Arenarius, ex J. L. Heiberg

Le note riportate sono quelle apposte dall'Heiberg per l'esplicitazione di parti di testo, presenti nella scrittura originale secondo le convenzioni tipografiche adottate anche per la notazione matematica; non sono riportate le numerose note d'interpretazione filologica.

Liber I [1] Sunt, qui existiment, rex Gelo, numerum arenae infinitum esse magnitudine; dico autem, non solum eius, quae circa Syracusas et reliquam Siciliam est, sed etiam quae in qualibet regione siue culta siue inculta. alii autem infinitum eum esse non arbitrantur, nullum uero tantum nominatum esse, ut multitudinem eius superet.

[2] quod qui putent adparet, si globum ex arena collectum esse fingant, cetera quantus globus terrae sit, expletis autem et maribus omnibus et cauis terrae locis ad altitudinem aequantem montes altissimos, multo minus eos intellecturos esse, nominari posse numerum multitudine eius superantem.

[3] ego uero tibi demonstrare conabor demonstrationibus geometricis, quas cogitatione adsequi poteris, numerorum a nobis nominatorum et in libro, quem ad Zeuxippum misimus, propositorum quosdam superare non modo numerum arenae magnitudinem habentis aequalem terrae ita expletae, uti diximus, sed etiam numerum arenae magnitudinnem habentis mundo aequalem.

[4] nouisti autem, mundum a plerisque astrologis uocari sphaeram, cuius centrum sit centrum terrae, radius autem aequalis lineae inter centra solis et terrae positae. haec enim uulgo scribuntur, ut ex astrologis cognuisti. Aristarchus uero Samius libros quosdam edidit, qui hypotheses inscribuntur, in quibus ex iis, quae supponuntur, adparet, mundum multiplicem esse,

2 magnitudine] (1 - C) Hoc tritum prouerbium erat Graecis; Pindarus Ol. II, 86; Paroemiogr. Gr. p. 11, 167, 250 ed. Gaisford.

quam supra diximus.

[5] supponit enim, stellas fixas solemque immobilia manere, terram uero circum solem in medio cursu positum secundum circuli ambitum circumuolui, sphaeram autem stellarum fixarum circum idem centrum positam, circum quod sol positus sit, tantam esse, ut circulus secundum quem terram circumuolui supponit, eam rationem habeat ad distantiam stellarum fixarum, quam habeat centrum sphaerae ad superficiem.

[6] hoc certe fieri non posse manifestum est. nam quoniam centrum sphaerae nullam magnitudinem habet, ne rationem quidem ullam ad superficiem sphaerae habere putandum est. sed credendum est, Aristarchum hoc sentire: quoniam supponimus, terram quasi centrum mundi esse, sphaeram, in qua est circulus, secundum quem terram circumuolui supponit, ad sphaeram stellarum fixarum eam habere rationem, quam habeat terra ad mundum, qui ulgo uocatur.

[7] nam demonstranies phaenomenorum eiusmodi suppositioni adcommodat, et maxime magnitudine sphaerae, in qua terra moveri fingit, aequalem mundo, qui uulgo vocatur, supponere uidetur. dicimus igitur, etiamsi ex arena tanta sphaera colligatur, quantam Aristarchus sphaeram stellarum fixarum esse supponat, qui in Principiis nominati sint, magnitudine superare numerum arenae magnitudinem habentis tali spharae aequalem, his suppositis:

[8] 1. primum perimetrum terrae 3000000 stadia longam esse nec maiorem; quamquam quidam, ut tu quoque nouisti, demonstrare conati sunt, eam 300000 stadia longam esse. ego uero (hunc numerum) excedens et magnitudinem terrae magnitudini a prioribus propositae decies fere sumptae aequalem esse supponens perimetrum eius 3000000 fere stadia longam nec maiorem esse suppono.

2. deinde diametrum terrae maiorem esse diametro lunae, et diametrum solis maiorem diametro terrae, rursus eadem sumens, quae plerique astrologorum priorum.

[9] 3. deinde diametrum solis aequalem esse diametrum lunae tricies sumptae nec maiorem; quamquam ex astrologis prioribus Eudoxus eam diametro lunae nouies sumptae aequalem esse declarat, Phidias autem duodocies sumptae, Aristarchus autem demonstrare conatus est, diametrum solis maiorem esse diametro lunae duodeuicies sumpta, minorem uero eadem uicies sumpta [Aristarchus de distant. prop. 9]. ego uero eum quoque excedens, ut

---

34 qui ulgo uocatur] (2 - C) Potius sententia Aristarchi haec fuisse uidetur, distantiam stellarum tantam esse, ut circulus, in quo terra moueatur, cum ea comparatus puncti locum obtineat; cfr. Arist, de distnt. 2; Ptolemaeus *συντ.* II, 5 p. 74. Cfr. Quaest. Arch. p. 202; Nizze p. 210 - 11.

42 quamquam quidam] (3 - C) Significatur Eratosthenes; Berhardy Eratosth. p. 57; Quaest. Archim. p. 202.

propositum pro certo sit demonstratum, suppono, diametrum solis aequalem esse lunae diametro tricies fere sumptae nec maiorem.

