplum erit b d e triangulum spatii r q z 9 λ.] *Ex sexta huius.*

B Eandem habet proportionem b c ad b e, quam s e ad e u.] *Est enim ex quinta huius b e, ad e c, ut c u ad u s: & conuertendo e c ad b e, ut u s ad e u. quare componendo b c ad b e, ut s e ad e u.*

C Quare & b a ad b e habet eandem, quam d e trapezium ad ipsum k e.] *Cum igitur* 1. sexti. *sit ut b c, hoc est b a ad b e, ita s e ad e u: ut autem s e ad e u, ita triangulum s e c ad triangu-* 11.quinti. *lum u e c: erit ut b a ad b e, ita triangulum s e c ad triangulum u e c. præterea cum sit ut s e ad* 4. sexti. *e u, ita d b ad b k, ob similitudinem triangulorum: & ut d b ad b k, ita triangulum d b c ad triangulum k b c: erit ut b a ad b e, ita triangulum d b c ad triangulum k b c. Quare sicut totum triangulum d b c ad totum k b c, ita pars ad partem; hoc est triangulum s e c ad triangulum u e c.* 19.quinti. *& reliquum igitur trapezium d e ad reliquum k e erit, ut triangulum d b c ad triangulum k b c; hoc est, ut b a ad b e.*

D Maius erit k e spatium spatio r; hoc enim ostensum est.] *In decima huius.*

E Et est ut b a ad b e, ita f s trapezium ad trapezium f u.] *Est enim ut a b ad b e, ita triangulum s e c ad triangulum u e c; quod nos supra ostendimus. ut autem triangulum s e c ad* 4. sexti. *triangulum u e c, ita triangulum t f c ad ipsum ς f c; quòd linea t f ad f ς sit, ut s e ad e u. tra-* 19.quinti. *pezium igitur reliquum s f ad reliquum f u erit, ut triangulum s e c ad triangulum u e c. hoc est ut a b ad b e.*

F Spatium igitur q trapezio quidem l f minus est, trapezio autem f u maius; nanque & hoc ostensum est.] *In duodecima huius.*

G Similiter etiam λ spatium triangulo x i c minus est, & triangulo c i o maius.] *Nam ut b i ad i c, ita i o ad o x, ex quinta huius: & conuertendo, componendo ue, ut b c, hoc est, ut a b ad b i, ita x i ad i o: ut autem x i ad i o, ita triangulum x i c ad triangulum o i c. quare ut a b ad b i, ita triangulum x i c ad triangulum o i c. Et quoniam triangulum x i c æquiponderat λ spatio: & quam proportionem habet a b ad b i, eandem triangulum x i c habet ad triangulum o i c: erit ex octaua huius spatium λ minus triangulo x i c, maius autem triangulo o i c.*

IN PROPOSITIONEM XV.

A Quare d b c triangulum triplum erit spatii r q z 9 λ.] *Ex septima huius.*

B Similiter ut prius ostendetur, b u trapezium spatio r maius.] *Ex undecima huius.*

C Et trapezium h e maius spatio q: trapezium autem f u minus eodem.] *Ex tertiadecima. Quod uero reliquum est, ut in proxima propositione concludemus.*

IN PROPOSITIONEM XVI.

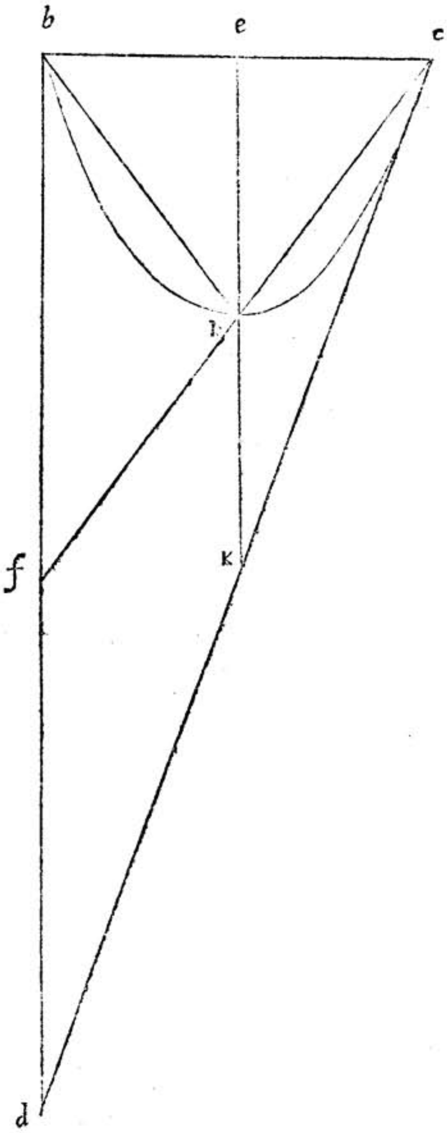
Poteſt autem ſumi aliquod ſpatium minus dicto exceſſu, quod ſit pars trianguli b d c.] *Nam ſi exceſſu quo b h c portio excedit ſpatium f, ſibi ipſi eouſque coaceruetur, quouſque ſuperet triangulum b d c: diuidaturque dictum triangulum in tot partes æquales, quoties exceſſus ſibi ipſi fuerit coaceruatus: erit una ex illis partibus minor ipſo exceſſu, ut docetur in quarta propoſitione libri de lineis ſpiralibus. poſſumus autem & idem illud aſſequi ex prima decimi elementorum. expoſitis enim duabus magnitudinibus inæqualibus, uidelicet triangulo b d c, & exceſſu, quo b h c portio excedit ſpatium f, ſi à triangulo auferatur dimidium: & eius, quod reliquum eſt, rurſus dimidium auferatur: idq; continenter fiat: tandem relinquetur quædam magnitudo minor dicto exceſſu. erit autem ea, & pars b d c trianguli: & ipſum metietur ſecundum numerum, qui in dupla proportione ab unitate tantum diſtat, quantus eſt numerus ablationum. Vt exempli gratia ſi ablatio ter facta fuerit: erit ea pars octaua; ſi quater, ſextadecima: & deinceps eodem modo.* A

Erit & b e pars eadem ipſius b d.] *Quam enim proportionem habet triangulum b c e ad ipſum b c d, eandem a e habet ad b d.* B 1. ſexti.

Spatium ergo f minus eſt trapeziis m l, x r, p h, & triangulo p o c.] *Nam cum triangulum b c e, & ſpatium f ſint minora portione b h c: ſi ab ea auferremus ſpatium æquale triangulo b c e: eſſet f ſpatium minus eo, quod relinqueretur. nunc autem cum à portione auferatur minus, quàm ſit triangulum b c e; auferuntur enim partes trapeziorum m e, u l, h r, h o, & trianguli c o s, quibus omnibus eſt æquale b e c triangulum: multo magis ſequitur, ut ſpatium f minus ſit reſiduo ipſius portionis, quod conſtat trapeziis m l, x r, p h, & p c o triangulo.* C

Oſtenſum eſt enim maius, quàm triplum.] *In decima quarta huius.* D

Et dictorum ſpatiorum minus, quàm triplum.] *In eadem decima quarta.* E



IN PROPOSITIONEM XVII.

Recta linea ab h ducta æquidiſtans diametro bifariam ſecat ipſam b c, & b c æquidiſtans eſt lineæ ſectionem tangenti in h.] *Fit enim ipſa h e portionis diameter. quare ex prima huius ſequitur, b c æquidiſtare lineæ coni ſectionem in puncto h tangenti.* A

Triangulum b d c quadruplum eſt b h c trianguli.] *Sequitur nanque ex ſecunda huius, lineas e h, h k æquales eſſe. quare ducta c h & producta ad ipſam b d in f, erunt & b f, f d æquales, ob ſimilitudinem triangulorum: & propterea ipſa triangula c b f, c f d æqualia. Rurſus cum ſint c e, e b æquales: & ipſæ c h, h f æquales erunt: & triangula æqualia b h c, b h f. eſt igitur triangulum* B 4. ſexti. 1. ſexti. 2. ſexti.

h bdc

b d c ipsius b h c quadruplum, ut proponebatur.

C Portionum quæ recta, & curua linea continentur &c.] *Hactenus ostendit Archimedes, quomodo paraboles quadratura per mechanicas, ut ipse ait, rationes fuerit inuenta. Nunc rursus eandem ipsam rationibus geometricis demonstrare aggreditur.*

IN PROPOSITIONEM XVIII.

A Constat lineam a c æquidistantem esse ei, quæ in b coni sectionem contingit.] *Ex prima huius.*

IN PROPOSITIONEM XIX.

A Manifestum est eandem habere proportionem b d ad b h longitudine, quam a d ad f h potestate.] *Ex tertia huius.*

IN PROPOSITIONEM XX.

A Necesse est b punctum uerticem esse portionis. æquidistans est igitur &c.] *Ex ijs quæ præmisit ante decimam octauam, & ex prima huius.*

B Cadent igitur ipsæ extra sectionem.] *Si enim intra sectionem caderent: coirent cum diametro ex uigesima secunda primi conicorum, quod est absurdum; cum ponantur diametro æquidistantes.*

C Quare fieri potest, ut in portione hac multiangula figura describatur; ita ut reliquæ portiones quolibet proposito spatio sint minores.] *Ex prima decimi, quo pacto in secunda undecimi describitur figura in circulo, & à nobis in ellipsi, propositione quinta de conoidibus, & sphæroidibus.*

IN PROPOSITIONEM XXI.

A Ergo punctum b uertex est portionis.] *Ex decima octaua huius.*

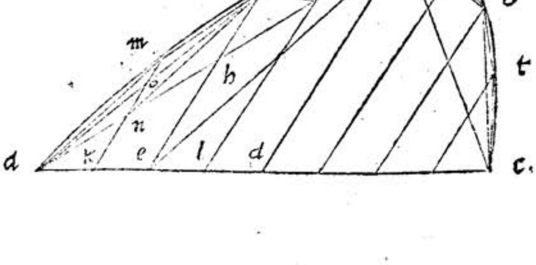
B Punctum igitur f uertex est portionis a f b.] *Ex eadem decima octaua. est enim a b ad*

2. sexti. *h b, ut a e ad e d. quæ cum sint æquales inter se, & ipsæ a h, h b æquales erunt.*

C Est enim b d ipsius quidem e f sesquitertia; ipsius autem e h dupla.] *Primum pa-*

4. sexti. *tet ex decima nona: secundum uero demonstrabitur hoc pacto. Quoniam triangula a b d, a h e, sunt æquiangula: erit sicut a d ad d b, ita a e ad e h: & permutando sicut a d ad a e, sic d b ad e h. quare cum dupla sit a d ipsius a e, ex positione: dupla quoque erit, & d b ipsius e h.*

D Quare & a e b triangulum duplum est trianguli f b a.] *Colligitur hoc ex duodecima quinti. Quòd si rursus in reliquis portionibus a f, f b, b g, g c triangula eodem modo describantur: erunt utraque triangula a f b, b g c eorum triangulorum quadrupla. secentur enim bifariam a e, e d in punctis k l: ducaturq; k m diametro æquidistans, & secans a h in puncto n; & a f in o: & ducatur l p itidem diametro æquidistans, quæ secet h b in q; & f b in r. Itaque quoniam in triangulo a e f ducta est k o, ipsi e f æquidistans: erit a o ad o f, ut a k ad k e. æquales igitur sunt a o,*



o f: & m punctum uertex est portionis a m f, ex decima octaua huius. Rursus quoniam in triangulo a d b ducuntur e f, l p æqnidistantes ipsi d b: erit ut e l ad l d, ita h q ad q b. quare æquales erunt

erunt h q, q b: idcircoq; & ipsæ f r, r b æquales: & punctum p uertex portionis f p b. triangula igitur a m f, f p b eandem basim, & altitudinem eandem habebunt portionibus, in quibus describuntur. Dico triangulum a f b quadruplum esse triangulorum a m f, f p b. est enim linea f b diameter uidelicet portionis a f b, sesquitertia lineæ m n, ex decima nona huius; & dupla ipsius n o. quare & n o ipsius o m dupla: & ob eandem caussam q r dupla est ipsius r p. ductis igitur lineis f n, n q, erit triangulum f n o duplum trianguli f o m: & triangulum a o n duplum trianguli a o m. 1. sexti. *quare triangulum a n f duplum erit ipsius a m f. est autem a n f quarta pars trianguli a f b. Eadem* 12. quinti. *quoque ratione ostendetur, & triangulum f b q, quod item est quarta pars eiusdem trianguli a f b, duplum esse ipsius f p b. totum ergo triangulum a f b, triangulorum a m f, f p b quadruplum erit. Non aliter ostendemus triangulum b g c quadruplum esse triangulorum b s g, g t c, in reliquis portionibus b g, g c descriptorum. ex quibus sequitur, utraque triangula a f b, b g c triangulorum* 12. quinti. *omnium a m f, f p b, b s g, g t c quadrupla esse: quod demonstrare oportebat.*

Similiter quoque ostendentur triangula a m f, f p b, b s g, g t c quadrupla esse triangulorum eorum, quæ in reliquis portionibus describuntur: & ita deinceps in aliis.

IN PROPOSITIONEM XXII.

Similiter autem ostendetur triangula in reliquis portionibus descripta, eandem basim habentia ipsis, & altitudinem eandem, spatio h æqualia esse.] *Ostendimus enim in antecedenti triangula a d b, b e c, triangulorum in reliquis portionibus descriptorum quadrupla esse. Quare cum spatium q ponatur quadruplum spatij h: erunt triangula in reliquis portionibus descripta, ipsi h spatio æqualia.*

IN PROPOSITIONEM XXIIII, ET VLTIMAM.

A Vnde sequitur omnia spatia minora esse, quàm sesquitertia maximi spatii.] *Sunt enim omnia spatia unà cum tertia parte minimi spatij sesquitertia maximi; quod proxime est demonstratum.*

B Et k spatium sesquitertium spatii f.] *Positum nanque est f spatium æquale triangulo a b c, & spatium k eiusdem trianguli a b c sesquitertium.*

C Et quoniam spatium k excedit f g, h i spatia minori excessu, quàm sit i.] *Excedit enim tertia tantum parte ipsius i spatij: quod etiam est demonstratum.*

EIVSDEM COMMENTARIVS

IN LIBRVM DE CONOIDIBVS,

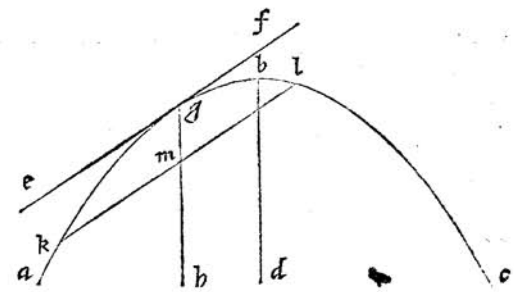
ET SPHÆROIDIBVS.

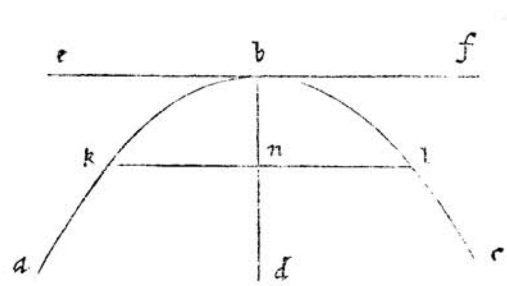
A SI RECTANGVLI coni sectio &c.] *Diximus supra rectanguli coni sectionem posteriores parabolen appellasse, atque huius ipsius caussam ex Eutocio attulimus.*

B Conoides rectangulum appellari.] *Nos non ineptæ, ut opinor, ob illud ipsum conoides parabolicum appellabimus, & eodem modo conoides hyperbolicum, quod obtusiangulum uocat Archimedes. Quæ utraque non aliter, quàm parabole, & hyperbole, ita intelligi oportet, ut in infinitum augeantur.*

Conoidea in infinitũ augentur.

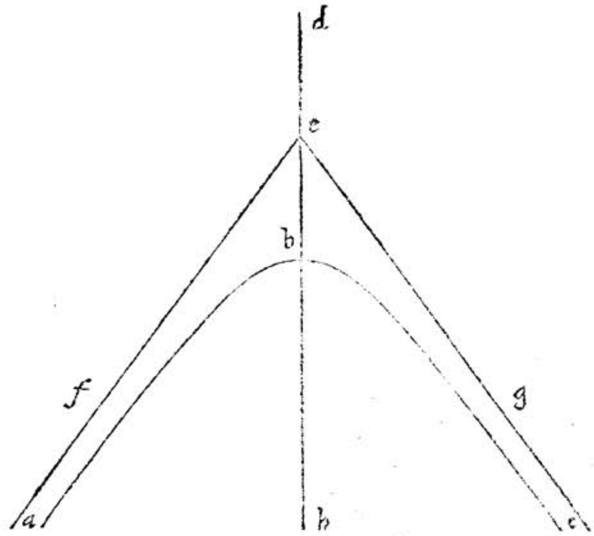
C Verticem punctum, in quo alterum planum conoides contingit; axem uero rectam lineam intra portionem receptam, ex ea, quæ per uerticem portionis ducta sit axi conoidis æquidistans.] *Videntur hæc dicta de portione conoidis rectanguli, seu parabolici abscissa plano non erecto super axem: ea enim, quæ abscinditur plano super axem erecto, uerticem habet eundem, quem conoides; & axem axis conoidis partem, intra portionem receptam. Hoc autem idcirco contingit in portione conoidis parabolici de axe, quòd in portione paraboles idem contingat de diametro: nam si parabole abscindatur linea recta, quæ cum diametro eius rectos contineat angulos; uertex idem est in utraque: diameter uero portionis, diametri sectionis pars est. sin minus, uertex portionis est punctum illud, in quo altera linea parabolen tangit, lineæ abscindenti æquidistans; diameter uero linea, quæ ab eo puncto ducitur æquidistans ipsi paraboles diametro: quod ex quadragesima sexta primi conicorum Apollonij abunde colligitur. Vt autem ea, quæ hoc loco dicuntur, dilucidiora fiant. Sit conoides parabolicum a b c, cuius axis b d: & planum cuius recta linea e f, illud tangat in puncto g: & à g demittatur linea g h, æquidistans ipsi b d: rursus ducatur aliud planum conoides abscindens, æquidistansq; alteri k l; cui linea g h occurrat in puncto m. erit portio conoidis parabolici k g l abscissa plano non erecto super axem; cuius basis superficies circa diametrum k l; uertex uero g; & axis g m. Quòd si planum e f tangat conoides in b puncto: ducto altero plano ei æquidistanti k l, cui axis b d occurrat in n, erit k b l portio abscissa plano super axem erecto; & eius basis superficies k l; uertexq; b: & axis b n. Et si idem conoides parabolicum a b c scindatur plano per axem, & per ipsam g h ducto: fiet sectio a b c parabole figuram describens, ut infra ostendetur: & erit paraboles portionis k g l, basis linea k l; uertex g; & diameter g m. & similiter portionis paraboles k b l, basis k l; uertex b; & diameter b n.*





D Si in eodem plano sint obtusianguli coni sectio, eiusq; diameter, & lineæ, quæ sunt proximæ coni obtusianguli sectioni, &c.] *Lineæ sectioni coni obtusianguli proximæ apud Archimedẽ sunt, ut opinor, quas Apollonius appellat* ἀσυμπτώτους τῇ τομῇ, *hoc est non coeuntes cum sectione. Sit enim coni obtusianguli sectio, seu hyperbole a b c: & eius figuræ latus transuersum b d bifariam secetur in puncto e; quod Apollonius hyperboles centrum uocat: atque ab eo ducantur lineæ non coeuntes cum sectione e f, e g, ut idem docuit Apollonius in prima secundi conicorum.*

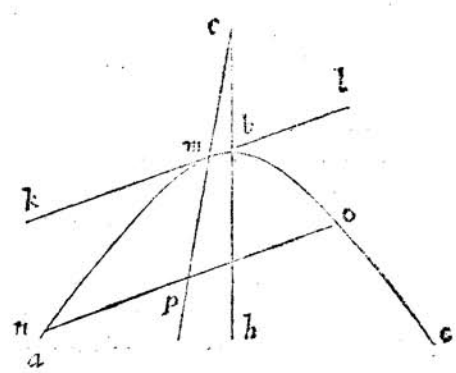
conicorum. Si igitur omnes hæ lineæ ſint in eodem plano: & manente diametro b h, circumducatur planum qnouſque redeat in eum locum, à quo cœpit moueri: manifeſtum eſt liceas e f, e g conum comprehendere æquicrurem, quem Archimedes conum conoides continentem appellat; cuius uertex eſt e, & axis e h: & inſuper hyperbolen a b c comprehendere figuram, quam ille conoides obtuſiangulum, nos hyperbolicum dicemus; cuius uertex b, & axis b h: linea uero e b erit, quam ad axem adiectam uocat Archimedes, Apollonius in hyperbole eam, quæ ex centro appellat.

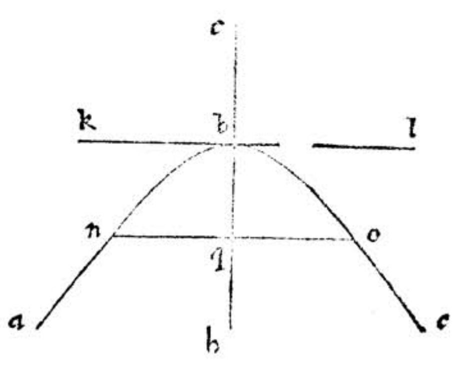


E

Et ſi obtuſiangulum conoides planum contingat &c.]

Sit conoides obtuſiangulum, ſeu hyperbolicum a b c, ut in proxima figura: atque ipſum tangat planum k l in puncto m: intelligatur item aliud planum ei æquidiſtans; & conoides ſecans, n o: ductaq; e m linea, & producta occurrat plano n o in p. erit portionis conoidis m n o abſciſſæ plano ſuper axem non erecto, baſis ſuperficies circa diametrum, n o; uertex m; & axis m p; linea uero ad axem adiecta m e. Sed ſi planum k l tangat conoides in puncto b: ducaturq; aliud planum ei æquidiſtans n o, cui axis b h occurrat in q: erit portionis n b o abſciſſæ plano ſuper axem erecto, baſis ſuperficies circa diametrum n o; uertex b; & axis b q; lineaq; ad axem adiecta, eadem, quæ conoidis, hoc eſt ipſa b e. Fit autem hoc in portione conoidis hyperbolici; quòd & in portione hyperboles idé fiat. Si enim conoides hyperbolicum a b c ſecetur plano per axem, perq; lineam e p ducto: fiet a b c ſectio, hyperbole, quæ figuram deſcribit, ut etiam oſtendemus: & erit n m o hyperboles portionis, baſis n o; uertex m: & m p diameter; linea uero m e ea, quæ ex centro: quod ex quadrageſima ſeptima, & quinquageſima primi conicorum apertiſſime conſtat: & ita portionis hyperboles n b o, baſis n o; uertex b; diameter b q; & b c ea, quæ ex centro.





Omnia conoidea rectangula ſunt ſimilia, obtuſiangulorum uerò conoideon &c.] F

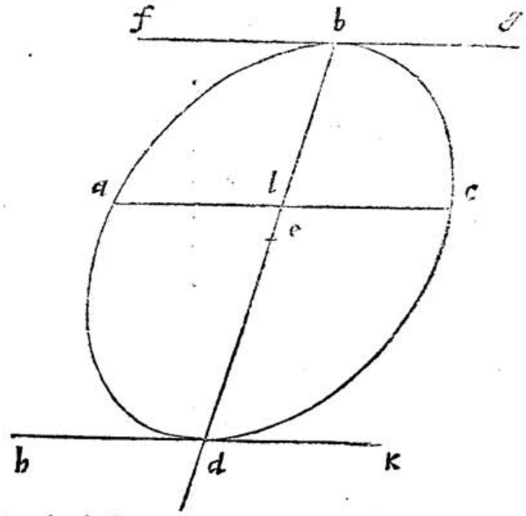
Parabolæ enim omnes ſimiles ſunt, à quibus rectangula, hoc eſt parabolica conoidea deſcribuntur

Parabolæ oes ſimiles

Hyperbolæ similes. Conoidea hyperbolica similia.

tur. hyperbolæ uero similes dicuntur, quarum coniunctæ diametri inter se, uel quarum figuræ latera eandem habent proportionem. harum autem lineæ non coeuntes cum sectione æqualem continent angulum: & idcirco similem conum describunt, conoides ipsum continentem: recteq; hyperbolica conoidea similia dicuntur illa, quæ à similibus sectionibus ortum habent.

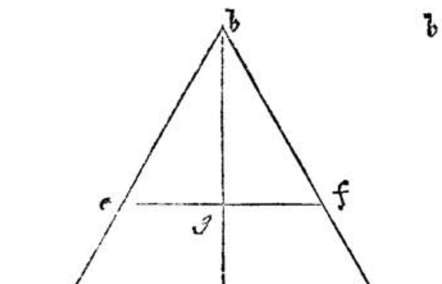
G Et si sphæroidum figurarum quamlibet plana æquidistantia contingant, quæ ipsas non secent.] *Sit sphæroides siue oblongum, siue latum a b c d, cuius centrum e: & ipsum tangant duo plana æquidistantia; planum quidem f g in puncto b; planum uero h k in d: & item ducatur aliud planum illis ipsis æquidistans, & secans sphæroides, quod sit a c: ductaq; b d occurrente plano a c in l, quæ transibit per e, ut ipse Archimedes ostendit in decima octaua huius, erit portionis sphæroidis a b c basis superficies circa diametrum a c; uertex b; & axis b l: portionis uero a d c basis erit eadem; uertex d; & axis d l. Huius caussa est, quòd in ellipsi eadem eueniunt. Secetur enim sphæroides plano per axem ducto, & per lineam b d. fiet sectio a b c d*

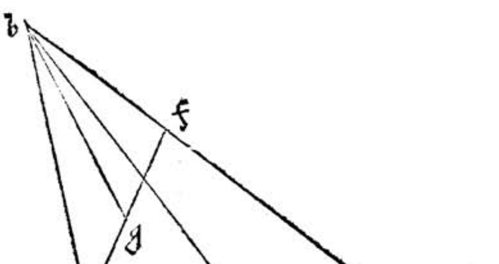


ellipsis figuram describens; & eius portionis a b c basis erit linea a c; uertex b; & diameter b l: portionis autem a d c, basis eadem a c; uertex d; & diameter d l, ut ex quadragesima septima primi conicorum apparet.

H Itaque demonstratis dictis theorematibus, per ea ipsa inueniuntur theoremata multa, & problemata &c.] *De his nos in fine nonnulla conscribemus.*

I Si conus plano secetur cum omnibus eius lateribus coeunti: sectio, uel erit circulus, uel coni acutianguli sectio.] *Si enim conus plano secetur coeunti cum omnibus ipsius lateribus, æquidistanti autem basi, aut ei subcontrarie posito: sectio circulus erit, & eius pars hoc circulo contenta usque ad uerticem erit conus: quod demonstrauit Apollonius in quarta, & quinta primi conicorum. erit autem is conus similis cono, à quo abscinditur. Sit nanque conus a b c, cuius basis circulus circa diametrum a c, & axis b d: seceturq; primum plano basi æquidistan*





ti, quod faciat sectionem e f. circulus igitur erit e f, centrum habens in axi, ubi punctum g: & e b f conus, cuius basis circulus circa diametrum e f, & axis b g. Dico conum e b f similem esse cono a b c. secetur enim conus a b c & altero plano per axem ducto: sitq; sectio a b c. erit a b c triangulum, & item triangulum e b f; ex tertia primi conicorum. & cum e f æquidistet basi:

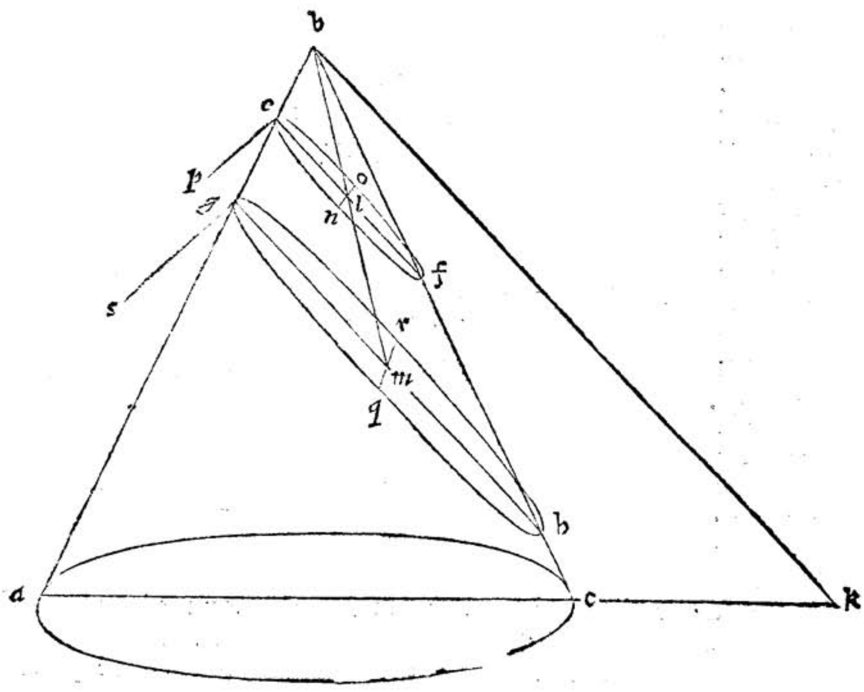
triangulum

triangulum b e f simile erit triangulo b a c: triangulumq; b e g simile ipsi b a d. quare ut b d ad b a, ita b g ad b e: ut autem b a ad a c, ita b e ad e f: & ex æquali, ut b d ad a c, ita b g a e f. conus igitur e b f, cuius basis est circulus circa diametrum e f, & axis b g, similis est cono a b c, cuius basis circulus circa diametrum a c, & axis b d, ex diffinitione similium conorum. Sed si secetur conus scalenus plano subcontrarie posito ipsi basi: secetur autem & altero plano per axem ducto: erit angulus b f e æqualis angulo b a c: & triangulum f b e simile triangulo a b c. diuidatur ipsa e f linea bifariam in g, & iungantur b g. erit ut b a ad a d, sic b f ad f g. quare & triangulum b f g simile erit triangulo b a d. conus igitur f b e similis est cono a b c, ex diffinitione conorum scalenorum similium tradita à Campano in duodecimo elementorum, propositione decima; quos ipse pyramides inclinatas appellat. sunt nanque anguli ad g æquales angulis ad ipsum d: quod monstrare uolebamus. Diff. 20. undecimi. 6. sexti.

Si uero conus plano secetur coeunti cum omnibus ipsius lateribus, non autem æquidistanti basi, aut ei subcontrario posito: sectio erit ellipsis, ut monstrauit idem Apollonius in decima tertia eiusdem. Oportet tamen communem sectionem secantis plani, & eius, in quo est coni basis, esse lineam rectam, ad rectos existentem angulos, uel basi trianguli per axem, uel ei, quæ in eadem ipsi recta linea constituitur. Figuram autem coni sectione dicta contentam ad uerticem usque coni, Archimedes ἀπότμαμα κώνου uocat, nos coni portionem uertimus. Coni portio.

Quòd si conus duobus planis æquidistantibus eo pacto secetur: sectiones erunt ellipses inter se similes. sunt autem ellipses similes, quarum diametri coniunctæ eandem habent proportionem. Ellipses similes.

Sit conus a b c: & secetur duobus planis æquidistantibus, ut dictum est, quæ faciant ellipses e f, g h. Dico eas similes esse. secetur enim conus & plano per axem ducto: sitq; sectio triangulum a b c: communes autem sectiones planorum æquidistantium, & eius quod per axem ductum est,

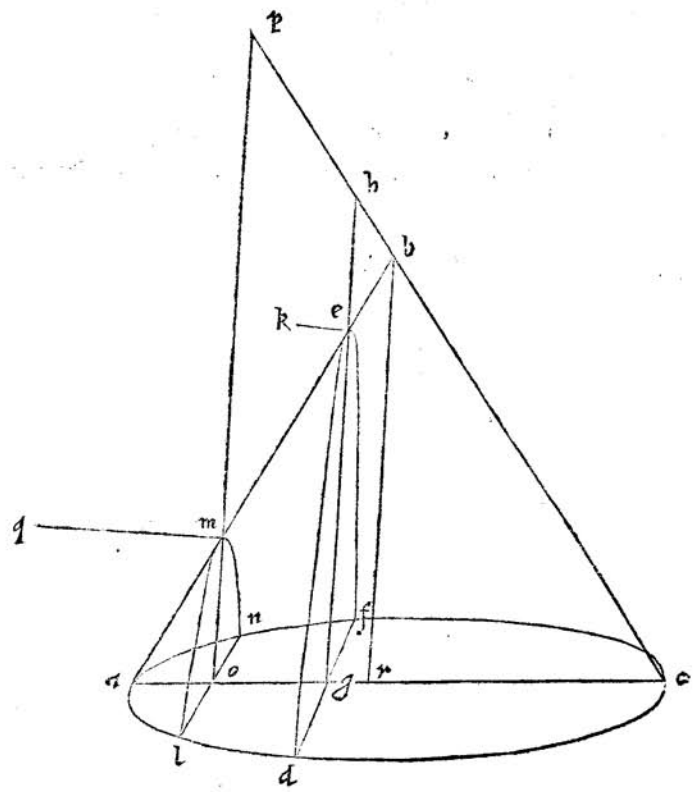


sint rectæ lineæ e f, g h. erunt hæ maiores diametri ellipsium, atque inter se æquidistantes. ducatur à puncto b linea b k, æquidistans ipsis e f, g h lineis, quæ cum linea c a producta coeat in k: & sit ellipsis e f centrum l; secunda diameter n l o; & rectum figuræ latus p e: quod græci ὀρθίαν, ἢ ὀρθίαν πλευρὰν dicunt: ellipsis autem g h centrum sit m; secunda diameter q m r; & rectum latus s g. erit iam p e ad e f; hoc est rectum latus ad transuersum, ut rectangulum a k c ad quadratum b k, ex decima tertia primi conicorum Apollonij: & ita s g ad g h. quare p e ad e f erit, 16. undec.

ut s g

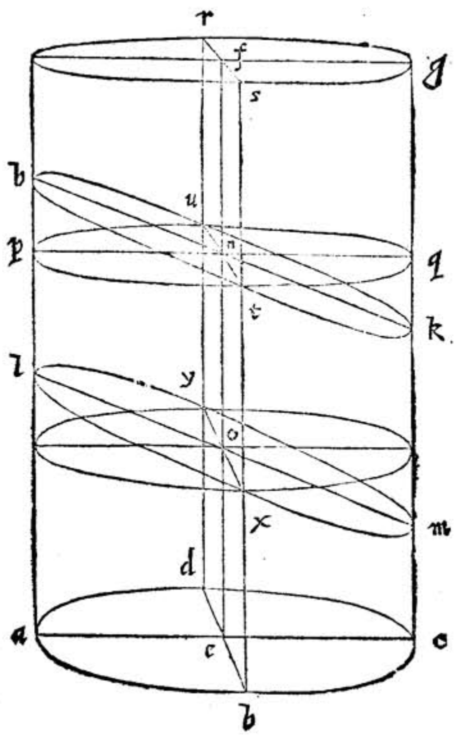
ut s g ad g h. ut autem p e ad e f, ex uigesima prima eiusdem, ita quadratum n l ad rectangulum e l f; hoc est ad quadratum e l. & eadem ratione ut s g ad g h, ita quadratum q m ad quadratum g m. quadratum igitur n l ad quadratum e l est, ut quadratum q m ad quadratum g m. Itaque cum quadrata semidiametrorum ipsarum e f, g h ellipsium eandem inter se proportionem
22. sexti. *habeant: & semidiametri ipsæ: & item diametri eandem habebunt: & erunt ellipses similes: quod*
15. quinti. *erat ostendendum. Ex quo patet coni portiones e b f, g b h similes quoque inter se esse. dicuntur*
Coni, & Cylindri portiones similes. *autem similes coni portiones, quemadmodum & portiones cylindri similes, quæ bases similes habent; & earum axes angulos æquales continent cum diametris basium consimilibus; proportionemq; ad eas habent eandem. ducta enim b m, qui est axis coni portionis g b h, transibit per l, quod ex similitudine triangulorum eorum facile ostendi potest: cumq; e f, g h rectæ lineæ æquidi-*
29. primi. *stent: & ipsæ n o, q r æquidistabunt; & erunt anguli ad l constituti æquales ijs, qui sunt ad m:*
18. primi. *& ut b m ad g h, ita b l ad e f. ut autem g h ad q r, ita e f ad n o. quare ex æquali & b l ad n o erit, ut b m ad q r. ex diffinitione igitur coni portio e b f similis est portioni g b h, ut dicebamus.*

Si denique conus secetur duobus æquidistantibus planis, quæ secent basim coni per rectam, ad rectos angulos existentem ipsi basi trianguli per axem: fient & eo pacto sectiones similes. nam uel diametri sectionum æquidistabunt uni ex lateribus trianguli per axem, uel non æquidistabunt. siquidem æquidistabunt: erunt sectiones parabolæ ex undecima primi conicorum, quæ omnes inter se similes sunt. sin minus: erunt hyperbolæ ex duodecima eiusdem. eas autem similes esse ita monstrabitur. Sit conus a b c: & secetur duobus planis æquidistantibus, ut dictum est; quæ faciant sectiones hyperbolas d e f, l m n: & sit hyperboles d e f diameter e g; latus figuræ rectum k e; & transuersum e h. ipsius autem l m n diameter sit m o; rectum latus q m; transuersum m p: ductaq; b r æquidistanti diametris



earum e g, & m o, erit ex duodecima iam dicta, ut rectangulum a r c ad quadratum b r, sic k e ad e h: & sic q m ad m p; hoc est latus rectum ad transuersum. quare cum earum figuræ latera eandem habeant proportionem: ex diffinitione hyperbolæ similes erunt: quod monstrare oportebat.

K Et si cylindrus duobus planis æquidistantibus secetur, quæ cum omnibus ipsius lateribus coeant.] *Sectiones cylindri, circuli quidem erunt centra habentes in axi, cum plana illa ipsum secantia æquidistent basi, aut ei subcontrarie ducantur: ellipses autem, cum aliter quomodocunque habeant, si modo communis sectio secantium planorum, & eius, in quo est basis cylindri linea recta sit, ad rectos angulos existens, aut basi parallelogrammi per axem, aut ei, quæ est in eadem recta linea: quod monstratum est à Sereno in cylindricis. Itaque ellipses illæ æquales erunt, & similes; quoniam æquales habebunt utrasque diametros, ut ostendetur. Sit enim cylindrus*



drus a g, cuius basis circulus a b c d; axis e f: & secetur duobus planis æquidistantibus, ut dictum est: secetur præterea & altero plano per axem ducto: sitq; sectio a g. erit a g parallelogrammum, quod monstrauit eodem in loco Serenus: planorum autem sectiones sint h k, l m ellipses; quarum maiores diametri rectæ lineæ h k, l m; & centra in axi cylindri; hoc est in punctis n o. nam ducto plano p q per n, æquidistanti basi, sectio circulus erit, & linea p n, æqualis lineæ n q. cumq; triangulum h n p simile sit triangulo k n q, quod manifeste patet: erit ut p n ad n h, sic q n ad n k: & permutando, ut p n ad n q, sic h n ad n k. sunt autem p n, n q æquales. æquales igitur ipsæ h n, n k. quare ellipsis h k centrum est n. eodem modo monstrabimus, & ellipsis l m centrum esse ipsum o. & cum plana æquidistent: æquidistabunt & ipsæ h k, l m: atque erit ipsum h m parallelogrammum. unde æqualis erit l m ipsi h k. secetur rursus cylindrus plano per axem ducto, & erecto super aliud planum secans item per axem: sitq; sectio b d r s, quæ & ipsa parallelogrammum erit; communes autem sectiones huius, & planorum æquidistantium sint t u, x y. erunt eadem ratione t u, x y rectæ lineæ, æquidistantes inter se se; & idcirco parallelogrammum quoque erit t y: & linea x y æqualis ipsi t u. sed t u diuidit per medium lineam h k; & angulos cum ea rectos efficit; quoniam & planum super planum est erectum. Quare secunda diameter est ellipsis h k: & similiter x y secunda diameter ellipsis l m. suntq; diametri ellipsis h k, æquales diametris ellipsis l m. ellipses igitur inter sese sunt æquales, & similes: quod ostendere uolebamus.

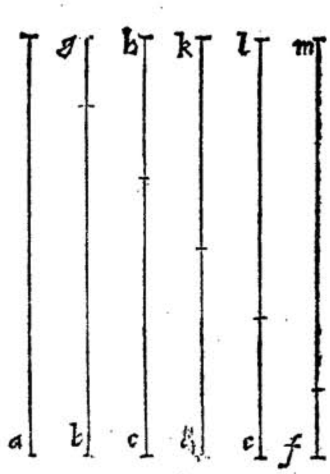
16. 1 undec.
34. primi.

COROLLARIVM.

Ex his sequitur, Ellipsium omnium, quæ à planis cylindrum eo pacto secantibus fiunt, secundas diametros æquales esse diametro basis ipsius cylindri: sun t enim t u, x y æquales ipsi b d: & ita in reliquis.

IN PROPOSITIONEM I.

Huius uero demonstratio manifesta est.]



A

Sint magnitudines æqualiter se se excedentes a b c d e f: sitq; excessus minimæ illarum æqualis, uidelicet ipsi f: adijciatur autem ad ipsam b magnitudo g, æqualis ipsi f: & ad c adijciatur magnitudo h, æqualis e: & ad d magnitudo k, æqualis sibi ipsi: & ad e magnitudo l, æqualis c: & ad f magnitudo m, æqualis b. Erunt hæ sic factæ magnitudines inter se se æquales: & item æquales maximæ: magnitudines uero b g, c h, d k, e l, f m duplæ magnitudinum b c d e f. quare addita utrobique magnitudine a, erunt magnitudines a, b g, c h, d k, e l, f m magnitudinum a b c d e f minores, quàm duplæ; deficiunt enim à duplis tanta magnitudine, quanta est a: magnitu-

dinum uero b c d e f erunt eædem maiores, quàm duplæ; quod superant eadem illa magnitudine a. constat igitur uerum esse, quod proponebatur.

IN PROPOSITIONEM II.

A Habent autem omnes a b c d e f ad a eandem proportionem, quam omnes g h i k l m ad g.] *Erit enim conuertendo f ad e, sicut m ad l: & componendo f e ad e, sicut m l*
22.quinti. *ad l. sed e ad d est, sicut l ad k. f e igitur ad d sunt, sicut m l ad k: & rursus componendo f e d ad d, sicut m l k ad k: est autem d ad c, ut k ad i. quare f e d ad c, ut m l k, ad i: rursusq; componendo f e d c ad c, ut m l k i ad i. & eadem semper ratione utentes, tandem concludemus, omnes a b c d e f ad a eandem habere proportionem, quam habent omnes g h i k l m ad g.*

B Verum n ad omnes n x o p r s habet eandem, quam t ad omnes t u y q z 9.] *Quo modo ostensum fuit superius a b c d e f ad a eandem habere proportionem, quam g h i k l m ad g: & hoc loco ostendemus n x o p r s ad n habere eam, quam t u y q z 9 ad t. quare & conuertendo n ad n x o p r s eam habebit, quam t ad t u y q z 9.*

C Manifestum præterea est; & si magnitudinum a b c d e f, ipsæ a b c d e referantur ad n x o p r &c.] *Nam si magnitudines s 9 auferamus, ea, qua diximus ratione: erit n ad ipsas n x o p r, ut t ad t u y q z. quare ex æquali a b c d e f ad n x o p r ita erit, ut g h i k l m ad t u y q z.*

IN PROPOSITIONEM III.