[10] 4. praeterea autem diametrum solis maiorem esse latere figurae mille laterum circulo maximo mundi inscriptas. hoc uero suppono, cum Aristarchus inuenerit, solem partem septingentesimam fere circuli zodiaci esse adparere, ipse autem hoc modo scrutatus per instrumenta cum angulum deprehendere conatus sum, cui sol aptatur uerticem in oculo habenti.

[11] uerum quidem ipsum deprehendere difficile est, quia neque uius neque manus neque instrumenta, quibus utendum est, satis certa sunt ad uerum inueniendum. [11] [1] de his uero rebus hoc tempore nihil adtinet pluribus disputare, praesertim cum talia saepius illustrata sint. sed mihi ad demonstrationem propositi satis est angulum deprehendere non maiorem angulo, cui sol aptatur uerticem in oculo habenti, et rursus alium angulum deprehendere non minorem angulo, cui sol aptatur uerticem in oculo habenti.

[12] itaque longa regula in pede perpendiculari posita, qui in eiusmodi loco collocatus erat, unde sol oriens conspici posset, et cylindro paruo tornato et in regula posito perpendiculari statim post ortum solis, cum sol prope horizontem esset, et oculi ex aduerso eum intueri possent, regula aduersus solem conuersa est, et oculus in extrema regula positus est; cylindrus autem in medio solis et oculi positus soli officiebat. cylindrus igitur, qui ab oculo sensim remouebatur, ubi paululum solis in utraque parte cylindri adparere coepit, inhibitus est.

[13] iam si oculus re uera ab uno puncto prospectaret, lineis ab extrema regula, quo loco oculus positus erat, cylindrum contingentibus ductis angulus lineis ita ductis comprehensus minor essete angulo, cui sol aptatur uerticem in oculo habenti, quia ex utraque parte cylindri pars solis conspiciebatur. sed quoniam oculi ab uno puncto non prospectant, sed a magnitudine quadam, magnitudinem quandam rotundam oculo non minorem sumpsi, et magnitudine in extrema regula posita, quo loco oculus positus erat, lineis et magnitudinem et cylindrum contingentibus ductis, angulus lineis ita ductis comprehensus minor erat angulo, cui sol aptatur uerticem in oculo habenti.

[14] magnitudo autem oculo non minor hoc modo inuenitur. sumuntur duo cylindri tenues eadem crassitudine, alter albus, alter uero non, et ante oculum ponuntur, ita ut albus ab eo aliquantum absit, qui autem albus non est, oculo quam proximus sit, ita ut etiam contingat faciem. si igitur cylindri, quos sumpsimus, oculo tenuiores sunt, cylindrus proprior ab oculo comprehenditur, et albus ab eo conspicitur, si multo tenuiores sunt, totus, si minus, partes quaedam albi ex utraque parte cylindri oculo propioris conspiciuntur.

1. Numerazione del capitolo ripetuta nell'edizione dell'Heiberg.

[15] his autem cylindris carassitudine aptis sumptis alter alteri officit, nec maiori spatio, eiusmodi igitur magnitudo, qualis est crassitudo cylindrorum sic se habentium, haud dubie oculo minor non est. angulus uero non minor angulo, cui sol aptatur uerticem in oculo habenti, hoc modo sumptus est. cylindro in regula ita ab oculo remoto, ut soli toti officiat, et lineis ab extrema regula, quo loco oculus positus erat, cylindrum contingentibus ductis, angulus lineis ita ductis comprehensus non minor est angulo cui sol aptatur uerticem in oculo habenti.

[16] itaque cum angulis ita deprehensis angulum rectum metirer, angulus ad punctum positum minor erat una parte, recto angulo in partes 164 diuiso, minor uero angulus maior una parte, recto angulo in partes 200 diuiso. adparet igitur, etiam angulum, cui sol aptatur uerticem in oculo habenti, minorem esse una parte, angulo recto in partes 164 diuiso, maiorem uero una parte, recto angulo in partes 200 diuiso.

[17] his autem confirmatis demonstrabimus, diametrum solis maiorem esse latere figurae mille laterum crculo maximo mundi inscriptae. fingatur enim planum per centra solis et terrae et per oculum positum, cum sol paullo supra horizontem est. et planum ita positum mundum in circulo ΑΒΓ secet, terram autem in circulo ΔΕΖ, solem autem in circulo ΣΗ. et terrae centrum sit Θ, solis autem Κ, oculus autem sit Δ. et ducantur lineae circulum ΣΗ contingentes, a puncto Δ lineae ΔΛ, ΔΞ, quae in punctis Ν, Τ contingant, a Θ autem puncto ΘΜ, ΘΟ, quae in punctis Χ, Ρ contingant. et lineae ΘΜ, ΘΟ circulum ΑΒΓ in punctis Α, Β secent.

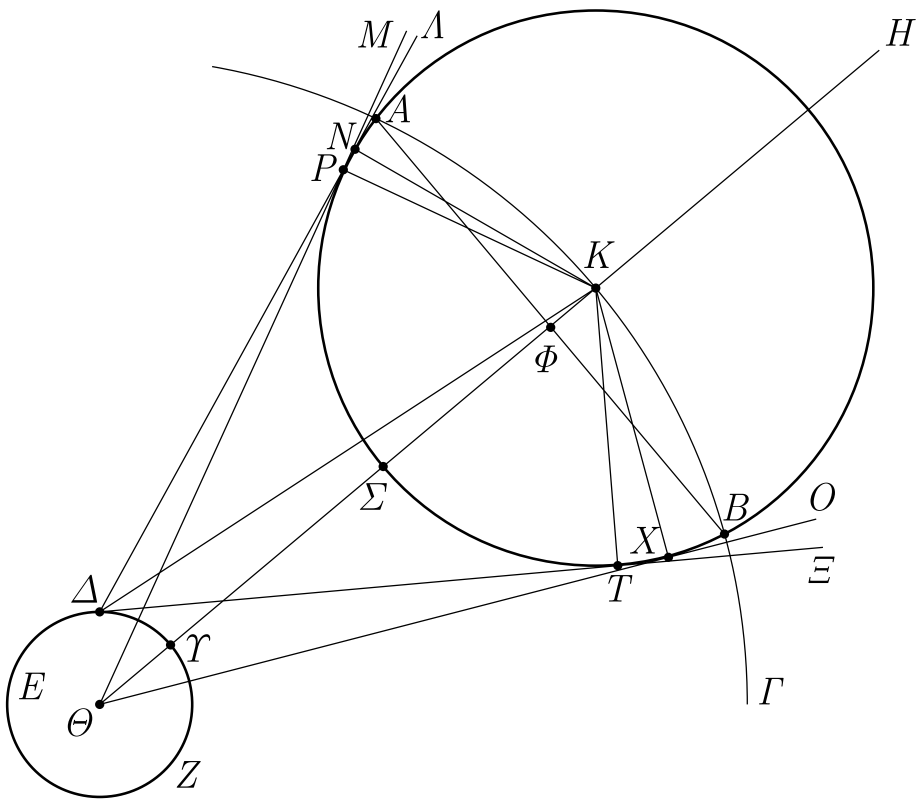
[18] iam est $\Theta K > \Delta K$, quia suppositum est, solem super horizontem esse. quare angulus lineis ΔΛ, ΔΞ comprehensus maior est angulo lineis ΘΜ, ΘΟ comprehensus. sed angulus comprehensus lineis ΔΛ, ΔΞ maior est quam pars ducentesima anguli recti, minor autem una parte angulo recto in partes 164 diuiso. nam aequalis est angulo, cui sol aptatur uerticem in oculo habenti. quare angulus lineis ΘΜ, ΘΟ comprehensus minor est una parte recto angulo in partes 164 diuiso, et linea ΑΒ minor est linea sub unam partem subtendenti, ambitu circuli ΑΒΓ in partes 656 diuiso.

[19] sed perimetrus polygoni illius ad radium circuli ΑΒΓ minorem rationem habet, quam 44 : 7, quia perimetrus cuiusuis polygoni circulo inscripti

103–104 angulus ad punctum positum] (4 - C) H. e. angulus, cuius uertex est punctum illud in extrema regula positum (lin. 4), eum uertex anguli minoris (lin. 11) extra regulum cadat propter cylindros illos, in eo inueniendo usurpatos. Queast. Arch. p. 204. N.d.T.: il riferiemnto è ovviamente relativo a numeri di linea come individuabili nell'edizione originale dell'Heiberg.

118 super horizontem esse] (5 - C) Itaque $\angle$ Θ Δ K obtusus est (si enim sol in horizonte esset, rectus esset, quia horizon inuenitur linea in puncto Δ ad ΔΘ perpendiculari erecta).

123 comprehensus] (6 - C) H. e. $\angle$ LDX > ΜΘΟ ex Eucl. opt. 24.



Grafica di Archimede, ex Heiberg. Cortesia di Claudio Beccari

ad radium minorem rationem habet, quam $44 : 7$. nouisti enim a nobis demonstratum esse, cuiusuis circuli ambitum maiorem esse quam triplo maiorem diametro spatio minore, quam est septima pars [diametri] [κύκλ. μέτρ. 3]. eo autem minor est perimetrus polygonu inscripti [περὶ σφ. καὶ κυλ. I, π. 10, 23]. quare $\mathrm{BA} : \Theta\mathrm{K} < 11 : 1148$. itaque $\mathrm{BA} < \frac{1}{100}\ \Theta\mathrm{K}$.