A Sunt enim aliqua spacia, in quibus a, se se æqualiter excedentia; & excessus minimo est æqualis.] *Quoniam enim spatia, in quibus sunt b c d e f g, omnia sunt quadrata: sicut lineæ b c d e f g se se æqualiter superant: ita & reliqua quadratorum latera sese æqualiter superabunt. Quam uero proportionem habent quadratorum latera, quæ sunt bases spatiorum a, eandem*
1.sexti. *habent & ipsa spatia. quare spatia, in quibus a sese æqualiter excedunt: & excessus est æqualis minimo.*

B Et idcirco spatia omnia, in quibus i, omnibus, in quibus a, minora erunt.] *Nam cum ex prima huius, spatia omnia, in quibus h i, æqualia maximo, spatiorum, in quibus a, sese æqualiter excedentium, minora sint, quàm dupla; reliquorum uero dempto maximo, maiora. erunt & spatia omnia, in quibus i, quæ sunt dimidia spatiorum omnium, in quibus h i, minora spatijs omnibus, in quibus a: reliquis uero dempto maximo, maiora; positum est enim lineam i dimidium esse ipsius h i.*

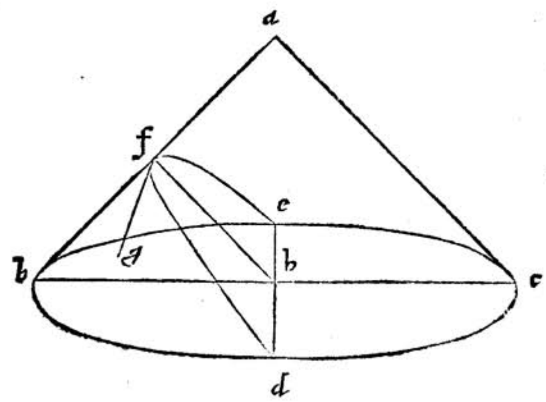
C Quadrata igitur linearum omnium æqualium maxime &c.] *Quadrata linearum omnium æqualium maximæ, hoc est spatia, in quibus k l, quadratorum omnium linearum se se æqualiter excedentium; hoc est spatiorum, in quibus b c d e f g, minora sunt, quàm tripla: reliquorum uero dempto maximo, maiora, ex corollario decimæ de lineis spiralibus. spatia igitur omnia,*
1. sexti. *in quibus k, quæ sunt tertia pars spatiorum omnium, in quibus k l; cum linea k ipsius k l lineæ sub tripla sit: erunt spatijs b c d e f g minora; spatijs autem c d e f g maiora: atque erunt, ut superius monstratum est, spatia omnia, in quibus i minora omnibus, in quibus a; maiora autem reliquis dempto maximo. ex quibus sequitur spatia omnia, in quibus i k esse minora spatijs a b, a c, a d, a e, a f, a g; spatijs uero a c, a d, a e, a f, a g, maiora.*

D Manifestum est igitur, spatia omnia, in quibus h i k l &c.] *Cum spatia omnia, in quibus i k, spatijs omnibus a b, a c, a d, a e, a f, a g, sint minora; reliquis uero dempto a b, maiora:*
8.quinti. *habebunt spatia omnia, in quibus h i k l ad spatia omnia a b, a c, a d, a e, a f, a g minorem propor*
1. sexti. *tionem, quàm ad spatia, in quibus i k; ad spacia autẽ a c, a d, a e, a f, a g, maiorem. Sed quam proportionem habent spatia omnia, in quibus h i k l ad spatia, in quibus i k, eam habet linea h l ad lineam*
13.quinti. *i k. spacia igitur omnia, in quibus h i k l ad omnia a b, a c, a d, a e, a f, a g minorem habent proportionem, quàm linea h l ad lineam i k; ad ipsa uero spatia a c, a d, a e, a f, a g, maiorem habent, quàm dictæ lineæ, proportionem.*

E Si quancunque coni sectionem rectæ lineæ contingant &c.] *Ostendit hoc Apollonius Pergæus in tertio conicorum, propositione decima septima.*

IN PROPOSITIONEM IIII.

Et sumatur ea, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur; dupla illius, quæ est usque ad axem.] *In parabola enim, quæ fit ex cono rectangulo, de qua Archimedes loquitur, linea, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur, ordinatim scilicet ad diametrum (græcis ὀρθία) dupla est eius lineæ, quæ habetur à uertice sectionis usque ad coni angulum, hoc est usque ad axem. Sit enim conus rectangulus a b c, cuius uertex a; basis autem circulus circa diametrum b c: & secetur plano per axem, quod faciat sectionem triangulū a b c: secetur autem & altero plano secante basim coni per rectam d e, ad rectos angulos existentem ipsi b c basi trianguli per axem; quod faciat sectionem in superficie coni d f e: & diameter sectionis f h æquidistans sit alteri lateri trianguli; hoc est ipsi a c: deinde à puncto f ducatur f g linea ad rectos angulos ipsi f h: ita ut g f ad f a eam habeat proportionem, quam quadratum b c ad rectangulum b a c. erit sectio d f e parabole; quod ex undecima primi conicorum Apollonij colligitur; & ipsa g f linea, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur, dupla lineæ f a. quadratum enim b c duplum est rectanguli b a c; cum angulus ad a sit rectus, ex penultima primi elementorum.* A

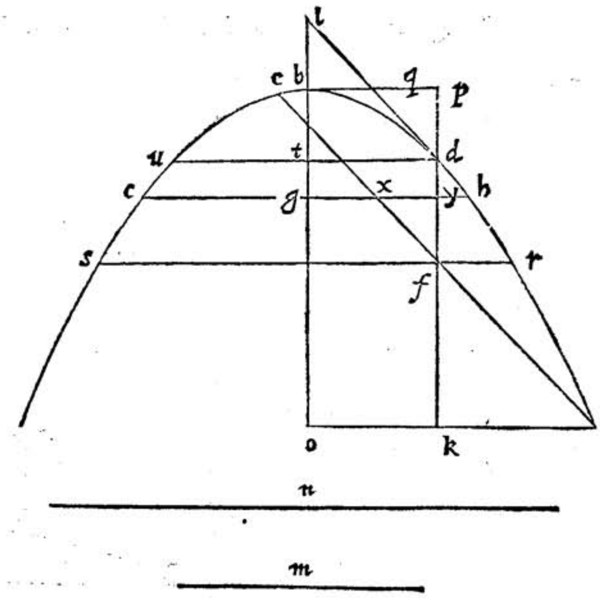


Quoniam igitur d f diameter est portionis: & a e bifariam secatur in f; & d f æquidistans est diametro sectionis coni rectanguli &c.] *Primum horum patet ex diffinitione diametri: secundum uero tum ex quadragesima sexta primi conicorum Apollonij, tum ex corollario quinquagesimæ primæ eiusdem.* B

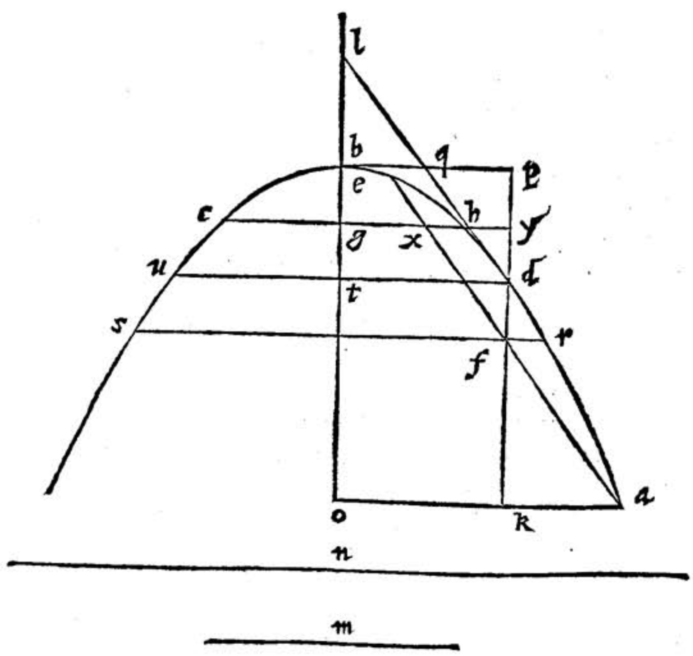
Ostensum namque est hoc in conicis.] *Nullibi hoc ostensum est, quòd sciam in conicorum quatuor libris, qui extant ab Apollonio conscriptis. is enim aliam uiam ingressus est, ad illud idem inuestigandum; quod in primo libro apparet, propositione quadragesima nona. Sed tamen nos ex conicis id ipsum demonstrare conabimur. erit autem theorema eiusmodi.* C

Si parabolen linea tangens coeat cum diametro: & per tactum ducatur diametro æquidistans: sumpto autem quolibet puncto in sectione, ab eo ducantur duæ lineæ: una quidem ordinatim ad diametrum; altera uero æquidistans tangenti; & fiat, ut quadratum partis eius, quæ tangenti æquidistans ducta est; quæ scilicet est inter sectionem, & lineam ductam per tactum, diametro æquidistantem, ad quadratum partis illius, quæ ordinatim ducta est ad diametrum; quæ uidelicet interiicitur inter sectionem, & ductam per tactum; ita alia quæpiam linea ad eam, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur: quæ à sectione ducta est ad lineam per tactum, æquidistans tangenti, poterit id, quod continetur inuenta linea, & ea, quæ ab ipsa abscinditur ad tactum.

Sit parabole, cuius diameter l o: tangens autem l d: & per d ducatur d k æquidistans ipsi l o: sumaturq; in sectione quod uis punctum a: & ab eo ducatur ordinatim ad diametrum linea a k o: & item alia ducatur a e æquidistans ipsi d l; secansq; d k in puncto f: & sumpta ea iuxta, quam possunt quæ à sectione ducuntur, in qua m, fiat ut quadratum a f ad quadratum a k, ita linea quæpiam n ad lineam m. Dico, quod fit ex a f, æquale esse ei, quod fit ex n, & d f. producatur enim linea k f d: & per b uerticem sectionis ordinatim applicetur b p; quæ coeat cum linea k d in puncto p, secetq; d l in q: & per f ducatur linea r f s, æquidistans lineæ p q b: & ab ipso d item ducatur linea d t u, eidem æquidistans: sumpta deinde ex diametro linea b g, æquali ipsi d f, per g similiter ducatur alia linea h x g c, æquidistans p q b; & secans lineam a e in puncto x. Itaque quoniam linea a e æquidistat lineæ d l; & k p ipsi o l; & a o ipsi p b: erunt triangula a f k, q d p, q l b æquiangula; quorum q d p, q l b etiam sunt æqualia: nam b t; hoc est p d, æqualis est ipsi l b, ex 35 primi conicorum. ut autem p d ad p q, ita l b ad b q: & permutando ut p d ad l b, ita p q, ad q b. quare cum illæ ſint æquales: & hæ p q, q b æquales erunt; & ſimiliter l q, q d. præterea ut a f ad a k, ita q d ad q p: & ob id, ut quadratum a f ad quadratum a k, ita quadratum q d ad quadratum q p; hoc eſt ad quadratum q b. ſed ut quadratum q d ad quadratum q b, ita rectangulum a f e ad rectangulum r f s; per præmiſſam; hoc eſt quadratũ a f ad rectangulum r f s. ſunt enim a f, f e æquales; ex quadrageſima ſexta primi conicorum. & eadem ratione ut quadratum q d ad quadratum q b, ita rectangulum a x e ad rectangulum h x c. erit igitur quadratum a f ad rectangulum r f s, ut rectangulum a x e ad rectangulum

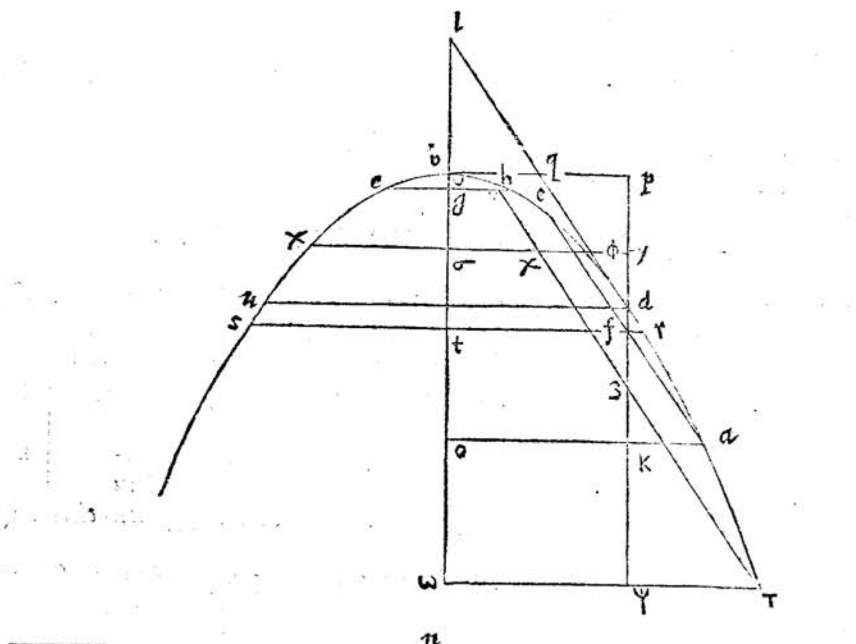


h x c: & permutando quadratum a f ad rectangulum a x e, ut rectangulum r f s ad rectangulum h x c: & per conuerſionem rationis quadratum a f ad exceſſum, quo quadratum a f excedit rectangulum a x e; hoc eſt ad quadratum f x, ex quinta ſecundi, ut rectangulum r f s ad exceſſum, quo rectangulum r f s excedit rectangulum h x c: & permutando quadratum a f ad rectangulum r f s, ut quadratum f x ad exceſſum, quo rectangulum r f s excedit rectangulum h x c. erat autem quadratum a f ad rectãgulũ r f s, ut quadratum d q ad quadratũ q b. quare quadratum f x ad exceſſum, quo rectangulũ r f s excedit rectangulum h x c erit, ut quadratum d q ad quadratum q b: & rurſus permutando quadratum f x ad quadratum d q, ut exceſſus, quo rectangulum r f s excedit rectangulũ h x c ad quadratum q b. ſed quadratum f x eſt æquale quadrato d q: nam linea f x eſt æqualis lineæ d q, ut apparebit. exceſſus igitur, quo rectangulum r f s excedit ipſum h x c, eſt æqualis quadrato q b. Lineam autem f x æqualem eſſe lineæ d q, ſic oſtendetur. Sit enim y punctum, in quo linea k p ſecat lineam h c. quoniam igitur b g; hoc eſt p y facta eſt æqualis ipſi d f: ſi quidem y cadit intra ſectionem, ſublata ab utraque communi linea d y; uel utrique addita, ſi extra cadit, ut in ſecunda figura, erit y f lineæ æqualis p d. & quo



niam linea a e æquidistat lineæ d l; & h c ipsi p b: erunt triangula f y x, d p q æquiangula: & ut y f ad p d, ita f x ad d q, & y x ad p q. æqualis est igitur f x ipsi q d; & y x ipsi p q. est autem y g æqualis ipsi p b. quare & reliqua g x est æqualis reliquæ b q; & quadratum g x æquale quadrato b q. ergo excessus, quo rectangulum r f s excedit rectangulum h x c, est æqualis quadrato g x: & propterea rectangulum h x c unà cum quadrato g x est æquale rectangulo r f s. sed cum rectangulum h x c unà cum quadrato g x æquale sit quadrato c g: erit rectangulum r f s æquale quadrato c g. Itaque ut quadratum d q ad quadratum q b, hoc est ut quadratum a f ad quadratum a k, ita quadratum a f ad quadratum c g. erat autem ut quadratum a f ad quadratũ a k, ita linea n ad lineam m. quadratum igitur a f ad quadratum c g erit, ut linea n ad lineam m: & accepta cõmuni altitudine f d, erit quadratum a f ad quadratum c g, ut rectangulum ex n & f d ad rectangulum ex m & f d: & permutando quadratum a f ad rectangulum ex n & d f, ut quadratum c g ad rectangulum ex m & b g, æquali ipsi f d. at uero quadratum c g æquale est ei, quod fit ex m & b g rectangulo; positum est enim lineam m esse, iuxta quam possunt quæ à sectione ducuntur: quadratum igitur a f est æquale ei, quod fit ex n & d f: quod fuerat ostendendum: & ita sectionis a d e, cuius diameter d f, erit linea n, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur. 5. secundi 1. sexti.

Atque ad hunc quidem modum propositum concludemus, ubi linea a e secat lineam b c. Quòd si non secet, ut in postrema figura: assumemus ex diametris d k, b o duas lineas æquales; ex diametro quidem d k, lineam d ζ, ex diametro autem b o, ipsam b σ: ita ut ducta per ζ, æquidistans ipsi



d l; hoc est τ ζ υ secet φ χ ductam per σ, æquidistantem ipsi p q b. & item ordinatim applicata ad diametrum linea τ ψ ω, quam habet proportionem quadratum τ ζ ad quadratum τ ψ, eandem habeat linea n ad m. non aliter, quàm superius, ostendemus, quadratum τ ζ æquale esse ei, quod fit ex n & ζ d rectangulo, hoc est, sectionis τ d υ, cuius est diameter d ζ, lineam n esse eam, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur. quod cum ita sit: & quadratum a f lineæ ordinatim ad diametrum ductæ, æquale erit ei, quod fit ex n & f d. At propter similitudinem triangulorum a k f, τ ψ ζ, linea a f erit ad lineam a k, ut τ ζ ad τ ψ. quare & ut quadratum a f ad quadratum a k, ita linea n ad lineam m: & illud est, quod ostendisse oportebat.

Ex

Ex iam dictis perspicuum est, si in parabola à sectione ducatur linea æquidistans diametro: & à quolibet eiusdem sectionis puncto linea ordinatim ad diametrum applicetur: ducatur quoque alia linea ipsi æquidistans, diuidensq; sectionem; ita ut à linea æquidistanti diametro æqualē abscindat ei: quæ à diametro ab alia abscissa est ad uerticem sectionis: esse rectangulum partibus huius contentum, quæ uidelicet fiunt à linea diametro æquidistanti, æquale quadrato lineæ ad diametrum ordinatim applicatæ, hoc est rectangulum r f s æquale esse quadrato c g: quod demonstratum est superius: & eodem modo in aliis demonstrabitur.

D Et potest h g æquale ei, quod continetur linea m & b g.] *Ex undecima primi conicorum Apollonij. est enim linea m, iuxta quam possunt quæ à sectione ordinatim ad diametrum ducuntur, ut etiam superius dictum est.*

E Quare & quadratum a f ad quadratum h g eandem habet proportionem, quam n ad m; quòd d f, b g positæ sint æquales. *Nam cum quadratum a f æquale sit rectagulo ex n & d f: & quadratum h g æquale rectangulo ex m & b g: erit, ut quadratum a f ad quadratum h g, sic rectangulum ex n & d f ad rectangulum ex m & b g: ut autem rectangulum ex n & d f ad rectangulum ex m & b g, æquali ipsi d f, sic n ad m; cum rectangula habeant eandem altitudinem. quadratum igitur a f ad quadratum h g proportionem habet eandem, quam n ad m.*

F Aequales igitur erunt h g, a k.] *Sequitur ex iam dictis, & undecima quinti, quadrata h g; a k esse æqualia. quare & eorum latera æqualia sint necesse est.*

G Ergo triangulum h b g triangulo d a f est æquale.] *Quod triangulum h b g dimidium sit rectanguli h g b: & triangulum d a f item dimidium rectanguli, quod fit ex a k; & d f: uel potius dimidio eius æquale, ex prima sexti.*

H Trianguli autem a d e sesquitertia est portio a d e.] *Id monstrauit Archimedes in libello de quadratura paraboles.*

I Portio abscissa utrique prædictarum æqualis erit.] *Ex ijs, quæ proxime dicta sunt. quæ autem uni, & eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia.*

IN PROPOSITIONEM V.

A Diameter autem ipsius maior, in qua a c; minor in qua b d.] *Minor eiusmodi sectionis diameter ab Apollonio secunda diameter appellatur, in primo conicorum.*

B Potest autem in z circulo describi figura multorum angulorum, & numero parium, quæ maior sit spatio a b c d.] *Sit enim spatium n, quo circulus z excedit spatium a b c d. duabus igitur magnitudinibus inæqualibus expositis, circulo scilicet z & n spatio, poterimus à circulo z tantum abscindere figura multorum angulorum, & numero parium, in ipso descripta, ut relinquatur quoddam spatium ipso n minus: quod in secunda duodecimi monstratum est. quare erit ea figura in circulo z descripta adhuc maior spatio a b c d, ut ponitur.*

n

C Quoniam enim perpendiculares e h, k l in eandem proportionem secantur ad puncta m b.] *Nam ex uigesima prima primi conicorum, & in circulo quadratum e h ad quadratum k l eam habet proportionem, quam rectangulum c h a ad rectangulum c l a: & in ellipsi, quadratum b h ad quadratum m l itidem eandem habet, quam rectangulum c h a ad rectangulum c l a. unde sequitur, quadratum e h ad quadratum k l ita esse, ut quadratum b h ad quadratum m l: & permutando quadratum e h ad quadratum b h, ut quadratum k l ad quadratum m l.*

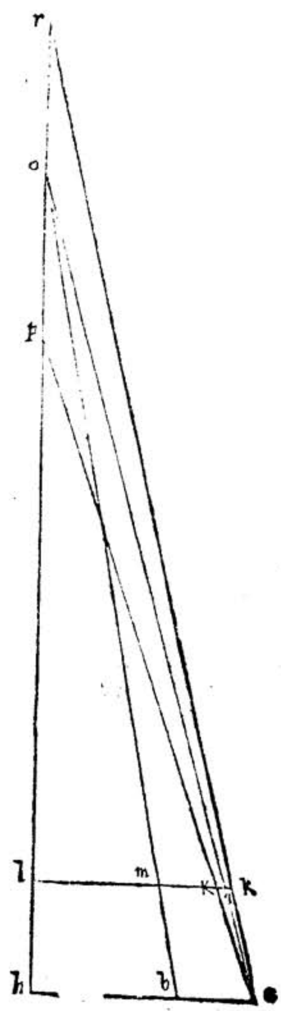
22. sexti. *quare & linea e h ad lineam b h erit, ut linea k l ad lineam m l: quod Archimedes ponebat ex conicis.*

D Constat trapezium l e ad ipsum h m eandem habere proportionem, quam h e ad b h.] *Iisdem enim sic stantibus, producantur h l, b m lineæ usque quo conueniant in puncto o: producatur item e k; quæ & ipsa unà conueniet cum illis in eodemmet puncto, ut monstrabimus. nam nisi ita fiat: erit punctum, in quo conueniunt h l, e k, uel infra ipsum o, uel supra. Sit primum infra, si esse possit, ubi est p: iunganturq; e o: & producatur l k, ut secet lineam e o in q. erunt triangula o h b, o l m inter se æquiangula: & item æquiangula inter se ipsa o h e, o l*

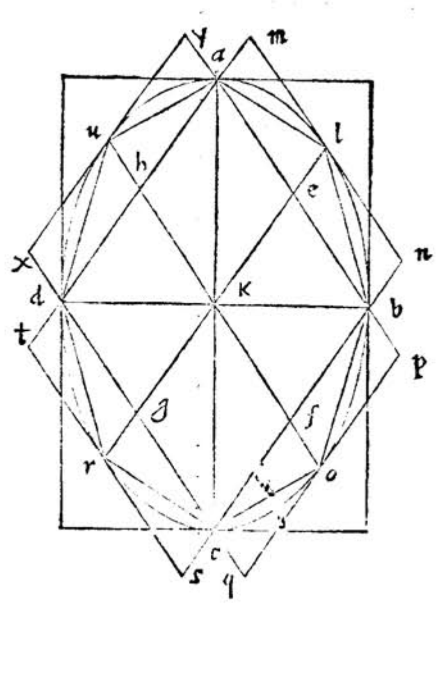
4. sexti. *q: lateraq; habebunt proportionalia. quare ut o l ad o h, ita l m ad h b: & rursus ut o l ad o h,*

11. quinti. *ita l q ad h e. ergo l m ad h b est, ut l q ad h e: & permutando l m ad l q, ut h b ad h e. sed erat*

erat l m ad l k, ut h b ad h e: monstratum enim iam est, e h, k l in eandem proportionem secari secundum b m. ex quo sequitur l q æqualem esse ipsi l k; totum parti: quod 9. quinti. *fieri non potest. non igitur e k producta conuenit cum h l infra ipsum o. Sed conueniat supra in r, si possit. Rursus ad eundem modum ratiocinantibus, idem sequetur absurdum. ergo conueniet & e k in puncto o. Quo quidem confirmato, habebit triangulum o h e ad triangulum o h b eam proportionem,* 1. sexti. *quam h e habet ad h b: & eadem ratione triangulum o l k ad triangulum o l m eam, quam l k ad l m; hoc est quam h e ad h b. reliquum igitur spatium l e ad reliquum h m habebit eandem, quam h e ad h b: quod* 19. quinti. *ostendisse oportuit.*



Rursus in coni acutianguli sectione potest describi figura multorum angulorum, & numero parium, quæ maior sit circulo z.] *Sit sectio coni acutianguli, seu ellipsis a b c d; cuius diameter maior sit a c, minor uero b d: in eaq; describatur figura quadrilatera, ductis lineis a b, b c, c d, d a. Iam constat figuram hanc maiorem esse, quàm sit dimidium ipsius spatij sectione a b c d contenti: quoniam si per puncta a b c d duxerimus lineas sectionem tangentes; fiet alia figura quadrilatera circumscripta, quæ erit dupla ipsius inscriptæ; ex quadragesima prima primi Euclidis. nam dimidium circumscriptæ figuræ b a d duplum est dimidij inscriptæ; uidelicet trianguli a b d, cum basim eandem habeant, & eandem altitudinem: & similiter b c d duplum trianguli c b d. ipsa autem figura quadrilatera circumscripta minus est spatium sectione coni acutianguli contentum. quare inscripta figura maior est, quàm ipsius dimidium. secentur deinde bifariam rectæ lineæ a b, b c, c d, d a in punctis e f g h: & à centro sectionis, quod sit k ad e ducta linea producatur usque ad sectionem in puncto l: & per l alia ducatur tangens sectionem m l n. manifestum est ex conuersa quadragesimæ septimæ primi conicorum Apollonij, uel ex sexta secundi, lineam m l n tangentem sectionem æquidistare ipsi a b. quare ductis lineis a l, l b, erit a l b triangulum ipsius parallelogrammi a n dimidium, & ob id maius quàm dimidium eius, quæ circa ipsum est, portionis ellipsis. Idem quoque fiat in alijs portionibus. demonstrabitur unumquodque aliorum triangulorum b o c, c r d, d u a maius esse, quàm dimidium portionis ipsum*



ambientis. Rursus secentur bifariam rectæ lineæ a l, l b, b o, o c, c r, r d, d u, u a: *& à centro* k *per ea puncta ductis lineis usque ad sectionem; ductisq; alijs sectionum tangentibus, fiant alia parallelogramma, atque triangula. monstrabimus eodem modo unumquodque triangulum maius, quàm dimidium suæ portionis: hocq; semper fiat, quousque relinquantur quædam sectionis portiones, quæ omnes minores sint eo excessu, quo spatium sectione coni acutianguli contentum excedit circulum* z. *id enim fieri posse ex prima decimi Euclidis docuimus. figura igitur eo pacto descripta maior erit circulo* z: *quod facere uolebamus.*

IN PROPOSITIONEM VI.

A Spatium ergo q ad circulum, cuius diameter a c &c.] *Spatium enim* q *ad circulum, cuius diameter est* a c, *habet eam proportionem, quam* b d *ad* a c, *ex antecedenti. Quam autem habet* b d *ad* a c *eandem rectangulum ex* b d, a c *habet ad quadratum* a c; *ex lemmate uigesimæ secundæ decimi.*

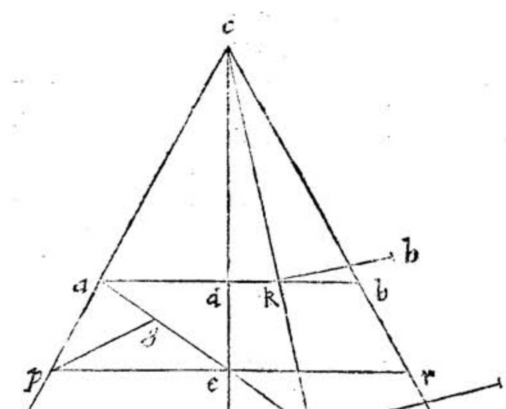
B Constat igitur spatium q ad z circulum habere eam, quam &c.] *Per æquam scilicet rationem ex uigesima secunda quinti.*

IN PROPOSITIONEM VII.

A Ex hoc apparet spatia similibus acutianguli coni sectionibus contenta &c.] *Apparet, inquit ex ijs, quæ dicta sunt, spatia similibus acutianguli coni sectionibus contenta eam inter se proportionem habere, quam quadrata diametrorum, quæ sint eiusdem rationis. Sint enim similium acutianguli coni sectionum spatia, in quibus* a b. *habebit spatium* a *ad spatium* b *eam proportionem, quam habet quadratum maioris diametri sectionis, in qua* a; *quæ sit* c g *ad quadratum maioris diametri sectionis, in qua* b; *hoc est* e h: *& item habebit eam, quam quadratum minoris diametri* g d *ad quadratum* h f. *Quoniam cum sectiones similes sint, erit ut* c g *ad* g d, *sic* e h *ad* h f. *sed ut* c g *ad* g d, *sic rectangulum* c g d; *hoc est* c d *ad quadratum* g d, *ex lemmate uigesimæ secundæ decimi: & ut* e h *ad* h f, *sic rectangulum* e h f; *hoc est* e f *ad quadratum* h f. *Vt igitur rectangulum* c d *ad quadratum* g d, *sic rectangulum* e f *ad quadratum* h f: *& permutando, ut rectangulum* c d *ad rectangulum* e f, *sic quadratum* g d *ad quadratum* h f. *monstratum est autem spatium* a *ad spatium* b *habere eam proportionem, quam rectangulum* c d *ad rectangulum* e f. *ergo spatium* a *ad spatium* b *eam habebtt, quam quadratum* g d *ad quadratum* h f: *& eodem modo ostendetur eam habere proportionem, quam quadratum* c g *habet ad quadratum* e h. *quare patet propositum.*

IN PROPOSITIONEM VIII.

A Quod quidem fieri potest; quoniam proportio maior est ea, quam habet rectangulum a d b ad quadratum d c.] *In quodcunque enim punctum ceciderit* f *infra ipsum* b: *semper maior erit proportio rectanguli* a c f *ad quadratum* e c, *quàm rectanguli* a d b *ad quadratum* d c. *nam per* e *ducta* p e r *linea, æquidistanti ipsi* a d b, *quam proportionem habet rectangulum* a d b *ad quadratum* d c, *eam habet rectangulum* p e r *ad quadratum* e c; *quòd similia sint ea*



triangula, & latera proportionalia habeant. Sed cum rectangulum a e f maius sit rectangulo p e r, ut inferius ostendemus: sequitur ex octaua quinti maiorem esse proportionem rectanguli a e f ad quadratum e c, quàm rectanguli p e r ad idem quadratum e c; hoc est, quàm rectanguli a d b ad quadratum d c. Reliquum est, ut ostendamus, rectangulum a e f maius esse ipso p e r. id autem fiet hoc pacto. Quoniam enim angulus e r p maior est angulo c f a: & angulo c r p æqualis est angulus c p r: fieri potest, ut ab angulo c p r auferamus angulum æqualem ipsi c f a. auferatur; & sit r p g. est igitur ut f e ad e r, sic p e ad e g, ob similitudinem triangulorum e f r, e p g: & propterea rectangulum f e g æquale est rectangulo p e r. sed rectangulum f e a maius est ipso f e g. quare & maius erit rectangulo p e r: quod ostendisse oportuit. 16. primi. 5. primi. 16. sexti.

Et quadratum e c ad rectangulum p e r eam habet, quam quadratum d c ad rectangulum a d b.] *Propter triangulorum eorum similitudinem.* B

Est autem ut rectangulum a e f ad rectangulum p e r, ita rectangulum a l f ad ipsum x l o.] *Proportio nanque rectanguli a e f ad rectangulum p e r, ex uigesima tertia sexti componitur ex proportione, quam habet a e ad p e, & ex ea, quam habet e f ad e r: & eodem modo proportio rectanguli a l f ad rectangulum x l o componitur ex proportione a l ad l x, & l f ad l o. sed proportio a e ad p e est eadem proportioni a l ad l x, ob similitudinem triangulorum a e p, a l x: & proportio item e f ad e r est eadem ei, quam habet l f ad l o: simile est enim triangulum f e r triangulo f l o. cum igitur proportiones eædem sint, ex quibus rectangulorum eorum proportiones componuntur: erit rectangulum a e f ad rectangulum p e r, sicut a l f rectangulum, ad rectangulum x l o.* C

Et ut quadratum dimidiæ maioris diametri ad rectangulum a d b, ita quadratum h k ad rectangulum a k b.] *Monstrauit hoc Apollonius primo conicorum, propositione uigesima prima.* D

Sed rectangulum x l o ad quadratum c l habet eam, quam rectangulum a k b ad quadratum k c.] *Ob triangulorum similitudinem.* E

Sed linea c m est in superficie coni. constat igitur, & h punctum in coni esse superficie.] *Cui hoc non probatur, is legat primam propositionem primi conicorum Apollonij.* F

IN PROPOSITIONEM IX.

Vel ellipsis.] *Hoc est coni acutianguli sectio: fuit enim hæc primum sic appellata, ut superius adnotauimus.* A

Sumatur conus uerticem habens c punctum, in cuius superficie sit circulus, uel acutianguli coni sectio circa diametrum e b.] *Si quidem circulus circa diametrum e b descriptus fuerit: iam inuentus erit conus uerticem habens punctum c, in cuius superficie sit data acutianguli coni sectio. Si uero non circulum, sed ellipsim circa diametrum e b contigerit describi: quoniam ab eius centro recta linea super planum, in quo ipsa est, erecta ad ipsum c pertingit: poterimus ex ijs, quæ proxime monstrata sunt, conum inuenire uerticem habentem c punctum, in cuius superficie acutianguli coni sectio circa e b descripta deprehendatur.* B

Est igitur ut quadratum n ad rectangulum f d g, ita quadratum l m ad rectangulum e l b.] *Vt enim quadratum n ad rectangulum f d g, ita quadratum alterius diametri, siue circuli, siue ellipsis ad quadratum e b: quod antea posuimus. ut autem quadratum alterius diametri ad quadratum e b, ita quadratum semidiametri ad quadratum dimidiæ e b: & ut quadratum semidiametri ad quadratum dimidiæ e b, ita quadratum l m ad rectangulum e l b; quod monstrauit Apollonius in primo conicorum, propositione uigesima prima. ut igitur quadratum n ad rectangulum f n g, ita quadratum l m ad rectangulum e l b.* C 15. quinti. 11. quinti.

Vt autem rectangulum f d g ad rectangulum a d b, ita rectangulum e l b ad ipsum p l r.] *Proportio enim rectanguli f d g ad rectangulum a d b, composita est ex proportione, quam habet f d ad a d, & ex ea, quam habet d g ad d b: & ita proportio rectanguli e l b ad rectangulum p l r composita est ex proportione e l ad p l, & l b ad l r. sed ut f d ad a d, ita e l ad p l, ob similitudinem triangulorum a f d, p e l. ut autem d g ad d b, ita l b ad l r; propterea quòd simile est triangulum g d b triangulo b l r. quare eisdem existentibus pro-* D 23. sexti.

k portionibus

portionibus, quæ rectangulorum proportiones componunt, erit ut rectangulum f d g ad ipsum a d b, ita e l b ad p l r.

E Sed ut quadratum n ad rectangulum a d b, ita quadratum h k ad rectangulum a k b.] *Constat id ex eadem uigesima prima primi conicorum Apollonij.*

F Habet autem & rectangulum p l r ad quadratum c l eandem proportionem, quam rectangulum a k b ad quadratum k c.] *Est enim ex quarta sexti ob similitudinem triangulorum, ut p l ad c l, ita a k ad k c: & ut l r ad c l, ita k b ad k c.*

IN PROPOSITIONEM X.

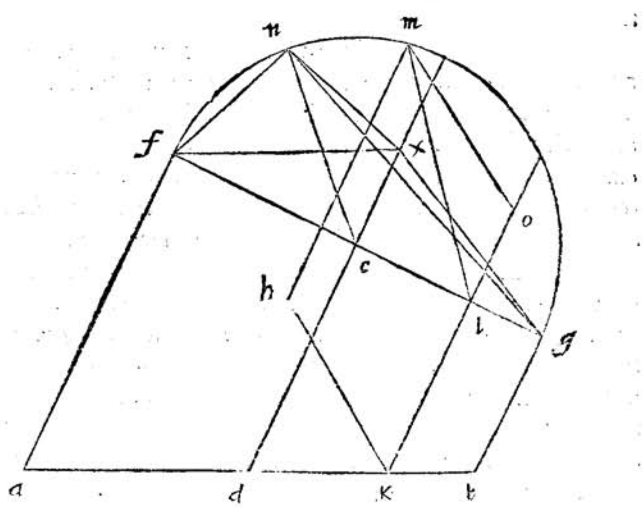
A Eandem ergo proportionem habet quadratum lineæ perpendicularis h k ad rectangulum a k b, & quadratum f c ad rectangulum a d b: quoniam æqualis est f g alteri diametro.] *Sequitur hoc ex uigesima prima primi conicorum Apollonij: est enim f c æqualis semidiametro datæ sectionis. nam productis lineis f g, a b quousque conueniant: fiet triangulum, cuius basis f a; & lineæ basi æquidistantes c d, g b: eritq; ut a b ad f g, ita a d ad f c. & cum f g sit æqualis alteri diametro, ut positum est: erit & f c æqualis semidiametro.*

B Habet autem & rectangulum f l g ad rectangulum a k b proportionem eam, quam f c quadratum ad quadratum a d ellipsis.] *Proportiones enim laterum, ex quibus rectangulorum ipsorum proportiones componuntur eædem sunt: nanque est ut f c ad a d, ita f l ad a k; & l g ad k b.*

C Quare rectangulum f l g æquale est quadrato h k.] *Nam ostensum est, ut quadratum f c ad rectangulum a d b; hoc est ad quadratum a d, ita quadratum h k ad rectangulum a k b: & ita rectangulum f l g ad rectangulum a k b. quare ex nona quinti sequitur rectangulum f l g æquale esse quadrato h k.*

D Est igitur linea c n æqualis ipsi c f.] *Positum iam est, quadratum c f excedere quadra-*
pen.primi *tum dimidij alterius diametri, quadrato c x. sed cum angulus ad x rectus sit: erit quadratum c n æquale quadrato x n, quod est dimidium alterius diametri, & quadrato c x: & propterea linea c n æqualis erit lineæ c f.*

E Ergo ut quadratum m o ad quadratum m l, ita est quadratum x n ad quadratum n c.] *Sunt enim triangula m l o, n c x æquiangula, ut monstrabitur: idcircoq; latera habent proportionalia. nam ductis lineis g x, f x, g n, f n, quoniam trianguli f x c duo latera f c, c x æqualia sunt duobus lateribus g c, c x trianguli g c x; & angulus ad c rectus in*
4. primi. *utroque: erit linea f x æqualis lineæ g x: & rursus trianguli f n x duo latera f x, x n æqualia sunt duobus lateribus g x, x n ipsius g x n trianguli; & anguli ad x recti. lineæ igitur g n, f n eadem ratione sunt æquales. quare & triangulum f n c æquale est, & simile triangulo g n c: & angulus f c n æqualis angulo g c n. linea ergo c n perpendicularis est ad ipsam f g. sed & l*



28. primi. *m ducta est perpendicularis ad eandem. æquidistantes igitur sunt l m, c n. At uero & æquidistan-*
10.undec. *tes sunt ipsæ k o, d f. quare angulus o l m æqualis est angulo x c n: & angulus ad o rectus æqualis angulo recto ad x. reliquus igitur angulus, reliquo angulo æqualis, & triangulum m l o triangulo n c x æquiangulum, quod monstrare uolebamus.*

Vt

Vt autem quadratum m l ad rectangulum a k b, ita c n quadratum ad ipsum a d.] *Erit igitur ut quadratum m l ad rectangulum f l g, ita quadratum c n ad quadratum c f. ut autem rectangulum f l g ad rectangulum a k b, ita quadratum c f ad quadratum a d. nam rursus productis lineis f g, a b usque adeo, ut conueniant; fiet triangulum; cuius basis erit f a, & basi æquidistantes lineæ c d, l k, g b: & ob id, ut f l ad a k, ita l g ad k b, & f c ad a d. Quare ex æquali sicut quadratum m l ad rectangulum a k b, sic quadratum c n ad quadratum a d.* F

Perspicuum est igitur perpendiculares m o, h k æquales esse.] *Concluditur ex nona quinti, quadratum m o esse æquale quadrato h k. quare & latus lateri æquale erit.* G

IN PROPOSITIONEM XI.

Omnis coni ad conum proportionem compositam esse ex proportione basium, & proportione altitudinum &c.] *Qui sint, qui hoc monstrarint, non adhuc comperi, nisi fortasse innuat Euclidem; ex ijs enim, quæ ipse tradit in duodecimo elementorum libro, illud facile elicitur. Et quanquam uerissimum sit in omnibus non solum conis, sed & cylindris ipsis: potissimum tamen de ijs dicitur, qui super inæquales bases, & inæquali altitudine constituuntur. nam qui bases quidem habent inæquales, altitudinem uero eandem, proportionem habent, quam eorum bases, ut monstrauit Euclides libro duodecimo propositione undecima. at qui bases æquales, altitudinem uero inæqualem nacti sunt, proportionem habent eandem, quam eorum altitudines: id, quod ipse idem monstrauit propositione decima quarta eiusdem libri. Itaque nos non hæc solum, sed & alia quàm plurima demonstrabimus, ab his non abhorrentia. postquam nonnulla, quæ ad eorum demonstrationem faciunt, præmiserimus.* A

PROPOSITIO I.

Omnem præterea cylindri portionem triplam esse portionis coni, quæ basim habeat ipsi eandem, & æqualem altitudinem &c.] *Cum cylindri, & coni portiones eandem basim, & æqualem altitudinem habuerint: erit cylindri portio portionis coni tripla; quod monstrabimus (ut ipse inquit) eodem prorsus modo, quo in decima propositione duodecimi Euclidis monstratur, omnem conum cylindri tertiam partem esse, qui eandem basim, & æqualem altitudinem habeat. figuram uero describemus in ellipsi, hoc est in ipsa basi, quemadmodum supra docuimus in sextam huius scribentes.* B

PROPOSITIO II.

Coni & cylindri portiones, quæ eandem habent altitudinem, adinuicem sunt, sicuti bases.

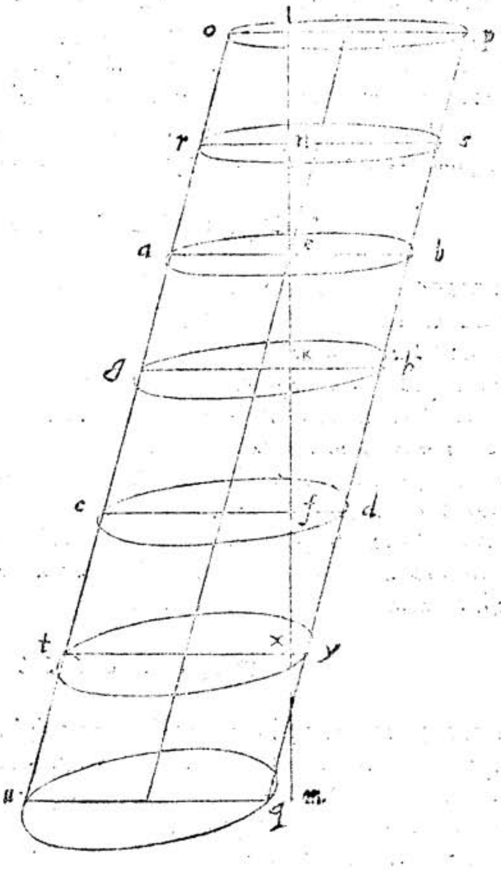
Et hoc facile demonstrabitur, quo modo in undecima duodecimi eiusdem Euclidis demonstratum est, sub eadem altitudine existentes conos, ac cylindros adinuicem esse, sicuti bases.

PROPOSITIO III.

Si cylindri portio plano secetur æquidistanti eis, quæ ex opposito planis: erit portio ad portionem, sicuti altitudo ad altitudinem.

Cylindri portio a d plano secetur g h, æquidistanti eis, quæ ex opposito planis, uidelicet ipsis a b, c d: à puncto autem e, termino axis portionis demittatur linea e f, perpendicularis super planum, in quo est c d: & occurrat plano g h in puncto k. Dico sic esse portionem b g ad portionem g d, ut altitudo e k ad altitudinem k f. producatur enim linea e f utraque ex parte in l m puncta: & ponantur ipsi e k lineæ æquales quotcunque libuerit e n, n l: ipsi autem k f ponantur æquales quotcunque f x, x m: & ducantur per puncta l m plana æquidistantia ipsis a b, c d: & ad ea usque producatur cylindri portio o q. præterea per puncta n x ducantur plana æquidistantia ijsdem, quæ portionem ipsam secent. manifestum est ex ijs, quæ superius monstrata sunt, his planis portionem cylindri secantibus, sectiones fieri coni acutianguli sectiones, seu ellipses, æquales, & similes. Quare spatia his sectionibus contenta æqualia erunt. Itaque intelligantur portio-

nes cylindri p r, r b, d t, t q, quarum bases sint spatia coni acutianguli sectionibus r s, a b, t y, q u contenta. & quoniam ipsæ l n, n e, e k, altitudines sunt æquales: portiones p r, r b, b g ad inuicem sunt, sicuti bases, ex antecedenti. bases autem sunt æquales. & ipsæ igitur portiones æquales erunt. Et eodem modo, quoniam ipsæ m x, x f, f k, sunt æquales: & bases æquales: portiones q t, t d, d g inter se sunt æquales. Demonstrabitur tandem, quemadmodum in tertia decima duodecimi Euclidis portionem b g ad portionem g d esse, sicut altitudo e k ad k f altitudinem: quod monstrare uolebamus.



Monstrabitur quoque simili ratione idem omnino contingere in cylindro scaleno, ut si plano secetur æquidistanti eis, quæ ex opposito planis, sit cylindrus ad cylindrum, sicut altitudo ad altitudinem.

Eorum etenim cylindrorum bases circuli sunt, ut monstrauit Serenus in cylindricis, atque æquales circuli; quòd æquales habeant diametros. faciet autem ad eius demonstrationem undecima duodecimi Euclidis, quam etiam ad conos, & cylindros scalenos referri nihil est, quod prohibeat, quemadmodum, & decimam eiusdem.

Manifestum etiam est, si cylindrus quilibet, seu cylindri portio plano secetur æquidistanti eis, quæ ex opposito planis, esse cylindrum ad cylindrum, seu portionem ad portionem, sicut axis unius ad axem alterius.

De recto enim cylindro patet ex demonstratis ab Euclide, de scaleno autem, & cylindri portione patere potest ex iam dictis, nam ut altitudo ad altitudinem, ita axis ad axem ex secunda sexti elementorum, uel ex decima septima undecimi.

PROPOSITIO IIII.

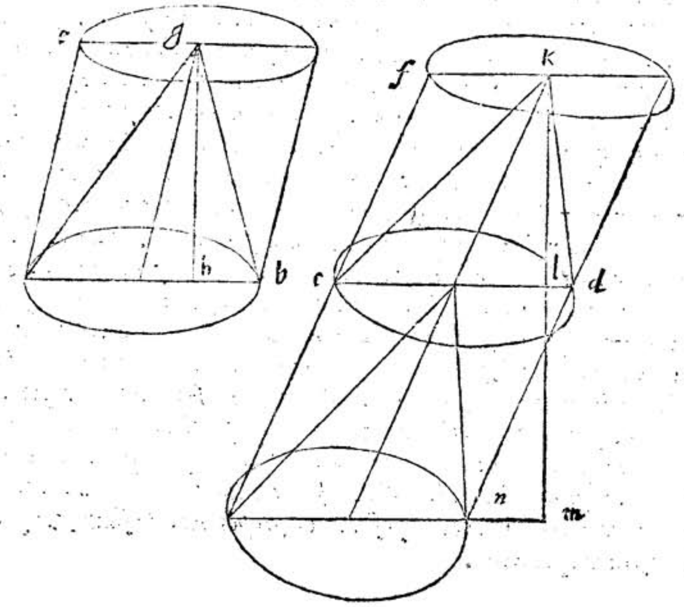
Quæ inæqualibus basibus existunt cylindri, & coni portiones, adinuicem sunt, sicuti altitudines.

Sint inæqualibus basibus a b, c d cylindri portiones e b, f d: & à punctis g k, quæ sunt termini axium demittantur lineæ perpendiculares g h, k l ad plana, in quibus sunt bases a b, c d. Dico portionem cylindri e b ad portionem f d esse, sicut altitudo g h ad altitudinem k l. producatur enim k l usque ad m; ita ut sit l m æqualis ipsi g h: & per m ducatur planum m n, æquidistans c d plano: & usque eò intelligatur producta portio f d, quæ sit f n. Quoniam igitur e b, c n cylindri portiones eandem habent altitudinem: adinuicem sunt sicuti bases. bases autem sunt æquales. ergo & cylindri portiones e b, c n inter se sunt æquales. Præterea cum cylindri portio f n plano quodam secetur c d æquidistanti eis, quæ ex opposito planis: cylindri portio c n ad portionem f d est, sicut altitudo m l ad altitudinem l k, æqualis autem monstrata est portio c n ipsi portioni e b. portio igitur e b ad portionem f d est, sicut m l; hoc est g h altitudo ad altitudinem k l. sed

sicut

sicut cylindri portio ad cylindri portionem, sic portio coni ad coni portionem; nam cylindri portio tripla est portionis coni, ut dictum est. quare & coni portio a b g ad coni portionem c d k est, sicut g h altitudo ad altitudinem k l: quod fuerat monstrãdum.

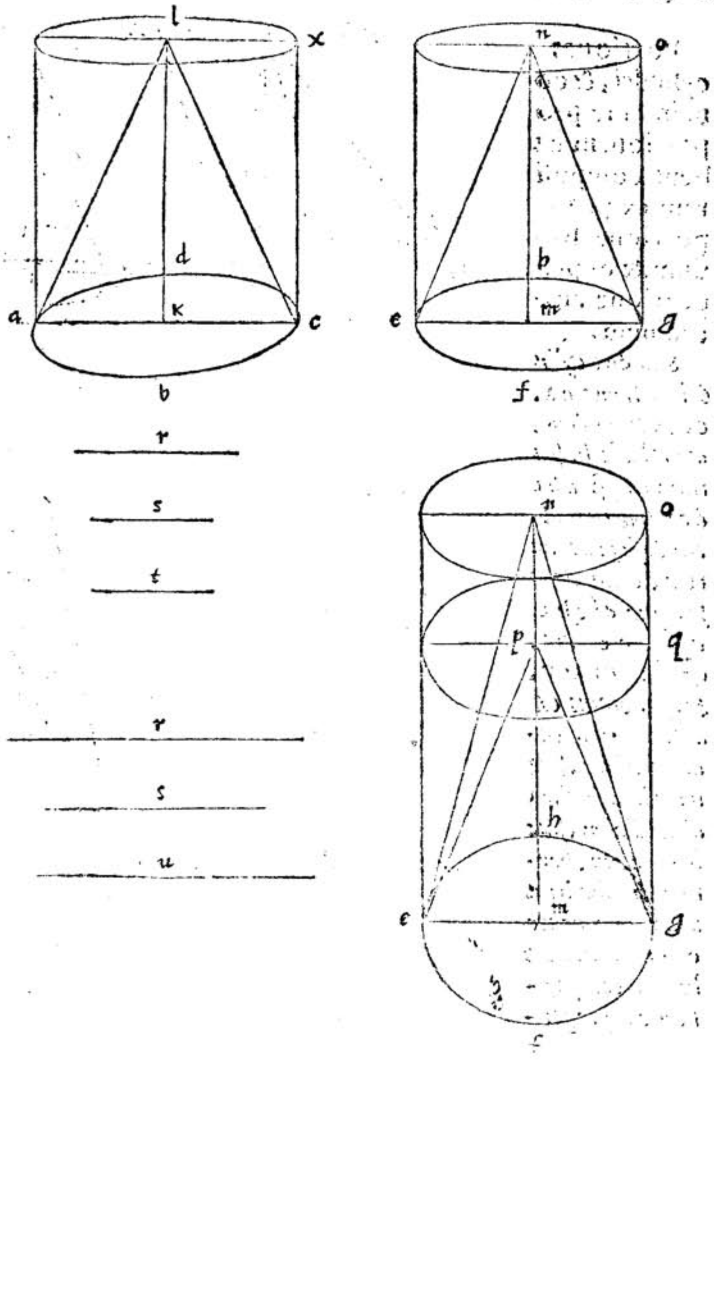
Hoc idem facile cõcludetur de cylindris, ac conis scalenis ex decima, & undecima duodecim Euclidis una cum antecedenti.



PROPOSITIO V.

Cylindri omnes, & coni inter se proportionem habẽt compositam ex proportione basium, & ex proportione altitudinum.

Sint duo cylindri siue recti, siue scaleni a x, e o; a x quidem, cuius basis sit circulus a b c d, altitudo k l; e o autem, cuius basis circulus e f g h; & altitudo m n. Dico cylindrum a x ad cylindrum e o proportionem habere compositam ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis k l ad altitudinem m n. Vel igitur hi cylindri habebunt æqualem altitudinẽ, uel non æqualem. habeant primo æqualem: & sit ut basis a b c d ad basim e f g h, ita linea r ad lineam s. ut autem k l ad m n, ita s ad lineam t. Iam ex undecima duodecimi cylindrus a x ad cylindrum e o habet eam proportionẽ, quam basis a b c d ad basim e f g h; hoc est, quam linea r ad lineam s. & cũ sit æqualis k l ipsi m n: erit & s æqualis ipsi t.



quare cylindrus a x ad cylindrum e o habet eam proportionem, quam r ad t. proportio autem r ad t composita est ex proportione r ad s, quæ est proportio basis a b c d ad basim e f g h: & ex proportione s ad t, quæ est altitudinum l k, n m. Cylindrus igitur a x ad cylindrum e o habet proportionem compositam ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis k l ad altitudinem m n. & quoniam quilibet cylindrus triplus est sui coni: habebit & a l c conus ad conum e n g proportionem compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

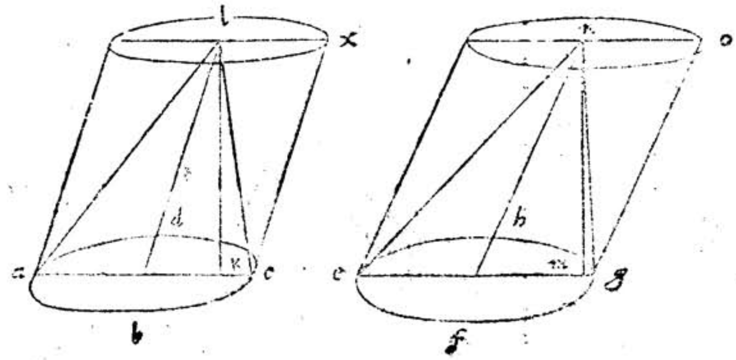
Quòd si cylindrorum a x, e o non sit æqualis altitudo; habeat cylindrus e o maiorem altitudinem, ut m n maior sit, quàm k l: reseceturq; ab ipsa m n linea m p, æqualis ipsi k l: & per p ducatur planum scindens cylindrum, æquidistansq; eis, quæ ex opposito planis: & sit rursus, ut basis a b c d ad basim e f g h, ita r ad s: ut autem m p ad m n, ita s ad u. erit ex undecima duodecimi cylindrus a x ad cylindrum e q, cuius basis est circulus e f g h, altitudo m p, ut basis a b c d ad basim e f g h; hoc est, ut linea r ad lineam s: & ex decima quarta duodecimi, & ijs, quæ nos monstrauimus cylindrus e q ad cylindrum e o, ut m p ad m n; hoc est ut s ad u. quare cylindrus a x ad cylindrum e o erit, ut linea r ad lineam u. sed r ad u proportio composita est ex proportione r ad s, quæ est proportio basium, & ex proportione s ad u, quæ est altitudinum. cylindrus igitur a x ad cylindrum e o proportionem habet compositam ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis k l ad altitudinem m n. Et eodem modo conus a l c ad conum e n g proportionem habet compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum: quod demonstrare oportebat.

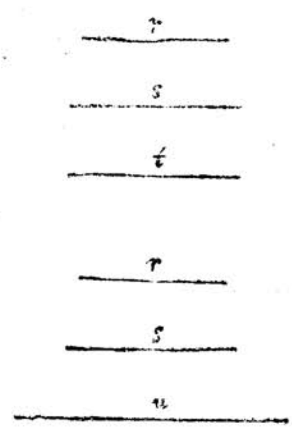
22.quinti.

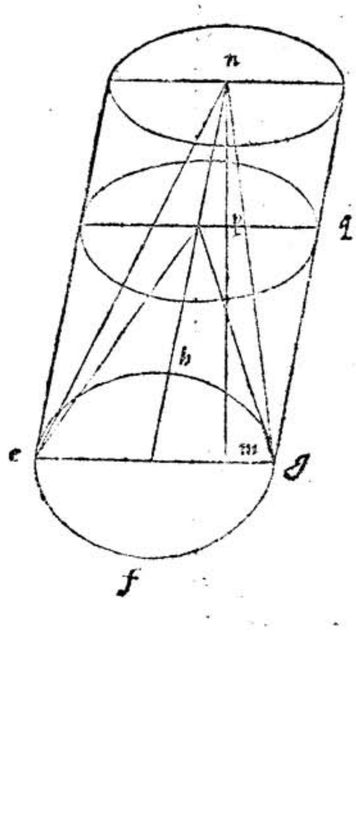
PROP. VI.

Portiones cylindri, & coni inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & ex proportione altitudinum.

Sint duæ cylindri portiones a x, e o: a x quidem, cuius basis sit spatium ellipsi a b c d contentum, altitudo k l: e o autem, cuius basis spatium e f g h ellipsi contentum, & altitudo m n. Mõstrabimus ex antecedẽtibus eadem ratione, siue habeãt æqualem altitudinem, siue inæqualem; portionem cylindri a x ad portionem e o proportionem habere compositam ex propor-





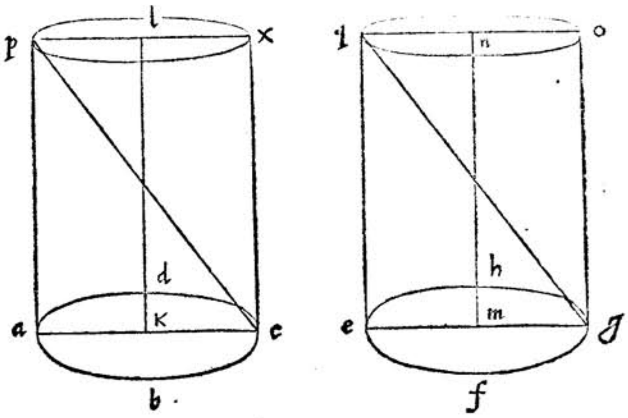


tione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis k l ad altitudinem m n. & cum cylindri portio tripla sit portionis coni: habebit & coni portio a l c ad portionem coni c n g proportionem compositam ex proportione basium earum a b c d, e f g h, & ex proportione altitudinum k l, m n: quod fuerat nobis propositum.

PROPOSITIO VII.

Cylindrus omnis, plano per diametrum parallelogrammi, quod ex eius sectione per axem fit, ducto bifariam secatur.

Sit cylindrus a x, cuius basis circulus a b c d; axis k l: & secetur plano, ut dictum est: secetur autem & altero plano per axem ducto, & erecto super planum secans, quod faciat sectionem parallelogrammum a c x p: & plani per diametrum parallelogrammi secantis, sit recta linea c p. Dico cylindrum plano per c p ducto bifariam secari. Sit alter cylindrus huic similis, & aequalis e o, cuius basis circulus e f g h; axis m n: & secetur itidem duobus planis, ut in altero factum est: sitq; sectio per axem parallelogrammum e g o q: & g q recta linea plani per diametrum secantis. Erit iam parallelogrammum e g o q aequale, & simile parallelogrammo a c x p: et diameter g q diametro c p aequalis. quare & ellipsis facta plano per diametrum g q, aequalis, &



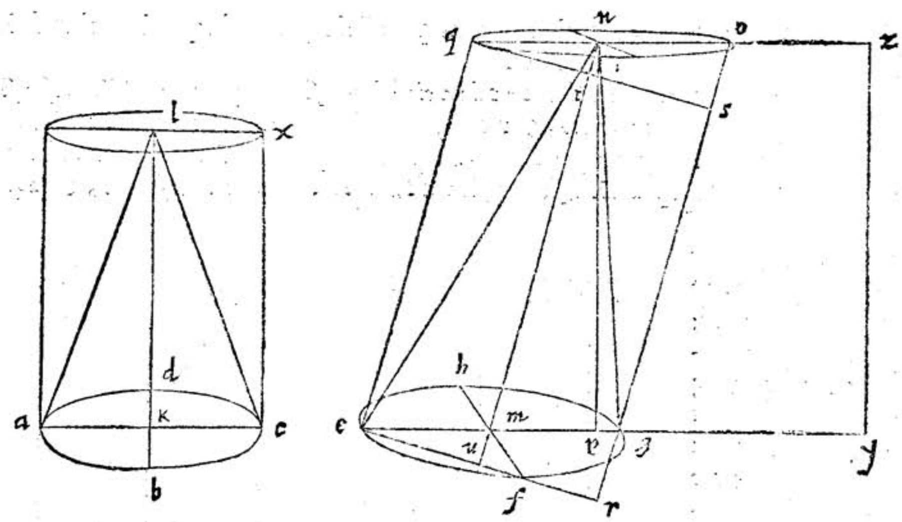
similis erit ellipsis factae plano per diametrum c p ducto; nam earum maior diameter est eadem diametro parallelogrammi; minor uero aequalis diametro basis, quod in principio huius monstratú est. Itaque congruet parallelogrammum parallelogrammo, posita m n super k l; & g q super c p. congruet autem & planum secundum g q plano secundum c p constituto; quoniam & ellipsis ellipsi. congruet igitur & pars secta à cylindro e o, in qua est n, parti sectae ab alio cylindro, in qua l: atque altera alteri: & partium superficies superficiebus similiter. Rursus posita n m super k l, ut sit n super k, & m super l; congruent & parallelogramma, & cadet q super c; & g super p: & planum secundum q g plano secundum c p congruet: & pars secta à cylindro, in qua m, parti sectae ab alio cylindro, in qua l: & item pars in qua n, parti in qua k. Quoniam igitur pars eadem utrique congruit parti: manifestum est partes aequales inter se esse. quare cylindrus plano per c p ducto bifariam secatur. quod ostendere oportebat.

PROPOSITIO VIII.

Cylindri omnes, & cylindrorum portiones, & item coni, & conorum portiones inter se, proportionem habent compositam ex proportione basium, & ex proportione altitudinum.

Sit cylindrus siue rectus, siue scalenus a x, cuius basis sit circulus a b c d; altitudo l k: & cylindri portio e o, basim habens spatium ellipsi e f g h, contentum; axem uero n m; & altitudinem n p. Dico cylindrum a x ad cylindri portionem e o proportionem habere compositam ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis l k ad altitudinem n p. secetur cylindri portio plano per axem ducto: & sit sectio e g o q, quam esse parallelogrammum facile monstrari potest; quomodo à sereno monstratum est, cuiuslibet cylindri, plano per axem ducto, sectionem esse parallelogrammum: & à puncto e ducatur linea e r, ad rectos angulos ipsi e q: & similiter à q alia ducatur ad rectos angulos eidem, quae sit q s secans axem in y. Intelligaturq; cylindri portio, producta ex parte e f g h usque ad lineam e r, quam n m secet in u: & per e r ducatur

tur planum secans erectum super planum per axem: deinde per lineam q s ducatur aliud planum secans, quod plano per lineam e r ducto æquidistet. Erit r q cylindrus, basim habens circulum circa diametrum e r, & axem t u, æqualis cylindri portioni e o: nam pars e r g, addita cylindri portioni, æqualis est parti q s o, demptæ ab eadem. est enim e r g dimidia cylindri, cuius basis est cir-



culus circa diametrum e r, & altitudo g r, ut proxime est ostensum: & q s o item dimidia cylindri, basim habentis circulum circa diametrum q s, & altitudinem o s: qui cylindri cum æquales habeant & bases, & altitudines, æquales inter se sunt. quare & eorum dimidiæ partes, æquales. Eorum autem altitudines, lineas scilicet g r, o s æquales esse patet; nanque est r s æqualis ipsi o g, cum utraque sit æqualis eidem q e. dempta ergo communi linea s g, relinquentur ipsæ q r, o s æquales. producatur quoque linea e g usque ad y: ita ut sit g y media proportionalis inter g e, e r.

17. sexti. Itaque cum tres lineæ e g, g y, e r proportionales sint; rectangulum g e r æquale est quadrato g y: & est e g diameter ellipsis e f g h: & e r æqualis secundæ diametro eiusdem. rectangulum igitur ex diametris ellipsis e f g h est æquale quadrato g y: & propterea spatium ipsa ellipsi contentum æ-
29. primi. quale est circulo circa diametrum g y; ex septima huius. Et quoniam angulus e g r æqualis est angulo n m p: & anguli e r g, n p m utrique recti: erit & reliquus angulus reliquo angulo æqualis: & triangulum e r g triangulo n p m simile. quare e r ad e g est, ut n p ad n m; hoc est ad t u; ei
4. sexti. æqualem. Et rursus cum tres lineæ proportionales sint e r, g y, e g: erit, ut e r ad e g, ita quadra
corol. 20. tum e r ad quadratum g y; hoc est circulus circa diametrum e r ad circulum circa diametrum g y.
sexti. Intelligatur cylindrus g z, cuius basis sit circulus circa diametrum g y, & altitudo n p. quorum
2. duodec. autem cylindrorum bases ex altera parte respondent altitudinibus, ii inter se sunt æquales; ex decima quinta duodecimi. æqualis est igitur cylindrus g z cylindro r q. sed cylindrus r q est æqualis portioni cylindri e o, ut monstrauimus. quare & g z cylindrus eidem portioni e o est æqualis. & proportio cylindri a x ad cylindrum g z est eadem proportioni eiusdem ad cylindri portionem e o. sed proportio cylindri a x ad cylindrum g z, composita est ex proportione circuli a b c d ad circulum circa diametrum g y, & ex proportione l k ad n p. ergo & proportio eiusdem cylindri a x ad cy-
7. quinti. lindri portionem e o composita est ex eisdem proportionibus. proportio autem circuli a b c d ad circulum circa diametrum g y est eadem proportioni eiusdem circuli a b c d ad spatiũ ellipsi e f g h contentum; quod quidem ipsi circulo circa g y diametrum est æquale. proportio igitur cylindri a x ad cylindri portionem e o composita est ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis l k ad altitudinem n p. At uero triplus est cylindrus a x, coni a l c: & portio cylindri e o item tripla portionis coni e n g. ergo & coni a l c ad coni portionem e n g proportio composita est ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis l k ad altitudinem n p: quod proposuimus demonstrandum.

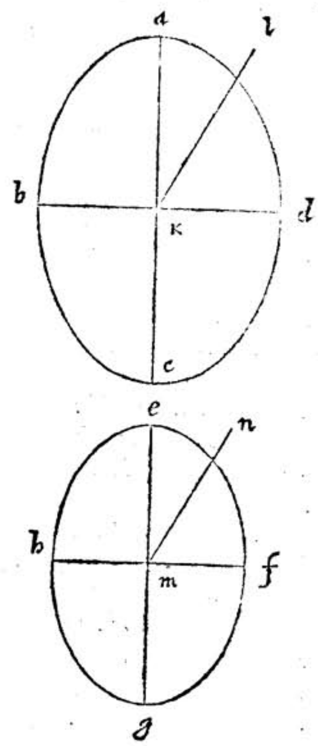
Ex

Ex his colligitur, cylindros omnes, & eorum portiones, & item conos, & eorum portiones, ſub eadem quidem altitudine exiſtentes, eam inter ſe proportionem habere, quam ipſæ baſes; ſuper æqualibus autem baſibus exiſtentes, eam habere, quam altitudines.

PROPOSITIO IX.

Similes coni, & cylindri porriones in tripla ſunt proportione diametrorum conſimilium, quæ in baſibus.

Coni, & cylindri portiones ſimiles, quæ ſint, dictum eſt ſuperius. Sint autem hæ, quarum baſes quidem a b c d, e f g h ſpatia ellipſibus contenta: diametri uero baſium maiores a c, e g; minores b d, f h; & axes k l m n. Dico coni portionem, cuius baſis a b c d, uertex l ad coni portionem, cuius baſi e f g h, & uertex n, triplam habere proportionem eius, quam habet diameter a c ad diametrum e g; uel quam b d ad ipſam f h. nam niſi ita ſit: habebit coni portio a b c d l eam proportionem ad ſolidum quoddam minus ipſa coni portione e f g h n, aut ad maius. ſed ſimili ratione qua utitur Euclides in duodecimo, ubi monſtrat ſimiles conos, & cylindros in tripla proportione eſſe diametrorum, quæ in baſibus, & hoc loco monſtrabimns coni portionē a b c d l neque ad ſolidum minus ipſa coni portione e f g h n, neque ad maius, eam proportionem habere. Quare ad ipſam e f g h n triplam proportionem habebit eius, quæ eſt a c ad e g, aut b d ad f h. ut autem coni portio ad coni portionem, ita & cylindri portio ad cylindri portionem. Cylindri igitur portio, cuius baſis a b c d, & uertex l ad cylindri portionem, cuius baſis e f g h, uertex n, triplam habet proportionem diametri a c ad diametrum e g, uel b d ad f h: quod fuerat propoſitum.



PROPOSITIO X.

Aequalium coni, & cylindri portionum baſes ex contraria parte reſpondent altitudinibus; & quarum coni, & cylindri portionum baſes ex contraria parte reſpondent altitudinibus, hæ inter ſe ſunt æquales.

Hoc monſtrabimus eadem prorſus ratione, qua monſtratur in decima quinta duodecimi Euclidis, Aequalium conorum, & cylindrorum baſes ex contraria parte reſpondere altitudinibus: & quorum item baſes ex contraria parte reſpondent altitudinibus, conos, & cylindros æquales eſſe. Monſtratum ſiquidem eſt, conorum, & cylindrorum portiones ſub eadem quidem altitudine exiſtentes, eam inter ſe proportionem habere, quam ipſæ baſes, In æqualibus autem baſibus exiſtentes, eam habere, quam altitudines. ex quibus propoſitum facile concludetur.

De conis item, ac cylindris ſcalenis uerum id eſſe monſtrabimus non alia ratione, quàm in eadem decima quinta duodecimi de rectis monſtratum eſt.

Nanque & hi cum ſub eadem ſint altitudine proportionem habent inter ſe, quam eorum baſes: & cum in æqualibus baſibus ſtatuantur eam habent, quam altitudines.

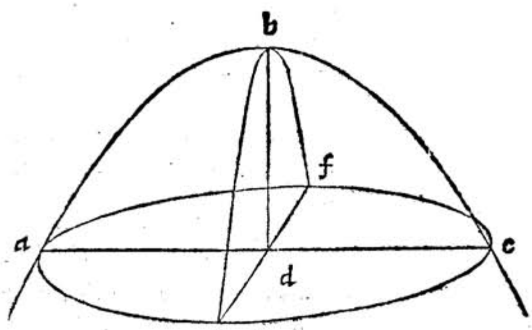
IN PROPOSITIONEM XII.

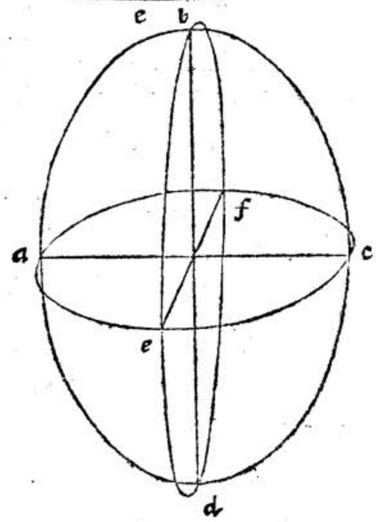
Horum autem omnium manifeſtæ ſunt demonſtrationes.] *Demonſtrationes eorum, cum non adeo manifeſtæ ſint his temporibus, nos omnes afferre tentabimus, immutato tamen ordine, prout methodus ipſa poſtulare uidetur.* A

PROPOSITIO I.

Si conoides, aut sphæroides quodlibet plano secetur per axem ducto: sectio erit eadem illi, quæ figuram describit: diameter autem eius erit communis sectio planorum; eius scilicet, quod secat figuram; & eius, quod per axem ducitur erectum super planum secans.

Secetur conoides, aut sphæroides quodlibet plano, ut dictum est: secetur autem & altero plano per axem, erecto super planum secans: & sit figuræ sectio a b c: sit autem sectio e b f, quæ figuram ipsam describit: sectionis eius diameter, & axis figuræ sit b d. Dico sectionem a b c esse eandem sectioni e b f: atque eius diametrum esse lineam b d; communem uidelicet planorum sectionem. Intelligatur manente linea b d circumferri sectionem e b f. itaque cum f applicauerit se ad c: congruet tota superficies a b c cum superficie e b f: & fiet ex ambabus superficies una. ergo & e ad ipsum a se applicabit. quoniam enim e b f sectio est, quæ figuram describit: quocunque ea peruenerit, congruet ipsius superficies cum superficie plani secantis figuram per axem, & per e f puncta transeuntis; ita ut linea e b f sit communis sectio plani eius, & superficiei figuræ. quare cum congruat superficies a b c cum superficie e b f: & linea a b c cum linea e b f congruet; & erit sectio a b c eadem sectioni e b f, cuius diameter erit linea b d: quod monstrare oportebat.

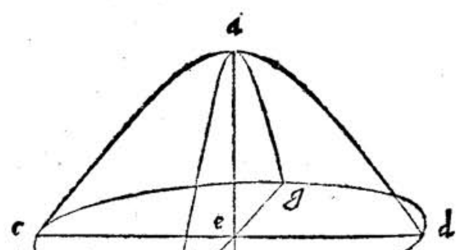




PROPOSITIO II.

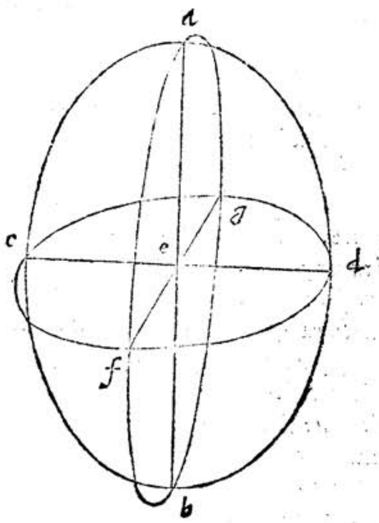
Si conoides, aut sphæroides quodlibet plano secetur super axem erecto: sectio circulus erit centrum habens in axe.

Sit conoides, aut sphæroides quodlibet, cuius axis a b: secetur autem plano, ut dictum est; quod faciat in superficie sectionem, lineam c d. Dico c d circulum esse, centrum habentem in linea a b. Sit enim e punctum, in quo linea a b occurrit secanti plano: & per axem, & c d puncta ducatur planum secans figuram, & faciens sectionem c a d. erit sectio eadem illi, quæ figuram describit, ex antecedenti; & eius diameter linea a b. & quoniam puncta c e d, sunt in plano secanti super axem erecto: sunt autem & in plano



secanti

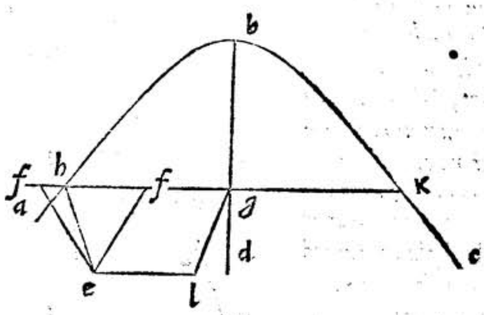
secanti per axem: recta linea erit c e d. sumatur praeterea aliud quod uis punctum f in sectione c d: & per f & axem rursus ducatur aliud planum secans, faciensq; sectionem f a g. manifestum est f a g quoque esse eandem illi, quae figuram describit; habereq; diametrum lineam a b: & similiter lineam f e g rectam esse. Cum ergo sectiones c a d, f a g, uni, & eidem eaedem sint: & inter se eaedem erunt; quarum eadem diameter a b: & erit c e aequalis ipsi f e. sed est e d aequalis ipsi c e: & e g ipsi f e. quare omnes inter sese sunt aequales c e, f e, e d, e g: & sunt in eodem plano. circulus igitur est linea c d, centrum habens in linea a b: quod fuerat demonstrandum. 3. undec.

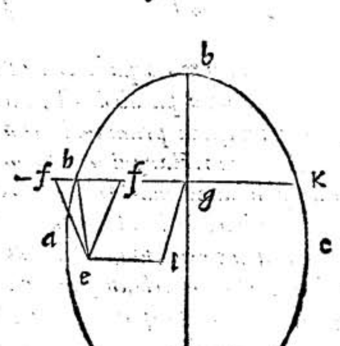


PROPOSITIO III.

Si conoides, aut sphaeroides quodlibet secetur plano per axem: lineae ductae à punctis, quae in superficie figurae sunt, non tamen in sectione ipsa, perpendiculares ad planum secans, intra figurae sectionem cadent.

Sit conoides, aut sphaeroides quodlibet: & secetur plano per axem; cuius sectio sit a b c: axis figurae, & diameter sectionis sit b d. sumatur autem in superficie eius quod uis punctum e, praeterquam in ipsa sectione a b c: & ab eo ducatur linea e f perpendicularis ad planum secans. Dico e f intra sectionem cadere; alioquin, aut cadet extra, aut in sectionem ipsam. cadat primum extra, si fieri possit: & per f ducatur aliud planum secans figuram, & super axem erectum, faciet id sectionem circulum, centrum habentem in axi, ubi punctum g. communis autem sectio dictorum planorum sit recta linea f h g k: & à g attollatur g l perpendicularis ad idem planum secans per axem: atque per e ducatur e l aequidistans ipsi f k, erit & l g aequidistans ipsi e f: & idcirco e l aequalis ipsi f g. sed h g cum sit semidiameter circuli: maior est, quàm e l; quòd dupla ipsius h g maior, quàm dupla e l. quare h g maior est, quàm f g; pars, quàm totum: quod fieri non potest. non igitur cadet e f extra sectionem. Similiter quoque demonstrabimus, neque in ipsam sectionem cadere. nam si eadem omnia fiant, quae superius: sequitur e l aequalem ipsi ipsi h g: quod item fieri non potest: est enim h g circuli semidiameter, & maior, quàm e l, ut dictum est. cadet igitur intra sectionem: quod fuerat propositum.

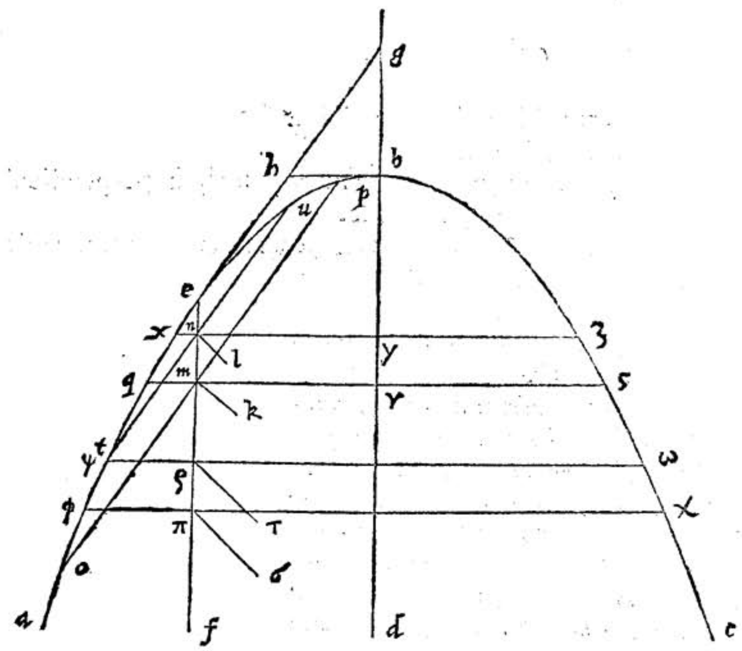




PROPOSITIO IIII.

Si conoides parabolicum plano secetur axi aequidistanti: sectio erit parabole, eadem illi, quae figuram describit: diameter autem eius erit communis sectio planorum; eius, quod secat figuram; & eius, quod per axem ducitur erectum super planum secans.

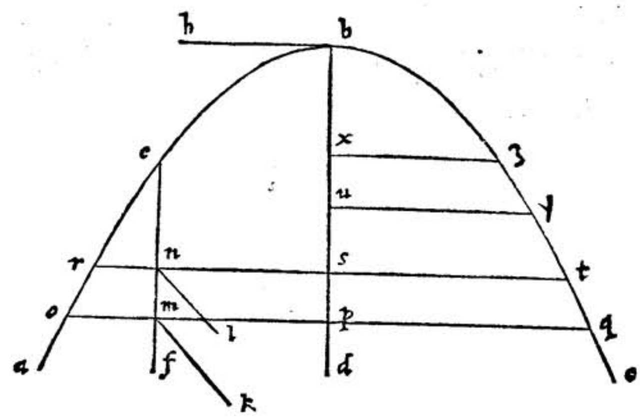
Secetur conoides parabolicum plano, ut dictum est: secetur autem & altero plano per axem, erecto super planum secans: & sit conoides sectio a b c; quæ erit parabole figuram describens, ex ijs, quæ supra monstrauimus: & eius diameter, & axis conoidis linea b d: plani uero figuram secantis sit recta linea e f. ostendendum est, sectionem conoidis, quæ fit plano circa e f, esse parabolen, eandem ipsi a b c: & eius diametrum esse lineam e f. Ducatur enim linea e g, tangens sectionem a b c in puncto e: & alia ducatur b h, tangens in puncto b, & secans lineam e g in h. intelligantur autem duo quæuis puncta k l in sectione circa e f: & ab ipsis demittantur ad lineam e f perpendiculares k m, l n. erunt hæ & perpendiculares ad planum, in quo est parabole a b c: quoniam & planum secans erectum est super idem planum. Deinde per m ducantur duæ lineæ; una quidem æquidistans ipsi e g, quæ sit o m p; altera uero q m r s, æquidistans ipsi h b: & similiter per n duæ aliæ lineæ ducantur eisdem æquidistantes, uidelicet t n u ipsi e g æquidistans, & x n y ʒ ipsi h b. manifestum est ex quadragesima sexta primi conicorum Apollonij, lineas o p, t u bifariam secari à linea e f in punctis m n: & iccirco paraboles o e p diametrum esse ipsam e f, ex corollario quinquagesimæ primæ primi eiusdem. præterea per q s, k m rectas lineas ducatur planum. erit hoc erectum super lineam b d, quæ est axis conoidis: et faciet sectionem circulum, cuius centrum est r. & eodem modo per x ʒ, l n rectas lineas ducatur aliud planum, quod item faciet sectionem circulum, & eius cētrum erit y:



& ob id rectangulum q m s æquale erit quadrato k m: & rectangulum x n ʒ æquale quadrato l n. Quoniam igitur o e p parabole est, cuius diameter e m: ducunturq́; ordinatim ad diametrum o m, t n: erit ex uigesima primi conicorum linea m e ad lineam e n, ut quadratum lineæ o m ad quadratum lineæ t n: rectangulum autem o m p, hoc est quadratum o m ad rectangulum q m s, ex ea, quam præmisit ad quartam huius, & decima septima tertij conicorum, erit, ut quadratum e h ad quadratum h b: & similiter quadratum t n ad rectangulum x n ʒ. quare quadratum o m ad rectangulum q m s erit, ut quadratum t n ad rectangulum x n ʒ: & permutando quadratum o m ad quadratum t n, ut rectangulum q m s ad rectangulum x n ʒ. sed quadratum k m monstratum est æquale rectangulo q m s: & quadratum l n æquale rectangulo x n ʒ. ergo quadratum o m ad quadratum t n erit, ut quadratum k m ad quadratum l n. erat autem linea m e ad lineam e n, ut quadratum o m ad quadratum t n. linea igitur m e ad lineam e n erit, ut quadratum k m ad quadratum l n. quare sectio parabole erit ex uigesima primi conicorum: et eius diameter linea e f. Abscindatur ab e f linea e π, æqualis lineæ b r: & linea e ρ, æqualis ipsi b y: et à punctis π ρ attollantur æquidistantes ipsis m k, n l usque ad sectionem circa e f, quæ sint π σ, ρ τ: deinde per π ducatur linea φ π χ, æquidistans ipsi h b: & per ρ, eidem æquidistans ducatur ψ ρ ω. erit quadratum σ π æquale rectangulo φ π χ: & quadratum τ ρ æquale ipsi ψ ρ ω. rectangulum autem φ π χ æquale est quadrato q r, per ea, quæ ostendimus ad quintam huius; & rectangulum ψ ρ ω æquale quadrato x y. quadratum igitur σ π est æquale quadrato q r: & quadratum τ ρ quadrato x y. quare & linea σ π lineæ q r; & linea τ ρ ipsi x y est æqualis. parabole igitur circa e f, æqualis est, & eadem parabolæ a b c; hoc est ei, quæ figuram describit: quod fuerat ostendendum.