[20] sed lineae BA aequalis est diametrus circuli ΣH, quia

$$\Phi\mathrm{A} = \tfrac{1}{2}\mathrm{BA} = \mathrm{KP};$$

nam cum est $\Theta\mathrm{K} = \Theta\Lambda$, ab terminis earum perpendiculares ductae sunt [lineae ΦΛ, KP], ita ut sub eundem angulum subtendant. adparet igitur, diametrum circuli ΣH minorem esse quam $\frac{1}{100}\ \Theta\mathrm{K}$. et diametrus EΘΥ minor est diametro circuli ΣH, quoniam circulus ΔEZ minor est circulo ΣH [hypoth. 2]. itaque

$$\Theta\Upsilon + \mathrm{K}\Sigma < \tfrac{1}{100}\ \Theta\mathrm{K}$$

136 sub eundem angulum subtendant] (7 - C) H. e. $\Delta\ \Theta\ \Lambda\ \Phi \cong \Theta\ \mathrm{K}\ \mathrm{P}$; Eucl. I, 26.

quare $\Theta K : \Upsilon\Sigma < 100 : 99$. et quoniam $\Theta K > \Theta P$ et $\Sigma\Upsilon < \Delta T$, erit igitur etiam $\Theta P : \Delta T < 100 : 99$.

[21] et quoniam in triangulis rectangulis ΘKP, ΔKT latera KP, KT aequalia sunt, latera autem ΘP, ΔT inaequalia, et $\Theta P > \Delta T$, angulus lineis ΔT, ΔK comprehensum maiorem rationem habet, quam $\Theta K : \Delta K$, minorem autem, quam $\Theta P : \Delta T$. nam si in duobus triangulis rectangulis duo laterum rectum angulum comprehendentium aequalia sunt, duo inaequalia, maior angulorum ad latera inaequalia positorum ad minorem maiorem rationem habet, quam maior linea earum, quae sub angulum rectum subtendunt, ad minorem, minorem autem quam maior linearum angulum rectum comprehendentium ad minorem.

[22] quare[2] $\angle \Lambda\Delta\Xi : O\Theta M < KP : \Delta T$; sed $\Theta P : \Delta TM < 100 : 99$. quare etiam erit $\angle \Lambda\Delta\Xi : O\Theta M < 100 : 99$. et quoniam est $\angle \Lambda\Delta\Xi > \frac{1}{200} R$, erit etiam

$$\angle\ O\Theta M > \frac{99}{20000} R\ .$$

quare $\angle\ O\Theta M > \frac{1}{203}R$. quare linea BA maior est linea sub unam partem subtendenti, ambitu circuli $AB\Gamma$ in partes 812 diuiso. sed lineae AB aequalis est diametrus solis. adparet igitur, diametrum solis maiorem esse latere figurae mille laterum.

Liber II [1] His autem suppositis haec quoque demonstrari possunt: diametrum mundi minorem esse diametro terrae decies millies sumpta, et praeterea, diametrum mundi minus quam 10000000000 stadia longam esse. nam quoniam suppositum est, diametrum solis non maiorem esse quam diametrum lunae tricies sumptam [hypoth. 3], et diametrum terrae maiorem

2. Nella versione latina di questo capitolo l'Heiberg ha abbandonato la traduzione quasi letterale sin qui seguita esprimendo le deduzioni di Archimede in forma matematica come pure precedentemente. Fra l'altro, ln. 153, introduce una lettera dell'alfabeto latino, la *R*, ovviamente non presente nel testo greco.

141 et quoniam $\Theta K > \Theta P$ et $\Sigma\Upsilon < \Delta T$] (8 - C) Quia $\Sigma\Upsilon$ omnium linearum duo puncta circulorum ΔEZ, ΣH iugentium minima est; Nizze p. 214 not. β.

144 $\Theta P > \Delta T$] (9 - C) Quia $\Theta K > \Delta K$; nam crura anguli lineis contingentibus comprehensi eo maiora sunt, quo longius uertex anguli a centro circuli abest.

150–151 angulum rectum comprehendentium ad minorem] (10 - C) Demonstrationem huius propositionis geometricam dedit Commandinus fol. 62 (Quaest. Arch. p. 204 - 5), trigonometricam Nizze p. 214 not. γ.

156 quare $\angle\ O\Theta M > \frac{1}{203}R$] (11 - C) Nam $99 > \frac{1}{203} \times 20000$.

157–158 aequalis est diametrus solis] (12 - C) H. e. diametrus circuli ΣH; u. p. p. 258, 19,

158 adparet igitur] (13 - C) Quia latera polygonorum inscriptorum, quo plura, eo minora sunt; itaque latus figurae 812 laterum, quod minus est linea AB, maius est latere figurae mille laterum.

esse diametro lunae [hypoth. 2], adparet, diametrum solis minorem esse quam diametrum terrae tricies sumptam. rursus autem quoniam demonstratum est, diametrum solis maiorem esse latere figurae mille laterum circulo maximo mundi inscriptae, manifestum est, perimetrum figurae illius mille laterum minorem esse diametro solis millies sumpta. diametrus autem solis minor est quam diametrus terrae tricies sumpta. quare perimetrus figurae mille laterum minor est diametro terrae tricies millies sumpta.

[2] iam quoniam perimetrus figurae mille laterum minor est diametro terrae tricies millies sumpta, maior autem quam triplo maior diametro mundi (nam demonstratum est, cuiusuis circuli diametrum minorem esse tertia parte perimetri cuiusuis polygoni circulo inscripti, quod aequilaterum sit et plus quam sex latera habeat), diametrus mundi minor erit diametro terrae decies millies sumpta. itaque demonstratum est, diametrum mundi minorem esse diametro terrae decies millies sumpta. diametrum autem mundi minus quam stadia 10000000000 longam esse, inde adparet.