ALITER.

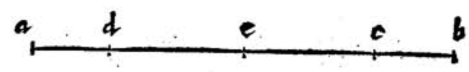
ALITER. *Iisdem manentibus, sumptisq; in sectione circa e f duobus quibuslibet punctis k l, et demissis perpendicularibus k m, l n ad ipsam e f, per m ducatur linea o m p q, æquidistans ipsi h b: & per n r n s t ducatur, eidem æquidistans: similiterq; & per rectas lineas k m, o q; & per ipsas l n r t ducantur plana conoides secantia. erunt ea erecta super axem b d: & facient sectiones circulos, quorum centra p s. unde rectangulum o m q æquale erit quadrato k m: & r n t rectangulum æquale quadrato l n. præterea in diametro sectionis b d sumpta linea b u, æquali ipsi e m; & sumpta b x, æquali e n; atque à punctis u x ductis æquidistantibus ipsi h b lineis u y x z, erit quadratum u y ad quadratum x z, ut* 20. primi conicorũ
linea u b ad lineam b x. sed cũ rectangulum o m q æquale sit quadrato u y, ut supra ostendimus; & rectangulum r n t æquale quadrato x z: erunt quadrata u y, k m æqualia: & item æqualia quadrata x z, l n. quare quadratum k m ad quadratum l n erit, ut linea u b ad lineam b x, hoc est ut linea m e ad lineam e n. sectio ergo circa e f parabole est, & eadem parabolæ a b c, quæ figuram describit: quod proponebatur ostendendum.



LEMMA.

Si recta linea secetur in duobus punctis: sitq; rectangulum ex partibus unius sectionis æquale rectangulo ex partibus alterius: erunt ipsæ partes inter se æquales: hoc est maior maiori, & minor minori æqualis erit.

Sit recta linea a b, quæ secetur in duobus punctis c d; ita ut rectangulum a c b æquale sit rectangulo a d b. Dico lineam a c æqualem esse lineæ d b: & c b ipsi a d. diuidatur a b bifariam in puncto e. erit rectangulum a c b unà cum quadrato e c æquale quadrato e b; ex quinta secundi: & eadem ratione rectangulum a d b unà cum quadrato d e æquale eidem. rectangulum ergo a c b unà cum quadrato e c æquale est rectangulo a d b; & quadrato d e: & dempto ex altera parte rectangulo a c b, & ex altera a d b, ei æquali, ut positum est, relinquitur quadratum e c æquale esse quadrato d e: & lineam e c lineæ d e æqualem. quare c b æqualis est ipsi a d: & reliqua a c reliquæ d b æqualis: quod erat ostendendum.

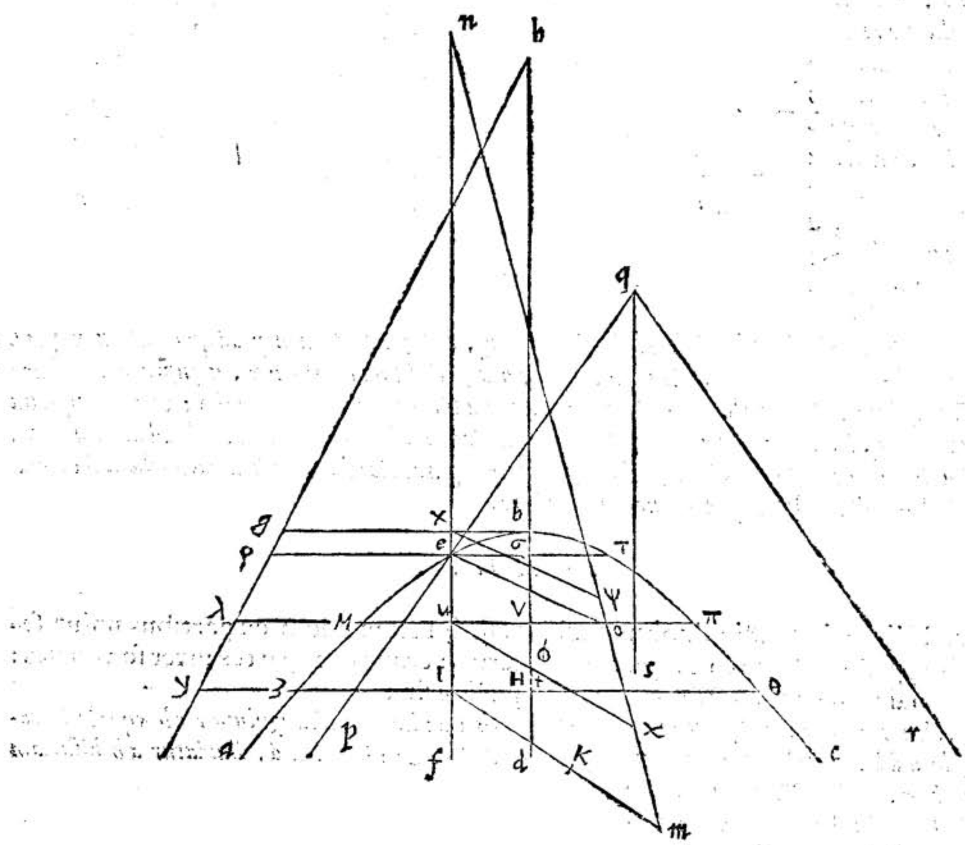


PROPOSITIO V.

Si conoides hyperbolicum plano secetur, axi æquidistanti: sectio erit hyperbole, similis illi, quæ figuram describit: diameter autem eius erit communis sectio planorum; & eius, quod figuram secat; & eius, quod per axem ducitur, erectum super planum secans.

Secetur conoides hyperbolicum plano, ut dictum est: secetur autem & altero plano per axem, erecto super planum secans: & sit conoidis sectio a b c, quæ erit hyperbole, ut superius est demonstratum:

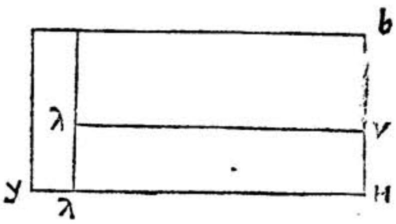
stratum: & eius diameter, & axis conoidis, recta b d: plani uero figuram secantis sit ipsa linea e f. Ostendendum est, sectionem conoidis factam plano circa e f, esse hyperbolen, similem ipsi a b c: eiusq; diametrum esse lineam e f. Sit hyperboles a b c rectum figuræ latus b g; & transuersum b h: & ducta linea h g producatur. Intelligatur autem in sectione circa e f aliquod punctum k: atque ab eo demittatur perpendicularis k l ad lineam e f, quæ et perpendicularis erit super planum, in quo a b c sectio. Quam uero proportionem habet e l ad l k, eam habeat l k ad l k productam
16. sexti. *ad punctum m; hoc est ad l m. erit rectangulum m l e æquale quadrato k l. Rursus quam proportionem habet g b ad b h, habeat m l ad l n: & iungantur n m: deinde à puncto e attollatur*

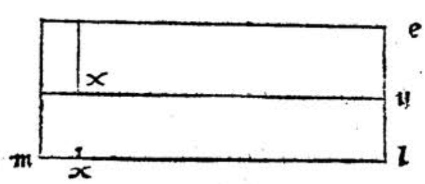


perpendicularis e o super planum, in quo sectio a b c usque ad lineam n m. coibit enim cum ea in
6. undec. *eodem existens plano, & æquidistabit ipsi l m: proptereaq; n e ad e o erit, ut n l ad l m; hoc est ut h b ad b g. Duabus igitur datis rectis lineis, terminatis ad rectos angulos n e, e o, inueniemus ex quinquagesima tertia primi conicorum, in ipsa e f coni sectionem dictam hyperbolen in eodem plano; ita ut e f diameter sit sectionis; uertex punctum e; eiusq; figuræ rectum latus sit e o; & transuersum e n. Sit autem conus, cuius ipsa est sectio p q r: & eius axis q s. erit iam coni p q r sectio; hoc est ipsa hyperbole inuenta, eadem sectioni conoidis circa e f, factæ ab eodem plano. punctum enim k, quod in sectione conoidis sumpsimus, in sectione quoque coni esse constat, ex duodecima primi conicorum: cum sit quadratum k l æquale rectangulo m l e. Intelligatur aliud punctum t in sectione coni; & ab ipso perpendicularis demittatur t u ad lineam e f: producaturq; ad ipsam n m, ut coeat cum ea in puncto x. erit quadratum t u eadem ratione æquale rectangulo x u e. Ducatur præterea per punctum l linea y ζ l η θ, æquidistans ipsi g b, & secans hyperbolen a b c in punctis ζ θ, diametrum in η, & lineam h g productum in y: & item per u e ducantur aliæ lineæ, eidem æquidistantes; per u quidem ipsa λ μ u ν π, secans hyperbolen in μ π, diametrum in ν, & h y in λ: per e autem linea ρ e σ τ, secans hyperbolen in e τ, diametrum in σ, & h y in ρ: ab ipso demum puncto u attollatur linea perpendicularis super planum, in quo a b c,*

occurrens

occurrens sectioni conoidis in φ: & per lineas kl, ζθ ducatur planum secans conoides: quod cum sit erectum super eius axem; faciet sectionem circulum. ducatur etiam per lineas φu, μπ aliud planum secans item conoides. faciet & id sectionem circulum: atque erit quadratum kl æquale rectangulo ζlθ: & similiter quadratum φu æquale ipsi μuπ rectangulo. Monstrabitur linea iam dicta φu æqualis esse ipsi ut. rectangulum enim yηb, ut in subiecta figura apparet, excedit rectangulum λνb, rectangulo λνη, & eo, quod fit ex bη & excessu, quo yη excedit λν, qui excessus, breuitatis caussa, dicatur yλ. quadratum autem ζη æquale est rectangulo yηb: & quadratum μν æquale rectangulo λνb. ergo quadratum ζη excedit quadratum μν, rectangulo λνη, & eo, quod fit ex bη & yλ. sed idem quadratum ζη æquale est rectangulo ζlθ; hoc est quadrato kl; hoc est rectangulo m l e, & quadrato lη: quadratum autem μν eadem ratione æquale est rectangulo μuπ; hoc est quadrato φu; & quadrato uν. rectangulum igitur m l e unà cum quadrato lη excedit quadratum φu unà cum quadrato uν, rectangulo λνη, & eo, quod fit ex bη & yλ. Itaque dempto ex altera parte quadrato lη: & ex altera quadrato uν, ei æquali, rectangulum m l e nihilo minus excedet quadratum φu, eodem illo excessu. quare quadratum φu, & rectangulum λνη unà cum eo, quod fit ex bη & yλ æqualia sunt rectangulo m l e. Rursus rectangulum m l e, ut in secunda figura, excedit rectangulum x u e, rectangulo m l u, & eo, quod fit ex e u & excessu, quo m l excedit x u; qui excessus dicatur m x: & idcirco rectangula x u e, m l u unà cum eo, quod fit ex e η & m x æqualia sunt rectangulo m l e. — 2. secundi





Quadratum igitur φu, & rectangulum λνη unà cum eo, quod fit ex bη & yλ sunt æqualia rectangulis x u e, m l u unà cum eo, quod fit ex e u, & m x: rectangulum autem λνη unà cum eo, quod fit ex bη & yλ æquale est rectangulo m l u, & ei, quod fit ex e u, & m x, ut inferius apparebit. relinquitur igitur quadratum φu æquale esse rectangulo x u e. sed erat quadratum tu æquale eidem rectangulo. ergo quadrata φu, tu æqualia sunt: & ob id lineæ φu, tu æquales; immo uero una, atque eadem linea: & φ, τ unum, atque idem punctum.

Illud autem, quod diximus, facile monstrabitur, præmissis non nullis.

Et primo rectangulum ex bσ & excessu, quo yη excedit λν; hoc est yλ, æquale esse rectangulo ex νη & excessu, quo ρσ excedit g b. dicatur autem is excessus ρg.

Nanque ut hσ ad σρ, ita h b ad b g, ob similitudinem triangulorum hσρ, h b g: & ex decima nona quinti, reliquum ad reliquum, sicut totum ad totum; hoc est bσ ad ρg, sicut hσ ad σρ. Eodem modo ostendemus νη ad yλ esse, ut hη ad ηy. ut autem hσ ad σρ, ita hη ad ηy. quare bσ ad ρg est, ut νη ad yλ: & ex decima sexta sexti rectangulum ex bσ & yλ æquale rectangulo ex ρg & νη: quod fuit propositum.

Deinde yλ æqualem esse ipsi m x.

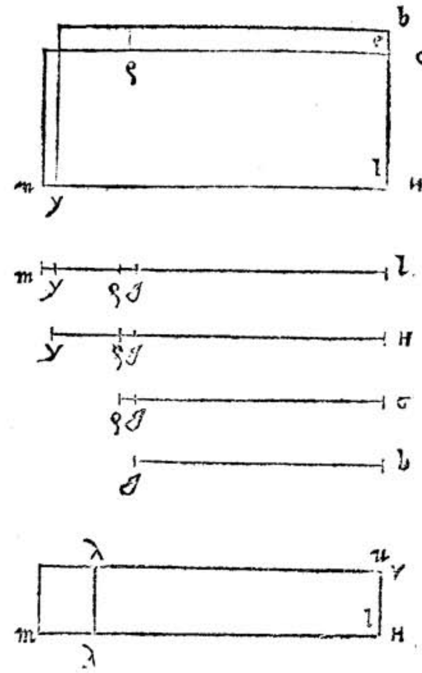
Ostensum est enim νη ad yλ esse, ut hη ad ηy: & similiter ostendetur u l ad m x, ut n l ad l m. cum autem n l ad l m sit, ut h b ad b g; quod antea posuimus; hoc est ut hη ad ηy: erit u l ad m x, ut νη ad yλ: & permutando ut u l ad νη, sic m x ad yλ. sunt autem u l, νη æquales. æquales igitur sunt m x, yλ, ut dicebamus. Idem ostendetur & in reliquis eiusmodi.

Postremo m l excedere yη, eodem excessu, quo ρσ ipsam g b excedit.

Etenim rectangulum m l e æquale est quadrato kl; hoc est rectangulo ζlθ: additoq; utrinque quadrato æquali; erit rectangulum m l e unà cum quadrato eσ æquale rectangulo ζlθ unà cum quadrato lη; hoc est æquale quadrato ζη. sed quadrato eσ æquale est rectangulum ρσb, ex duodecima primi conicorum: & eadem ratione quadrato ζη æquale rectangulum yηb. rectangula igitur m l e, ρσb æqualia sunt rectangulo yηb. quare ablato eo, quod est commune utrisque; hoc est rectangulo yησ, & rectangulo ρσb, ut in figura apparet, reliquum reliquo æquale erit; hoc est rectangulum ex e l & excessu, quo m l excedit yη, uidelicet mη æquale rectangu- — 4. secundi

lo

lo ex bσ & excessu, quo yn excedit ρσ, hoc est yρ. est autem ex decima quarta sexti e l ad bσ, ut yρ ad my: & componendo e l & bσ; hoc est bn ad bσ, ut yρ & my, hoc est excessus, quo m l excedit ρσ; qui sit mρ ad m y. sed ostensum est superius bσ ad ρg esse, sicut hσ ad σρ: & ita ostendetur bn ad excessum, quo y n excedit gb; uidelicet y g, sicut bn ad ny. atque est bn ad ny, ut bσ ad σρ. bn igitur ad y g est, sicut bσ ad ρg: & permutando bn ad bσ, sicut yg ad ρg. erat autem bn ad bσ, ut mρ ad my. quare mρ ad my est, ut yg ad ρg: & ex decima sexta sexti rectangulum ex mρ, ρg æquale est rectangulo ex my, yg. ergo mρ est æqualis ipsi yg: & my ipsi ρg, ex antecedenti lemmate; hoc est excessus, quo m l excedit ρσ æqualis excessui, quo yn excedit gb: & excessus, quo m l excedit yn, excessui, quo ρσ excedit gb. si enim ad lineam m l applicentur lineæ yn, ρσ, gb: excessus, quo m l excedit gb, qui sit mg, secatur in duobus punctis y ρ: & est rectangulum mρg æquale rectangulo myg. ex quo sequitur, quod ante proposuimus.



His demonstratis constat rectangulum ex bσ & yλ æquale esse rectangulo ex vn & my. est enim my æqualis ipsi ρg.

Itaque cum m l u rectangulum, ut patet, æquale sit rectangulo λvn unà cum eo, quod fit ex vn, & excessu, quo m l excedit λv; hoc est mλ: rectangulum autem ex vn, & mλ æquale sit duobus rectangulis; rectangulo scilicet ex vn & yλ; & rectangulo ex vn & my; ex prima secundi, secta nempe linea mλ in puncto y: rectangulum m l u excedit ipsum λvn rectangulum duobus rectangulis; rectangulo ex vn & yλ; & rectangulo ex vn & my. sed rectangulum ex bn & yλ eadem ratione est æquale tribus rectangulis, uidelicet rectangulo ex vn yλ; rectangulo ex σv yλ; & ei, quod ex bσ yλ. Quorum primum æquale est, immo idem primo, ex ante dictis; tertium secundo, ut monstrauims; medium uero, quod fit ex σv, yλ æquale ei, quod fit ex eu, & mx. est enim σv æqualis ipsi eu, & mx ipsi yλ, ut etiam ostensum est. rectangulum igitur m l u excedit rectangulum λvn rectangulo, quod ex bn, yλ, dempto ex ipso, quod fit ex eu, mx. Quare eo utrinque addito, rectangulum m l u unà cum rectangulo, quod ex eu, mx, excedit rectangulum λvn, eo, quod fit ex bn, yλ. Vnde sequitur duo rectangula, scilicet rectangulum λvn, & rectangulum ex bn, yλ, æqualia esse duobus rectangulis; rectangulo m l u; & rectangulo ex eu, mx, ut proponebatur. Idem continget & in alijs quibuslibet punctis. constat igitur eandem esse sectionem, coni, & conoidis. quare sectio conoidis hyperbole est, cuius diameter e f; & similis ipsi a b c, ex diffinitione, cum figurarum in latera eandem habeant proportionem: quæ omnia demonstrasse oportebat.

1. secundi

Ex iis, quæ dicta sunt, colligi potest, latus transuersum sectionis circa e f excedere latus transuersum sectionis a b c, duplo lineæ bσ.

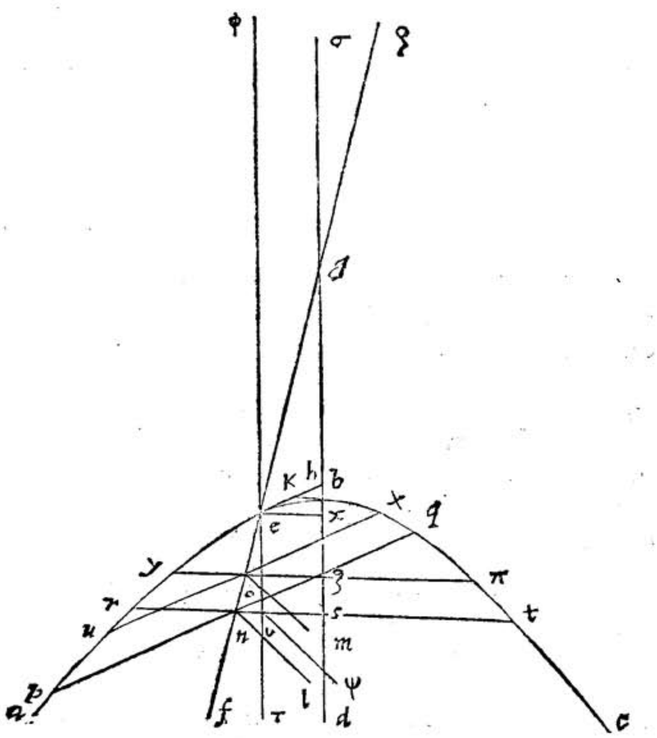
A puncto enim, in quo secant sese lineæ gb, nf, ducta linea χ⸸, æquidistanti ipsi m l, monstrabitur eadem ratione excessum, quo m l excedit ⸸χ, æqualem esse excessui, quo yn excedit gb. sed monstratum est m l excedere ρσ, eodem illo excessu. cum ergo m l pariter excedat lineas ⸸χ, ρσ: erunt ⸸χ, ρσ æquales, & ob similitudinem triangulorum ρσb, ⸸χn, æquales quoque σb, χn. sunt autem & ipsæ bσ, χe æquales. quare linea en, hoc est latus transuersum sectionis circa e f excedit lineam bb, latus transuersum sectionis a b c, lineis bσ, χe; hoc est duplo lineæ bσ, ut dicebamus.

PROPOSITIO

PROPOSITIO VI.

Si conoides hyperbolicum secetur plano ducto per uerticem coni continentis conoides: sectio erit hyperbole, haud similis illi, quæ figuram describit: & eius diameter erit communis sectio planorum; secantis scilicet figuram; & eius, quod per axem ducitur, erectum super planum secans.

Secetur conoides hyperbolicum plano, ut dictum est: secetur autem, & altero plano, per axem ducto, & erecto super planum secans: sitq́; conoidis sectio a b c, quæ est hyperbole: & eius diameter, & axis conoidis linea b d: plani uero figuram secantis sit recta linea g e f; cum g sit uertex coni continentis conoides. Dico sectionem conoidis, quæ fit plano circa e f ducto, esse hyperbolen, haud similem sectioni a b c: & eius diametrum esse lineam e f. ducatur linea e h, tangens sectionem a b c in puncto e: & alia ducatur b k, tangens in b, secansq́; lineam e h in k. sumantur autem in sectione circa e f duo quælibet puncta l m: & ab ipsis demittantur l n, m o perpendiculares ad lineam e f; quæ & super planum, in quo a b c sectio, perpendiculares erunt: & per n ducantur duæ lineæ; quarum una æquidistet ipsi e k, uidelicet p n q; altera uero r n s t, æquidistet ipsi k b: & similiter per o ducantur aliæ duæ lineæ, iisdem æquidistantes, uidelicet u o x ipsi e k, & y o ζ π ipsi k b. secabit e f lineas p q, u x bifariam in punctis n o, ex quadragesima septima primi conicorum: & erit sectionis p e q diameter e n. producatur e g usque ad ρ; ita ut sit g ρ æqualis ipsi e g. erit e ρ latus transuersum sectionis p e q, ut elicitur ex quinquagesima primi conicorum: & per lineas r t, l n ducatur planum. quod cum sit erectũ super lineam b d axem conoidis, faciet sectionem circulum, cuius centrum s: & item per lineas y π, m o ducatur aliud planum. faciet id similiter sectionem circulum, cuius centrũ ζ: & erit quadratum l n æquale rectangulo r n t: & quadratum m o æquale rectangulo y o π. Itaque quoniam sectionis p e q diameter est e n; & latus transuersum e ρ: ducunturq́; ordinatim ad diametrum p n, u o: quadratum p n ad quadratum u o, ex uigesima primi conicorum erit, ut rectangulum ρ n e ad rectangulum ρ o e. sed rectangulum p n q, hoc est quadratum p n ad rectangulum r n t, ex decima septima tertij conicorum est, ut quadratum e k ad quadratum k b: & ita rectangulum u o x, hoc est quadratum u o ad rectangulum y o π, ut quadratum e k ad quadratum k b. quare quadratum p n ad rectangulnm r n t est, ut quadratum u o ad rectangulum y o π: & permutando quadratum p n ad quadratum u o, ut rectangulum r n t ad rectangulum y o π. quorum rectangulorum r n t est æquale quadrato l n: & y o π æquale quadrato m o. quadratum igitur p n ad quadratum u o est, ut quadratum l n ad quadratum m o. & erat quadratum p n ad quadratum u o, ut rectangulum ρ n e ad rectangulum ρ o e. quare quadratum l n ad quadratum m o est, ut rectangulum ρ n e ad rectangulum ρ o e: & idcirco ex uigesima prima primi conicorum, sectio, quam facit planum

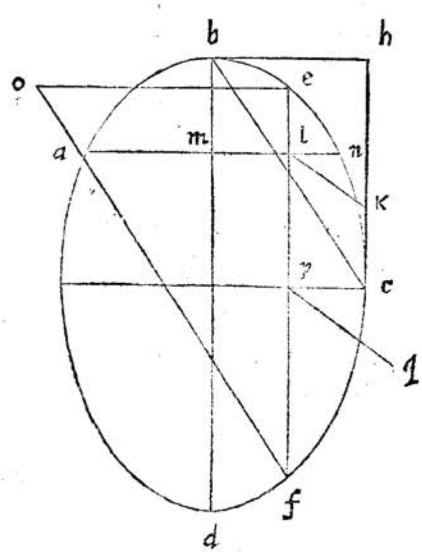


num circa e f, hyperbole est; eiusq; diameter e f: & latus transuersum e ρ. Esse autem eam hyperbolen dissimilem illi, quæ conoides describit; hoc est ipsi a b c, monstrabitur hoc pacto. Sit hyperboles a b c transuersum latus linea b σ; dupla scilicet ipsius b g: & secetur conoides alio plano per e, axi æquidistanti, & erecto super planum secans per axem: sit autem eius recta linea e τ. erit sectio, quam facit, hyperbole, similis ipsi a b c, ut supra monstrauimus: & eius diameter e τ: quæ secet lineam r t in υ: sitq; transuersum latus e φ: & per e ducatur linea e χ, equidistans ipsi k b, & secans b d in χ. præterea à puncto υ attollatur perpendicularis υ ψ super planum, in quo hyperbole a b c, usque ad sectionem circa e τ. est igitur ut quadratum l n ad rectangulum e n ρ, ita sectionis circa e f rectum latus ad transuersum, ex uigesima prima primi conicorum: & ex eadem,
23. sexti. ut quadratum ψ υ ad rectangulum e υ φ, ita sectionis circa e τ rectum latus ad transuersum. quadratum autem l n ad rectangulum e n ρ habet proportionem compositam ex proportione l n ad e n, & ex proportione l n ad n ρ: & pariter quadratum ψ υ ad rectangulum e υ φ proportio-
5. quinti nem habet compositam ex proportione ψ υ ad e υ, & proportione ψ υ ad υ φ. sed ψ υ ad e
15. tertii. υ habet maiorem proportionem, quàm l n ad e n: nam ψ υ maior est, quàm l n: & e υ con-
Penul. primi. tra minor, quàm e n. & ψ υ ad υ φ item maiorem habet proportionem, quàm l n ad n ρ: nam υ φ minor, quàm n ρ; constat enim linea υ φ lineis υ e, e φ: & n ρ constat lineis n e, e ρ. quarum n e maior est ipsa e υ: & e ρ maior ipsa e φ. quoniam cum e g maior sit x g, quæ est æqualis dimidio lateris transuersi sectionis circa e r; hoc est dimidio e φ, ut patet ex ijs, quæ proxime tradidimus: erit dupla ipsius e g; hoc est e ρ maior ipsa e φ. Quadrati igitur ψ υ ad rectangulum e υ φ proportio, quæ componitur ex maioribus proportionibus, maior erit, quàm proportio quadrati l n ad rectangulum e n ρ: & idcirco sectionis circa e τ rectum latus ad transuersum maiorem habebit proportionem, quàm sectionis circa e f. sectio ergo circa e f non est similis sectioni circa e τ. quare neque similis est ipsi a b c: quod demonstrasse oportebat.

PROPOSITIO VII.

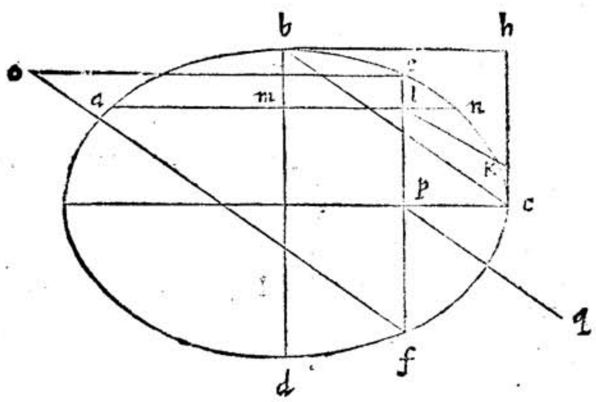
Si sphæroides quodlibet secetur plano axi æquidistanti: sectio erit ellipsis, similis illi, quæ figuram describit: diameter autem ipsius erit communis sectio planorum; eius, quod secat; & eius, quod per axem ducitur, erectum super planum secans.

Secetur sphæroides, ut dictum est; secetur autem, & altero plano per axem ducto, erectoq; super planum secans: & sit sphæroidis sectio ellipsis a b c: plani figuram secantis, sit recta linea e f: axis autem sphæroidis, & diameter sectionis, b d. Dico sectionem sphæroidis, quæ fit plano circa e f ducto, esse ellipsim, similem ipsi a b c: & eius diametrum esse lineam e f. ducatur b h tangens sectionem a b c in puncto b: & item ducatur c h tangens in c, quæ coeant in h. Intelligatur prætcrea aliquod punctum k in sectione circa e f sumptum: & ab eo ducatur k l perpendicularis ad lineam e f. erit iam k l, & perpendicularis super planum, in quo est a b c sectio. per l uero ducatur linea a m l n æquidistans ipsi b h: & per rectas lineas a n, k l, ducatur planum secans sphæroides. quod erit erectum super lineam e f. quare & super lineam b d, ei æquidistantem: & faciet sectionem circulum, cuius centrum m: & idcirco quadratum k l æquale erit rectangulo a l n. Sed rectangulum a l n ad rectangulum e l f est, ut quadratum b h ad quadratum h c, ex decima septima tertij conicorum. quare quadratum k l ad rectangulum e l f erit, ut quadratum b h ad quadratum h c.



iungantur b c: & per e ducatur linea æquidistans h b: per f uero ducaur æquidistans ipsi c b, quæ coeant in o. erit triangulum e f o simile triangulo h c b: & o e ad e f, ut b h ad h c.

b c. quadratum igitur k l ad rectangulum e l f erit, ut quadratum o e ad quadratum e f: & similiter quadrata aliarum perpendicularium ab eadem ſectione ad e f ductarum, ad ea, quæ fiunt ex ipſius e f partibus rectangula, erunt, ut quadratũ o e ad quadratum e f. & ſunt o e, e f lineæ inæquales, quoniam & inæquales b h, h c. manifeſtũ eſt igitur ex uigeſima prima primi conicorum, eius modi ſectionem eſſe ellipſim, alteramq; diametrum ipſius eſſe lineam e f; alteram uero æqualem ipſi e o. nam linea e f bifariam ſecta in p, erit rectangulum f p e; hoc eſt quadratum f p ad quadratum perpendicularis à puncto p eductæ uſque ad ſectionem, quæ ſit p q, ut quadratum f e ad quadratum e o. quare & linea f p ad lineam p q: & dupla ipſius f p; hoc eſt f e ad duplam p q; hoc eſt ad alteram diametrum, ut linea f e ad lineam e o. altera igitur diameter æqualis eſt ipſi e o. demonſtrabitur autem ſimilis ei, quæ figuram deſcribit; hoc eſt ſectioni a b c, ſi intellexerimus planum aliud ſecans figuram per axem, erectum itidem ſuper planum, in quo a b c ſectio, cuius recta linea ſit b d. erit enim ſectio ea, quæ figuram deſcribit: & eademmet ratione quadrata perpendicularium à ſectione ad b d lineam ductarum ad ea, quæ fiunt ex ipſius b d partibus rectangula erũt, ut quadratum



o e ad quadratum e f. Quod cum ita ſit, & quadrata diametrorum earum ſectionum, & diametri ipſæ eandem ſe proportionem habebunt. unde ſimiles erunt ellipſes: quod fuerat demonſtrandum. At uero ſi ſphæroides oblongum plano ita ſecetur: erit linea e f maior eius diameter; cum linea h c maior ſit, quàm b h. Contra uero eueniet in ſphæroide lato; nam h c minor erit, quàm b h. quare eius minor diameter, erit linea e f.

IN PROPOSITIONEM XI.

Media ſit proportionalis.] *Videntur hic non nulla deſiderari in græco codice, qualia fortaſſe hæc ſunt.* καὶ δυνάται ἴσον; *hoc eſt, ut nos reſtituimus, & poteſt æquale.* A

Id enim demonſtratum eſt.] *Præmiſit hoc Archimedes tanquã in conicis demonſtratum; demonſtrauit autem Apollonius in tertio conicorum, propoſitione decima ſeptima.* B

Ipſi uero n t æqualis eſt linea t m: quoniam & b r ipſi b m.] *Ex trigeſima quinta primi conicorum eiuſdem Apollonij.* C

Quoniam igitur ſimilia ſunt c a l, t m b triangula &c.] *Et hoc loco deſiderantur aliqua in hanc ſententiam.* τὸ ἀπὸ τᾶς φ κ καθέτε τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶς α θ, θ γ περιεχόμενον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α λ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α γ: *hoc eſt quadratum perpendicularis h k ad rectangulum a h c habet eãdem proportionem, quàm quadratum a l ad quadratum a c.* D

Patet igitur ſectionem eſſe acutianguli coni ſectionem.] *Ex uigeſima prima primi conicorum.* F

Et eius maiorem diametrum eſſe a c, minorem uero æqualem ipſi a l.] *Opponitur enim a c minori angulo: & iccirco maior eſt, quàm a l. oſtendetur autem minor diamerer æqualis lineæ a l ea ratione, qua in præcedenti uſi ſumus.* G

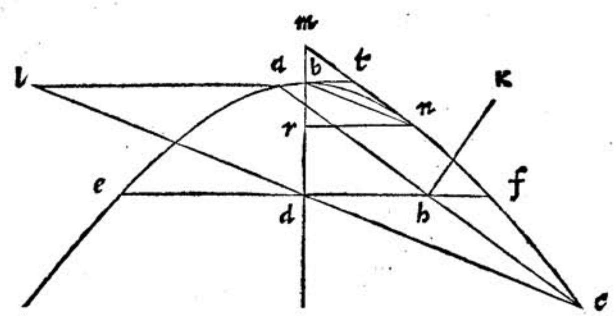
IN PROPOSITIONEM XIIII.

Eſt autem linea b t minor ipſa t n: propterea quòd & m t minor eſt ipſa t n; cum b m minor ſit b r.] *B t minor eſt ipſa m t; quoniam minori angulo opponitur, m t autem minor eſt ipſa t n, ut monſtrabimus. ergo b t multo minor eſt ipſa t n. Sed ipſam m t minorem eſſe t n,* A

 patebit

patebit, cum m b comperta fuerit minor, quàm b r. producatur enim linea b m usque ad o; ita, ut b o sit transuersum latus sectionis a b c. & quoniam linea n m tangens sectionem in puncto n, coit cum b o in m: & ab n ordinatim ducta est n r ad diametrum: erit ex trigesima sexta primi conicorum, ut o m ad m b, ita o r ad b r: & permutando ut o m ad o r, ita b m ad b r. sed o m minor est ipsa o r. ergo & m b est ipsa b r minor, & ex secunda sexti m t minor ipsa t n: quod oportebat demonstrare.

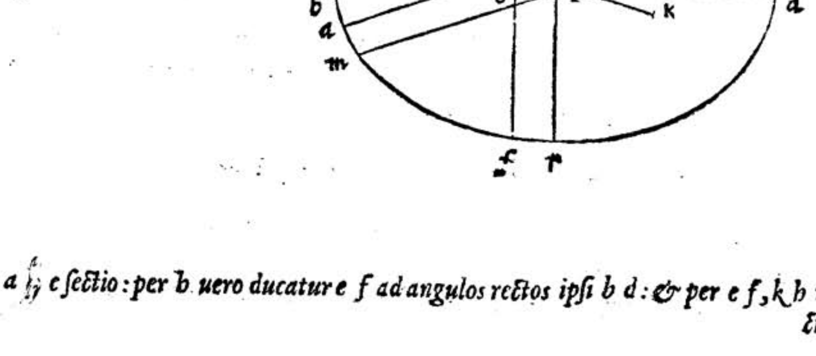
B Similiter perpendiculari existente n r in obtusianguli coni sectione, diameter ipsius maior erit c l.] *Ita legitur in codicibus omnibus, quos uidi, sed mendose, ut opinor; neque enim quid his uerbis significetur, satis possum intelligere.* FRANCISCVS MAVROLICVS *Messanensis uir omni doctrina, atque optimarum artium studijs eruditissimus, & in Mathematicis ita exercitatus, ut his temporibus Archimedes alter iure optimo dici possit, arbitratur corollarium quoddam esse, quanquam mutilum, ac deprauatum. is enim in quibusdam ad me humanissimis, ac doctissimis literis ita scribit. Illud uero, quod in fine decimæ quartæ propositionis te anxium reddit, corollarium quodam est, sed mutilum, ac mendosum: ita uero corrigendum est. si agatur per a punctum recta a l, parallelus ipsi b t: itemq; per c punctum recta e l, parallelus ipsi n b; quæ paralleli concurrant apud l punctum, ut scilicet propter æquidistátiam linearum, triangulum c a l triangulo n t b simile fiat. tunc sicut c a est maior diameter factæ à secante plano ellipsis, ita & a l erit minor eiusdem diameter: quod facile ostendi potest: & in præcedenti decima tertia propositione fieri potuisset in parabola. nam propter dictorum triangulorum similitudinem,*



linea c a ad lineam a l est, sicut linea n t ad lineam t b. fuit autem sicut n t ad t b, sic c h ad h k (puncto h per æqua secante ipsam c a): & perinde sic tota, c a ad duplum ipsius h k; hoc est diametros maior ad minorem. eandem igitur rationem habet linea c a ad diametrum minorem, & ad a l. igitur a l æqualis est diametro minori ellipsis, sicut infert corollarium. Hæc Maurolicus, quæ adeo quadrant ad hunc locum, ut non aliter ipse Archimedes scripsisse uideri possit; alioqui mancam quodammodo, atque imperfectam eorum scientiam, tradidisset.

IN PROPOSITIONEM XV.

A Similiter iis, quæ ante tradita sunt, ostendentur quadrata perpédicularium, &c.] *Intelligatur enim púctum in sectione sumptum k: & ab eo ad a c lineam perpédicularis demittatur k h; quæ etiam perpendicularis erit super planum, in quo est a b c sectio: per b uero ducatur e f ad angulos rectos ipsi b d: & per e f, k h rectas*



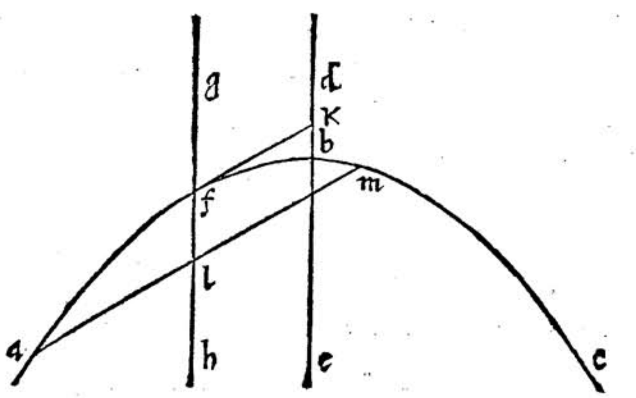
ctas lineas ducatur planum secans conoides; quod quidem erectum erit super axem b d: & faciet sectionem circulum, cuius centrum o. quadratum igitur k h erit æquale rectangulo e h f: & rectangulum e h f ad rectangulum a h c, ex decima septima tertij conicorum, eam habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n: & ob id quadratum k h ad rectangulum a h c eandem habebit proportionem, quam qnadratum b t ad quadratum t n: & similiter idem contingere ostendetur, alijs perpendicularibus à sectione ad a c, lineam demisis. quare sectio erit coni acutianguli sectio: & eius diameter ipsa linea a c.

Si sphæroides latum plano secetur, alia quidem eadem erunt, &c.] *Eadem omnia fiant in sphæroide lato, quæ prius facta fuerc in oblongo. monstrabitur plano per a c lineam ducto, sectionem factam, esse coni acutianguli sectionem: & eius minorem diametrum esse lineam a c, intra sphæroides contentam. nam rectangulum p q r ad rectangulum m q l eam habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum n t: minus autem est rectangulum m q l rectangulo p q r; quòd linea, q l minor sit ipsa q r. quadratum igitur n t minus est quadrato b t. quare quadrata perpendicularium à sectione ad a c, ductarum, maiora erunt rectangulis a h c: & a c minor erit sectionis diameter, ut proponebatur.* B

IN PROPOSITIONEM XVI.

At in rectanguli coni sectione à quouis puncto eorum, quæ in sectione &c.] A

Sit rectanguli coni sectio, seu parabole a b c, cuius diameter d b e: & sumptum sit in sectione quoduis punctum f: & per f ducatur g f h, æquidistans diametro. Dico lineæ g f h partem eam, quæ est à puncto f uersus sectionis uertinem; hoc est uersus g, extra sectionem cadere; quæ autem est uersus h, cadere intra. ducatur enim linea tangens sectionem in f puncto; quæ coeat cum diametro in k: & per a ducatur a l m, æquidistans ipsi f k. secabitur iam linea a l m ab ipsa f h, in partes æquales, ex quadragesima sexta primi conicorum: & similiter omnes lineæ per quoduis sectionis punctū ductæ eidem æquidistantes. efficitur enim linea f h diameter sectionis a f m ex corollario quinquagesimæ primæ primi conicorum. Quare necessarium est, ipsam f h intra sectionem cadere, & f g extra: quod fuerat monstrandum.

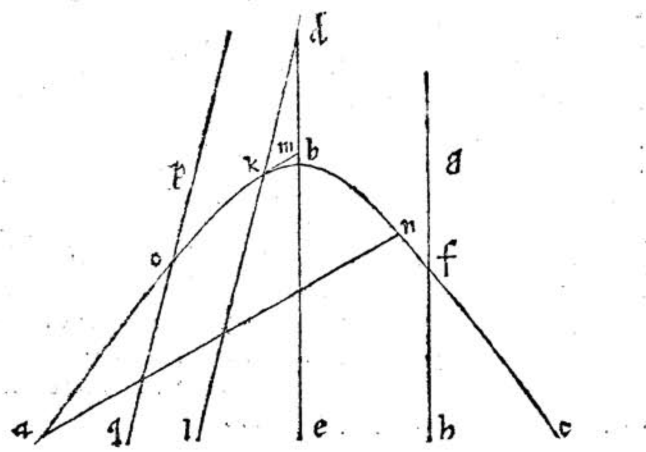


ALITER. Si linea f h non cadet intra sectionem; cadet extra: & g f h tanget sectionem in puncto f. quare ex uigesima quarta primi conicorum coibit cum diametro, quæ iam posita est diametro æquidistans: quod fieri non potest. constat igitur uerum esse, quod proponebatur.

Sectio erit obtusianguli coni sectio: eius autem diameter erit linea, à uertice coni in conoide ducta est.] *Præmisit hoc Archimedes in duodecima huius: & nos eodem in loco propositione prima, & sexta demonstrauimus.* B

Sed in sectione coni obtusianguli si à quouis puncto in sectione sumpto &c.] *Sit coni obtusianguli sectio, seu hyperbole a b c, cuius quidem uertex sit b: & uertex coni continentis conoides, seu centrum sectionis, ut Apollonius uocat, sit d: à quo ducatur linea in quācunque sectionis partem libuerit: & ei æquidistans alia ducatur. Dico lineæ æquidistantis partem eam, quæ conuexa respicit sectionis, extra sectionem cadere; quæ uero contraria, intra. Ducta sit primum à d in sectionem per punctum b linea d b e, quæ erit diameter sectionis: sumptoq; quouis puncto f in ea, & per f ducta g f h linea, æquidistanti ipsi d b e, cadet f g extra sectionem; f h uero intra. nisi enim* C

ita



ita sit: cadet f h extra; & continget sectionẽ in puncto f. quare g f h producta coibit cum diametro: quod est absurdum; posita enim fuerat diametro æquidistans. Quòd si linea à d ducta transeat per aliud quoduis sectionis punctum, ut per k; quæ sit, d k l: ducemus lineam k m tangentem sectionem in k: & per a ipsi k m æquidistantem faciemus a n. secabit igitur linea d k l lineam a n bifariam, ex quadragesima septima primi conicorum. & fiet diameter sectionis a k n. sumpto autem quolibet puncto in sectione, quod sit o, ducatur p o q, æquidistans ipsi d k l. cadet similiter p o extra sectionem; & o q intra; alioqui continget ipsa p o q sectionem in o: & coibit cum diametro d k l: quod fieri nequit; erat enim ei æquidistans. quare manifeste constat propositum.

D Quare sectionem faciet coni sectionem.] *Ex duodecima huius, et ijs, quæ nos eo loco demonstrauimus, propositirne prima, quarta, & quinta.*

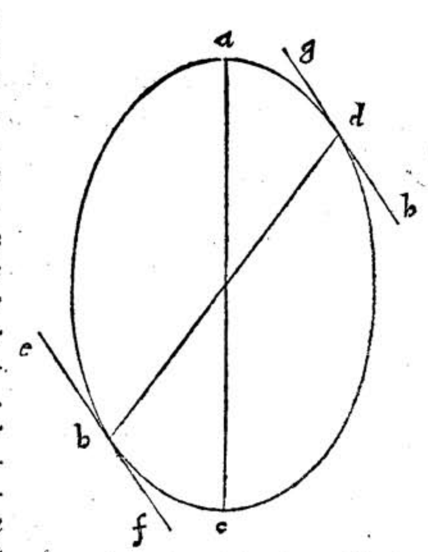
IN PROPOSITIONEM XVII.

A Alioquin ab eo puncto ducta perpendicularis super planum secans, cadet extra coni sectionem.] *Ita legendum, ut opinor, non intra coni sectionem, codex etiam græcus* ἐντὸς *habet, pro eo, quod est* ἐκτὸς.

B Ostensum enim est intra cadere.] *Positum enim est in duodecima huius, si conoidum, aut sphæroidum figurarum quælibet plano secetur per axem: lineas ductas à punctis, quæ in figuræ superficie sunt, non in sectione ipsa, perpendiculares ad planum secans, intra figuræ sectionem cadere: quod & nos ibidem propositione tertia demonstrauimus.*

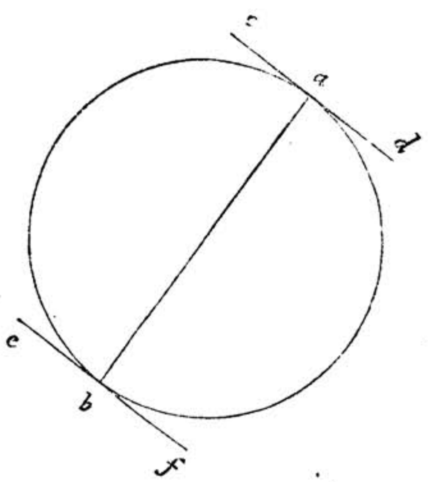
IN PROPOSITIONEM XVIII.

A Necesse est igitur idem esse planum ductum per axem, & per utrunque contactum.] *Sit sphæroides a b c d, cuius axis a c: & sint duo plana æquidistantia, quæ id contingant, non erecta super axem e f, g h: contingat autem e f planum sphæroides in puncto b: & g h in d. Dico unum, atque idem esse planum, quod per axem, & per utrunque contactum ducitur; alioquin erunt duo plana super idem planum erecta, transeuntia per eandem lineam, quæ super planum illud erecta non sit. planum enim per axem ductum, & per contactum b, erectum erit & super planum e f, ex præmissa; & ex decima quarta undecimi Eucl. super planum g h, ei æquidistans. Eadem quoque ratione planum ductum per axem, & per d contactum erectum erit super utrunque planum e f, g h. quare duo plana ducta per eandem lineam; hoc est per axem a c, quem super plana illa æquidistantia non esse erectum ante posuimus, erunt*



erecta super idem planum, uidelicet super e f, aut super g h: quod fieri non potest. sequeretur enim ex eo trianguli duos angulos æquales esse duobus rectis. idem ergo planum erit, in quo & axis & contactus ipsi habentur: quod fuerat demonstrandum.

At si duæ rectæ lineæ inter se æquidistantes acutianguli coni sectionem cō tingant &c.] *Monstrabitur id ex elementis conicis, non solum in ellipsi, sed & in circulo. Sit ellipsis, uel circulus a b: sintq́; c d, e f rectæ lineæ æquidistantes, quæ ellipsim, uel circulum contingant; c d quidem in puncto a; e f autem in b: & iungantur puncta contactuum ducta a b. Dico a b per centrum transire. nisi enim transeat per centrum: coibunt ipsæ c d, e f, ex uigesima septima secundi Apollonij: quod est absurdum; nam positæ sunt æquidistantes. ergo a b per centrum transibit, atque in eadem recta linea erunt & centrum, & contactuum puncta: quod monstrare uolebamus.* B

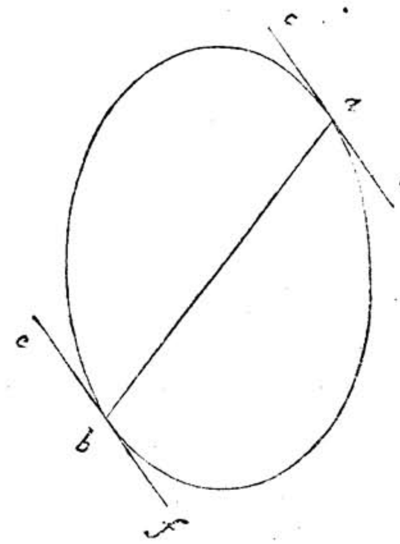


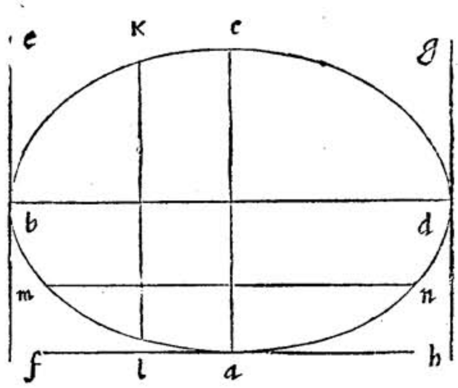
IN PROPOSITIONEM XIX.

Sit enim sectio sphæroidis a b c d acutianguli coni sectio.] *Non erit sectio ea semper coni acutianguli sectio, uel ellipsis, sed quandoque circulus: cum scilicet planum erectum sit super axem: quod & ipse Archimedes postea innuit.* A

Transibit igitur ea per centrum.] *Per ea, quæ proxime ostendimus in ellipsi, & circulo.* B

Constat lineas ductas à punctis a c æquidistantes ipsi b d contingere sectionem: & extra sphæroides cadere.] *Quoniam enim a c, b d diametri sunt sectionis, uel principales, uel ex generatione: sumpto in ea qnolibet alio puncto m, & per m ducta m n, æquidistanti b d, secabit a c ipsam m n bifariam. ergo ex sexta secundi conicorum, quæ sectionem contingit ad a punctum, æquidistans est ipsi m n. quare & ipsi b d. quæ igitur ab a ducta est æquidistans ipsi b d, contingit sectionem; & similiter ostendetur, quæ à c ducitur eidem b d æquidistans, sectionem contingere. sequitur ergo, ut extra sphæroides cadant: quod erat ostendendum.* C





Quod si planum æquidistans contingentibus planis non ducatur per centrum &c.] *Ducta enim per k æquidistans ipsi b d, cadet extra sectionem ad partes b, in quibus minor est portio; ad partes uero d, intra; nanque eam diameter a c secabit bifariam, ex quadragesima septima primi conicorum. Quòd si quis contendat, extra sectionem cadere omnino; tanget sectionem in k: & coibit cum diametro b d, ex uigesima quinta eiusdem; quod est absurdum;* D *surdum; nam posita est eidem b d æquidistans. Eadem erit demonstratio, & in ipso circulo.*

IN PROPOSITIONEM XXI.

A Cadet eius superficies extra portionem, quia uel conoides est, uel sphæroides, non maius dimidio sphæroide.] *Si quidem conoides est: cadet superficies cylindri extra portionem eius, ex decima sexta huius. si uero est sphæroides, ex decima nona idem continget.*

B Erit tandem residuum minus proposita solida magnitudine.] *Ex prima decimi Euclidis.*

C Et à diuisionibus ducantur rectæ lineæ æquidistantes ipsi a c ad coni usque sectionem.] *Coibunt enim hæ cum sectione ipsa, ex decima nona primi conicorum.*

IN PROPOSITIONEM XXII.

A Et quoniam positum est planum abscindens portionem non esse erectum super axem, sectio erit acutianguli coni sectio.] *Ex decima quinta huius.*

B Contingit hoc figuram in b.] *Ex secunda parte decimæ septimæ huius.*

C Et si quidem portio sit rectanguli conoidis &c.] *Secabit ea lineam a c in partes æquales, ex quadragesima sexta primi conicorum.*

D Si uero conoidis obtusianguli: à uertice coni continentis conoides &c.] *Et hoc quoque pacto linea a c in partes æquales secabitur, ex quadragesima septima primi conicorum.*

E Quòd si spheroidis sit portio: linea à centro ducta ad b, intra portionem recipiatur b d. manifestum est &c.] *Sic legendum, ut opinor. uidentur enim in græco codice desiderari hæc.* ἀπὸ τοῦ κέντρου, *ad hunc modum* εἰ δὲ σφαιροειδέος ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ β ἀχθεῖσα εὐθεῖα, *sequitur autem illud ex eadem quadragesima septima primi conicorum.*

F Fieri igitur potest, ut cylindrus inueniatur axem habens b d &c.] *Ex decima huius.*

G Vsque ad coni sectionem.] *Cum enim æquidistent ipsi a c: & ipsi y u æquidistabunt. quare ex decima octaua primi conicorum, productæ in utranque partem coibunt cum sectione.*

H Et erunt acutiangulorum conorum sectiones similes ei, quæ est circa diametrum a c.] *Ex corollario decimæquintæ huius.*

IN PROPOSITIONEM XXIII.

A Erit igitur conus z dimidium totius cylindri: quoniam eiusdem coni est sesquialter.] *Nam cylindrus triplus est coni basim eandem, & æqualem altitudinem habentis: quod ipse Archimedes paulo ante posuit, & demonstrauit Euclides propositione decima duodecimi libri.*

B Et quoniam circumscripta figura minus excedit inscriptam, quàm portio conum: perspicuum est figuram inscriptam cono z maiorem esse.] *His enim sic stantibus, portio conoidis ad conum z habebit maiorem proportionem, quàm circumscripta figura ad inscriptam: & permutando per uigesimam septimam quinti Euclidis ex traditione campani, portio conoidis ad circumscriptam figuram maiorem habebit, quàm conus z ad inscriptam. Sed circũscripta figura maior est portione conoidis. ergo & inscripta multo maior erit cono z.*

8.quinti

C Primus autem cylindrus eorum, qui in toto sunt cylindro axem habens d e ad primum cylindrum &c.] *Qui enim eadem altitudine sunt cylindri, proportionem habent candem quam eorum bases. At uero quam proportionem habet circulus circa diametrum a c; hoc est basis primi cylindri eorum, qui sunt in toto cylindro, ad circulum circa diametrum k l; ad basim scilicet primi cylindri, in figura inscriptorum, eandem habet quadratum diametri a c ad quadratum diametri k l: & pariter quadratum semidiametri d a ad quadratum semidiametri k e. ergo cylindrus ad cylindrum candem habet proportionem, quam quadratum d a ad quadratum k e.*

11.duode. 2.duodec. 15.quinti.

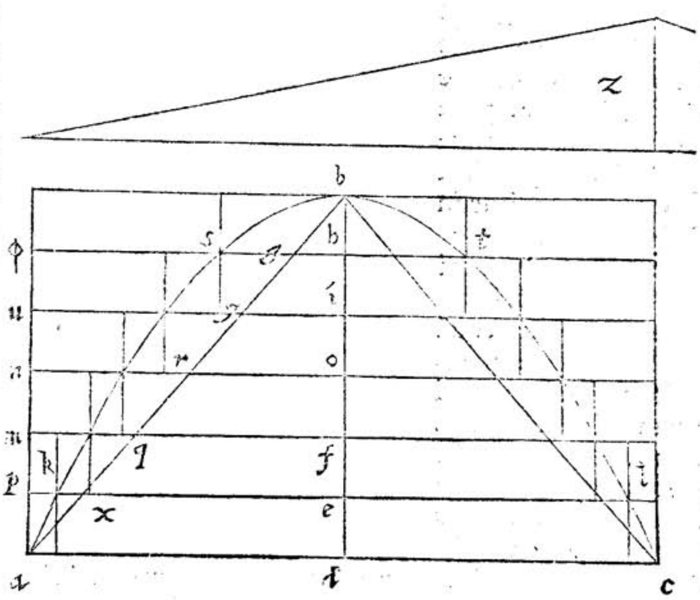
D Hæc autem eadem est ei, quam b d habet ad b e. [*Ex uigesima primi conicorum.*

E Et ei, quam d a ad e x.] *Ex quarta sexti. æquiangula enim sunt triangula b a d, b x e.*

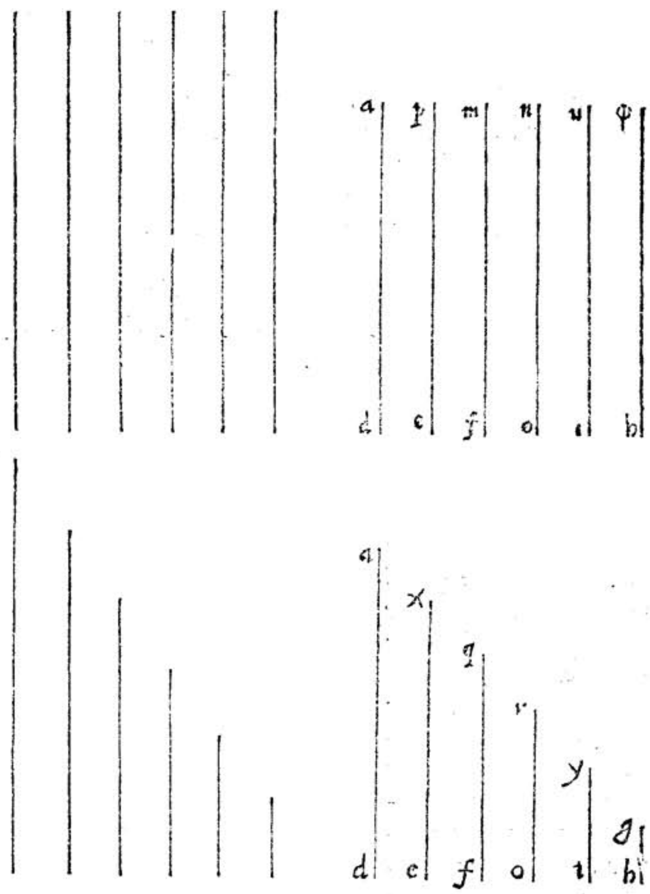
F Similiter ostendetur & secundus cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro &c.] *Per eadem enim, quæ prius, ostendetur primus cylindrus, eorum, qui sunt in toto cylindro ad secundum*

cundum cylindrum eorum, qui in figura inſcripta, eam habere proportionem, quam habet a d ad q f, & cum ſecundus cylindrus eorum, qui ſunt in toto cylindro, æqualis ſit primo; & ipſe oſtendetur ad ſecundum eorum, qui in figura inſcripta, eandem habere proportionem, quam habet p e; hoc eſt a d ad q f. & ita deinceps in reliquis.

Et omnes cylindri, qui in eo cylindro continentur, cuius baſis eſt circulus circa G
diametrum a c, & axis d b.] *In græco codice ita habetur.* καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξων δὲ ἐστὶν ἁ δ ι εὐθεῖα, *& reliqua, & pau* H
lo poſt, ὥστε καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, οὗ ἄξων ὁ δ ι. *ſed legendum, ut opinor,* δ β *utrobique, non* δ ι: *& infra.* πολλῷ ἄρα καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος, *expungendum illud* πολλῷ. *niſi enim omnes aſſumantur cylindri, qui in toto cylindro ſunt, cuius axis d b, non uideo, quo pacto demonſtrari poſſint eſſe maiores, quàm dupli figuræ inſcriptæ, cum non ſint. cylindri nanque omnes in cylindro contenti, cuius axis eſt d i, tantum abeſt, ut ſint maiores, quàm dupli inſcriptæ figuræ, ut etiam ſint multo minores.*



Quod ut manifeſte pateat, ſit m f ſemidiameter baſis tertij cylindri, eorum, qui ſunt in toto cylindro: & n o ſemidiameter baſis quarti cylindri: pars uero eius interiecta inter a b, b d ſit r o: quinti cylindri baſis ſemidiameter ſit u i: & y i pars eius inter eaſdem lineas intermedia: ſexti uero cylindri ſemidiameter baſis ſit φ h, & pars eius intermedia g h. primus igitur cylindrus eorũ, qui in toto cylindro continentur, axem habens d e ad primum cylindrũ eorum, qui continentur in figura portioni inſcripta, cuius idem eſt axis, eam proportionem habet, quam linea a d ad lineam x e: & ſecundus cylindrus eorum, qui ſunt in toto cylindro axem habens e f ad ſecundum cylindrum figuræ inſcriptæ, cuius idem axis, eam habet proportionem, quam linea p e; hoc eſt a d ad q f: & tertius cylindrus ad tertium eam habet, quam m f ad r o: & item quartus ad quartum, quam n o ad y i: & quintus ſimiliter ad quintum, hoc eſt ad ultimum eorum, qui in figura inſcripta, quam u i ad g h: ſextus autem cylindrus, hoc eſt ultimus eorum, qui in toto ſunt cylindro, non habet alium in figura inſcripta, ad quem referatur; nec item linea φ h habet lineam ei reſpondentem. ſunt igitur quædam magnitudines, ſex uidelicet cylindri, qui in toto cylindro ſunt, quorum unuſquiſque habet axem æqualem ipſi d e: & aliæ item magnitudines, lineæ, quæ ſunt ſemidiametri baſium eorum cylindrorum, numero illis æquales, uidelicet a d, p e, m f, n o, u i, φ h: & quam proportionem habent prius ſumptæ magnitudines, eandem habent & poſterius ſumptæ; quoniam cylindri ſunt æquales inter ſe ſe, & lineæ item æquales: referunturq; è ſex cylindris, quinque ad alios quoſdam cylindros in figura inſcripta contentos; extremus autem ad nullum refertur. & ſimiliter è ſex lineis, quinque tantum referuntur ad quaſdam alias lineas, & eiſdem proportionibus; cum extrema non habeat, ad quam referatur. Quare ex ſecunda huius omnes cylindri, qui ſunt in toto cylindro, ad omnes cylindros in figura inſcripta contentos, eam proportionem habent, quam omnes lineæ a d, p e, m f, n o, ui, φ h ad omnes lineas x e, q f, r o, y i, g h. At ſex illæ lineæ cum his quinque comparatæ ex prima huius, maiores ſunt, quàm duplæ; nanque cum lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, exceſſu, qui ſit æqualis minimæ, dempta maxima earum, comparantur totidem lineæ, omnes maximæ illarum æquales: quod ſic patet. Quam enim proportionem habet b d ad b e, eandem habet ex quarta ſexti a d ad x e: & quam habet b e ad b f, eandem habet x e ad q f: & quam *bf ad bo, eandem qf ad ro: & ita de reliquis. sed cum lineæ bd, be, bf, bo, bi, bh sese æqualiter excedant, & excessus sit æqualis minimæ; hoc est ipsi bh: & lineæ ad, xe, qf, ro, yi, gh sese æqualiter excedent, excessu minimæ earum æquali. ex quibus sequitur, Omnes cylindros, qui sunt in toto cylindro, cylindrorum in figura inscripta contentorum, maiores esse, quàm duplos. quare et totus cylindrus, cuius axis est bd erit maior, quàm duplus figuræ inscriptæ; quod mõstrare oportebat.*



K Quoniam igitur inscripta figura minor est portione: & inscripta à circumscripta minus exceditur, quã portio à cono: manifestum est, circumscriptam minorem esse z cono.] *Rursus cum ita sit: conus z ad portionem conoidis, maiorem habet proportionem, quàm circumscripta figura ad inscriptam; & permutando conus z ad circumscriptam figuram, maiorem habet, quàm portio conoidis ad inscriptam. sed inscripta figura minor est portione conoidis. circumscripta igitur multo minor erit cono z.*

L Ergo & omnes cylindri, qui in toto cylindro sunt cuius axis db ad omnes cylindros in figura circumscripta contentos &c.] *Hæc omnia necessariam habent demonstrationem, ex prima parte primæ, & secundæ huius, iisdem, sicuti prius, dispositis; præterquam quòd hic utrobique æquales numero assumuntur magnitudines.*

COROLLARIUM.

Ex his constat cuilibet portioni conoidis rectanguli abscissæ plano super axem erecto, conum illum rectum esse æqualem, qui basim habeat eandem portioni, & axẽ, qui ad axem portionis proportionem habeat sesquialteram.

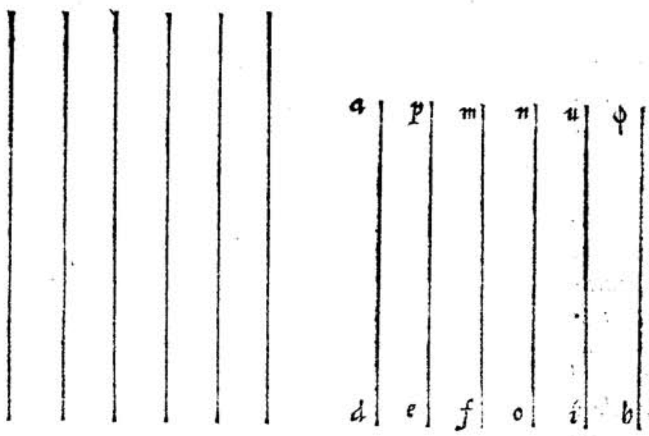
IN PROPOSITIONEM XXIIII.

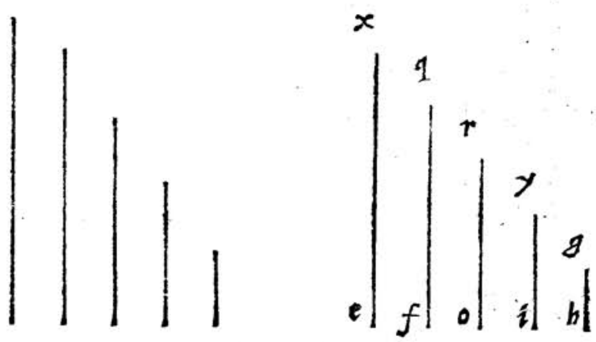
A Quæ lineam ac bifariam secabit.] *Ex quadragesima sexta primi conicorum, ut etiam superius est adnotatum.*

B Sectio est acutianguli coni sectio.] *Ex decima tertia huius.*

C Fieri potest, ut cylindrus inueniatur axem habens in recta linea bd.] *Ex decima huius.*

D Fieri itidem potest, ut & conus inueniatur uerticem habens b punctum &c.] *Ex*





Ex nona huius.

Et plana portionum pertingent ad superficiem portionis &c.] *Quoniam & lineæ, per quas plana ducuntur ex utraque parte productæ ad coni sectionem perueniunt, ut in uigesima secunda huius dictum est.*

Nam portiones æqualem habentes altitudinem adinuicem sunt sicuti bases.] *Quo modo hoc monstretur, diximus in undecimam huius, propositione secunda.* F

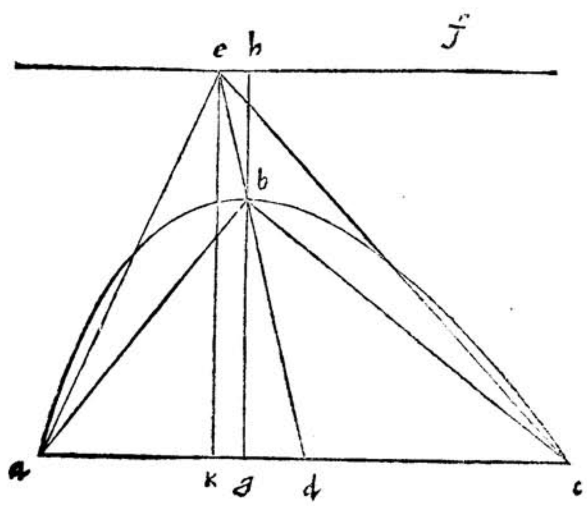
Bases autem, quoniam similes acutiangulorum conorum sect iones sunt, eandem proportionem &c.] *Ex septima huius.* G

Eandem habet b d ad b e longitudine.] *Corrigendus est hoc loco græcus codex, nanque habet* δυνάμει, *pro eo, quod est,* μήκει. *sequitur autem id ex uigesima primi conicorum, quòd paraboles a b c, in qua uertex b, diameter ex generatione fit ipsa b d.* H

COROLLARIVM.

Colligitur etiam ex his, cuilibet portioni conoidis rectanguli abscissæ plano non erecto super axem, coni portionem illam esse æqualem, quæ basim habeat eandem, & axem axis portionis sesquialterum, qui cum diametris basis consimilibus æquales angulos contineat.

Sit enim conoidis rectanguli portio a b c, cuius basis spatiũ coni acutianguli sectione circa diametrũ a c contentum, & axis b d: sitq; portio coni a b c, basim habens eandem portioni, & axem eundem. erit iam portio conoidis portionis coni sesquialtera. producatur autem d b usque ad e; ita, ut e d sit sesquialtera ipsius b d: & intelligatur coni portio a e c, cuius basis eadem portionibus di



ctis, & axis e d. Dico portionem coni a e c æqualem esse conoidis portioni a b c. secetur enim coni portio a e c plano per axem ducto: & sit sectio triangulum a e c: & per e ducatur linea e f, æquidistans ipsi a c: à puncto autem b perpendicularis ad lineam a c demittatur b g: & producatur quousque secet e f in h: & ab e rursus demittatur alia perpendicularis e k ad a c. erunt iam triangula g b d, h b e similia. quare h b ad b e erit, ut g b ad b d: & permutando, componendoq; h g ad b g, ut e d ad b d. sed erat e d sesquialtera ipsius b d. sesquialtera est igitur & h g; hoc est e k ipsius b g. super æqualibus autem basibus existentes coni portiones eandem inter se proportionem habent, quam altitudines; ut nos supra ostendimus ad undecimam huius, propositione quarta. coni igitur portio a e c sesquialtera est coni portionis a b c: nam e k altitudo est portionis coni a e c: & b g altitudo ipsius a b c portionis. Quòd cum sit & conoi-

9. quinti. *dis portio a b c sesquialtera portionis coni a b c: erit a e c portio æqualis portioni conoidis a b c; ut dicebamus.*

IN PROPOSITIONEM XXV.

A Et quoniam sunt æquales b h, k l, & ipsæ c h, a q æquales erunt.] *Ostensum est hoc in quarta huius.*

B Sed coni portio, cuius uertex l, & conus, cuius uertex b habent inter se proportionem compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.] *Ex ijs, quæ nos ostendimus ad undecimam huius, propositione octaua.*

C Quare portio coni, cuius uertex l ad conum, cuius uertex b compositam habet proportionem ex ea, quam habet k a ad e h, & ex ea, quam l m ad b h.] *Nam quod fit ex diametris sectionis coni acutianguli ad quadratum e c eam proportionem habet, quam k a ad e h: quod sic patet. ducatur à puncto a æquidistans ipsi l k; quæ sit a n: & ab f ducatur f n æquidistans ipsi e c; quæ coeat cum a n in puncto n: linea autem f n secet lineam l k in o. erit altera diameter sectionis coni acutianguli æqualis lineæ f n; ex decima tertia huius; & erit f n æ-*

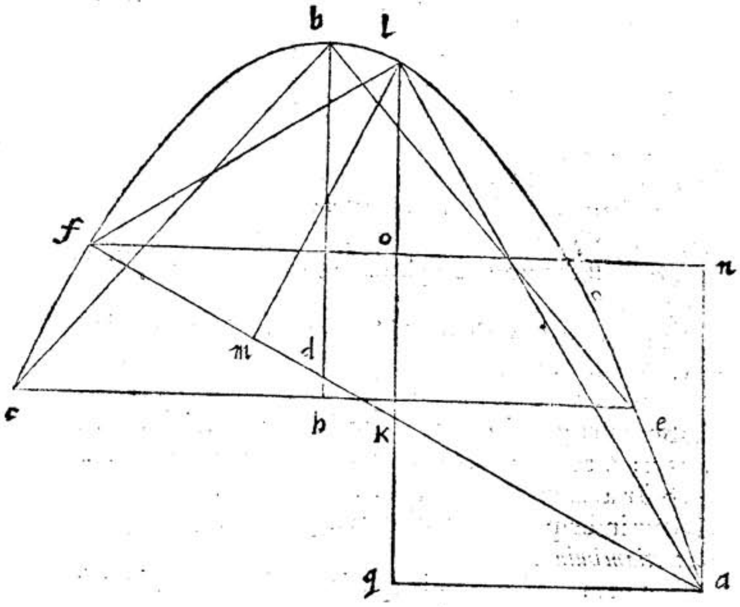
2. sexti. *qualis ipsi e c. nanque f o ad o n est, ut f k ad k a: & componendo f n ad o n, ut f a ad k a. sed k a est dimidia ipsius f a. ergo & o n dimidia est ipsius f n. & est o n æqualis h e; utraque enim æqualis ipsi q a. lineæ igitur f n, c e, quarum dimidiæ sunt æquales, & ipsæ æquales sunt; & æquales alteri diametro sectionis coni acutianguli, cuius maior diameter est f a. habet autem eiusmodi sectio ad circulum, cuius diameter est c e eam proportionem, quam rectangulum ex f a, c e ad qua-*

1. sexti. *dratum c e; ex sexta huius; hoc est, quam f a ad c e; cum eandem altitudinem habeat: & quam earum dimidiæ k a ad e h: quod monstrare uolebamus.*

D Habetq; l m ad k l eam, quam q a ad a k.] *Aequiangula enim sunt triangula l m k, a q k.*

E Earum autem proportionum, quæ est a k ad a q eadem est ei, quæ l k ad l m.] *Ostensum est supra, q a ad a k eam habere proportionem, quam l m ad l k. quare & conuertendo a k ad q a habet eandem, quam l k ad l m.*

F Perspicuum est igitur portionem coni, cuius uerte xl æqualem esse cono, cuius uertex



uertex b.] *Concluditur ex ante dictis portionem coni, cuius uertex est l, ad conum, cuius uertex b, eam habere proportionem, quam habet lk ad bh. nam utraque harum proportionum componitur ex iisdem proportionibus; ex ea scilicet, quam habet lk ad lm; & ex ea, quam lm ad bh; Quòd cum lk, bh sint æquales: & portio coni, cuius uertex l, & conus, cuius uertex b sunt æquales: & insuper portiones conoidis æquales. portio enim, cuius uertex l sesquialtera est portionis coni, ex antedicta; portio uero, cuius uertex b ex uigesima tertia huius, est etiam ipsius coni sesquialtera.*

IN PROPOSITIONEM XXVI.

Itaque conus, cuius axis b d ad conum, cuius axis b h proportionem habet compositam ex ea, quam habet a d ad h e potestate, & ex ea, quam b d habet ad b h longitudine.] *Nam circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum e f proportionem habet eam, quam quadratum a c ad quadratum e f; ex prima duodecimi: & propterea etiam eam, quam quadratum semidiametri a d ad quadratum semidiametri h e; hoc est, quam habet a d ad h e potestate.* A 15.quinti.

Quam uero proportionem habet a d ad h e potestate, eandem habet longitudine b d ad b h.] *Ex uigesima primi conicorum.* B

Hæc autem eadem est ei, quam d b quadratum habet ad quadratum h b.] *Ex uigesima tertia sexti.* C

IN PROPOSITIONEM XXVII.

Et quæ tripla lineæ ad axem adiectæ.] *Linea ad axem adiecta est (ut ipse in principio scribit) quæ interijcitur media inter uerticem conoidis, & uerticem coni continentis conoides; hoc est, quæ in ipsa hyperbola, dimidia est transuersi lateris figuræ. Inferius eam, quæ ex centro appellat unà cum Apollonio.* A

Et quoniam circumscripta figura inscriptam minus excedit quàm portio conum z.] *Vnde hoc sequatur, dictum est superius in uigesima tertia huius.* B

Sit igitur b r tertia pars ipsius b d, erit g d ipsius h r tripla.] *Nam g b tripla est h b: & b d item tripla b r. quare ex prima quinti g b & b d iunctæ; hoc est g d tripla est h b & b r; hoc est ipsius h r.* C

Et

D Et quoniam cylindrus, basim habens circulum circa diametrum a c,& axem b d.] *Ex decima duodecimi Euclidis.*

E Proportionibus non similiter ordinatis habebit dictus cylindrus ad z conũ &c.] *Codex græcus mendosus est, & fortasse ita restituendus, ut in decima tertia huius,* ἕξῃ οὖν ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων τὸν αὐτὸν λόγον, *&c. procedit autem hæc demonstratio ex uigesima tertia quinti Euclidis. Nam quoniam cylindrus ad conum basim eandem habentem & eundem axem, eam proportionem habet, quam g d ad h r: & conus ad conum z habet eam, quam f d ad g d. ex æquali igitur cylindrus ad conum z habebit eam, quam f d ad h r.*

F Quod in omni obtusianguli coni sectione contingit.] *Ita esse demonstrat Apollonius uigesima prima propositione primi conicorum.*

G Manifestum ergo est, & omnes cylindros, qui in toto cylindro sunt, ad cylindros, &c.] *Ex secunda huius.*

H Ostensum est autẽ omnia spatia 9 ad illa omnia dempto maximo, &c.] *Ex secunda parte tertiæ huius. ubi autem in græco codice impresso legitur* δεικτέον δὲ, *scribendum* δέδεικται δὲ, *ut etiam habent antiqui codices.*

I Maiorem habere proportionem, quàm linea m x ad lineam utrisque æqualem; & dimidiæ ipsius x; & tertiæ parti m.] *Hoc est maiorem, quàm f d ad h r. est enim f d æqualis ipsi m x; & h r æqualis dimidiæ x, & tertiæ parti ipsius m.*

K Quoniam igitur inscripta figura minor est portione, &c.] *Vide quæ scripsimus supra in uigesimam tertiam huius.*

L Ostensum est autem rursus omnia spatia 9 ad alia omnia minorem proportionem, &c.] *Ex prima parte tertiæ huius.*

COROLLARIVM.

Manifestum est ex modo demonstratis, cuilibet portioni conoidis obtusianguli abscissæ plano super axem erecto, conum illum rectum esse æqualem, cuius basis sit eadem, & axis, qui ad axem portionis, proportionem habeat, quam utraque linea; & quæ sit æqualis axi portionis, & quæ tripla lineæ ad axem adiectæ, habet ad lineã utrique æqualem; axi portionis, & ei, quæ sit dupla lineæ ad axem adiectæ.

IN PROPOSITIONEM XXVIII.

A Secabit eadem ratione bifariam ipsam a c.] *Ex ijs, quæ dicta sunt in uigesima secunda huius. id uero monstrauit Apollonius quadragesima sexta primi conicorum.*

B Quod conoides in b puncto continget.] *Ostenditur id in decima septima huius.*

C Sectio erit acutianguli coni sectio, cuius diameter maior c a.] *Ex decima quarta huius.*

D Cylindrum inuenire poterimus habentem axem in recta linea b d, &c.] *Ex decima huius.*

E Rursus & conum inuenire poterimus uerticem habentẽ punctum b, &c.] *Ex nona.*

F Hoc inuento erit portio coni basim habens eandem dictis portionibus, & axem eundem.] *Græcus codex ita restituendus est, ut mihi uidetur.* εὑρεθέντος οὖν ἐσσεῖται τὸ ἀπότμημα κώνου βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷτε τόμῳ, καὶ τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

G Dico portionem conoidis cono z esse æqualem.] *Et hoc loco, ut opinor, ita restituendus est, corrigendusq; græcus codex.* φαμὶ δὴ τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον εἶμεν τῷ ψ κώνῳ. εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τῷ κώνῳ τῷ ψ, εἰ δυνατὸν, ἔστω μείζων.

H Bases autem cum similes acutiangulorum conorum sectiones sint &c.] *In græco codice desiderantur hæc,* αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν. *sequitur autem id ex corollario decimæ quintæ huius, & ex septima.*

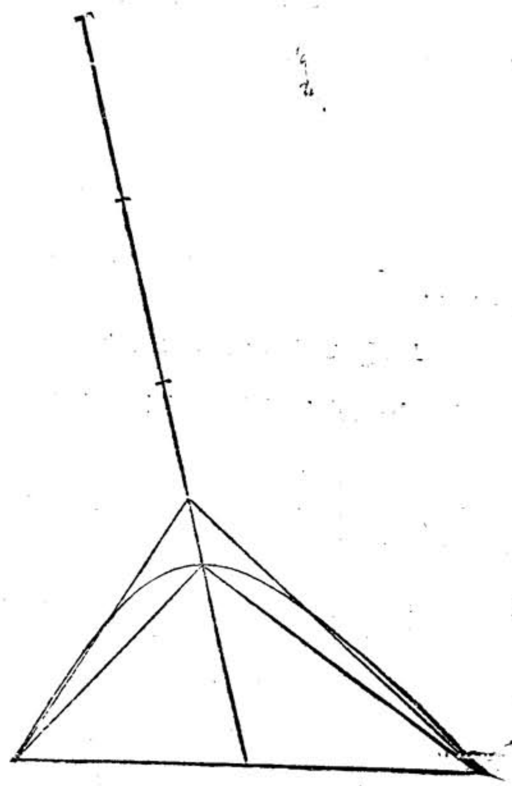
I Quam uero proportionem quadratum a d habet ad quadratum k e, eandem habet rectangulum f d b ad rectangulum f e b &c.] *Ex uigesima primi conicorum, quòd b d diameter sit sectionis coni obtusianguli; & b f transuersum figuræ latus.*

K Quoniam f d ducta est per h, in quo lineæ, quæ sunt sectioni proximæ conueniũt.] *Idem*

Idem eſt, ac ſi dixiſſet. Quoniam f d ducta eſt per uerticem coni continentis conoides. in eo enim conueniunt lineæ quas Archimedes τὰς ἔγγιςα τᾶς τομᾶς, hoc eſt proximas ſectioni appellat. Apollonius autem τὰς ἀσυμπτώτυς τῆ τομῆ, id eſt, non coeuntes cum ſectione, ut in principio diximus.

COROLLARIVM.

Manifeſtum eſt etiam ex iam dictis, & iis, quæ nos ſupra monſtrauimus ad finem uigeſimæ quartæ huius, cuilibet portioni conoidis obtuſianguli abſciſſæ plano ſuper axem non erecto, coni portionem illam eſſe æqualem, cuius baſis ſit eadem, & axis cum diametris baſis æquales angulos continens, qui ad axem portionis eãdem proportionem habeat, quam habet linea utriſque æqualis; axi portionis, & triplæ eius, quæ ad axem adiecta eſt, ad lineam utriſque æqualem; axi portionis, & lineæ, quæ ſit dupla lineæ ad axem adiectæ.



IN PROPOSITIONEM XXIX.

Latitudinem habens una parte maiorem, quàm ſit latitudo gnomonis proxime ablati.] *Codex græcus hoc loco ita currigendus eſt.* πλάτος μὲν ἔχων ἐνὶ τμάματι μεῖζον τῦ πλατέος. A

Quare & quam rectangulum b h d ad rectangulum b e d.] *Ex uigeſima prima primi conicorum.* B

Hoc enim in iis, quæ de ſpiralibus lineis edidimus, demonſtratum eſt.] *In corollario uidclicet decimæ propoſitionis.* C

COROLLARIVM.

Ex iis, quæ ſuperius demonſtrata ſunt conſtat, quodlibet ſphæroides duplum eſſe coni illius recti, qui baſim quidem habeat circulum circa ſphæroidis diametrum, axem uero axi ſphæroidis æqualem. Et inſuper cylindrum rectum, qui baſim habeat eandem dicto cono, & axem eundem, ipſius ſphæroidis eſſe ſeſquialterum.

Is namque cylindrus triplus eſt coni; ſphæroides autem eiuſdem coni eſt duplum, ut diximus, ex quo ſequitur cylindrum ſphæroidis ſeſquialterum eſſe.

IN PROPOSITIONEM XXX.

Quæq; ipſa b d iungit recta linea per h tranſibit; & erunt portionum uertices A b d; axes uero b h, h d.] *Ex decima octaua huius.*

B Et portio cylindri basim habens eandem portioni, & axem eundem.] *Codex græcus ita corrigendus.* καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦ μὲν τοῦ κώνου ἡμιόλιος ἐών, *& reliqua, & paulo post* οὐκ ἔσται οὖν μεῖζον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ τοῦ κώνου, εἰ δὲ ἔλασσον ἐστὶν ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρου τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον.

COROLLARIVM.

Ex iam dictis similiter manifestum est, quodlibet sphæroides duplum quoque esse coni portionis, quæ sphæroide ipso secto plano per centrum transeunte, non autem super axem erecto, basim habeat eandem portioni sphæroidis, & axem æqualem lineæ portionum sphæroidis uertices iungenti, qui cum diametris basis æquales angulos contineat. Et cylindri item portionem, quæ basim habeat eandem coni portioni iam dictæ, & axem eundem, esse etiam ipsius sphæroidis sesquialteram.

Est enim cylindri portio, portionis coni tripla: & sphæroides duplum eiusdem. ex quibus patet propositum.

IN PROPOSITIONEM XXXI.

A Et quoniam b g tripla est ipsius b h: & b d item tripla ipsius b r: erit & d g ipsius h r tripla.] *Ex decima nona quinti Euclidis. nam si fuerit sicut totum ad totum, sic ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum erit, sicut totum ad totum.*

B Quare proportionibus non similiter ordinatis cylindrus, cuius basis eadem portioni, & idem axis ad conum z eam proportionem habebit, quam d f ad h r.] *Ex uigesima tertia quinti, ut diximus in uigesimam septimam huius.*

C Erit ergo unaquæque n o dupla ipsius h d.] *Sit enim ipsi b d æqualis f m. quoniam h b est æqualis ipsi h f: erit & reliqua m h reliquæ h d æqualis; & propterea m d; hoc est o n dupla ipsius h d.*

D Manifestum est, omnia spatia, quorum unumquodque maximo est æquale ad alia omnia minorem habere proportionem, quàm x n ad lineam &c.] *Ex tertia huius.*

E Quare constat spatia eadem ad omnes gnomones maiorem proportionem habere, quàm x n ad lineam &c.] *Nam si à linea n x auferamus dimidiam n o, & tertiam partem x o: relinquentur dimidia n o, & duæ tertiæ ipsius x o.*

IN PROPOSITIONEM XXXII.