[3] nam quoniam suppositum est, perimetrum terrae non plus quam 3000000 stadia longam esse [hypoth. 4], et perimetrus terrae maior est quam triplo maior diametro, quam cuisuis circuli ambitus maior est quam triplo maior diametro [*κύκλ. μετϱ.* 3], adparet, diametrum terrae minus quam 1000000 stadia longam esse. iam quoniam diametrus mundi minor est diametro terrae decies millies sumpta, adparet, diametrum mundi minus quam 10000000000 stadia longam esse.

[4] de magnitudinibus igitur et distantiis haec suppono, de arena autem haecce: si ex arena magnitudo colligatur non maior semine papaueris, numerum arenae non maiorem esse quam 10000, et diametrum seminis papaueris non minorem esse quadragesima parte digiti. hoc autem suppono re hoc modo examinata: in regula laeui semina papaueris in eadem linea recta posita sunt, ita ut inter se tangerent, et uiginti quinque semina spatium maius longitudine digitali expleuerunt. diametrum igitur seminis papaueris minorem ponens eam quadragesimam fere parte digiti nec minorem esse suppono, propositum etiam, quod ad hanc rem pertinet, quam certissime demonstari cupiens.

Liber III [1] Haec sunt igitur, quae suppono. utile autem esse existimo, denominationem numerorum exponi, ut ceterum quoque qui in librum ad Zeuxippum missum non inciderunt, ne haereant, quod nihil de ea hoc in libro dictum sit.

---

17 quam sex latera habeat)] (14 - C) Nam perimetrus hexagoni triplo maior est diametro (Eucl. IV, 5, *πόϱισμ.*), et quo plura sunt latera, eo maiores sunt perimetri.

36–37 quam certissime demonstari cupiens] (15 - C) Cfr. Kästner: gesch. d. Mathem. II p. 746.

[2] accidit igitur, ut nomina numerorum ad 10000 nobis tradita sint, et super 10000 satis ea intellegimus myriades numerantes usque ad 100000000. hi igitur numeri usque ad 100000000 primi uocentur. sed decem millia myriadum primorum numerorum unitas uocetur secundorum numerorum, et numerentur secundorum numerorum unitates et ex unitatibus decades et hecatontades et chiliades et myriades ad decen millia myriadum. rursus autem etiam decem millia myriadum secundorum numerorum unitas uocetur tertiorum numerorum, et numerentur tertiorum numerorum unitates et ab unitatibus decades et hecatontades et chiliades et myriades ad decem millia myriadum.

[3] et eodem modo etiam tertiorum numerorum decem millia myriadum unitas uocetur quartorum numerum, et quartorum numerum decem millia myriadum unitas uocetur quintorum numerorum, et semper hoc modo procedentes numeri nominentur usque ad decem millia myriadum numerorum centies millies millesimorum. et satis etiam est, numeros hunc ad finem cognosci.

[4] sed licet etiam ultra progredi. nam numeri, quos adhuc commemorauimus, primae periodi numeri uocentur et ultimus numerus primae periodi unitas uocetur primorum numerorum secundae periodi. rursus autem decem millia myriadum primorum numerorum secundae periodi unitas uocetur secundorum numerorum secundae periodi. et eodem modo etiam horum ultimus unitas uocetur tertiorum numerorum secundae periodi, et numeri semper hoc modo procedentes periodi secundae nominentur usque ad decem millia myriadum numerorum centies millies millesimorum. rursus autem ultimus numerus secundae periodi unitas uocetur primorum numerorum tertiae periodi, et semper hoc modo procedant usque ad decem millia myriadum numerorum centies millesimorum periodi centies millies millesimae.

[5] his autem ita denominatis, si numeri aliquot dati sunt ab unitate in eadem proportione, et numerus unitatis proximus decas est, octo eorum primi cum unitate ex numeris primis, qui uocantur, erunt, octo autem eos proxime sequentes ex secundis, et ceteri eodem modo ex numeris erunt eodem numero denominatis, qui distantiam octadis numerorum a prima octade indicat. primae igitur octadis numerorum octauus numerus est mille myriades, secundae autem octadis primus, quoniam aequalis est praecedenti decies

21 sed licet etiam ultra progredi] (16 - C) Nel testo dell'Heiberg esiste discordanza circa l'inizio del capitolo quarto nel testo greco e in quello latino. Il latino inizia infatti con queste parole, mentre le analoghe greche (ἔξεστι δὲ καὶ ἐπὶ πλέον προάγειν) compaiono in fine del capitolo terzo. Si è conservato il diverso *incipit* per entrambi i testi.

31 centies millies millesimae] (17 - C) Conspectus horum numerorum systematis u. Quaest. Arch. p. 59; Nizze p. 218; Nesselmann: Algebra d. Griechen p. 122 sq. ultimus est $10^{8\times10^{16}}$.

sumpto, decem millia myriadum erunt. haec autem unitas est secondorum numerorum. et octauus numerus secundae octadis mille myriades sunt secondorum numerorum et porro etiam tertiae octadis primus numerus, quoniam aequalis est praecedenti decies sumpto, decem millia myriadum erunt secondorum numerorum. et manifestum est, quotlibet octades ita fore, ut dictum est.