A Et erunt uertices portionum coniuncti ducta linea b f.] *Et ipsam lineam b f Apollonius uocat ellipsis diametrum ex generatione. quare, quam Archimedes sphæroidis portionum uertices iungentem appellat, liceat nobis deinceps breuitatis caussa & sphæroidis axem appellare.*

IN PROPOSITIONEM XXXIII.

A Dicta autem portio dupla est coni basim habentis ipsi eandem, & axem eundem; hæc iam demonstrata sunt.] *In uigesima nona huius.*

B At uero hic conus ad conum habentē pro basi circulum circa diametrum a c &c.] *Ex undecima huius, nam circuli inter se se eandem proportionem habent, quam quadrata diametrorum: & quam item quadrata semidiametrorum.*

C Proportio autem, quam habet quadratum k h ad quadratum e a, eadem est illi &c.] *Ex uigesima prima primi conicorum Apollonij.*

D Habebit igitur rectangulum contentum x d, b h ad rectangulum b h d eam proportionem, quam d h ad d e.] *Cum enim positum sit x d ad h d habere eam proportionem, quam d h ad d e: rectangulum uero contentum lineis x d, b h ad rectangulum b h d, ex prima sexti habeat* ti habeat eam, quam x d ad h d: habebit rectangulum x d, b h ad ipsum b h d eam, quam d h ad d e.

Eam proportionem habet, quam rectangulum b e d ad rectangulum f e d; hoc est quam b e ad e f.] *Ex prima sexti Euclidis.* E

Conus igitur, qui est in dimidio sphæroide &c.] *Per æquam rationem ex uigesima secunda quinti.*

Vtrunque enim quadruplum est.] *Ex prima sexti. nam linea f g quadrupla est lineæ b h.* G

Quare & maior portio sphæroidis ad minorem eam habet, quam excessus, quo rectangulum f g, x d, excedit rectangulum f e d.] *Per diuisam rationem ex decima septima quinti. maior enim portio sphæroidis est excessus, quo totum excedit portionem minorem.* H

Rectangulum autem f g, x d ipsum f e d excedit, rectangulo x d, e g; & rectangulo f e x.] *Nam rectangulum f g, x d; ex prima secundi elementorum, æquale est duobus rectangulis; rectangulo scilicet e g, x d, & rectangulo f e, x d. At uero rectangulum f e, x d, ex eadem, æquale est item duobus rectangulis; rectangulo uidelicet f e x; & rectangulo f e d. rectangulum igitur f g, x d æquale est tribus rectangulis; rectangulo e g, x d; rectangulo f e x; & ipsi f e d. quare rectangulum f g, x d excedit rectangulum f e d, duobus rectangulis; rectangulo scilicet e g, x d; & rectangulo f e x, ut proponebatur.* I

Quam rectangulum f e d ad rectangulum b e d; habet enim eam, quam f e ad b e.] *Corrigendus hoc loco græcus codex.* K

Et conus, qui est in minori portione, ad conum, qui in maiori eam habet, quam rectangulum b e d ad quadratum b e. nam coni altitudinum proportionem habent, cum in eadem sint basi.] *Ex decimæ quartæ undecimi Euclidis. conus enim in minori portione constitutus ad conum, qui in maiori, eam habet proportionem, quam d e ad b e. quam autem proportionem habet d e ad b e, eandem rectangulum d e b habet ad quadratum b e; ex lemmate uigesimæ secundæ decimi Euclidis. quare conus, qui in minori portione, ad conum, qui in maiori habet eam, quam rectangulum d e b ad quadratum b e.* L

Quoniam rectangulum x d, e g ad rectangulum x d e eam habet, quam e g ad e d.] *Ex prima sexti.* M

Et rectangulum f e x ad rectangulum f e h eam, quam e g ad e d. habet enim x e ad h e proportionem eandem, quam e g ad e d &c.] *Rectangulum enim f e x ad rectangulum f e h habet eam proportionem, quam x e ad h e. & quoniam est ut x d ad h d, ita h d ad d e: erit ex decima nona quinti x h ad h e, ut x d ad h d; hoc est ut h d ad d e: & coniungendo x e ad h e, ut h d & d e; hoc est ut e g ad d e. rectangulum igitur f e x ad rectangulum f e h habet eam proportionem, quam e g ad e d.* N 1. sexti.

Quoniam quadratum b h est æquale rectangulo x d e.] *Nam cum sint tres lineæ proportionales x d, h d, d e, ut dictum est; sitq; b h æqualis ipsi h d: erit quadratum b h æquale ei, quod fit ex d x, d e.* O 17. sexti.

Et excessus, quo quadratum b e excedit quadratum b h, est æqualis rectangulo f e h; quòd b h, b f sunt æquales.] *Ex sexta secundi Euclidis.* P

COROLLARIVM.

Ex hac, & trigesima prima colligitur, cuilibet portioni sphæroidis, secti plano super axem erecto, non autem per centrum transeunte, conum illum rectum esse æqualem, qui basim habeat eandem portioni, & axem, lineam habentem ad axem portionis proportionem eam, quam utraque linea; dimidia axis sphæroidis, & axis reliquæ portionis habet ad reliquæ portionis axem.

IN PROPOSITIONEM XXXIIII.
COROLLARIVM.

Sequitur ex hac, & 32, cuilibet portioni sphæroidis secti plano neque super axem erecto, neque centrum transeunte, coni portionem illam esse æqualem, cuius

o basis

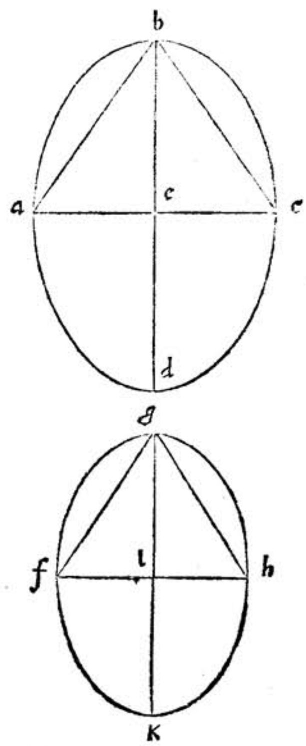
basis eadem portioni & axis cum diametris basis æquales angulos continens, qui ad
3 axem portionis eam proportionem habeat, quam habet utraque linea; & dimidia eius, quæ iungit uertices portionum factarum, & axis reliquæ portionis ad eundem reliquæ portionis axem.

His igitur positis nos augendæ, amplificandæq; doctrinæ gratia, non nulla theorema, et problemata addemus à re non aliena; quorum cognitionem, neque in utilem prorsus, neque studiosis ingratam fore existimauimus.

PROPOSITIO I.

Sphæroidea similia inter se se, & portiones sphæroideon similes, & pariter conoideon, triplam eius, quæ est suorum axim proportionem habent.

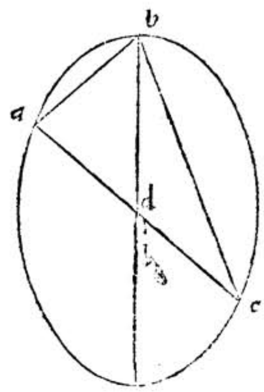
Sint sphæroidea similia; a b c d quidem, cuius axis b d, & centrum e; f g h k uero, cuius axis g k, & centrum l. Dico sphæroides a b c d ad sphæroides f g h k proportionem habere triplam eius, quæ est axis b d ad axem g k. secetur enim eorum utrunque plano per centrum ducto, & erecto super axem: & sit sectio sphæroidis a b c d, linea a c: sphæroidis autem f g h k, linea f h. erit ex uigesima nona huius portio sphæroidis a b c dupla coni, qui basim habet portioni eandem, & eundem axem; hoc est coni a b c: & similiter portio sphæroi
15.quinti. *dis f g h dupla erit coni f g h. quare a b c portio ad portionem f g h habet eam proportionem, quam conus a b c ad conum f g h: & eorum dupla; hoc est conoides a b c d ad conoides f g h k habet eam, quam conus rectus, cuius basis a c, & axis b d, ad conum eiusmodi basim habentem f h, & axem g k. Quòd cum sphæroidea similia sint; erunt & ipsi*
12.duode. *coni similes: & habebit conus ad conum proportionem triplam eius, quæ est diametri basis a c ad diametrum basis f h. hæc autem eadem est proportioni axis b d ad axem g k. conoides igitur a b c d ad conoides f g h k triplam proportionem habet eius, quæ est b d axis ad axem g k.*

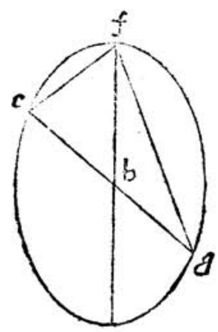


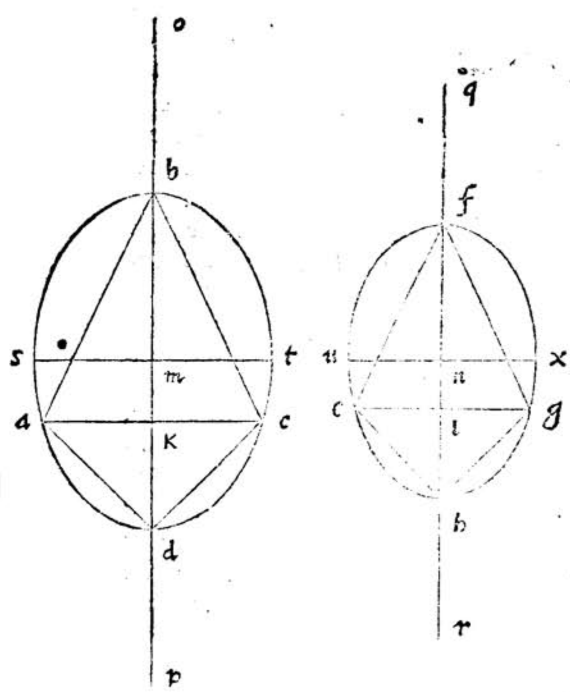
Sint portiones sphæroideon similes; & sint primum abscissæ plano per centrum ducto, & super axem erecto; cuiusmodi sunt in priori dispotione, portiones a b c, f g h. abscinduntur enim similes portiones à figuris similibus, quod ex earum diffinitione apparet. Dico portionem a b c ad ipsam f g h proportionem habere triplam eius, quæ est axis b e ad axem g l. monstratum nanque antea est portionem a b c ad portionem f g h esse, sicut conus a b c ad conum f g h. qui coni cum similes sint: habent inter se se proportionem triplam eius, quæ est diametri basis a c ad diametrum basis f g; hoc est axis b e ad axem g l. quare & portio a b c ad portionem f g h habet proportionem triplam eius, quæ est axis b e ad axem g l.

Sint portiones sphæroideon similes, abscissæ plano per centrum quidem ducto, non autem erecto super axem; a b c, cuius axis b d; & e f g, cuius axis f h. Dico portionem sphæroidis a b c ad ipsam e f g habere proportionem triplam eius, quæ est axis b d ad axem f h. est enim portio sphæroidis a b c, ex trigesima huius, dupla portionis coni a b c: & portio sphæroidis e f g item dupla portionis coni e f g. Quare sphæroidis portio ad portionem sphæroidis est, ut coni portio ad portionem coni. sed coni portio a b c ad coni portionem e f g proportionem habet triplam eius, quæ est diametri basis a c ad diametrum basis e g, ipsi respondentem, ut nos monstrauimus ad undecimam huius, propositione 9. hæc autem eadem est proportioni axis b d ad axem f h, ex diffinitione similium coni portionum quã supra attulimus. ergo & sphæroidis portio a b c ad sphæroidis portionẽ e f g proportionem habet triplam axis b d ad axem f h.

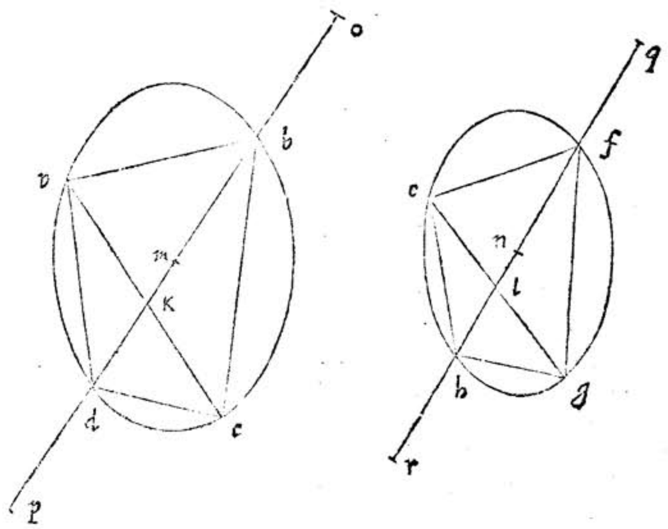
Sint rursus sphæroideon a b c d, e f g h portiones similes, abscissæ plano non per centrum ducto, sed erecto super axem, quæ sint maiores dimidio sphæroide; a b c quidem, cuius axis b k; e f g uero, cuius axis f l. Dico portionem a b c ad portionem e f g proportionem habere triplam eius, quæ est axis b k ad axem f l. Sint sphæroideon centra m n: & producantur b d, f h: & addantur utrinque lineæ æquales dimidio axis; ad ipsam quidem b d, lineæ b o, d p, æquales b m: ad ipsam uero f h ipsæ f q, h r, æquales f n. habebit iam portio sphæroidis a b c ad conum a b c proportionem eam, quam linea k p ad lineam k d, ex trigesima tertia huius: & eadem ratione portio sphæroidis e f g ad conum e f g proportionem habebit, quam linea l r ad lineam l h. Sed linea k p ad lineam k d est, ut linea l r ad lneam l h: quod sic patet. secentur sphæroidea a b c d, e f g h plano ducto per axem. fient sectiones, ellipses similes inter se se; quòd sphæroidea similia sint; & erit ellipsis a b c d diameter b d: & ipsius e f g h diameter f h. ducantur secundæ diametri s m t, u n x. quadratum igitur s m ad quadratum b m eam habet proportionem, quàm quadratum u n ad quadratum f n. ut autem quadratum s m ad quadratum b m, ita quadratum a k ad rectangulum b k d: ex uigesima prima primi conicorum; & eadem ratione, ut quadratum u n ad quadratum f n, ita quadratum e l ad rectangulum f l h. ergo quadratum a k ad rectangulum b k d eam habet proportionem, quam quadratum e l ad rectangulum f l h. sed proportio quadrati a k ad rectaugulum b k d composita est ex proportione a k ad b k, & ex proportione a k ad k d. & itidem proportio quadrati e l ad rectangulum f l h composita est ex proportione e l ad f l, & e l ad l h. quarum proportionum, quæ est a k ad b k, eadem est proportioni e l ad f l, cum similes sint portiones. reliqua igitur proportio a k ad k d eadē est reliquæ e l ad l h. ex quo sequitur, & portionem sphæroidis a d c similem esse portioni e h g. Et quoniam b k ad a k est, ut f l ad e l: & a k ad k d, ut e l ad l k: erit ex æquali b k ad k d, ut



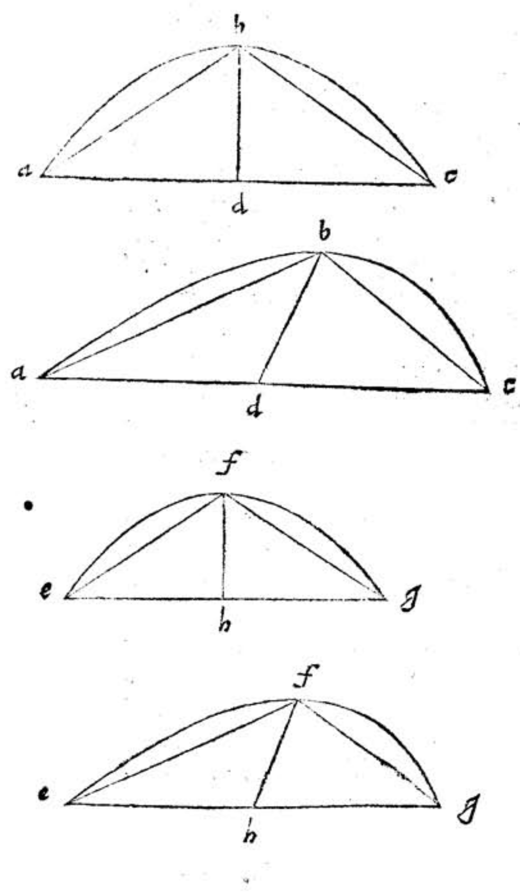




d, ut f l ad l h: & componendo b d ad k d, ut f h ad l h. est autem m d ad b d, ut n h ad f h. quare & m d; hoc est d p ad k d erit ut n h; hoc est ut h r ad l h: & rursus componendo k p ad h d, ut l r ad b h.



Quare portio sphæroidis a b c ad conum a b c eandem habet proportionem, quam portio sphæroidis e f g ad conum e f g: & permutando portio ad portionem eam habet, quam conus ad conum. sed conus ad conum proportionem habet triplá eius, quæ est diametri basis a c ad diametrum basis e g: hoc est eius, quæ est axis b k ad axem f l. portio igitur a b c ad portionem e f g proportionem habet triplam eius, quæ est axis b k ad axem f l. Iisdem manentibus & portiones sphæroideon similes a d c, e h g, quæ sunt minores dimidio sphæroide, habebunt inter se proportionem triplá eius, quæ est suorum axium; hoc est axis k d ad axem l h. monstrabitur enim eadẽ ratione, lineam k o ad lineam k b esse, ut linea l q ad lineam l f. quare ex trigesima prima huius, portio a d c ad conum a d c erit, ut portio e h g ad conũ e h g: & permutando portio ad portionem, ut conus ad conum. sed cùm conus ad conum triplam habeat proportionem eius, quæ est diametri basis a c ad diametrum basis e g; hoc est axis k d ad axem l h: habebit & portio a d c ad portionem e h g triplam eius, quæ est k d ad l h.



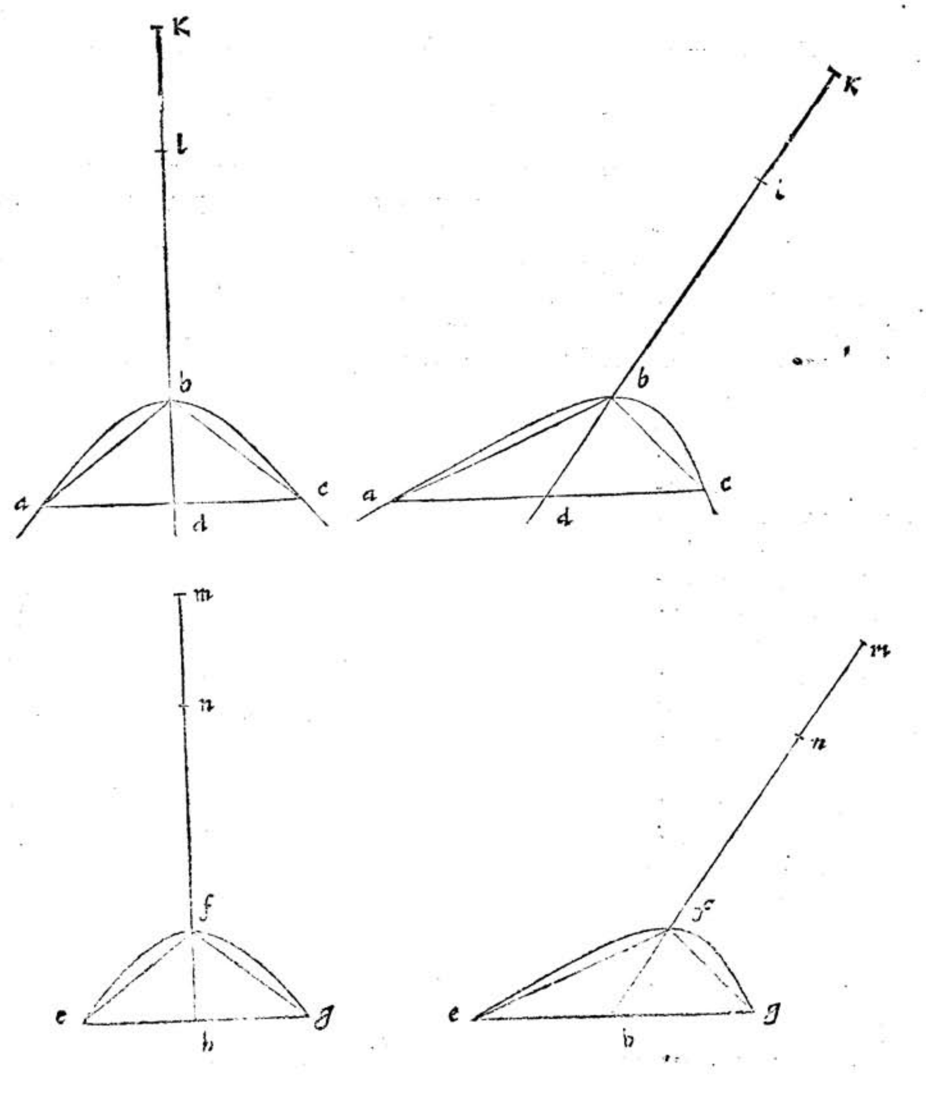
Sint denique sphæroideon a b c d, e f g h portiones similes, abscissæ plano, neque per centrum ducto, neque erecto super axem, quæ sint maiores dimidio sphæroide; a b c quidem, axem habens b k; e f g autem axem habens f l. Dico portionem a b c ad portionem e f g triplam proportionem habere eius, quæ est axis b k ad axem f l. sint sphæroideon centra m, n: & producantur, ut superius, lineæ b d, f h; ita ut sint b o, d p æquales dimidio lineæ b d: & f q, h r æquales dimidio f h. erit ex ultima huius, portio sphæroidis a b c ad portionem coni a b c, ut linea k p ad lineam k d: & similiter portio sphæroidis e f g ad coni portionem e f g, ut linea l r ad lineam l h. Sed cum linea k p ad lineam k d sit, ut linea l r ad ipsam l h; quod eodem, quo superius modo demonstrabimus;

erit portio ſphæroidis a b c ad portionem coni a b c, ut portio ſphæroidis e f g ad coni portionem e f g: & idcirco portio ſphæroidis ad ſphæroidis portionem, ut coni portio ad coni portionem. portionis autem coni ad coni portionem proportio tripla eſt eius, quæ eſt axis ad axem. ergo & portionis ſphæroidis a b c ad portionem ſphæroidis e f g proportio tripla eſt eius, quæ axis b k ad axem f l.

Et ſimiliter demonſtrabimus portiones ſphæroideon ſimiles a d c, e h g minores dimidio ſphæroide proportionem habere triplam eius, quæ eſt ſuorum axium k d, l h. quæ omnia demonſtraſſe oportebat.

Sint portiones conoideon rectangulorum ſimiles, ſiue abſciſſæ plano ſuper axem erecto, ſiue non erecto; a b c, cuius axis b d; & e f g, cuius axis f h. Dico portionem a b c ad portionem e f g proportionem habere triplam eius, quæ eſt b d ad f h. Erit nanque ex uigeſima tertia, & uigeſima quarta huius, portio conoidis a b c ſeſquialtera coni, ſeu portionis coni a b c: & portio conoidis e f g item ſeſquialtera coni, ſeu coni portionis e f g. quare portio conoidis ad conoidis portionem eam proportionem habet, quam conus ad conum, ſeu coni portio ad coni portionem; & proptera triplam habet eius, quæ eſt axis b d ad axem f h.

Sint rurſus portiones conoideon obtuſiangulorum ſimiles, uel abſciſſæ plano ſuper axem erecto, uel non erecto; a b c quidem, cuius axis b d; e f g uero, cuius axis f h. Dico portionem a b c ad portionem e f g proportionem habere triplam eius, quæ eſt b d ad f h. adijciatur ad lineam b d productam, linea b k, quæ ſit æqualis triplæ lineæ ad axem adiectæ: ſit autem b l æqualis duplæ eiuſdē: & ad lineam f h adijciatur linea f m, æqualis triplæ lineæ ad axem adiectæ: & ſit f n, æqualis du-

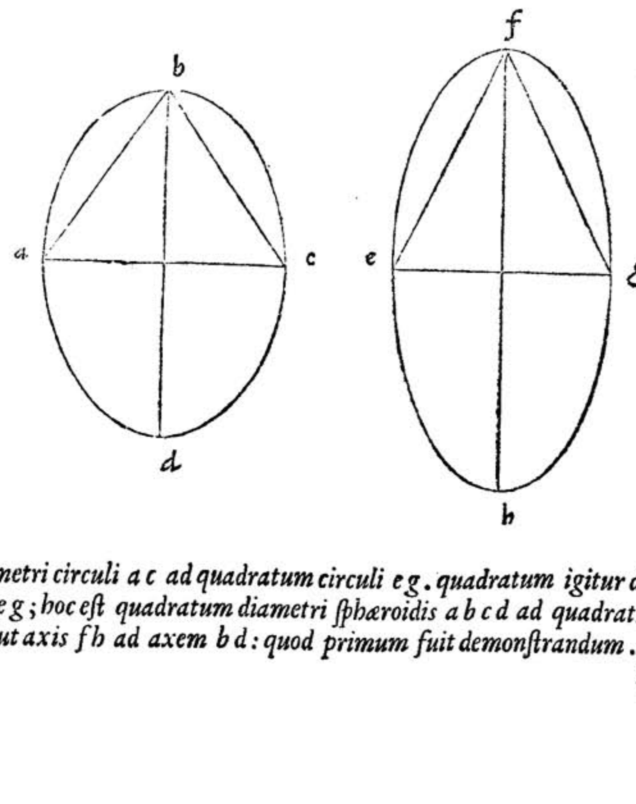


plæ eiuſdem. habebit ex uigeſima ſeptima, & uigeſima octaua huius, portio conoidis a b c ad conum, ſeu portionem coni a b c eam proportionem, quam habet linea k d ad lineam l d. & ſimiliter portio conoidis e ſ g ad conum, ſeu coni portionem e f g habebit eam, quam linea m h ad lineam n h. ſed k d ad l d habet eandem, quam m h ad n h, ob ſimilitudinem portionum, ut monſtrabitur. ſecentur enim conoidea plano per axem ducto. erunt ſectiones, hyperbolarum portiones ſimiles, à ſimilibus hyperbolis abſciſſæ. & quoniam ſimilium hyperbolarum latera figuræ eandem habent inter ſe proportionem: eſtq; quadratum a d ad rectangulum b d l, ut figuræ rectum latus ad tranſuerſum, ex uigeſima prima primi conicorum: & ita quadratum e h ad rectangulum f h n, ut figuræ rectum latus ad tranſuerſum: habebit quadratum a d ad rectangulum b d l eandem proportionem, quam quadratum e h ad rectangulum f h n. Sed quadrati a d ad rectangulum b d l proportio compoſita eſt ex proportione a d ad b d, & ex proportione a d ad d l: & ſimiliter proportio quadrati e h ad rectangulum f h n compoſita eſt ex proportione e h ad f h; & e h ad h n. quarum proportionum ea, quæ eſt a d ad b d, eadem eſt proportioni e h ad f h; quòd portiones ſimiles ſint. reliqua igitur a d ad d l, eadem eſt reliquæ e h ad h n. at b d ad a d habet eandem proportionem, quam f h ad e h. quare ex æquali b d ad d l proportionem habet eam, quam f h ad h n: & conuertendo d l ad b d, quam h n ad f h: & denique diuidendo l b ad b d, quam n f ad f h. eſt autem k l ad l b, ut m n ad n f; utraque enim utriuſque dimidia eſt: & b d ad d l, ut f h ad h n. ergo ex æquali k l ad l d eſt, ut m n ad n h: & componendo k d ad l d, ut m h ad n h. Portio igitur conoidis a b c ad conum, ſeu ad portionem coni a b c eandem habet proportionem, quam portio conoidis e f g ad conum, ſeu coni portionem e f g: & permutando portio conoidis ad portionem conoidis, quam conus ad conum, ſeu portio coni ad coni portionem: & ob id proportionem habet triplam eius, quæ eſt axis b d ad axem f h: quod propoſitum fuerat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Sphæroideon æqualium quadrata diametrorum ex contraria parte reſpondent ipſis axibus, & quorum quadrata diametrorum ex contraria parte reſpondent ipſis axibus, ſphæroidea æqualia ſunt.

Sint ſphæroidea æqualia; a b c d quidem, cuius axis b d, & diameter a c; e f g h uero, cuius axis f h, & diameter e g. Dico quadratum a c ad quadratum e g, eam habere proportionem, quam habet f h ad b d. Secetur enim eorum utrunque plano per centrum ducto, & ſuper axem erecto. erit ex [illegible], [illegible]onſtrata ſunt, portio ſphæroidis a b c ad portionem ſphæroidis e f g, ut conus a b c ad conum e f g. quare portionibus æqualibus exiſtentibus (ſunt enim æqualium ſphæroideon dimidiæ) erunt & ipſi coni æquales: & æquales item eorum dupli; hoc eſt conus, qui baſim habet circulum a c, & axem b d, & conus, qui baſim habet circulum e g, & axem



15.duodec. f h. Sed conorum æqualium baſes ex contraria parte reſpondent ſuis axibus; hoc eſt, circulus a c ad circulum e g proportionem habet eandem, quã axis f h ad axem b d: & ut circulus a c ad circu-
2.duodec. lum e g, ita quadratum diametri circuli a c ad quadratum circuli e g. quadratum igitur diametri a c ad quadratum diametri e g; hoc eſt quadratum diametri ſphæroidis a b c d ad quadratum diametri ſphæroidis e f g h eſt, ut axis f h ad axem b d: quod primum fuit demonſtrandum. Sed iam

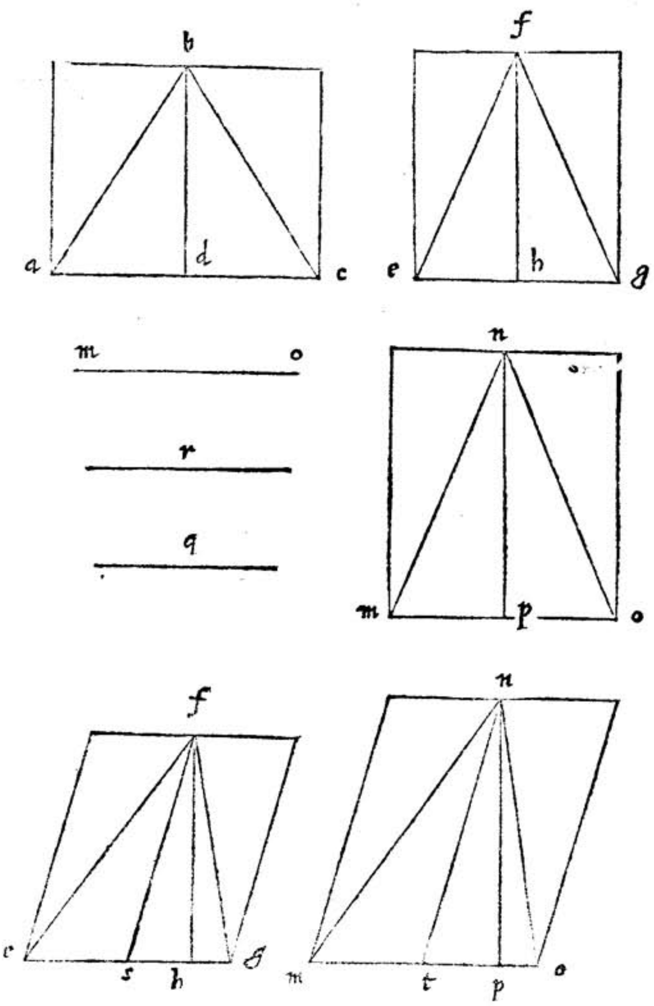
ipſorum

ipſorum ſphæroideon a b c d, e f g h quadrata diametrorum ex contraria parte reſpondeant ipſis axibus, ut ſit quadratum diametri a c ad quadratum diametri e g ſicut axis f h ad axem b d. Dico ſphæroidea a b c d, e f g h æqualia eſſe. Iiſdem nanque manentibus, quoniam ut quadratum diametri a c ad quadratum diametri e g, ita circulus a c ad circulum e g: erit circulus a c ad circulum e g, ut axis f h ad axem b d. quare conus, cuius quidem baſis eſt circulus a c; axis autem b d, eſt æqualis cono, cuius baſis circulus e g, & axis f h: & eorum ſubdupli, hoc eſt conus a b c eſt æqualis cono e f g. ſed ut conus a b c ad conum e f g, ita portio ſphæroidis a b c ad portionem ſphæroidis e f g. ergo & portio ſphæroidis a b c eſt æqualis portioni ſphæroidis e f g: & propterea ſphæroides a b c d æquale ſphæroidi e f g h: quod ſecundo loco demonſtrandum fuerat.

PROPOSITIO III.

Datis duobus conis, ſiue cylindris quibuſcunque, tertium conſtituere conum, ſiue cylindrum, qui ſit alteri eorum æqualis, alteri uero ſimilis.

Sint prius dati coni a b c, e f g, ſiue recti utrique, ſiue ſcaleni, ſiue alter rectus, alter ſcalenus; a b c quidem, cuius baſis ſit circulus circa diametrum a c, & altitudo b d; e f g uero cuius baſis circulus circa diametrum e g, altitudo f h: & oporteat conum conſtituere cono a b c æqualem, & ſimilem ipſi e f g. fiat ſicut f h ad e g, ſic b d ad q: & inter duas rectas lineas a c, & q duæ mediæ proportionales ſumatur, m o, & r: ita ut ſit, ſicut a c ad m o, ita m o ad r, & r ad q: & ſupra circulum, cuius diameter ſit linea m o, fiat conus m n o, ſimilis cono e f g, cuius altitudo n p. Dico eum æqualem eſſe cono a b c. eſt enim ut f h ad e g, ita n p ad m o: quod in rectis conis eſt manifeſtum, ex eorum diffinitione; in his enim f h & n p axes ſunt: in ſcalenis autem monſtrabitur hoc pacto. per lineam f h, & axem coni e f g, qui ſit f s, ducatur planum ſecans conum, quod faciat ſectionem triangulum f h s: & eodem modo per lineam n p, & lineam n t, axem coni m n o ducatur aliud planũ ſecans conum, quod faciat ſectionem triangulum n p t. erit triangulum n p t æquiangulum triangulo f h s. nanque angulus n t p eſt æqualis angulo f s h, ex diffinitione conorum ſcalenorum ſimilium: & angulus n p t eſt æqualis angulo f h s; cum uterque ſit rectus. reliquus igitur angulus reliquo angulo eſt æqualis: & totum triangulum

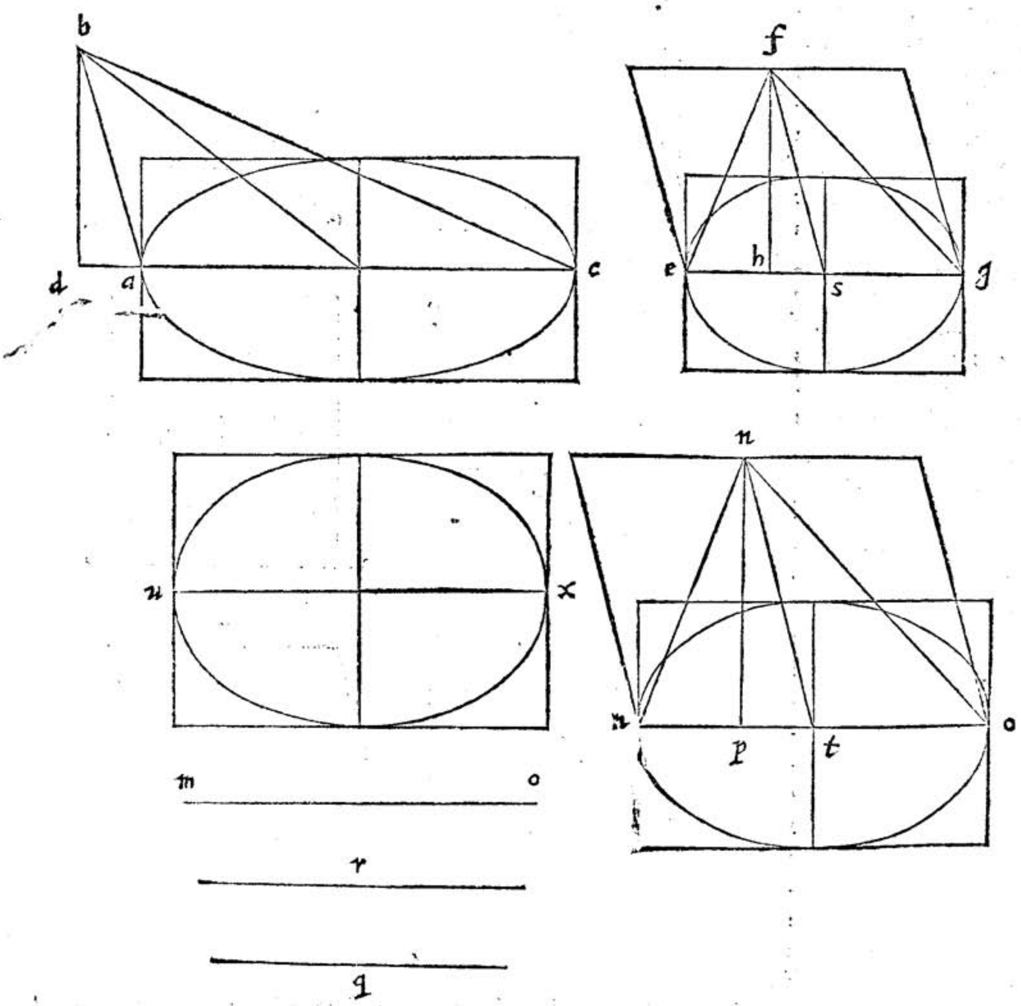


toti triangulo æquiangulum. quare ut f h ad f s, ita n p ad n t. ut autem f s ad e g, ita n t ad m o, ex diffinitione eadem, & permutata ratione. ergo ex æquali ut f h ad e g; hoc est ut b d ad q, ita n p ad m o: & permutando, conuertendoq; ut n p ad b d, ita m o ad q. Itaque cum quatuor lineæ proportionales sint a c, m o, r, q: erit sicut quadratum a c ad quadratum m o, ita m o ad q. sicut autem m o ad q, ita n p ad b d. sicut igitur quadratum a c ad quadratum m o; hoc est sicut circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum m o, ita n p ad b d. quare ex decima quinta duodecimi elementorum, & ex ijs, quæ à nobis demonstrata sunt ad undecimam huius, propositione decima, conus m n o est æqualis cono a b c, & similis ipsi e f g: quod fecisse oportebat. Et cum sit cylindrus ad cylindrum, sicut conus ad conum: eodem faciemus modo, si sint dati cylindri a b c, e f g: & oporteat cylindro quidem a b c æqualem, ipsi uero e f g similem constituere cylindrum.

PROPOSITIO IIII.

Datis duabus coni, aut cylindri portionibus, tertiam constituere coni, aut cylindri portionem, quæ alteri earum sit æqualis, alteri similis.

Sint datæ coni portiones; a b c quidem basim habens spatium contentum ellipsi a c, cuius maior diameter sit a c recta linea, & altitudo b d; e f g uero basim habens spatium, e g ellipsi contentum, cuius diameter maior sit recta linea e g, & altitudo f h: oporteatq; aliam coni portionem inuenire, quæ sit æqualis portioni a b c, & similis ipsi e f g. constituatur ex diametris ellipsis



ellipsis a c rectangulum a c: & eodem modo ex diametris ellipsis e g constituatur aliud rectangulum e g: & ex uigesima quinta sexti elementorum constituatur tertium rectangulum u x, æquale ipsi a c rectangulo, & simile ipsi e g: in quo describatur ellipsis u x, cuius maior diameter recta linea u x. erit & ellipsis u x, similis ellipsi e g: & ex septima huius, spatium ellipsi u x contentum, æquale spatio contento ellipsi a c. fiat ut f h ad e g, sic b d ad q: & inter duas rectas lineas u x, q inueniantur duæ mediæ proportionales m o, & r: intelligaturq; coni portio m n o similis coni portioni e f g, basim habens spatium ellipsi contentum, cuius maior diameter sit m o, & altitudo n p. Dico coni portionem m n o eam esse, quam quærimus. ducatur enim planum secans coni portionem e f g, transiensq; per lineam f h, & eius axem f p; quod faciat sectionem triangulum f h s: & similiter per lineam n p, & axem portionis coni m n o, qui sit n t, ducatur aliud planum eam secans, faciensq; sectionem triangulum n p t. erit triangulum n p t æquiangulum triangulo f h s, ex diffinitione coni portionum similium, quam nos in principio huius attulimus; & eadem ratione, qua usi sumus in antecedenti, erit ut f h ad e g, ita n p ad m o: & tandem, ut quadratum u x ad quadratum m o, ita n p ad b d. ut autem quadratum u x ad quadratum m o, ita spatium ellipsi u x comprehensum ad spatium comprehensum ellipsi m o, ex corollario septimæ huius. sed spatium ellipsi u x comprehensum est æquale spatio comprehenso ellipsi a c, ut monstratum est. ergo ut basis portionis coni a b c ad basim portionis coni m n o, ita n p ad b d. quarum autem coni portionum bases ex contraria parte respondent suis altitudinibus, hæ inter se sunt æquales, ut monstratum est ad undecimam huius propositione decima. Aequalis est igitur coni portio m n o coni portioni a b c, & similis ipsi e f g: quod fecisse oportebat. Et idem sequetur, si sint datæ cylindri portiones a b c, e f g. nanque erit cylindri portio m n o æqualis a b c portioni, & similis portioni e f g.

Quòd si dato cono, & data coni portione, oporteat conum constituere, æqualē datæ coni portioni, & similem dato cono, uel constituere coni portionem æqualem dato cono, similem uero datæ coni portioni.

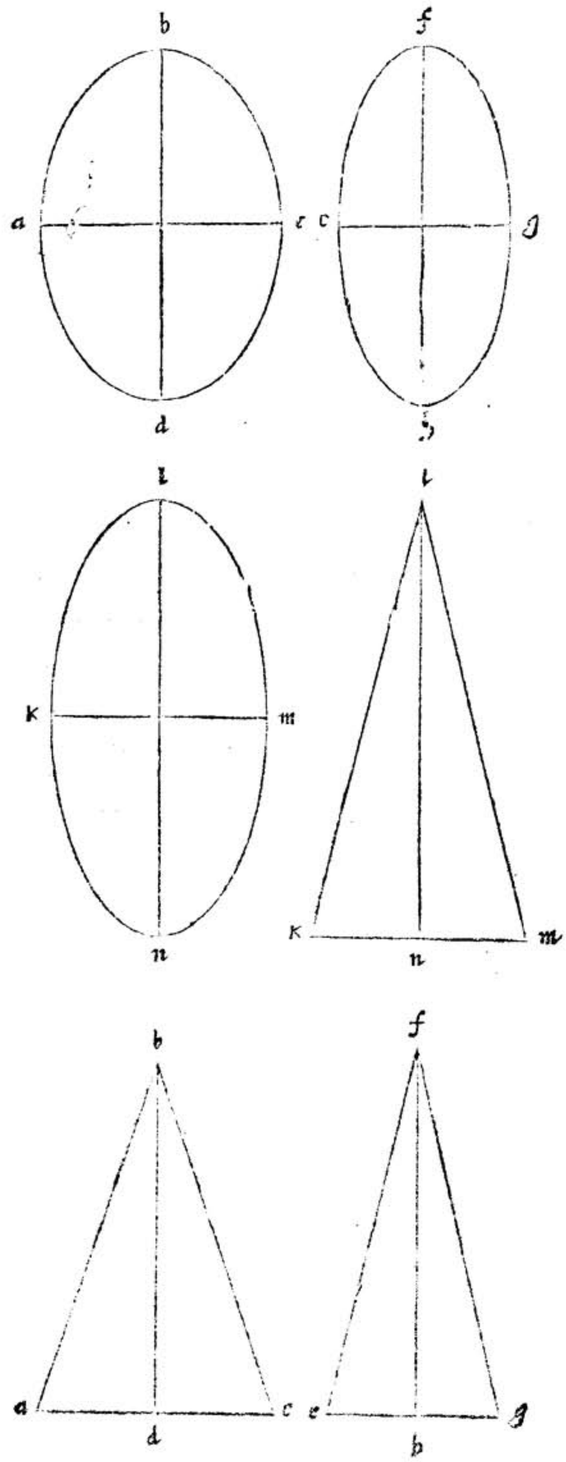
Conum inueniemus ex ijs, quæ superius monstrata sunt, æqualem coni portioni datæ, uel coni portionem æqualem dato cono, & propositum ex ante dictis nullo negocio assequemur.

Neque aliter faciemus si dato cylindro, & data cylindri portione, constituendus sit cylindrus, æqualis cylindri portioni datæ, & similis dato cylindro, uel constituenda sit cylindri portio, æqualis cylindro dato, & similis datæ cylindri portioni.

PROPOSITIO V.

Datis duobus sphæroidibus, tertium constituere sphæroides, quod sit alteri eorum æquale, alteri uero simile.

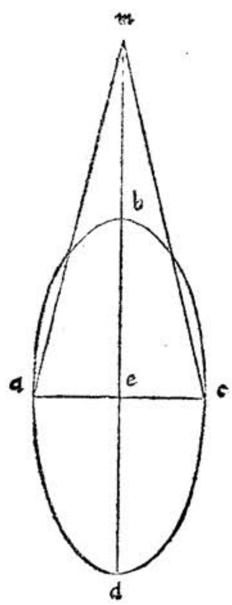
Sint data sphæroidea a b c d, e f g h: quorum diametri a c, e g; & axes b d, f h: & oporteat constituere sphæroides, æquale ipsi a b c d, & simile ipsi e f g h. ponantur coni a b c, e f g; a b c quidem basim habens circulum circa diametrum a c, & axem b d; e f g uero basim habens circulum circa diametrum e g, & axem f h. Duobus igitur datis conis tertium constituemus conum; æqualem ipsi a b c, & similem ipsi e f g: qui sit k l m, cuius basis circulus circa diametrum k m, & axis l n. ponatur sphæroides k l m n, diametrum habens eandem k m, & axem l n. Dico k l n m sphæroides esse illud, quod quærimus. est enim simile sphæroidi e f g h; cum conus k l m factus sit similis cono e f g: & est æquale sphæroidi a b c d: cum idem conus k l m factus sit æqualis cono a b c. coni autem k l m duplum sit sphæroides k l m n, & coni a b c item sit duplum sphæroides a b c d: quod patet ex corollario uigesimæ nonæ huius. Quare factum iam est, quod fecisse oportuit.

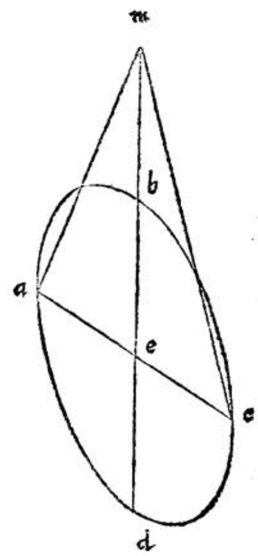

b
a
e
d
f
c
g
h
l
k
m
n
l
k
m
n
b
a
c
d
f
e
g
h

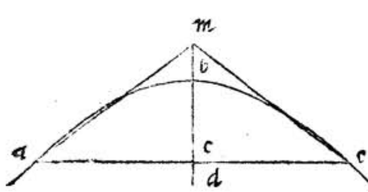
PROPOSITIO VI.

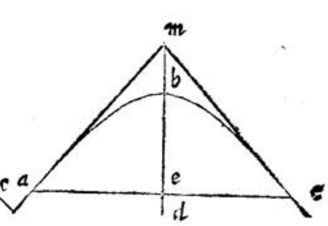
Datis duabus portionibus siue sphæroidis, siue conoidis, tertiam inuenire sphæroidis, siue conoidis portionem, quæ alteri earum sit æqualis, alteri uero similis.

Sint datæ sphæroidis, siue conoidis portiones, abscissæ plano quomodocunque ducto a b c, f g h: et sit a b c abscissa à sphæroide, siue conoide a b c d, cuius portionis basis sit circulus, siue spatium ellipsi contentum circa diametrum a c, & axis b e: & f g h sit abscissa à sphæroide, uel conoide f g h k, cuius portionis basis sit circulus, siue spatium ellipsi contentum circa f h diametrum, et axis g l: oporteat autem portionem inuenire æqualem portioni a b c, & similem ipsi f g h. Constituantur ex ijs, quæ ante tradita sunt, coni, seu portiones coni a m c, & f n h; a m c quidem æqualis por

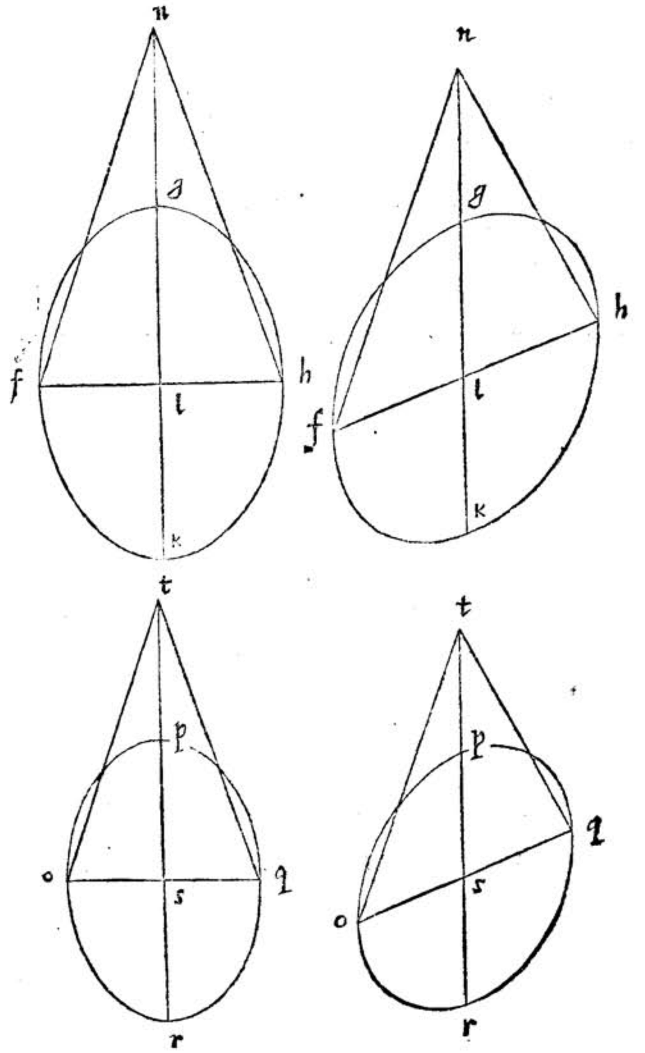








tioni a b c, basim habens eadem ipsi; f n h uero æqualis portioni f g h, & ipsi eandem habens basim. Sitq; primum f g h portio, cui oporteat similem constituere, sphæroidis portio, abscissa plano per centrum ducto, uel erecto super axem, uel non erecto. erit f n h conus, siue coni portio basim habens circulum, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum f h, & axem n l, qui sit æqualis axi sphæroidis g k, ex corollario uigesimæ nonæ, & trigesimæ huius. Itaque dato cono, siue coni portioni a m c, æqualem conum constituemus, siue coni portionem, similem ipsi f n h: & sit o t q, cuius basis circulus, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum o q, et axis t s: & supra eandem basim intelligatur constituta sphæroidis portio o p q, similis portioni f g h, cuius axis sit p s. Dico portionem o p q esse eam, quam uolumus. Compleatur enim sphædoides: & sit o p q r, cuius axis p r, & centrum s. erit ut n l ad f h, ita t s ad o q: ut autem f h ad g k, ita o q ad p r. quare ex æquali, ut n l ad g k, ita t s ad p r: & sunt æquales n l, g k. ergo æquales quoque sunt t s, p r: & propterea portio o p q æqualis est cono, seu portioni coni o t q; hoc

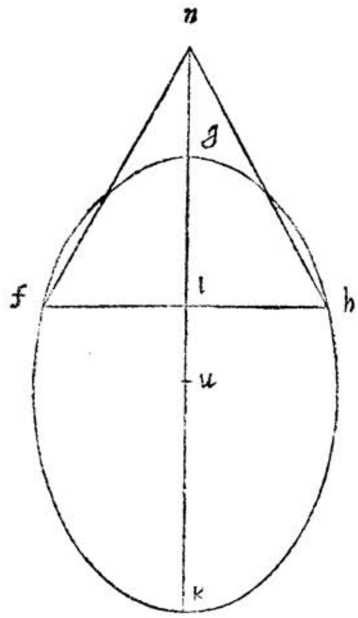


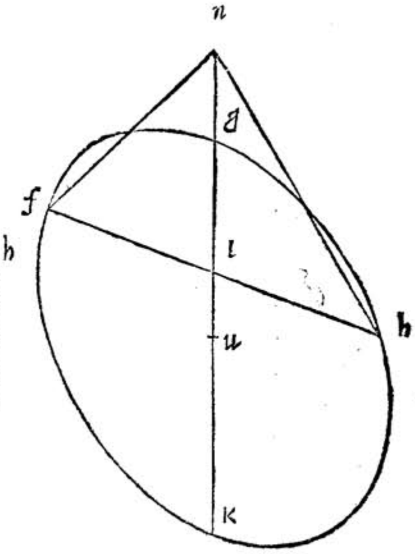
est ipsi a m c, cui erat æqualis portio sphæroidis a b c. æqualis est igitur portio o p q portioni a b c, & similis ipsi f g h.

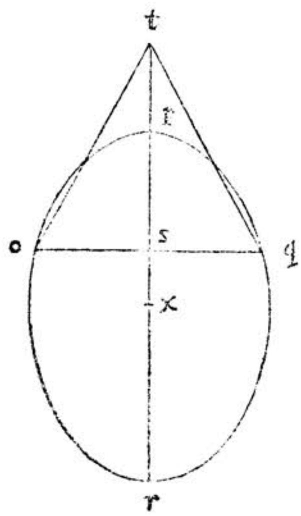
Sit f g h portio sphæroidis abscissa plano non per centrum ducto, sed erecto super axem, uel non erecto: sit autem u centrum sphæroidis f g h k. erit conus f n h, siue coni portio, cuius basis circulus, siue spatium ellipsi contentum circa diametrũ f h, & axis n l; qui ad ipsam g l eam habeat proportionem, quam utraque linea u k, l k habet ad ipsam l k, ex corollario trigesimæ tertiæ, & ultimæ huius. Rursus dato cono, siue coni portioni a m c, conum, siue portionem coni æqualem constituemus, similem ipsi f n h: & sit o t q, cuius basis circulus, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum o q, & axis t s: & supra eandem basim constituemus sphæroidis portionem o p q, similem portioni f g h, cuius axis sit p s. Dico portionem eam esse quæsitam portionem. compleatur enim sphæroides o p q r, cuius axis p r, & centrum x. Et quoniam est n l ad g l, ut utraque linea u k, l k ad l k: est autem ut n l ad g l, ita t s ad p s: & ut utraque linea u k, l k ad l k, ita utraque x r, s r ad s r: quod manifeste patet ex ijs, quæ supra ostendimus, ob similitudinem portionum f g h, o p q: erit t s ad p s, ut utraque x r, s r ad s r: & eadem ratione portio o p q æqualis cono, seu coni portioni o t q; hoc est ipsi sphæroidis portioni a b c, & similis ipsi f g h.

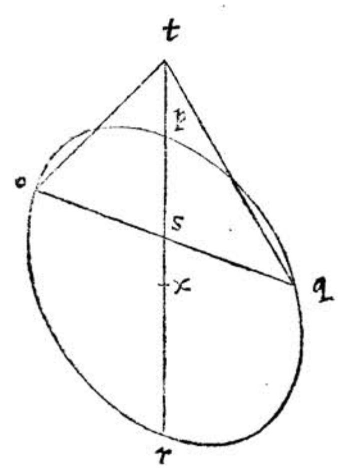
Sed sit f g h portio conoidis rectanguli, abscissa plano super axem erecto, uel non erecto. erit f n h conus, siue coni portio, cuius basis, circulus, siue spatium contentum ellipsi circa diametrum f h, & axis n l; qui ad axem portionis g l proportionem habeat sesquialteram, ex corollario uigesimæ tertiæ, & uigesimæ quartæ huius. Constituatur igitur conus, siue coni portio o t q, æqualis cono, siue coni portioni a m c, similis uero ipsi f n h: & sit eius basis circulus, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum o q, & axis t s: deinde supra eandem basim constituatur conoidis rectanguli portio o p q, similis ipsi f g h, cuius axis sit p s. Dico portionem o p q esse æqualem portioni a b c. est enim ut n l ad f h, ita t s ad o q: & ut f h ad g l, ita o q ad p s. quare ut n l ad g l, ita t s ad p s. sed n l sesquialtera est ipsius g l. ergo & t s erit ipsius p s sesquialtera: & portio conoidis rectanguli o p q æqualis ipsi o t q; hoc est ipsi a b c, & similis ipsi f g h.

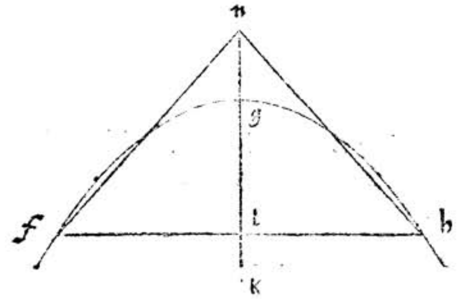
Sit

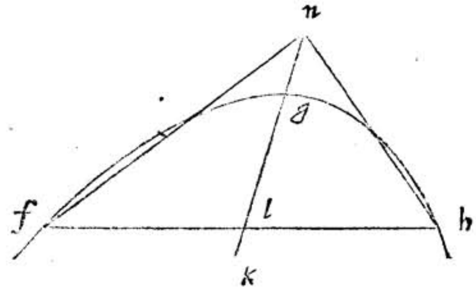

n
g
f
l
h
u
k

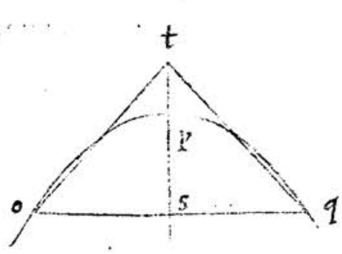

n
g
f
l
h
u
k

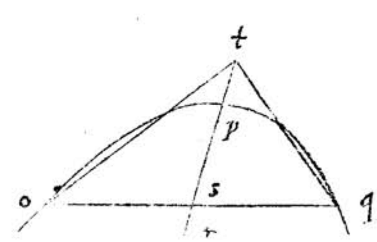

t
p
o
s
q
x
r


t
p
o
s
q
x
r

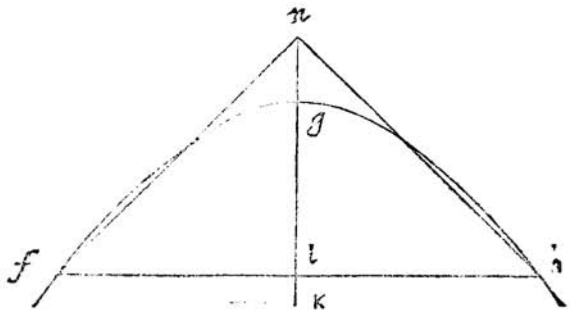

n
g
f
l
h
k

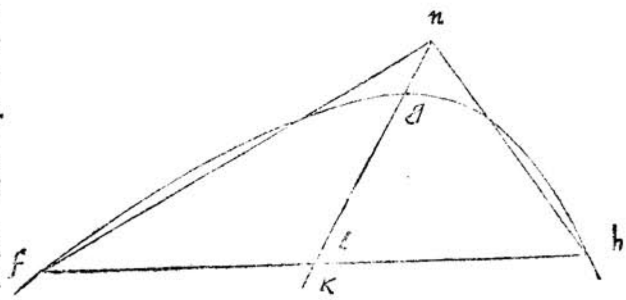

n
g
f
l
h
k

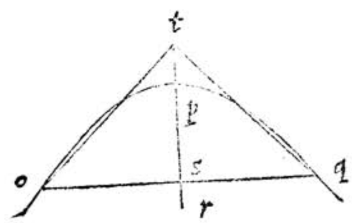

t
p
o
s
q

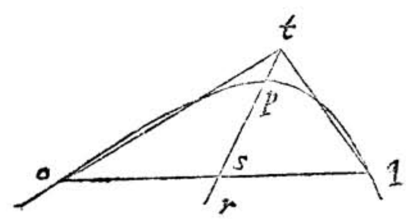

t
p
o
s
q
r

Sit denique portio f g h conoidis obtusianguli, abscissa plano, ut dictum est. erit f n h conus, siue coni portio, cuius axis n l ad axem portionis g l proportionem habeat, quam utraque linea; & æqualis ipsi g l; & quæ tripla sit lineæ ad axem adiectæ, ad lineam utrisque æqualem; ipsi scilicet g l; & lineæ, quæ sit dupla lineæ ad axem adiectæ; ex corollario uigesimæ septimæ, & uigesimæ octauæ huius. constituatur, ut superius quoque factum est, conus, siue coni portio o t q, æqualis cono, siue coni portioni a m c, similis tamen ipsi f n h: & supra eandem basim constituatur conoidis obtusianguli portio o p q, similis ipsi f g h. monstrabitur similiter portio conoidis obtusianguli o p q, æqualis ipsi a b c portioni; & est similis ipsi f g h: quod fecisse oportebat.









Et cum coni ad conum, uel cylindrum, uel ad coni, uel cylindri portionem, uel ad sphæram, uel sphæroides, uel ad sphæræ, uel sphæroidis, uel conoidis portionem, & horum omnium inter se se proportio data sit, tum ex iis, quæ ab Euclide in elementis tradita sunt, tum ab Archimede ipso, & in hoc eodem libro, & in eo, qui de sphæra, & cylindro inscribitur; manifestum est, quomodo possimus, dato cono, uel cylindro, uel coni, uel cylindri portione, uel sphæra, uel sphæroide, uel sphæræ, uel sphæroidis, uel conoidis portione, inuenire aliud quodlibet uni alicui eorum æquale, alteri uero sui generis simile.

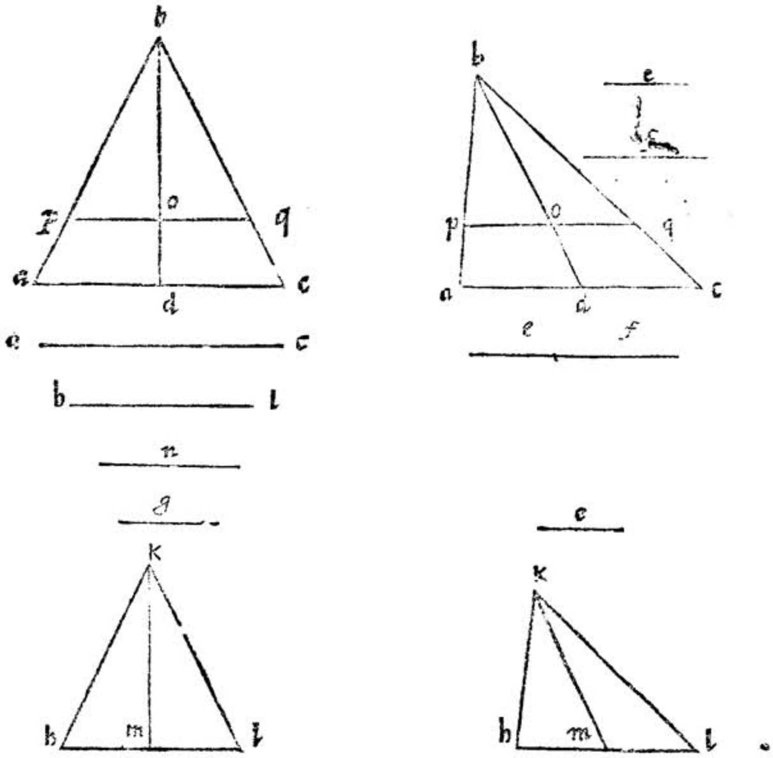
PROPOSITIO VII.

Datum conum, siue coni portionem plano, quod sit basi eius æquidistans, sic secare, ut partes proportionem habeant eandem datæ proportioni.

Sit datus conus, uel rectus, uel scalenus; uel coni portio a b c, cuius basis sit circulus, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum a c, & axis b d: & sit data proportio, quam habet e ad f: oporteat autem à dato cono, uel à data coni portione a b c, plano basi eius æquidistanti partem abscindere uersus b, quæ ad reliquam partem, eam proportionem habeat, quam habet e ad f.

Secetur

Secetur a b c plano per axem ducto: & sit sectio a b c, triangulum: fiatq; ut utraque linea e, f ad e, ita a c ad aliam lineam, quæ sit g: & inter a c, & g sumantur duæ mediæ proportionales h l, & n: ut sit sicut a c ad h l, ita h l ad n, & n ad g. Itaque constituatur conus, siue coni portio h k l, similis ipsi a b c, cuius basis sit circulus, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum h l, & axis k m. erit a b c ad h k l, ut linea a c ad lineam g, ex duodecima duodecimi elementorum, & ex ijs quæ monstrauimus ad undecimam huius, propositione nona. nam proportio a c ad g est tripla eius, quæ est a c ad h l. abscindatur à linea b d linea b o æqualis ipsi k m:



& per o ducatur planum secans a b c, æquidistansq; eius basi, quod faciat sectionem p q. Dico a b c secari eo plano, ut oportebat. est enim p b q, uel conus, uel coni portio similis ipsi a b c, ut monstratum est à nobis in principio huius; cuius quidem basis circulus, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum p q, & axis b o. quare & similis est ipsi h k l. est igitur ut k m ad h l, ita b o ad p q: & permutando ut k m ad b o, ita h l ad p q. sed cum sit æqualis b o ipsi k m: æqualis erit & p q ipsi h l: & p b q æqualis ipsi h k l. ergo a b c ad p q b est ut linea a c ad lineam g; hoc est, ut utraque linea e, f ad e: & diuidendo excessus, quo a b c excedit p b q; hoc est a p q c ad p b q, ut f ad e: & demum conuertendo p b q ad a p q c, ut e ad f. constat igitur a b c secari plano æquidistanti eius basi, & esse partem abscissam uersus b, ad reliquam partem, ut e ad f: quod fecisse oportebat.

PROPOSITIO VIII.

Datum cylindrum, seu cylindri portionem plano, quod sit eis, quæ ex opposito planis æquidistans ita secare, ut partes proportionem habeant eandem datæ proportioni.

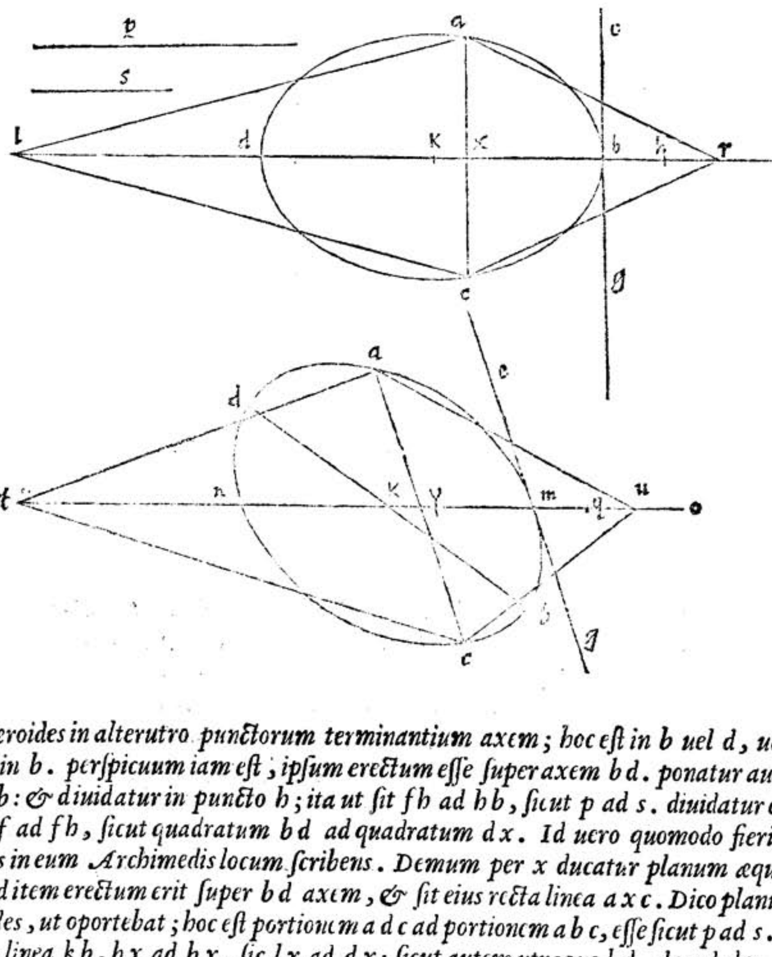
Hoc facile factu est. si enim axem secabimus in partes datam habentes proportionem: & per puncta sectionum plana ducemus, planis ex opposito æquidistantia: & cylindrum item, uel portionem cylindri secundum datam proportionem secabimus, monstratum nanque superius est ad undecimam

decimam huius, propositione tertia, si cylindrus, uel portio cylindri plano secetur æquidistanti eis, quæ ex opposito planis, esse cylindrum, ad cylindrum, seu portionem ad portionem, ut axis ad axem.

PROPOSITIO IX.

Datum sphæroides plano, quod sit alteri dato plano æquidistans sic secare, ut partes proportionem habeant eandem datæ proportioni.

Qui sphæram nouit diuidere in partes datam habentes proportionem, ex ijs, quæ scripta sunt ab Archimede ipso, & eius interprete Eutocio in secundo de sphæra, & cylindro, propositione quarta, idem ipse & sphæroides datum eo, quo dictum est modo, diuidere poterit. Sed ut omnia manifeste deprehendantur: sit datum sphæroides a b c d: & data proportio, quam habet p ad s, quarum maior sit p: datum autem planum, quod tangat sphæroides sit, cuius recta linea e g: & oporteat ipsum diuidere plano æquidistanti plano e g; ita ut portio, quæ est uersus d ad alteram portionem sit, ut p ad s. secetur sphæroides altero plano per axem ducto: sitq; sectio a b c d, ellipsis, cuius diameter, & axis sphæroidis sit d b, centrum k. planum ergo datum e g, uel tangit ip

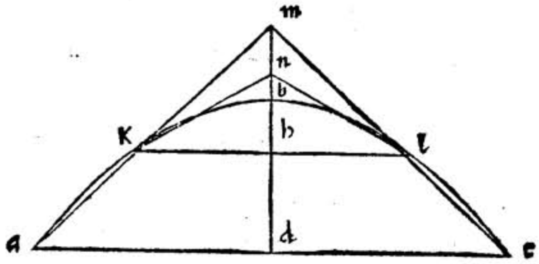


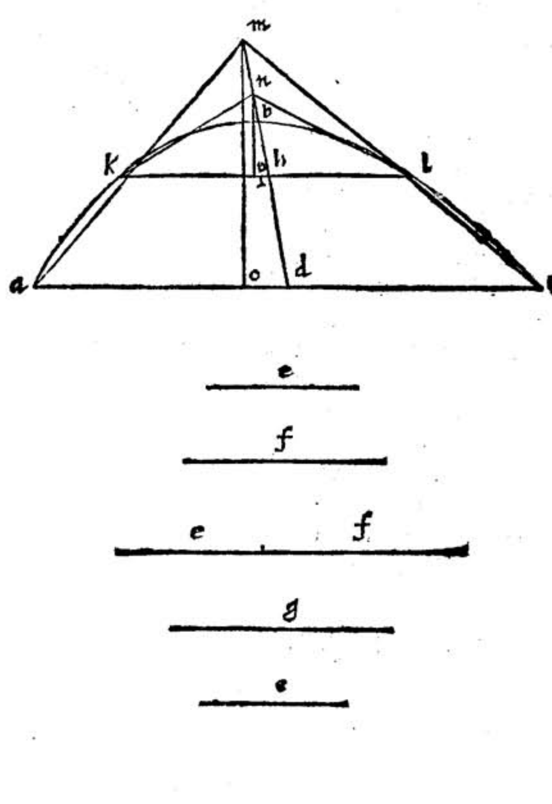
sum sphæroides in alterutro punctorum terminantium axem; hoc est in b uel d, uel alibi. tangat primum in b. perspicuum iam est, ipsum erectum esse super axem b d. ponatur autem b f æqualis ipsi k b: & diuidatur in puncto h; ita ut sit f h ad h b, sicut p ad s. diuidatur etiam b d in x, ut sit x f ad f h, sicut quadratum b d ad quadratum d x. Id uero quomodo fieri possit, docuit Eutocius in eum Archimedis locum scribens. Demum per x ducatur planum æquidistans plano e g, quod item erectum erit super b d axem, & sit eius recta linea a x c. Dico planum illud secare sphæroides, ut oportebat; hoc est portionem a d c ad portionem a b c, esse sicut p ad s. fiat enim sicut utraque linea k b, b x ad b x, sic l x ad d x: sicut autem utraque k d, d x ad d x, sic r x ad b x: & iungantur a l, l c, a r, r c. erit l x ad x r; hoc est conus a l c ad a r c conum, ut p ad s: quod eodem in loco monstrauit Archimedes. Sed conus a l c æqualis est portioni sphæroidis a d c; & a r c conus æqualis portioni eiusdem a b c, ex corollario trigesimæ tertiæ huius. portio igitur sphæroidis a d c ad portionem a b c erit, ut p ad s. Si uero e g planum datum tangat sphæroides in alio quouis puncto, ut in m; ducatur k m linea, & utrinque producatur, quæ sit n k m, secans ellipsim ex altera parte in n: ipsi autem k m ponatur æqualis m o: & rursus diuidatur m o in q, ut sit o q ad q m, sicut p ad s: & diuidatur item m n in y, ut y o ad o q sit, sicut quadratum m n ad *n ad quadratu m n y: & per y ducatur planum æquidistans plano e m s, cuius recta linea a y c. Dico planum illud diuidere sphæroides secundum proportionem datam; hoc est portionem a n c ad portionem a m c esse, ut p ad s. fiat enim sicut utraque linea k m, m y ad m y, sic t y ad n y: sicut autem utraque k n, n y ad n y, sic u y ad m y: & iungantur a t, t c, a u, u c. erit eadem ratione t y ad y u; hoc est coni portio a t c ad coni portionem a u c, ut p ad s. sed coni portio a t c est æqualis portioni sphæroidis a n c: & coni portio a u c æqualis portioni sphæroidis a m c, ex corollario ultimæ huius. portio igitur sphæroidis a n c ad portionem a m c est, ut p ad s: quod fecisse oportebat.*

PROPOSITIO X.

Datam conoidis rectanguli portionem plano basi eius æquidistanti ita diuidere, ut partes proportionem habeant eandem datæ proportioni.

Sit data conoidis rectanguli portio a b c, siue abscissa plano super axem erecto, siue non erecto; cuius basis sit circulus, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum a c, & axis b d: sit autem data proportio, quam habet e ad f: & oporteat plano basi æquidistanti eam sic diuidere, ut pars, quæ est uersus b ad alteram partem proportionem habeat, quam e ad f. Secetur conoidis portio plano per axem ducto: & sit sectio a b c. erit a b c parabole, cuius diameter b d. fiat ex utrisque lineis e, f linea una, atque inter hanc & lineam e sumatur media proportionalis, quæ sit g. habebit e f ad e proportionem duplam eius, quæ est e f ad g. quam uero proportionem habet e f ad g, eandem habeat d b ad partem ipsius b h: & per h ducatur planum æquidistans basi, abscindensq; conoidis portionem k b l; cuius basis circulus, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum k l, & axis b h. Dico conoidis portionem a b c sectam esse plano, ut oportebat. producatur enim d b usque ad m; ita ut sit d m sesquialtera ipsius d b: atque à linea b m. abscindatur b n, ut sit h n item sesquialtera ipsius h b. Intelligatur autem conus, siue coni portio a m c, cuius basis eadem, quæ portionis conoidis a b c, & axis d m: & similiter intelligatur conus, siue coni portio k n l, cuius basis eadem, quæ portionis conoidis k b l, & axis h n: sitq; m o altitudo coni portionis a m c: & n p altitudo portionis k n l. erit iam ex corollario uigesimæ tertiæ & uigesimæ quartæ huius conus, siue coni portio a m c, æqualis conoidis portioni a b c: & conus, siue coni portio k n l, æqualis portioni conoidis k b l. Itaque cum sit, ut e f ad g, ita d b ad b h: ut autem d b ad b h, ita quadratum a d ad quadratum k h, ex uigesima primi conicorum; & ut





10. diff. quinti.

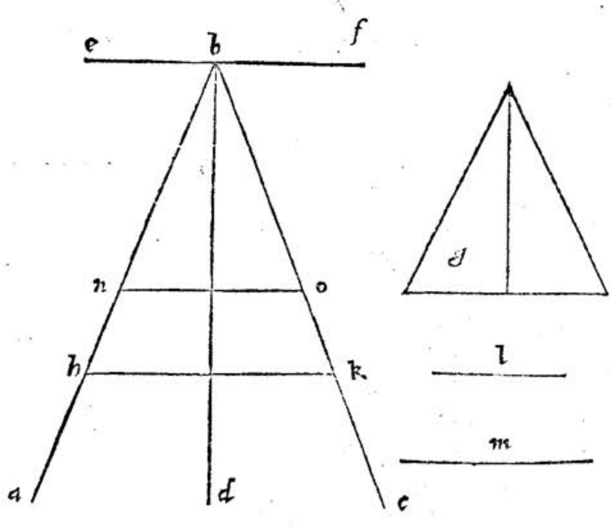
q quadratum

15. quinti 2. duodec. *quadratum a d ad quadratum k h, ita quadratum a c ad quadratum k l; hoc est circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum k l, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum a c ad spatium contentum ellipsi circa diametrum k l, ex corollario septimæ huius: sunt enim hæ sectiones similes; cum plana sint æquidistantia: quod patet ex corollario decimæ quintæ. erit ut e f ad g, ita circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum k l, uel spatium ellipsi circa diametrum a c contentum ad spatium contentum ellipsi circa diametrum k l; hoc est basis coni, uel coni portionis a m c ad basim coni, uel portionis coni k n l. Rursus cum sit d m ad d b, ut h n ad h b: erit permutando d m ad h n, ut d b ad h b. est autem d b ad h b, ut e f ad g. quare ut e f ad g, sic d m ad h n; hoc est altitudo coni a m c ad altitudinem coni k n l. Sed est d m axis portionis coni a m c: & h n axis portionis coni k n l: & ut axis d m ad axem h n, sic altitudo m o ad altitudinem n p, propter similitudinem triangulorum d m o, h n p. ergo & altitudo portionis coni a m c ad altitudinem portionis coni k n l est, ut e f ad g. est autem coni a m c ad conum k n l, seu portionis coni a m c ad portionem coni k n l, proportio composita ex proportione basium, & proportione altitudinum, ut superius est demonstratum, quarum utræque eædem sunt proportioni e f ad g. conus igitur a m c ad conum k n l, siue coni portio a m c ad coni portionem k n l; hoc est portio conoidis a b c ad portionem conoidis k b l, proportionem habet duplam eius, quæ est e f ad g; hoc est eam, quam habet e f ad c: & diuidendo excessus, quo portio conoidis a b c excedit portionem conoidis k b l, uidelicet a k l c ad portionem k b l eam habet, quam f ad e: & denique conuertendo portio conoidis k b l ad reliquam partem a k l c proportionem habet, quam e ad f: quod fecisse oportebat.*

PROPOSITIO XI.

A dato cono, uel cylindro, uel cylindri portione, uel sphæra, uel sphæroide, uel conoide rectangulo, plano, quod sit alteri dato plano æquidistans, partem abscindere æqualem, aut dato cono, aut cylindro, aut sphæræ, aut sphæroidi, aut horum cuiuslibet, aut conoidis portioni.

Conos, & cylindros, seu cylindri portiones, à quibus abscindenda pars est, hoc loco eiusmodi intelligemus, ut in infinitum produci possint, qualia sunt conoidea ipsa. Sit primum datus conus a b c, cuius axis b d: & sit datum planum quomodocunque ductũ, cuius recta linea e b f: oporteat autem ab eo partem abscindere, plano æquidistanti ipsi e b f, quæ sit æqualis dato cono, aut cylindro, aut sphæræ, aut sphæroidi, aut horum cuiuslibet, aut conoidis portioni, in qua g. Itaque à cono a b c, plano, cuius recta linea h k, æquidistanti ipsi e b f, conum, uel coni portionem abscindemus h b k, maiorem ipso g: & quam proportionem habet g ad excessum, quo ipsum excedit ab h b k, eandem habeat l ad m. conum ergo, uel coni portionem h b k, plano basi æquidistanti, ex antedictis ita secabimus, ut pars, quæ est uersus b

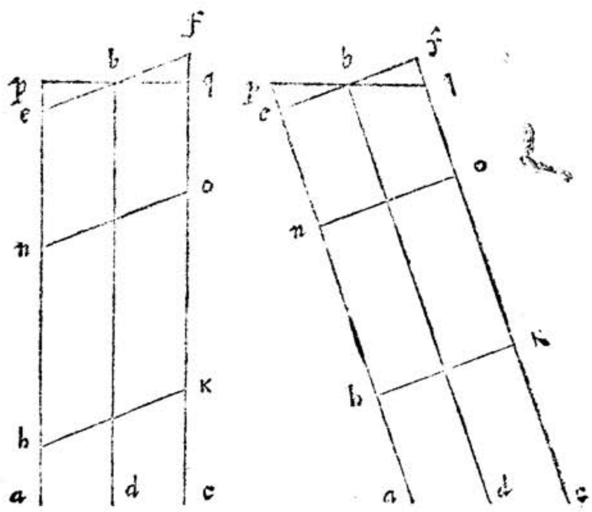


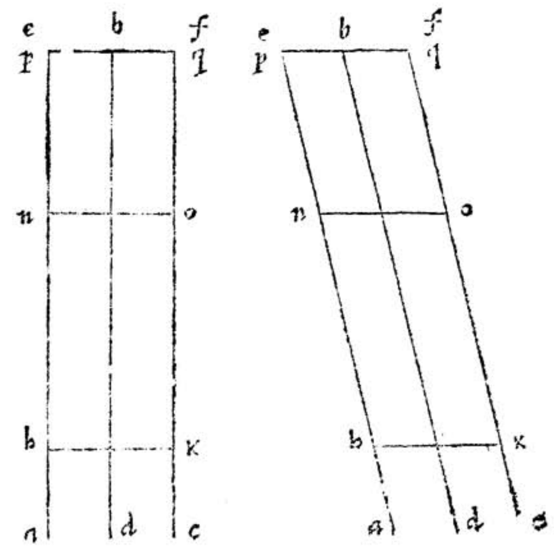
ad reliquam partem proportionem habeat, quam l ad m. sit autem ea n b o. manifestum est ex nona quinti n b o æqualem esse ipsi g. & cum planum, cuius recta linea n o, basi æquidistet, æquidistabit & ipsi e b f: & erit à cono a b c, pars n b o, æqualis ipsi g, abscissa plano æquidistanti dato plano.

Sit datus cylindrus, uel portio cylindri a p q c, cuius axis b d: & planum ex superiori parte,

circulus,

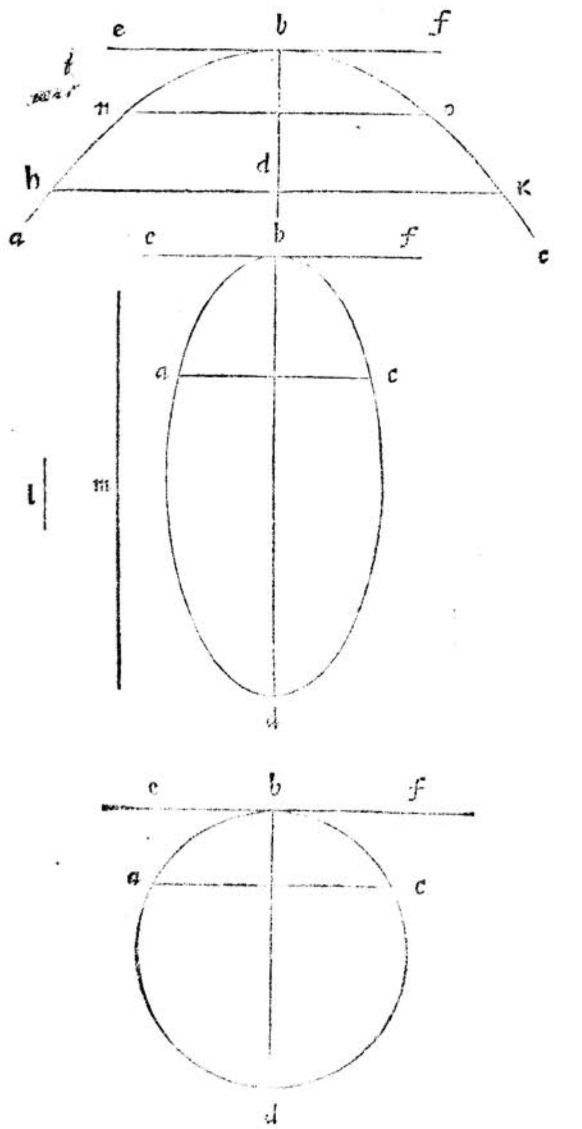
circulus, uel ſpatium contentum ellipſi circa diametrum p q: ſitq́; datum planum, cuius recta linea e b f, ut eius pars e b ſecet cylindrum, uel cylindri portionem; b f uero extra cadat: & à dato cylindro, ſeu cylindri portione a p q c, partem abſcindere oporteat, æqualem eidem g, plano æquidiſtanti ipſi e b f. producatur cylindrus, ſeu cylindri portio uſque ad planum e b f: & ducto alio plano h k æquidiſtanti e b f, abſcindatur pars maior ipſo g, quæ ſit h e f k; aut cylindrus; aut cylindri portio: & rurſus quam habet proportionem g ad exceſſum, quo exceditur ab h e f k, ha-





beat l ad m. Ipſo autem h e f k ſecto ſecundum proportionem l ad m, plano n o, æquidiſtanti eis, quæ ex oppoſito planis, erit eadem ratione n e f o æqualis ipſi g. ſed n p q o eſt æqualis ipſi n e f o; propterea quòd p b e cylindri particula æqualis eſt particulæ q b f, ex ijs, quæ demonſtrata ſunt ad ad undecimam huius, propoſitione octaua. æqualis eſt igitur n p q o ipſi g: & eſt planum n o æquidiſtans ipſi e b f plano dato. Si uero datum planum æquidiſtet ſuperiori plano p q, uel idem ſit ei: ſimiliter abſcindemus partem maiorem, quàm ſit g, ducto plano h k, ipſi p q æquidiſtanti; & rurſus ducto alio plano n o, æquidiſtanti eis, quæ ex oppoſito, ita ſecabimus, ut n p q o ad h n o k eandem proportionem habeat, quam habet g ad exceſſum, quo exceditur ab ipſo h p q k, erit & n p q o æqualis g: & planum n o æquidiſtabit dato plano.