[6] uerum hoc quoque utile est cognitu. si ex numeris ab unitate in eadem proportione positis, aliqui inter se multiplicantur eorum, qui in eadem proportione sunt, etiam productum in eadem erit proportione a maiore multiplicatorum tot numeros distans, quot minor multiplicatorum ab unitate distat in proportione, ab unitate uero distabit uno pauciores, quam quantus numerus est utrorumque, quos numeri inter se multiplicati ab unitate distant,

[7] sint enim numeri aliquot Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, Λ ab unitate in eadem proportione positi, et unitas sir Α. et multiplicentur Δ, Θ, et productum sit Χ. sumatur igitur ex proportione Α ab Θ tot numeros distans, quot Δ ab unitate distat. demonstrandum, esse $\mathrm{X} = \Lambda$. iam quoniam inter numeros inter se proportionales Δ ab Α tot loca abest, quot Λ ab Θ, erit igitur:

$$\Delta : \mathrm{A} = \Lambda : \Theta.$$

sed $\Delta = \Delta \times \mathrm{A}$. quare $\Delta = \Delta \times \Theta$. quare $\Lambda = \mathrm{X}$.

[8] adparet igitur, productum et ex eadem proportione esse et a maiore numerorum inter se multiplicatorum tot loca abesse, quot minor ab unitate absit. manifestum est autem, productum etiam ab unitate uno pauciora loca abesse, quam quantus est numerus utrorumque locorum, quae ab unitate absunt Δ, Θ. nam Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ tot sunt, quot Θ ab unitate abest, et Ι, Κ, Λ uno pauciores, quam quot Δ ab unitate abest: nam adsumpto Θ totidem sunt.

---

65 totidem sunt] (18 - C) De hac propositionibus cfr. Quaest. Arch. p. 58. nos sic idem demonstraremus: sit series

$$\overset{1}{1}\,,\ \overset{2}{a^1}\,,\ \overset{3}{a^2}\,,\dots\quad \overset{n}{a^{n-1}},$$

$$\overset{n+1}{a^n}\ \dots\ \overset{m+1}{a^m}\,,\ \overset{m+2}{a^{m+1}}\,,\dots\ \overset{m+n+1}{a^{m+n}}\ ,$$

itaque $a^n a^m = a^{m+n}$, quod ab a^m abest loca $(n+1)$, ab unitate uero $m+n+1 = (m+1)+(n+1) \div 1$.

Mi è stato fatto notare che la serie proposta dall'Heiberg è trascritta più correttamente in notazione moderna nella forma:

. . . nos sic idem demonstraremus: sit series

$$S = s_1, s_2, \dots, s_{i+1}, \dots, s_{n+m+1} \qquad \text{ubi } s_{i+1} = a^i, \forall i \geq 0.$$

itaque. . . Ringrazio l'amico C. Beccari che si è dato carico di comporre questa precisazione.

Liber IV [1] His autem partim suppositis, partim demonstratis, propositum demonstrabitur. nam quoniam suppositum est, diametrum seminis papaueris non minorem esse quam partem quadragesimam digiti [II, 4], adparet, sphaeram diametrum digitalem habentem maiorem non esse, quam ut 64000 seminum papaueris capiat. hoc enim numero multiplex est quam sphaera diametrum habens partem quadragesimam digiti. nam demonstratum est, sphaeras triplicem rationem habere inter se, quam diametri habeant [Eucl. XII, 18].

[2] quoniam autem hoc quoque suppositum est, numerum areane magnitudinem habentis magnitudini seminis papaueris aequalem maiorem non esse quam 10000 [II, 4], adparet, si sphaera diametrum habens digitalem arena compleatur, numerum arenae maiorem non fore quam 640000000. hic autem est sex unitates secondorum numerorum, et quattuor millia myriadum primorum. quare minor est quam decem unitates secondorum numerorum. sphaera autem diametrum habens centum digitos longam centum myriadibus multiplex est quam sphaera diametrum digitalem habens, quia sphaera inter se triplicem rationem habent quam diametri [Eucl. XII, 18]. si igitur ex areana tanta sphaera efficitur, quanta est sphaera diametrum habens centum digitos longam, adparet, numerum arenae minorem fore numero multiplicatis decem unitatibus secondorum numerorum et centum myriadibus orto.

[3] et quoniam decem unitates secondorum numerorum decimus ab unitate numerus est in proportione terminorum per decem crescentium, et centum myriades septimus est ab unitate in eadem proportione, adparet, productum fore sextum decimum ab unitate in eadem proportione, demonstratum est enim, id uno pauciora loca ab unitate abesse, quam quantus est numerus utrorumque locorum, quae numeri inter se multiplicati ab unitate absint [III, 6]. horum autem sedecim primi octo cum unitate ii sunt, qui primi uocantur, octo sequentes ii, qui secundi uocantur, et ultimus eorum mille myriades sunt secondorum numerorum. manifestum est igitur, multitudinem arenae magnitudine habentis aequalem sphaerae diametrum centum digitos longam habenti minorem esse quam mille myriades secundorum numerorum.