Sit præterea datum conoides rectangulum a b c: & datum planum quomodolibet ductum, tangens conoides in puncto b, cuius recta linea e b f. abscindemus & hic plano ducto h k, æquidistanti ipsi e b f, conoidis portionem h b k, maiorem, quàm g: & ut g ad excessum, quo exceditur à conoidis portione h b k, ita sit l ad m. Rursus ex superius demonstratis, plano n o ducto æquidistanti basi diuidemus h b k in partes proportione respondentes ipsis l m. quo facto, erit item conoidis portio n b o, æqualis ipsi g, abscissa plano æquidistanti plano dato.



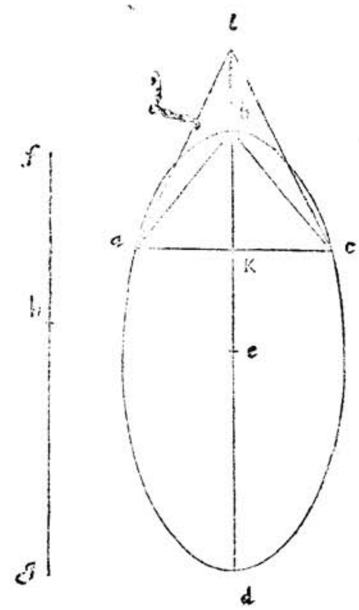
Sit demum datum sphæroides, seu sphæra a b c d: & datum planum tangens in puncto b, cuius recta linea e b f: & ut g ad excessum, quo exceditur ab a b c d, sit l ad m. sphæroides ergo, uel sphæram secabimus in partes, quæ proportione respondeant ipsis l, m, plano ducto, cuius recta linea a c, æquidistanti e b f. erit similiter a b c portio æqualis ipsi g, abscissa plano, ut oportebat.

PROPOSI-

PROPOSITIO XII.

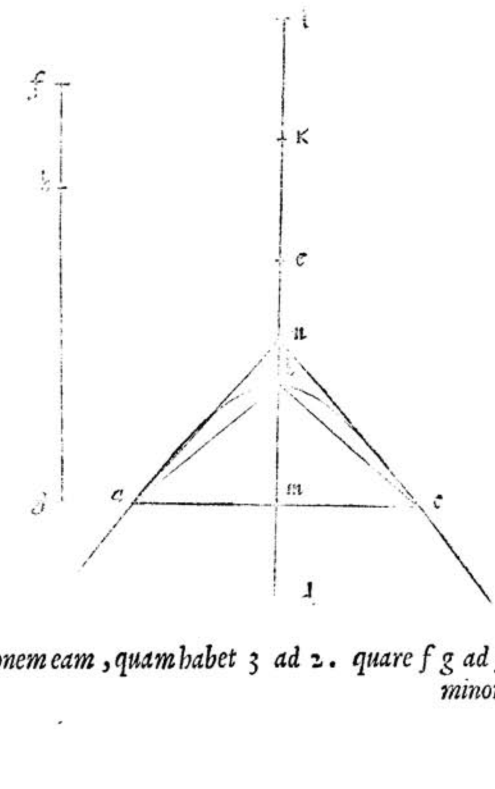
A' sphæroide dato portionem plano sic abscindere, ut portio ad conum, cuius eadem est basis, & idem axis, proportionem habeat similem datæ proportioni, si modo data proportio maior sit ea, quam habet 3 ad 2.

Sit datum sphæroides a b c d: data autem proportio sit f g ad g h, maior, quàm quæ est 3 ad 2: & oporteat ab ipso portionem abscindere, quæ ad conum: cuius eadem est basis, & idem axis, proportionem habeat, quam f g habet ad g h. Secetur sphæroides plano per axem ducto: & sit sectio ellipsis a b c d, cuius diameter, & axis sphæroidis sit b d, centrum e. Et quoniam utraque linea e d, d b ad d b proportionem habet eam, quam 3 ad 2: habebit f g ad g h maiorem proportionem, quàm e d, d b ad d b: & diuidendo per uigesimam nonam quinti ex traditione Campani f h ad h g maiorem, quàm e d ad d b. fiat ut f h ad h g, sic e d ad d k. erit componendo ut f g ad g h, sic e d, d k ad d k. ducatur per k planum a k c, erectum super b d. Dico iam portionem sphæroidis a b c ad conum a b c eandem habere proportionem, quam f g ad g h. Sit enim, ut utraque simul e d, d k ad d k, ita l k ad k b. erit conus a l c æqualis portioni a b c ex corollario trigesimæ tertiæ huius. & quoniam est, ut f g ad g h, ita e d, d k ad d k: & l k ad k b; hoc est conus a l c ad conum a b c: sequitur conum a l c; hoc est portionem a b c ad conum a b c esse, ut f g ad g h: quod facere oportebat.



PROPOSITIO XIII.

A' dato conoide obtusiangulo portionem plano abscindere ita, ut portio ad conum, cuius basis portioni eadem est, & axis idem, datam habeat proportionem. oportet autem datam proportionem minorem esse ea, quam habet 3 ad 2.



Sit datum conoides obtusiangulum a b c, cuius linea ad axem adiecta sit b e: data uero proportio f g ad g h minor, quàm quæ est 3 ad 2: & oporteat ab ipso portionem abscindere habentem ad conum, cuius eadem est basis, & idem axis, proportionem eam, quam habet f g ad g h. Secetur conoides plano per axem ducto: & sit sectio hyperbole a b c, cuius diameter, & axis portionis b d: ipsi autem b e æqualis ponantur e k, k l. habebit l b ad k b proportionem eam, quam habet 3 ad 2. quare f g ad g h minorem

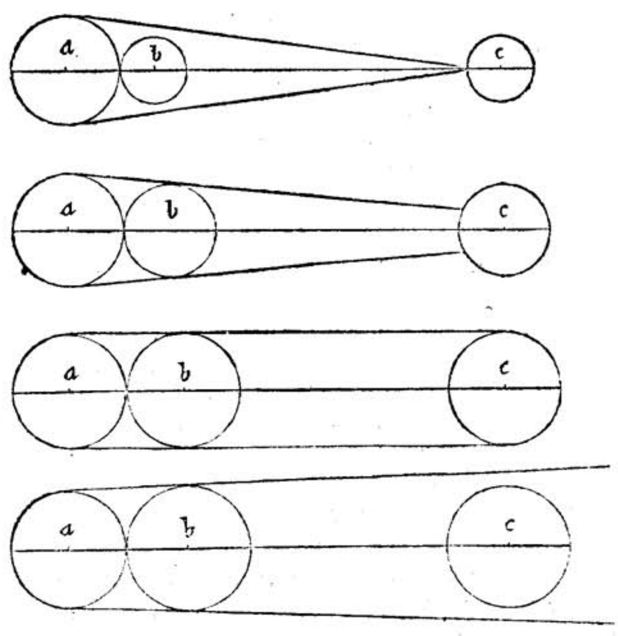
minorem habebit proportionem, quàm l b ad k b: & diuidendo f h ad h g minorem, quàm l k ad k b. Itaque fiat ut f h ad h g, sic l k ad k m: & per m ducatur linea a m c perpendicularis ad b d: & per ipsam a m c ducatur planum super b d erectum. Dico portionem conoidis a b c habere ad conum a b c eandem proportionem, quam f g ad g h. ut enim l m ad k m, ita fiat n m ad m b. erit ex corollario uigesimæ septimæ huius, conus a n c æqualis portioni a b c. est autem ut f h ad h g, ita l k ad k m. quare componendo erit ut f g ad g h, ita l m ad k m: & ita n m ad m b; hoc est conus a n c ad conum a b c. erit igitur conus a n c; hoc est portio a b c ad conum a b c, ut f g ad g h: quod fecisse oportebat.

EIVSDEM

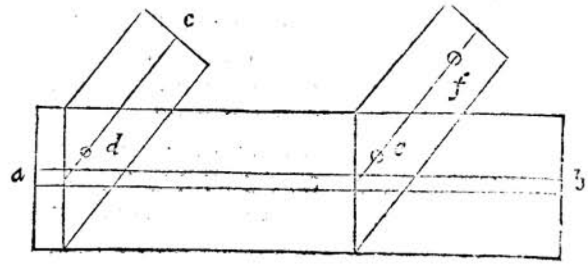
EIVSDEM COMMENTARIVS IN LIBRVM DE ARENAE NVMERO.

QVONIAM autem uisus non à puncto uidet, sed à magnitudine quadam.] *Vertices enim pyramidum uisualium non solum non terminantur ad superficiem oculi exteriorem. Sed etiam ultra superficiem ipsius humoris chrystallini protenduntur; alioqui perfecta rerum uisarum comprehensio fieri nullo modo posset, ut monstrauit Vitellio lib. tertio, propositione decima octaua, & sequentibus.* A

Sumantur duo cylindruli &c.] *Sint duo cylindruli æquales inter se; unus albus, alter non albus: sitq; albi basis circulus, in quo c non albi circulus, in quo b: uisus autem, in quo a: & constituantur cylindruli in regula; ita ut albus à uisu remotior sit, non albus, quàm proximus ipsi: & basium centra, & centrum uisus sint in eadem recta linea a b c. Si igitur cylindruli uisu multo subtiliores sint: præteritur is, qui proximus est uisui, & uidetur albus totus. quanquam enim cylindrus, in quo b, prohibeat, quo minus species punctorum superficiei cylindri in quo c, oculo oppositorum directe tendant ad uisum: non tamen prohibere potest ob eius paruitatem, ne oblique in ipsum incidentes, atque ad eius superficiem refractæ uideantur, ut in prima figura apparet. est tamen ea uisio satis confusa. nam distincta uisio fit tantum per lineas perpendiculares à punctis rei uisæ ad oculi superficiem pertinentes: quod idem monstrauit Vitellio eodem lib. propositione decima septima. Si uero non totus albus, sed ipsius partes quæpiam uideátur ex utraque parte non albi: subtiliores quidem uisu cylindruli erunt, non tamen multo subtiliores, ut in secunda figura. Quòd si ea demum magnitudine sumantur cylindruli, ut alter alterum uisui abscondat, & non ampliori loco, ut in tertia figura: ij profecto non erunt uisu minores. si enim ampliori loco absconderet: etiam uisu ipso maiores essent: quod ex quarta figura fit manifestum. Habita igitur magnitudine non minore uisu, facile habetur & locus, in quo radij uisuales coeunt, quem non nulli appellant centrum uisus; & quantitas anguli, minoris, scilicet, & maioris angulo, cui sol accommodatur. nanque ea magnitudine ad extremum regulæ collocata, in quo est uisus, & ex altera eiusdem regulæ parte posito cylindro, ita ut ultro, citroq; moueri possit: conuertatur regula ad solem: cylindrus autem solem totum abscondat: mox eo à uisu abducto, ubi primum ex utraque parte, tam cylindri, quàm magnitudinis incipiat solis minimum quippiam apparere, stabiliatur illic cylindrus. necessarium enim arbitror in hac obseruatione, si recta facienda est, ut & magnitudo, & cylindrus eodem angulo, qui per uisionem fit, contineantur: quod tamen non explicauit Archimedes. Itaque ductis lineis contingentibus magnitudinem, & cylindrum, erit angulus his lineis comprehensus, minor angulo, cui sol accommodatur, uerticem habente ad uisum; quoniam centrum uisus in eo loco erit, in quo dictæ lineæ conueniunt. Rursus eadem ratione adducto ad uisum cylindro, ubi primum*

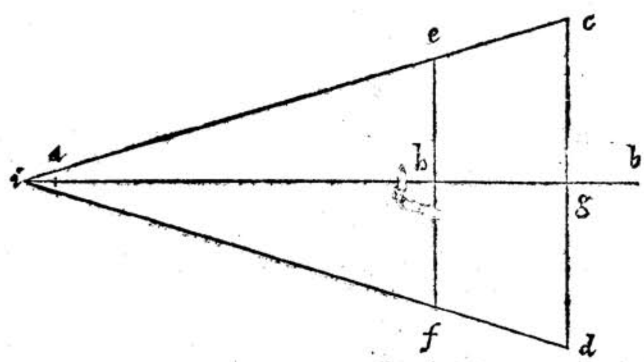


mum solem totum abscondat; illic stabiliatur; ductisq; lineis, & cylindrum, & magnitudinem tangentibus, erit qui dictis lineis continetur, angulus maior angulo, cui sol accommodatur, uerticem similiter ad uisum habente. Hæc est, ut opinor, Archimedis instrumenti forma, & hic usus, à quo non multum sane abhorret Dioptra Hipparchi, qua & Ptolemæus solis, & lunæ Diametros obseruauit. construxit enim Hipparcus, ut Proclus in Hypotyposi Astronomicarum positionum scribit, regulam quandam, nulla ex parte flexibilem, non minorem cubitis quatuor. postea per mediam ipsius longitudinem, linea longitudinem totam diuisit: & in hac canaliculum insculpsit formam habentem securis, in quem accommodauit ad rectos angulos prismatium quoddam, conuenienti magnitudine: atque eius basim in concauitatem canalis ita congruenter immisit, ut sine ullo impedimento erectum super regulæ latus moueri posset; & per totam ipsius longitudinem percurrere. alterum rursus prismatium similiter apposuit ad rectos angulos ipsi regulæ in altera eius extremitate; quod immobile esset, & in usu semper ad uisum admotum: ipsumq; perforauit foramine uno in media eius latitudine, & magis ad basim; hoc est ad ipsam regulam. alterum uero prismatium, quod, ut diximus, mobile esset, duobus rursus foraminibus perforauit: uno quidem respondente ipsi manentis foramini, in eadem recta linea similiter ad basim; altero autem circa extremitatem prismatij superiorem, & ipso respondente foraminibus, qui ad basim, & in eadem recta linea. sit enim regula a b, cuius quidem pars, quæ ad uisum a, in qua defigatur prismatium c d, alterum autem prismatium, quod est futurum mobile per totam regulæ longitudinem, sit e f, habens dicta duo foramina secundum directionem quandam; unum quidem ad basim, respondens foramini d, alterum uero in superiori parte f, ut sit instrumenti forma huiusmodi.



Vsum autem, & positionem ipsius talem esse oportet. Constituatur regula ad orientem, uel occidentem solem, in plano horizonti parallelo, ut sit sol purissimus, & sine ullo prorsus impedimento ad horizontem: sitq; prismatium quidem immobile ad spectantis uisum appositum: mobile autem ad partem solis, quod eousque ultro, citroq; transferatur, quousque per foramina d, e, quæ sunt in duobus prismatijs, inferior solis circumferentia; per ipsa autem d, f superior uideri possit. ita enim à spectantibus & extrema deprehenduntur apparentis solaris diametri, & angulus e d f, cui subtenditur eadem solis diameter apparens; hoc est, quæ distantiæ prismatij e f proportione respondet. Hæc Proclus. Excogitauit postea Rabi leui aliud instrumentum non dissimile instrumento Archimedis, & ad eundem propè usum ualens, ut ipse scriptum reliquit in libro, quem de Astrologia edidit, cuius uerba quoniam ad Archimedis locum explicandum maxime faciunt, hic apponenda censuimus, quemadmodum habentur in latina translatione. Possumus etiam geometrice demonstrare, in quo loco oculi centrum uisus existat, cum instrumento, quod inuenimus ad experientias locorum planetarum, in quouis tempore capiendas: ideo in hoc loco declarabimus de opere instrumenti prædicti, quantum est necessarium pro ista demonstratione habenda. faciemus igitur unum baculum cum superficiebus planis, ac rectis: & in uno capite illius sit una tabella, quæ aliqualiter sit cornuta; cuius alterutrum cornu experientiæ tempore ponetur super alterutram pupillam oculi: & habebimus multas tabellas diuersarum quantitatum perforatas in medio habentes rectas, per quarum foramina intrabit baculus antedictus: & sit altitudo earum super baculum aliquantulum depressior altitudine oculi: & ponemus duas earum in simul in baculo supradicto, unam alteri inæqualem, ita, quòd minor sit propinquior oculo: & supra baculum ambæ faciant angulos rectos: & sint parallelæ: & lineæ procedentes à centro oculi tangant utranque extremitatem utriusque tabellæ: & terminentur ad cœlum, & facto hoc, in certitudine nobis possibili facile sciemus locum, in quo centrum uisus existit; quia dictæ tabellæ sunt parallelæ; & faciunt angulos rectos cum baculo: & lineæ parallelæ intersecant trianguli lineas in tali proportione, qualem una habet ad aliam: & in tali proportione intersecarent omnes lineæ parallelæ, quæ essent ab angulo trianguli usque ad lineam ei subtensam, uel basim. Sed quia distantia unius ad aliam est cognita: & proportio unius ad aliam cognita, ideo inde habebimus scientiam anguli trianguli, in quo centrum uisus existit. Quia qualem proportionem habet linea procedens

cedens per baculum à centro uisus usque ad minorem tabellam, ad seipsam, ut procedit ab eodem centro ad tabellam maiorem; habet minor tabella ad maiorem. & quia commutamus; diuidimus, & conuertimus: est manifestum, quòd proportio minoris tabellæ ad lineam, quæ uenit à centro uisus ad eam, sit talis, qualis est proportio differentiæ inter maiorem tabellam, & minorem, ad spatium, quod est inter utranque. Sed quia proportio differentiæ inter maiorem tabellam, & minorem, ad spatium prædictum est scita: & quantitas tabellæ minoris est scita: sequitur, quòd proportio minoris tabellæ ad lineam procedentem à centro uisus ad eam est scita: & quòd quantitas dictæ lineæ sic procedentis à centro sit etiam scita. Verbi gratia, sit in superficie baculi linea quæ signetur a b, quæ ab oculo ad baculi caput procedat: & ex parte puncti a sit oculus: & sint in tabellis duæ lineæ parallelæ ex partibus, quibus aspiciuntur ab oculo; quæ parallelæ intersecent lineam a b; hoc est lineæ c d, & e f: & linea c d sit maior e f, & linea c d intersecet lineam a b in puncto g; & linea e f intersecet eam in puncto h, & protrahemus lineas c e, & d f: & quia duæ lineæ rectæ secundum c d, & e f, sunt uisæ ab oculo eiusdem anguli: clarum est, quòd si dictæ duæ lineæ secundum c e, & d f protrahentur, in centro uisus concurrent: & ponamus: quòd concurrant in puncto i, & signemus lineam a i: manifestum est, quòd linea b a i est una linea recta; quia posuimus centrum uisus in rectitudine lineæ b a. Item quia linea c g est æqualis lineæ g d: & linea e h est æqualis lineæ h f; & linea g h est communis istis duobus quadrangulis: & angulus c g h est æqualis angulo d g h: & angulus g h e est æqualis angulo g h f: manifestum est, quòd si figura d h supponeretur figuræ c h se per omnia tangerent, ac si unica esset figura; quia punctus d caderet super punctum c. & punctus f super punctum e. Quare manifestum est, quòd angulus g d f est æqualis angulo g c e. unde sequitur, quòd triangulus i c d habet crura æqualia; quia duo eius anguli iuxta basim sunt æquales. quare manifestum est, quòd linea, quæ uenit à puncto i ad punctum g, quæ diuidit lineam c d intersecat lineam c d ad angulos rectos. sed quia linea a g intersecat c d ad angulos rectos: sequitur, quòd linea producta à puncto i ad punctum g transit per punctum a. unde sequitur, quòd linea i a g est una linea recta. & quia triangulus c d i habet infra se lineam e f parallelam lineæ c d, quæ est basis anguli dicti trianguli: manifestum est, quòd qualem proportionem habet linea e i ad lineam c i, talem habet linea e f ad lineam c d. & per istum modum probaretur, quòd qualem proportionem habet linea e h ad lineam c g, talem habet linea i h ad lineam i g. & quia commutamus proportionem, & eam diuidimus: est manifestum, quòd proportio, quam habet e h ad lineam i h est talis, qualem habet differentia lineæ c g super lineam e h, ad lineam g h, quæ est differentia, quam habet linea i g super lineam i h. sed differentia, quam habet linea c g super lineam e h est scita; quia quantitas lineæ c g est scita; & quantitas lineæ e h est scita: remanebit quantitas lineæ i h scita; quia proportio quantitatis e h, quæ est scita ad lineam i h est scita. Et nos cum profunde cum maximo labore quæsiuerimus ueritatem: inuenimus punctum i in isto, uerbi gratia in centro uisus; quòd est in centro humiditatis congelatæ. & ista inquisitio fuit necessaria ualde; quia sine ea non poteramus inuenire anguli experientiæ ueritatem sine errore; quando respiciebamus cum instrumento isto duo corpora radiosa: & uolebamus scire arcum distantiæ inter unum, & reliquum; quia si poneremus centrum uisus infra spatium, quod continet i, & h; iudicaremus arcum distantiæ unius ad alium maiorem; quod esset, quia angulus experientiæ est maior. & per oppositum iudicaremus eam minorem, si dictum centrum poneremus ultra i.



Linea igitur h k maior est, quàm d k: quoniam sol ponitur supra horizontem esse.] *Ducatur recta linea h d, & producatur; rursusq; à puncto h super h d, perpendicularis alia ducatur h c, secans mundum in e, erit punctum c in horizonte situm, cum h d producta ad horizontis polum, quem zenit uocant, pertineat. si igitur k centrum solis in c intelligatur esse, uel etiam infra sub horizonte: ductis d k, h k lineis, ipsa d k maior erit, quàm h k: quoniam angu-* C *lus dhk, cui subtenditur, uel rectus est, uel obtusus. sole autem toto supra horizontem exorto, cum semidiameter solis maior sit terræ semidiametro, angulus hdk erit obtusus. quare linea hk contra maior erit, quàm ipsa dk.*

D Et idcirco angulus ldx maior est angulo mho.] *Hoc ita esse constat ex iis, quæ monstrantur in uigesima quarta propositione optices Euclidis, & sexagesima septima quinti libri Vitellionis. quare oculo in d existente, quanquam minus uideatur ex corpore solis, quàm eo existente in h; tamen plus uideri existimabitur.*

* Quare angulus mho minor est, quàm una pars anguli recti in centum quatuor, & sexaginta partes diuisi.] *Nam cum angulus ldx, qui quidem maior est angulo mho, sit minor, quàm una pars anguli recti diuisi in centum quatuor, & sexaginta partes: angulus mho, multo ea minor erit.*

E Linea uero ab recta minor est ea, quæ subtenditur uni portioni circumferentiæ circuli abc diuisæ in sexcentas sex, & quinquaginta partes.] *In circumferentia enim circuli consistunt quatuor anguli recti, qui circa centrum sunt: & cum rectus quisque diuisus fuerit in centum quatuor, & sexaginta partes; erit tota circumferentia diuisa in partes sexcentas sex, &* 33. sexti. *quinquaginta. ut autem angulus ad angulum, ita portio circumferentiæ ad portionem, in quibus hi consistunt. Quare cum angulus mho minor sit, quàm una pars anguli recti, diuisi in centum quatuor, & sexaginta: erit & portio circumferentiæ, in qua consistit, hoc est circumferentia ab minor, quàm sexcentesima quinquagesima sexta pars totius circumferentiæ: & propterea ab recta linea minor, quàm quæ eidem sexcentesimæ quinquagesimæ sextæ parti subtenditur.*

F Non enim ignoras iam demonstratum à nobis cuiuslibet circuli circumferētiam maiorē esse, quàm triplam &c.] *Hoc demonstrauit Archimedes in libro de dimensione circuli.*

G Linea ergo recta ba, ad hk minorem habet proportionem, quàm undecim ad mille centum octo, & quadraginta.] *Nam cum ambitus figuræ laterum sexcentorum sex, & quinquaginta, ad semidiametrum minorem habeat proportionem, quàm quatuor, & quadraginta ad septem: hoc est quàm sexcenta sex, & quinquaginta ad centum quatuor, & quatuor undecimas: habebit eius figuræ latus ad semidiametrum proportionem minorem, quàm unum ad centum quatuor, & quatuor undecimas. & cum recta linea ab minor sit latere dictæ figuræ, ut demonstratum est: habebit ad semidiametrum hk. multo minorem proportionem, quàm unum ad centum quatuor, & quatuor undecimas; hoc est quàm undecim ad mille centum octo & quadraginta. proportio enim, quam habet unum ad centum quatuor, & quatuor undecimas, ad integros numeros redacta, est ea, quam habet undecim ad mille centum octo & quadraginta. quod quidem numeris harum proportionum decussatim multiplicatis deprehenditur, ut nos monstrauimus in comm. in librum de dimensione circuli, propositione septima.*

H Quare linea ba minor est, quàm centesima pars lineæ hk.] *Cum enim linea ba minorem habeat proportionem ad lineam hk, quàm 11 ad 1148: sitq; 11 minor, quàm centesima pars 1148: erit ba multo minor, quàm centesima ipsius hk.*

I Ipsi autem ba æqualis est diameter circuli sg; propterea quòd ua eius dimidia &c.] *Ob æqualitatem uidelicet, atque similitudinem triangulorum hau, & hkr. angulo enim hua recto æqualis est hrk angulus, qui & ipse rectus est: et qui ad h communis est utrisque: reliquus igitur angulus, reliquo angulo æqualis: & triangulum triangulo simile. quare ut hk ad ha, ita kr ad au. at uero hk est æqualis ipsi ha, cum sint semidiametri eiusdem circuli: ergo & kr ipsi au est æqualis: & idcirco dupla ipsius kr, quæ est diameter circuli sg, duplæ au; hoc est ipsi ba æqualis erit.*

K Quòd def circulus minor sit circulo sg.] *Ex positione uidelicet, posuimus enim solem maiorem esse ipsa terra.*

L Quare hk ad ys minorem proportionem habet, quàm centum ad nouem & nonaginta.] *Cum enim utræque hy, ks sint minores, quàm centesima pars ipsius hk: erit reliqua ys maior, quàm nouem & nonaginta partes eiusdem hk. quare hk ad ipsam ys minorem habebit proportionem, quàm centum ad nouem & nonaginta.*

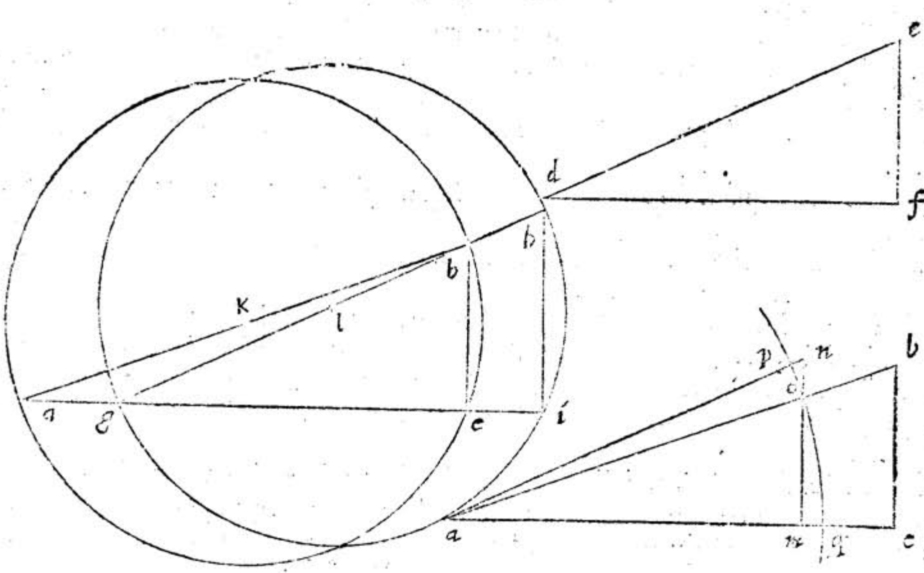
M Et linea sy minor, quàm dt.] *Iungantur dy ducta linea, & iungantur item st: linea* 16. tertii. *uero dt secet ipsam ys in puncto z. erit trianguli dyz angulus, qui est ad y obtusus; nam quæ circulum tangit in puncto y cum linea yz facit angulum rectum. quare latus dz maius erit la-* 19 primi. *tere yz. Rursus eadem ratione trianguli tsz angulus ad s maior erit: & idcirco latus zt maius*

latere

latere z s. Itaque duo latera d z, z t, quibus æqualis est ipsa d t linea, maiora sunt duobus lateribus y z, z s. atque his ipsis linea y s est æqualis. linea igitur y s minor est linea d t, ut proponebatur.

Minorem proportionem habet h r ad d t, quàm centum ad nouem & nonaginta.] *Cum linea h r minor sit, quàm h k; quòd subtenditur minori angulo: habebit h r ad y s minorem proportionem, quàm h k ad eandem. & rursus cum y s minor sit, quàm d t, ut monstrauimus: habebit h r ad d t etiam minorem, quàm ad y s. ergo h r ad d t minorem proportionem habet, quàm h k ad y s. sed h k ad y s monstratum est habere minorem, quàm centum ad nouem, & nonaginta. quare h r ad d t multo minorem proportionem habebit, quàm centum ad nouem & nonaginta.* N 19. primi. 8. quinti.

Si enim duo triangula rectangula, altera duorum laterum, quæ sunt circa angulum rectum, æqualia habeant; altera autem inæqualia; maior angulus eorum, qui lateribus inæqualibus continetur ad minorem, maiorem quidem proportionem habet, quàm maior linea angulo recto subtensa ad minorem; minorem uero, quàm maior eorum, quæ ad angulum rectum consistunt, habeat ad minorem.] *Sint duo triangula rectangula a b c, d e f; quorum anguli recti ad c f puncta constituti sint: trianguli uero a* O



b c latus b c æquale sit lateri e f trianguli d e f: & a c latus maius latere d f. Dico angulum e d f, qui maior est angulo b a c, ad eundem ipsum maiorem quidem habere proportionem, quàm b a latus ad latus e d; minorem uero, quàm latus a c ad latus d f. Abscindatur à linea a c, linea æqualis ipsi d f; quæ sit c g: & ducta g b producatur usque ad h; ita ut g h fiat æqualis ipsi a b: & rursus producta a c ad ipsam à puncto h, demittatur perpendicularis h i, quæ erit æquidistans ipsi b c. secta autem linea a b bifariam à puncto k, centro quidem k, interuallo uero k a, circulus describatur a b c: & similiter secta g h bifariam in l, centro l, & interuallo l g, describatur alter circulus g h i. Iam constat triangulum g b c æquale esse, atque simile triangulo d e f: & a b c circulum circulo g h i æqualem; cum æquales sint eorum diametri: circuli uero a b c circumferentia per c punctum transibit: & similiter circumferentia circuli g h i transibit per punctum i: quoniam anguli g c b, g i h utrique recti sunt. angulus ergo h g i ad angulum b a c eam proportionem habet, quam circumferentia h i ad circumferentiam b c: & circumferentia h i ad b c circumferentiam maiorem proportionem habet, quàm recta linea h i ad rectá lineam b c: quod demonstrauit Ptolemæus in primo magnæ compositionis lib. quare angulus h g i ad angulum b a c maiorem habet, quàm recta linea h i ad ipsam b c. sed h i ad b c ob similitudinem triangulorum eam proportionem habet, quam h g; hoc est b a, ad b g; hoc est ad e d. angulus igitur h g i; hoc est e d f ad b a c angulum habet maiorem proportionem, quàm b a linea ad lineam e d. 28. primi. 31. tertii. ult. sexti. 13. quinti. 4. sexti.

Rursus à linea a c abscindatur a m, æqualis ipsi d f: & ad datum in ea punctum a constitua-
23. primi. *tur angulus n a m, æqualis angulo f d e: fiatq; a n æqualis ipsi d e: & iungantur n m ducta linea, quæ secet lineam a b in puncto o: erit triangulum n a m æquale, atque simile triangulo e d f, &*
8. quinti. *centro quidem a, interuallo autem a o circulus describatur p o q. sector igitur a p o ad sectorem a o q minorem proportionem habet, quàm ad triangulum a o m. sed a p o sector ad triangulum a o m minorem habet, quàm triangulum a n o ad idem ipsum; quoniam sector a o q maior est triangulo a o m: & triangulum a n o maius sectore a p o. ergo a p o sector ad sectorem a o q minorem*
ult. sexti. *habet proportionem, quàm a n o triangulum ad triangulum a o m. ut autem sector a p o ad se-*
1. sexti. *ctorem a o q, ita angulus n a o ad angulum o a m: & ut triangulum a n o ad triangulum a o m,*
28. quinti. *ita linea n o ad lineam o m. angulus igitur n a o ad angulum o a m minorem habet proportionem, quàm linea n o ad lineam o m: & componendo angulus n a m ad angulum o a m, minorem habet,*
4. sexti. *quàm linea n m; hoc est b c ad lineam o m. ut autem b c ad o m, ita a c ad a m; hoc est ad d f. Quare angulus n a m, hoc est, e d f ad ipsum b a c angulum minorem proportionem habet, quàm linea a c ad lineam d f: quod monstrare oportebat.*

P Quare angulus l d x ad angulum m h o, minorem proportionem habet &c.] *Ex decima quinta quinti. nam angulus l d x duplus est anguli k d t: & angulus m h o item duplus anguli k h r.*

Q Et quoniã angulus l d x maior est quàm ducentesima pars anguli recti; erit angulus m h o maior, quàm nouem & nonaginta partes anguli recti, in uiginti millia partiũ diuisi.] *Quam enim proportionem habet 100 ad 99, eandem habet $\frac{1}{200}$ ad $\frac{99}{20000}$. quare angulus l d x ad angulum m h o minorem habet proportionem, quàm $\frac{1}{200}$ ad $\frac{99}{20000}$. & cum angulus*
8. quinti. *l d x sit maior, quàm $\frac{1}{200}$ pars anguli recti: erit & angulus m h o multo maior, quàm $\frac{99}{20000}$ ipsius recti.*

R Quare maior, quàm una pars anguli recti, diuisi in ducentas, & tres partes.] *Rursus quam proportionem habet 99 ad 20000, eandem habet 1 ad $202\frac{2}{99}$. angulus igitur m h o maior est, quàm una pars anguli recti, diuisi in partes $202\frac{2}{99}$: & idcirco multo maior, quàm una pars eiusdem diuisi in partes 203.*

S Linea ergo b a maior est, quàm quæ subtenditur uni parti circumferentiæ circuli a b c, diuisæ in partes octingentas & duodecim.] *Quòd si a b maior sit, quàm subtensa uni portioni circumferentiæ circuli, diuisæ in partes octingentas, & duodecim: multo maior erit, quàm quæ subtenditur uni portioni circumferentiæ in mille partes diuisæ. quare constat, quod proponebatur.*

T Etenim ostensum est circuli diametrum minorem esse tertia parte ambitus uniuscuiusque figuræ multorum angulorum in circulo descriptæ, quæ pluribus, quàm sex lateribus contineatur; quoniam hexagono in circulo descripto, diameter circuli tertia pars est ipsius hexagoni.] *Nam hexagoni latus semidiametro circuli, in quo describitur, est æquale, ut patet ex corollario decimæ quintæ quarti elementorum. Heptagono autem æquilatero in circulo descripto, erit ex ijs, quæ tradita sunt à Ptolemæo in magna compositione, latus ipsius maius, quàm 52 partes earum, quarum diameter est centum & uiginti. quare totus ambitus maior, quàm 364. sed 364 est maior, quàm triplus 120. multo igitur maior erit ambitus dictæ figuræ, quàm triplus diametri circuli, in quo ipsa describitur.*

Rursus Octagono æquilatero in circulo descripto, latus ipsius maius erit, quàm $45\frac{11}{12}$ earundem partium: & ambitus maior, quàm $367\frac{1}{3}$. quare cum $367\frac{1}{3}$ maior sit, quàm triplus 120: erit figuræ ambitus multo maior, quam triplus diametri circuli, in quo describitur. Et eodem modo in reliquis figuris, idem contingere facile demonstrabimus. quo autem pluribus lateribus constat figura, eo maiori ambitu continetur: atque ad circuli circumferentiam propius accedit.

V Sed iam utile esse arbitror de numerorum denominationibus dicere, ut ne decipiantur illi.] *Quoniam in hoc negocio Archimedes necesse habuit numeris uti magnis; qui nisi per obscuram quandam myriadum repetitionem Græcorum more, nominari non possunt; rem utilem se facturum existimauit, si modum traderet, quo numerus quantum uis magnus facile, atque aperte exprimeretur. Itaque distribuit numeros ipsos in singulas octades; ita ut primæ octadis numeri, primi numeri dicantur; secundæ octadis numeri, secundi; Tertiæ tertij; quartæ quarti; & ita in reliquis. atque hac ratione primæ octadis numerus primus, unitatum numerus est; secundus denariorum unitatum; tertius centenariorum; quartus millenariorum; quintus denum millenariorum,*

quæ

quæ à græcis myriades appellantur; ſextus denariorum myriadum eſt; ſeptimus centenariorum; octauus, & ultimus millenariorum. ſemper enim qui ſequitur numerus, præcedentis ſui relatiui decuplus eſt. ſecundæ octadis primus, qui numerus dicitur unitatum ſecundorum numerorum, denum millenariorum myriadum numerus eſt; ſecundus denariorum denum millenariorum myriadum; tertius centenariorum; quartus millenariorum; quintus myriadum, qui breuitatis cauſſa dicitur myriadum ſecundorum numerorum; ſextus denariorum myriadum; ſeptimus centenariorum; octauus, & ultimus millenariorum, qui millenariorum dicitur myriadum ſecundorum numerorum. Tertiæ octadis primus numerus eſt denum millenariorum myriadum, denum millenariorum myriadum, qui dicitur numerus denum millenariorum myriadum ſecundorum numerorum. quintus eiuſdem octadis numerus, qui myriadum dicitur tertiorum numerorum, myriadum eſt denum millenariorum myriadum, denum millenariorum myriadum: ultimus, qui millenariorum dicitur myriadum tertiorum numerorum, millenariorum eſt myriadum denum millenariorum myriadum, denum millenariorum myriadum. quartæ autem octadis primus denum millenariorum eſt myriadum, denum millenariorum myriadum, denum millenariorum myriadum; diciturq; denum millenariorum myriadum tertiorum numerorum: & eodem modo in ceteris. His ita diſpoſitis continet prima periodus numeros, qui ſunt ab unitatibus primorum numerorum uſque ad unitates ſecundorum: ſecunda periodus eos, qui ab unitatibus ſecundorum numerorum ſunt uſque ad unitates tertiorum: tertia ab unitatibus tertiorum ad unitates quartorum; ita ut nonus ab unitate numerus, finis ſit primæ periodi, & principium ſecundæ: ſeptimus decimus finis ſecundæ, principium tertiæ; cuius ipſius finis eſt uigeſimus quintus, qui idem eſt principium quartæ periodi, & ita deinceps. Quòd ſi ſint numeri ab unitate proportionales in decupla proportione, ut ſcilicet primus ſit unitas, ſecundus decem, tertius centum, quartus mille, & ſic in ceteris; erunt primi octo eorum, qui primi dicuntur numerorum: octo inſequentes eorum, qui ſecundi dicuntur; itemq; alij aliorum: primæ uero octadis quintus numerus, myrias erit; octauus & ultimus mille myriades: ſecundæ octadis primus, qui eſt unitas ſecundorum numerorum, decies mille myriades; quintus, myrias denum millium myriadum, qui myrias dicitur ſecũdorum numerorum; Vltimus mille myriades denum millium myriadum; hoc eſt mille myriades ſecundorum numerorum. Tertiæ Octadis primus, qui decies mille myriades dicitur ſecũdorum numerorum: decies mille myriades eſt denum millium myriadum. Huius ipſius octadis ultimus, mille myriades dicitur tertiorũ numerorũ: eſt autem mille myriades denum millium myriadum, denum milium myriadum. quartæ octadis primus decies mille myriades denum millium myriadum, denum milliũ myriadum; diciturq; decies mille myriades tertiorum numerorum: & eodem modo in reliquis procedemus. Erit igitur horum prima periodus decies mille myriades primorum numerorum, ſecunda decies mille myriades ſecundorum, tertia item tertiorum, quarta quartorum: & ſimiliter aliæ aliorum, qui ſequuntur. Hæc ſunt, niſi me fallit animus, in quibus dictorum Archimedis ſumma conſiſtit, ſed adeo ſunt deprauata, ut merito ignoſcendum, ſi non omnia reſtituantur.

His igitur hoc modo denominatis, ſi ſint numeri ab unitate proportionales.] *Hæc præmiſit Archimedes, quoniam in eiuſmodi ratione his potiſſimum numeris utitur, ut ad rem ipſam facile breuiterq; demonſtrandam opportuniſſimis.* X

Eſt autem d ſecundum ſe ipſum multiplex ipſius a.] *Sequitur hoc etiam ex decima nona ſeptimi elementorum. nam cum d ad unitatem eandem habeat proportionem, quàm l habet ad ipſum h: qui ex d & h fit, æqualis erit ei, qui fit ex unitate, & l. ergo q ipſi l erit æqualis.* Υ

Cum oſtenſum ſit ſphæras ad inuicem proportionem habere triplam eius, quæ eſt ſuarum diametrorum.] *Oſtenditur id proportione ultima duodecimi elementorum. quare cum diameter papaueris ad diametrum ſphæræ digito æqualem eam proportionem habeat, quam unum ad quadraginta: unũ autem ad quadraginta habeat eam, quam quadraginta ad mille ſexcẽta; et quam mille ſexcenta ad ſexaginta quatuor millia: ſequitur ſphærã, cuius diameter digito eſt æqualis, habere ad ſphæram papaueris proportionem eandem, quam ſexaginta quatuor millia ad unum.* Z

Minor eſt igitur, quam unitates decem ſecundorum numerorum.] *A ſex unitatibus ſecundorum numerorum ad decem idcirco tranſitum fecit Archimedes, ut ad numeros deueniret in proportione decuplos, in quibus facilis eſt propoſiti demonſtratio, ut ſuperius dictum eſt.* ω

AL DVS