[4] rursus autem etiam sphaera diametrum habens decem millia digitorum longam centum myriadibus multiplex est quam sphaera diametrum habens centum digitos longam. si igitur ex arena tanta sphaera efficitur, quanta est sphaera diametrum decem millia digitorum longam habens, adparet, numerum areane minorem fore numero multiplicatis mille myriadibus secondorum numerorum et centum myriadibus orto. sed quoniam mille myriades secondorum numerorum sextus decimus ab unitate numerus est in proportione, et centum myriades septimus est ab unitate in eadem proportione, adparet, productum uicesimum secundum ab unitate fore in eadem proportione.

[5] horum autem uiginti duorum primi octo cum unitate ii sunt, qui primi

uocantur, octo autem sequentes ii, qui secondi uocantur, reliqui autem sex ex iis, qui tertii uocantur; et ultimus eorum est centum millia tertiorum numerorum. manifestum est igitur, multitudinem arenae magnitudinem habentis aequalem sphaerae diametrum habenti decem millia digitorum longam minorem esse quam centum millia tertiorum numerorum. et quoniam sphaera diametrum habens stadium longam minor est sphaera diametrum habenti decem millia digitorum longam, adparet, etiam multitudinem arenae magnitudinem habentis aequalem sphaerae diametrum habenti stadium longam minorem esse quam centum millia tertiorum numerorum. rursus autem sphaera diametrum centum stadia longam habens centum myriadibus multiplex est quam sphaera diametrum stadium longam habens. si igitur ex areana tanta sphaera colligitur, quanta est sphaera diametrum centum stadia longam habens, adparet, mumerum arenae minorem fore numero decem myriadibus tertiorum numerorum et centum myriadibus multiplicatis orto. et quoniam decem myriades tertiorum numerorum uicesimus secundus ab unitate numerus est in proportione, et centum myriades septimus est ab unitate in eadem proportione, adparet, productum fore duodetricesimum ab unitate in eadem proportione. horum autem uiginti octo primi octo cum unitate ii sunt, qui primi uocantur, octo autem sequentes ii, qui secundi vocantur, et octo deinde sequentes ii, qui tertii uocantur, reliqui autem quattuor ex iis, qui quarti uocantur, et ultimus eorum mille unitates sunt quartorum numerorum. manifestum est, igitur, multitudinem arenae magnitudinem habenti aequalem sphaerae diametrum habenti centum stadia longam minorem esse quam mille unitates quartorum numerorum.

[7] rursus autem sphaera diametrum decem millia stadiorum longam habens centum myriadibus multiplex est quam sphaera diametrum centum stadia longam habens. si igitur ex areana tanta sphaera efficitur, quanta est sphaera diametrum decem millia stadiorum longam habens, adparet, numerum arenae minorem fore numero mille unitatibus quartorum numerorum et centum myriadibus multiplicatis orto. quoniam autem mille unitates quartorum numerorum duodetricesimus est ab unitate numerus in proportione, et centum myriades septimus ab unitate in eadem proportione, adparet, productum fore tricesimum quartum ab unitate in eadem proportione. horum autem triginta quattuor primi octo cum unitate ii sunt, qui primi uocantur, octo sequentes ii, qui secundi, octo deinde sequentes ii, qui tertii, octo deinde sequentes ii, qui quarti uocantur, et reliqui duo ex iis erunt, qui quinti uocantur, et ultimus eorum est decem unitates quintorum numerorum. adparet igitur, multitudinem arenae magnitudinem habentis aequalem sphaerae diametrum

47–48 sphaera diametrum habenti decem millia digitorum longam] (19 - C) Heron. defin. 131, τὸ στάδιον ἕξει… δακτύλους ͵θχʹ (9600).

habenti decem millia stadorum longam minorem fore quam decem unitates quintorum numerorum.

[8] rursus autem sphaera diametrum centum myriades stadiorum longam habens centum myriadibus multiplex est quam sphaera diametrum habens decem millia stadiorum longam. si igitur ex areana tanta sphaera efficitur, quanta est sphaera diametrum centum myriades stadiorum longam habens, adparet, numerus arenae minorem fore numero multiplicatis decem unitatibus quintorum numerorum et centum myriadibus orto, et quoniam decem unitates quintorum numerorum tricesimus quartus est ab unitate numerus in proportione, et centum myriades septimus ab unitate in eadem proportione, adparet, productum fore quadragesimum ab unitate in eadem proportione, horum autem quadraginta primi octo cum unitate ii sunt, qui primi uocantur, octo sequentes ii, qui secondi, octo deinde sequentes ii, qui tertii, octo deinde sequentes ii, qui quarti, postremi octo ii, qui quinti uocantur, et ultimus eorum est mille myriades quintorum numerorum. manifestum est igitur, numerum arenae magnitudinem habentis aequalem sphaerae diametrum habenti centum myriades stadiorum longam minorem esse quam mille myriades quintorum numerorum,

[9] sphaera autem diametrum habens decem millia myriadum stadiorum longam centum myriadibus multiplex est quam sphaera diametrum habens centum myriades stadiorum longam. si igitur ex arena tanta sphaera efficitur quanta est sphaera diametrum habens decem millia myriadum stadiorum longam, manifestum est, numerum areanae minorem fore numero multiplicatis mille myriadibus quintorum numerorum et centum myriadibus orto. quoniam autem mille myriades quintorum numerorum quadragesimus ab unitate numero est in proportione, et centum myriades septimus ab unitate in eadem proportione, adparet, productum fore quadragesimum sextum ab unitate. horum autem quadraginta sex primi octo cum unitate ii sunt, qui primi uocantur, octo sequentes ii, qui secundi, octo autem deinde sequentes ii, qui tertii, octo autem tertios sequentes ii, qui quarti, octo autem quartos sequentes ii, qui quinti uocantur, sex autem reliqui ex iis sunt, qui sexti uocantur, et ultimus eorum est decem myriades sextorum numerorum. manifestum est igitur, mumerum arenae magnitudinem habentis aequalem sphaerae diametrum habenti decem millia myriadum stadiorum longam minorem esse quam decem myriades sextorum numerorum.

[10] sphaera autem diametrum habens decies centena millia myriadum stadiorum longam centum myriadibus multiplex est quam sphaera diametrum habens decem millia myriadum stadiorum longam. si igitur ex arena tanta sphaera efficitur quanta est sphaera diametrum habens decies centena millia myriadum stadiorum longam, manifestum est, numerum arenae minorem fore numero multiplicatis decem myriadibus sextorum numerorum et centum

myriadibus orto. quoniam autem decem myriades sextorum numerorum quadragesimus est ab unitate numerus in proportione, et centum myriades septimus est ab unitate in eadem proportione, adparet, productum fore quinquagesimum secundum ab unitate in eadem proportione. horum autem quinquagintaduorum primi quadraginta octo cum unitate ii sunt, qui primi, secundi, tertii, quarti, quinti, sexti uocantur, reliqui autem quattuor ex iis sunt, qui septimi uocantur, et ultimus eorum est mille unitates septimorum numerorum. manifestum est igitur, numerum arenae magnitudinem habentis aequalem sphaerae diametrum habenti decies centena millia myriadum stadiorum longam minorem esse quam mille unitates septimorum numerorum.

[11] iam quoniam demonstratum est, diametrum mundi minus quam decies centena millia myriadum stadiorum longam esse [II, 1], adparet, etiam numerorum arenae magnitudinem habentis aequalem mundo minorem esse quam mille unitates septimorum numerorum. itaque demonstratum est, numerum arenae magnitudinem habentis aequalem mundo, qualis a plerisque astrologis fingatur, minorem esse quam mille unitates septimorum numerorum. restat autem, ut demonstremus, etiam numerum arenae magnitudinem habentis aequalem tali sphaerae, qualem Aristarchus stellarum fixarum sphaeram esse supponat, minorem esse quam mille myriades octauorum numerorum.

[12] nam quoniam suppositum est, terram ad mundum, qualis uulgo a nobis fingatur, eam rationem habere, quam idem ille mundus habeat ad sphaeram stellarum fixarum, quam Aristarchus supponat [I, 6], et diametri sphaerarum eandem inter se rationem habent [Eucl. XII, 18], et demonstratum est, diametrum mundi minorem esse diametro terrae decies millies sumpta [II, 2], adparet, etiam diametrum sphaerae stellarum fixarum minorem esse diametro mundi decies millies sumpta. quoniam autem sphaerae triplicem inter se rationem habent, quam diametri [Eucl. XII, 18], manifestum est, sphaeram stellarum fixarum, quam Aristarchus supponat, minorem esse mundis 1000000000000.

[13] et demonstratum est, numerum arenae magnitudinem habentis mundo aequalem minorem esse quam mille unitates septimorum numerorum [§ 11], adparet igitur, si ex arena tanta sphaera efficiatur, quantam Aristarchus supponat sphaeram stellarum fixarum esse, numerum arenae minorem fore numero multiplicatis mille unitatibus [septimorum numerorum] et 1000000000000 orto. quoniam autem mille unitates septimorum [numerorum] quinquagesimus secundus est ab unitate numerus in proportione, et 1000000000000 tertius decimus est ab unitate in eadem proportione, adparet, productum fore sexagesimum quartum ab unitate in eadem proportione numerum. is autem octauus est numerorum octauorum, qui est mille myriades numerorum octauorum. manifestum est igitur, numerum arenae magnitudinem habentis

aequalem sphaerae stellarum fixarum, quam supponat Aristarchus, minorem esse quam mille myriades octauorum numerorum.

[14] haec autem, rex Gelo, uulgo hominum mathematicis imperito incredibilia uisum iri puto, peritus uero, qui distantias et magnitudines terrae et solis et lunae et totius mundi cognouerint, credibilia propter demonstrationem fore quare putaui, tibi quoque conuenire haec cognoscere.